

几何學



高中複習叢書

幾何學

榮方舟編

商務印書館發行

## 高中複習叢書編輯大意

一、本叢書係根據最近教育部頒佈之高級中學課程標準，及本館高中復興教科書分科編輯而成。

二、本叢書編著綱要，表解與圖解並用，務使讀者對於每一科的基本知識，有具體的了解。

三、本叢書搜集近年來全國各省市高中會考試題，按題作答，分析清楚，更可幫助讀者對升學會考作相當的準備。

四、本叢書除參考各教科書編纂外，更於東西文參考書中搜求新穎的解題方法，故益完備。

五、本叢書爲供讀者需要，匆促出版，內容或有忽略脫漏之處，如蒙讀者來函更正，尤所歡迎。

## 平 面 之 部

	頁
1. 基本定理彙集.....	5
2. 等線份及等角的證例一.....	17
3. 平行線及垂直線的證例.....	24
4. 共線共點共圓的證例.....	33
5. 等線份及等角的證例二.....	37
6. 不等量的證例.....	45
7. 面積的證例.....	48
8. 比例量及等矩形的證例.....	57
9. 等線份及等角的證例三.....	66
10. 關於一定的證例.....	75
11. 最大最小問題證例.....	85
12. 其他各種雜題證例.....	91
13. 軌跡證例.....	98
14. 基本作圖題彙集.....	114
15. 作圖題解法雜例.....	115

## 立 體 之 部

1. 基本定理彙集.....	156
----------------	-----

2. 雜題證例 .....159
3. 基本計算公式彙集 .....172
4. 計算題雜例 .....174

幾何學各種命題，要不出乎以上數類，而無論何類的證法或解法，都以基本定理做根據。職是之故，本書先將基本定理彙集俾學者首先將基本定理複閱一過，然後循序分類練習各種命題的證法和解法，庶幾可得事半功倍之效。平面部份命題中以等線份等角一類為最多，故本書關於此一類共分三節。第一節較易，大多用直線形定理證明。高中學生稍有根柢者，或已習知。第二節多數須引用圓的定理。第三節最難亦為最要。其證法須引用所有各種定理。蓋本書自面積比例以下的諸題，都須觀察題中性質，隨機應變使假設與終決接近。故本書下半部，對於幾何學較有根柢之高中學生也很有複習的價值。

作圖題解法，注重解析。若但有作法而不先有解析，則不知作法的來源，不知此作法的從何想起，於學者裨益殊鮮。故本書往往有一題數解者，

---

因本書解題，本不重在個別問題的解決，而重在俾學者熟悉解題的路徑，定理的應用；務使學者能聞一以知十，舉一而反三也。

## 高中複習叢書

# 幾何學

### 引 言

幾何學是算學中最不易著手的東西，是最難應付裕如的東西。因為他各個命題，有各個特殊的證法或解法，沒有一定的規律可以引用來解決一切的。隨便那一位大算學家，大幾何學家，他不能誇口說“我能解決一切的幾何命題，”幾何命題的證法和解法，真是千變萬化，複雜極了。所以幾何學實有複習的必要。可是幾何學的複習也很難著手。各種命題的證法和解法，既沒有一定的規律可以歸納起來，若是漫無統系的隨便選擇些命題，各個的給以證法或解法，不能得舉一反三之效，那又有什麼用處呢？本書有鑒於此，爰將各種命題分為類別，擇要加以詳細證法和解法。茲列舉各類如下：



## 平 面 之 部

	頁
1. 基本定理彙集.....	5
2. 等線份及等角的證例一.....	17
3. 平行線及垂直線的證例.....	24
4. 共線共點共圓的證例.....	33
5. 等線份及等角的證例二.....	37
6. 不等量的證例.....	45
7. 面積的證例.....	48
8. 比例量及等矩形的證例.....	57
9. 等線份及等角的證例三.....	66
10. 關於一定的證例.....	75
11. 最大最小問題證例.....	85
12. 其他各種雜題證例.....	91
13. 軌跡證例.....	98
14. 基本作圖題彙集.....	114
15. 作圖題解法雜例.....	115

## 立 體 之 部

1. 基本定理彙集.....	156
----------------	-----

2. 雜題證例 .....159
3. 基本計算公式彙集 .....172
4. 計算題雜例 .....174

幾何學各種命題，要不出乎以上數類，而無論何類的證法或解法，都以基本定理做根據。職是之故，本書先將基本定理彙集俾學者首先將基本定理複閱一過，然後循序分類練習各種命題的證法和解法，庶幾可得事半功倍之效。平面部份命題中以等線份等角一類為最多，故本書關於此一類共分三節。第一節較易，大多用直線形定理證明。高中學生稍有根柢者，或已習知。第二節多數須引用圓的定理。第三節最難亦為最要。其證法須引用所有各種定理。蓋本書自面積比例以下的諸題，都須觀察題中性質，隨機應變使假設與終決接近。故本書下半部，對於幾何學較有根柢之高中學生也很有複習的價值。

作圖題解法，注重解析。若但有作法而不先有解析，則不知作法的來源，不知此作法的從何想起，於學者裨益殊鮮。故本書往往有一題數解者，

---

因本書解題，本不重在個別問題的解決，而重在俾學者熟悉解題的路徑，定理的應用；務使學者能聞一以知十，舉一而反三也。

# 平面之部

## 1. 基本定理彙集

**定理 1.** 凡直線角都相等.

**系 1.** 凡直角都相等.

**系 2.** 等角的餘角相等.

**系 3.** 等角的補角相等.

**定理 2.** 相隣兩角的外邊成一直線,則這兩角的和是二直角.

**定理 3.** 相鄰兩角的和是二直角,則這兩角的外邊成一直線.

**定理 4.** 兩直線相交所成的對頂角相等.

**定理 5.** 兩直線爲一直線所截,若所得一雙內錯角(或同位角)相等,則這兩直線平行.

**系.** 兩直線爲一直線所截,若所得一雙同旁內角互爲補角,則這兩直線平行.

**定理 6.** 兩平行線爲一直線所截,則所得的各雙內錯角相等;各雙同位角也相等;各雙同旁內角互爲補角.

**定理 7.** 兩直線各與其他一直線平行,則這兩直線互相平行.

**定理 8.** 兩三角形中,第一三角形的兩邊和夾角與第二三角形的兩邊和夾角對對相等,則這兩三角形是全等形.

**定理 9.** 兩三角形中,第一三角形的兩角及其間的一邊與第二三角形的兩角及其間的一邊對對相等,則這兩三角形是全等形.

**定理 10.** 二等邊三角形的底角相等.

系. 三角形的三邊相等,則三角相等.

**定理 11.** 三角形的兩角相等,則這三角形是二等邊三角形.

系. 三角形的三角相等,則三邊相等.

**定理 12.** 兩三角形中,第一三角形的三邊與第二三角形的三邊對對相等,則這兩三角形是全等形.

**定理 13.** 三角形的外角等於他的兩個內對角之和.

**系 1.** 三角形三內角之和等於二直角.

**系 2.** 三角形的一角是直角,則其他兩角互爲餘角.

**系 3.** 兩三角形中,有兩雙角對對相等,則他們的第三雙角也相等

**系 4.** 兩三角形中,有兩雙角對對相等,又有一雙等角的對邊亦相等,則這兩三角形是全等形.

**定理 14.** 兩個直角三角形的一雙斜邊及一雙直角邊各相等,則這兩個直角三角形是全等形

**定理 15.** 三角形兩邊不相等,則大邊的對角大於小邊的對角.

**定理 16.** 三角形兩角不相等,則大角的對邊大於小角的對邊.

**定理 17.** 兩三角形的兩雙邊對對相等,而其夾角不等,則他們的第三邊也不等;夾角大的對邊大

**定理 18.** 兩三角形的兩雙邊對對相等,而第三邊不等,則兩雙等邊的夾角也不等;第三邊大的對角大.

**定理 19.** 從直線外一點至此直線所引諸線份中,垂線是最小.

**定理 20.** 凸多角形諸內角之和等於二直角的邊數倍數減去四直角.

**定理 21.** 凸多角形各邊順次延長所得各外角之和等於四直角.

**定理 22.** 平行四邊形的對邊相等,對角相等,對角線互相等分.

**定理 23.** 一個四邊形的兩雙對邊各相等,或兩雙對角各相等,或一雙對邊平行且相等,則這四邊形是平行四邊形.

**定理 24.** 三角形一邊的平行線若過第二邊的中點,則也過第三邊的中點.

**定理 25.** 三角形兩邊中點所聯線份平行於第三邊且等於第三邊之半.

---

**定理 26.** 同圓或等圓的半徑相等;直徑相等.

**定理 27.** 同圓或等圓中,等中心角,對等弧,對等弦;等弧對等中心角,對等弦 等弦對等中心角,對等弧.

**定理 28.** 同圓或等圓中,大中心角對大弧,對大弦;大弧對大中心角,對大弦;大弦對大中心角,對大弧.(弧指劣弧而說,角指劣角而說)

**定理 29.** 圓的中心與弦的中點的聯線垂直於此弦.

**定理 30.** 與弦垂直的直徑過此弦的中點,並過此弦所張弧的中點.

**定理 31.** 弦的垂直等分線過圓的中心.

**定理 32.** 同圓或等圓中,等弦與中心等距.

**定理 33.** 同圓或等圓中,與中心距離相等的弦相等.

**定理 34.** 同圓或等圓中,大弦與中心距離近.

**定理 35.** 同圓或等圓中,與中心距離近的弦較大.

**定理 36.** 立於同弧上的圓周角等於中心角的半.



**定理 37.** 同弧或等弧上的圓周角相等.

系. 同弓形角相等.

**定理 38.** 弓形是半圓,則他的弓形角是直角;弓形大於半圓,則他的弓形角是銳角;弓形小於半圓,則他的弓形角是鈍角.

**定理 39.** 弓形角是直角,則此弓形是半圓;弓形角是銳角,則此弓形大於半圓;弓形角是鈍角,則此弓形小於半圓.

**定理 40.** 圓內接四邊形的對角互為補角.

系. 圓內接四邊形的外角等於他的內對角.

**定理 41.**  $C, D$  在  $AB$  的同旁,若  $\angle ACB = \angle ADB$ ,則  $A, B, C, D$  共圓.

**定理 42.**  $C, D$  在  $AB$  的兩旁,若  $\angle ACB + \angle ADB = 2R\angle$  則  $A, B, C, D$  共圓.

系 1. 四邊形的對角互為補角,則這四邊形內接於圓.

系 2. 四邊形的外角等於他的內對角,則這四邊形內接於圓.

**定理 43.** 從圓周上一點所作過此點的半徑的

垂線是圓的切線。

系 1. 圓中心與切點的聯線垂直於切線。

系 2. 從中心所作切線的垂線必過切點。

系 3. 從切點所作切線的垂線必過中心。

定理 44. 從圓外一點所作圓的兩切線相等。

定理 45. 切線與過切點的弦所夾的角等於此角內所含弧上的圓周角。

定理 46. 相交兩圓的公共弦垂直於中心線，且為中心線所等分。

定理 47. 相切兩圓的中心線必過切點。

定理 48. 相切兩圓的公切線垂直於中心線。

---

定理 49. 同底上在兩平行線間的平行四邊形等積。

系 1. 等底等高的平行四邊形等積。

系 2. 等底平行四邊形的高不等，則他們的面積也不等；高大的面積大。等高平行四邊形的底不等，則他們的面積也不等；底大的面積大。

系 3. 等積等高的平行四邊形等底。

**系 4.** 等積等底的平行四邊形等高.

**定理 50.** 三角形的面積等於與此三角形等高  
等高平行四邊形的半.

**系 1.** 等底等高的三角形等積.

**系 2.** 等積等高的三角形等底.

**系 3.** 等積等底的三角形等高.

**系 4.** 兩三角形底等高不等,則他們的面積  
也不等,高大的面積也大;兩三角形高等底不等,  
則他們的面積也不等,底大的面積也大.

**定理 51.** 沿平行四邊形的對角線的兩餘形  
等積.

**定理 52.** 兩線份所包矩形等於一線份及其他  
一線份的諸部份所包諸矩形之和.

**定理 53.** 兩線份和上之正方形等於各線份上  
正方形之和加此兩線份所包矩形之二倍.

**定理 54.** 兩線份差上之正方形等於各線份上  
正方形之和減此兩線份所包矩形之二倍.

**定理 55.** 兩線份上正方形之差等於此兩線份  
之和及此兩線份之差所包之矩形.

**定理 56.** 直角三角形斜邊上之正方形等於其他兩邊上正方形之和。

**定理 57.** 鈍角三角形鈍角對邊上之正方形等於其他兩邊上正方形之和加其他兩邊中一邊與他邊在此邊上正射影所包矩形之二倍。

**定理 58.** 三角形銳角對邊上之正方形等於其他兩邊上正方形之和減去其他兩邊中一邊與他邊在此邊上正射影所包矩形之二倍。

**定理 59.** 三角形兩邊上正方形之和等於其第三邊上的中線上的正方形及其第三邊的一半上的正方形之和之二倍。

**定理 60.** 三角形兩邊上正方形之差等於其第三邊及其第三邊上的中線在此邊上的射影所包矩形之二倍。

**定理 61.** 弦的內分點或外分點所分弦的兩部份所包之矩形等於半徑上正方形及此點與中心所聯線份上正方形之差。

**系 1.** 過圓內一點所作諸弦的兩部份所包矩形都相等。

系 2. 過圓外一點所作諸割線,其全割線,及圓外部份所包矩形都相等.

系 3. 過圓外一點作切線及任意一割線,全割線及圓外部份所包矩形等於切線上之正方形.

**定理 62.** 若  $A, B$  二量之比等於  $m, n$  二數之比, 則  $nA = mB$ . 若  $A$  量的  $n$  倍等於  $B$  量的  $m$  倍, 則  $A : B = m : n$ .

**定理 63.**  $A, B, C, D$  四個同類量, 若  $A : B = C : D$  則  $A : C = B : D$ .

**定理 64.** 等比的逆比相等 (即若  $A : B = C : D$  則  $B : A = D : C$ ).

**定理 65.** 二量同倍量或同分量的比等於此二量的比 (即  $mA : mB = A : B$ ;  $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B = A : B$ ).

**定理 66.**  $A, B, C, D, E, F \dots K, L$  都是同類量, 若  $A : B = C : D = E : F = \dots = K : L$ , 則  $A + C + E + \dots + K$  與  $B + D + F + \dots + L$  的比等於各原比.

**定理 67.** 若  $A : B = C : D$ , 則  $A \pm B : B = C \pm D : D$ ,

又  $A : A \pm B = C : C \pm D$ .

**定理 68.** 若  $A : B = P : Q$ ,  $B : C = Q : R$ , 則  
 $A : C = P : R$ .

**定理 69.** 三角形一邊的平行線把其他兩邊分爲四部份成比例.

**定理 70.** 一直線分三角形的兩邊爲四部份成比例,那麼此直線與第三邊平行.

**定理 71.** 兩三角形中,有兩雙角對對相等,那麼此兩三角形是相似形.

**定理 72.** 兩三角形中,有一雙角相等,夾此角的兩雙邊成比例,那麼此兩三角形是相似形.

**定理 73** 兩三角形的三雙邊對對的比相等,那麼此兩三角形是相似形.

**定理 74** 直角三角形從直角頂點至斜邊所引垂線分原形成兩個相似三角形,且與原形也相似.

**系 1.** 直角三角形的直角邊是斜邊及此邊在斜邊上正射影的比例中項.

**系 2.** 直角三角形斜邊上的高是直角兩邊

在斜邊上的正射影的比例中項。

**定理 75.** 三角形一角的等分線所分對邊爲二部份之比等於夾此角的二邊之比。外角等分線同。

**定理 76.** 過三角形一角頂作一直線內分對邊爲兩部份，其比等於夾此角兩邊之比，那麼此直線是頂角的等分線；外分成等比，那麼是頂角的外等分線。

**定理 77.** 若四線份成比例，那麼兩外項所包矩形等於兩內項所包矩形。

**定理 78.** 兩矩形相等，那麼一矩形的兩邊做外項，他一矩形的兩邊做內項成比例。

**定理 79.** 相似三角形面積之比等於其對應邊上正方形之比。一切相似形同。

**定理 80.** 有一雙角相等的兩三角形(或平行四邊形)面積之比等於夾此角兩邊所包矩形之比。

**定理 81.** 兩三角形(或平行四邊形)面積之比等於其底邊及高所包矩形之比。

**定理 82.** 四邊形兩對角線所包矩形等於其兩

雙對邊所包矩形之和。

**定理 83.** 三角形兩邊所包矩形等於其第三邊上之高及其外接圓直徑所包矩形。

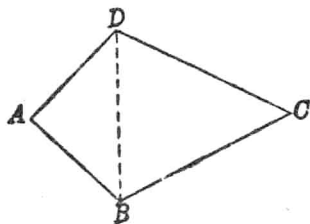
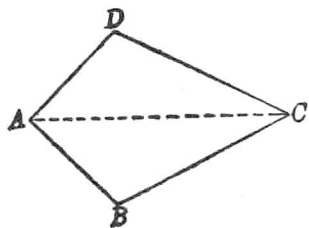
**定理 84.** 從圓外一點至圓作切線及任意一割線，此切線是全割線及此割線的圓外部份的比例中項。

## 2. 等線份及等角的證例一

(1) 四邊形  $ABCD$  中，已知  $AB=AD$ ,  $\angle B=\angle D$ .

求證  $BC=CD$ .

若聯對角線  $AC$ ，要證  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，則  $BC$  就可等於  $CD$ 。但  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ADC$  中， $AB=AD$ ,  $\angle B=\angle D$ ,  $AC$  為公邊，所知的是兩對邊而一雙非等邊所夾之角，不合定理，不能證明。故須另行想法， $BC$  和  $CD$  是兩個





相接線份。凡兩個相接線份要證他相等，可聯結其他兩端成一三角形，證其兩底角相等。故聯  $BD$  觀之，很容易得如下證法。

〔證〕  $\because AB = AD$ , (假設)

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ . (定理 10)

但  $\angle ABC = \angle ADC$ , (假設)

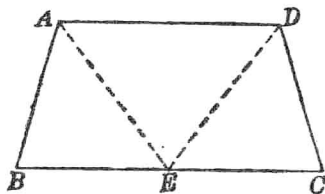
故  $\angle DBC = \angle BDC$ , (等量減等量差相等)

故  $BC = CD$ . (定理 11) Q. E. D.

(2) 四邊形  $ABCD$  中，已知  $AB = CD$ ,  $\angle B = \angle C$ .

求證  $\angle A = \angle D$ .

〔證一〕  $BC$  上取中點  $E$ ，聯  $EA$ ,  $ED$ 。則在  $\triangle ABE$ ,  $\triangle DCE$  中，



$AB = DC$ . (假設),  $\angle B = \angle C$  (假設),

$BE = EC$  ( $E$  是  $BC$  中點). 故  $\triangle ABE \cong \triangle DCE$  (定理 8).

$\therefore \angle BAE = \angle CDE$ ,  $AE = DE$ .

故  $\angle EAD = \angle EDA$  (定理 10)

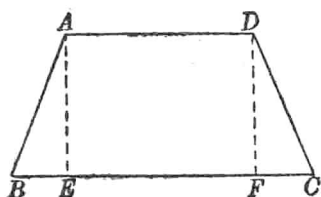
$\therefore \angle BAE + \angle EAD = \angle CDE + \angle EDA$ ,

即  $\angle A = \angle D$ .

Q. E. D.

〔證二〕 從  $A, D$  各作  $BC$  的垂線  $AE, DF$  交  $BC$  於  $E, F$ . 則在  $\triangle ABE, \triangle DCF$  中,

$AB = DC, \angle B = \angle C,$   
 $\angle AEB = \angle DFC$  (直角相等), 故  $\triangle ABE \cong \triangle DCF,$   
 (定理 13 系 4).



$\therefore \angle BAE = \angle CDF, AE = DF.$

但  $AE \parallel DF \therefore AEF D$  是  $\square$  (定理 23).

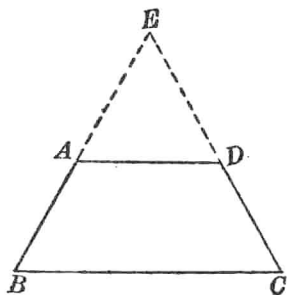
又因  $AE, DF$  都是  $BC$  的垂線,

$\therefore AEF D$  是  $\square. \therefore \angle EAD = \angle FDA = R\angle.$

故  $\angle BAE + \angle EAD = \angle CDF + \angle FDA,$

即  $\angle A = \angle D, \quad Q.E.D.$

〔證三〕 延長  $BA, CD$  交於  $E$ . (若  $BA, CD$  不相交, 則必平行, 那麼因  $BA, CD$  又是相等故  $ABCD$  是平行四邊形 (定理 23).



則  $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D.$  (定理 22).

今  $\angle B = \angle C,$  故  $\angle A = \angle D,$  很顯明了.]

則因  $\angle B = \angle C$ ,  $\therefore EB = EC$  (定理 11).

今  $AB = DC$  (假設),  $\therefore EA = ED$  (等量減等量, 差相等).

$\therefore \angle EAD = \angle EDA$  (定理 10).

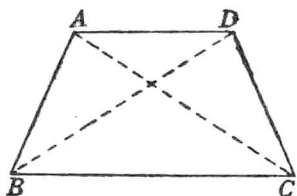
$\therefore \angle BAD = \angle CDA$  (定理 1 系 3). Q. E. D.

[證四] 聯  $AC, BD$  在

$\triangle ABC, \triangle DCB$  中,

$AB = DC, \angle B = \angle C,$

$BC = BC,$



$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$  (定理 8).  $\therefore AC = DB.$

再在  $\triangle ABD, \triangle DCA$  中,

$AB = DC, BD = CA, AD = AD$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCA$  (定理 12).

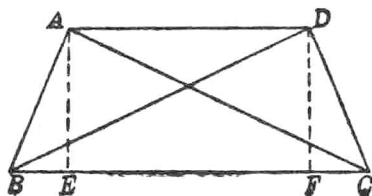
$\therefore \angle A = \angle D.$  Q. E. D.

(3) 梯形的兩個對角線若相等, 那麼這梯形是二等邊梯形.

已知  $AD \parallel BC$  和

$AC = BD.$

求證  $AB = DC.$



〔證一〕 作  $AE \perp BC$ ,  $DF \perp BC$ .

則因  $AD \parallel BC$ , 故  $AEFD$  是矩形.

$$\therefore AE = DF.$$

在  $\triangle AEC$ ,  $\triangle DFB$  中,

$$AE = DF, AC = DB, \angle AEC = \angle DFB = R\angle,$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DFB \text{ (定理 14)}. \therefore EC = BF.$$

$\therefore EC = BF, \therefore BE = CF$ . (等量減等量差相等)

在  $\triangle ABE$ ,  $\triangle DCF$  中,  $AE = DF, BE = CF,$

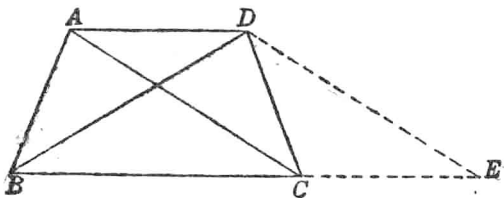
$$\angle AEB = \angle DFC = R\angle,$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DCF \text{ (定理 8)}.$$

$$\therefore AB = DC. \quad \text{Q. E. D.}$$

〔證二〕 延長  $BC$  至  $E$  令  $CE = AD$ . 聯  $DE$ .

則  $ACED$  是  $\square$  (定理 24).  $\therefore DE = AC, DE \parallel AC$ .



$$\therefore DE = AC, \text{ 但 } AC = BD,$$

$$\therefore DE = DB, \therefore \angle DBE = \angle E \text{ (定理 10)}.$$

$\because DE \parallel AC, \therefore \angle ACB = \angle E.$  (定理 6)

$\therefore \angle DBE = \angle ACB.$

在  $\triangle ABC, \triangle DCB$  中,  $AC = DB, BC = BC,$

$\angle ACB = \angle DBC, \therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB.$

$\therefore AB = DC.$

Q. E. D.

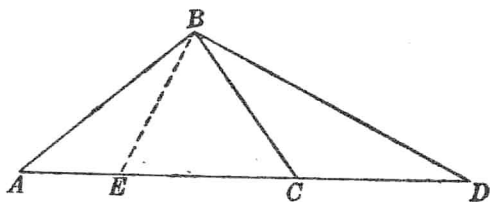
(4) 把任意三角形  $ABC$  的一邊  $AC$  延長至  $D$  令  $CD = CB.$  求證  $\angle ABD = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle A).$

[證] 作  $BE$  交  $AC$  於  $E,$  令  $\angle DBE = R\angle.$

則  $\angle BED + \angle D = R\angle$  (定理 13 系 2).

$\because CD = CB, \therefore \angle CBD = \angle CDB,$

$\therefore \angle CBE = \angle CEB.$



$$\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = \angle ABC - \angle BEC$$

$$= \angle ABC - (\angle ABE + \angle A)$$

$$= \angle ABC - \angle A - \angle ABE$$

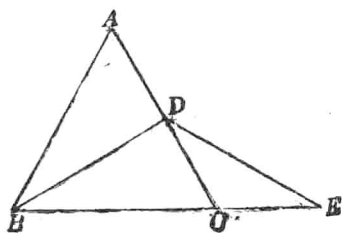
$$\therefore 2\angle ABE = \angle ABC - \angle A.$$

$$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle A).$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle ABD &= \angle EBD + \angle ABE \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle A). \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

(5)  $\triangle ABC$  是正三角形.  $D$  是  $AC$  的中點. 延長  $BC$  至  $E$  令  $CE = CD$ . 聯  $DE$ . 求證  $DE = DB$ .

〔證〕  $\triangle ABC$  是正三角形,  $\therefore AB = BC$ ,  $D$  是  $AC$  的中點, 即  $AD = DC$ . 又  $BD$  是公共邊.



$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC.$$

$$\angle DCB = \angle CDE + \angle CED \quad (\text{定理 13}).$$

但  $CD = CE$ ,  $\therefore \angle CDE = \angle CED$ .

$$\therefore \angle DCB = 2\angle CED.$$

即  $\angle CED = \frac{1}{2} \angle DCB$ .

$\therefore \triangle ABC$  是正三角形,  $\therefore AB = AC$ ,

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$ .  $\therefore \angle CBD = \angle CED$

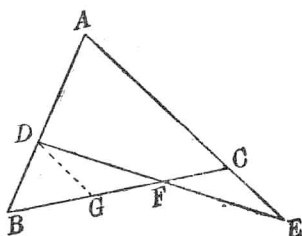
(等量之半必相等)  $\therefore DE = DB$ . (定理 11) Q. E. D.

(6)  $\triangle ABC$  是二等邊三角形,  $BC$  是底邊. 在一

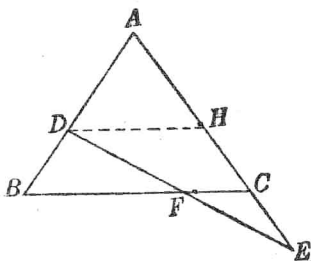
邊  $AB$  上取任意一點  $D$ . 延長其他一邊  $AC$  至  $E$ , 令  $CE = BD$ , 聯  $DE$  交  $BC$  於  $F$ .

求證  $F$  是  $DE$  的中點.

〔證一〕 過  $D$  作  $AE$  的平行線交  $BC$  於  $G$ . 於是想法證  $\triangle DGF \cong \triangle CEF$ .



〔證二〕 過  $D$  作  $BC$  的平行線交  $AE$  於  $H$ . 於是想法證  $HC = CE$ . 因若能證得  $HC = CE$ , 則因  $FC \parallel DH$ , 故  $DF$  亦必等於  $FE$ . 根據定理 24 可以證明了.

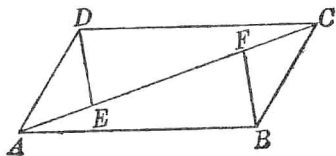


### 3. 平行線及垂直線的證例

(7)  $E, F$  是平行四邊形  $ABCD$  對角線  $AC$  上的兩點, 而  $AE = CF$ .

求證  $DE \parallel BF$ .

要證兩線平行, 只要證得他的一雙內錯角



相等. 故本題只要證得  $\angle DEC$  和  $\angle BFA$  兩角相等, 即可得  $DE \parallel BF$ . 故得證法如下:

〔證〕  $\because ABCD$  是  $\square$ ,  $\therefore DC = AB$ .

$\because DC \parallel AB$ ,  $\therefore \angle DCA = \angle BAC$ .

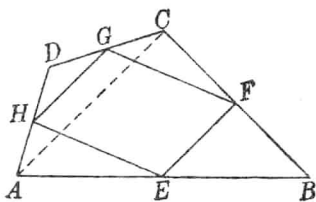
$\because AE = CF$ ,  $\therefore EC = AF$ .

$\therefore \triangle DEC \cong \triangle BFA$  (定理 8)

$\therefore \angle DEC = \angle BFA$ .  $\therefore DE \parallel BF$ . Q. E. D.

(8) 任意四邊形各邊中點順次聯線所成的新四邊形是平行四邊形.

已知  $E, F, G, H$  各為  $AB, BC, CD, DA$  的中點.



求證  $EFGH$  是平行四邊形.

本題要證  $EF \parallel HG$ ,  $EH \parallel FG$ . 然題中內錯角, 同位角等, 都無從觀察. 因  $ABCD$  是任意四邊形故  $\triangle AEH$ ,  $\triangle BFE$ ,  $\triangle CFG$ ,  $\triangle DGH$  諸三角形都無特殊關係. 但已知的是  $E, F, G, H$  為各邊中點, 我們因此就想到一條關於平行線的定理 25. ‘三角形兩邊中點的聯線平行於底’. 因此就得證法



如下：

〔證〕 聯  $AC$ .

在  $\triangle BAC$  中,  $E$  是  $BA$  的中點,

$F$  是  $BC$  的中點,  $\therefore EF \parallel AC$ .

在  $\triangle DAC$  中,  $H$  是  $DA$  的中點,

$G$  是  $DC$  的中點,  $\therefore HG \parallel AC$ .

故  $EF \parallel HG$ .

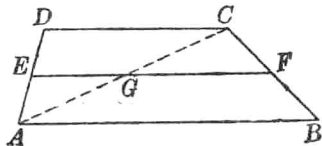
同樣聯  $BD$ , 可證  $EH \parallel FG$ .

$\therefore EFGH$  是平行四邊形.

Q. E. D.

(9) 梯形兩邊中點  
的聯線平行於底.

已知  $ABCD$  是梯形,



即  $DC \parallel AB$ , 又知  $E, F$  各為  $DA, CB$  的中點.

求證  $EF \parallel AB$ .

〔證一〕 聯  $AC$ . 取  $AC$  的中點  $G$ . 聯  $EG, GF$ .

在  $\triangle ACD$  中,  $E, G$  各為  $AD, AC$  的中點,

$\therefore EG \parallel DC$ .

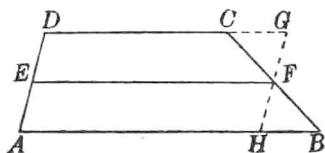
在  $\triangle CAB$  中,  $G, F$  各為  $CA, CB$  的中點,

$\therefore GF \parallel AB$ .

但  $DC \parallel AB$ ,  $\therefore EG, GF$  都與  $AB$  平行.

故  $EGF$  是一直線,  $\therefore EF \parallel AB$ . Q. E. D.

〔證二〕 過  $F$  作  $AD$   
的平行線交  $AB$  於  $H$ ,  
交  $DC$  的延線於  $G$ .  
在  $\triangle CGF, \triangle BHF$  中,



$$CF = FB, \quad \angle CFG = \angle BFH,$$

又因  $DG \parallel AB$ ,  $\therefore \angle GCF = \angle HBF$ ,

$$\therefore \triangle CGF \cong \triangle BHF.$$

故  $GF = FH$ .

$\therefore AGHD$  是平行四邊形,

故  $AD = HG$ . 今  $AE = ED = \frac{1}{2} AD$

$$\text{又 } HF = FG = \frac{1}{2} HG$$

$$\therefore AE = HF$$

又  $AE \parallel HF$ ,  $\therefore AHFE$  是平行四邊形.

$\therefore EF \parallel AB$ . Q. E. D.

(10) 菱形的對角線互相垂直.

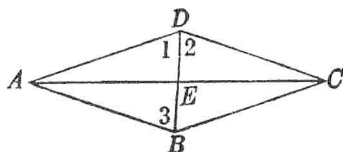
已知  $ABCD$  是菱形, 即  $AB = BC = CD = DA$ .

求證  $DB \perp AC$ .

【證】  $\because AD = AB,$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

$\because DC \parallel AB$  (菱形也是平行四邊形),

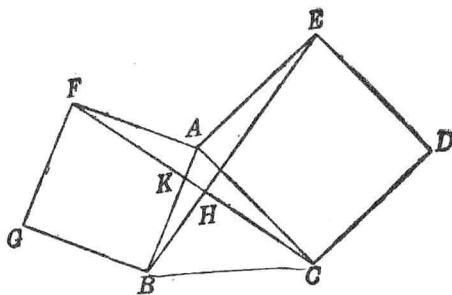


$$\therefore \angle 3 = \angle 2, \therefore \angle 1 = \angle 2.$$

又因  $DA = DC$ ,  $DE$  是公共邊. 故  $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ ,

$$\therefore \angle DEA = \angle DEC = R\angle. \therefore DB \perp AC. \text{ Q. E. D.}$$

(11)  $ABGF$ ,  $ACDE$  是  $\triangle ABC$  的兩邊  $AB$ ,  $AC$  上的兩個正方形. 求證  $BE \perp CF$ .



【證】 在  $\triangle ABE$ ,  $\triangle AFC$  中,

$$AB = AF, AE = AC,$$

$$\angle BAE = \angle FAC (R\angle + \angle BAC).$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AFC.$$

名  $BE, CF$  的交點爲  $H$ ,  $AB, CF$  的交點爲  $K$ .

在  $\triangle AFK, \triangle HBK$  中,

$$\angle AFK = \angle HBK, \angle AKF = \angle BKH,$$

$$\therefore \angle FAK = \angle BHK \text{ (定理 13 系 3)}$$

但  $\angle FAK = R\angle, \therefore \angle BHK = R\angle.$

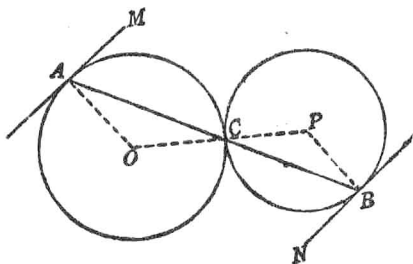
$$\therefore BE \perp CF.$$

Q. E. D.

(12) 兩圓外切於  $C$ . 過  $C$  作一直線交兩圓周於  $A$  及  $B$ . 過  $A, B$  各作圓的切線  $AM, BN$ .

求證  $AM \parallel BN$ .

〔證一〕 聯中心線  $OP$ , 則  $OP$  必過  $C$  點 (定理 47).



