

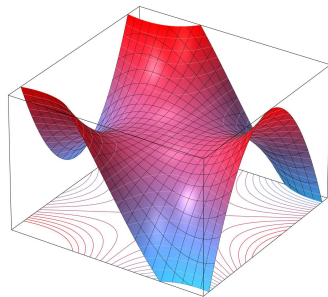
## Analysis II

### Vorlesung 43

Wir wenden uns nun der Differentialrechnung für Abbildungen zu, bei denen der Definitionsbereich höherdimensional ist. Dazu seien zwei reelle (oder komplexe) endlichdimensionale Vektorräume  $V$  und  $W$  gegeben. Ferner sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Diese Abbildung wollen wir „differenzieren“. Anders als in den bisher behandelten Situationen gibt es bei einem höherdimensionalen Definitionsbereich mehrere nicht äquivalente Konzepte von Differenzierbarkeit. Wir werden nacheinander die *Richtungsableitung*, *partielle Ableitungen* und das *totale Differential* sowie ihre Beziehungen untereinander diskutieren. Wir werden durchgehend voraussetzen, dass die Vektorräume endlichdimensional sind und mit einem Skalarprodukt und damit mit einer euklidischen Metrik versehen sind.



Es ist erstmal keine Einschränkung, wenn man sich auf reelle Vektorräume beschränkt und überdies den Zielraum als  $W = \mathbb{R}$  ansetzt. Als Definitionsmenge kann man sich zunächst auf  $G = \mathbb{R}^2 = V$  beschränken, und sich vorstellen, dass die Abbildung jedem Grundpunkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  einen Höhepunkt zuordnet, so dass die Abbildung insgesamt ein Gebirge über einer Grundfläche beschreibt.

### Richtungsableitung

Wir stellen uns vor, wir sind an einem Ort im Gebirge und entschließen uns, in eine bestimmte Richtung, beispielsweise nach Nordwest zu gehen, egal was kommen mag. Damit machen wir sämtliche Steigungen und Abhänge mit, die das Gebirge uns in dieser vorgegebenen Richtung bietet. Dabei lernen wir nur den Höhenverlauf des Gebirges entlang dieses linearen Ausschnitts

(Querschnitts) kennen. Durch die gewählte Richtung bewegen wir uns auf dem Graphen zu einer Funktion in einer einzigen Variablen, nämlich einer Variablen der Grundgeraden. Dies ist die Grundidee der *Richtungsableitung*.

DEFINITION 43.1. Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, und  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Weiter sei  $P \in G$  ein Punkt und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Dann heißt  $f$  *differenzierbar in  $P$  in Richtung  $v$* , falls der Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s}$$

existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert *die Ableitung von  $f$  in  $P$  in Richtung  $v$* . Er wird mit

$$(D_v f)(P)$$

bezeichnet.

Den Ausdruck

$$\frac{f(P + sv) - f(P)}{s}$$

nennt man wieder den *Differenzenquotienten* im Punkt  $P$  in Richtung  $v$  von 0 bis  $s$ . Er misst die Durchschnitt(ziel)richtung (oder Durchschnittssteigung bei  $W = \mathbb{R}$ ) von  $f$  in Richtung  $v$  für das Zeitintervall  $[0, s]$ . Die Richtungsableitung in einem Punkt und in eine Richtung ist selbst ein Vektor in  $W$ . Bei  $W = \mathbb{K}$  ist die Richtungsableitung eine reelle oder komplexe Zahl.

BEISPIEL 43.2. Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x^2 y,$$

in einem Punkt  $P = (a_1, a_2)$  in Richtung  $v = (v_1, v_2)$ . Der Differenzenquotient ist

$$\begin{aligned} & \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} \\ &= \frac{f((a_1 + sv_1, a_2 + sv_2)) - f((a_1, a_2))}{s} \\ &= \frac{(a_1 + sv_1)^2 (a_2 + sv_2) - a_1^2 a_2}{s} \\ &= \frac{a_1^2 a_2 + 2sa_1 a_2 v_1 + s^2 a_2 v_1^2 + sa_1^2 v_2 + 2s^2 a_1 v_1 v_2 + s^3 v_1^2 v_2 - a_1^2 a_2}{s} \\ &= 2a_1 a_2 v_1 + a_1^2 v_2 + s(a_2 v_1^2 + 2a_1 v_1 v_2) + s^2(v_1^2 v_2). \end{aligned}$$

Für  $s \rightarrow 0$  gehen die beiden hinteren Summanden gegen 0, so dass sich insgesamt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} = 2a_1 a_2 v_1 + a_1^2 v_2$$

ergibt.

