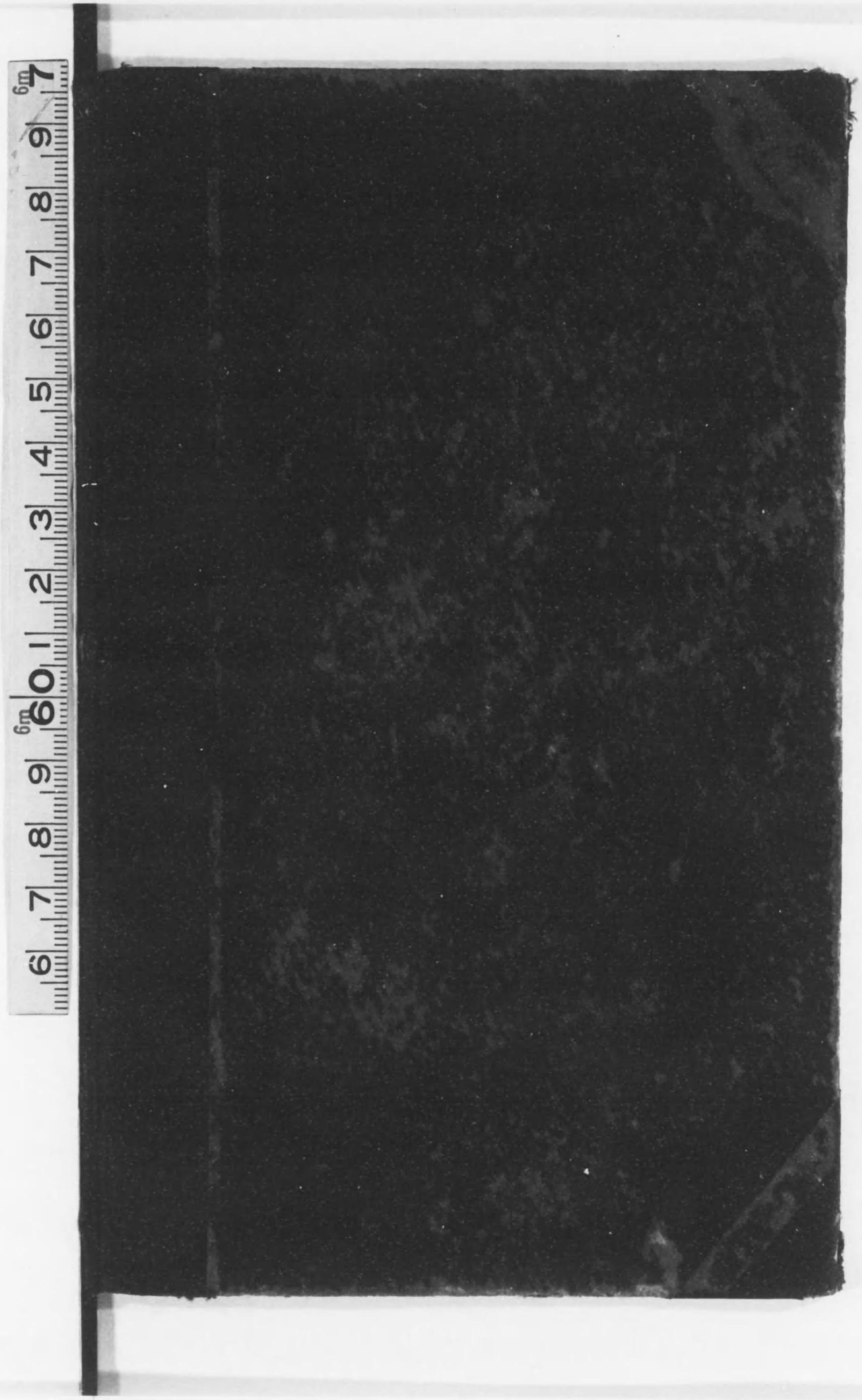
始



中學教科

平面幾何

理學博士 寺尾壽
理學士 吉田好九郎 合編

東京

冨山房發行

（明治四十四年十二月發行）

目次

第四編　面積

第五編　比及比例

中學教科

平面幾何

第一編　緒　論

1.　立體,面,線,及點　スベテ物體ヲ其形,大サ及位置ノミニ就テ考フルトキハ之ヲ**立體**ト名ヅク.　立體ノ境界ヲ**表面**(或ハ**面**)トイヒ,面ノ境界ヲ**線**トイヒ,線ノ境界ヲ**點**トイフ.

注意 1.　點ヲ圖上ニ表シタルトキ其傍ラニ一ツノ羅馬字例ヘバAヲ記シ之ヲ**點A**ナドト呼ブ.

注意 2.　點ノ運動ヨリ線ガ生ジ,線ノ運動ヨリ面ガ生ジ,面ノ運動ヨリ立體ガ生ズ.

2.　圖形　立體,面,線及點或は此等の幾つかの集合を**圖形**といふ.

幾何學ハ圖形ノ性質及圖形間ノ關係ヲ講ズル學科ナリ.

3. **直線**とは眞直なる線のことなり.

例ヘバ緊張シタル絲,善ク作リタル定規ノ緣ナドニヨリテ直線ノ觀念ヲ得ベシ.

