Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 26

> Durch starkes Denken kann man ein Kamel zu Fall bringen.
>
> Ibn Sina

Für die weitere Untersuchung von linearen Abbildungen und speziell trigonalisierbaren Abbildungen müssen wir noch eine wichtige Gesetzmäßigkeit im Polynomring über einem Körper besprechen, das *Lemma von Bezout*.

Das Lemma von Bezout

Wir erinnern daran, dass ein Polynom $T \in K[X]$ ein Polynom $P \in K[X]$ teilt, wenn es ein Polynom $Q \in K[X]$ mit

$$P = TQ$$

gibt. Dies entspricht der Teilbarkeitsbeziehung von ganzen Zahlen. Von dort ist auch das Konzept von einem größten gemeinsamen Teiler bekannt.

Definition 26.1. Es seien $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ Polynome über einem Körper K. Man sagt, dass ein Polynom $T \in K[X]$ ein *gemeinsamer Teiler* der gegebenen Polynome ist, wenn T jedes P_i teilt.

Definition 26.2. Es seien $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ Polynome über einem Körper K. Man sagt, dass ein Polynom $G \in K[X]$ ein *größter gemeinsamer Teiler* der gegebenen Polynome ist, wenn G ein gemeinsamer Teiler der P_i ist und wenn G unter allen gemeinsamen Teilern der P_i maximalen Grad besitzt.

Ein größter gemeinsamer Teiler ist nicht eindeutig bestimmt, da mit G auch cG für eine Konstante $c \neq 0$ ein größter gemeinsamer Teiler ist. Wenn man sich allerdings auf normierte Polynome beschränkt, so ist der größter gemeinsame Teiler eindeutig bestimmt.

Definition 26.3. Polynome $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ über einem Körper K heißen *teilerfremd*, wenn sie außer den Konstanten $c \neq 0$ keine gemeinsamen Teiler besitzen.

Satz 26.4. *Es sei K ein Körper und seien $P_1, \ldots, P_n$ Polynome über K. Es sei G ein größter gemeinsamer Teiler der P_i. Dann gibt es eine Darstellung*

$$G = Q_1P_1 + \cdots + Q_nP_n$$

mit $Q_1, \ldots, Q_n \in K[X]$.

Beweis. Wir betrachten die Menge aller Linearkombinationen

$$I = \{Q_1P_1 + \cdots + Q_nP_n | \, Q_i \in K[X]\}\,.$$

Dies ist ein Ideal von $K[X]$, wie man direkt überprüft. Nach Satz 20.10 ist dieses Ideal ein Hauptideal, also

$$I = (E)$$

mit einem gewissen Polynom E. Es ist E ein gemeinsamer Teiler der P_i. Wegen $P_i \in I = (E)$ ist nämlich

$$P_i = H_iE,$$

d.h. E ist ein Teiler von jedem P_i. Aufgrund einer ähnlichen Überlegung ist

$$P_i \in (G)$$

für alle i und damit auch

$$(E) = I \subseteq (G).$$

Also ist

$$E = GF.$$

Da nach Voraussetzung G den maximalen Grad unter allen gemeinsamen Teilern besitzt, muss $F \neq 0$ eine Konstante sein. Also ist

$$(G) = (E) = I$$

und insbesondere $G \in I$. Also ist G eine Linearkombination der P_i. □

Korollar 26.5. *Es sei K ein Körper und seien $P_1, \ldots, P_n$ teilerfremde Polynome über K. Dann gibt es eine Darstellung*

$$Q_1P_1 + \cdots + Q_nP_n = 1$$

mit $Q_1, \ldots, Q_n \in K[X]$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 26.4. □

Bemerkung 26.6. Zu gegebenen Polynomen $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ lässt sich sowohl der größte gemeinsame Teiler G bestimmen als auch eine Darstellung

$$G = Q_1P_1 + \cdots + Q_nP_n$$

wie in Satz 26.4 explizit angegeben. Dazu kann man sich auf $n = 2$ beschränken. Es sei der Grad von P_1 mindestens so groß wie der Grad von P_2. Die Division mit Rest liefert

$$P_1 = P_2H_2 + R_2$$

mit einem Restpolynom, dessen Grad kleiner als der Grad von P_2 ist bzw. das 0 ist. Entscheidend ist, dass die Ideale

$$(P_1, P_2) = (P_2, R_2)$$

und damit der größte gemeinsame Teiler von P_1 und P_2 und von P_2 und R_2 übereinstimmen. Nun führt man die Division mit Rest durch, bei der P_2 durch