聯  $OA, PB$ .

$$\because OA = OC, \therefore \angle OAC = \angle OCA.$$

$$\because PB = PC \therefore \angle PBC = \angle PCB.$$

但  $\angle OCA = \angle PCB, \therefore \angle OAC = \angle PBC,$

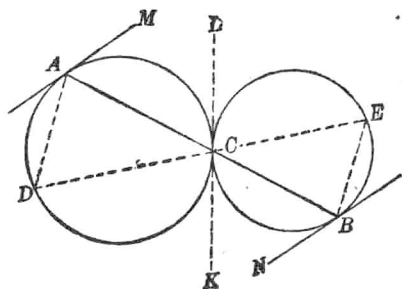
但  $\angle OAM = \angle PBN = R\angle$  (定理 43 系 1),

$$\therefore \angle BAM = \angle ABN \text{ (定理 1 系 2)}$$

$\therefore AM \parallel BN.$

Q. E. D.

(證二) 過  $C$  作  
兩圓的公切線  
 $LK$ . 再作任意一  
割線交兩圓於  
 $D, E$ .



則  $\angle MAB$   
 $= \angle ADC$  (定理 45)  
 $= \angle ACL$  (定理 45)  
 $= \angle BCK$  (定理 4)  
 $= \angle CEB$  (定理 45)  
 $= \angle ABN$  (定理 45).

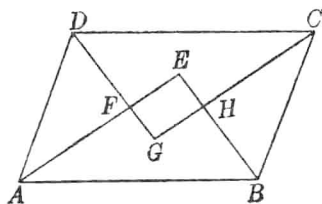
$\therefore AM \parallel BN.$

Q. E. D.

(13) 平行四邊形各角的等分線圍成一矩形.

$ABCD$  是平行四邊形.

$AE, BE, CG, DG$  各為  $\angle A,$   
 $\angle B, \angle C, \angle D$  的等分線.  
 求證  $EFGH$  是矩形.



(證)  $\therefore ABCD$  是平行四邊形.

$\therefore AD \parallel BC, \therefore \angle ADC + \angle BCD = 2R\angle$ , (定理 6).

今  $\angle CDG = \frac{1}{2}\angle ADC, \angle DCG = \frac{1}{2}\angle BCD$

$\therefore \angle CDG + \angle DCG = R\angle$ .

但  $\angle CDG + \angle DCG + \angle DGC = 2R\angle$ , (定理 13 系 1)

$\therefore \angle DGC = R\angle$ .

同樣可證  $\angle CHB, \angle BEA, \angle AFD$  都等於直角.

$\therefore EFGH$  是矩形. Q. E. D.

(14)  $ABCD$  是

圓內接四邊形.

延長他的對邊

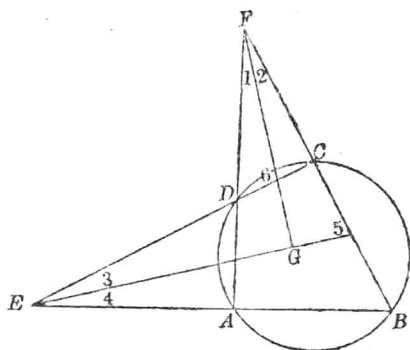
$BA, CD$  交於  $E$ ,

$AD, BC$  交於  $F$ .

$EG, FG$  各為  $\angle E$ ,

$\angle F$  的等分線.

求證  $EG \perp FG$ .



[證一]

$$\angle EDF = \angle 1 + \angle 6$$

$$= \angle 1 + \angle 3 + \angle EGF \quad \left. \vphantom{\angle EDF} \right\} \text{(定理 13)}$$

$$= \angle 2 + \angle 4 + \angle EGF. (\because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4)$$

$$\left. \begin{aligned} \angle EGF &= \angle 2 + \angle 5 \\ &= \angle 2 + \angle 4 + \angle EBF. \end{aligned} \right\} \text{(定理 13)}$$

故  $\angle EDF - \angle EGF = \angle EGF - \angle EBF$

故  $\angle EDF + \angle EBF = 2 \angle EGF.$

但  $\angle EDF + \angle EBF = \text{st} \angle.$  (定理 40)

故  $\angle EGF = R \angle.$

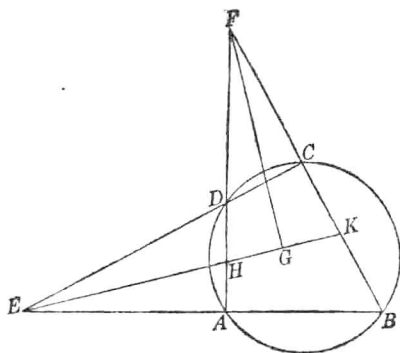
$\therefore EG \perp FG.$  Q. E. D.

[證二] 命  $EG$

與  $FA, FB$  的交  
點各為  $H, K.$

$$\begin{aligned} \angle FHG &= \angle HED \\ &\quad + \angle HDE. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle FKG &= \angle KEB \\ &\quad + \angle KBE. \end{aligned}$$



但因  $\angle HED = \angle KEB,$

$$\angle HDE = \angle KBE \text{ (定理 40 系)}$$

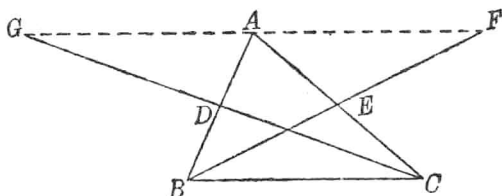
$$\therefore \angle FHG = \angle FKG. \text{ 又因 } \angle HFG = \angle KFG,$$

$$\therefore \angle FGH = \angle FGK. \text{ (定理 13 系 3).}$$

$\therefore FG \perp EG.$  Q. E. D.

4. 共線共點共圓的證例

(15) 延長  $\triangle ABC$  的兩中線  $BE, CD$  各至  $F, G$ , 令



$EF = BE, DG = CD$ . 求證  $G, A, F$  共線.

[證] 聯  $GA, AF$ . 在  $\triangle ADG, \triangle BDC$  中,

$$AD = BD, GD = CD, \angle ADG = \angle BDC,$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle BDC. \text{ 故 } \angle GAD = \angle CBD.$$

同樣可證  $\angle FAE = \angle BCE$ .

$$\text{但因 } \angle CBD + \angle BAC + \angle BCE = 2R\angle.$$

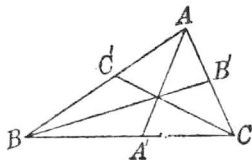
$$\therefore \angle GAD + \angle BAC + \angle FAE = 2R\angle$$

$\therefore GA, AF$  成一直線.

Q. E. D.

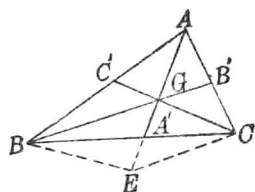
(16) 任意三角形的三個  
中線共點.

$AA', BB', CC'$  是  $\triangle ABC$  的  
中線. 求證  $AA', BB', CC'$  共點.





〔證〕 命  $BB', CC'$  的交點  
為  $G$ . 聯  $AG$  而延長之至  
 $E$ . 令  $GE = AG$ . 聯  $BE, CE$ .  
在  $\triangle ABE$  中,  $AC' = C'B$ ,



$$AG = GE, \therefore C'G \parallel BE.$$

在  $\triangle ACE$  中,  $AB' = B'C, AG = GE \therefore B'G \parallel CE$ .  
故  $BECG$  是平行四邊形. 故  $BC, EG$  互相等分.  
即  $GE$  必過  $BC$  的中點  $A'$ . 故  $AE$  與  $AA'$  重合.  
即  $AA'$  過  $G$  點. 即  $AA', BB', CC'$  共點.  $Q.E.D.$

註. 三角形三中線所共的點,叫做三角形的重心.

(17)  $M$  是  $\widehat{AB}$  的中點. 過  $M$  所作的任意二弦  
 $MC, MD$  交  $AB$  於  $E, F$ . 求證

$C, D, F, E$  共圓.

〔證〕 聯  $AD, BC, CD$ .

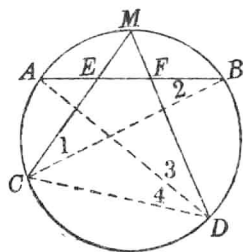
$\therefore \widehat{AM} = \widehat{MB} \therefore \angle 1 = \angle 3$ .

又  $\angle 2, \angle 4$  同在  $\widehat{AC}$  上.

$$\therefore \angle 2 = \angle 4.$$

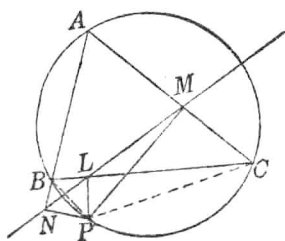
今  $\angle MEF = \angle 1 + \angle 2$ , 而  $\angle FDC = \angle 3 + \angle 4$ .

$\therefore \angle MEF = \angle FDC, \therefore C, D, F, E$  共圓.  $Q.E.D.$



(18) 從三角形外接圓周上任意一點，向三邊各作垂線，此三垂線的三個足共線。

$P$  是  $\triangle ABC$  外接圓周上任意點， $PL \perp BC$ ,  $PM \perp AC$ ,  $PN \perp AB$  求證  $L, M, N$  共線。



〔證〕 聯  $LM, LN, PB, PC$ 。

則因  $PL \perp BC, PN \perp AB$ ,  $\therefore \angle PLB + \angle PNB = 2R\angle$ 。

故  $P, L, B, N$  共圓 故  $\angle PLN = \angle PBN$ 。

又因  $A, B, P, C$  共圓， 故  $\angle PBN = \angle ACP$ 。

又  $PL \perp BC, PM \perp AC$ ,  $\therefore \angle PLC = \angle PMC = R\angle$ 。

故  $P, C, M, L$  共圓， 故  $\angle PCM + \angle PLM = 2R\angle$ 。

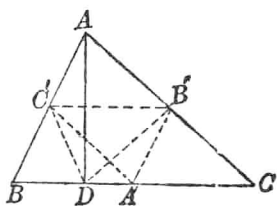
但  $\angle PCM = \angle PLN$ , 故  $\angle PLN + \angle PLM = 2R\angle$ 。

故  $NL, LM$  是一直線 即  $L, M, N$  共線  $Q. E. D.$

註：此  $L, M, N$  所共的線叫做  $P$  點對於  $\triangle ABC$  的西摩松線。

(19) 三角形從頂點至底邊所引垂線的足與三邊中點共圓

$AD \perp BC$ ,  $A' B' C'$  各為



$BC, AC, AB$  的中點。求證  $A', B', C', D$  共圓。

〔證〕 聯  $A'B, B'C', A'C', DB', DC'$ 。

則  $\triangle AB'C' \cong \triangle A'B'C'$  ( $\because A'B' \parallel AB, A'C' \parallel AC$

而  $AC'A'B'$  是  $\square$ )  $\therefore \angle C'AB' = \angle C'A'B'$

又  $\triangle AB'C' \cong \triangle DB'C'$  ( $\because C'B' \parallel BC, \therefore C'B' \perp AD$ )  
 $\therefore \angle C'AB' = \angle C'DB'$  (且過  $AD$  的中點。

$\therefore \angle C'A'B' = \angle C'DB'$ .  $\therefore A', B', C', D$  共圓. Q. E. D.

(20) 任意三角形的三個高共點。

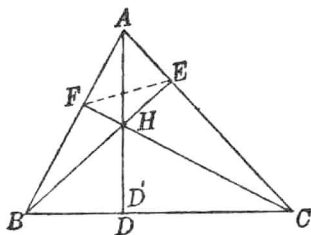
$AD, BE, CF$  是三角形

$ABC$  的三個高，即

$AD \perp BC, BE \perp AC,$

$CF \perp AB$ . 求證  $AD,$

$BE, CF$  共點。



〔證〕 命  $BE, CF$  的交點為  $H$ . 聯  $AH$  而延長之交  $BC$  於  $D'$ . 聯  $FE$ .

$\therefore \angle AFH + \angle AEH = 2R\angle, \therefore A, F, H, E$  共圓。

$\therefore \angle AFE = \angle AHE$ .

$\therefore \angle BFC = \angle BEC = R\angle, \therefore B, C, E, F$  共圓。

$\therefore \angle AFE = \angle BCE$ .

$\therefore \angle AHE = \angle BCE, \therefore H, D', C, E$  共圓.

$\therefore \angle HD'C + \angle HEC = 2R\angle.$

$\because \angle HEC = R\angle, \therefore \angle HD'C = R\angle.$

即  $AD' \perp BC$ , 而與  $AD$  合. 即  $AD$  過  $H$  點.

$\therefore AD, BE, CF$  共點. Q. E. D.

註. 三角形三個高所共之點叫做三角形的垂心.

### 5. 等線份及等角的證例二

(21)  $AB$  切  $\odot O$

於  $A$ ,  $AC$  垂直於  
 $OB$ .  $OB$  交圓周於  
 $D$ . 求證

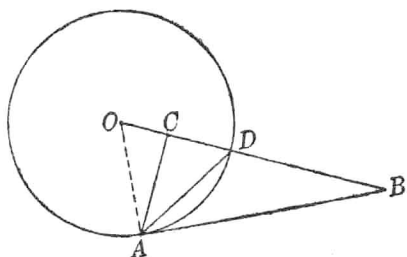
$$\angle BAD = \angle DAC$$

〔證一〕 聯  $OA$ .

因  $AB$  是切線,  $\therefore \angle OAB = R\angle$ , 即  $\angle BAD$  是  $\angle DAO$  的餘角.

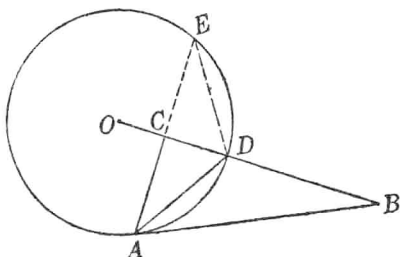
因  $AC \perp OB$ ,  $\therefore \angle CAD + \angle CDA = R\angle$ , 即  $\angle DAC$  是  $\angle ADC$  的餘角.

$$\because OA = OD, \therefore \angle OAD = \angle CDA$$



$$\therefore \angle BAD = \angle DAC. \quad \text{Q. E. D.}$$

【證二】 延長  
AC 交圓周於 E.  
聯 ED.



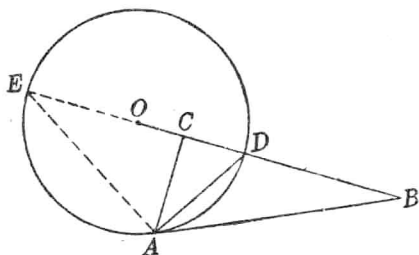
則因  $OD \perp AE$ ,

$$\therefore AD = DE$$

$\therefore \angle AED = \angle DAE$ , 但 AB 是切線,

$$\therefore \angle BAD = \angle AED. \therefore \angle BAD = \angle DAC. \quad \text{Q. E. D.}$$

【證三】 延長  
BO 再交圓周  
於 E. 聯 AE.



$\therefore DE$  是直  
徑, 故  $\angle DAE$  是

直角 即  $\angle DAC$  是  $\angle CAE$  的餘角.  $\because AB$  是切線,  
故  $\angle BAD = \angle AEC$ . 又因  $AC \perp EB$ , 故  $\angle ACE = R\angle$ ,

$\therefore \angle AEC$  是  $\angle CAE$  的餘角.  $\therefore \angle AEC = \angle DAC$ .

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC. \quad \text{Q. E. D.}$$

【證四】 過 D 作 CA 的平行線交 AB 於 E.

$$\because AC \perp OB, \quad \therefore ED \perp OB,$$

而  $ED$  是切線.

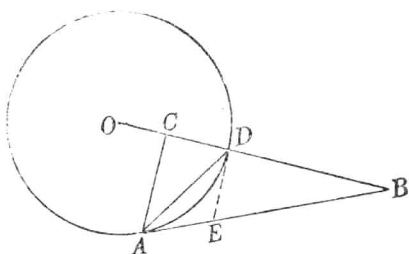
$$\therefore ED = EA,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle EDA.$$

但  $\angle EDA = \angle DAC$

(內錯角),

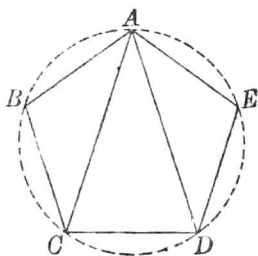
$$\therefore \angle EAD = \angle DAC. \quad \text{Q. E. D.}$$



(22) 過正五角形一角頂  
所作兩對角線分頂角爲三  
等分

$ABCDE$  是正五角形.  $AC$ ,  
 $AD$ , 是過  $A$  的兩對角線.

求證  $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ .



〔證一〕  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$

$$= 5 \times 2R\angle - 4R\angle$$

$$= 6R\angle. \text{ (定理 21)}$$

但  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

$$= \frac{1}{5} \times 6R\angle = \frac{1}{5} \times 6 \times 90^\circ = 108^\circ$$

在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = 108^\circ$ ,  $\therefore AB = BC$ ,

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB = \frac{1}{2} (180 - 108^\circ) = 36^\circ.$$

同理  $\angle EAD = 36^\circ$ .

$$\begin{aligned}\therefore \angle CAD &= \angle A - \angle BAC - \angle EAD \\ &= 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ.\end{aligned}$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CAD = \angle DAE. \quad \text{Q. E. D.}$$

〔證二〕 因  $ABCDE$  是正五角形，故可內接於圓。作他的外接圓  $ABCDE$ 。

$$\because BC = CD = DE. \quad \therefore \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}.$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CAD = \angle DAE. \quad \text{Q. E. D.}$$

(23) 直角三角形斜邊上向外作正方形。此正方形對角線的交點與直角三角形直角頂點的聯線平分直角。

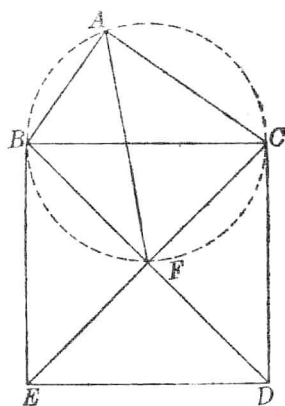
$\triangle ABC$  是直角三角形  $\angle A$  是直角。  $BCDE$  是正方形。其對角線  $BD, CE$  交於  $F$ 。求證  $AF$  平分  $\angle BAC$ 。

〔證〕  $\because BCDE$  是正方形，

$$\therefore BD \perp CE \quad (\text{證略}).$$

即  $\angle BFC = R\angle$ .

但  $\angle BAC = R\angle$ ,



$\therefore \angle BAC + \angle BFC = 2R\angle. \therefore A, B, F, C$  共圓,

$\because BCDE$  是正方形,  $\therefore BF = CF$  (證略).

$\therefore \frown BF = \frown CF, \therefore \angle BAF = \angle FAC.$

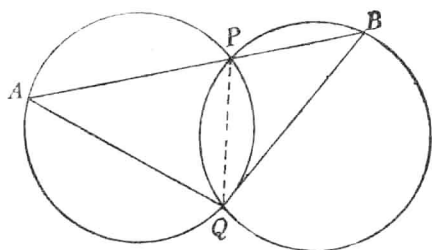
即  $AF$  平分  $\angle BAC.$  Q. E. D.

(24) 相等兩圓交於  $P, Q$ . 過  $P$  作任意直線交兩圓周於  $A, B$ . 求證  $AQ = BQ$ .

[證] 聯兩圓的公共弦  $PQ$ .

則因兩圓相等, 故  $\odot APQ$  的

$\frown PQ = \odot BPQ$



的  $\frown PQ$ . (等圓中等弦對等弧.)  $\therefore \angle PAQ = \angle PBQ.$

(等圓中立於等弧上的圓周角相等).

$\therefore AQ = BQ$  Q. E. D.

(25)  $P$  是正三角形  $ABC$  外接圓的劣弧  $BC$  上的任意一點. 求證  $PA = PB + PC$ .

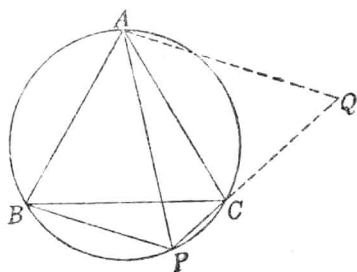
[證] 延長  $PC$  至  $Q$  令  $CQ = PB$ .

在  $\triangle ABP, \triangle ACQ$  中,  $AB = AC, BP = CQ,$

$\angle ABP = \angle ACQ,$  (定理 40 系)  $\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACQ$



$\therefore \angle AQC = \angle APB$   
 $= \angle ACB = 60^\circ$  而  
 $\angle APQ = \angle ABC = 60^\circ,$   
 $\therefore \angle PAQ = 60^\circ.$



$\therefore \triangle APQ$  是正三角形.

$\therefore AP = PQ = PC + CQ$

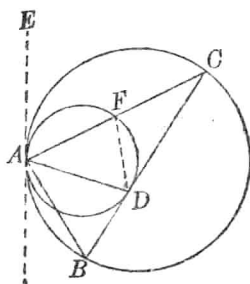
$\therefore CQ = BP, \therefore AP = PB + PC. \quad \text{Q. E. D.}$

(26) 兩圓內切於  $A$ . 外圓的弦  $BC$  切內圓於  $D$ .

求證  $\angle BAD = \angle CAD$ .

(證) 作兩圓的公切線  $AE$ .  
 $AC$  與內圓交於  $F$  從外圓看  
 起來,  $\angle EAC = \angle ABC$ . 從內圓  
 看起來,  $\angle EAC = \angle ADF$

$\therefore \angle ABC = \angle ADF$



但因  $BC$  是內圓的切線,  $\therefore \angle ADB = \angle AFD$ .

即在  $\triangle ABD$ , 及  $\triangle ADF$  中, 已有兩雙角相等.

$\therefore \angle BAD = \angle CAD \quad \text{Q. E. D.}$

(27) 兩圓交於  $AB$ . 過  $A$  點作兩直線  $AEC, AFD$

令  $\angle CAB = \angle BAD$ . 各交兩圓於  $C, E, F, D$ .

求證  $EC = FD$ .

〔證〕

$$\because \angle CAB = \angle BAF$$

$$\therefore \frown CB = \frown BF.$$

$$\therefore CB = BF.$$

$$\because \angle EAB = \angle BAD. \quad \therefore \frown EB = \frown BD.$$

$$\therefore EB = BD. \quad \because ACBF \text{ 內接於圓,}$$

故  $\angle CBF$  是  $\angle CAD$  的補角.  $\because AEBD$  內接於圓,

故  $\angle EBD$  是  $\angle CAD$  的補角.  $\therefore \angle CBF = \angle EBD.$

$$\therefore \angle CBE = \angle FBD$$

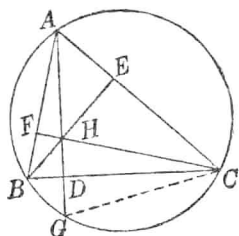
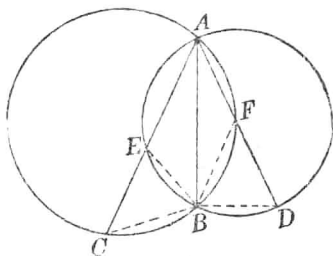
由是  $\triangle CBE$  及  $\triangle FBD$  有兩雙邊及一雙夾角相等而為合同形.  $\therefore EC = FD.$  Q. E. D.

(28)  $H$  是三角形  $ABC$  的垂心.  $AH$  的延線交  $BC$  於  $D$ , 交  $\triangle ABC$  的外接圓周於  $G$ . 求證  $HD = DG$

$H$  是垂心, 即  $AHD \perp BC$ ,  
 $BHE \perp AC$ ,  $CHF \perp AB$  [見 (20)]

〔證〕 聯  $GC$ .

$$\because \angle AFC = \angle ADC = R\angle, \quad \therefore A, F, D, C \text{ 共圓.}$$



$\therefore \angle FAD = \angle FCD.$  又  $\because A, B, G, C$  共圓.

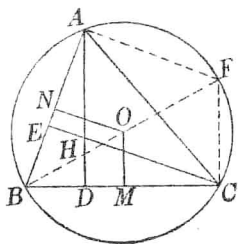
$\therefore \angle FAD = \angle BCG.$   $\therefore \angle FCD = \angle BCG.$

於是在  $\triangle HCD, \triangle GCD$  中,  $\angle HCD = \angle GCD,$

$$CD = CD, \angle HDC = \angle GDC = R\angle.$$

$\therefore \triangle HCD \cong \triangle GCD. \therefore HD = DG$  Q. E. D.

(29)  $\triangle ABC$  的兩個高  $AD,$   
 $CE$  交於  $H$ . (即  $\triangle ABC$  的垂心)  
 $BC, AB$  的兩個垂直等分線  
 $MO, NO$  交於  $O$ .



求證  $AH = 2OM, CH = 2ON.$

〔證〕 聯  $BO$ , 延長之交  $\odot ABC$  於  $F$ . 聯  $AF, CF$ .  
 $\because O$  是  $BC, AB$  的垂直等分線的交點, 故  $O$  與  $A, B, C$   
 等距.  $\therefore O$  是  $\odot ABC$  的中心 (叫做  $\triangle ABC$  的外心).  
 $\therefore BOF$  是  $\odot ABC$  的直徑.  $\therefore \angle BCF = R\angle, \angle BAF = R\angle.$   
 $\because AD \perp BC, CE \perp AB, \therefore FC \parallel AD, FA \parallel CE.$   
 $\therefore AHCF$  是平行四邊形.  $\therefore AH = FC, CH = AF.$   
 又  $O, M$  各為  $BF, BC$  的中點.

$$\therefore OM = \frac{1}{2}FC \text{ 即 } FC = 2OM.$$

$O, N$  各為  $BF, BA$  的中點.

$$\therefore ON = \frac{1}{2}FA, \text{ 即 } FA = 2ON.$$

$$\therefore AH = 2OM, CH = 2ON. \quad Q. E. D.$$

### 6. 不等量的證例

(30) 四邊形  $ABCD$  中,  $AB$  是最大邊,  $CD$  是最小邊. 求證  $\angle C > \angle A, \angle D > \angle B$ .

[證] 聯  $AC$ . 因  $AB$  是最大邊,  $\therefore AB > BC$ ,

$$\therefore \angle BCA > \angle BAC.$$

因  $CD$  是最小邊,

$$\therefore AD > CD, \quad \therefore \angle ACD > \angle CAD.$$

$$\therefore \angle BCA + \angle ACD > \angle BAC + \angle CAD.$$

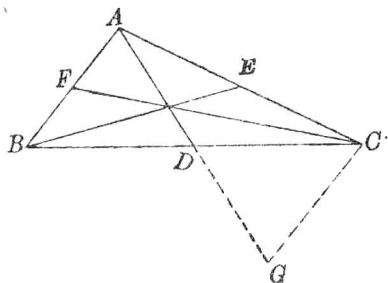
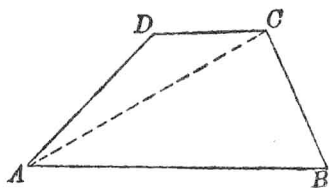
$$\text{即} \quad \angle C > \angle A.$$

同樣聯  $AC$ , 可證  $\angle B > \angle D$ .

Q. E. D

(31) 三角形的三個中線之和小於他的三邊之和.

$AD, BE, CF$  是中線, 即  $D, E, F$  各



爲  $BC, AC, AB$  的中點.

求證  $AD + BE + CF < AB + AC + BC$ .

[證] 延長  $AD$  至  $G$  令  $DG = AD$ . 聯  $GC$ . 則  
 $\triangle ABD \cong \triangle GCD$  ( $\because BD = DC, AD = DG,$   
 $\angle ADB = \angle GDC$ ).  $\therefore AB = CG$ . 但  $AG < AC + CG$ .

即  $2AD < AB + AC$ . 同樣可證  $2BE < AB + BC$ ,

$$2CF < AC + BC.$$

$$\therefore 2AD + 2BE + 2CF < 2AB + 2AC + 2BC.$$

$$\therefore AD + BE + CF < AB + AC + BC. \quad Q. E. D$$

(32) 三角形兩邊不等, 則第三邊上的中線與大邊所夾的角比他與小邊所夾的角小.

$AB > AC$ ,  $D$  是  $BC$  的

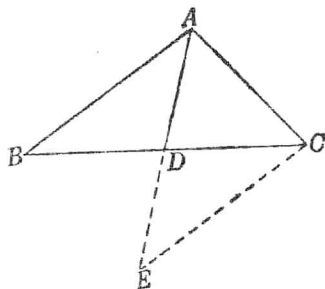
中點. 求證

$$\angle BAD < \angle DAC.$$

[證] 延長  $AD$  至  $E$ ,

令  $DE = AD$

則  $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ .



$$\therefore CE = AB. \quad \angle E = \angle BAD.$$

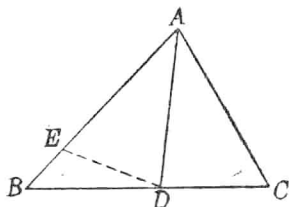
$$\because AB > AC, \therefore CE > AC, \therefore \angle E < \angle CAD.$$

$\therefore \angle BAD < \angle CAD.$  Q. E. D.

(33)  $\triangle ABC$  中,  $AB > AC$ ,

$AD$  是  $\angle A$  的等分線.

求證  $BD > DC$ .



〔證〕 在  $AB$  上取  $E$  點令  $AE = AC$ . 聯  $DE$ . 則  $\triangle AED \cong \triangle ACD$ . ( $\because AE = AC$ ,  $AD$  公邊,  $\angle EAD = \angle CAD$ )

$\therefore ED = DC, \angle EDA = \angle ADC.$

但  $\angle BED > \angle EDA,$

而  $\angle ADC > \angle B.$

$\therefore \angle BED > \angle B, \therefore BD > ED.$

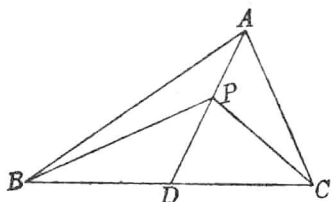
$\therefore BD > DC$  Q. E. D.

(34)  $P$  是  $\triangle ABC$  的

中線  $AD$  上任意一點.

$\angle ABC < \angle ACB.$

求證  $\angle PBC < \angle PCB.$



〔證〕  $\because \angle ABC < \angle ACB, \therefore AC < AB.$  (定理 16).

$\therefore \angle ADC < \angle ADB.$  (定理 18)  $\therefore PC < PB.$  (定理 17).

$\therefore \angle PBC < \angle PCB.$  (定理 15) Q. E. D.

(35)  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ .

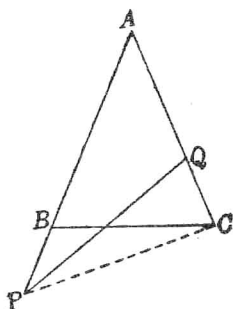
$Q$  是  $AC$  上的一點.  $P$  是  $AB$  延線上的一點. 而  $BP = CQ$ .  
求證  $PQ > BC$ .

〔證〕 聯  $PC$ . 從  $\triangle CPQ$ , 及  $\triangle PBC$  觀之,  $PC$  是公邊,

$CQ = PB$ .  $\angle PCQ > \angle ACB = \angle ABC > \angle BPC$ .

$\therefore PQ > BC$ .

Q. E. D.



## 7. 面積的證例

(36) 圓內兩弦  $AB, CD$ , 直交於  $E$ . 求證  
 $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 =$  此圓直徑上的正方形.

〔證〕 作直徑  $AOF$ . 聯  $AC$ ,  $BD, CF, AD$ .

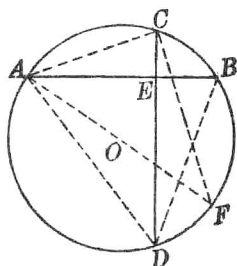
在  $\triangle AFC, \triangle ADE$  中,

$$\angle AFC = \angle ADC,$$

$$\angle ACF = \angle AED, (R\angle)$$

$\therefore \angle CAF = \angle EAD. (定理13系3) \therefore \frown CF = \frown BD$

$\therefore CF = BD$



$$\text{因 } \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2, \quad \overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{BD}^2,$$

$$\text{故 } \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 \\ = \overline{AC}^2 + \overline{CF}^2$$

$$\text{但因 } \angle ACF = R\angle \quad \therefore \overline{AC}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{AF}^2$$

$$\therefore \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AF}^2 \quad \text{Q. E. D.}$$

(37)  $\odot O$  內兩弦  $AB, CD$  直交於  $E$ . 求證  
 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 8R^2 - 4\overline{OE}^2$  ( $R$  是  $\odot O$  的半徑).

〔證〕 作  $OM \perp AB, ON \perp CD$ .

聯半徑  $OA, OD$ .

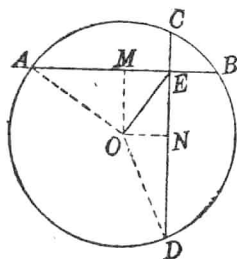
$$\because OM \perp AB, \quad \therefore AM = MB.$$

$$\because ON \perp CD, \quad \therefore CN = ND.$$

又因  $AB \perp CD$ ,

$$\therefore ONEM \text{ 是矩形, } \therefore OM = NE.$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 &= (2AM)^2 + (2DN)^2 \\ &= 4\overline{AM}^2 + 4\overline{DN}^2 \\ &= 4[\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{ON}^2] \\ &= 4[\overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{NE}^2 - \overline{ON}^2] \\ &= 4[R^2 + R^2 - (\overline{NE}^2 + \overline{ON}^2)] \\ &= 4[2R^2 - \overline{OE}^2] \end{aligned}$$





$$= 8R^2 - 4\overline{OE}^2$$

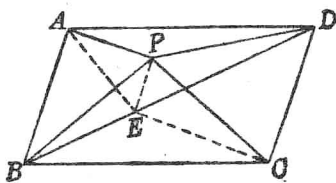
Q. E. D.

(38)  $ABCD$  是平行四邊形.  $P$  是  $\triangle ABD$  內任意一點. 求證  $\triangle PBD = \triangle PBC - \triangle PAB$ .

〔證〕 過  $P$  作  $AB$  的平行線  $PE$  交  $BD$  於  $E$ .

則  $\triangle PAB = \triangle EAB$ .

又因  $PE$  與  $DC$  也平行.



$$\therefore \triangle PED = \triangle PEC.$$

$$\therefore \triangle PBD = \triangle PBE + \triangle PED$$

$$= \triangle PBE + \triangle PEC$$

$$= \triangle PBC - \triangle EBC$$

$$= \triangle PBC - \triangle EBA$$

$$= \triangle PBC - \triangle PAB.$$

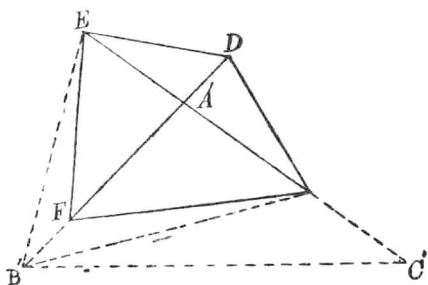
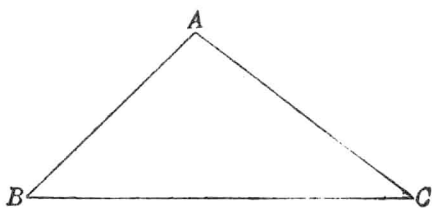
Q. E. D.