直線ハ雙方ヘ限リナキ者トス. 而シテ其一部分ヲ限リテ考フルトキハ之ヲ**有限直線**又ハ**線分**トイヒ,其殘リノ部分ヲ其延長又ハ之ヲ**延長したる者**トイフ.

直線(即チ所謂**無限直線**)ヲ,其上ノ或一點ニテ二ツニ分チ,其一方ダケヲ考フルトキハ之ヲ**半直線**トイヒ,其點ヲ**原點**トイフ.

直線ヲ書キ表スニハ,通例其上ノ任意ノ二點(線分ナラバ其兩端)ニ羅馬字,例ヘバA, Bヲ附シ,之ヲ直線ABナドト呼ブ. 又之ニ一ツノ羅馬字,例ヘバXヲ附シテ直線Xナドトイフコトアリ.

4. **公理**とは吾人の常識又は經驗によりて其眞なることを承認する事柄をいふ.

5. **定理及系** **定理**とは既に承認されたる事柄より其眞なることを推定せらるる事柄なり.

而シテ之ヲ推定スルコトヲ**證明する**トイフ.

系とは公理,定理,或は定理の證明の中より容易に推定し得らるる事柄なり.

6. **公理1.** 圖形は其形及大さを變へずして其位置を變ふることを得.

7. **公理2.** 二定點を常に通る樣に,一つの直線を動かすことを得,而して其位置は何れも相一致す.

系1. 相一致せざる二直線が一點を共有する時は其他の點を共有せず.

定義 唯一點ノミヲ共有スル二直線ヲ**相交る**トイフ.

註 定義トハ或語ノ意味ヲ定ムル陳述ナリ.

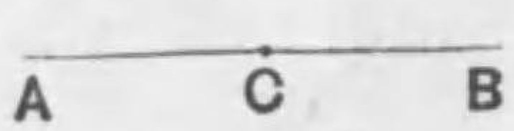
系 2. 一つの直線を,常に他の直線の上に重なる樣に動かし,第一の直線上の任意の一點を,第二の直線上の任意の一點に合せしむることを得.

定義 一ツノ直線ノ上ヲ離レヌ樣ニ,他ノ直線ヲ動カスコトヲ,第二ノ直線ヲ第一ノ直線ノ上ニ滑らすトイフ.

8. 定義 二點ヲ兩端トスル線分ノ長サヲ**此二點間の距離**トイフ.

而シテ二點ヲ兩端トスル線分ヲ作ルコトヲ**此二點を結付くる**トイフ.

9. 定義 一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ,其各部分ガ合スル樣ニ重ネ得ルトキ,此二ツノ圖形ハ**相等し**(或ハ**全く相等し**)トイフ.



線分 AB 上ニ於テ其兩端 A,B ヨリ相等シキ距離ニアル點 C ヲ此線分ノ**二等分點**或ハ**中點**トイフ.

10. 定義 幾ツカノ直線ガ連續シテ成ル線ヲ**屈線**トイフ. 例ヘバ甲圖ノ如シ.

直線ニモ非ズ,又屈線ニモ非ザル線ヲ**曲線**トイフ. 例ヘバ乙圖ノ如シ.

(甲)

(乙)

11. 平面とは其上にある任意の二點を通る直線が全く此面上にある樣なる面なり.

例ヘバ靜止シタル水面,善ク削リタル板ノ面ナドニヨリテ平面ノ觀念ヲ得ベシ.

12. 公理 3. 一定直線と,其上にあらざる一定點とを常に含む樣に,一つの平面を動かすことを得,而して其位置は何れも相一致す.

系 1. 同一直線上にあらざる三定點を含む平面は總て相一致す.

系 2.　相交る二定直線を含む平面は總て相一致す.

系 3.　一つの平面を常に他の平面に一致する樣に動かすことを得.

定義　一ツノ平面ノ上ヲ離レヌ樣ニ他ノ平面ヲ動カスコトヲ,第二ノ平面ヲ第一ノ平面ノ上ニ滑らすトイフ.

系 4.　一つの平面上の任意の一直線の一方にある部分を此直線の周りに廻して之を他の部分の上に重ね合すことを得.

定義　箇樣ニスルコトヲ**此直線を折目こして此平面を折返す**トイフ.

13.　**定義**　一ツノ平面上ニアル圖形ヲ**平面圖形**トイフ.

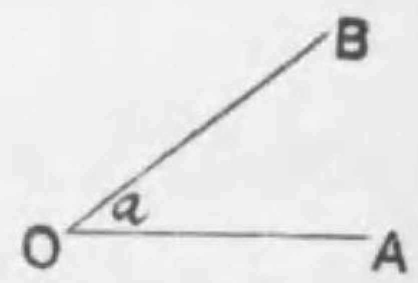
專ラ平面圖形ニ付テ研究スル學科ヲ**平面幾何學**トイフ.

注意　本書ニ於テ論ズル圖形ハ多ク同一平面上ニアルガユヱニ,殊更ニ重要ナル場合ノ外ハ其同一平面上ニアルコトヲ明言セズ.

第二編　直線及直線形

角及垂線

14.　定義　同一ノ點ヨリ引キタル二ツノ半直線ハ角をなす或ハ角を夾むトイヒ,其半直線ノ各ヲ角ノ邊,半直線ノ原點ヲ角ノ頂點トイフ.



