Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 66

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 66.1. Es seien $[a,b[$ und $[c,d[$ zwei halboffene Intervalle (mit $a \leq b$ und $c \leq d$). Beschreibe den Durchschnitt $[a,b[\cap[c,d[$ als eine disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen.

Aufgabe 66.2. Es sei $\mathcal{M}$ das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, reellen Intervallen besteht. Zeige, dass $\mathcal{M}$ kein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 66.3. Es sei $\mathcal{M}$ das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, abgeschlossenen, einseitig halboffenen, leeren, beschränkten oder unbeschränkten reellen Intervallen besteht. Zeige, dass $\mathcal{M}$ eine Mengenalgebra ist.

Aufgabe 66.4. Man gebe ein Beispiel für eine beschränkte Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$, die man als eine abzählbare disjunkte Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben kann, aber nicht als eine endliche Vereinigung.

Aufgabe 66.5. Zeige, dass unter einer polynomialen Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $\neq 1$ das Urbild eines rechtsseitig halboffenen Intervalls nicht rechtsseitig halboffen sein muss.

Aufgabe 66.6. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare beschränkte Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(T) < \infty$ ist.

Aufgabe 66.7. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Borel-Menge. Zeige, dass

$$\lambda(T) = \inf\left(\left\{\sum_{i \in I}(b_i - a_i) | \, T \subseteq \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i[, \, I \text{ abzählbar}\right\}\right)$$

mit

$$\inf\left(\left\{\sum_{i \in I}(b_i - a_i) | \, T \subseteq \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i], \, I \text{ abzählbar}\right\}\right)$$

und mit

$$\inf\left(\left\{\sum_{i \in I}(b_i - a_i) | \, T \subseteq \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[, \, I \text{ abzählbar}\right\}\right)$$

übereinstimmt.

Aufgabe 66.8. Es seien endlich viele linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben und es sei

$$P = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k | \, a_i \in [0,1]\}$$

das dadurch erzeugte Parallelotop. Zeige, dass P beschränkt ist.

Aufgabe 66.9. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine nichtleere offene Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(U) > 0$ ist. Zeige ebenso, dass dies für abgeschlossene Mengen nicht gelten muss.

Aufgabe 66.10. Man gebe ein Beispiel für ein σ-endliches Maß μ auf $\mathbb{R}$ an, das auf allen Intervallen mit positiver Länge den Wert ∞ besitzt.

Aufgabe 66.11. Es seien V und W reelle Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass das Bild eines Parallelotops wieder ein Parallelotop ist.

Aufgabe 66.12. Zeige, dass das Zählmaß auf dem $\mathbb{R}^n$ translationsinvariant, aber auf dem Einheitswürfel nicht beschränkt ist.

Aufgabe 66.13. Zeige, dass das Gittermaß zum Gitterabstand $\epsilon > 0$ auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht translationsinvariant, aber auf dem Einheitswürfel beschränkt ist.

Aufgabe 66.14.*

Die Grundfläche eines Kochtopfes sei eine Kreisscheibe mit Radius 13 cm, der Topf sei 10 cm hoch und auf die Höhe von $7,7$ cm mit Wasser gefüllt. Eine Kartoffel wird in den Topf geworfen und taucht voll unter, wobei das Wasser auf eine Höhe von $8,8$ cm ansteigt.

a) Berechne das Volumen der Kartoffel (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen)!

b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

c) Handelt es sich um eine große oder um eine kleine Kartoffel?

Aufgabe 66.15.*

Eine Bratpfanne hat einen Durchmesser von 30 cm und wird mit Öl und mit 25 kreisrunden Bratkartoffeln überschneidungsfrei bedeckt, die alle einen Durchmesser von 4 cm und eine Höhe von $0,5$ cm haben. Das Öl bildet unterhalb der Bratkartoffeln einen dünnen Ölfilm von $0,1$ mm Höhe und erreicht in den Zwischenräumen eine Höhe von 1 mm.

a) Wie viel Öl befindet sich in der Pfanne (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen)?

b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

Aufgabe 66.16.*

Eine Klorolle hat einen äußeren Durchmeser von 12 cm und einen inneren Durchmesser von 4 cm. Das ausgewickelte Klopapier ergibt eine Länge von 20 Metern. Wie dick ist das Klopapier?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 66.17. (4 Punkte)

Zeige, dass sich eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ genau dann als eine endliche Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben lässt, wenn dies mit endlich vielen disjunkten rechtsseitig halboffenen Intervallen möglich ist.

Aufgabe 66.18. (6 (3+3) Punkte)

Es sei $\mathcal{V}$ der Mengen-Präring aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche Vereinigung von (rechtsseitig) halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen. Beweise folgende Aussagen.

(1) Die zu V über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle

$$V = [a_1, b_1[\uplus \ldots \uplus [a_n, b_n[$$

definierte Zahl

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

ist wohldefiniert.

(2) Durch die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ wird ein Prämaß auf diesem Präring definiert.

Die Cantor-Menge ist das Endprodukt des in dieser Skizze angedeuteten Ausdünnungsprozesses.

Aufgabe 66.19. (5 (1+2+2) Punkte)

Die *Cantor-Menge* ist definiert durch

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} z_i 3^{-i} | \, z_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_+ \right\} .$$

a) Zeige, dass C überabzählbar ist.

b) Zeige, dass C eine Borel-Menge ist.

c) Zeige $\lambda^1(C) = 0$.

Aufgabe 66.20. (6 Punkte)

Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass das von diesen Vektoren erzeugte Parallelotop einen achsenparallelen Würfel (mit positiver Länge) enthält.

Aufgabe 66.21. (12 Punkte)

Es sei μ ein Maß auf dem $\mathbb{R}^n$, das für alle offenen Bällen $U(P, r)$ mit dem Borel-Lebesgue-Maß übereinstimmt. Zeige $\mu = \lambda^n$.

(Für den zweidimensionalen Fall gibt es 10 Punkte.)

Aufgabe 66.22. (6 Punkte)

Man gebe eine Beispiel für eine offene Menge $U \subseteq [0, 1]$, deren Abschluss das Einheitsintervall ist, deren Borel-Lebesgue-Maß aber kleiner als 1 ist.