(39)  $\triangle ABC$  的兩邊  $AB, AC$  各等於四邊形  $DEFG$  的兩對角線  $DF, EG$ . 又  $\angle A$  等於  $DF, EG$  所夾的角. 求證  $\triangle ABC = DEFG$ .

〔證〕 延長  $DF$  至  $B'$  令  $FB' = DA'$ ,

延長  $EG$  至  $C'$  令  $GC' = EA'$ . 聯  $B'C'$ .

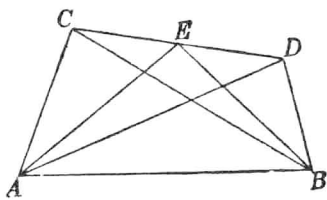
則  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .



聯  $B'E, B'G$ . 則  $\triangle GFB' = \triangle GDA'$ ,  
 $\triangle B'GC' = \triangle B'EA'$ ,  $\triangle EB'F = \triangle EA'D$ .  
 故  $\triangle A'B'C' = \triangle A'FG + \triangle GFB' + \triangle B'GC'$   
 $= \triangle A'FG + \triangle GDA' + \triangle B'EA'$   
 $= \triangle A'FG + \triangle GDA' + \triangle B'EF + \triangle EFA'$   
 $= \triangle A'FG + \triangle GDA' + \triangle EA'D + \triangle EFA'$   
 $= DEFG. \quad \text{Q. E. D.}$

(40)  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  共有底邊  $AB$ .  $E$  是  $CD$  的中點. 求證  $\triangle ABE = \frac{1}{2}(\triangle ABC \pm \triangle ABD)$ .

(第一)  $C, D$  在  $AB$  同  
 旁時, 則  $\triangle ABE =$   
 $\frac{1}{2}(\triangle ABC + \triangle ABD)$ .



[證一]  $\because CE = ED,$

$\therefore \triangle ACE = \triangle ADE.$  又  $\triangle BCE = \triangle BDE.$

$$\triangle ABE = ABEC - \triangle ACE$$

$$= \triangle ABC + \triangle BCE - \triangle ACE.$$

$$\triangle ABE = ABDE - \triangle BDE$$

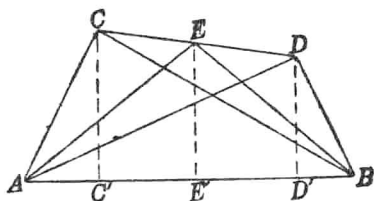
$$= \triangle ABD + \triangle ADE - \triangle BDE.$$

$$\begin{aligned} \therefore 2 \triangle ABE &= \triangle ABC + \triangle ABD + \triangle BCE + \triangle ADE \\ &\quad - \triangle ACE - \triangle BDE \\ &= \triangle ABC + \triangle ABD. \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABE = \frac{1}{2}(\triangle ABC + \triangle ABD).$$

Q. E. D.

[證二] 從  $C, E, D$   
 各作  $AB$  的垂線  $CC',$   
 $EE', DD'.$  則  $EE' =$   
 $\frac{1}{2}(CC' + DD').$



$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CC', \quad \triangle ABD = \frac{1}{2} AB \cdot DD'.$$

$$\therefore \triangle ABE = \frac{1}{2} AB \cdot EE'$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{2} (CC' + DD')$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} AB \cdot CC' + \frac{1}{2} AB \cdot DD' \right]$$

$$= \frac{1}{2} (\triangle ABC + \triangle ABD), \quad \text{Q. E. D.}$$

(第二)  $C, D$  在  $AB$  的兩旁時, 則

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} (\triangle ABC \sim \triangle ABD)$$

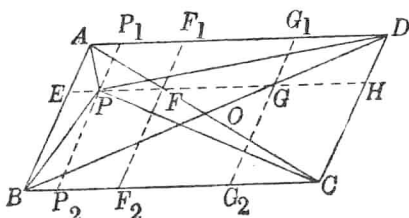
[證法仿上, 略]

(41) 平行四邊形  $ABCD$  的對角線  $AC, BD$  交於  $O$ .  $P$  是  $\triangle ABO$  中任意一點. 求證

$$\triangle PCD = \triangle PAB + \triangle PAC + \triangle PBD.$$

[證] 過  $P$  作

$BC$  的平行線交  $AB, AC, DB, DC$  於  $E, F, G, H$ . 過  $P, F, G$  各作  $AB$



的平行線  $P_1P_2, F_1F_2, G_1G_2$ .

$$\text{則 } \triangle PAC = \triangle PAF + \triangle PCF$$

$$= \frac{1}{2} \square PF_1 + \frac{1}{2} \square PF_2 = \frac{1}{2} \square P_2F_1,$$

$$\triangle PBD = \triangle PDG + \triangle PBG$$

$$= \frac{1}{2} \square PG_1 + \frac{1}{2} \square PG_2 = \frac{1}{2} \square P_2G_1,$$

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \square BP_1,$$

$$\triangle PCD = \frac{1}{2} \square P_2 D.$$

又因  $\triangle ABC = \triangle DBC$ ,  $\therefore \triangle AEF = \triangle DGH$ ,

$$\therefore EF = GH$$

$$\therefore \square BF_1 = \square G_2 D.$$

$$\therefore \square P_2 D = \square G_2 D + \square P_2 G_1$$

$$= \square BF_1 + \square P_2 G_1$$

$$= \square BP_1 + \square P_2 F_1 + \square P_2 G_1$$

$$\therefore \triangle PCD = \triangle PAB + \triangle PAC + \triangle PBD. \quad Q.E.D.$$

〔注意〕 本題與 38 題類似, 故也可以仿照 38 題的證法證明. 又 38 題也可以用本題證法證明.

(4.) 四邊形各邊上正方形的和等於對角線上正方形的和加其中點聯線上正方形的四倍

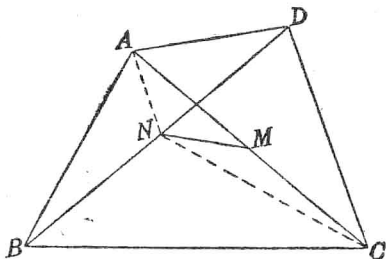
$M, N$  各為  $AC, BD$

的中點. 求證

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4 \overline{MN}^2.$$

〔證〕 聯  $AN, CN$ .



$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2 \overline{BN}^2 + 2 \overline{AN}^2$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2 \overline{BN}^2 + 2 \overline{CN}^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 4 \overline{BN}^2 + (\overline{AN}^2 + \overline{CN}^2).$$

但  $4 \overline{BN}^2 = \overline{BD}^2,$

$$\begin{aligned} 2(\overline{AN}^2 + \overline{CN}^2) &= 2(2 \overline{AM}^2 + 2 \overline{MN}^2) \\ &= 4 \overline{AM}^2 + 4 \overline{MN}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + 4 \overline{MN}^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4 \overline{MN}^2. \quad Q. E. D.$$

(43)  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心.  $P$  是其他任意一點.

求證  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$

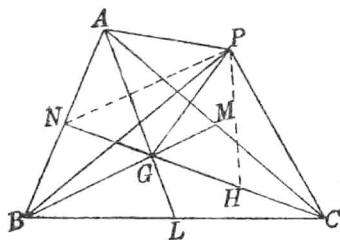
$$= \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3 \cdot \overline{GP}^2.$$

〔證〕 取  $CG$  中點  $H$ .

聯  $PN, PH$ . 則

$$NG = GH = HC.$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PN}^2 + \overline{PH}^2 \\ = 2 \overline{PG}^2 + 2 \overline{GN}^2. \end{aligned}$$



$$2 \overline{PN}^2 + 2 \overline{PH}^2 = 4 \overline{PG}^2 + 4 \overline{GN}^2 \dots\dots\dots(1)$$

又  $\overline{PG}^2 + \overline{PC}^2 = 2 \overline{PH}^2 + 2 \overline{GH}^2 = 2 \overline{PH}^2 + 2 \overline{GN}^2 \dots\dots(2)$

又  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2 \overline{PN}^2 + 2 \overline{AN}^2 \dots\dots\dots(3)$

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (3), \text{ 得 } 2 \overline{PN}^2 + 2 \overline{PH}^2 + \overline{PG}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \\ = 4 \overline{PG}^2 + 2 \overline{PH}^2 + 6 \overline{GN}^2 + 2 \overline{PN}^2 + 2 \overline{AN}^2. \end{aligned}$$

$$\text{即 } \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3 \overline{PG}^2 + 6 \overline{GN}^2 + 2 \overline{AN}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 &= 2 \overline{AN}^2 + 2 \overline{GN}^2 + (2 \overline{GH}^2) \\ &= 2 \overline{AN}^2 + 2 \overline{GN}^2 + 4 \overline{GN}^2 \\ &= 2 \overline{AN}^2 + 6 \overline{GN}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3 \overline{GP}^2. \quad \text{Q. E. D.}$$

(44)  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心.

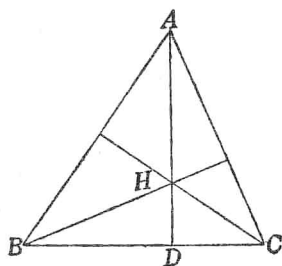
求證  $\overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BH}^2$ .

〔證〕  $\because AD \perp BC$ ,

$$\therefore \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$$

$$\text{又 } \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\therefore \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2.$$



$$\text{又因 } HD \perp BC, \therefore \overline{HD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{HB}^2.$$

$$\text{又 } \overline{HD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{HC}^2.$$

$$\therefore \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{HB}^2 - \overline{HC}^2.$$

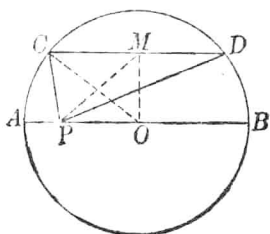
$$\therefore \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{HB}^2 - \overline{HC}^2.$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{HC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{HB}^2. \quad \text{Q. E. D.}$$

(45)  $P$  是圓內直徑  $AB$  上任意一點. 弦  $CD$  平行於  $AB$ . 求證  $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ .

〔證〕 從中心  $O$  作  $CD$  的垂線  $OM$ . 聯  $PM, CO$ . 則

$$\begin{aligned} \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 &= 2(\overline{PM}^2 + \overline{CM}^2) \\ &= 2(\overline{OP}^2 + \overline{OM}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{OM}^2) \\ &= 2(\overline{OP}^2 + \overline{OC}^2). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 &= (OA - OP)^2 \\ &\quad + (OB + OP)^2 \\ &= (OC - OP)^2 + (OC + OP)^2 \\ &= 2(\overline{OP}^2 + \overline{OC}^2). \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \quad \text{Q. E. D.}$$

### 8. 比例量及等矩形的證例

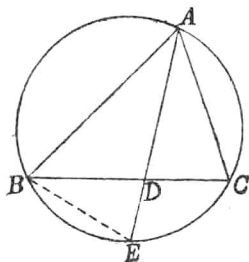
(46)  $\triangle ABC$ ,  $\angle A$  的等分線交  $BC$  於  $D$ , 交外接圓周於  $E$ . 求證  $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ .

〔證〕 聯  $BE$ . 在  $\triangle ABE$ ,  
 $\triangle ADC$  中,  $\angle BAE = \angle DAC$ ,  
 $\angle BEA = \angle DCA$ .

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADC$$

(定理 71)  $\therefore AB : AD = AE : AC$

$$\therefore AB \cdot AC = AD \cdot AE$$



Q. E. D.

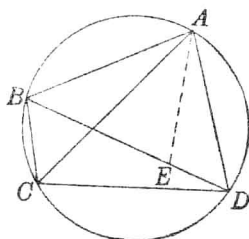
(47) 圓內接四邊形兩雙對邊所包矩形之和



等於兩對角線所包之矩形。

$A, B, C, D$  內接於圓。求證  
 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ 。

〔證〕 作  $AE$  交  $BD$  於  $E$  令  
 $\angle EAD = \angle BAC$ 。



$\therefore \angle ADE = \angle ACB$  ( $\sphericalcap AB$  上圓周角)

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC \quad \therefore ED : BC = AD : AC$ ,

$\therefore BC \cdot AD = AC \cdot ED$ 。

又  $\therefore \angle EAD = \angle BAC, \therefore \angle CAD = \angle BAE$ 。

而  $\angle ACD = \angle ABD, \therefore \triangle ACD \sim \triangle ABE$ 。

$\therefore AC : AB = CD : BE, \therefore AB \cdot CD = AC \cdot BE$ 。

$\therefore AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$

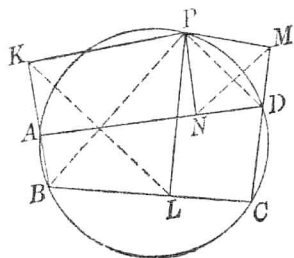
$$= AC(BE + ED) = AC \cdot BD.$$

Q. E. D

(48) 從圓周上一點  $P$  向內接四邊形  $ABCD$  的各邊上作垂線  $PK \perp AB$ ,  
 $PL \perp BC, PM \perp CD, PN \perp DA$ 。

求證  $PK \cdot PM = PL \cdot PN$ 。

〔證〕 聯  $PB, PD, KL, MN$ 。



$\therefore \angle PKB, \angle PLB$  都是直角,

$\therefore P, K, B, L$  共圓. 又  $\because \angle PMD, \angle PND$  都是直角.

$\therefore P, N, D, M$  共圓.

$\therefore \angle PLK = \angle PBK = \angle PDN = \angle PMN$

又  $\angle KPL$  是  $\angle KBL$  的補角.  $\angle MPN$  是  $\angle MDN$  的補角.

$\therefore \angle KBL = \angle MDN, \therefore \angle KPL = \angle MPN.$

於是  $\triangle PKL$  和  $\triangle PNM$  有兩雙等角而為相似三角形.

$\therefore PK : PN = PL : PM \therefore PK \cdot PM = PL \cdot PN. \quad Q. E. D.$

(49)  $D$  是正三角形  $ABC$  外接圓  $\sim BC$  上任意一點. 延長  $AB, CD$  交於  $E$ ;  $AC, BD$  交於  $F$ . 求證  $BC$  是  $BE, CF$  的比

例中項.

[證] 聯  $AD$ .

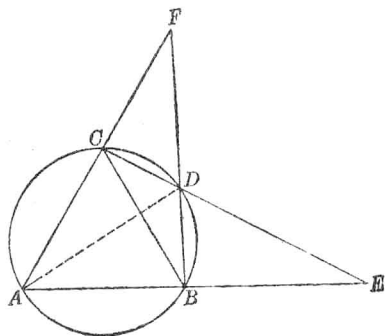
$$\angle CFB = \angle ACB$$

$$- \angle CBF$$

$$= \angle CAB$$

$$- \angle CAD$$

$$= \angle DAB = \angle DCB.$$



同樣可證  $\angle CEB = \angle DBC. \therefore \triangle FBC \sim \triangle CEB$

$$\therefore FC : BC = BC : BE.$$

Q. E. D.

(50) 一直線交  $\odot M$  於  $A, B$  交  $\odot N$  於  $C, D$  而  $AB = CD$ . 從  $A, D$  各作兩圓的切線相交於  $P$ . 求證  $PA : PD = AM : DN$ .

〔證一〕 作

$ME \perp AB, NF \perp CD$ ,

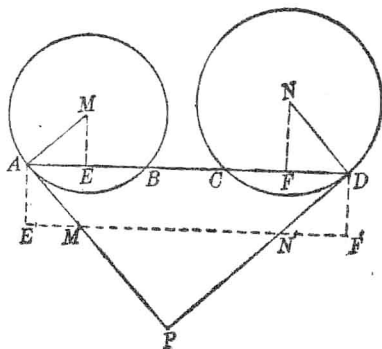
再從  $A, D$  作  $AD$  的

垂線  $AE', DF'$  令

$AE' = AE, DF' = DF$ .

聯  $E'F'$  交  $PA$  於  $M'$ ,

$PD$  於  $N'$ .



則  $\because AB = CD, \therefore AE = DF, \therefore AE' = DF'$ .

$\therefore AE'F'D$  是矩形而  $M'N' \parallel AD$ .

$\therefore PA : PD = AM' : DN'$ .

但  $\triangle AEM \cong \triangle AE'M'$  (證略),  $\triangle DFN \cong \triangle DF'N'$ .

故  $AM = AM', DN = DN'$ .

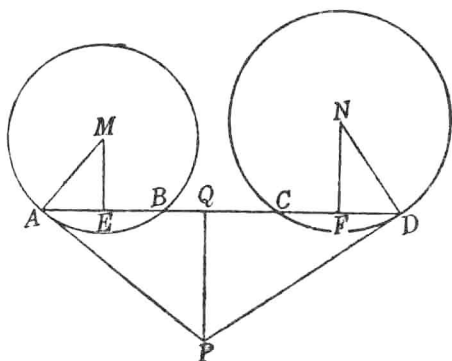
$\therefore PA : PD = AM : DN$ .

Q. E. D.

〔證二〕 作  $ME \perp AB, NF \perp CD, PQ \perp AD$ .

則  $\triangle AEM \sim \triangle PQA$  (證略)

$\therefore AM : AP = AE : PQ$



同樣可證  $\triangle NFD \sim \triangle DQP$

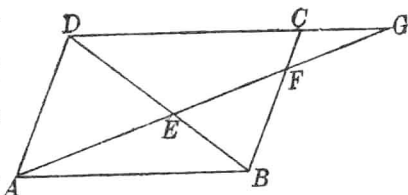
$\therefore DN : DP = DF : PQ. \because AB = CD, \therefore AE = DF.$

$\therefore AM : AP = DN : DP.$

$\therefore AP : DP = AM : DM. \quad Q. E. D.$

(51)  $ABCD$  是  $\square$ .

過  $A$  作任意一直  
線交  $BD$  於  $E$ ,  $BC$   
於  $F$ ,  $DC$  的延線於



$G$ . 求證  $EA$  是  $EF, EG$  的比例中項.

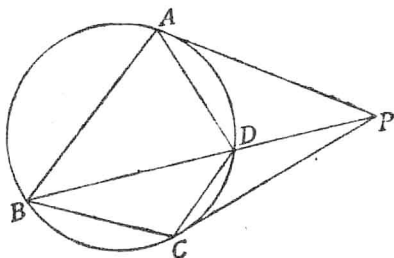
(證)  $\because AD \parallel BF \therefore EF : EA = EB : ED.$

又  $\because AB \parallel DG, \therefore EB : ED = EA : EG.$

$\therefore EF : EA = EA : EG. \quad Q. E. D.$

(52) 從圓外一點至圓作兩切線及任意一割線，則此兩切點與兩交點所成內接四邊形的兩雙對邊所包矩形相等。

$PA, PC$  是切線。  
 $PDB$  是任意一割線。求證



$$AD \cdot BC = AB \cdot CD.$$

〔證〕  $\because \angle PAD = \angle PBA, \angle P$  公共，

故  $\triangle PAD \sim \triangle PBA. \therefore AD : AB = AP : BP$ . 同樣

$\triangle PCD \sim \triangle PBC. \therefore CD : CB = CP : BP$ .

$\because AP = CP, \therefore AP : BP = CP : BP,$

$\therefore AD : AB = CD : CB.$

$\therefore AD \cdot BC = AB \cdot CD. \quad Q. E. D.$

(53)  $P, Q$  是  $\triangle ABC$  的兩邊  $AB, AC$  上的點而  $AP = AQ$ .  $PQ$  交  $\triangle ABC$  的中線  $AM$  於  $N$ . 求證  $PN : QN = AC : AB$ .

〔證一〕 過  $C$  作  $CD \parallel PQ$  交  $AM$  於  $E$ .

則  $AD = AC, PN : QN = DE : CE$

延長  $AM$  至  $A'$  令  $MA' = AM$ ,

聯  $CA'$  則  $\triangle A'CM \cong \triangle ABM$

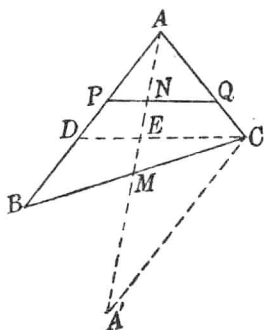
而  $AB \parallel CA'$ ,  $AB = CA'$ .

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle A'CE$$

$$\therefore DE : CE = AD : CA'$$

但因  $AD = AC$ ,  $CA' = AB$ ,

$$\therefore DE : CE = AC : AB.$$



$$\therefore PN : QN = AC : AB. \quad \text{Q. E. D.}$$

【證二】 過  $C$  作  $CD \parallel PQ$  交  $AM$  於  $E$ ; 過  $D$  作  $DF \parallel AM$  交  $BC$  於  $F$ .

$$PN : QN = DE : EC$$

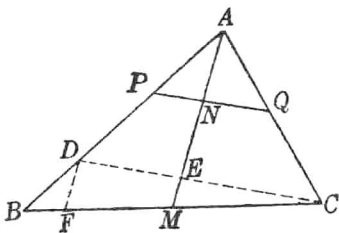
$$= FM : MC$$

$$= FM : BM$$

$$(\because BM = MC)$$

$$= AD : AB = AC : AD.$$

Q. E. D.



【證三】  $\frac{\triangle APN}{\triangle ABM} = \frac{AP \cdot AN}{AB \cdot AM} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{AM}$

$$\frac{\triangle AMC}{\triangle ANQ} = \frac{AC \cdot AM}{AQ \cdot AN} = \frac{AC}{AQ} \cdot \frac{AM}{AN}$$

$$\frac{PN}{NQ} = \frac{\triangle APN}{\triangle AQN} = \frac{\triangle APN}{\triangle ABM} \times \frac{\triangle AMC}{\triangle ANQ}$$

$$(\because \triangle ABM = \triangle AMC.)$$

$$= \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{AM} \cdot \frac{AC}{AQ} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AC}{AQ} = \frac{AP \cdot AC}{AB \cdot AQ}$$

$$= \frac{AC}{AB}. \quad (\because AP = AQ) \quad \text{Q. E. D.}$$

〔證四〕 作

$$ME \perp AB,$$

$$MF \perp AC.$$

聯  $MP, MQ.$

$$\frac{PN}{QN} = \frac{\triangle APN}{\triangle AQN}$$

$$= \frac{\triangle PNM}{\triangle QNM}$$

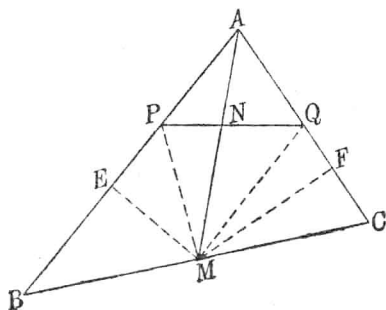
$$= \frac{\triangle APN + \triangle PNM}{\triangle AQN + \triangle QNM} = \frac{\triangle APM}{\triangle AQM} = \frac{AP \cdot ME}{AQ \cdot MF} = \frac{ME}{MF}.$$

但因  $AM$  是中線,  $\therefore \triangle AMB = \triangle AMC.$

$$\therefore AB \cdot ME = AC \cdot MF. \quad \therefore ME : MF = AC : AB$$

$$\therefore PN : QN = AC : AB \quad \text{Q. E. D.}$$

(54)  $\triangle ABC$ ,  $\angle A$  的等分線  $AD$ ,  $AD$  的垂直等分

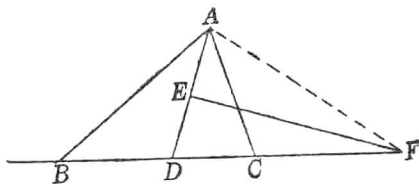


線  $EF$  交  $BC$  的延線於  $F$ . 求證  $FD$  是  $FB, FC$  的比例中項.

〔證〕 聯  $AF$ , 則

$$\triangle AEF \cong \triangle DEF,$$

$$FD = FA.$$



$$\angle ADF = \angle DAB + \angle ABD.$$

$$\angle DAF = \angle DAC + \angle CAF.$$

今  $\therefore FA = FD,$

$\therefore \angle ADF = \angle DAF.$  又  $\angle DAB = \angle DAC.$  (假設)

$\therefore \angle ABD = \angle CAF. \therefore \triangle FAC \sim \triangle FBA.$

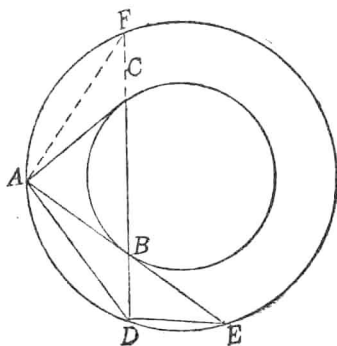
$\therefore FC : FA = FA : FB.$  但  $FA = FD,$

$$\therefore FC : FD = FD : FB.$$

Q. E. D.

(55) 從兩個同心圓外圓圓周上任意一點  $A$ , 作內圓的兩個切線  $AB, AC$ .  $AB, CB$  的延長線各交外圓於  $E, D$ . 求證

$$DB : DC = \overline{DE}^2 : \overline{DA}^2$$





〔證〕 延長  $DC$  交外圓於  $F$ 。則因

$$\triangle DEB \sim \triangle AFB, \therefore DE : AF = DB : AB$$

$$\text{又 } DE : AF = BE : BF$$

$$\therefore \overline{DE}^2 : \overline{AF}^2 = (DB : AB) \cdot (BE : BF)$$

但  $AF = AD$  (證略),  $BE = AB$  (證略),

$$BF = DC \text{ (證略),}$$

$$\therefore \overline{DE}^2 : \overline{AD}^2 = (DB : AB) \cdot (AB : DC)$$

$$= DB : DC.$$

Q. E. D.

### 9. 等線份等角的證例三

(56) 從相交兩圓的公共弦的延長線上的任意一點至兩圓各作切線, 那麼這兩個所作的切線必相等。

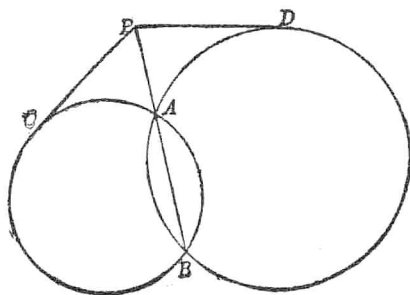
兩圓交於  $A, B$ 。

$P$  是  $AB$  延長線上任

意一點,  $PC, PD$  各

為兩圓的切線。

求證  $PC = PD$ 。

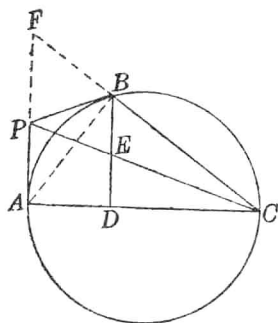


〔證〕  $\overline{PC}^2 = PA \cdot PB$ . (定理 84)

$$\overline{PD}^2 = PA \cdot PB. \text{ (定理 84)}$$

$$\therefore \overline{PC}^2 = \overline{PD}^2 \quad \therefore PC = PD. \quad Q. E. D.$$

(57) 從圓外一點  $P$  向圓作兩個切線  $PA, PB$   
 過  $A$  作直徑  $AC$ . 過  $B$  作  
 $BD \perp AC$ . 聯  $PC$  交  $BD$  於  $E$ .  
 求證  $BE = ED$ .



〔證一〕 延長  $AP, CB$  交  
 於  $F$ . 聯  $AB$ . 則因  $AC$  是直  
 徑, 故  $\angle ABC = R\angle$ .

$$\therefore \angle ABF = R\angle.$$

$$\because PA = PB, \quad \therefore \angle PAB = \angle PBA,$$

$$\therefore \angle PBF = \angle PFB,$$

$$\therefore PF = PB, \quad \therefore PA = PF$$

$$\text{又 } \because BD \parallel FA, \quad \therefore BE : FP = CE : CP,$$

$$ED : PA = CE : CP.$$

$$\therefore BE : FP = ED : PA.$$

$$\text{今已知 } FP = PA, \quad \therefore BE = ED. \quad Q. E. D.$$

〔證二〕 過  $C$  作切線交  $PB$  的延長線於  $Q$ .  
 則  $PA \parallel BD \parallel QC$ . 又  $PA = PB$   $QB = QC$ .

令  $PA = PB = a$ ,  $QB = QC = c$ ,

$$BE = b, \quad ED = d,$$

$$BE : QC = PB : PQ,$$

即  $b : c = a : a + c$ ,

$$\begin{aligned} ED : PA &= EC : PC \\ &= BQ : PQ, \end{aligned}$$

即  $d : a = c : a + c$

$$\therefore b = d = \frac{ac}{a+c}. \quad \text{即 } BE = ED. \quad \text{Q. E. D.}$$

(58)  $P$  是平行四邊形  $ABCD$  一邊  $AB$  延長線上任意一點.  $PD$  交  $AC$  於  $E$ , 交  $BC$  於  $F$ . 從  $E$  作  $\triangle PBF$  外接圓的切線  $EM$ .

求證  $ED = EM$ .

[證]

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CFE,$$

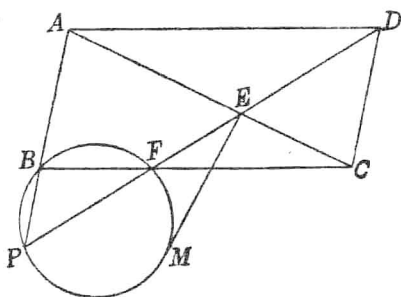
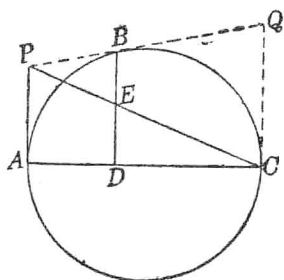
$$\therefore EF : ED$$

$$= EC : EA$$

$$\therefore \triangle APE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore ED : EP = EC : EA. \quad \therefore EF : ED = ED : EP.$$

$$\therefore \overline{ED}^2 = EF \cdot EP. \quad \text{但 } \overline{EM}^2 = EF \cdot EP. \quad (\text{定理 84})$$



$$\therefore \overline{ED}^2 = \overline{EM}^2 \quad \therefore ED = EM.$$

Q. E. D.

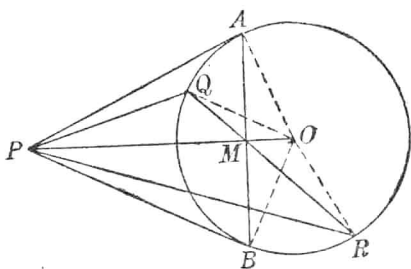
(59)  $PA, PB$  切

$\odot O$  於  $A, B$ .  $OP$  交

$AB$  於  $M$ . 過  $M$  作

任意弦  $QR$ . 求證

$$\angle QPM = \angle RPM.$$



〔證〕 聯  $OA, OB, OQ, OR$  因  $PA, PB$  是切線,

$$\therefore \angle PAO = \angle PBO = R\angle, \therefore \angle PAO + \angle PBO = 2R\angle,$$

$$\therefore A, P, B, O \text{ 共圓}, \quad \therefore PM \cdot MO = AM \cdot MB.$$

$$\text{又 } A, Q, B, R \text{ 共圓}, \quad \therefore QM \cdot MR = AM \cdot MB.$$

$$\therefore PM \cdot MO = QM \cdot MR. \quad \therefore P, R, O, Q \text{ 共圓}.$$

$$\therefore \angle QPO = \angle QRO, \quad \angle RPO = \angle RQO.$$

$$\text{但 } OQ = OR, \quad \therefore \angle QRO = \angle RQO.$$

$$\therefore \angle QPO = \angle RPO, \quad \text{即 } \angle QPM = \angle RPM. \quad \text{Q. E. D.}$$

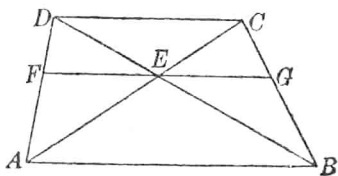
(60)  $ABCD$  是梯形.

他的兩對角線  $AC, BD$

交於  $E$ . 過  $E$  作兩底

邊  $DC, AB$  的平行線

$FG$ . 求證  $FE = EG$ .



〔證一〕  $\because DC \parallel AB, \therefore \triangle DAB = \triangle CAB$ . (定理 50 系 1)

$$\therefore \triangle DAB - \triangle EAB = \triangle CAB - \triangle EAB,$$

$$\text{即} \quad \triangle DAE = \triangle CBE.$$

設若  $FE > EG$ , 則  $\triangle DEF > \triangle CEG$ , (定理 50 系 4)

$$\triangle AEF > \triangle BEG.$$

$$\text{故} \quad \triangle DEF + \triangle AEF > \triangle CEG + \triangle BEG,$$

$$\text{即} \quad \triangle DAE > \triangle CBE.$$

但今已證得  $\triangle DAE = \triangle CBE, \therefore FE > EG$

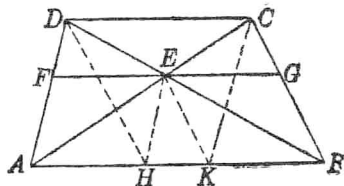
同樣可證  $FE < EG. \therefore FE = EG. \quad Q. E. D.$

〔證二〕 作  $EH \parallel DA$ ,

$EK \parallel CB$ . 聯  $DH, CK$ .

則  $AHEF, KBGE$  都是

平行四邊形.



$$\therefore FE = AH, EG = KB.$$

$\because DC \parallel AB \therefore \triangle DAB = \triangle CAB$ , (定理 50 系 1)

$$\therefore \triangle DAB - \triangle EAB = \triangle CAB - \triangle EAB,$$

$$\text{即} \quad \triangle DAE = \triangle CBE.$$

$\because EH \parallel DA, \therefore \triangle DAE = \triangle DAH$  (定理 50 系 1)

$\therefore EK \parallel CB, \therefore \triangle CBE = \triangle CKB$  (定理 50 系 1)

$\therefore \triangle DAH = \triangle CKB.$

$\therefore AH = KB.$  (定理 50 系 2)

$\therefore FE = EG.$  Q. E. D.

(61) 作  $\triangle ABC$  底邊的平行線  $DE$  交  $AB$  於  $D$ , 交  $AC$  於  $E$ .  $BE, CD$  交於  $F$ . 則  $AF$  的延線必過  $BC$  的中點.

[證] 過  $F$  作  $HK \parallel BC$ .

則  $HF = FK$  (60 題證明)

$\therefore HF \parallel BG,$

$\triangle AHF \sim \triangle ABG,$

$\therefore HF : BG = AF : AG. \therefore FK \parallel GC,$

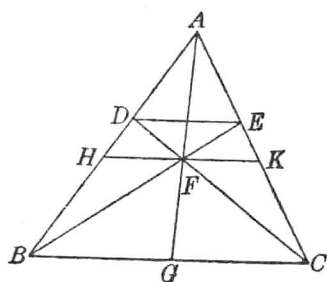
$\therefore \triangle AFK \sim \triangle AGC,$

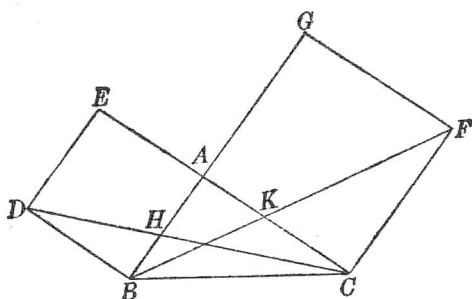
$\therefore FK : GC = AF : AG. \therefore HF : BG = FK : GC.$

$\therefore BG = GC$  Q. E. D.