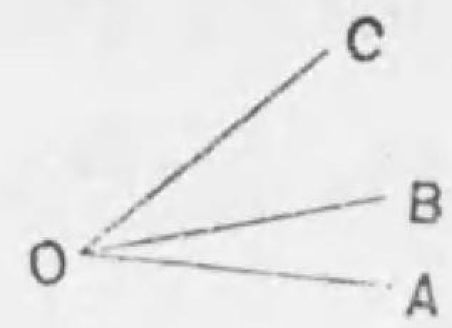
圖ニ於テOハ角ノ頂點, OA, OBハ其二邊ナリ.

角ヲ示スニハ頂點ニ於ケル文字ノミヲ以テスルカ,若クハ此文字ヲ各邊上ノ點ヲ示ス文字ノ間ニオク者トス,例ヘバ上圖ノ角ヲ角O或ハ角AOB又ハ角BOAト唱フ.

角ヲ書キ表ストキ角トイフ文字ノ代リニ符號∠ヲ用フルコトアリ,例ヘバ∠O, ∠AOBノ如シ.

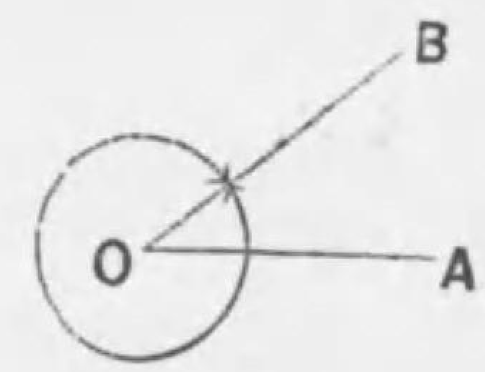
又角ノ内ニ一ツノ小サキ羅馬字例ヘバαヲ附シ之ヲ∠αナドト書キ表スコトアリ.

15.　定義　二つの角が頂點と一邊とを共有し,且つ共有邊の兩側に一つ宛在るとき此等の角は互に接角をなすといふ.



例ヘバ圖ニ於ケル∠AOBト∠BOCトノ如シ.

16.　定義　一ツノ角AOBノ頂點ヲ原點トスル半直線ガ最初其一ツノ邊OAノ上ニ重ナリ居リ, OA, OBヲ含ム平面ヲ離レヌ様ニ其原點Oノ周リニ同ジ向キニ廻リテ他ノ邊OBノ上ニ來リタル者ト考フルトキ,此半直線ハ角AOBダケ廻轉したりトイフ.



ツマリ角ノ大小ハ此廻轉ノ多少ニ同ジ.

サテ此半直線ガOAノ位置ヨリOBノ位置マデ廻轉スル仕方ハ圖ニ於テ矢ノ向キニテ示セル如ク二様アルガユヱ,二ツノ半直線OA, OBガナス角モ亦二ツアリ. 箇樣ニ

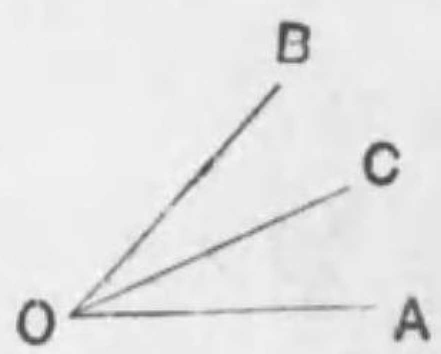
頂點及二邊ヲ共有シテ相合セザル位置ニアル二ツノ角ヲ互ニ共軛ナリトイフ. 而シテ其中ノ大ナル者ヲ優角トイヒ,小ナル者ヲ劣角トイフ.

是ヨリ後,單ニ角トアルハ劣角ノコトナリト知ルベシ.

注意　一直線ガ其上ノ一點ニテ分タレテ生ズル二ツノ半直線ノナス角ヲ平角トイフコトアリ.

而シテ平角ノ共軛角ハ矢張平角ナリ.

17.　定義　一ツノ角ノ頂點ヲ通リ此角ヲ二ツノ相等シキ接角ニ分ツ半直線ヲ其角ノ**二等分線**トイフ.



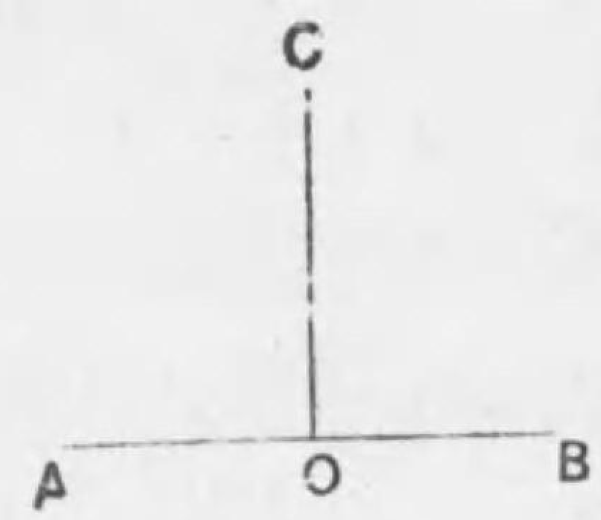
例ヘバ圖ニ於テ半直線OCガ∠AOBヲ分チタルトキノ二ツノ接角∠AOC, ∠BOCガ相等シケレバ OC ハ∠AOBノ二等分線ナリ.