Im Punkt  $P = (2, 5)$  ergibt sich in Richtung  $v = (1, -3)$  beispielsweise die Richtungsableitung

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 + 2^2 \cdot (-3) = 8.$$

BEISPIEL 43.3. Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und sei

$$L: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann existiert die Richtungsableitung in jedem Punkt  $P \in V$  und in jede Richtung  $v \in V$ , und zwar ist

$$(D_v L)(P) = L(v),$$

insbesondere ist also die Richtungsableitung unabhängig vom Punkt. Dies folgt direkt durch Betrachten des Differenzenquotienten; es ist nämlich

$$\frac{L(P + sv) - L(P)}{s} = \frac{L(P) + sL(v) - L(P)}{s} = \frac{sL(v)}{s} = L(v).$$

Daher ist auch der Limes für  $s \rightarrow 0$  gleich  $L(v)$ .

Die Existenz von  $(D_v f)(P)$  hängt nur von der Abbildung  $U(0, \delta) \rightarrow W$ ,  $s \mapsto f(P + sv)$ , ab (wobei das Intervall  $U(0, \delta)$  (im reellen Fall) bzw. der offene Ball (im komplexen Fall) so gewählt ist, dass  $s \in U(0, \delta)$  auch  $P + sv \in G$  impliziert. D.h. dass  $U(P, \delta) \subseteq G$  gilt). Daher kann man die Richtungsableitung im Wesentlichen auf die Ableitung von Kurven zurückführen.

LEMMA 43.4. Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, und  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Dann ist  $f$  in  $P$  in Richtung  $v$  genau dann differenzierbar, wenn die (auf einem Intervall bzw. einer offenen Ballumgebung um  $0 \in \mathbb{K}$  definierte) Kurve

$$g: I \longrightarrow W, t \longmapsto g(t) = f(P + tv),$$

in  $0$  differenzierbar ist. In diesem Fall ist

$$(D_v f)(P) = g'(0).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 43.6. □

BEISPIEL 43.5. Wir bestimmen die Richtungsableitung zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy^2 + \sin(xy),$$

im Punkt  $P = (3, 4)$  in Richtung  $v = (2, -5)$ . Dazu müssen wir die Hilfsfunktion

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

im Nullpunkt ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} h(t) &= f(P + tv) \\ &= f(3 + 2t, 4 - 5t) \\ &= (3 + 2t)^2 - (3 + 2t)(4 - 5t)^2 + \sin((3 + 2t)(4 - 5t)) \\ &= 9 + 12t + 4t^2 - 48 + 88t + 5t^2 - 50t^3 + \sin(12 - 7t - 10t^2) \\ &= -39 + 100t + 9t^2 - 50t^3 + \sin(12 - 7t - 10t^2). \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$h'(0) = 100 - 7 \cos 12,$$

also ist

$$(D_{(2,-5)}f)(3,4) = 100 - 7 \cos 12 .$$

LEMMA 43.6. Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  ein Punkt,  $v \in V$  ein Vektor und seien

$$f, g: G \longrightarrow W$$

Abbildungen, die im Punkt  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar seien. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Die Summe  $f + g$  ist ebenfalls differenzierbar in Richtung  $v$  mit

$$(D_v(f + g))(P) = (D_v f)(P) + (D_v g)(P) .$$

- (2) Das Produkt  $af$  mit  $a \in \mathbb{K}$  ist ebenfalls differenzierbar in Richtung  $v$  mit

$$(D_v(af))(P) = a(D_v f)(P) .$$

- (3) Die Funktion  $f$  ist auch in Richtung  $cv$  mit  $c \in \mathbb{K}$  differenzierbar und es gilt

$$(D_{cv}f)(P) = c(D_v f)(P) .$$

*Beweis.* Die Eigenschaften (1) und (2) ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften für Limiten von Abbildungen, siehe Lemma 35.7. Für die Eigenschaft (3) siehe Aufgabe 43.15.  $\square$

Im Rahmen der Theorie des totalen Differentials wird die Frage beantwortet, wie sich die Richtungsableitungen zu verschiedenen Richtungen zueinander verhalten. Ohne weitere Voraussetzung gibt es keine Beziehung zwischen  $(D_v f)(P)$ ,  $(D_w f)(P)$  und  $(D_{v+w} f)(P)$ .

BEISPIEL 43.7. Es sei  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  der Einheitskreis und

$$\psi: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\psi(-P) = -\psi(P) .$$

Mit dieser Funktion definieren wir

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\varphi(x, y) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \psi\left(\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion besteht aus einem Büschel von Geraden durch den Nullpunkt. Insbesondere existieren im Nullpunkt sämtliche Richtungsableitungen. Da man aber  $\psi$  willkürlich vorgeben kann, haben die Richtungsableitungen nichts miteinander zu tun.

Wenn im Werteraum eine Basis gegeben ist, so kann man die Richtungsableitung komponentenweise bestimmen.