R_2 mit dem Rest R_3 geteilt wird, wobei wiederum das Ideal (R_2, R_3) mit dem Ausgangsideal übereinstimmt. So erhält man eine Folge von Restpolynomen

$$R_0 = P_1, R_1 = P_2, R_2, \ldots, R_k \neq 0, 0\,,$$

wobei zwei benachbarte Reste das gleiche Ideal erzeugen. Es ist dann R_k (also der letzte von 0 verschiedene Rest) der größte gemeinsame Teiler von R_0 und R_1. Eine Darstellung von R_k als Linearkombination der R_0, R_1 erhält man, indem man die Gleichungen, die die Division mit Rest beschreiben, von unten nach oben zurückarbeitet.

Das in der vorstehenden Bemerkung beschriebene Verfahren heißt *euklidischer Algorithmus*. Es gilt entsprechend auch für ganze Zahlen.

Beispiel 26.7. Wir möchten den größten gemeinsamen Teiler für die beiden Polynome $X^2 + X + 1$ und $X - 1$ aus $\mathbb{Q}[X]$ berechnen. Dazu führt man die Division mit Rest durch und erhält

$$X^2 + X + 1 \,=\, (X + 2)\,(X - 1) + 3.$$

Daher sind die beiden Polynome teilerfremd. Eine Darstellung der 1 ist

$$1 \,=\, \frac{1}{3}\left(X^2 + X + 1\right) - \frac{1}{3}\,(X + 2)\,(X - 1)\,.$$

Wir erwähnen noch das Lemma von Bezout für die ganzen Zahlen.

Satz 26.8. *Jede Menge von ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ besitzt einen größten gemeinsamen Teiler d, und dieser lässt sich als Linearkombination der $a_1, \ldots,$ a_n darstellen, d.h. es gibt ganze Zahlen $r_1, \ldots, r_n$ mit*

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n \,=\, d.$$

Insbesondere gibt es zu teilerfremden ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ eine Darstellung der 1.

Beweis. Siehe Aufgabe 26.10. □

Haupträume

Wir wollen weiterhin untersuchen, inwiefern man trigonalisierbare Abbildungen durch Matrizen beschreiben kann, die nicht nur obere Dreiecksgestalt haben, sondern darüber hinaus noch weitere einfache Eigenschaften erfüllen. Dafür gehen wir zwei Schritte. In dieser Vorlesung werden wir eine trigonalisierbare Abbildung als direkte Summe von Abbildungen auf Haupträumen darstellen. In den nächsten beiden Vorlesungen werden wir die Endomorphismen auf den Haupträume selbst studieren.

Definition 26.9. Zu einer linearen Abbildung φ auf einem K-Vektorraum V und einem *Eigenwert* $\lambda \in K$ nennt man

$$\operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^n$$

den *Hauptraum* zu φ zu diesem Eigenwert.

Wenn V endlichdimensional ist, so wird die Kette

$$\operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}) \subseteq \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^2 \subseteq \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^3 \subseteq \ldots$$

stationär, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^r .$$

Haupträume sind nach Aufgabe 26.28 invariant unter der linearen Abbildung. Es gilt nach Definition

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) \subseteq \operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi),$$

wobei für diagonalisierbares φ Gleichheit gilt, siehe Aufgabe 26.22. Trigonalisierbare Abbildungen werden wir über ihre Haupträume verstehen.