箇様ナル半直線ヲ引クコトヲ角ヲ**二等分する**トイフ.

注意　ツマリ或角ノ二等分線トハ之ヲ折目トシテ此角ノ平面ヲ折返セバ元ノ角ノ一ツノ邊ガ他ノ一ツノ邊ニ重ナル樣ナル直線ナリ.

問題1.　角ノ二等分線ノ延長ハ此角ノ共軛角ヲ二等分ス.

18.　定義　一直線上ノ一點ヨリ半直線ヲ引クトキニ生ズル二ツノ接角ガ相等シキトキ此等ノ角ノ各ヲ**直角**トイフ.



例ヘバ圖ニ於テ AOB ハ一直線ニシテ∠AOC, ∠BOC ガ相等シキトキハ此等ノ角ノ各ハ直角ナリ.

直角ヲ表スニ符號∠R ヲ用フルコトアリ.

19.　定理1.　すべての直角は相等し.

∠ABC ト∠DEF トヲ何レモ直角ナリトセヨ.

然ルトキハ此二ツノ角 ABC, DEF ハ相等シカルベシ.

證明　∠ABC ノ一邊 AB ノ延長ヲ BG トシ, ∠DEF ノ一邊 DE ノ延長ヲ EH トセヨ. ∠DEF ノ平面ヲ∠ABC ノ上ニ滑ラシテ頂點Eガ頂點B

ニ合シ,邊 ED ガ邊 BA ニ合シ,且ツ此二ツノ角ガ其和重ナリタル邊ノ同ジ側ニアル樣ニオクコトヲ得. 然ルトキハ DE ノ延長 EH ハ AB ノ延長 BG ニ合スルニヨリ,二ツノ平角 ABG, DEH ハ相等シ,而シテ直角 ABC ハ平角 ABG ノ半分ニ等シク,直角 DEF ハ平角 DEH ノ半分ニ等シ. 因テ二ツノ直角 ABC, DEF ハ相等シ.

注意 一ツノ角ガ**二直角,三直角**ナドニ等シトイフハ此角ノ大サガ直角の二倍,三倍等ニ等シトイフコトナリ.

系 1. 平角は二直角に等し.

系 2. 半直線が同一平面上を,其原點の周りに同じ向きに廻りて元の位置に來るとき(即ち**一廻轉**したるとき)に生ずる角は四直角に等し.

系 3. 直線上の一點より此直線の同じ側に數多の半直線を引くときに生ずる次ぎ次ぎの接角の和は二直角に等し.

系 4. 同一の點より數多の半直線を引くときに生ずる次ぎ次ぎの接角の和は四直角に等し.

系 5. 二つの接角の和が二直角に等しければ其共有ならざる二邊は同一直線をなす.

20. 實用上に於ける角の單位

實用上ニ於テ角ヲ測ルニハ通例直角ノ**九十分の一**ヲ基本單位ニ取リ之ヲ**1度**ト名ヅク,從テ

1直角=90度

ナリ. 其補助單位ハ分,秒ニシテ此等ノ間ノ關係ハ次ノ如シ.

1度=60分

1分=60秒

度,分,秒ヲ表スニ之ヲ單位トスル數ノ右肩ニ夫夫符號 °, ′, ″ ヲ附ス. 例ヘバ 58 度 47 分 23 秒ヲ $58°47'23''$ ト記スガ如シ.

問題 2. 75° ヲ直角ニテ表セ. 0.75 直角ヲ度分秒ニテ表セ.

問題 3. 時計ガ九時三十六分ヲ指ストキ其兩針ノ夾ム角ハ幾直角ナルカ又何度ナルカ.

21. 定義 直角ヨリ小ナル角ヲ銳角トイヒ,直角ヨリ大ニシテ二直角ヨリ小ナル角ヲ鈍角トイフ.

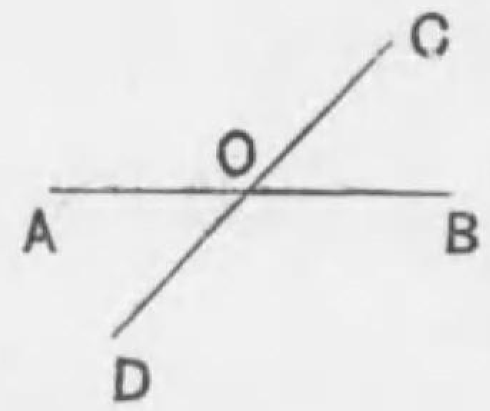
22. 定義 其和ガ一直角ニ等シキ二ツノ角ハ互に餘角をなすトイヒ,其和ガ二直角ニ等シキ二ツノ角ハ互に補角をなすトイフ.

問題 4. 互ニ補角ヲ爲ス所ノ二ツノ角ノ差ガ一直角ニ等シキトキ各角ノ大サ如何. 又其差ガ $\frac{1}{2}$ 直角ナルトキハ如何.