(62) 直角三角形  $ABC$  二邊  $AB, AC$  上各向外側作正方形  $ABDE, ACFG$ . 聯  $CD$  交  $AB$  於  $H$ . 聯  $BF$  交  $AC$  於  $K$ . 求證  $AH = AK$ .

[證]  $\therefore AH \parallel ED,$





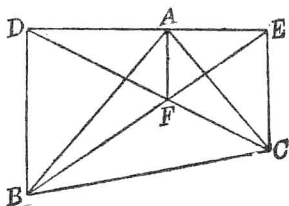
$$\therefore AH : ED = AC : EC.$$

$$\therefore AH : AC = ED : EC.$$

又  $\because AK \parallel GF, \therefore AK : GF = AB : GB.$

但  $\because ABDE, ACFG$  都是正方形, 故  $AC = GF, ED = AB, EC = GB, \therefore AH = AK.$  Q. E. C.

(63)  $DE$  是  $\triangle ABC$  的  $\angle A$  的外角等分線.  $BD, CE,$  都是  $DE$  的垂線.  $BE, CD$  交於  $F$ .



求證  $\angle BAF = \angle CAF.$

[證]  $\because DE$  是  $\angle A$  的外角等分線, 即  $\angle DAB = \angle EAC,$  又  $\angle BDA = \angle CEA = R\angle,$   
 $\therefore \triangle DAB \sim \triangle EAC, \therefore DB : EC = DA : AE.$

又因  $BD, CE$  都是  $DE$  的垂線,  $\therefore DB \parallel EC$ .

$$\therefore \triangle DBF \sim \triangle CEF$$

$\therefore DB : EC = DF : FC. \therefore DA : AE = DF : FC.$

$$\therefore AF \parallel EC. \text{ (定理 70)}$$

$\therefore \angle DEC = R\angle, \therefore \angle DAF = \angle EAF = R\angle.$

$\therefore \angle DAF - \angle DAB = \angle EAF - \angle EAC.$

即  $\angle BAF = \angle CAF.$

(64)  $A, B$  是  $\odot O$  圓周上任意兩點.  $\widehat{AB}$  三等分於  $E, F$ . 弦  $AB$  三等分於  $C, D$ .  $EC, FD$  的延長線會於  $P$ .

求證  $\angle APB = \frac{1}{3} \angle AOB$ .

【證】 聯  $OE, OF, AE, EF$ .

作  $CG \parallel EA$ .

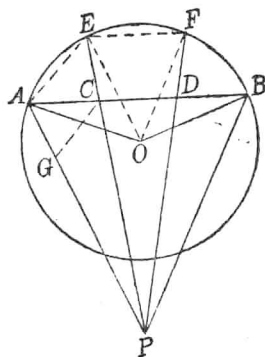
$\therefore \widehat{AE} = \widehat{FB}, \therefore EF \parallel AB.$

$$\therefore EF : CD = EP : CP.$$

又因  $AE \parallel GC, \therefore AE : CG = EP : CP.$

$$\therefore EF : CD = AE : CG.$$

$\therefore \widehat{AE} = \widehat{EF}, \therefore AE = EF, \therefore CG = CD.$





又  $\because AC = CD, \therefore AC = CG,$   
 $\therefore \angle CGA = \angle CAG.$

又  $\because PA = PB, (\text{證略}),$   
 $\therefore \angle BAP = \angle ABP = \angle CAG = \angle CGA.$   
 $\therefore \triangle CAG \sim \triangle PAB.$

$\because \widehat{EB} = 2\widehat{EF}, \therefore \angle EAB = \angle EOF.$

又  $\because CG \parallel EA, \therefore \angle EAB = \angle ACG,$   
 $\therefore \angle ACG = \angle EOF.$

然  $\triangle CAG, \triangle OEF,$  都是二等邊三角形,

$\therefore \triangle CAG \sim \triangle OEF.$

故  $\triangle PAB \sim \triangle OEF. \therefore \angle APB = \angle EOF.$

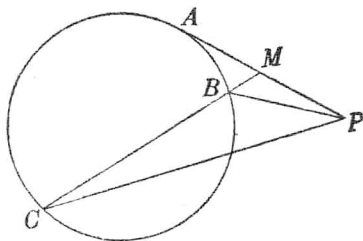
$\because \widehat{EF} = \frac{1}{3}\widehat{AB}, \therefore \angle EOF = \frac{1}{3}\angle AOB.$

$\therefore \angle APB = \frac{1}{3}\angle AOB. \quad \text{Q. E. D.}$

(65) 從圓外一點  $P$  作切線  $PA$ . 過  $PA$  中點  $M$  作任意割線  $MBC$  交圓周於  $B, C$ . 聯  $PB, PC$ .

求證  $\angle MCP = \angle MPB.$

〔證〕  $PA$  是切線,  
 即  $MA$  是切線. 故



$$\overline{MA}^2 = MB \cdot MC. \text{ 今 } PM = MA,$$

$$\therefore \overline{PM}^2 = MB \cdot MC. \quad \therefore MC : MP = MP : MB.$$

在  $\triangle MCP, \triangle MPB$  中,  $\angle CMP = \angle PMB,$

$MC : MP = MP : MB, \therefore \triangle MCP \sim \triangle MPB.$  (定理 72)

$$\therefore \angle MCP = \angle MPB. \quad \text{Q. E. D.}$$

### 10. 關於一定的證例

(66) 從二等邊三角形  $ABC$  底邊  $BC$  上任意一點  $P$  至二邊引垂線  $PD \perp AB, PE \perp AC.$

求證  $PD + PE$  之長一定.

[證] 過  $B$  作  $BF \perp AC, B$  是定點,  $AC$  是定直線, 故  $BF$  之長一定. 作  $PG \perp BF. PEF G$  是矩形,

$$\therefore PE = GF.$$

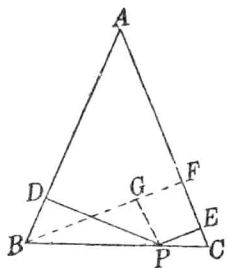
$$\because AB = AC, \quad \therefore \angle B = \angle C, \text{ 又因 } GP \parallel AC,$$

$$\therefore \angle GPB = \angle C, \quad \therefore \angle B = \angle GPB.$$

又  $\angle BDP = \angle PGB = R\angle$  而  $BP$  是公邊,

$$\therefore \triangle BDP \cong \triangle GPB, \quad \therefore PD = BG.$$

$$\therefore PD + PE = BG + GF = BF.$$



$\therefore PD+PE$ 之長一定.

Q. E. D

(67) 定角  $XAY$  的等分線上一定點  $M$ . 以  $AM$  爲弦作任意圓交  $AX, AY$  於  $B, C$ . 求證  $AB+AC$  是定長.

[證] 作  $MD \perp AX$ ,  
 $ME \perp AY$ . 聯  $MB, MC$ .

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ,

$\angle 3 = \angle 4 = R\angle$ ,

$AM$  是公邊,

$\therefore \triangle AMD \cong \triangle AME$ .

$\therefore AD = AE, MD = ME$ .

$\therefore \angle 1 = \angle 2, \therefore \widehat{BM} = \widehat{MC}, \therefore BM = MC$ .

又  $MD = ME, \angle 5 = \angle 4 = R\angle, \therefore \triangle MBD \cong \triangle MCE$ .

$\therefore BD = CE. \therefore AB + AC = AD + BD + AE - CE$

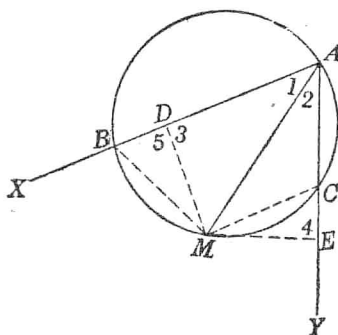
$$= AD + AE.$$

因  $M$  是定點,  $AX, AY$  是定線, 故  $D, E$  也是定點,  $AD, AE$  都是定長, 故  $AD + AE$  是定長.

$\therefore AB + AC$  是定長.

Q. E. D.

(68) 過相交兩定圓交點  $P$  作任意兩直線  $AB$ ,



$CD$  交各圓於  $A, B, C, D$ . 兩弦  $AC, BD$  交於  $M$ . 求證  $\angle M$  的大小一定.

〔證〕

聯  $PQ, AQ, BQ$ .

則  $\angle PCM = \angle PQA,$

$\angle PDM = \angle PQB.$

$\therefore \angle PCM + \angle PDM$   
 $= \angle AQB.$

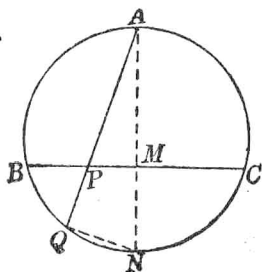
$\therefore \angle M = 2R\angle - (\angle PCM + \angle PDM) = 2R\angle - \angle AQB$   
 $= 2R\angle - [2R\angle - (\angle QAB + \angle QBA)]$   
 $= \angle QAB + \angle QBA.$

$\therefore P, Q$  是兩個定圓的交點, 故兩個  $\sphericalangle PQ$  都一定.

$\therefore \angle PAQ$  和  $\angle PBQ$  的大小都一定.

$\therefore \angle M$  的大小一定. *Q. E. D.*

(69)  $BC$  是定圓的定弦.  $A$  是  $\sphericalangle BC$  的中點. 過  $A$  作任意弦  $AQ$  交  $BC$  於  $P$ . 求證  $AP, AQ$  所包矩形的面積一定.



〔證一〕 作直徑  $AN$  交  $BC$  於  $M$ .

$\because \widehat{AB} = \widehat{AC}, \therefore AM \perp BC$ , 即  $\angle AMP = R\angle$ .

$\because AN$  是直徑,  $\therefore \angle AQN = R\angle$ . 故在  $\triangle APM$ ,  $\triangle ANQ$  中,  $\angle AMP = \angle AQN$ ,  $\angle MAP = \angle QAN$ .

$\therefore \triangle AMP \sim \triangle ANQ. \therefore AM : AQ = AP : AN$ .

$\therefore AP \cdot AQ = AM \cdot AN$ . 但  $AM, AN$  都一定,

$\therefore AP \cdot AQ$  一定.

Q. E. D.

【證二】 聯  $AB, AC, CQ$ .

$\because \widehat{AB} = \widehat{AC}$ ,

$\therefore \angle ACB = \angle AQC$ .

在  $\triangle APC, \triangle ACQ$  中,

$\angle ACP = \angle AQC$ ,

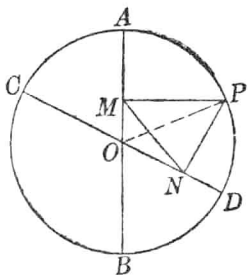
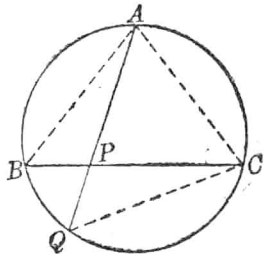
$\angle PAC = \angle CAQ$ ,

$\therefore \triangle APC \sim \triangle ACQ. \therefore AP : AC = AC : AQ$ .

$\therefore AP \cdot AQ = \overline{AC}^2$ . 但  $AC$  是定長.

$\therefore AP \cdot AQ$  一定. Q. E. D.

(70)  $AB, CD$  是定圓內的兩個定直徑.  $P$  是圓周上任意一點.  $PM \perp AB$ ,  $PN \perp CD$ . 求證  $MN$  是定長.



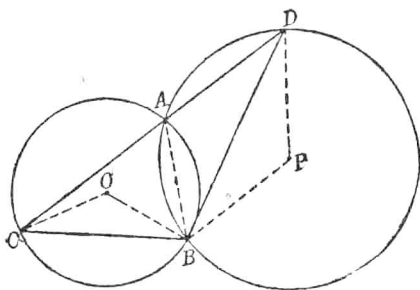
〔證〕 聯  $OP$ .  $\therefore \angle OMP = \angle ONP = R\angle$ .

$\therefore M, N$  在  $OP$  做直徑的圓周上. 因  $OP$  的大小一定,

$\therefore O, N, P, M$  所共之圓的大小一定. 又因  $\angle MON$  是定角. 故  $MN$  是等圓內對等圓周角的弦.

$\therefore MN$  是定長. Q. E. D.

(71)  $A, B$  是兩定圓的交點. 過  $A$  作任意直線交兩圓於  $C, D$ . 求證  $BC : BD$  一定.



〔證〕 作半徑

$OB, OC, PB, PD$ . 聯  $AB$ . 則  $\angle BPD = 2\angle BAD$ ,

$$\therefore \angle BPD = 2\angle BAC.$$

但  $\angle BOC = 2\angle BAC$ .

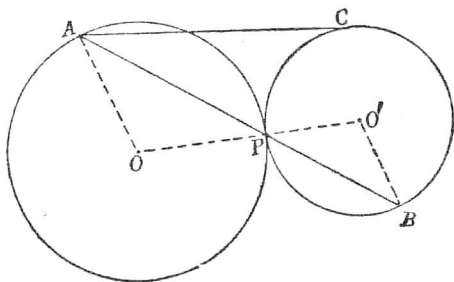
$$\therefore \angle BOC = \angle BPD$$

又因  $\triangle OBC, \triangle PBD$  都是二等邊三角形. 今其頂角相等,  $\therefore \triangle OBC \sim \triangle PBD$ .

$\therefore BC : BD = OB : PB$ , 即兩圓半徑之比.

$\therefore BC : BD$  一定. Q. E. D.

(72)  $\odot O, \odot O'$  兩個定圓切於  $P$ . 過  $P$  作任意直線交兩圓於  $A, B$  從  $A$  作  $\odot O'$  的切線  $AC$ . 求證  $AP : AC$  一定.



〔證〕  $\overline{AC}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AB}$ ,  $\therefore AP : AC = AC : AB$ .

$$\therefore \left(\frac{AP}{AC}\right)^2 = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AP}{AB}$$

但因  $\triangle OAP \sim \triangle O'BP$  (證略)

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{OP}{PO'}, \quad \frac{AP}{AP+PB} = \frac{OP}{OP+PO'}$$

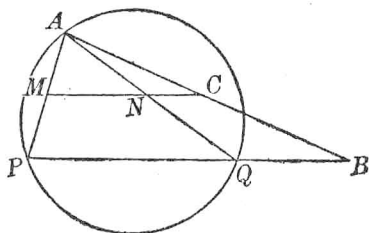
即

$$\frac{AP}{AB} = \frac{OP}{OO'}$$

$$\therefore \left(\frac{AP}{AC}\right)^2 = \frac{OP}{OO'}, \text{ 是定值}$$

$\therefore AP : AC$  一定. Q. E. D.

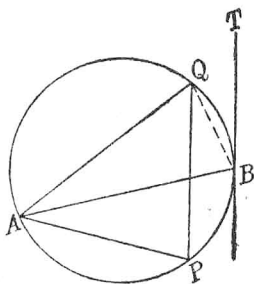
(73)  $A$  是定圓周  
上一定點.  $B$  是定圓  
外一定點 過  $B$  作任  
意割線交圓周於  $P$ ,  
 $Q$ .  $M, N$  各為  $PA, AQ$



的中點. 求證直線  $MN$  必過一定點.

〔證〕  $M, N$  各為  $AP, AQ$  的中點,  $\therefore MN \parallel PQ$ .  
 $\therefore MN$  必過  $AB$  的中點  $C$   $\because A, B$  都是定點,  
 $\therefore C$  是定點.  $\therefore MN$  過定點  $C$ . Q. E. D.

(74)  $AB$  是定圓內的定  
弦.  $AP, AQ$  是其他兩個不  
定弦, 但與  $AB$  成等角, 求證  
 $PQ$  的方向一定.

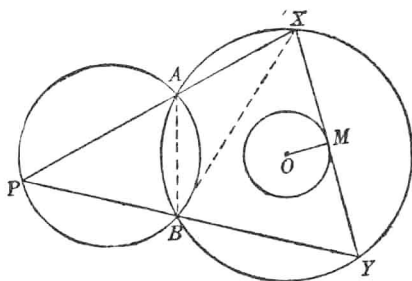


〔證〕 過  $B$  作切線  $BT$ .  
聯  $BQ$ . 則  $\angle TBQ = \angle BAQ$ ,  
 $\angle BQP = \angle BAP$ . 但今  $\angle BAQ = \angle BAP$ ,  
 $\therefore \angle TBQ = \angle BQP$ .  $\therefore PQ \parallel BT$ .  $\because B$  是定點,  
 $\therefore BT$  是定直線.  $\therefore PQ$  的方向一定. Q. E. D.

(75) 兩定圓交於  $A, B$   $P$  是一圓圓周上任意



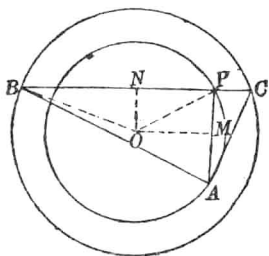
一點。  $PA, PB$  的延線交他圓於  $X, Y$ 。求證  $XY$  切於一定圓。



【證】  $\because AB$  一定，  $\therefore \angle APB, \angle AXB$  的大小都一定。  $\therefore \angle XBY = \angle BPX + \angle BXP =$  定值。  
 $\therefore XY$  是定長。故與中心  $O$  的距離一定。作  $OM \perp XY$ ，則  $OM$  是定長。  $\therefore$  以  $O$  為中心，  $OM$  為半徑所作之圓是定圓。而  $XY$  必與此圓相切。

$\therefore XY$  切於一定圓。 Q. E. D.

(76)  $P$  是兩個定同心圓內圓圓周上的一點。  
 $PA$  是內圓的任意弦。過  $P$  作外圓之弦  $BC$  令與  $AP$  垂直。求證



(a)  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  一定.

(b)  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$  一定.

(c)  $\triangle ABC$  的重心的位置一定.

〔證〕 (a) 作  $OM \perp PA$ ,  $ON \perp BC$ . 則  $OMP$  是矩形.  $\therefore \overline{PA}^2 = (2PM)^2 = 4\overline{PM}^2 = 4\overline{ON}^2$ .

$$\begin{aligned} \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= (BN + NP)^2 + (CN - NP)^2 \\ &= \overline{BN}^2 + \overline{NP}^2 + 2\overline{BN} \cdot \overline{NP} + \overline{CN}^2 \\ &\quad + \overline{NP}^2 - 2\overline{CN} \cdot \overline{NP} \\ &= 2\overline{BN}^2 + 2\overline{NP}^2 \quad (\because BN = CN) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= 4\overline{ON}^2 + 2\overline{BN}^2 + 2\overline{NP}^2 \\ &= 2(\overline{ON}^2 + \overline{NP}^2) + 2(\overline{ON}^2 + \overline{BN}^2) \\ &= 2\overline{OP}^2 + 2\overline{OB}^2. \end{aligned}$$

但因  $OP, OB$ , 都是定圓的半徑, 其長一定.

$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  一定. Q. E. D.

(b)  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$$\begin{aligned} &= (\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2) + (\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2) + (\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2) \\ &= 2\overline{PA}^2 + 2\overline{PB}^2 + 2\overline{PC}^2 + 2\overline{PB} \cdot \overline{PC} \\ &= 2(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2) + 2(BN + NP)(NC - NP) \\ &= 4(\overline{OP}^2 + \overline{OB}^2) + 2(\overline{BN}^2 - \overline{NP}^2) \quad \text{〔見 (a)〕} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\overline{OP}^2 + 4\overline{OB}^2 + 2(\overline{OB}^2 - \overline{ON}^2) - 2(\overline{OP}^2 - \overline{ON}^2) \\
 &= 2\overline{OP}^2 + 6\overline{OB}^2.
 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \text{ 一定.} \quad \text{Q. E. D.}$$

(c) 聯  $AN, OP$  交於  $G$ .

$ON \parallel AP, \therefore \triangle ONG \sim \triangle PAG.$

$\therefore ON : PA = NG : GA = OG : GP.$

但因  $ON = FM = \frac{1}{2}PA,$

$$\therefore NG = \frac{1}{2}GA, \quad OG = \frac{1}{2}GP.$$

$\therefore N$  是  $BC$  的中點,

$\therefore AN$  是  $\triangle ABC$  的中線.

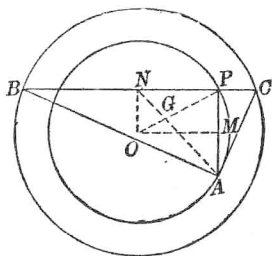
今  $NG = \frac{1}{2}GA,$  即  $AG = \frac{2}{3}AN,$

$\therefore G$  是  $\triangle ABC$  的重心.  $\because O, P$  都是定點, 今

$OG = \frac{1}{2}GP,$  故  $G$  是定點.

故  $\triangle ABC$  的重心的位置一定.

Q. E. D.



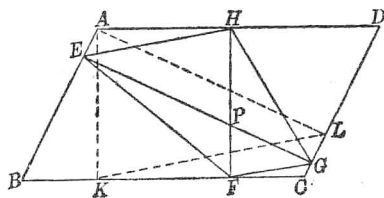
(77) 過定平行四邊形內任意一點作各邊的垂線. 則順次聯其垂足所成四邊形的面積一定

$P$  是  $\square ABCD$  內

任意一點.  $PE \perp AB,$

$PF \perp BC, \quad PG \perp CD,$

$PH \perp AD.$  求證四邊



形  $EFGH$  的面積一定.

[證] 作  $AK \perp BC$ ,  $AL \perp CD$ . 聯  $KL$ . 則  $AKFH$ ,  $AEGL$  都是矩形.

$$\therefore HF = AK, EG = AL,$$

又  $\angle FPG = \angle KAL$ . (兩雙平行線夾角)

$\therefore EFGH = \triangle AKL$ . (見例題 39)

但  $AK, AL$  的位置一定,  $\therefore \triangle AKL$  的面積一定.

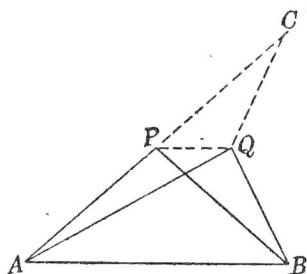
$\therefore$  四邊形  $EFGH$  的面積一定. Q. E. D.

### 11. 最大最小問題證例.

(78) 同底等高諸三角形中, 二等邊三角形的周圍最小.

$\triangle PAB, \triangle QAB$  共有底邊  $AB$ , 且為等高,  $PA = PB$ .

求證



$$PA + PB + AB < QA + QB + AB.$$

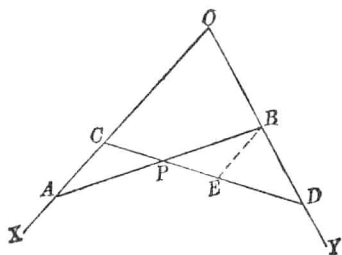
[證] 延長  $AP$  至  $C$  令  $PC = AP$ . 聯  $CQ, PQ$ .

$\therefore \triangle PAB, \triangle QAB$  等高,  $\therefore PQ \parallel AB$ .

$\therefore \angle BPQ = \angle PBA,$       又  $\angle CPQ = \angle PAB.$   
 $\therefore PA = PB,$       故  $\angle PBA = \angle PAB,$   
 故  $\angle BPQ = \angle CPQ.$  又  $\because PC = PA = PB, PQ$  是  
 公邊,  $\therefore \triangle BPQ \cong \triangle CPQ, \therefore QB = QC.$   
 $\therefore AQ + QC > AC,$   
 $\therefore AQ + QB = AQ + QC > AP + PC = AP + PB.$   
 $\therefore PA + PB + AB < QA + QB + AB. \quad Q. E. D.$

(79) 過定角內一定點作諸直線與定角的兩邊所成諸三角形中,此定點是所作一邊中點的三角形面積最小.

$P$  是定  $\angle XOY$  內一定點  $AB, CD$  是過  $P$  的兩直線,而  $P$  是  $AB$  的中點. 求證  $\triangle OAB < \triangle OCD.$



(證)  $\because \angle PBD > \angle PAC,$  (三角形的外角大於他的內對角) 故可在  $\angle PBD$  內作  $BE$  令

$$\angle PBE = \angle PAC.$$

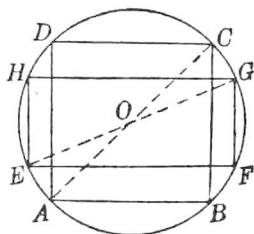
$\therefore PA = PB, \angle CPA = \angle ECB, \therefore \triangle CPA \cong \triangle EPB.$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OAB &= OCPB + \triangle CPA = OCPB + \triangle EPB \\ &= OCEB. \end{aligned}$$

但  $OCEB < \triangle OCD$ ,  $\therefore \triangle OAB < \triangle OCD$ . Q. E. D.

(80) 定圓內接諸矩形中，  
以正方形的面積為最大。

$ABCD$  是圓內接正方形。  
 $EFGH$  是圓內接矩形。求證  
 $\square ABCD > \square EFGH$ 。



〔證一〕 聯  $AC, EG$ . 因  $AB = BC$ ,

$$\therefore 2 \overline{AB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

又  $\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 = \overline{EG}^2$ .  $\because \angle B = \angle F = R\angle$ ,  $\therefore AC, EG$

都是直徑.  $\therefore AC = EG, \overline{AC}^2 = \overline{EG}^2$ .

$$\therefore 2 \overline{AB}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2$$

因  $EF > FG$  (或  $FG > EF$ ),

$$\therefore (EF - FG)^2 > 0.$$

$$\therefore (EF - FG)^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 - 2 \overline{EF} \cdot \overline{FG} > 0.$$

$$\therefore \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 > 2 \overline{EF} \cdot \overline{FG}.$$

$$\therefore 2\overline{AB}^2 > 2\overline{EF} \cdot \overline{FG}, \quad \therefore \overline{AB}^2 > \overline{EF} \cdot \overline{FG}.$$

即  $\square ABCD > \square EFGH$ . Q. E. D.

〔證二〕 聯  $AC, EG$ .

因  $\angle B = \angle F = R\angle$ ,  $\therefore AC, EG$   
是直徑, 故交於中心  $O$ .

聯  $OB, OF$ . 作  $FK \perp EG$ .

$$\therefore AB = BC, OA = OC,$$

$$\therefore BO \perp AC.$$

$$\therefore \square ABCD = 2\triangle ABC = 2\left(\frac{1}{2}\overline{BO} \cdot \overline{AC}\right) = \overline{BO} \cdot \overline{AC}.$$

$$\text{又 } \square EFGH = 2\triangle EFG = 2\left(\frac{1}{2}\overline{FK} \cdot \overline{EG}\right) = \overline{FK} \cdot \overline{EG}.$$

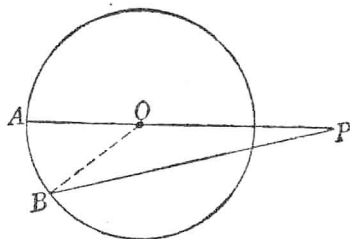
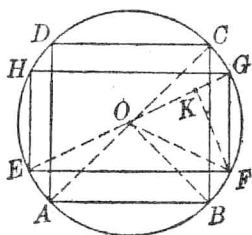
$\therefore AC, EG$  都是直徑,  $\therefore AC = EG$ , 而  $OF > FK$ ,

$$\therefore BO > FK, \quad \therefore \overline{BO} \cdot \overline{AC} > \overline{FK} \cdot \overline{EG}.$$

$\therefore \square ABCD > \square EFGH$ . Q. E. D.

(81) 定圓周上諸  
點與一定點所聯諸  
線份中, 以過中心者  
為最大.

$P$  為定點 (圓外或



圓內).  $PA$  過中心  $O$ .

$PB$  不過中心  $O$ . 求證

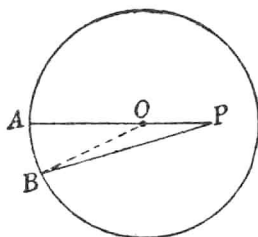
$$PA > PB.$$

[證] 聯  $OB$ .

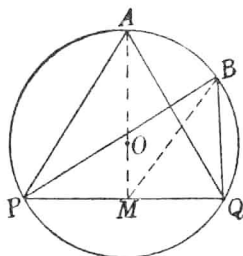
$\because OA = OB, \therefore PA$

即  $PO + OA = PO + OB > PB$ .

Q. E. D.



(82)  $P, Q$  爲圓周上兩定點. 圓周上其他諸點中, 以優弧  $PQ$  的中點與  $P, Q$  聯成兩弦上正方形之和爲最大.



設  $A$  爲優弧  $PQ$  的中點,  $B$  是圓周上其他任意一點. 求證  $\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 > \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2$ .

[證] 取  $PQ$  的中點  $M$ . 聯  $AM, BM$ .

$$\text{則 } \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{PM}^2. \quad \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{PM}^2.$$

但因  $A$  是優弧  $PQ$  的中點,  $M$  是  $PQ$  的中點, 故  $AM$  過中心  $O$ .  $\therefore AM > BM$ . (見上例)

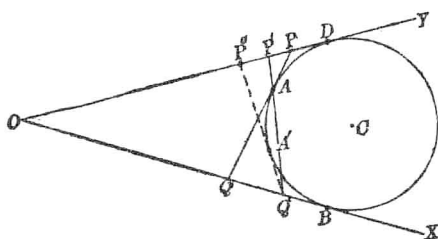
$$\therefore \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 > \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2.$$

Q. E. D.



(83)  $A$  是定角  $\angle XOY$  內一定點.

$\odot C$  過  $A$  且切  $OX, OY$  於  $B, D$ .



過  $A$  所作諸線份中, 以  $\odot C$  的切線與  $OX, OY$  所成三角形的周圍為最小.

$PQ$  過  $A$ , 切於  $\odot C$ .  $P'Q'$  是過  $A$  的其他任意一線. 求證  $OP+OQ+PQ < OP'+OQ'+P'Q'$ .

〔證〕  $\because PA=PD, QA=QB,$

$$\begin{aligned} \therefore OP+OQ+PQ &= OP+OQ+PA+QA \\ &= OP+OQ+PD+QB. \\ &= OD+OB. \end{aligned}$$

從  $Q'$  作  $\odot C$  的切線交  $OY$  於  $P''$ , 切  $\odot C$  於  $A'$ .

則  $\because P'A'=P'D, Q'A'=Q'B,$

$$\begin{aligned} \therefore OP''+OQ'+P''Q' &= OP''+OQ'+P'A'+Q'A' \\ &= OP''+OQ'+P'D+Q'B \\ &= OD+OB. \end{aligned}$$

$$\therefore OP + OQ + PQ = OP' + OQ' + P'Q'.$$

又  $\because P'Q' < P''P' + P'Q'$

$$\therefore OP'' + OQ' + P'Q' < OP'' + OQ' + P'P' + P'Q',$$

即  $OP'' + OQ' + P'Q' < OP' + OQ' + P'Q'.$

$$\therefore OP + OQ + PQ < OP' + OQ' + P'Q' \quad \text{Q. E. D.}$$

### 12. 其他各種雜題證例

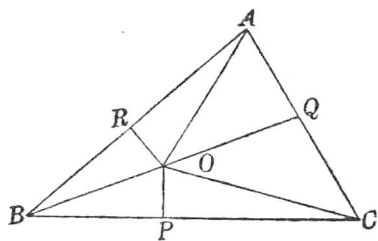
(84)  $O$  是  $\triangle ABC$

內任意一點.  $OP, OQ,$

$OR$  各為  $\angle BOC,$

$\angle COA, \angle AOB$  的等

分線 求證



$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1.$$

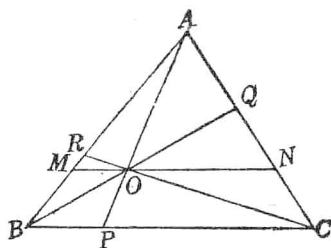
[證]  $\because \angle BOP = \angle COP,$

$$\therefore BP : CP = OB : OC.$$

同理  $CQ : AQ = OC : OA, \quad AR : BR = OA : OB$

$$\therefore \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BQ} = \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OA}{OB} = 1. \quad \text{Q. E. D.}$$

(85)  $O$  是  $\triangle ABC$  內任意一點.  $AO$  延長交  $BC$  於  $P$ .  $BO$  延長交  $AC$  於  $Q$ .  $CO$  延長交  $AB$  於  $R$ . 求證



$$\frac{OP}{AP} + \frac{OQ}{BQ} + \frac{OR}{CR} = 1.$$

[證] 過  $O$  作  $MN \parallel BC$  交  $AB$  於  $M$ ,  $AC$  於  $N$ . 則因  $\triangle OQN \sim \triangle BQC$ ,  $\therefore OQ : BQ = ON : BC$ . 又因  $\triangle ORM \sim \triangle CRB$ ,  $\therefore OR : CR = OM : BC$ .

$$\therefore \frac{OQ}{BQ} + \frac{OR}{CR} = \frac{ON}{BC} + \frac{OM}{BC} = \frac{ON + OM}{BC} = \frac{MN}{BC}.$$

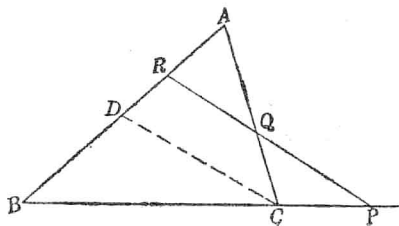
因  $MO \parallel BP$ ,  $\therefore OP : AP = MB : AB$ .

因  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ ,  $\therefore MN : BC = AM : AB$ .

$$\begin{aligned} \therefore \frac{OP}{AP} + \frac{OQ}{BQ} + \frac{OR}{CR} &= \frac{OP}{AP} + \frac{MN}{BC} \\ &= \frac{MB}{AB} + \frac{AM}{AB} = \frac{MB + AM}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1 \end{aligned}$$

Q. E. D.

(86) 一直線交任意三角形  $ABC$  的三邊  $BC, AC, AB$  或其延線於  $P, Q, R$ .



求證

$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1.$$

〔證〕 過  $C$  作

$$CD \parallel PR.$$

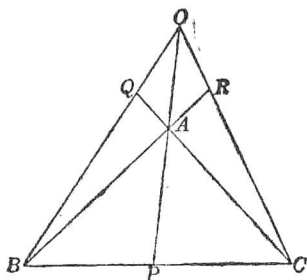
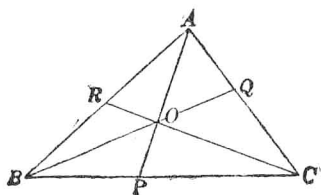
則  $BP : CP = BR : DR,$

$$CQ : AQ = DR : AR.$$

$$\therefore \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = \frac{BR}{DR} \cdot \frac{DR}{AR} \cdot \frac{AR}{BR} = 1. \quad \text{Q. E. D.}$$

(87) 一點  $O$  聯任意三角形  $ABC$  的三頂點  $OA, OB, OC$  各交對邊  $BC, CA, AB$  或其延線於  $P, Q, R$ .

