Übungsaufgaben

Aufgabe 25.1. Die Telefonanbieter A, B und C kämpfen um einen Markt, wobei die Marktaufteilung im Jahr j durch das Kundentupel $K_j = (a_j, b_j, c_j)$ ausgedrückt wird (dabei steht a_j für die Anzahl der Kunden von A im Jahr j usw.). Es sind regelmäßig folgende Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres zu beobachten.

(1) Die Kunden von A bleiben zu 80% bei A und wechseln zu je 10% zu B bzw. zu C.
(2) Die Kunden von B bleiben zu 70% bei B und wechseln zu 10% zu A und zu 20% zu C.
(3) Die Kunden von C bleiben zu 50% bei C und wechseln zu 20% zu A und zu 30% zu B.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die das Kundentupel K_{j+1} aus K_j berechnet.

b) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(12000, 10000, 8000)$ innerhalb eines Jahres?

c) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(10000, 0, 0)$ in vier Jahren?

Aufgabe 25.2.*

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe 25.3.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

Aufgabe 25.4. Es sei M eine $m\times n$-Matrix und $\varphi\colon K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn es eine $n \times m$-Matrix A mit $M \circ A = E_m$ gibt.

Aufgabe 25.5.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige

$$M^2 = E_2.$$

b) Bestimme die inverse Matrix zu M.

c) Löse die Gleichung

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.6.*

Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{50}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{5}{3} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 10^7 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.7. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.8. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.9. Bestimme die inverse Matrix zur komplexen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+3\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 5-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.10.*

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.11. Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.12. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes $k \in K$ zu sich selbst invers ist.

Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (i,j) den Wert 1 und sonst überall den Wert 0 hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen*.

(1) $V_{ij} := E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
(2) $S_k(s) := E_n + (s-1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
(3) $A_{ij}(a) := E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Aufgabe 25.13. Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit $m \times m$-Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).

Aufgabe 25.14. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

Aufgabe 25.15. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen die inversen Matrizen zu den Elementarmatrizen aus?

Aufgabe 25.16. Zeige, dass man eine Scherungsmatrix

$$A_{ij}(a) \;=\; E_n + aB_{ij}$$

als Matrizenprodukt $M \circ N \circ L$ schreiben kann, wobei M und L Diagonalmatrizen sind und N eine Scherungsmatrix der Form $A_{ij}(1)$ ist.

Aufgabe 25.17.*

Es sei

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.18. (6 (3+1+2) Punkte)

Eine Tierpopulation besteht aus Traglingen (erstes Lebensjahr), Frischlingen (zweites Lebensjahr), Halbstarken (drittes Lebensjahr), Reifen (viertes Lebensjahr) und alten Hasen (fünftes Lebensjahr), älter können diese Tiere nicht werden. Der Gesamtbestand dieser Tiere in einem bestimmten Jahr j wird daher durch ein 5-Tupel

$$B_j \;=\; (b_{1,j},\, b_{2,j},\, b_{3,j},\, b_{4,j},\, b_{5,j})$$

angegeben.

Von den Traglingen erreichen 7/8-tel das Frischlingsalter, von den Frischlingen erreichen 9/10-tel das Halbstarkenalter, von den Halbstarken erreichen 5/6-tel das reife Alter und von den Reifen erreichen 2/3-tel das fünfte Jahr.

Traglinge und Frischlinge können sich noch nicht vermehren, dann setzt die Geschlechtsreife ein und 10 Halbstarke zeugen 5 Nachkommen und 10 Reife zeugen 8 Nachkommen, wobei die Nachkommen ein Jahr später geboren werden.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die den Gesamtbestand B_{j+1} aus dem Bestand B_j berechnet.

b) Was wird aus dem Bestand (200, 150, 100, 100, 50) im Folgejahr?

c) Was wird aus dem Bestand (0, 0, 100, 0, 0) in fünf Jahren?

Aufgabe 25.19. (3 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und es sei

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die dadurch definierte Multiplikation, die eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix zu dieser Abbildung bezüglich der reellen Basis 1 und i aus? Zeige, dass zu zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 mit den beiden reellen Matrizen M_1 und M_2 die Produktmatrix $M_2 \circ M_1$ die beschreibende Matrix zu $z_1 z_2$ ist.

Aufgabe 25.20. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.21. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

Aufgabe 25.22. (3 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.