問題 5. 互ニ餘角ヲ爲ス所ノ二ツノ角ノ中,小ナル角ガ大ナル角ノ二分ノ一ニ等シケレバ各角ノ大サ如何.

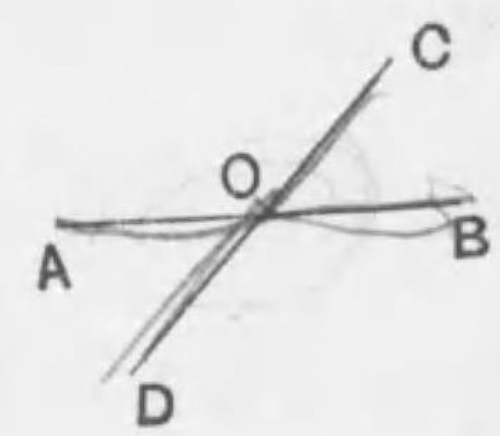
23. 定義 頂點ヲ共有スル二角アリテ,一

ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ノ延長ナルトキハ此二角ヲ對頂角トイフ.



例ヘバ圖ニ於テ OA ト OB トガ一直線ヲナシ,OC ト OD トガ一直線ヲ爲ストキハ ∠AOD ト ∠BOC トハ對頂角ニシテ, ∠AOC ト ∠BOD トモ亦對頂角ナリ.

24. 定理 2. 對頂角は相等し.



二直線 AB, CD ガ點 O ニ於テ相交ルトスレバ

$\angle AOC=\angle BOD$ ニシテ

$\angle AOD=\angle BOC$ ナルベシ

證明 AOB ハ一直線ナリ.

$\therefore \quad \angle AOC+\angle COB=2\angle R$ (定理1系3)

同樣ニ $\angle BOD+\angle COB=2\angle R$ (定理1系3)

$\therefore \quad \angle AOC+\angle COB=\angle BOD+\angle COB$

$\therefore \quad \angle AOC=\angle BOD$

同樣ニ $\angle AOD=\angle BOC$ ナルコトヲ證明スルヲ得.

此コヨリ

系 相交る二直線が爲す四つの角の一つが直角なれば他の三つの角も亦直角なり.

註 二直線ガ相交リテ出來ル四ツノ半直線ノ相隣レル二ツ宛ガナス四ツノ角ノ各ヲ此**二直線がなす角**トイフ.

此コヨリ

問題 6. 同一點ニ於テ交ル三ツノ直線ガ爲ス六ツノ角ヲ一ツ置キニ取リタル角ノ和ハ二直角ニ等シ.

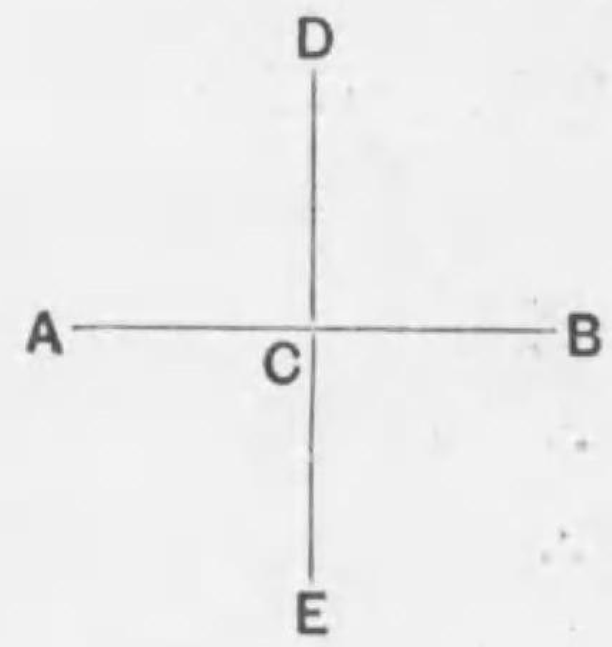
25. 定義 相交ル二直線ガナス角ガ總テ直角ナルトキハ,此二直線ハ**互に垂直なり**トイフ.

例ヘバ二直線 X, Y ガ互ニ垂直ナルコトヲ X⊥Y ナドト書ク.

二直線ガ互ニ垂直ナルコトヲ此二直線ハ**直角に交る**トモ又ハ略シテ**直交する**トモイフコトアリ.

互ニ垂直ナル二直線ノ各ヲ他ノ直線ノ**垂線**トイヒ,其交點ヲ垂線ノ**足**トイフ.

26. 定理 3. 定直線上の一定點に於て此直線に垂直なる直線は必ず唯一つに限る.



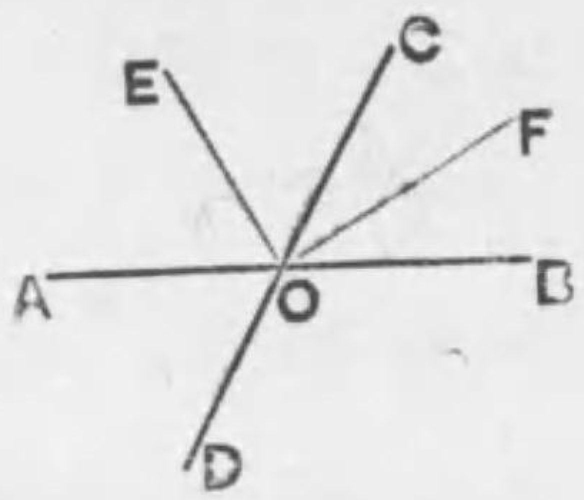
證明 AB ヲ定直線トシ, C ヲ其上ノ一定點トセヨ. C ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ハ CA, CB ナル兩半直線ガナス角ノ二等分線ト夫レノ延長トガナス直線ニ外ナラズ,而シテ一ツノ角ノ二等分線ハ必ズ唯一ツニ限ル. 故ニ C ニ於ケル AB ノ垂線ハ必ズ唯一ツニ限ル.

