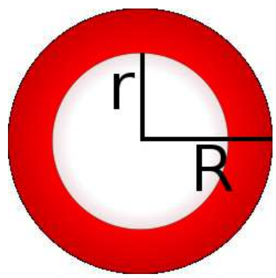
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 60

Übungsaufgaben

Aufgabe 60.1. Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.



Aufgabe 60.2. Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.

Aufgabe 60.3.*

Wir betrachten den Kreissektor T aus dem Einheitskreis zum Winkel 30 Grad, der an der x-Achse anliegt. Bestimme mit der Hilfe von Polarkoordinaten den Schwerpunkt von T.

Aufgabe 60.4. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+y^2, -y^4-2xy^2-x^2+y^2+x+y),$$

flächentreu ist.

Aufgabe 60.5. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+\sin y, y+\cos x).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det{(D\varphi)_P}|$ auf dem Quadrat $Q=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q))$?

Aufgabe 60.6. Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^3,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante davon. Ebenso für z^4.

Aufgabe 60.7. Finde möglichst große offene Teilmengen $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $H \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von G nach H induziert.

Aufgabe 60.8.*

Zeige, dass die Determinante einer linearen Isometrie $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gleich 1 oder gleich -1 ist.

Tipp: Was passiert mit dem Einheitswürfel?

Aufgabe 60.9. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derart, dass φ volumentreu, aber keine Isometrie ist.

Aufgabe 60.10. Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei $\varphi\colon G \to H$ ein volumentreuer C^1-Diffeomorphismus. Es sei G zusammenhängend. Zeige, dass entweder $(J(\varphi))(x) = 1$ für alle $x \in G$ oder aber $(J(\varphi))(x) = -1$ für alle $x \in G$ gilt.

Aufgabe 60.11. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Verschiebung und sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\lambda^n(S) \neq 0$ und sei $T = \varphi(S)$ das Bild von S unter φ. Zeige, dass der Schwerpunkt von S unter φ in den Schwerpunkt von T abgebildet wird.

Aufgabe 60.12.*

Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung und sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\lambda^n(S) \neq 0$ und sei $T = \varphi(S)$ das Bild von S unter φ. Zeige, dass der Schwerpunkt von S unter φ in den Schwerpunkt von T abgebildet wird.

Aufgabe 60.13. Zeige mit Aufgabe 59.10, Aufgabe 60.11 und Aufgabe 60.12, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten A, B, C gleich $\frac{A+B+C}{3}$ ist.

Aufgabe 60.14.*

Berechne den Flächeninhalt des Bildes des Rechtecks $Q = [-1, 3] \times [0, 2]$ unter der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x, y) \longmapsto (x^3, y - x^2).$$

Aufgabe 60.15.*

Es sei

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid x^2 > y^3\right\},$$

wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x, y) \longmapsto (xy, x^2 - y^3).$$

(1) Zeige, dass φ injektiv ist.

(2) Zeige, dass φ einen Diffeomorphismus auf sein Bild induziert.
(3) Zeige, dass das Rechteck $Q = [3,4] \times [1,2]$ in G liegt.
(4) Berechne den Flächeninhalt des Bildes von $Q = [3,4] \times [1,2]$ unter φ.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 60.16. (4 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass unter den Polarkoordinaten der Schwerpunkt einer kompakten Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ *nicht* in den Schwerpunkt des Bildes $\varphi(T)$ überführt werden muss.

AUFGABE 60.17. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det (D\varphi)_P|$ auf den beiden Quadraten $Q_1 = [0,1] \times [0,1]$ und $Q_2 = [1,2] \times [1,2]$. Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q_1))$ und für $\lambda^2(\varphi(Q_2))$?

AUFGABE 60.18. (7 (3+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0,10] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graphen) untereinander überschneidungsfrei sind.

b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.

c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

AUFGABE 60.19. (4 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante zur Abbildung

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2,\ z \longmapsto z^n,$$

in einem beliebigen Punkt $P = (a,b)$ mit der Hilfe von Polarkoordinaten.

Abbildungsverzeichnis