LEMMA 43.8. Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und sei  $v \in V$  ein Vektor. Es sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Es sei  $W$  der Produktraum

$$W = W_1 \times \cdots \times W_k$$

aus endlichdimensionalen Vektorräumen  $W_1, \dots, W_k$ . Dann ist  $\varphi$  genau dann in  $P$  differenzierbar in Richtung  $v$ , wenn sämtliche Komponentenabbildungen

$$\varphi_i: G \longrightarrow W_i$$

in  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$(D_v \varphi)(P) = ((D_v \varphi_1)(P), \dots, (D_v \varphi_k)(P))$$

- (2) Es sei  $w_1, \dots, w_n$  eine Basis von  $W$  mit den Koordinaten

$$y_j: W \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Dann ist  $\varphi$  in  $P$  in Richtung  $v$  genau dann differenzierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen

$$f_j = y_j \circ \varphi: G \longrightarrow \mathbb{K}$$

in  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sind. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} (D_v \varphi)(P) &= ((D_v f_1)(P), \dots, (D_v f_n)(P)) \\ &= w_1 (D_v f_1)(P) + \cdots + w_n (D_v f_n)(P). \end{aligned}$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus der zweiten, wenn man für die einzelnen Vektorräume  $W_j$  Basen einführt (umgekehrt ist auch der zweite Teil ein Spezialfall des ersten). Die zweite Aussage folgt aus allgemeinen Limeseigenschaften oder aus Lemma 37.4 in Verbindung mit Lemma 43.4.  $\square$

Aufgrund von diesem Lemma muss man vor allem die Richtungsableitung für den Fall verstehen, wo der Wertebereich gleich  $\mathbb{K}$  ist.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass durchaus alle Richtungsableitungen (und zwar in jedem Punkt) existieren können, die Abbildung selbst aber noch nicht einmal stetig sein muss.

BEISPIEL 43.9. Wir betrachten die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Für einen Vektor  $v = (a, b)$  und einen reellen Parameter  $s$  erhalten wir auf dem linearen Unterraum  $\mathbb{R}v$  die Funktion

$$f_v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, s \longmapsto f(sa, sb) = \frac{sas^3b^3}{s^2a^2 + s^6b^6} = \frac{s^2ab^3}{a^2 + s^4b^6}.$$

Für  $a \neq 0$  ist der Nenner stets positiv und die Funktion  $f_v$  ist stetig mit dem Wert 0 bei  $s = 0$ , und differenzierbar. Für  $a = 0$  ist die Funktion  $f_v$  konstant = 0 und damit ebenfalls differenzierbar. Also existieren in 0 alle Richtungsableitungen zu  $f$ . Die Funktion  $f$  ist allerdings nicht stetig: Für die Folge  $(1/m^3, 1/m)$  (die gegen  $0 = (0, 0)$  konvergiert) gilt

$$f\left(\frac{1}{m^3}, \frac{1}{m}\right) = \frac{(1/m^3)(1/m^3)}{(1/m^6) + (1/m^6)} = \frac{1}{2},$$

aber  $f(0, 0) = 0$ .

Im Allgemeinen möchte man nicht nur in einem einzigen Punkt  $P \in V$  ableiten können, sondern in jedem Punkt, was durch die folgende naheliegende Definition präzisiert wird.

**DEFINITION 43.10.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, sei  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Dann heißt  $f$  *differenzierbar in Richtung  $v$* , falls  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  in Richtung  $v$  differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$D_v f: G \longrightarrow W, P \longmapsto (D_v f)(P),$$

die *Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $v$ .

Die Richtungsableitung zu einem fixierten Vektor ist also vom selben Typ wie die Ausgangsabbildung.

**BEISPIEL 43.11.** Wir betrachten die polynomiale Funktion

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n.$$

Die Richtungsableitung in Richtung  $v = (v_1, \dots, v_n)$  in einem beliebigen Punkt

$$P = (x_1, \dots, x_n)$$

ergibt sich durch Betrachten des Differenzenquotienten, also

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 + sv_1) \cdot (x_2 + sv_2) \cdots (x_n + sv_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n + s \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} \right) + s^2 g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} + s \cdot g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Dabei ist  $g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$  eine polynomiale Funktion in  $s$  (die  $x_1, x_n$  und die  $v_1, \dots, v_n$  sind fixierte Zahlen). Der Limes von  $s \cdot g(s, x_1, \dots, x_n,$

$v_1, \dots, v_n$ ) geht für  $s \rightarrow 0$  gegen 0. Daher ist

$$(D_v f)(P) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}.$$

In den Aufgaben werden wir sehen, dass die Richtungsableitung zu einer polynomialen Funktion in jede Richtung existiert und selbst wieder polynomial ist. Dies wird sich auch einfach im Rahmen des totalen Differentials ergeben.





## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png , Autor = Benutzer  
Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD 1
- Quelle = Feldberg 3913.jpg , Autor = Benutzer Flominator auf  
Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1