27. 定義 互ニ垂直ナラザル二直線ノ各ヲ他ノ直線ノ**斜線**トイヒ,其交點ヲ斜線ノ**足**トイフ.

28. 定理 4. 二直線が相交りて爲す二つの接角の各の二等分線は互に垂直なり.

二直線 AB, CD ガ點 O ニ於テ交リテ爲ス接角

AOC, BOC ノ二等分線ヲ夫々OE, OFトセヨ. 然ルトキハ $OE \perp OF$ ナルベシ.



證明 OEハ∠AOCヲ二等分スルヲ以テ

$$\angle COE = \tfrac{1}{2}\angle COA$$

同樣ニ $\angle COF = \tfrac{1}{2}\angle COB$

$\therefore\ \angle COE + \angle COF = \tfrac{1}{2}\angle COA + \tfrac{1}{2}\angle COB$

$\therefore\ \angle EOF = \tfrac{1}{2}(\angle COA + \angle COB)$

然ルニAOBハ一直線ナリ.

$\therefore\ \angle COA + \angle COB = 2\angle R$ (定理1系3)

$\therefore\ \angle EOF = \angle R \qquad \therefore\ OE \perp OF$

系1. 相交る二直線がなす四つの角を夫夫二等分する四つの半直線は互に垂直なる二直線をなす.

系2. 對項角を二等分する二つの半直線は同一の直線をなす.

29. 定理5. 定直線外の一定點を通り,此直線に垂直なる直線は必ず唯一つあり.

ABヲ定直線トシ, CヲAB外ノ一定點トスレバ, Cヲ通リABニ垂直ナル直線ハ必ズ唯一ツアルベシ.

證明 ABヲ折目トシテCトABトヲ含ム平面ヲ折リ返ストキニCガC′ニ來ルトセヨ.

ソコデ平面ヲ舊ノ位置ニ戻シテCトC′トヲ結付ケ, ソレトABトノ交點ヲEトスレバ

$$\angle CEB = \angle C'EB$$

而シテCC′ハ一直線ナリ. 故ニ此等ノ角ノ各ハ直角ナリ.

$$\therefore\ AB \perp CC'$$

因テCヲ通リABニ垂直ナル直線ハ必ズ一ツアリ.

次ニAB上ノ他ノ任意ノ點DトCトヲ結付ケ, ABヲ折目トシテ再ビ此平面ヲ折リ返セバ

$$\angle CDE = \angle C'DE \qquad \therefore\ \angle CDE = \tfrac{1}{2}\angle CDC'$$

然ルニCEC′ハ一直線ナルユヱ, CDC′ハ一直線ニアラズ(公理2), 從テ∠CDC′ハ二直角ニ等シカラズ.

故ニ∠CDE ハ∠R ニ等シカラズ. 卽チ CD ハ AB ニ垂直ナラズ.

故ニ C ヲ通ル AB ノ垂線ハ唯一ツ CC′ アルノミ.

定義 定直線上ニ在ラザル一定點ヨリ此直線ニ下シタル垂線の長さトハ此點ト垂線ノ足トノ間ノ距離ノコトナリ.

問題 7. 相等シカラザル二ツノ角ガ互ニ補角ヲ爲ストキハ大ナル方ノ角ハ鈍角ニシテ. 其小ナル方ハ銳角ナリ.

問題 8. AOB ヲ一ツノ角トシ, OC ヲ其邊 AO ノ延長トスレバ ∠BOC ハ OA, OB ノ爲ス互ニ共軛ナル二角ノ差ノ半分ニ等シク, ∠AOB ハ OB, OC ノ爲ス互ニ共軛ナル二角ノ差ノ半分ニ等シ.

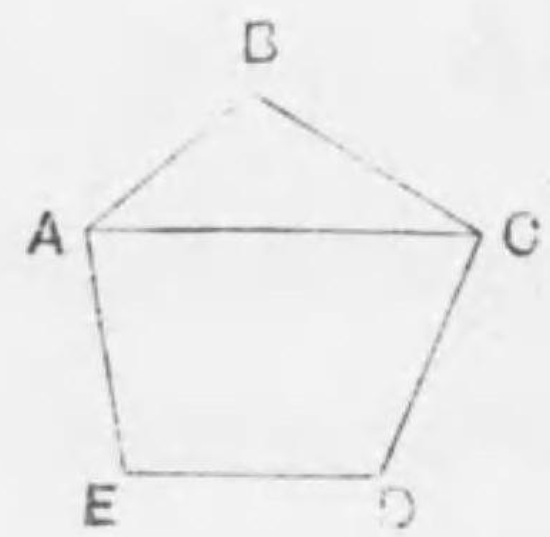
問題 9. 二ツノ半直線 OB, OD ハ一ツノ直線 AC ト同一ノ點 O ニ於テ出會ヒ,其反對ノ側ニアリテ角 AOB ハ角 COD ニ等シ. 然ルトキハ OB ト OD トハ同一直線ヲナス.