求證  $\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1.$



〔證一〕 因直線  $COR$  交  $\triangle ABP$  的三邊於  $C, O, R$

$$\therefore \frac{BC}{PC} \cdot \frac{PO}{AO} \cdot \frac{AR}{BR} = 1 \quad (\text{例題 86})$$

又因直線  $BOQ$  交  $\triangle ACP$  的三邊於  $B, O, Q$ ,

$$\therefore \frac{PB}{CB} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AO}{PO} = 1 \quad (\text{例題 86})$$

$$\begin{aligned} \therefore \left( \frac{BC}{PC} \cdot \frac{PO}{AO} \cdot \frac{AR}{BR} \right) \left( \frac{PB}{CB} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AO}{PO} \right) &= \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} \\ &= 1. \quad Q. E. D. \end{aligned}$$

(證二)

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\triangle ABP}{\triangle ACP} = \frac{\triangle OBP}{\triangle OCP} = \frac{\triangle ABP \sim \triangle OBP}{\triangle ACP \sim \triangle OCP} = \frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}.$$

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{\triangle BCQ}{\triangle BAQ} = \frac{\triangle OCQ}{\triangle OAQ} = \frac{\triangle BCQ \mp \triangle OCQ}{\triangle BAQ \mp \triangle OAQ} = \frac{\triangle BCO}{\triangle ABO}.$$

$$\frac{AR}{BR} = \frac{\triangle CAR}{\triangle CBR} = \frac{\triangle OAR}{\triangle OBR} = \frac{\triangle CAR \mp \triangle OAR}{\triangle CBR \mp \triangle OBR} = \frac{\triangle ACO}{\triangle BCO}$$

$$\text{故 } \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = \frac{\triangle ABO}{\triangle ACO} \cdot \frac{\triangle BCO}{\triangle ABO} \cdot \frac{\triangle ACO}{\triangle BCO} = 1.$$

Q. E. D

(88)  $O$  是

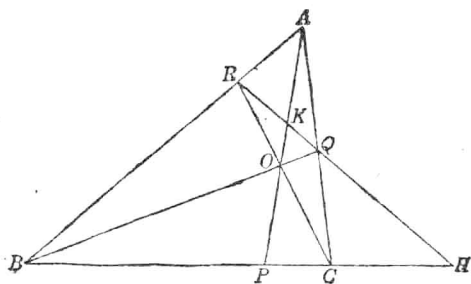
$\triangle ABC$  內任意

一點.  $AO, BO,$

$CO$  各交  $BC,$

$CA, AB$  於  $P, Q,$

$R. RQ$  交  $AP$  於



$K$ , 交  $BC$  於  $H$ .

求證 (a)  $B, P, C, H$  是調和點列.

(b)  $R, K, Q, H$  是調和點列.

(c)  $A, K, O, P$  是調和點列.

〔證〕 (a)  $\because$  直線  $RQH$  交  $\triangle ABC$  的三邊於  $H$ ,

$Q, R$ , 故 
$$\frac{BH}{CH} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1. \quad (\text{例題 86})$$

又  $\because$   $OA, OB, OC$  交  $\triangle ABC$  的三邊於  $P, Q, R$ ,

故 
$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1. \quad (\text{例題 87})$$

$$\therefore BH : CH = BP : CP.$$

$\therefore B, P, C, H$  是調和點列.  $Q. E. D.$

(b)  $\because$  直線  $ROC$  交  $\triangle KPH$  的三邊於  $C$ ,

$R, O$ , 故 
$$\frac{PC}{HC} \cdot \frac{HR}{KR} \cdot \frac{KO}{PO} = 1. \quad (\text{例題 86})$$

又  $\because$  直線  $QOB$  交  $\triangle KPH$  的三邊於  $B, Q, O$ ,

故 
$$\frac{PB}{HB} \cdot \frac{HQ}{KQ} \cdot \frac{KO}{PO} = 1. \quad (\text{例題 86})$$

$\therefore B, P, C, H$  是調和點列 (本題 a),

$$\therefore \frac{PC}{HC} = \frac{PB}{HB} \quad \therefore \frac{HR}{KR} = \frac{HQ}{KQ}$$

$\therefore R, K, Q, H$  是調和點列. Q. E. D.

(c)  $\therefore$  直線  $ROC$  交  $\triangle KPH$  的三邊於

$C, R, O$ , 故 
$$\frac{PC}{HC} \cdot \frac{HR}{KR} \cdot \frac{KO}{PO} = 1$$

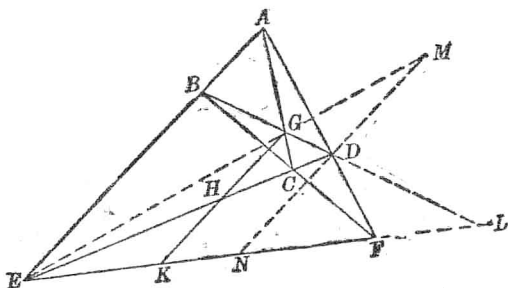
又  $\therefore$  直線  $AQC$  交  $\triangle KPH$  的三邊於  $C, Q, A$ ,

故 
$$\frac{PC}{HC} \cdot \frac{HQ}{KQ} \cdot \frac{KA}{PA} = 1$$

又  $\therefore R, K, Q, H$  是調和點列, (本題 b)

$$\therefore \frac{HR}{KR} = \frac{HQ}{KQ} \quad \therefore \frac{KO}{PO} = \frac{KA}{PA}$$

$\therefore A, K, O, P$  是調和點列. Q. E. D.



(89) 四邊形  $ABCD$  的兩雙對邊延長相交於  $E, F$ . 從其對角線交點  $G$  引  $AE$  的平行線交  $ED$

於  $H$ ,  $EF$  於  $K$ . 求證  $GH=HK$ .

〔證〕 延長  $BD$  交  $EF$  於  $L$ . 過  $D$  作  $GK$  的平行線交  $EF$  於  $N$ , 交  $EG$  於  $M$ .

則  $\because GK \parallel AE, \quad \therefore MN \parallel AE,$

$\therefore \triangle MGD \sim \triangle EGB, \quad \therefore MD : BE = GD : GB.$

又  $\triangle DNL \sim \triangle BEL, \quad \therefore DN : BE = LD : LB.$

但  $B, G, D, L$  是調和點列 (例題 88 b)

$\therefore GD : GB = LD : LB \quad \therefore MD = DN.$

又  $\because \triangle EHG \sim \triangle EDM, \quad \therefore HG : DM = EH : ED.$

$\triangle EHK \sim \triangle EDN, \quad \therefore HK : DN = EH : ED$

$\therefore HG : DM = HK : DN. \quad \text{今 } DM = DN,$

$\therefore HG = HK.$

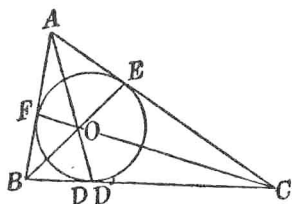
Q. E. D.

(90)  $\triangle ABC$  的三邊切

其內接圓於  $D, E, F$ .

求證  $AD, BE, CF$  共點.

〔證〕 聯  $BE, CF$  交於  $O$ .



作  $AO$  交  $BC$  於  $D'$ . 則  $\frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1. \quad (87)$

$\because AE = AF, CE = CD, BF = BD, \quad \therefore \frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$



$$\therefore BD : CD' = BD : CD,$$

$$\therefore BD + CD' : CD' = BD + CD : CD,$$

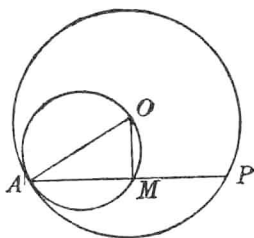
$$\text{即 } BC : CD' = BC : CD, \quad \therefore CD' = CD,$$

$\therefore D'$  合於  $D$ .

$\therefore AD, BE, CF$  共點. Q. E. D.

### 13. 軌跡證例

(91)  $A$  是定  $\odot O$  圓周上一定點.  $AP$  是任意弦.  $M$  是  $AP$  的中點. 求證  $M$  的軌跡是  $OA$  為直徑所作之圓周.

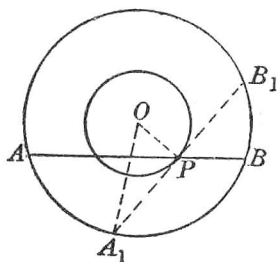


[證] (1) 設  $M$  是  $OA$  為直徑所作之圓周上任意一點, 則  $\angle AMO = R\angle$ . 故  $M$  是  $AP$  的中點. 故此圓周上之點適合於所設條件.

(2) 設  $M$  是  $AP$  的中點, 則  $OM \perp AP$ ,  
 $\therefore \angle AMO = R\angle \quad \therefore M$  在  $OA$  為直徑的圓周上.  
 故適合於所設條件之點在此圓周上.

故  $M$  的軌跡是  $OA$  為直徑所作之圓周. Q. E. D.

(92) 定圓  $O$ , 其半徑為  $r$ ,  
 圓內一動點  $P$ . 過  $P$  作任意  
 弦  $APB$ , 其兩部份  $AP, BP$   
 所包矩形等於一定值  $k^2$ .  
 求證  $P$  的軌跡是以  $\sqrt{r^2 - k^2}$   
 為半徑的  $\odot O$  的同心圓.



[證] (1) 設  $P$  是此同心圓上任意一點. 過  $P$   
 作切線  $A_1B_1$ . 聯  $OP, OA_1$ .

$$\begin{aligned} \text{則 } AP \cdot BP &= A_1P \cdot B_1P = \overline{A_1P}^2 = \overline{OA_1}^2 - \overline{OP}^2 \\ &= r^2 - (\sqrt{r^2 - k^2})^2 = k^2. \end{aligned}$$

故此同心圓上之點適合於所設條件.

(2) 設  $P$  適合條件的點. 同樣過  $P$  作切  
 線  $A_1B_1$ . 聯  $OP, OA_1$ .

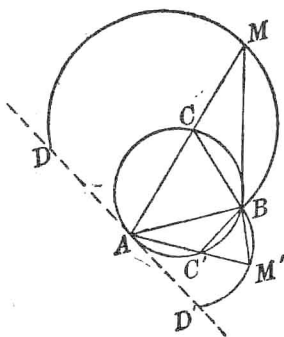
$$\begin{aligned} \text{則 } \overline{OA_1}^2 - \overline{OP}^2 &= \overline{A_1P}^2 = A_1P \cdot B_1P = AP \cdot BP = k^2. \\ \therefore \overline{OP}^2 &= \overline{OA_1}^2 - k^2 = r^2 - k^2. \quad \therefore OP = \sqrt{r^2 - k^2}. \end{aligned}$$

故  $P$  在  $O$  為中心  $\sqrt{r^2 - k^2}$  的圓周上.

故  $P$  的軌跡是以  $\sqrt{r^2 - k^2}$  為半徑的  $\odot O$  的  
 同心圓.

Q. E. D.

(93)  $AB$  是定圓  $O$  內的一定弦.  $C$  是  $\odot O$  圓周上任意點.  $AC$  延線  $CM=CB$ . 求  $M$  的軌跡.



〔解〕  $AB$  是定弦, 故  $\angle ACB$  一定. 設  $\angle ACB = 2\alpha$ ,  
 $\angle AC'B = 2R\angle - 2\alpha = 2(R\angle - \alpha)$ .

則因  $CM = CB$ ,  $\therefore \angle CMB = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle ACB = \alpha$ .

同樣  $\angle C'M'B = \angle C'BM' = \frac{1}{2}\angle AC'B = R\angle - \alpha$

故  $M$  的軌跡當為  $AB$  為弦,  $\alpha$  及  $R\angle - \alpha$  為弓形角的兩個弓形弧. 但當  $C$  或  $C'$  接近於  $A$  時  $AM$  或  $AM'$  是切線. 因  $A$  是定點, 故過  $A$  所作切線是定直線如圖  $DD'$ . 故當  $C$  接近於  $A$  時,  $M$  接近於  $D$ , 而當  $C'$  接近於  $A$  時,  $M'$  接近於  $D'$ .

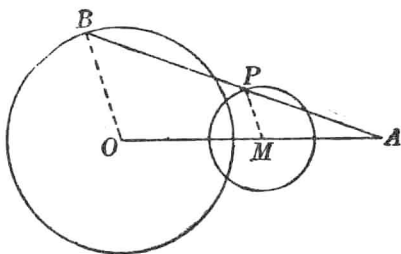
故  $M$  的軌跡是以  $AB$  為弦,  $\alpha$  及  $R\angle - \alpha$  為弓形角所作的兩個弓形弧的一部份,

$$\frown DMB, \frown BM'D.$$

〔證略〕

(94)  $A$  是定點,  $\odot O$  是定圓, 其半徑  $= r$ .  $B$  是

⊙ $O$  圓周上任意一點  $P$  是  $AB$  的中點. 求證  $P$  的軌跡是以  $OA$  的中點  $M$  為中心,  $\frac{1}{2}r$  為半徑所作之圓.



〔證〕 (1) 設  $P$  是  $\odot M$  上任意一點.

聯  $MP$ , 過  $O$  作  $OB \parallel MP$  與  $AP$  延線交於  $B$ .

則因  $AM = MO$ ,  $MP \parallel OB \therefore AP = PB$ ,  $MP = \frac{1}{2}OB$ .

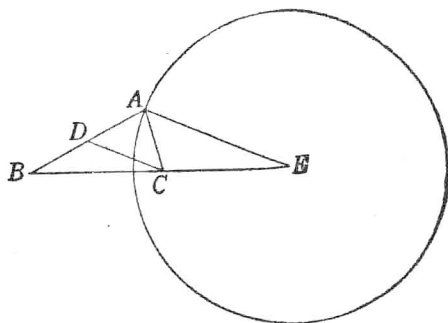
但因  $MP = \frac{1}{2}r$ ,  $\therefore OB = r$ ,  $\therefore B$  是  $\odot O$  上一點.  
 $P$  是  $AB$  的中點.  $\therefore P$  適合於所設條件.

(2) 設  $B$  是  $\odot O$  上任意點  $P$  是  $AB$  的中點. 聯  $OB$ ,  $PM$ . 則  $PM = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}r$ . 故  $P$  在  $\odot M$  上.

$\therefore$  適合於條件之點在  $\odot M$  上.

故  $P$  的軌跡是以  $OA$  的中點  $M$  為中心,  $\frac{1}{2}r$  為半徑所作之圓. Q. E. D.

(95)  $\triangle ABC$  中底邊  $BC$  的位置一定.  $CD$  是中線, 其長等於一定值  $k$ . 求證頂點  $A$  的軌跡是一圓周, 其中心在  $BC$  延線上一點  $E$ ,  $CE = BC$ , 其半徑為  $2k$ .



〔證〕 (1) 設  $A$  是  $\odot E$  上任意一點. 則  $AE = 2k$ .  
 過  $C$  作  $CD \parallel EA$ ,  $\because C$  是  $BE$  的中點, 故  $D$  亦是  $AB$   
 的中點,  $\therefore CD$  是中線. 又  $CD = \frac{1}{2} EA = \frac{1}{2} (2k) = k$ .  
 $\therefore \odot E$  上點適合於所設條件.

(2) 設  $A$  是適合於條件的頂點.  
 則  $\triangle ABC$  中  $AB$  上的中線  $CD = k$ .  
 聯  $AE$ .  $\because D$  是  $AB$  中點,  $C$  是  $BE$  中點.  
 $\therefore DC = \frac{1}{2} AE$ , 即  $AE = 2DC = 2k$ .  $\therefore A$  在  $\odot E$  上.  
 $\therefore$  適合於所設條件之點在  $\odot E$  上.

故  $\odot E$  是  $A$  的軌跡.

Q. E. D.

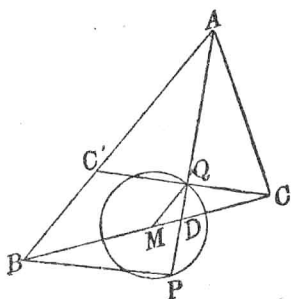
(96)  $\triangle ABC$  中底邊  $BC$  的位置一定.  $AB, AC$  兩邊之差等於一定長  $k$ ,  $AD$  是  $\angle A$  的等分線. 從  $B$ ,

或  $C$  作  $AD$  之垂線  $BP, CQ$ .

求證垂足  $P$  及  $Q$  的軌跡

是以  $BC$  中點  $M$  為中心,

以  $\frac{1}{2}k$  為半徑所作之圓.



【證】 (1) 設  $Q$  是  $\odot M$  上  
任意一點. 則  $MQ = \frac{1}{2}k$ . 聯

$CQ$ . 作  $QA \perp CQ$ . 作  $AB \parallel MQ$ .  $QA, BA$  交於  $A$ . 延長  
 $CQ$  交  $BA$  於  $C'$ ,  $\because BC' \parallel MQ$ , 又  $BM = MC$ ,  
 $\therefore C'Q = QC$ .  $\therefore \triangle AC'Q \cong \triangle ACQ$ .  $\therefore AC' = AC$ .  
 $\therefore AB - AC = AB - AC' = BC' = 2MQ = 2(\frac{1}{2}k) = k$ .

又  $\because \triangle AC'Q \cong \triangle ACQ$ . 故  $AQ$  是  $\angle A$  的等分  
線,  $AQ$  合於  $AD$ .  $\therefore CQ \perp AD$ .

故  $\odot M$  上之點適合於所設條件.

(2) 設  $Q$  是適合於所設條件之點.

則  $CQ \perp AD$ . 延長  $CQ$  交  $AB$  於  $C'$ .  $\because AQ \perp CC'$ ,  
 $\angle C'AQ = \angle CAQ$ ,  $\therefore \triangle AC'Q \cong \triangle ACQ$ .

$\therefore C'Q = QC$ . 又因  $BM = MC$ .  $\therefore MQ = \frac{1}{2}BC'$ .

又因  $AB - AC = k$  (所設條件). 但  $AC = AC'$ ,

$\therefore BC' = AB - AC' = AB - AC = k$ .  $\therefore MQ = \frac{1}{2}k$ .

故  $Q$  在  $\odot M$  上.

故  $Q$  的軌跡是  $\odot M$ .

同理  $P$  的軌跡是  $\odot M$ .

Q. E. D.

(97)  $A, B$  是兩定點.  $P$  是一動點.  $PA, PB$  上正方形之和等於一定值  $k^2$ . 求  $P$  的軌跡.

〔解〕 取  $AB$  中點  $M$ .

聯  $PA, PB, PM$ . 則

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PM}^2 + 2\overline{AM}^2.$$

因  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k^2$  爲定值,

$$\therefore 2\overline{PM}^2 + 2\overline{AM}^2 = k^2.$$

$\therefore A, B$  是定點, 故其

中點  $M$  是定點,  $AM$  是

定長,  $\therefore \overline{PM}^2 = \frac{k^2 - 2\overline{AM}^2}{2}$  爲定值.  $\therefore PM$  是定長.

由是得  $P$  之軌跡爲以  $AB$  中點  $M$  爲中心, 以

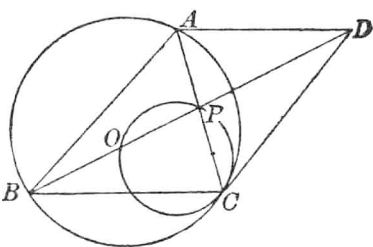
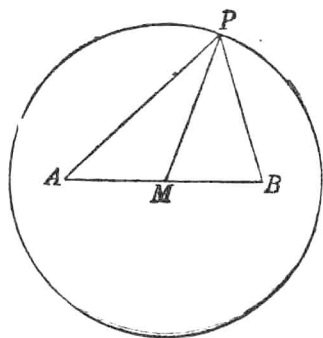
$\sqrt{\frac{k^2 - 2\overline{AM}^2}{2}}$  爲半徑

所作之圓.

〔證略〕

(98)  $BC$  是定圓

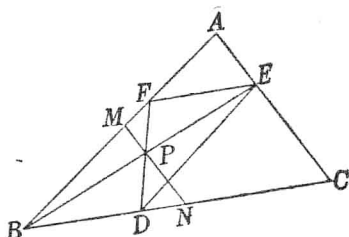
內一定弦.  $BA$  是任



意弦.  $ABCD$  是平行四邊形, 其對角線交於  $P$ . 求  $P$  之軌跡.

〔解〕  $ABCD$  是平行四邊, 故  $AC, BD$  互相等分, 故  $P$  是  $AC$  的中點. 故  $P$  的軌跡是以半徑  $OC$  為直徑所作圓周. (見例題 84).

(99) 定  $\triangle ABC$  內接一  $\square BDEF$  與  $\triangle ABC$  共有  $\angle B$ . 其對角線交於  $P$ . 求證  $P$  的軌跡是  $BA, BC$  的中點  $M, N$  所聯線份.



〔證〕 (1) 設  $P$  是  $MN$  上任意一點, 作  $BP$  延長交  $AC$  於  $E$ .  $\because AM=MB, CN=NB, \therefore MN \parallel AC, \therefore BP=PE$ . 作  $EF, ED$  成  $\square BDEF$ .  $P$  是  $BE$  中點, 故必為  $BE, DF$  之交點.

$\therefore MN$  上任意點適合於所設條件.

(2) 設  $P$  是內接  $\square BDEF$  對角線的交點. 則  $BP=PE, \because BM=MA, \therefore MP \parallel AC$ , 但  $MN \parallel AC$ . 故  $MP$  合於  $MN$ , 即  $P$  在  $MN$  上.



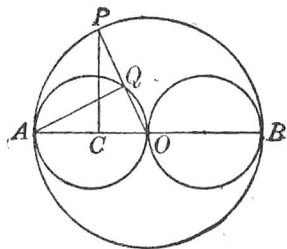
故適合於條件之點在  $MN$  上.

故  $MN$  是  $P$  點的軌跡.

Q. E. D.

(100) 定圓  $O$  的圓周上一動點  $P$ . 從  $P$  作定直徑  $AOB$  的垂線  $PC$ .  $OP$  上取  $Q$  令  $OQ = OC$ . 求  $Q$  的軌跡.

〔解〕 聯  $AQ$ . 在  $\triangle PCO$ ,  
 $\triangle AQO$  中,  $OP = OA$ ,  $OC = OQ$   
 $\angle POC = \angle AOQ$ .



$\therefore \triangle PCO \cong \triangle AQO$ .

$\therefore \angle AQO = \angle PCO = R\angle$ .

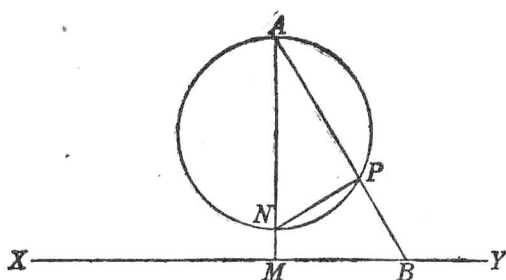
$\therefore Q$  在  $AO$  為直徑所作的圓上. 若  $\widehat{PA} > \widehat{PB}$  時, 則  $Q$  在  $BO$  為直徑所作的圓上. 又設  $Q$  是  $AO$  為直徑所作圓上任意點, 則  $\angle AQO = R\angle = \angle PCO$ , 又  $\because \angle AOQ = \angle POC$ ,  $AO = PO$ ,

$\therefore \triangle AOQ \cong \triangle POC$ ,  $\therefore OQ = OC$ . 適合於所設條件.

故  $Q$  之軌跡是以  $AO$ , 及  $BO$  為直徑所作的兩個圓周.

Q. E. D.

(101) 從定點  $A$  至定直線  $XY$  引任意線份  $AB$ .



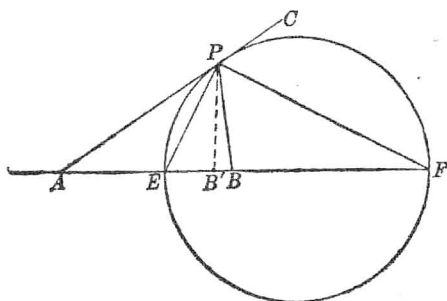
在  $AB$  上取  $P$  令  $AB, AP$  所包矩形等於一定值  $k^2$ .  
求  $P$  的軌跡.

〔解〕 作  $AM \perp XY$ . 在  $AM$  上取  $N$  令  $AM, AN$  所包矩形  $= k^2$ , 即  $AN = \frac{k^2}{AM}$ ,  $\because AM$  是定線份,  $k^2$  是定值, 故  $AN$  是定長, 故  $N$  是定點.

又因  $AB \cdot AP = k^2 = AM \cdot AN$ ,  $\therefore N, M, B, P$  共圓.  
故  $\angle APN = \angle AMB = R\angle$ .  $\therefore P$  在  $AN$  為直徑所作圓周上. 從此求得  $P$  之軌跡是以  $AN$  為直徑所作之圓周 (證略).

(102)  $A, B$  是兩定點.  $P$  是一動點.  $PA : PB = m : n$  是定值. 求證  $P$  的軌跡是分  $AB$  線份為  $m : n$  的內外兩分點間線份為直徑所作之圓.

〔證〕 (1) 設  $P$  是合於所設條件之點, 即



$$PA : PB = m : n \quad \therefore AE : EB = m : n$$

$\therefore PA : PB = AE : EB$ , 故  $PE$  是  $\angle APB$  的等分線

同樣  $\therefore AF : FB = m : n \quad \therefore PA : PB = AF : FB$ .

$\therefore PF$  是  $\angle APB$  的外等分線.  $\therefore \angle EPF = R\angle$ .

故  $P$  在  $EF$  為直徑所作圓上.

(2) 設  $P$  是  $EF$  為直徑所作圓周上的任意一點.

則  $\angle EPF = R\angle$ . 聯  $PA, PE, PF$ .

作  $PB'$  令  $\angle EPB' = \angle APE$ . 則  $\angle B'PF = \angle FPC$ .

(證略)

$$\therefore PA : PB' = AE : B'E = AF : B'F.$$

$$\therefore AE : AF = B'E : B'F$$

$$\therefore AE + AF : AF = B'E + B'F : B'F$$

即  $AE + AF : AF = EF : B'F.$

但因  $AE : BE = AF : BF = m : n.$

$$\therefore AE : AF = BE : BF$$

$$\therefore AE + AF : AF = BE + BF : BF$$

即  $AE + AF : AF = EF : BF$

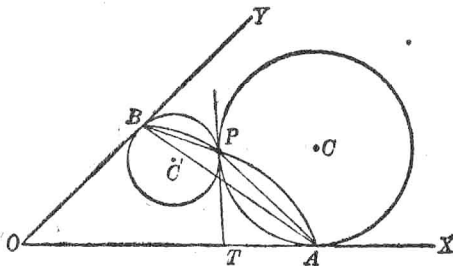
由是可得  $B'F = BF$  而  $B'$  合於  $B$ .

故  $PA : PB = AE : BE = AF : BF = m : n.$

故在  $EF$  為直徑所作圓上之點適合於所設條件.

故  $P$  的軌跡是  $EF$  為直徑所作之圓,即分線份  $AB$  為  $m : n$  的內外兩分點間的線份為直徑所作之圓. Q. E. D.

(103)  $\angle XOY$  是定角.  $A, B$  是  $OX, OY$  上兩定點.



$\odot C, \odot C'$  是兩個動圓.  $\odot C$  切  $OX$  於  $A$ ,  $\odot C'$  切  $OY$

於  $B$ .  $\odot C, \odot C'$  在  $\angle XOY$  內互相外切於  $P$ . 求  $F$  之軌跡.

〔解〕 聯  $PA, PB, AB$ , 過  $P$  作兩圓公切線  $PT$ .

則  $\angle TPA = \angle TAP, \angle TPB = \angle OBP$ .

$\therefore \angle APB = \angle TPA + \angle TPB = \angle OAP + \angle OBP$ .

$\therefore \angle APB + \angle OAP + \angle OBP + \angle XOY = 4R$ ,

$\therefore 2\angle APB + \angle XOY = 4R$ .

$\therefore 2\angle APB = 4R - \angle XOY$

$\therefore \angle APB = 2R - \frac{1}{2}\angle XOY$ .

$\therefore \angle APB$  的大小一定.

故得  $P$  之軌跡是  $AB$  爲弦  $2R - \frac{1}{2}\angle XOY$  爲弓形角所作的一個弓形弧. (證略)

(104)  $ABCD$  是一定四

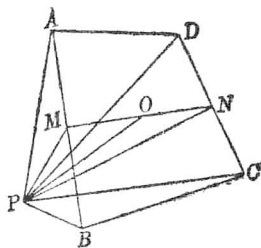
邊形.  $P$  是一動點. 但

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = k^2,$$

$k$  爲定值. 求  $P$  的軌跡.

〔解〕 取  $AB$  的中點  $M$ ,

$CD$  的中點  $N$ , 聯  $MN$ , 再取其中點  $O$ . 設  $P$  是合於所設條件的點. 聯  $PA, PB, PC, PD, PM, PN, PO$ .



$$\text{則 } \overline{PA} + \overline{PB} = 2 \overline{AM} + 2 \overline{PM}; \overline{PC} + \overline{PD} = 2 \overline{DN} + 2 \overline{PN}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} &= 2 \overline{AM} + 2 \overline{PM} + 2 \overline{DN} + 2 \overline{PN} \\ &= 2(\overline{AM} + \overline{DN}) + 2(\overline{PM} + \overline{PN}). \end{aligned}$$

$$\text{但因 } \overline{PM} + \overline{PN} = 2 \overline{PO} + 2 \overline{MO}^2$$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2 \overline{AM} + 2 \overline{DN} + 4 \overline{OM} + 4 \overline{PO}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore 4 \overline{PO}^2 &= \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} - 2 \overline{AM} - 2 \overline{DN} - 4 \overline{OM} \\ &= k^2 - 2 \overline{AM} - 2 \overline{DN} - 4 \overline{OM}. \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PO}^2 = \frac{1}{4}(k^2 - 2 \overline{AM} - 2 \overline{DN} - 4 \overline{OM}^2).$$

今  $k$  是定值,  $A, D, M, N, O$  都是定點,

$\therefore \overline{PO}^2$  一定, 故  $PO$  之長一定.

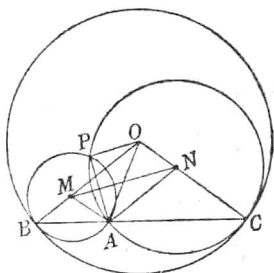
故  $P$  之軌跡是以  $O$  為中心以

$\frac{1}{2}\sqrt{(k^2 - 2 \overline{AM} - 2 \overline{DN} - 4 \overline{OM}^2)}$  為半徑所作

之圓.

Q. E. D.

(105)  $\odot O$  是定圓.  $A$  是圓內一定點.  $BC$  是過  $A$  的任意弦.  $\odot M, \odot N$  是過  $A$  點所作  $\odot O$  的內切圓.  $\odot M$  切  $\odot O$  於  $B$ ,  $\odot N$  切  $\odot O$  於



$C$ . 求  $\odot M, \odot N$  的又一交點  $P$  的軌跡.

〔解〕 聯  $OA, OB, OC, OP, AP, MN$ .

$\because \odot O, \odot M$  內切,  $\therefore M$  在  $OB$  上. 同理  $N$  在  $OC$  上.  $\because OB=OC, \therefore \angle OBC = \angle OCB$ .

又因  $NA=NC, \therefore \angle NAC = \angle OCB$ ,

$\therefore \angle OBC = \angle NAC. \therefore OM \parallel NA$ .

同理可證  $\angle OCB = \angle MAB$ , 而  $ON \parallel MA$ .

$\therefore ANOM$  是平行四邊形.  $\therefore MN$  過  $OA$  的中點.

但  $MN$  必過  $PA$  的中點 (定理 46).  $\therefore PO \parallel MN$ .

但  $PA \perp MN$  (定理 46),  $\therefore PA \perp OP$ .

即  $\angle APO = R\angle$ . 故  $P$  的軌跡是以  $OA$  為直徑所作之圓. (證略)

(106)  $AB, CD$  是定圓  $\odot O$

內兩個任意弦. 但  $AB \perp CD$ ,

且  $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = m^2$ ,  $m$  是定值.

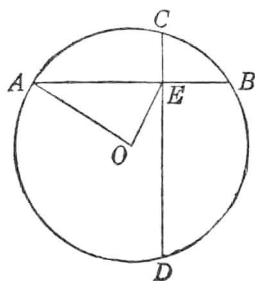
求此兩弦交點的軌跡.

〔解〕 設  $AB, CD$  直交於  $E$ .

則  $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 8\overline{OA}^2 - 4\overline{OE}^2$ . (證法見例題 37)

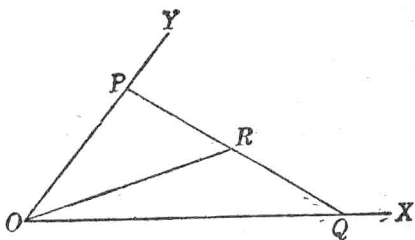
$$\therefore 4\overline{OE}^2 = 8\overline{OA}^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2) = 8\overline{OA}^2 - m^2$$

$$\overline{OE}^2 = \frac{1}{4}(8\overline{OA}^2 - m^2) = 2\overline{OA}^2 - \frac{1}{4}m^2, \text{ 是定值, 故 } E$$



的軌跡是以  $O$  爲中心, 以  $\sqrt{2OA^2 - \frac{1}{4}m^2}$  爲半徑所作之圓. Q. E. D.

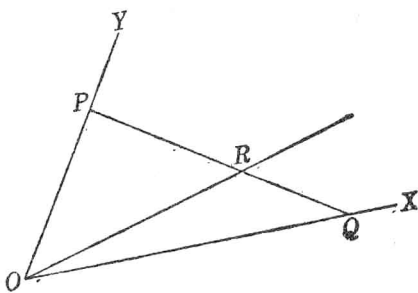
(107)  $\angle XOY$  是定角.  $P$  是  $OY$  上一定點.  $PQ$  是從  $P$  至  $OX$  上的動線份.  $R$  是  $PQ$  上的



內分或外分點, 而  $PQ \cdot PR = \overline{PO}^2$ . 求  $R$  的軌跡.

〔解〕  $\because PQ \cdot PR = \overline{PO}^2, \therefore PQ : PO = PO : PR$ , 而  $\angle OPQ$  與  $\angle RPO$  合一.  $\therefore \triangle OPQ \sim \triangle RPO$ .  $\therefore \angle PRO = \angle POQ$ , 即  $\angle XOY$ . 故  $R$  的軌跡是以  $OP$  爲弦以  $\angle XOY$  爲弓形角所作的弓形弧.

(108)  $\angle XOY$  是定角.  $PQ$  的方向一定交  $OX$  於  $Q$ ,  $OY$  以  $P$ .  $R$  是  $PQ$  上的內分或外分點, 而  $\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \overline{PO}^2$ .



求  $R$  的軌跡.



[解]  $\triangle OPQ \sim RPO$ ,  $\therefore \angle PRO = \angle XOY$ . (證法見上例) 因  $PQ$  的方向一定,  $\therefore \angle PQO$  是定角.  
 $\therefore \angle XOR = \angle PRO - \angle RQO = \angle XOY - \angle PQO$  是一定. 故  $R$  的軌跡是從  $O$  所作的一個半射線, 此半射線與  $OX$  所夾之角等於  $\angle XOY - \angle PQO$ .