Lemma 26.10. *Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei*

$$\chi_\varphi = P \cdot Q$$

eine Faktorzerlegung des charakteristischen Polynoms in teilerfremde Polynome $P, Q \in K[X]$. Dann gilt die direkte Summenzerlegung

$$V = \operatorname{kern} P(\varphi) \oplus \operatorname{kern} Q(\varphi),$$

wobei diese Räume φ-invariant sind. Die Einschränkung von $P(\varphi)$ auf den $\operatorname{kern} Q(\varphi)$ *ist bijektiv.*

Beweis. Nach dem Lemma von Bezout gibt es Polynome $S, T \in K[T]$ mit

$$SP + TQ = 1.$$

Sei $U = \operatorname{kern} P(\varphi)$ und $W = \operatorname{kern} Q(\varphi)$. Sei $v \in V$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist

$$0 = \chi_\varphi(\varphi) = (P(\varphi) \circ Q(\varphi))(v) = P(\varphi)(Q(\varphi)(v))$$

und somit gehört das Bild von $Q(\varphi)$ zum Kern von $P(\varphi)$ und umgekehrt. Aus

$$\begin{aligned} v &= \operatorname{Id}_V(v) \\ &= (SP + TQ)(\varphi)(v) \\ &= S(\varphi)(P(\varphi)(v)) + T(\varphi)(Q(\varphi)(v)) \\ &= P(\varphi)(S(\varphi)(v)) + Q(\varphi)(T(\varphi)(v)) \end{aligned}$$

kann man ablesen, dass der linke Summand zu $\operatorname{bild} P(\varphi) \subseteq \operatorname{kern} Q(\varphi)$ und der rechte Summand zu $\operatorname{bild} Q(\varphi) \subseteq \operatorname{kern} P(\varphi)$ gehört. Es liegt also eine Summenzerlegung vor, die direkt ist, da aus $P(\varphi)(v) = Q(\varphi)(v) = 0$ sofort

$v = 0$ folgt. Für die φ-Invarianz der Räume siehe Aufgabe 26.28. Zu $v \in \operatorname{kern} Q(\varphi)$ ist

$$v = S(\varphi)(P(\varphi)(v)) + T(\varphi)(Q(\varphi)(v)) = S(\varphi)(P(\varphi)(v)) = P(\varphi)(S(\varphi)(v)),$$

d.h. es gilt $\operatorname{bild} P(\varphi) = \operatorname{kern} Q(\varphi)$ und somit ist die Einschränkung von $P(\varphi)$ auf den Kern von $Q(\varphi)$ surjektiv, also bijektiv. □

Beispiel 26.11. Wir betrachten die Permutationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$, das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = X^3 - 1 = (X-1)\left(X^2 + X + 1\right) = P \cdot Q,$$

wobei die beiden Faktoren teilerfremd sind. Wir überprüfen Lemma 26.10 an diesem Beispiel. Es ist

$$P(M) = M - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{kern} P(M) = \operatorname{Eig}_1(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$Q(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{kern} Q(M) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Es ist

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} P(M) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} P(M)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

woraus man ablesen kann, dass die Einschränkung von $P(M)$ auf $\operatorname{kern} Q(M)$ bijektiv ist. Die Darstellung der 1 aus Beispiel 26.7 führt zur Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Satz 26.12. *Sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $\lambda \in K$. Dann ist die Dimension des Hauptraumes $\operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi)$ *gleich der algebraischen Vielfachheit von λ.*

Beweis. Wir schreiben das charakteristische Polynom zu φ als

$$\chi_\varphi = (X-\lambda)^k Q,$$

wobei $(X-\lambda)$ in Q nicht als Linerarfaktor vorkommt, d.h. k ist die algebraische Vielfachheit von λ. Dann sind $P = (X-\lambda)^k$ und Q teilerfremd und nach Lemma 26.10 ist dann

$$V = \operatorname{kern} P(\varphi) \oplus \operatorname{kern} Q(\varphi)$$

und

$$P(\varphi) = (\varphi - \lambda \operatorname{Id})^k : \operatorname{kern} Q(\varphi) \longrightarrow \operatorname{kern} Q(\varphi)$$

ist eine Bijektion. Es ist ferner

$$H := \operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern} P(\varphi),$$

wobei die Inklusion $\supseteq$ klar ist und die andere Inklusion sich daraus ergibt, dass höhere Potenzen von $X-\lambda$ wegen der eben erwähnten Bijektivität auf $\operatorname{kern} Q(\varphi)$ keine weiteren Elemente annullieren. Für das charakteristische Polynom gilt wegen der direkten Summenzerlegung nach Lemma 23.7 die Beziehung