問題 10. 二ツノ直角 AOB, COD ガ其頂點ヲ共有スルトキハ二ツノ角 AOC, BOD ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲナス.

三角形

30. 定義 其首尾ガ一致スル一ツノ屈線ニテ圍マレタル平面ノ一部分ヲ多角形或ハ直線形トイヒ,其屈線ヲ組立ツル線分ノ各ヲ其邊,邊ノ長サノ和ヲ其周圍或ハ單ニ周トイフ.

右ノ圖ハ五ツノ線分ヨリ成リ其首尾ガ一致スル屈線 ABCDEA ニテ圍マレタル平面ノ一部分ニシテ卽チ一ツノ多角形ヲ表ス.



多角形ノ相隣レル二邊ガ爲ス形內ノ角ヲ多角形の角トイヒ,其角ノ頂點ヲ多角形の頂點トイフ.

圖ニ於テ ∠ABC, ∠BCD 等ハ此多角形ノ角ニシテ A, B, C 等ハ此多角形ノ頂點ナリ.

多角形ノ相隣ラザル二ツノ頂點ヲ結付クル線分ヲ其對角線トイフ. 例ヘバ上圖ノ AC ノ如シ

多角形ヲ呼ブニハ其頂點ノ文字ヲ順次連唱スルナリ,例ヘバ前圖ノ多角形ヲ ABCDE ト呼ブ.

多角形ノ一ツノ邊ト其隣リノ邊ノ延長トガナス角ヲ多角形ノ**外角**トイヒ,外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ**內角**トイフコトアリ.

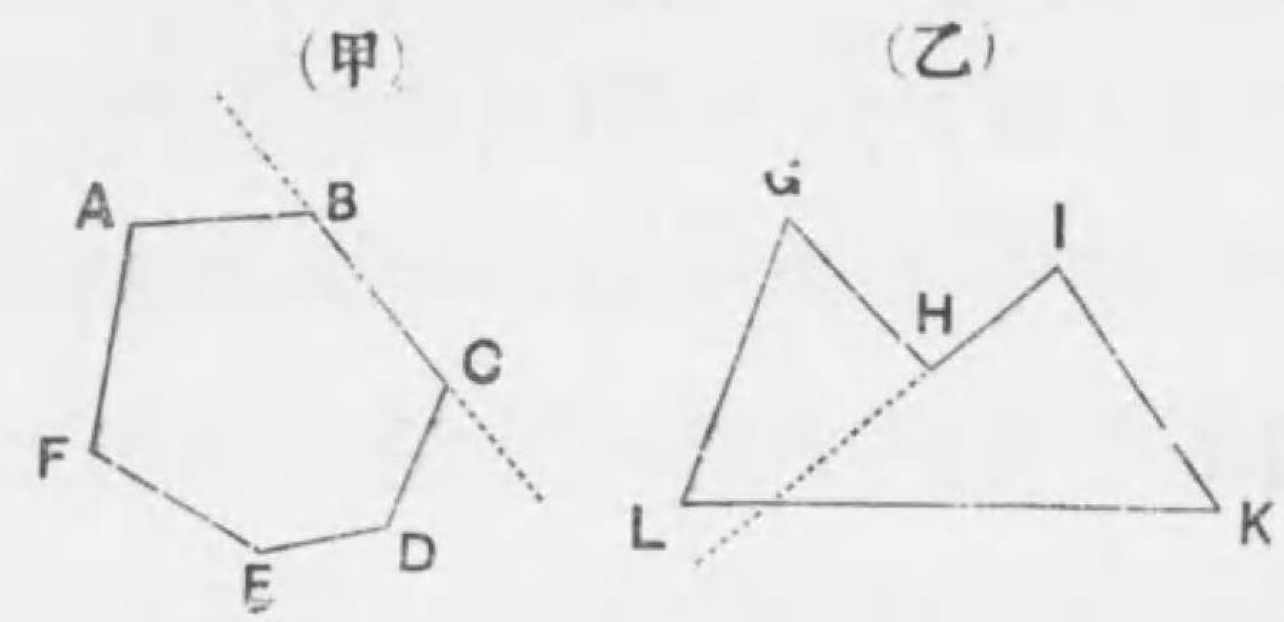
多角形ノ名ハ其邊ノ數ニヨリテ異ナリ,卽チ邊ノ數ガ三ツナラバ之ヲ**三角形**,四ツナラバ之ヲ**四邊形**或ハ**四角形**,五ツナラバ之ヲ**五邊形**或ハ**五角形**トイフ. 此他モ皆之ニ準ズ.

三角形ハ多角形ノ中デ最モ簡單ナル者ニシテ,ソレニハ對角線ナシ.

注意 三角形トイフ文字ノ代リニ△ナル記號ヲ用フルコトアリ.