Q. E. D.

#### 14. 基本作圖題彙集

- 作圖題 1. 作定線份的中點.  
 作圖題 2. 等分定線份為  $n$  份.  
 作圖題 3. 分一定線份令其比為  $l : m : n : \dots$ .  
 作圖題 4. 內分或外分一定線份等於定比.  
 作圖題 5. 作定角的等分線.  
 作圖題 6. 從定直線內或外一點作垂線.  
 作圖題 7. 從定直線內或外一點作直線令與定直線所成之角等於一定角.  
 作圖題 8. 過定點作定直線的平行線.  
 作圖題 9. 等分定圓弧.  
 作圖題 10. 過三定點作圓.

作圖題 11. 從定圓外一定點作圓的切線.

作圖題 12. 以定線份爲弦作弓形令所含弓形角等於一定角.

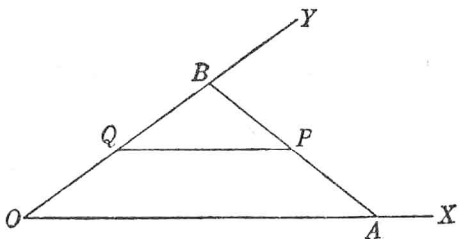
作圖題 13. 作三個定長的第四比例項.

即已設三個長  $a, b, c$ , 求長  $x$  令  $a : b = c : x$ .

### 15. 作圖題解法雜例

(109) 過定角  $\angle XOY$  內一定邊  $P$  求作一直線交  $OX$  於  $A$ , 交  $OY$  於  $B$  令  $AP = BP$ .

〔解析一〕 設  $AB$  是所求之線. 則  $P$  是  $\triangle OAB$  一邊的中點. 若過  $P$  作  $AO$  的平行線交  $OY$  於  $Q$ , 則



$Q$  必爲  $OB$  的中點. 因  $P$  是定點, 故  $PQ$  一定,  $Q$  一定, 從可求得  $B$  點, 因得作法如下:

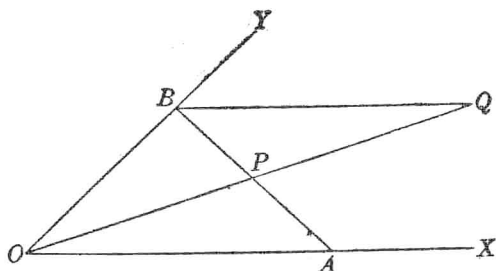
〔作法一〕 過  $P$  作  $PQ \parallel AO$ . 在  $OY$  上取  $B$ , 令

$QB = OQ$ . 聯  $BP$  延長之交  $OX$  於  $A$ . 則  $AB$  即所求作之線. Q. E. F.

〔證〕  $\because PQ \parallel OA, OQ = QB, \therefore PA = PB$ .

故  $AB$  即所求作之線. Q. E. D.

〔解析二〕 設  $AB$  是所求之線. 聯  $OP$ , 延長之至  $Q$  令  $PQ = OP$ . 聯  $QB$ . 則  $\triangle POA \cong \triangle PQB$ .



$\therefore \angle PQB = \angle XOP$ . 因  $\angle XOP$  是定角,  $Q$  是定點, 從可求得  $B$  點如下:

〔作法二〕 聯  $OP$  延長之至  $Q$  令  $PQ = OP$ . 過  $Q$  作  $QB$  令  $\angle PQB = \angle XOP$ .  $QB$  交  $OY$  於  $B$ . 聯  $BP$  延長之交  $OX$  於  $A$ . 則  $AB$  即所求. Q. E. F.

〔證〕 在  $\triangle POA, \triangle PQB$  中,  $OP = PQ$ ,  
 $\angle POA = \angle PQB, \angle OPA = \angle QPB$ ,

$\therefore \triangle POA \cong \triangle QPB. \quad \therefore PA = PB$

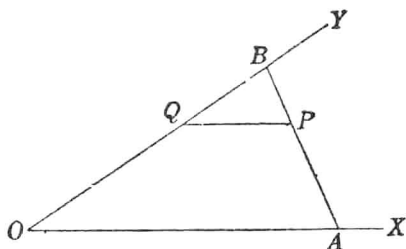
$\therefore AB$  即所求作之線.

*Q. E. D.*

(110) 過定角  $\angle XOY$  內一定點  $P$ , 求作一直線交  $OX$  於  $A$ , 交  $OY$  於  $B$ , 令  $PA : PB = m : n$ .

〔解析〕 設  $AB$  是所求之線 作  $PQ \parallel AO$ . 則  $PA : PB = QO : QB = m : n$ . 因  $P$  是定點, 故  $Q$  是定點,  $\therefore OQ$  是定

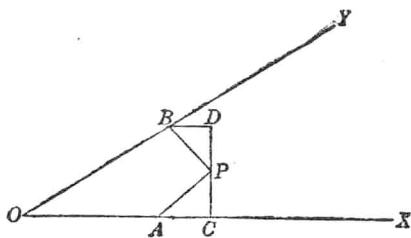
長. 又因  $m, n$  是已知值, 故可求得  $QB$  之長 (基本作圖 13) 而得  $B$  點.



(作法及證略).

(111) 過定角  $\angle XOY$  內一定點  $P$ . 求作兩個線份  $PA, PB$ . 令  $PA$  交  $OX$  於  $A$ ,  $PB$  交  $OY$  於  $B$ , 且令  $PA = PB, PA \perp PB$ .

〔解析一〕 設  $PA, PB$  是所求兩個線份. 過  $P$  作  $DC \perp OX$ ,



作  $BD \perp CD$ . 則因  $PA = PB$ ,  $\angle APB = R\angle$ ,

故  $R\triangle PAC \cong R\triangle PBD$ . 因得作法如下:

〔作法一〕 作  $PC \perp OX$ . 以  $C$  爲中心,  $CP$  爲半徑

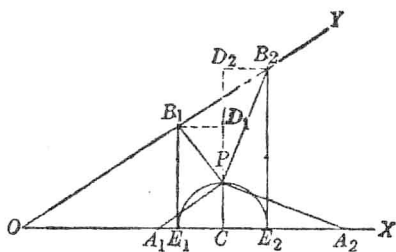
作圓交  $OX$  於  $E_1$ ,

$E_2$ . 從  $E_1$  及  $E_2$  作

$OX$  的垂線交  $OY$

於  $B_1, B_2$ . 聯  $PB_1$ ,

$PB_2$ . 過  $P$  作  $PA_1$ ,



$PA_2$  令  $\angle B_1PA_1 = R\angle$ ,  $\angle B_2PA_2 = R\angle$ . 則  $PA_1, PB_1$

及  $PA_2, PB_2$  都是所求的線份.

Q. E. F.

〔證〕 作  $B_1D_1 \perp CP$  交  $CP$  延線於  $D_1$ . 則因

$PC = E_1C = B_1D_1$ ,  $\angle PCA_1 = \angle PD_1B_1 = R\angle$ .

又因  $\angle B_1PA_1 = R\angle$ ,  $\therefore \angle A_1PC = \angle PB_1D_1$  (都是

$\angle B_1PD_1$  的餘角).  $\therefore \triangle PA_1C \cong \triangle PB_1D_1$ ,

$\therefore PA_1 = PB_1$ . 但  $PA_1 \perp PB_1$ . 故  $PA_1, PB_1$  即所求線

份. 同理可證  $PA_2, PB_2$  也是所求線份.

Q. E. D.

〔解析二〕 設  $PA, PB$  是所求線份. 聯  $OP$ . 作  $PQ$ ,

令  $\angle OPQ = R\angle$ , 且令  $PQ = OP$ . 聯  $AQ$ . 則

$\therefore \angle APB = \angle OPQ = R\angle \quad \therefore \angle OPB = \angle QPA$ .

又  $PB = PA$ ,

$$PO = PQ.$$

$$\therefore \triangle OPB \cong \triangle QPA.$$

$$\therefore \angle PQA = \angle POB.$$

因  $\angle POB$  一定, 故可求得  $A$  點. 因得作法如下:

〔作法二〕 聯  $OP$ .

作  $PQ$  令

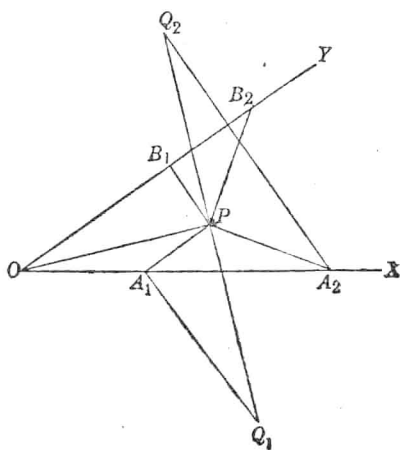
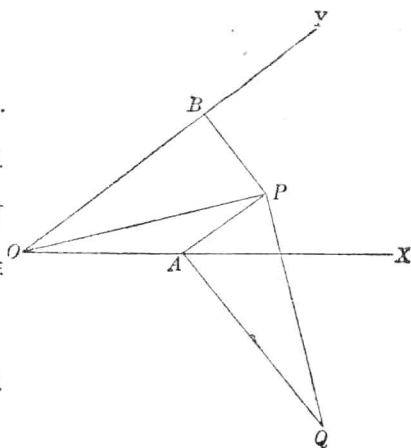
$$\angle OPQ = R\angle,$$

且令  $PQ = OP$ . 過  $Q$  作  $QA$  交  $OX$  於  $A$ , 令  $\angle PQA = \angle POY$ . 聯  $PA$ . 過  $P$  作  $PB$  交  $OY$  於  $B$ , 令

$$\angle APB = R\angle.$$

則  $PA, PB$  即所求.

Q. E. F.

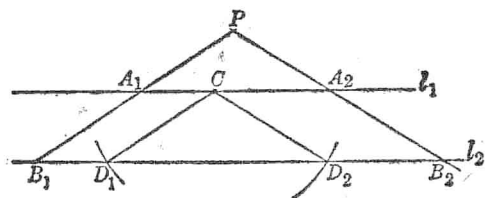


〔圖中示兩個解答. 證略.〕

〔討論〕 本題有兩個解答. 但若  $\angle XOY = R\angle$  而  $P$  在  $\angle XOY$  的等分線上時, 有無數解答. 又若  $\angle XOY = R\angle$  而  $P$  不在  $\angle XOY$  的等分線上時, 則無解答.

(112) 兩定直線  $l_1, l_2$  互相平行. 過定點  $P$  求作一直線交  $l_1$  於  $A, l_2$  於  $B$ , 令  $AB$  等於定長  $d$ .

〔作法〕 以  $l_1$  上任意點  $C$  為中心, 定長  $d$  為半徑作圓交  $l_2$  於  $D$ . 聯  $CD$ . 過  $P$  作  $CD$  的平行線交  $l_1$  於



$A, l_2$  於  $B$ . 則  $PAB$  即所求之線. Q. E. F.

〔證〕  $\because ABDC$  是平行四邊形,  $\therefore AB = CD$ .

$\because CD = d$ ,  $\therefore AB = d$ . Q. E. D.

〔討論〕 若  $d$  大於  $l_1, l_2$  的距離, 則有兩個解答如圖  $PA_1B_1, PA_2B_2$ . 若  $d$  小於  $l_1, l_2$  的距離, 則無解答. 若  $d$  等於  $l_1, l_2$  的距離則有一個解答, 即過  $P$  所作  $l_1, l_2$  的垂線.

(113) 從定圓  $O$  外一定點  $P$  求作一直線交定圓  $O$  於兩點  $A, B$ , 令弦  $AB$  等於定長  $d$ .

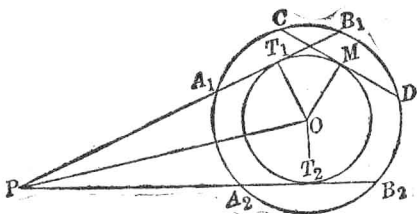
〔作法〕 以  $\odot O$

上任意一點  $C$  爲

中心,  $d$  爲半徑作

弧交圓周於  $D$ .

作  $OM \perp CD$ . 以  $O$



爲中心,  $OM$  爲半徑作圓  $MT_1 T_2$ . 過  $P$  作  $\odot MT_1 T_2$  的切線交  $\odot O$  於  $AB$ . 則  $PAB$  所求之線. Q. E. F.

〔證〕 設  $PAB$  切  $\odot MT_1 T_2$  於  $T$ . 則  $OT = OM$ .

$\therefore AB = CD = d$ .

Q. E. D.

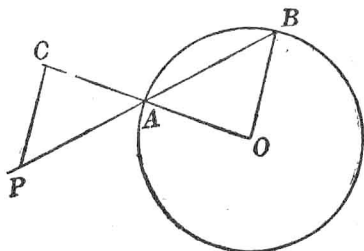
〔討論〕 若  $d$  小於直徑, 則有兩個解答, 等於直徑, 只有一個解答, 大於直徑, 則無解答.

(114) 從定圓  $O$  外

一定點  $P$  求作一直

線交  $\odot O$  於  $A, B$  令

$PA = AB$ .



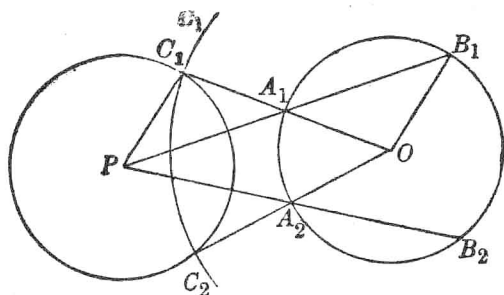
〔解析一〕 設  $PAB$

爲所求之線. 聯  $OA$  延長至  $C$  令  $AC = OA$ . 聯  $OB, CP$ .



則  $\triangle OAB \cong \triangle CAP$ .  $\therefore PC = OB, OC = 2OA$  都是已知之長. 因得作法如下:

〔作法一〕 以  $P$  爲中心,  $\odot O$  半徑爲半徑作  $\odot P$ . 以  $O$  爲中心,  $\odot O$  半徑的二倍爲半徑作圓交  $\odot P$  於



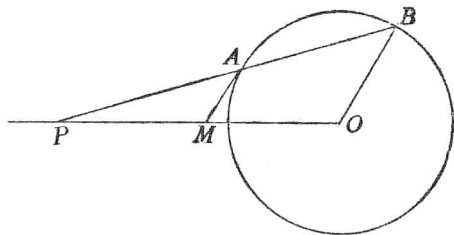
$C$ . 聯  $OC$  交  $\odot O$  於  $A$ . 聯  $PA$  延長之交  $\odot O$  於  $B$ . 則  $PAB$  卽所求之線.

Q. E. F.

〔證略〕

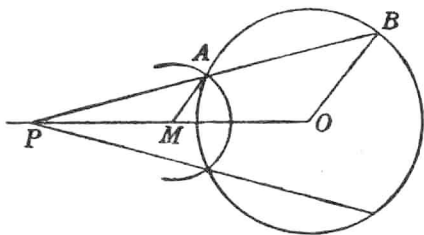
〔解析二〕

設  $PAB$  是所求之線. 聯  $OB$ . 過  $A$  作  $AM \parallel BO$ .



交  $PO$  於  $M$ . 則  $M$  必爲  $PO$  的中點. 而  $AM = \frac{1}{2}OB$ . 故  $M$  是定點而  $AM$  是定長. 因得

〔作法二〕 聯  $PO$ . 以  $PO$  中點  $M$  爲中心.  $\odot O$  半徑的半做半徑作圓交  $\odot O$  於  $A$ . 聯  $PA$  延長至  $B$  令  $AB=PA$ . 則  $PAB$  即所求之線.

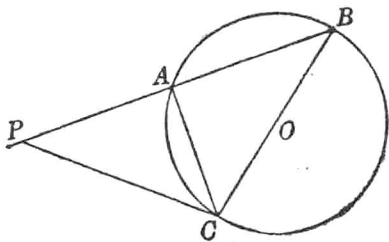


Q. E. F.

〔證〕 聯  $MA, OB$ .  $\because PM=MO, PA=AB$ , 故  $OB=2AM \because AM$  等於  $\odot O$  半徑的一半.  $\therefore OB$  等於  $\odot O$  半徑.  $\therefore B$  在  $\odot O$  上. 故  $PAB$  即所求之直線.

Q. E. D.

〔解析三〕 設  $PAB$  是所求之線. 作直徑  $BOC$ , 聯  $AC, PC$ . 則



$$\angle BAC = R\angle.$$

$$\because PA=AB, \quad \therefore PC=BC$$

然  $BC$  是直徑爲定長, 因得

〔作法三〕 以  $P$  爲中心,  $\odot O$  的直徑爲半徑作圓

交  $\odot O$  於  $C$ . 過  $C$  作直徑  $COB$ . 聯  $PB$  交圓周於  $A$ .  
則  $PAB$  即所求之直線. Q. E. F.

〔證略〕

〔討論〕 若  $P, O$  的距離小於  $\odot O$  半徑的三倍, 就有兩個解答, 等於半徑的三倍就有一個解答, 大於半徑的三倍就無解答.

(115) 求作一直線交同心兩圓周於  $A, B, C, D$   
四點令  $AB = BC = CD$

〔解法同 (114), 略〕

(116) 從定圓  $O$  外一定點  $P$ , 求作一直線交圓周於  $A, B$  令  $PA = 2AB$ .

〔解法可做 (114), 略〕

(117) 從定圓  $O$  上一定點  $P$ , 求作一直線交一定直線於  $A$ , 再交  $\odot O$  於  $B$  令  $PA = PB$ .

〔解法可做 (114), 略〕

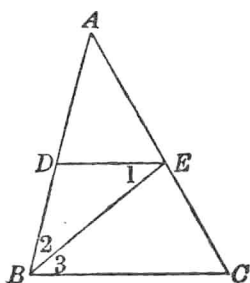
(118)  $\triangle ABC$  是所設一定三角形. 求作一直線交  $AB$  於  $D$ , 交  $AC$  於  $E$ , 令  $DE \parallel BC, DE = DB$ .

〔解析〕 設  $DE$  是所求之線. 試聯  $BE$  觀之.

$\because DE \parallel BC, \therefore \angle 1 = \angle 3.$

$\therefore DE = DB, \therefore \angle 1 = \angle 2.$   
 $\therefore \angle 2 = \angle 3,$  即  $BE$  是  $\angle B$  的  
 等分線. 故可得

〔作法〕 作  $\angle B$  的等分線  
 $BE$  交  $AC$  於  $E$ . 過  $E$  作  $BC$   
 的平行線  $ED$  交  $AB$  於  $D$ .  
 則  $DE$  即所求之線.



Q. E. F.

〔證略〕

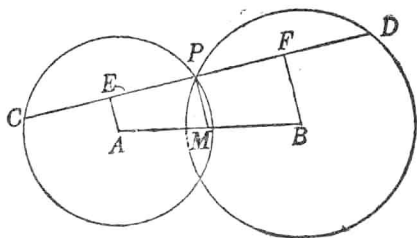
(119) 求作一直線交  $\triangle ABC$  的  $AB$  邊於  $D, AC$   
 邊於  $E$ , 令  $DE \parallel BC, DE = DB + EC.$

〔解法做照 (118)〕

(120) 求作一直線交  $\triangle ABC$  的  $AB$  邊於  $D, AC$   
 邊於  $E$ , 令  $DE \parallel BC, DE = DB \sim EC.$

〔解法做照 (118)〕

(121)  $P$  是所  
 設兩圓  $\odot A, \odot B$   
 的一個交點. 求  
 過  $P$  作一直線交  
 $\odot A$  於  $C$ , 交  $\odot B$



於  $D$ , 令  $PC = PD$ .

〔解析〕 設  $CPD$  是所求之線。作  $AE \perp CP$ ,  $BF \perp PD$ . 則  $E, F$  各為  $PC, PD$  的中點。今既  $PC = PD$ , 則  $EP = PF$  而  $P$  為  $EF$  的中點。過  $P$  作  $EA, FB$  的平行線交  $AB$  聯線於  $M$ , 則  $M$  必也是  $AB$  的中點, 而  $PM$  必  $\perp CD$ . 因得作法如下:

〔作法〕 聯  $AB$ . 取  $AB$  的中點  $M$ . 聯  $PM$ . 過  $P$  作  $PM$  的垂線交  $\odot A$  於  $C$ , 交  $\odot B$  於  $D$ .  $CPD$  即所求之線。 Q. E. F.

〔證〕 作  $AE \perp PC$ ,  $BF \perp PD$ . 則因  $PM \perp CD$ ,  
 $\therefore AE \parallel MP \parallel BF$ .  $\because AM = MB$ ,  $\therefore EP = PF$ .  
 但過中心所作弦的垂線, 必過弦的中點,  
 $\therefore CP = 2EP, PD = 2PF$ .  $\therefore PC = PD$ . Q. E. D.

(122) 過相交兩圓的交點  $P$  求作一直線交兩圓於  $C, D$ , 令  $PC = 2PD$ .

〔解法做照(121)〕

(123) 過相交兩圓的交點  $P$  求作一直線交兩圓於  $C, D$ , 令  $PC : PD = m : n$ .  $m : n$  是定比.

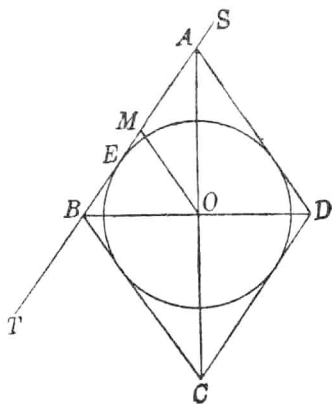
〔解法做照(121)〕

(124) 過相交兩圓的交點  $P$  求作一直線交兩圓於  $C, D$ , 令  $CD=l$ .  $l$  是所設長.

〔解法做照(121)而略變之〕

(125) 求作一菱形令外接於所設圓  $O$ , 而其各邊等於所設長  $l$ .

〔解析〕 設  $ABCD$  是所求菱形. 聯對角線  $AC, BD$ . 因  $AC$  等分  $\angle A$ , 故必過中心  $O$ .  $BD$  等分  $\angle B$ , 故亦必過中心  $O$ . 故  $AC, BD$  交於中心  $O$ . 又  $AC \perp BD$ ,



$\therefore \triangle ABO$  是直角三角形, 而  $AB$  是其斜邊.  $AB$  上取中點  $M$ . 聯  $OM$ , 則  $OM = AM = MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}l$ . 因得作法如下:

〔作法〕 過  $\odot O$  上任意點  $E$  作切線  $ST$ . 以  $O$  為中心,  $l$  為半徑作弧交  $ST$  於  $M$ . 以  $M$  為中心,  $\frac{1}{2}l$  為半徑作弧交  $ST$  於  $A, B$ . 聯  $AO$  延長至  $C$ , 令  $OC = OA$ . 聯  $BO$  延長至  $D$  令  $OD = OB$  聯  $AD, CD, BC$ . 則  $ABCD$

即所求之菱形。

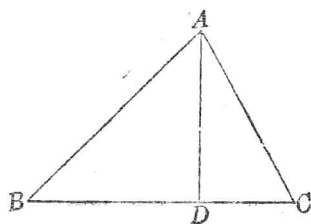
Q. E. F.

〔證略〕

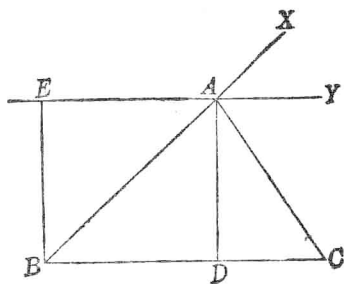
〔討論〕 若  $l$  小於  $\odot O$  的直徑, 則無解答. 若  $l$  等於  $\odot O$  的直徑, 則所得解答是正方形.

(126) 求作一三角形, 令其底邊及高各等於定長  $l, m$ , 其一個底角等於定角  $\alpha$ .

〔解析〕 設  $\triangle ABC$  是所求的三角形,  $BC = l$ ,  $AD = m$ ,  $\angle B = \alpha$ , 都是已知之值. 很易得作法如下:



〔作法一〕 作線份  $BC$  令等於  $l$ . 從  $B$  作  $BX$  令  $\angle CBX = \alpha$ . 從  $B$  作  $BC$  的垂線  $BE$ , 且令等於  $m$ . 過  $E$  作  $BC$  的平行線  $EY$  交  $BX$

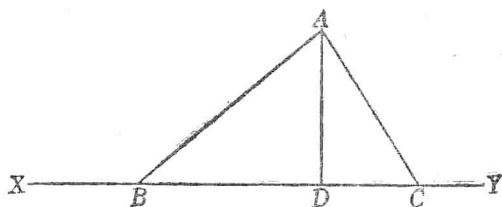


於  $A$ . 聯  $AC$ . 則  $\triangle ABC$  即所求之三角形.

Q. E. F.

〔證略〕

〔作法二〕 作線份  $AD$  令等於  $m$ . 過  $D$  作直線  $XY$  垂直於  $AD$ . 從  $A$  作  $AB$  令與  $XY$  所夾角等

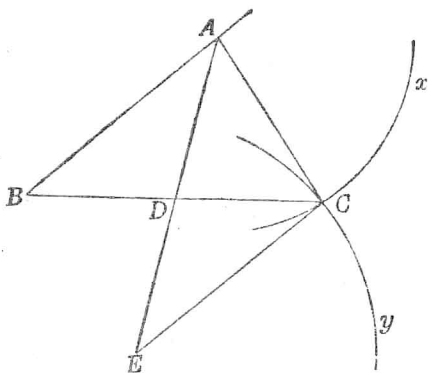


於  $\alpha$ .  $XY$  上取  $C$  令  $BC=l$ . 則  $\triangle ABC$  卽所求之三角形 Q. E. F.

(127) 求作一三角形令其兩邊之長及其第三邊上中線之長各等於定長  $l, m, n$ .

〔解析〕 設

$\triangle ABC$  是所求之三角形.  $AB=l$ ,  $AC=m$ ,  $BC$  上的中線  $AD=n$ . 延長  $AD$  至  $E$  令  $DE=AD=n$ . 聯



$CE$ , 則  $\triangle CDE \cong \triangle ABD$ , (證略)  $\therefore CE=AB=l$  故得作法如下:



〔作法〕 作  $AD = n$ . 延長  $AD$  至  $E$  令  $DE = n$ .  $A$  爲中心,  $m$  爲半徑作弧  $x$ .  $E$  爲中心,  $l$  爲半徑作弧  $y$ .  $x, y$  交於  $C$ . 聯  $CD$  延長至  $B$  令  $DB = CD$ . 聯  $AB$ . 則  $\triangle ABC$  卽所求. Q. E. F.

〔證略〕

〔討論〕 若  $n$  大於  $\frac{1}{2}(l+m)$  或等於  $\frac{1}{2}(l+m)$ , 則本題不能作.

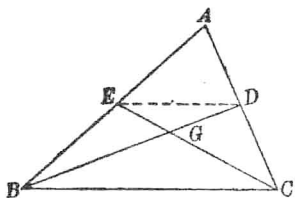
(128) 求作一三角形令其底邊及其他兩邊上的兩個中線各等於定長  $l, m, n$ .

〔解析〕 設  $\triangle ABC$  爲所求.  $BC = l, BD = m, CE = n$ .  $BD, CE$  交於  $G$ .

則  $BG = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}m,$

$CG = \frac{2}{3}CE = \frac{2}{3}n.$

因得作法如下:



〔作法〕 先作  $\triangle GBC$  令  $BC = l, BG = \frac{2}{3}m, CG = \frac{2}{3}n$ . 延長  $BG$  至  $D$ , 令  $GD = \frac{1}{3}m$ , 延長  $CG$  至  $E$ , 令  $GE = \frac{1}{3}n$ . 聯  $BE, CD$ , 延長之交於  $A$ . 則  $\triangle ABC$  卽所求. Q. E. F.

〔證〕 聯  $ED$ . 則  $\because EG : GC = DG : GB = 1 : 2$ .  $\angle EGD = \angle BGC$ , 故  $\triangle EGD \sim \triangle BGC$ .

$$\therefore ED : BC = EG : GC = 1 : 2.$$

又因  $\angle EDG = \angle CBG$ ,  $\therefore ED \parallel BC$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC$$

$$\therefore AE : AB = AD : AC = ED : BC = 1 : 2.$$

$\therefore E, D$  各為  $AB, AC$  之中點. 故  $BD, CE$  是中線.

又  $BD = BG + GD = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}m = m$ , 同理  $CE = n$ .

又  $BC = l$ .  $\therefore \triangle ABC$  即所求 Q. E. D.

〔討論〕 若  $l \geq \frac{2}{3}(m+n)$ , 或  $l \leq \frac{2}{3}(m \sim n)$ .

則本題不能作.

(129) 求作一三角形令過其同一頂點的中線, 等分角線, 及高各等於定長  $l, m, n$ .

〔解析〕 設

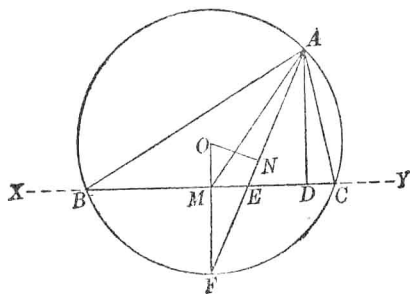
$\triangle ABC$  是所求. 中

線  $AM = l$ . 等分線

$AE = m$ , 高  $AD = n$ .

作  $\triangle ABC$  的外接

圓  $O$ , 延長  $AE$  交



$\odot O$  於  $F$ . 則因  $\angle BAF = \angle CAF$ ,  $\therefore \widehat{BF} = \widehat{CF}$ .

$\therefore M$  是  $BC$  的中點, 故  $FM \perp BC$ . 故可先作直角

三角形  $\triangle AMD$  及  $AE$ , 由是可得  $F$ , 再求得  $O$  如下.

〔作法〕 作任意直線  $XY$ . 過  $XY$  上任意一點  $D$  作  $DA \perp XY$ , 且令  $DA = n$ . 以  $A$  為中心,  $l$  為半徑作弧交  $XY$  於  $M$ . 再以  $A$  為中心,  $m$  為半徑作弧交  $MD$  於  $E$ . 過  $M$  作  $XY$  的垂線交  $AE$  的延線於  $F$ . 作  $AF$  的垂直等分線  $ON$  交  $FM$  於  $O$ . 以  $O$  為中心,  $OF$  為半徑作圓交  $XY$  於  $B$  及  $C$ . 聯  $AB, AC$ . 則  $\triangle ABC$  即所求. Q. E. F.

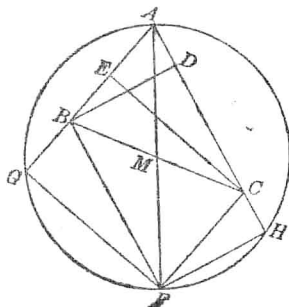
〔證〕  $\because ON$  是  $AF$  的垂直等分線,  $\therefore OA = OF$ . 故  $\odot O$  必過  $A$  點.  $\because OM \perp BC$ ,  $\therefore BM = CM \therefore AM$  是  $\triangle ABC$  的中線. 又  $\sphericalangle BF = \sphericalangle FC$ ,  $\therefore \angle BAF = \angle CAF$ .  $\therefore AE$  是  $\angle A$  的等分線.  $AD$  是高. 照作法  $AM = l$ ,  $AE = m$ ,  $AD = n$ .  $\therefore \triangle ABC$  即所求. Q. E. D.

〔討論〕 本題必須  $l > m > n$  方有解答.

(130) 已知三角形一邊上的中線和其他二邊上的兩個高, 求作此三角形.

〔解析〕 設  $\triangle ABC$  是所求的三角形.  $AM$  是  $BC$  上的中線等於已知之長  $l$ ,  $BD, CE$  是  $AC, AB$

上的高各等於已知之長  $m, n$ . 延長  $AM$  至  $F$  令  $MF = AM$ . 聯  $BF, CF$ . 則  $ABFC$  是平行四邊形. 從  $F$  作  $FH \perp AC$ , 作  $FG \perp AB$ , 則  $BFHD, CFGE$  都是矩形



$\therefore FH = BD, FG = CE$ . 又  $\angle FHA = \angle FGA = R\angle$ .  
 $\therefore G, H$  都在以  $AF$  為直徑所作之圓周上. 因得作法如下:

〔作法〕 作線份  $AF = 2l$ . 以  $AF$  為直徑作  $\odot M$ . 以  $F$  為中心,  $m$  為半徑作弧交  $\odot M$  於  $H$ . 以  $F$  為中心,  $n$  為半徑作弧交  $\odot M$  於  $G$ .

聯  $AG, AH, FG, FH$ . 從  $F$  作  $FB \parallel HA$  交  $AG$  於  $B$ . 從  $F$  作  $FC \parallel GA$  交  $AH$  於  $C$ . 聯  $BC$ . 則  $\triangle ABC$  即所求. Q. E. F.

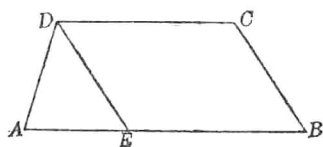
〔證〕 作  $BD \perp AC, CE \perp AB$ . 因  $AF$  是直徑.  
 $\therefore \angle AGF = \angle AHF = R\angle$ .  $\therefore ABFC$  是  $\square$ ,  
 $\therefore BFHD, CFGE$  都是矩形.  $\therefore BD = FH = m,$   
 $CE = FG = n$ . 又  $ABCD$  是  $\square$ ,  $\therefore AF, BC$  互相等

分於  $M$ 。  $\therefore AM$  是中線且等於  $\frac{1}{2}AF=l$ 。故  $\triangle ABC$  即所求。 Q. E. D.

〔討論〕 若  $m \equiv 2l$ , 或  $n \equiv 2l$ , 則本題無解答。

(131) 已知梯形兩底之長及兩邊之長, 求作此梯形。

〔解析〕 設梯形  $ABCD$  是所求梯形, 兩底  $AB, CD$  各等於所給與之長



$a, b$ . 兩邊  $AD, BC$  各等於所給與之長  $c, d$ . 作

$DE \parallel CB$ . 則  $EBCD$  是平行四邊形,  $\therefore EB = CD = b$ .

$\therefore AE = AB - EB = a - b$ . 又  $DE = BC = d$ .

故可先作  $\triangle AED$  令  $AE = a - b, AD = c, DE = d$ . 由是完成此梯形。

〔作法和證略〕

〔討論〕 所給與的四個定長  $a, b, c, d$  中,

若  $c + d \equiv a - b$  或  $c \sim d \equiv a \sim b$ , 則無解答。

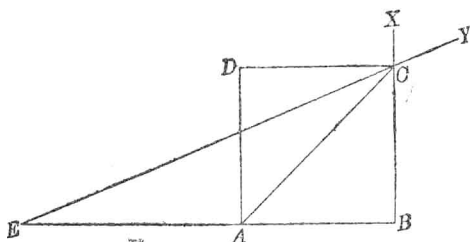
(132) 已知梯形兩底之長及兩對角線之長, 求作此梯形。

〔解法做照(131)〕

(133) 求作一正方形令其一邊及對角線之和等於一定長.

〔解析〕 設  $ABCD$  是所求的正方形.

$AB + AC$  等於所給與的定



長  $l$ . 延長  $BA$  至  $E$  令  $AE = AC$ , 聯  $EC$ , 則

$EB = AC + AB = l$ . 又  $\angle E = \angle ECA$ . 故

$\angle BAC = \angle E + \angle ECA = 2 \angle E$ . 然  $\angle BAC = \frac{1}{2} R \angle$ .