$$\chi_\varphi = \chi_1 \cdot \chi_2,$$

wobei χ_1 das charakteristische Polynom zu $\varphi|_H$ und χ_2 das charakteristische Polynom zu $\varphi|_{\operatorname{kern} Q(\varphi)}$ ist. Da $(\varphi - \lambda)^k$ auf H die Nullabbildung ist, ist das Minimalpolynom zu $\varphi|_H$ und damit auch das charakteristische Polynom χ_1 eine Potenz von $(X - \lambda)$, sagen wir

$$\chi_1 = (X - \lambda)^d,$$

wobei

$$d = \dim (H)$$

sei. Insbesondere ist somit $d \leq k$, da χ_1 ein Teiler von χ_φ ist. Bei $d < k$ müsste λ eine Nullstelle von χ_2 sein und λ wäre ein Eigenwert von $\varphi|_{\operatorname{kern} Q(\varphi)}$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $P(\varphi)$ auf diesem Raum eine Bijektion ist. □

KOROLLAR 26.13. *Zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und zwei Eigenwerten $\lambda \neq \delta$ haben die zugehörigen Haupträume den Durchschnitt* 0, *also*

$$\operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi) \cap \operatorname{Haupt}_\delta(\varphi) = 0.$$

Beweis. Das charakteristische Polynom von φ sei

$$\chi_\varphi = (X - \lambda)^k (X - \delta)^\ell F,$$

wobei in F weder λ noch δ eine Nullstelle sei. Nach Satz 26.12, angewendet auf $Q = (X - \delta)^\ell F$, ist

$$\operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi) \cap \operatorname{kern} Q(\varphi) = 0.$$

Wegen $\operatorname{Haupt}_\delta(\varphi) \subseteq \operatorname{kern} Q(\varphi)$ folgt daraus sofort

$$\operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi) \cap \operatorname{Haupt}_\delta(\varphi) = 0.$$

□

SATZ 26.14. *Sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein trigonalisierbarer K-Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Dann ist V die direkte Summe der Haupträume, also

$$V = \operatorname{Haupt}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Haupt}_{\lambda_m}(\varphi),$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte zu φ durchläuft, und φ ist die direkte Summe der Einschränkungen

$$\varphi_i = \varphi|_{H_i}\colon\ H_i \longrightarrow H_i$$

auf den Haupträumen.

Beweis. Es sei

$$\chi_\varphi = (X - \lambda_1)^{k_1} \cdots (X - \lambda_m)^{k_m}$$

das charakteristische Polynom, das nach Satz 25.10 in Linearfaktoren zerfällt, wobei die λ_i verschieden seien. Wir führen Induktion über m. Bei $m = 1$ gibt es nur einen Eigenwert λ und nur einen Hauptraum. Nach Korollar 24.3

ist dann auch das Minimalpolynom von der Form $(X-\lambda)^s$ und daher ist $V = \mathrm{Haupt}_\lambda(\varphi)$. Sei die Aussage nun für kleineres m bewiesen. Wir setzen $P = (X-\lambda_1)^{k_1}$ und $Q = (X-\lambda_2)^{k_2} \cdots (X-\lambda_m)^{k_m}$ und sind damit in der Situation von Lemma 26.10 und Satz 26.12. Wir haben also eine direkte Summenzerlegung in φ-invariante Untervektorräume

$$V = \mathrm{Haupt}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \operatorname{kern} Q(\varphi).$$

Das charakteristische Polynom ist nach Lemma 23.7 das Produkt der charakteristischen Polynome der Einschränkungen auf die beiden Räume. Nach Satz 26.12 ist $(X-\lambda_1)^{k_1}$ das charakteristische Polynom der Einschränkung auf den ersten Hauptraum, daher muss Q das charakteristische Polynom der Einschränkung auf $\operatorname{kern} Q(P)$ sein. Das heißt insbesondere, dass diese Einschränkung ebenfalls trigonalisierbar ist. Nach der Induktionsvoraussetzung ist also $\operatorname{kern} Q(P)$ die direkte Summe der Haupträume zu $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ und daraus ergibt sich insgesamt die direkte Summenzerlegung für V und für φ. $\square$