$\therefore \angle E = \frac{1}{4} R \angle$ . 因得作法如下:

〔作法〕 作線  $EB = l$ . 過  $B$  作  $BE$  之垂線  $BX$ . 過  $E$  作半射線  $EY$  令  $\angle BEY = \frac{1}{4} R \angle$ .  $EY, BX$  交於  $C$ . 以  $BC$  爲正方形之一邊. 作正方形  $ABCD$  即所求. Q. E. F.

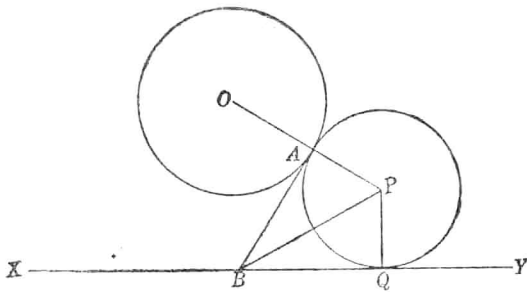
〔證略〕

(134) 求作一正方形令其對角線減去一邊之差等於一定長.

〔解法倣照 (133)〕

(135) 求作一圓令切一定圓於其圓周上一固定點,且切一定直線.

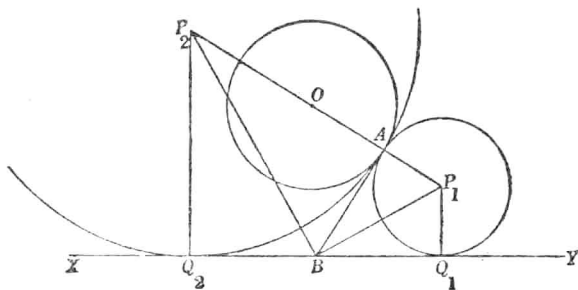
〔解析〕 設  $\odot O$  是定圓,  $A$  是  $\odot O$  上一定點.  $XY$  是定直線.  $\odot P$  是求作之圓切  $\odot O$  於  $A$ , 並與  $XY$



切於  $Q$ . 則  $AP = PQ$ ,  $PQ \perp XY$ . 過  $A$  作  $OP$  之垂線  $AB$  交  $XY$  於  $B$ , 則  $\triangle ABP \cong \triangle QBP$ .  $\therefore BQ = BA$ .

因得作法如下:

〔作法〕 聯半徑  $OA$ . 過  $A$  作  $OA$  的垂線  $AB$  交



$XY$  於  $B$ . 以  $B$  爲中心,  $BA$  爲半徑作圓交  $XY$  於  $Q$ . (如圖  $Q_1$  或  $Q_2$ ) 過  $Q$  作  $XY$  的垂線交  $OA$  的延線於  $P$  (如圖  $P_1$  或  $P_2$ ).  $P$  爲中心  $PA$  爲半徑作  $\odot P$  即所求. Q. E. F.

〔證〕 聯  $PB$ .  $\because BA=BQ, \angle BAP=\angle BQP=R\angle,$   
 $BP$  爲公邊, 故  $\triangle BAP \cong \triangle BQP$ .  $\therefore PQ=PA$ .

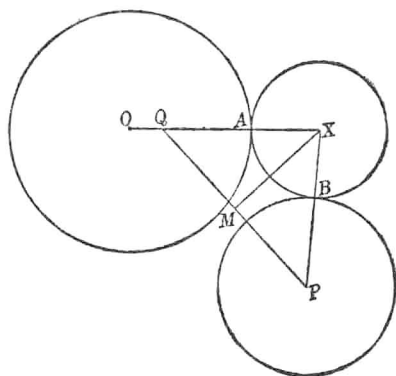
$\therefore \odot P$  過  $Q$ . 即與  $XY$  相切. 但  $\odot P$  又切  $\odot O$  於  $A$ .  
 故  $\odot P$  即所求之圓. Q. E. D.

〔討論〕 本題有兩個解答如圖  $\odot P_1, \odot P_2$ . 但若  $OA \perp XY$  時, 則  $AB \parallel XY$ , 故不能得與  $XY$  的交點  $B$ . 但  $OA$  既與  $XY$  垂直, 則  $OAPQ$  爲一直線. 故  $Q$  即  $OA$  在  $XY$  上的垂足, 而中心  $P$  即  $AQ$  的中點. 此時只有一個解答.

(136) 求作一圓令切一定圓於其圓周上一固定點, 且切又一定圓.

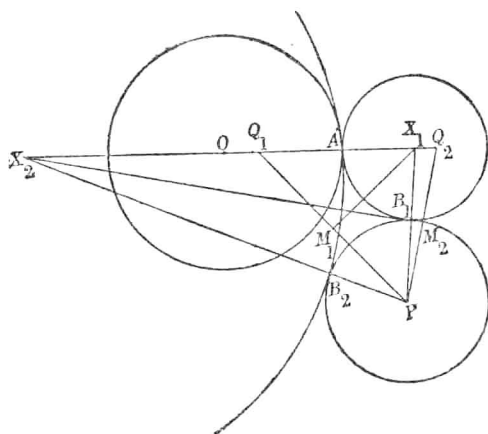
〔解析〕 設  $\odot O, \odot P$  是兩個定圓.  $A$  是  $\odot O$  上一固定點.  $\odot X$  是求作之圓切  $\odot O$  於  $A$ , 並與  $\odot P$  切於  $B$ . 則  $OAX, PBX$  都是直線.  $XA=XB$ . 在  $OA$  上取  $Q$  令  $AQ=BP$ , 則  $QX=PX$ , 即  $X$  與  $P, Q$  等距. 於





是得作法如下：

〔作法〕 以  $A$  為中心， $\odot P$  的半徑為半徑作圓



交  $OA$  於  $Q$  ( $Q_1$  或  $Q_2$ ) 作  $PQ$  的垂直等分線  $MX$  交

$OA$  於  $X$  ( $M_1X_1$  或  $M_2X_2$ ). 以  $X$  爲中心  $XA$  爲半徑作  $\odot X$  卽所求. Q. E. F.

〔證略〕

〔討論〕 本題有兩個解答如圖  $\odot X_1, \odot X_2$ . 若  $PQ_1, PQ_2$  兩線中有一個垂直於  $OA$  時, 則只有一個解答.

(137) 求作一圓令切一定直線於其上一定點, 且切一定圓.

〔解法倣照 (136)〕

(138) 過三角形一邊上一定點求作一直線令等分此三角形的面積.

〔解析〕 設  $P$  是  $\triangle ABC$   $BC$  邊上一定點.  $PQ$  是求作之線. 則

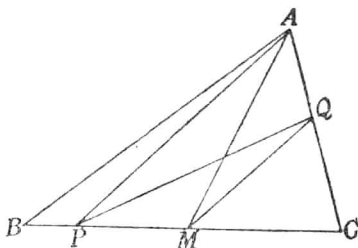
$$\triangle CPQ = \frac{1}{2} \triangle ABC.$$

作中線  $AM$ , 則

$$\triangle AMC = \frac{1}{2} \triangle ABC. \quad \therefore \triangle CPQ = \triangle AMC.$$

$$\therefore \triangle CPQ - \triangle CMQ = \triangle AMC - \triangle CMQ.$$

卽  $\triangle PMQ = \triangle AMQ. \therefore AP \parallel MQ.$  因得作法如下:



〔作法〕 聯  $AP$ . 從  $BC$  中點  $M$  作  $MQ \parallel AP$  交  $AC$  於  $Q$ . 聯  $PQ$ . 即所求之線. Q. E. F.

〔證〕 聯  $AM$ .  $\because AP \parallel MQ, \therefore \triangle PMQ = \triangle AMQ$ .  
 $\therefore \triangle PMQ + \triangle MQC = \triangle AMQ + \triangle MQC$ ,  
 即  $\triangle PQC = \triangle AMC$ .  
 $\because BM = CM, \therefore \triangle AMC = \triangle ABM = \frac{1}{2}\triangle ABC$ .  
 $\therefore \triangle PQC = \frac{1}{2}\triangle ABC = \triangle ABPQ$ .

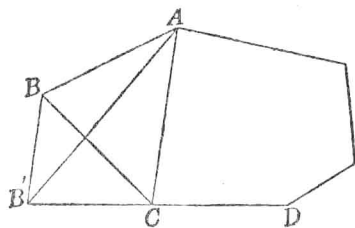
故  $PQ$  即所求之線 Q. E. D.

(139) 過三角形一邊上一定點求作二直線令三等分此三角形的面積.

〔解法做照 (138)〕

(140) 求作一多角形令與一所設多角形等積, 而邊數少一.

〔解析〕 設  $ABCD\dots$  是所設多角形,  $AB'D\dots$  是所作多角形.  $B'CD$  是一直線故其邊數較



$ABCD\dots$  少一. 兩形面積相等, 故必  $\triangle ABC = \triangle AB'C$ ,  
 $\therefore BB' \parallel AC$ . 因得作法如下:

〔作法〕 聯  $AC$ , 過  $B$  作  $BB' \parallel AC$  交  $DC$  的延線於  $B'$ . 聯  $AB'$ . 則多角形  $AB'D \dots$  即所求. Q. E. F.

〔證略〕

(141) 求作一三角形令與一所設多角形面積相等.

〔解法同 (140)〕

(142) 過四角形的一角頂求作一直線令等分此四角形的面積.

〔解析〕 設  $AE$  是所求之線, 則

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} ABCD.$$

聯  $BD$ . 取  $BD$  中點  $M$ .

聯  $AM, CM$ , 則  $\triangle ABM = \frac{1}{2} \triangle ABD$ ,  $\triangle BCM = \frac{1}{2} \triangle BCD$ .

$$\therefore \triangle ABM + \triangle BCM = \frac{1}{2} (\triangle ABD + \triangle BCD)$$

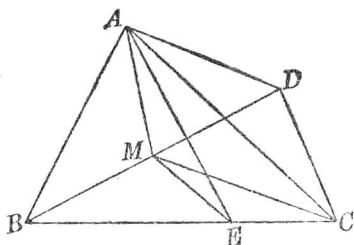
$$= \frac{1}{2} ABCD = \triangle ABE.$$

$$\therefore \triangle ABM + \triangle BCM - \triangle ABM - \triangle BEM$$

$$= \triangle ABE - \triangle ABM - \triangle BEM.$$

即  $\triangle MEC = \triangle MEA$ .  $\therefore AC \parallel ME$ . 因得作法如下:

〔作法〕 聯  $AC, BD$ . 從  $BD$  的中點  $M$  作  $ME \parallel AC$



交  $BC$  於  $E$ . 聯  $AE$  即所求.

$Q. E. F.$

[證略]

(143) 過四角形的一角頂求作兩直線令三等分此四角形的面積.

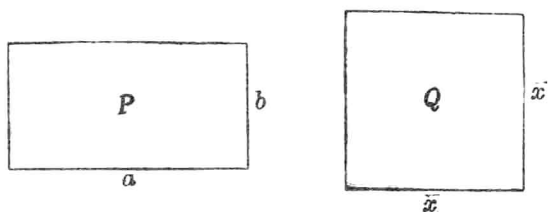
[解法做照(142)]

(144) 過四角形一邊上一定點作一直線令等分此四角形的面積.

[解法引用(143)和(138)]

(145) 求作一正方形令與一所設矩形等積.

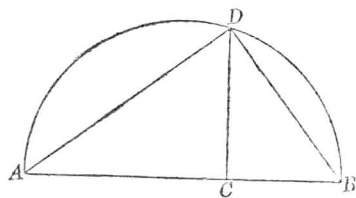
[解析] 設  $P$  是所設矩形其鄰邊各長  $a, b$ .  $Q$  是所作正方形其各邊之長為  $x$ . 則因  $P=Q$ ,  $\therefore ab = x^2$ .



故  $a : x = x : b$ . 因得

如下的幾種作法:

[作法一] 作線份  $AC = a$ . 延長至  $B$  令



$CB = b$ . 以  $AB$  為直徑畫半圓. 從  $C$  作  $AB$  的垂

線交半圓周於  $D$  則  $CD$  即所求正方形各邊之長. Q. E. F.

[證] 聯  $AD, BD$ . 則  $\angle ADB = R\angle$ .

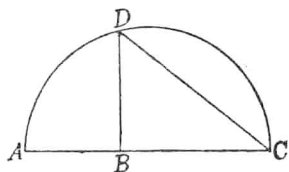
$\therefore \triangle ACD \sim \triangle DCB$  (定理 74).  $\therefore AC : CD = CD : CB$

故  $\overline{CD}^2 = AC \cdot CB = ab$ .

Q. E. D.

[作法二] 作線份

$AC = a$ . 在  $AC$  上取  $B$  令  $CB = b$ . 以  $AC$  爲直徑作半圓. 從  $B$  作  $AC$  的垂

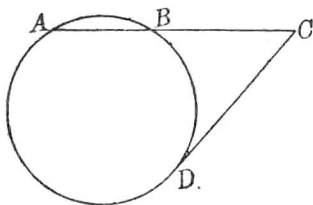


線交半圓周於  $D$ . 聯  $CD$  則  $CD$  即所求正方形各邊之長. Q. E. F.

[證同作法一]

[作法三] 作  $AC = a$ .

$AC$  上取  $B$  令  $CB = b$ . 以  $AB$  爲弦作一任意弓形. 從  $C$  向此弓弦弧上作



切線  $CD$ . 則  $CD$  即所求正方形各邊之長 Q. E. F.

[證法根據定理 84]

(146) 求作一正方形令與一所設三角形等積

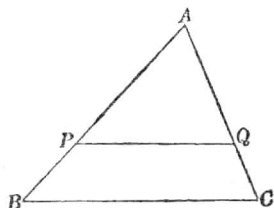
[解法可先將所設三角形改爲等積矩形後再用(145)的作法]

(147) 求作一正方形令與一所設多角形等積.

[解法可先將所設多角形改爲等積三角形(見141)後再用(146)的作法].

(148) 求作一直線令與一所設三角形的底邊平行,且等分其面積.

[解析] 設  $ABC$  是所設三角形,  $PQ$  是所求的線. 則因  $PQ \parallel BC$ ,



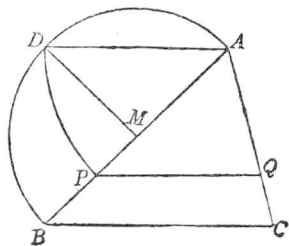
$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC$ . 又因  $PQ$  等分  $\triangle ABC$  的面積,

$\therefore \triangle APQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$ .

$\therefore \triangle APQ : \triangle ABC = \overline{AP}^2 : \overline{AB}^2 = 1 : 2$ .

$\therefore AP : AB = 1 : \sqrt{2}$ .  $\therefore AP = \frac{1}{\sqrt{2}} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$ .

[作法]  $AB$  上取中點  $M$ . 作  $MD \perp AB$ , 且令  $MD = AM = \frac{1}{2} AB$ .  $AB$  上取  $P$  令  $AP = AD$ . 作  $PQ \parallel BC$  即所求之直線.  $Q, E, F$ .



$$\begin{aligned} \text{(證)} \quad \overline{AP}^2 &= \overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MD}^2 = (\frac{1}{2}AB)^2 + (\frac{1}{2}AB)^2 \\ &= \frac{1}{4}\overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 : \overline{AB}^2 = 1 : 2. \quad \text{又} \quad \because PQ \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC.$$

$$\therefore \triangle APQ : \triangle ABC = \overline{AP}^2 : \overline{AB}^2 = 1 : 2.$$

$$\therefore \triangle APQ = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

Q. E. D.

(149) 求作一直線令與一所設三角形的底邊垂直,且等分其面積.

[解析] 設  $PQ$

是所求之線.

作  $AD \perp BC$ ,

則  $AD \parallel PQ$ .

$$\therefore \triangle PQC \sim \triangle ADC.$$

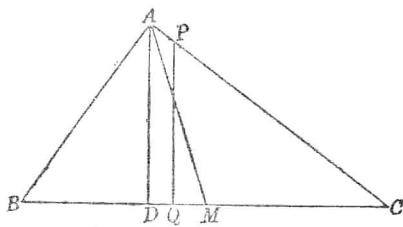
$$\therefore \triangle PQC : \triangle ADC = \overline{QC}^2 : \overline{DC}^2. \quad \text{作中線 } AM,$$

$$\text{則 } \triangle PQC = \triangle AMC = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

$$\text{然 } \triangle ADC : \triangle AMC = DC : MC.$$

$$\therefore \frac{\triangle PQC}{\triangle AMC} = \frac{\triangle PQC}{\triangle ADC} \cdot \frac{\triangle ADC}{\triangle AMC} = \frac{\overline{CQ}^2}{\overline{CD}^2} \cdot \frac{CD}{CM} = \frac{\overline{CQ}^2}{CD \cdot CM}.$$

因  $CD, CM$  都是定長, 故得作法如下:





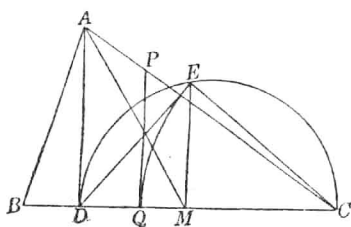
〔作法〕 作  $AD \perp BC$

以  $DC$  爲半徑作半圓

過  $BC$  中點  $M$  作  $BC$  的

垂線交半圓周於  $E$ .

$BC$  上取  $Q$  令  $CQ = CE$ .



作  $PQ \perp BC$ . 則  $PQ$  卽所求之直線.

Q. E. F.

〔證〕 聯  $DE$ .  $\angle DEC = R\angle$ ,  $\therefore \triangle CED \sim \triangle CEM$ .

$\therefore CM : CE = CE : CD$ .  $\therefore CQ = CE$ ,

$\therefore CM : CQ = CQ : CD$ ,  $\therefore \overline{CQ}^2 = CD \cdot CM$ .

聯  $AM$ . 則

$$\frac{\triangle PQC}{\triangle AMC} = \frac{\triangle PQC}{\triangle ADC} \cdot \frac{\triangle ADC}{\triangle AMC} = \frac{\overline{CQ}^2}{\overline{CD}^2} \cdot \frac{CD}{CM} = \frac{\overline{CQ}^2}{CD \cdot CM}$$

今  $\overline{CQ}^2 = CD \cdot CM$ ,  $\therefore \triangle PQC = \triangle AMC = \frac{1}{2} \triangle ABC$ .

又  $PQ \perp BC$ .  $\therefore PQ$  是所求之線.

Q. E. D.

(150) 求作一直線等分一所設三角形的面積，且與其一邊所成之角等於一定角。

〔解法同 (149)〕

(151) 在三角形的底邊上求作兩個垂線令三等分此三角形的面積。

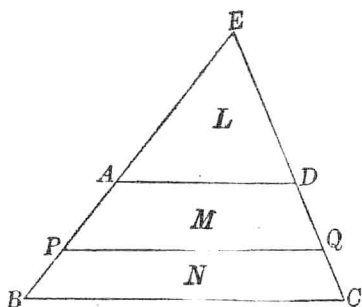
[解法做照(149)]

(152) 求作三角形底邊的兩個平行線令三等分此三角形的面積.

[解法同上]

(153) 求作一直線令等分一所設梯形的面積且與其兩底平行.

[解析] 設  $ABCD$  是所設梯形.  $PQ$  是所求直線. 延長  $BA$   $CD$  交於  $E$ . 命  $\triangle EAD$  爲  $L$ , 梯形  $APQD$  爲  $M$ ,  $PBCQ$  爲  $N$ . 則因  $AD \parallel PQ \parallel BC$ ,



$\therefore \triangle EAD \sim \triangle EPQ \sim \triangle EBC$ . 又因  $M = N$ ,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{L}{EA^2} &= \frac{L+M}{EP^2} = \frac{L+M+N}{EB^2} = \frac{L+2M}{EB^2} = \frac{L+L+2M}{EA^2+EB^2} \\ &= \frac{2(L+M)}{EA^2+EB^2} = \frac{2(L+M)}{2EP^2} \quad \therefore EP^2 = \frac{EA^2+EB^2}{2} \end{aligned}$$

因  $EA, EB$  都是定長故可求得  $P$  點.

[作法及證略]

(154) 在  $\triangle ABC$  內求作一點  $P$  令

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = 1 : 2 : 3.$$

〔解析〕 設  $P$  是所求之點。則

$\triangle PAB : \triangle PBC = 1 : 2$ . 延長  $BP$  交  $AC$  於  $E$

則  $\triangle APB = \triangle ABE$

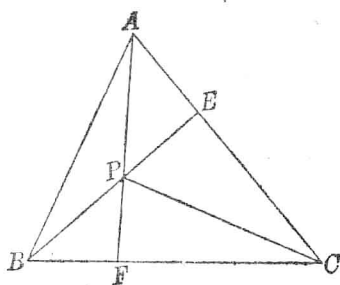
$$- \triangle APE.$$

$$\triangle PBC = \triangle BCE$$

$$- \triangle CPE.$$

$$\text{故 } \frac{\triangle ABE}{\triangle BCE} = \frac{\triangle APE}{\triangle CPE}$$

$$= \frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}.$$



同理延長  $AP$  交  $BC$  於  $F$ , 可證  $BF : FC = 1 : 3$ .

故得作法如下:

〔作法〕 在  $AC$  上取  $E$  令  $AE : EC = 1 : 2$ .

在  $BC$  上取  $F$  令  $BF : FC = 1 : 3$ .

聯  $BE, AF$  交於  $P$ .  $P$  即所求之點. Q. E. F.

〔證略〕

(155) 在  $\triangle ABC$  內求一點  $P$  令

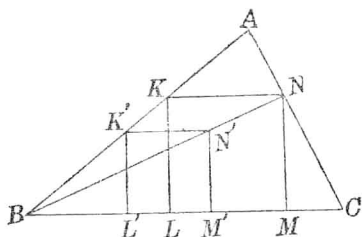
$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = l : m : n.$$

[解法同上]

(156) 求作正方形令內接於一所設三角形.

[解析] 設  $KLMN$

是所求的正方形內  
接於  $\triangle ABC$ . 聯  $BN$ .  
在  $BN$  上任意取一  
點  $N'$ . 作  $N'K' \parallel NK$ ,



作  $N'M' \parallel NM$ , 各交  $AB, BC$  於  $K', M'$ . 則

$NK : N'K' = NB : N'B = NM : N'M'$ .  $\therefore NK = NM$ ,

$\therefore N'K' = N'M'$ . 作  $K'L' \perp BC$ . 則  $K'L'M'N'$  也是正  
方形. 因得作法如下:

[作法] 在  $AB$  上任意取一點  $K'$  作  $K'L' \perp BC$ . 以  
 $K'L'$  爲正方形的一邊作正方形  $K'L'M'N'$ . 聯  $BN'$   
延長交  $AC$  於  $N$ . 作  $NM \perp BC$ ,  $NK \parallel BC$ ,  $KL \perp BC$ ,  
則  $KLMN$  卽所求之正方形. Q. E. F.

[證略]

(157) 作一四邊形令內接於一所設三角形且  
與一所設四邊形相似.

[解法同上]

(158) 作一正方形令內接於一所設半圓.

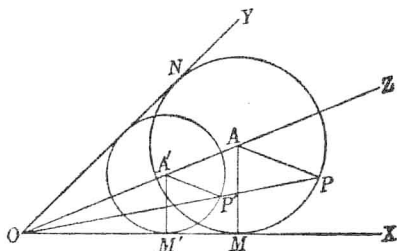
[解法做照(156)]

(159) 作一圓內接矩形令其兩鄰邊之長的比等於一所設定比.

[解法同上]

(160) 求作一圓令與相交二定直線相切且過一定點.

[解析] 二定直線  $OX, OY$  交於  $O$ .  $P$  是定點. 設  $\odot A$  是所求之圓. 切  $OX$  於  $M$  切  $OY$  於  $N$ .



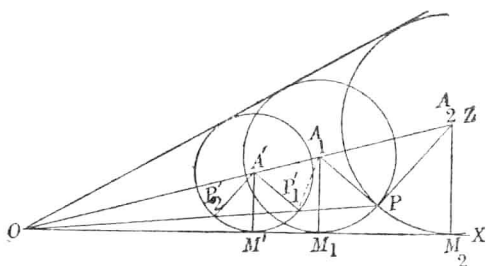
聯  $OA$ . 則  $OA$  必為  $\angle XOY$  的等分線. 在  $OA$  上任意取一點  $A'$ , 作  $A'M \perp OX$ . 以  $A'M$  為半徑作  $\odot A'$ . 作  $A'P' \parallel AP$  交  $OP$  於  $P'$ . 則

$$A'P' : AP = OA' : OA = A'M : AM.$$

$\therefore AP = AM, \therefore A'P' = A'M, \therefore P'$  在  $\odot A'$  上. 因得作法如下:

[作法] 作  $\angle XOY$  的等分線  $OZ$  在  $OZ$  上任意

取一點  $A'$ . 作  $A'M \perp OX$ . 以  $A'M$  爲半徑作  $\odot A'$  交

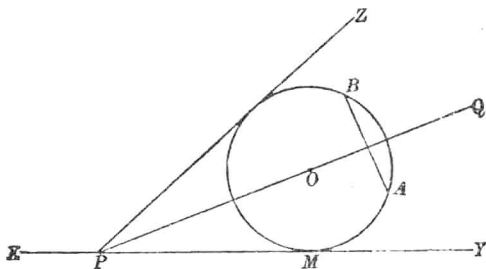


$OP$  於  $P_1, P_2$ . 聯  $A'P_1, A'P_2$ . 過  $P$  作  $PA_1 \parallel P_1A'$ , 作  $PA_2 \parallel P_2A'$  各交  $OZ$  於  $A_1, A_2$ , 則  $A_1, A_2$  卽所求圓的中心. Q. E. F.

〔證略〕

(161) 求作一圓令過二定點, 且切一定直線,

〔解析一〕 設  $A, B$  是二定點,  $XY$  是定直線.  $\odot O$



是所作之圓，切  $XY$  於  $M$ 。則  $O$  必在  $AB$  的垂直等分線  $PQ$  上。設  $PQ$  交  $XY$  於  $P$ 。過  $P$  作  $PZ$  令  $\angle ZPQ = \angle QPY$ ，則  $\odot O$  必亦與  $PZ$  相切。因  $A, B$  是定點，故  $PQ$  是定直線， $P$  是定點， $\angle QPY$  是定角， $PZ$  也是定直線，因得依照 160 的作法作之。

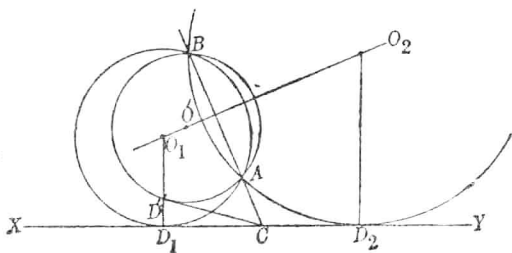
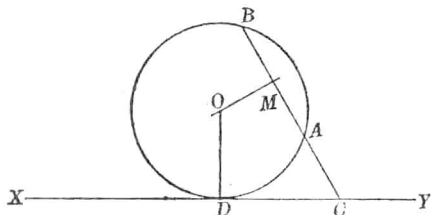
〔作法及證略〕

〔解析二〕 設

$\odot O$  是所作之圓切  $XY$  於  $D$ 。直線  $AB$  交  $XY$  於  $C$ 。則

$\overline{CD}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$ 。因  $A, B$  一定，故  $C$  一定，由是可求得  $D$  如下：

〔作法〕 聯  $AB$  交  $XY$  於  $C$ 。過  $A, B$  作一任意



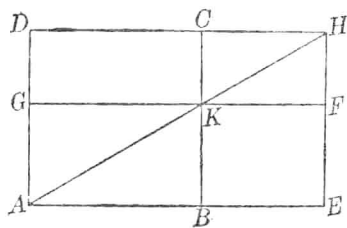
⊙ $O'$ . 過  $C$  作  $CD'$  切 ⊙ $O'$  於  $D'$ . 在  $XY$  上取  $D$  令  $CD=CD'$  (如圖  $D_1$  及  $D_2$ ) 過  $D$  作  $DO \perp XY$  交  $AB$  的垂直等分線於  $O$  ( $O_1$  及  $O_2$ ). 則  $O$  即所求的中心. Q. E. F.

〔證略〕

〔討論〕 本題有兩個解答. 但若  $AB \parallel XY$  時, 則只有一個解答. 若  $A, B$  在  $XY$  的兩旁時, 則無解答.

(162) 作矩形令其一邊為定長, 其面積等於一定正方形.

〔解析一〕 設  $ABCD$  是定正方形.  $A E F G$  是所求矩形, 其一邊  $A E$  等於定長  $l$ .  $G F$  交  $B C$



於  $K$ . 延長  $DC, EF$  會於  $H$ . 則因  $\square ABCD = \square A E F G$ ,  
 $\therefore \square GC = \square KE$ , 故  $K$  在  $AH$  上. 因得作法如下:

〔作法〕 延長  $\square ABCD$  之一邊  $DC$  至  $H$  令  $DH$  等於定長  $l$ . 作  $\square ADHE$ . 聯  $AH$  交  $BC$  於  $K$ . 過  $K$  作  $GF \parallel AE$ . 則  $\square A E F G$  即所求之矩形. Q. E. F.



〔解析二〕 設定正方形一邊之長為  $a$ . 所求矩形的一個已知邊之長為  $b$ . 按題所言即要求長  $x$  令  $bx = a^2$ . 今試任意作一圓  $O$ .  $PA$  是切線  $PXB$  是割線. 則  $PB \cdot PX = \overline{PA}^2$ .

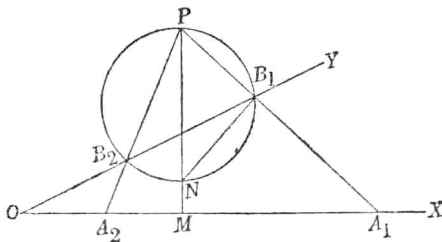
故可從  $PA, PB$  已知之長, 求得  $PX$  之長如下:

〔作法〕 從任意一  $\odot O$  的圓周上任意一點  $A$ . 作  $\odot O$  的切線  $PA = a$ .

以  $P$  為中心,  $b$  為半徑作弧交  $\odot O$  於  $B$ . 聯  $PB$  交  $\odot O$  於又一點  $X$ . 則  $PX$  即所求矩形又一邊之長.

Q. E. F.

(163)  $\angle XOY$  是定角  $P$  是定點. 求過  $P$  作一直線交  $OX, OY$  於  $A, B$ , 令  $PA \cdot PB = m^2$ .



〔解析〕 設  $PA$  即所求之線. 作  $PM \perp OX$ . 過  $B$  作  $BN \perp PA$  交  $PM$  於  $N$ . 則因  $\angle AMN, \angle ABN$  都是直角, 故  $AMNB$  共圓.  $\therefore PM \cdot PN = PA \cdot PB = m^2$ .  
 $\therefore PM$  是定長. 故可求得  $N$  後作圖如下:

〔作法〕 作  $PM \perp OX$ . 在  $PM$  上取  $N$  令  $PM \cdot PN = m^2$ .  
 (作法見上例) 以  $PN$  爲直徑作圓交  $OY$  於  $B$ . 聯  $PB$  交  $OX$  於  $A$ . 則  $PBA$  即所求. Q. E. F.

〔證〕  $\because PN$  是直徑,  $\therefore \angle PBN = R\angle$ ,  
 $\because \angle NMA = R\angle \therefore A, M, N, B$  共圓.  
 $\therefore PA \cdot PB = PM \cdot PN = m^2$ .

$\therefore PBA$  即所求直線 Q. E. D.

# 立體之部

## 1. 基本定理彙集

**定理 1.** (1) 過一直線及一點的平面有一無二. (2) 過相交兩直線的平面有一無二. (3) 過平行兩直線的平面有一無二.

**定理 2.** 平行兩面與截面的交線是平行線.

**定理 3.** 一平面過兩平行線之一, 則必平行於其二.

**定理 4.** 若一平面與一線平行, 則過此線所作任意一平面與此平面之交線, 亦必與此線平行.

**定理 5.** 兩直線與平行諸面相交, 則此兩直線爲此諸面所截之對應部份成比例.

**定理 6.** 平行於同一直線之線互相平行.

**定理 7.** 兩角的兩邊互爲同向平行, 則此兩

角相等.

**定理 8.** 若一線垂直於其他相交二線, 則此線亦垂直於其他二線所決之平面.

**定理 9.** 一平面垂直於兩平行線之一, 則必垂直於其二.

**定理 10.** 垂直於同一直線之平面互相平行.

**定理 11.** 一直線垂直於兩平行平面之一, 則必垂直於其二.

**定理 12.** 一直線垂直於一平面, 則過此直線所作諸面都垂直於此平面.

**定理 13.** 兩面各與第三平面垂直, 則其交線亦必與第三平面垂直.

**定理 14.** 三面角的兩個面角之和必比第三個面角大.

**定理 15.** 多面角各面角之和小於四直角.

**定理 16.** 兩個三面角中, 若 (1) 第一個三面角的兩個面角及其所夾的一個兩面角與第二個三面角的兩個面角及其所夾的一個兩面角順次對對相等, (2) 第一個三面角的兩個兩面角

及其所夾的一個面角與第二個三面角的兩個面角及其所夾的一個面角順次對對相等, (3) 第一個三面角的三個面角與第二個三面角的三個面角順次對對相等, 則此兩個三面角是合同形.

**定理 17.** 定理 16 中順次改爲逆次時, 則兩個三面角是對稱形.

**定理 18.** 平面與球面的交線是圓周.

**定理 19.** 兩個球面的交線是圓周.

**定理 20.** 球面三角形兩邊之和大於第三邊.

**定理 21.** 球面凸多角形各邊之和小於大圓.

**定理 22.** 若第一個球面三角形是第二個的極三角形, 則第二個亦是第一個的極三角形.

**定理 23.** 若兩個球面三角形互爲極三角形, 則第一個的每一角的度數與第二個的對應邊的度數之和是  $180$  度.

**定理 24.** 同球面上的兩三角形中, 若 (1) 第一個三角形的兩邊及夾角與第二個三角形的兩邊及夾角順次對對相等, (2) 第一個三角形的兩

角及夾邊與第二個三角形的兩角及夾邊順次對對相等, (3) 第一個三角形的三邊與第二個三角形的三邊順次對對相等, (4) 第一個三角形的三個角與第二個三角形的三個角順次對對相等, 則此兩三角形是合同形.

**定理 25.** 定理 24 中順次改爲逆次時, 則兩三角形是對稱形.

**定理 26.** 球面三角形的兩邊相等, 則其對角亦相等; 兩角相等, 則其對邊相等.

**定理 27.** 球面三角形的兩邊不等, 則大邊的對角大; 兩角不等, 則大角的對邊大.

## 2. 雜題證例

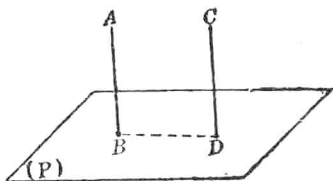
(1) 垂直於同一平面的兩直線互相平行.

設  $AB \perp (P)$ ,  $CD \perp (P)$ .

求證  $AB \parallel CD$ .

立體題往往誤證, 茲先舉本題的誤證如下.

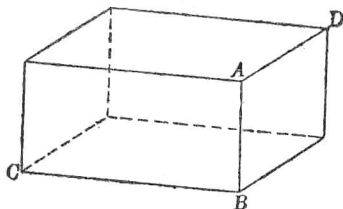
學者務須細加辨正.



〔謬誤的證明〕 聯  $BD$ .  $\because AB \perp (P)$ ,  $\therefore AB \perp BD$ .  
 $\because CD \perp (P)$   $\therefore CD \perp BD$ . 今既  $AB$  與  $CD$  都與  $BD$   
 垂直, 故  $AB \parallel CD$ . Q. E. D.

上面的證法, 好像很有根據. 其實錯了. 因“垂直於同一直線的兩線互相平行.”一語, 只能適用於平面圖形, 於立體圖形並不適合. 試看右圖是一個直方體.  $CB \perp AB$ .

$DA \perp AB$ . 然  $CB$  與  $DA$  並不平行, 是很顯明的事實. 從此可知以上證法的不可靠了. 茲真確證明如下:



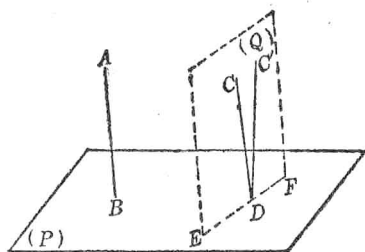
〔證〕 過  $D$  作  $DC'$

令與  $AB$  平行. 則

$DC' \perp (P)$ . (定理 9) 過

$DC, DC'$  作平面  $(Q)$ .

$(Q)$  與  $(P)$  交於  $EF$ .



則因  $CD \perp (P)$ ,  $\therefore CD \perp EF$ .  $C'D \perp (P)$ ,  $\therefore C'D \perp EF$ .

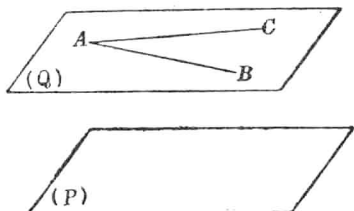
但  $DC, DC', EF$  都在  $(Q)$  內,  $\therefore C'D$  合於  $CD$ , (因

在一平面內，過  $EF$  上  $D$  點所作  $EF$  的垂線只有一個。  $\therefore AB \parallel CD$ . Q. E. D.

〔註〕 以上的證法叫做合一證法。

(2) 相交兩直線各與一平面平行，則過此兩線所作之面必與此

平面平行。  $AB, AC$  交於  $A$ ,  $(Q)$  是過  $AB, AC$  之平面。  $AB \parallel (P)$ ,  $AC \parallel (P)$ . 求證  $(Q) \parallel (P)$ .



〔證〕 設若  $(Q)$  與  $(P)$  不平行而相交，其交線為  $l$ . 則  $\because AB \parallel (P) \therefore AB \parallel l$ . (定理 4)

又  $\because AC \parallel (P) \therefore AC \parallel l$ . (定理 4)

$\therefore AB \parallel AC$  (定理 6). 然此與假設矛盾。故  $(Q)$  與  $(P)$  決不相交。  $\therefore (Q) \parallel (P)$ . Q. E. D.

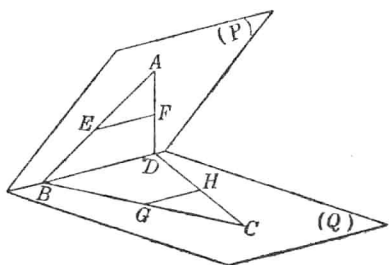
〔註〕 以上的證法叫做歸謬證法。

(3) 四邊形兩鄰邊中點所聯線份與其他兩鄰邊所聯線份平行且相等。

$ABCD$  是空間任意一個四邊形。  $E, F, G, H$  各為  $AB, AD, CB, CD$  的中點。求證  $EF \parallel GH; EF = GH$ .



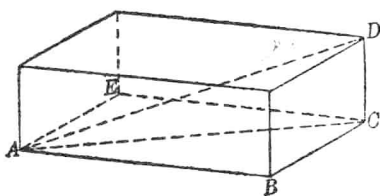
(證) 過  $AB, AD$   
作平面  $(P)$ . 過  $BC, CD$   
作平面  $(Q)$ .  $(P), (Q)$   
交於  $BD$ . 在  $(P)$  內,  
 $\therefore E, F$  各為  $AB, AD$   
的中點,  $\therefore EF \parallel BD$ ,



$EF = \frac{1}{2}BD$ . 在  $(Q)$  內,  $\therefore G, H$  各為  $CB, CD$  的中點,  $\therefore$   
 $GH \parallel BD, GH = \frac{1}{2}BD \therefore EF \parallel GH; EF = GH$ . Q. E. D.

(4) 直方體內對角線上之正方形等於其長,  
廣,高三邊上正方形  
形之和.

設直方體長  $AB$ ,  
廣  $BC$ , 高  $CD$ . 其對  
角線  $AD$ .



求證  $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$ .

(證)  $\therefore \angle DCB = R\angle, \angle DCE = R\angle, \therefore DC$  垂直  
於底面  $ABCE$ . (定理 8).  $\therefore DC \perp CA$  即  $\angle DCA = R\angle$ .

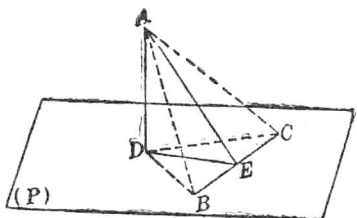
$\therefore \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ . 又因  $\angle ABC = R\angle$ ,

故  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ .  $\therefore \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$ . Q. E. D.

(5) 從平面  $(P)$  外一點  $A$ , 向  $(P)$  及  $(P)$  中任意一直線  $BC$  各作垂線

$AD, AE$ . 聯垂足  $DE$

求證  $DE \perp BC$ .

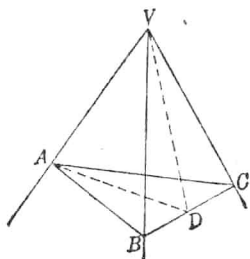


(證) 在  $BC$  上取  $B, C$  兩點令  $BE = CE$ .

聯  $AB, AC, DB, DC$ . 因  $AE$  是  $BC$  的垂直等分線, 故  $AB = AC$ . 又因  $AD \perp (P)$ ,  $\therefore \angle ADB = \angle ADC = R\angle$ .  $\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADC$ ,  $\therefore DB = DC$ . 又因  $BE = EC$   $\therefore \triangle DBE \cong \triangle DCE$ .  $\therefore \angle DEB = \angle DEC$ .  $\therefore DE \perp BC$ . Q. E. D.

(6) 一個三面角的兩個面角相等, 則他的相對的兩個兩面角也相等.

設三面角  $V-ABC$  中,  $\angle AVB = \angle AVC$ . 求證兩面角  $VB =$  兩面角  $VC$ .



(證) 在兩面角  $VA$  內, 作一等分角面交面  $VBC$

於  $VD$ , 則在兩個三面角  $V-ABD, V-ACD$  中,

$\angle AVB = \angle AVC$  (假設),  $B-VA-D = C-VA-D$   
 ( $VAD$  等分  $B-VA-C$ ),  $\angle AVD$  公共, 故  $V-ABD$   
 與  $V-ACD$  是對稱形. (定理 17)

$\therefore$  兩面角  $VB =$  兩面角  $VC$ . Q. E. D.

[注意] 立體圖形裏面的三面角好比平面圖形裏面的三角形. 三面角的三個面角相當於三角形的三個邊. 三面角的三個兩面角相當於三角形的三個角. 故本題好比就是平面部份的基本定理 10: “二等邊三角形的底角相等”. 上面的證法, 也同基本定理 10 的證法一樣.

(7) 一個四面角  $V-ABCD$  中, 已知  $\angle AVB = \angle AVD$ , 兩面角  $VB =$  兩面角  $VD$ . 求證  $\angle BVC = \angle DVC$ .

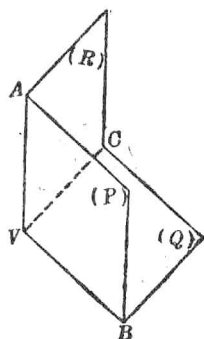
[證法可做平面部份(1)]

(8) 一個三面角的三個面角都是直角, 則他的三個兩面角也都是直角.

三面角  $V-ABC$  中  $\angle AVB = \angle BVC = \angle CVA = R\angle$ . 求證兩面角  $VA, VB, VC$  也都是直角.

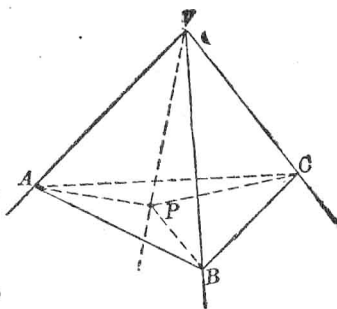
[證] 設  $VA, VB$  之面為  $(P)$ ;  $VB, VC$  之面為  $(Q)$ ;

$VC, VA$  之面爲  $(R)$ . 則因  $\angle AVB = R\angle, \angle BVC = R\angle, \therefore BV \perp AV, BV \perp CV. \therefore BV \perp (R)$ , (定理 8).  
 $\therefore (P) \perp (R), (Q) \perp (R)$ . (定理 12).  
 即兩面角  $VA, VC$  都是直角.  
 同理可證兩面角  $VB$  也是直角.  
 Q. E. D.



(9)  $P$  是三面角  $V-ABC$  內的任意一點.  
 求證  $\angle AVP + \angle BVP + \angle CVP > \frac{1}{2}(\angle AVB + \angle BVC + \angle CVA)$ .

〔證〕 聯  $PV$ . 成三個三面角  $V-ABP, V-BCP, V-CAP$ . 在  $V-ABP$  中,  
 $\angle AVP + \angle BVP > \angle AVB$ .  
 (定理 14) 同樣在  $V-BCP, V-CAP$  中,  $\angle BVP + \angle CVP > \angle BVC, \angle CVP + \angle AVP > \angle CVA$ .



$$\therefore 2\angle AVP + 2\angle BVP + 2\angle CVP > \angle AVB + \angle BVC + \angle CVA.$$

$$\therefore \angle AVP + \angle BVP + \angle CVP > \frac{1}{2} (\angle AVB + \angle BVC + \angle CVA). \quad Q. E. D.$$

(10)  $A$  是平面  $(P)$  外的一固定點  $AB$  是一個動線份交  $(P)$  於  $B$ .  $AB$  之長一定求  $B$  之軌跡.

〔解〕 從  $A$  作  $AC \perp (P)$ . 聯  $BC$ .

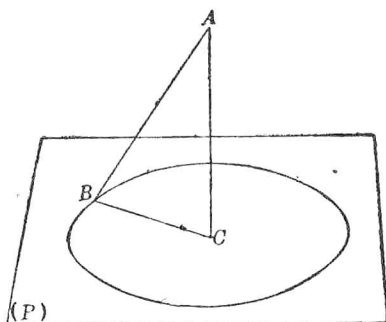
則  $AC \perp BC$ .

$$\text{故 } \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2.$$

因  $AB, AC$  都是定

長, 故  $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$  是

定值. 故  $\overline{BC}^2$  是定值而  $BC$  之長一定. 又因  $C$  是定點. 故  $B$  之軌跡是以  $C$  為中心,  $\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}$  為半徑在  $(P)$  上所作之圓.



〔證略〕

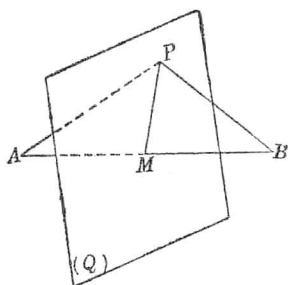
(11)  $A, B$  是兩固定點.  $P$  是一動點.  $PA = PB$ . 求證  $P$  之軌跡是  $AB$  的垂直等分面  $(Q)$ .

〔證〕 (1) 設  $P$  是  $(Q)$  中任意一點聯  $PA, PB, PM$ ,  $\because AB \perp (Q)$ ,  $\therefore AB \perp PM$ . 又  $AM = MB$ .  $\therefore PA = PB$ . 即  $(Q)$  中所有點適合於所設條件.

(2) 設  $P$  是適合於所設條件的點, 而  $PA=PB$ . 聯  $PM$ .  
則  $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ .

$$\therefore PM \perp AB.$$

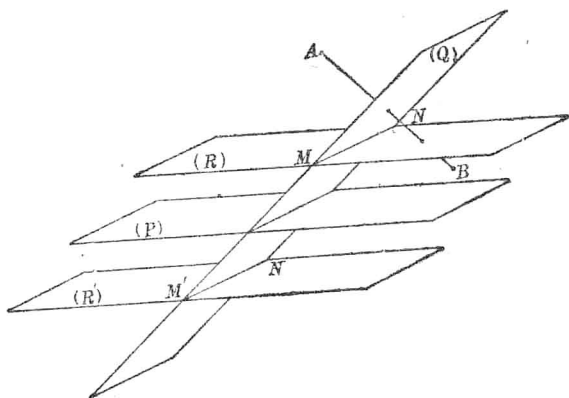
故  $PM$  在  $(Q)$  內, 即  $P$  在  $(Q)$  上. 故適合於所設條件的點在  $(Q)$  上.



$\therefore P$  之軌跡是  $AB$  的垂直等分面  $(Q)$ . *Q. E. D.*

(12) 平面  $(P)$  及面外兩定點  $A, B$ . 求距  $A, B$  等遠並距  $(P)$  面  $l$  寸之點之軌跡.

〔解〕 距  $A, B$  等遠之點之軌跡是  $AB$  之垂直

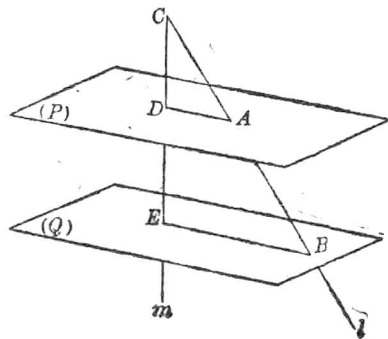


等分面. 距  $(P)$   $l$  寸之點之軌跡是  $(P)$  面兩旁一雙平行面, 此一雙平行面與  $(P)$  間之公垂線各長  $l$  寸. 設  $AB$  之垂直等分面為  $(Q)$ .  $(P)$  之一雙平行面為  $(R)$  及  $(R')$ .  $(Q)$  與  $(R)$  及  $(R')$  各交於  $MN$  及  $M'N'$ . 則所求點之軌跡是  $MN$  及  $M'N'$  一雙平行線.

〔證略〕

(13) 一直線與兩個平行平面相交所夾之角必相等.

$(P)$ ,  $(Q)$  是兩個平行平面. 一直線  $l$  交  $(P)$  於  $A$ , 交  $(Q)$  於  $B$ . 求證  $l$  與  $(P)$  所夾之角等於  $l$  與  $(Q)$  所夾之角.

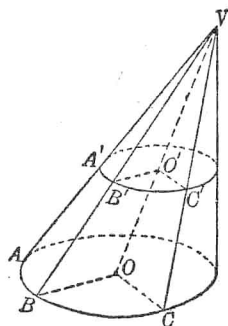


〔證〕 從  $l$  上任意一點  $C$  作直線  $m$  令與  $(P)$  垂直交  $(P)$  於  $D$ , 交  $(Q)$  於  $E$ .  $\because (P) \parallel (Q)$ ,  $m \perp (P)$ ,  $\therefore m \perp (Q)$ .  $\therefore l, m$  所決之面亦必垂直於  $(P)$  及  $(Q)$ .  $\therefore AD$  是  $AC$  在  $(P)$  上之射影;  $BE$  是  $BC$

在 (Q) 上之射影.  $\therefore \angle CAD$  即  $l$  與 (P) 所夾之角.  $\angle CBE$  即  $l$  與 (Q) 所夾之角.  $\because (P) \parallel (Q)$ ,  $\therefore AD \parallel BE$  (定理 2).  $\therefore \angle CAD = \angle CBE$ . 即  $l$  與 (P) 所夾之角等於  $l$  與 (Q) 所夾之角. Q. E. D.

(14) 圓錐體的截面平行於底的是圓.

$V-ABC$  是圓錐體,  $O$  是底  $\odot ABC$  的中心.  $A'B'C'$  是截面與  $ABC$  平行. 求證  $A'B'C'$  是圓.



〔證〕 聯  $VO$  交截面  $A'B'C'$  於  $O'$ . 在底面  $\odot ABC$  中作任意半徑  $OB$ . 過  $VO, OB$  的平面交截面  $A'B'C'$  於  $O'B'$ . 則因  $A'B'C' \parallel ABC$ ,  $\therefore O'B' \parallel OB$ .  $\therefore \triangle VOB \sim \triangle VO'B'$ .  $\therefore O'B' : OB = VO' : VO$ . 但  $OB, VO', VO$  都是定長,  $\therefore O'B'$  也是定長. 又  $O'$  是定點. 故  $A'B'C'$  是圓. Q. E. D.

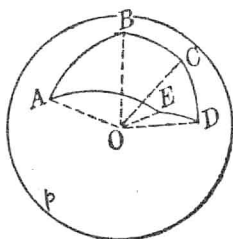
(15) 球面凸多角形各邊之和小於此球面上之大圓周.

$ABCDE$  是球面上的凸多角形.  $p$  是大圓周. 求



證  $\frown AB + \frown BC + \frown CD + \frown DE$   
 $+ \frown EA < p.$

〔證〕 聯球的諸半徑  $OA, OB, OC, OD, OE,$  成多面角  $O-ABCDE.$



則因  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE$   
 $+ \angle EOA < 4R\angle. \text{ (定理 15)}$

$\therefore \frown AB + \frown BC + \frown CD + \frown DE + \frown EA < p. \text{ Q. E. D.}$

〔注意〕 凡球面多角形中邊和角的關係剛巧與球心做頂點所成多面角中面角和兩面角的關係一樣。

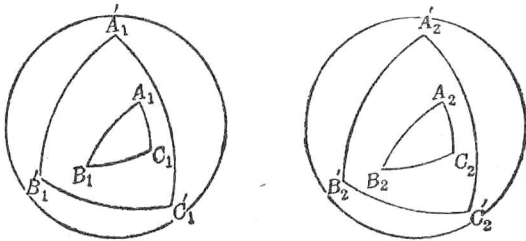
(16) 同球或等球面上兩個三角形中，若他們的三對角互相等，則他們的三對邊也互相等，而此兩三角形或是合同形或是對稱形。

$A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$  是等球面上的兩個三角形。

$$\angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \angle C_1 = \angle C_2.$$

求證  $\frown A_1B_1 = \frown A_2B_2, \frown B_1C_1 = \frown B_2C_2,$   
 $\frown A_1C_1 = \frown A_2C_2.$

若順次時， $\triangle A_1B_1C_1$  及  $\triangle A_2B_2C_2$  是合同形。若逆



次時, 則為對稱形.

〔注意〕 此即定理 24 的 (4). 此係球面三角形與平面三角形不同之點. 平面兩三角形中, 兩雙角相等, 則第三雙角也必等, 而三雙角相等時, 僅為相似形, 未必合同形. 球面兩三角形中, 兩雙角相等時, 第三雙角未必相等. 若三雙角各相等, 則兩三角形即是合同形或對稱形. 茲證如下:

〔證〕 作  $A_1B_1C_1$  的極三角形  $A'_1B'_1C'_1$ ,  $A_2B_2C_2$  的極三角形  $A'_2B'_2C'_2$ . 則因  $\angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \angle C_1 = \angle C_2, \therefore \frown B'_1C'_1 = \frown B'_2C'_2, \frown A'_1C'_1 = \frown A'_2C'_2, \frown A'_1B'_1 = \frown A'_2B'_2$ . (根據定理 23).  $\therefore \triangle A'_1B'_1C'_1$  與  $\triangle A'_2B'_2C'_2$  是合同形或對稱形 (定理 24 (3)).

$\therefore \angle A'_1 = \angle A'_2, \angle B'_1 = \angle B'_2, \angle C'_1 = \angle C'_2, \therefore \frown B_1C_1 = \frown B_2C_2, \frown A_1C_1 = \frown A_2C_2, \frown A_1B_1 = \frown A_2B_2$ . (根據定

理 23).  $\therefore \triangle A_1B_1C_1$  作  $\triangle A_2B_2C_2$  是合同形, 或是對稱形. Q. E. D.

### 3. 基本計算公式彙集

[式中  $V$  表體積,  $T$  表全面積,  $L$  表側面積,  $B$  和  $b$  表底面積,  $S$  表斜高,  $E$  表棱,  $H$  表高,  $R$  和  $R'$  表半徑.]

1. 長方體:  $V = \text{長} \times \text{廣} \times \text{高}.$

$$T = 2(\text{長} \times \text{廣} + \text{長} \times \text{高} + \text{廣} \times \text{高}).$$

2. 直角牆:  $V = B \times H.$

$$L = E \times \text{底的周圍}.$$

$$T = L + 2B.$$

3. 正角錐:  $V = \frac{1}{3}B \times H$

$$L = \frac{1}{2}S \times \text{底的周圍}.$$

$$T = L + B.$$

4. 正角錐台:  $V = \frac{1}{3}H(B + b + \sqrt{Bb}).$

$$L = \frac{1}{2}S(\text{兩底周圍之和}).$$

$$T = L + B + b.$$

5. 直圓牆:  $V = \pi R^2 H.$

$$L = 2\pi RH.$$

$$T = 2\pi R (H + R)$$

6. 直圓錐:  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$

$$L = \pi RS.$$

$$T = \pi R (S + R).$$

7. 直圓錐台:  $V = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + R'^2 + RR')$

$$L = \pi S (R + R')$$

$$T = L + \pi (R^2 + R'^2).$$

8. 球:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$  [ $D$ 表直徑]

$$T = 4\pi R^2.$$

9. 球面帶形:  $T = 2\pi RH.$

10. 球面月形:  $T = \frac{\text{月形角}}{\text{直角}} \times \pi R^2$

11. 球面三角形:  $T = \frac{\text{球面過剩}}{2\text{直角}} \times \pi R^2$

注:  $\triangle BAC$  的球面過剩是

$$\angle A + \angle B + \angle C - 2R\angle.$$

12. 球角錐體:  $V = \frac{1}{3}BR.$

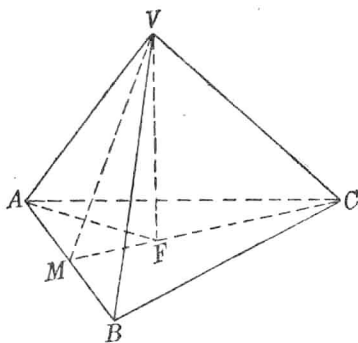
13. 球扇形體:  $V = \frac{1}{3}R \times \text{球面帶形}$   
 $= \frac{2}{3}\pi R^2 H.$

$$14. \text{ 球份: } V = \frac{\pi H}{2}(R^2 + R'^2) + \frac{\pi H^3}{6}$$

#### 4. 計算題雜例

(17) 一正三角錐高三寸, 底每邊長五寸, 求其棱, 側面積及體積.

〔解〕  $V$  為角錐頂.  
 $\triangle ABC$  為底.  $VF$  為高.  $F$  是  $\triangle ABC$  的重心.  $CM$  是中線.  $M$  是  $AB$  的中點. 故從假設  $AB = AC = BC = 5$  寸,



$$\therefore AM = \frac{5}{2} \text{ 寸}, \quad MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \text{ 寸},$$

$$AF = CF = \frac{2}{3}CM = \frac{5}{3}\sqrt{3} \text{ 寸}, \quad MF = \frac{1}{3}CM = \frac{5}{6}\sqrt{3} \text{ 寸},$$

$$VM = \sqrt{VF^2 + MF^2} = \sqrt{9 + \frac{75}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{399} \text{ 寸}.$$

$$VA = \sqrt{VF^2 + AF^2} = \sqrt{9 + \frac{75}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{39} \text{ 寸}.$$

$$\triangle VAB = \frac{1}{2}VM \cdot AB = \frac{5}{12}\sqrt{399} \text{ 方寸}.$$

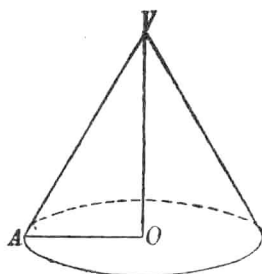
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}CM \cdot AB = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{3} \times 5 = \frac{25}{4}\sqrt{3} \text{ 方寸.}$$

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4}\sqrt{3} \times 3 = \frac{25}{4}\sqrt{3} \text{ 立方寸.}$$

故此錐體之各稜長  $\frac{2}{3}\sqrt{39}$  寸. 側面積為  $\frac{5}{4}\sqrt{399}$  方寸. 體積為  $\frac{25}{4}\sqrt{3}$  立方寸.

(18) 設一正圓錐體之底半徑為 5 尺, 其高為 12 尺. 求其側面積全面積及體積.

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } S &= VA = \sqrt{VO^2 + AO^2} \\ &= \sqrt{R^2 + H^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ 尺} \\ &= \sqrt{25 + 144} \text{ 尺} \\ &= \sqrt{169} \text{ 尺} = 13 \text{ 尺} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore \text{側面積} = L &= \pi RS = 3.1416 \times 5 \times 13 \text{ 方尺} \\ &= 204.2 \text{ 方尺.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{全面積} = T &= \pi R(S + R) \\ &= 3.1416 \times 5 \times (13 + 5) \text{ 方尺} \\ &= 3.1416 \times 5 \times 18 \text{ 方尺} \\ &= 282.7 \text{ 方尺.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{體積} = V &= \frac{1}{3}\pi R^2 H \\
 &= \frac{1}{3} \times 3.1416 \times 5^2 \times 12 \text{ 立方尺} \\
 &= 314.16 \text{ 立方尺.}
 \end{aligned}$$

(19) 有兩個立方體，一個每邊長 120 寸，一個每邊長 209 寸。今又有一個立方體，其表面積適等於以上兩個表面積之和。求其每邊之長。

〔解〕 設其每邊之長為  $x$  寸，則其表面積當為  $6x^2$  方寸而其他兩個表面積之和為

$$6 \times 120^2 + 6 \times 209^2$$

$$\therefore 6x^2 = 6 \times 120^2 + 6 \times 209^2. \quad \therefore x = \sqrt{120^2 + 209^2} = 241.$$

$\therefore$  每邊長 241 寸。

(20) 半徑為 3 寸，4 寸，5 寸，的三個鐵球鎔合鑄成一個大球。問大球之半徑如何？

〔解〕 設大球之半徑為  $x$  寸。則其體積當為  $\frac{4}{3}\pi x^3$  立方寸。然三球之體積各為  $\frac{4}{3}\pi \times 3^3$ ， $\frac{4}{3}\pi \times 4^3$ ， $\frac{4}{3}\pi \times 5^3$  立方寸。  $\therefore \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi (3^3 + 4^3 + 5^3)$

$$\begin{aligned}
 \therefore x &= \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3} \\
 &= \sqrt[3]{27 + 64 + 125} \\
 &= \sqrt[3]{216}
 \end{aligned}$$

$$= 6.$$

∴ 大球之半徑為 6 寸。

(21) 圓錐體之全面積為 176, 斜高為 10. 問此圓錐底之半徑為幾何?

【解】 依公式 6,  $T = \pi R (S + R)$ .

以已知值代入得  $176 = \frac{22}{7} \times R (10 + R)$

$$7 \times 8 = 10R + R^2$$

$$R^2 + 10R - 56 = 0$$

$$(R + 14) (R - 4) = 0$$

故得  $R = 4$ . 或  $R = -14$ .

但半徑決非負數, 故此圓錐底之半徑為 4.

(22) 正方台體上底每邊長 6 寸, 下底每邊長 8 寸, 高 5 寸. 求其體積.

【解】  $V = \frac{1}{3}H(B + b + \sqrt{Bb})$

今  $B = 8^2 = 64$ ,  $b = 6^2 = 36$ ,  $\sqrt{Bb} = \sqrt{8^2 \times 6^2} = 8 \times 6 = 48$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \times 5(64 + 36 + 48) = \frac{1}{3} \times 5 \times 148 = \frac{740}{3} = 246\frac{2}{3}$$

故其體積為  $246\frac{2}{3}$  立方寸.

(23) 今有米若干公石堆成一圓錐形, 其高為



4 公尺,底之半徑爲 5 公尺.若以底每邊 4 公尺之正方形之倉儲之,問高若干公尺.

〔解〕 設高  $x$  公尺,則米之體積共爲  $4^2x$  立方公尺等於圓錐形之體積.

$$\therefore 4^2x = \frac{1}{3}\pi 5^2 \times 4$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{5^2 \times 4 \times 3.1416}{3 \times 4^2} = \frac{5^2 \times 0.7854}{3} \\ &= 5^2 \times 0.2618 = 6.545 \end{aligned}$$

$\therefore$  高爲 6.545 公尺.

(24)  $A, B$  兩球體積之比爲 125 : 216. 求其表面積之比.

〔解〕 設  $A$  球之半徑爲  $a$ ,  $B$  球之半徑爲  $b$ , 則其體積各爲  $\frac{4}{3}\pi a^3, \frac{4}{3}\pi b^3$ . 而其表面積各爲

$$4\pi a^2, 4\pi b^2.$$

$$\text{今 } \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{\frac{4}{3}\pi b^3} = \frac{125}{216}, \text{ 即 } \frac{a^3}{b^3} = \frac{125}{216} \therefore \frac{a}{b} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{5}{6}.$$

$$\therefore \frac{a^2}{b^2} = \frac{25}{36}, \therefore \frac{4\pi a^2}{4\pi b^2} = \frac{25}{36}.$$

故兩球表面積之比爲 25 : 36.

(25) 一個正方形每邊長 4 寸.繞了他的一個

對角線旋轉成一體。求其體積和表面積。

〔解〕  $ABCD$  是正方形。  $AC$  是他的對角線。圍繞  $AC$  旋轉所成之體是一雙圓錐體  $A-BED$  及  $C-BED$ 。

因  $AB=4$  寸，故  $AC$   
 $=4\sqrt{2}$  寸。

$\therefore AO=CO=EO=2\sqrt{2}$  寸

從公式 6,  $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ ,

得  $A-BED$  及  $C-BED$

的體積各為  $\frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 (2\sqrt{2})$  立方寸

故體積為  $2 \times \frac{1}{3} \times 3.1416 \times 16 \times 1.4142$  立方寸

$=47.39$  立方寸

又

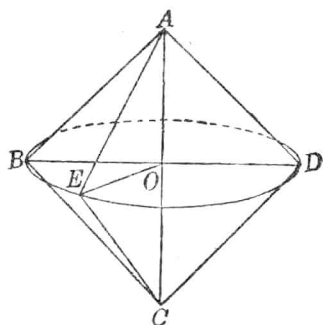
$$T = \pi R (S + R)$$

故全面積為  $2 \times 3.1416 \times 2\sqrt{2} (4 + 2\sqrt{2})$  方寸

$= 2 \times 3.1416 \times 2 \times 1.4142 \times 6.8284$  方寸

$= 121.36$  方寸

(26) 一珈琲壺上口直徑 4 寸，底直徑 5 寸，高 8 寸。若珈琲杯之容量為每杯 10 立方寸，則此壺



可容珈琲幾杯？

〔解〕 此壺係圓錐台形，故體積公式爲

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + R'^2 + RR')$$

即此壺容量爲  $\frac{1}{3} \times 3.1416 \times 8 \times (25 + 16 + 20)$  立方寸。

因每杯容量爲 10 立方寸。

$$\begin{aligned} \text{故此壺所容杯數爲 } & \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} \times 3.1416 \times 8 \times (25 + 16 + 20) \\ & = .10472 \times 8 \times 61 \\ & = 51.1+ \end{aligned}$$

∴ 此壺約容珈琲 51 杯。

(27) 若球面一帶形的面積是 80 方寸，其高是 4 寸，則此球半徑幾寸？

〔解〕 帶形面積公式爲  $T = 2\pi RH$ 。

$$\text{故 } R = \frac{T}{2\pi H} = \frac{80}{2 \times 3.1416 \times 4} = \frac{10}{3.1416} = 3.183 \text{ 寸}$$

(28) 一圓壩形罐直徑 4 寸內有一部份水。若將一球浸入罐內水中，則罐內之水升高一寸。求此球半徑。

〔解〕 此球排水量等於直徑 4 寸高 1 寸的圓壩體，故當爲  $\pi R^2 H = \pi 2^2 \times 1 = 4\pi$  立方寸。設此球

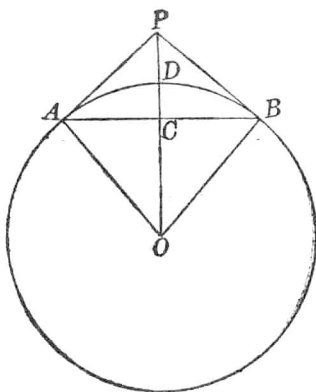
之半徑爲  $R$ , 則

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi. \therefore R^3 = 3. R = \sqrt[3]{3}$$

故此球半徑爲  $\sqrt[3]{3}$  寸 = 1.442 寸.

(29) 假定地球是真確球體其半徑爲四千英里. 在高出地面一千英里處俯視地面得見地面幾平方里?

〔解〕 圖示截面  $OA = OD = OB = 4000$  英里  
 $PD = 1000$  英里.  $\widehat{AB}$  表在  $P$  點所得見之地面, 是一個球面帶形. 其高爲  $CD$ .  $\therefore PA$  是切線,



$\therefore \angle PAO$  是直角. 又

$$AC \perp OP. \therefore \overline{OA}^2 = OC \cdot OP \quad \therefore OC = \overline{OA}^2 \div OP$$

$$= \overline{OA}^2 \div (OD + DP) = 4000^2 \div (4000 + 1000) = \frac{16}{5} \times 1000$$

$$= 3200 \text{ 英里.} \quad \therefore CD = OD - OC = 4000 - 3200$$

$$= 800 \text{ 英里.} \quad \therefore \text{從公式 } T = 2\pi RH = 2\pi \cdot 4000 \times 800$$

$$= 6400000\pi = 20,106,240.$$

故得見地面 20, 106, 240 方英里。

(30) 一個球角錐體, 他的底是一個正三角形, 每角為  $80^\circ$ . 球半徑長 10 寸. 求此錐體積.

[解] 先從公式 11, 求  $\triangle ABC$  的面積.

$$T = \frac{\text{球面過剩}}{2\text{直角}} \times \pi R^2 = \frac{3 \times 80^\circ - 180^\circ}{180^\circ} \times \pi \cdot 100.$$

$$= \frac{100}{3} \pi \text{ 方寸.}$$

再從公式 12. 求體積,  $V = \frac{1}{3}BR = \frac{1}{3} \times \frac{100}{3} \pi \times 10$

$$= \frac{1000}{9} \pi \text{ 立方寸.}$$

中華民國二十四年五月初版

周

三七八七上

\*\*\*\*\*  
版 翻  
權 印  
所 必  
有 究  
\*\*\*\*\*

高中複  
習叢書

何 學 一 冊

(52272.9)

每冊定價大洋肆角

外埠酌加運費匯費

編 著 者 榮 方 舟

發 行 人 王 雲 五  
上海河南路

印 刷 所 商 務 印 書 館  
上海河南路

發 行 所 商 務 印 書 館  
上海及各埠

(本書校對者王養吾  
徐培生)