31. 定義 多角形ガ,其何レノ邊ヲ延長シテモ常ニ其一方ニアルモノナルトキ之ヲ**凸多角形**ナリトイフ. 卽チ甲圖ノ如シ.

多角形ガ其何レカ一ツノ邊ヲ延長スルトキ,ソレガ爲ニ二ツノ部分ニ分タルレバ之ヲ**凹多角形**ナリトイフ. 卽チ乙圖ノ如シ.



注意 是ヨリ後單ニ多角形トアルハ凸多角形ノコトナリト知ルベシ.

32. 定義 其總テノ邊ガ相等シク,且ツ其總テノ角ガ相等シキ多角形ヲ**正多角形**トイフ.

33. 定義 三角形ノ任意ノ邊ヲ取リ之ヲ其**底邊**ト稱スルコトアリ,此場合ニハ底邊ノ兩端ニアル角ヲ**底角**,殘リノ角ヲ**頂角**トイヒ,頂角ノ頂點ヲ三角形ノ**頂點**トイフ.

三角形ノ各內角ト其角ニ隣ラザル邊トハ**相對ス**トイフ.

三角形ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊或ハ其延長ヘ下シタル垂線ノ長サヲ三角形ノ其邊ニ應ズル**高サ**トイフ.

34. 定理 6. 二邊と其夾角とが夫夫相等しき二つの三角形は相等し,而して相等しき邊に對する角は相等しく,相等しき角に對する邊は相等し.

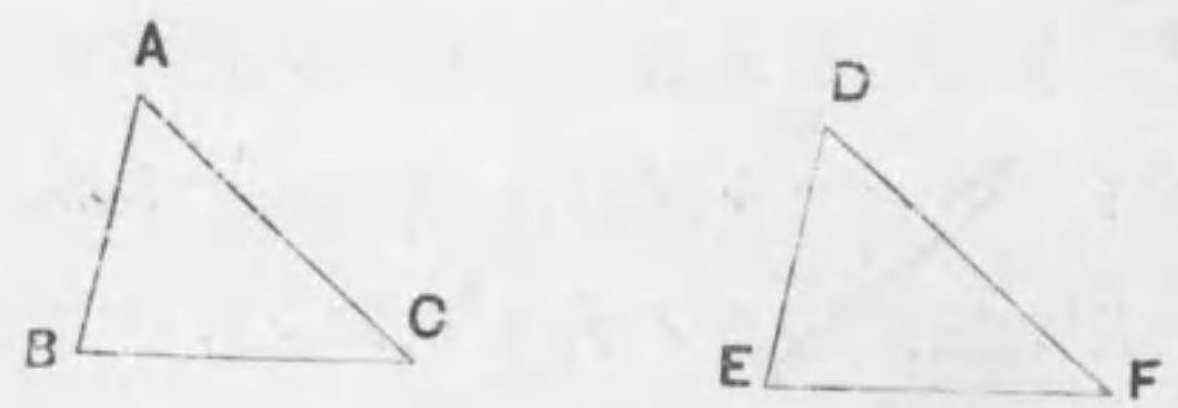
△ABC, △DEF ニ於テ

AB=DE, AC=DF 又 ∠A=∠D

トセヨ. 然ルトキハ此二ツノ三角形ハ相等シク,

∠C=∠F, ∠B=∠E, BC=EF

ナルベシ.



證明 頂點Dガ頂點Aノ上ニ,邊DEガ夫レニ等シキ邊ABノ上ニ重ナリ,點Fト點CトガABノ同ジ側ニアル樣ニ△DEFノ平面ヲ△ABCノ平面ノ上ニオケ. 然ルトキハ

∠A=∠D, AC=DF

ナルユヱ,邊DFハ邊ACノ上ニ重ナリ,點Fハ點Cノ上ニ落ツ.

∴ 邊EFハ邊BCノ上ニ重ナル.

∴ △ABCト△DEFトハ相等シ.

從テ ∠C=∠F, ∠B=∠E, BC=EF

注意 二ツノ三角形ABCトDEFトガ相等シキコトヲ△ABC≡△DEFト記スコトアリ.

系 二點を結付くる線分を垂直に二等分する直線上にある點は此二點より相等しき距離にあり.

問題 11. 頂點Aナル角ノ一ツノ邊ノ上ニ二點B, Cヲ取リ,他ノ邊ノ上ニ於テ AD=AB, AE=AC ナル樣ナル二點D, Eヲ取レバ二ツノ線分BE, CDハ相等シ.

問題 12. 相等シキ二ツノ線分ガ屈線ヲ爲ストキ其夾ム角ヲ二等分スル直線ノ上ニアル點ハ屈線ノ首尾ヨリ相等シキ距離ニアリ.

35. 定理 7. 二角と其頂點間の邊とが夫夫相等しき二つの三角形は相等し,而して相等しき角に對する邊は相等しく,相等しき邊に對する角は相等し.

△ABC, △DEF ニ於テ

$\angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F$ 又 $BC=EF$

トセヨ. 然ルトキハ此二ツノ三角形ハ相等シク,

$AB=DE,\ AC=DF,\ \angle A=\angle D$ ナルベシ.

證明 頂點Eガ頂點Fノ上ニ,邊EFガ夫レニ等シキ邊BCノ上ニ重ナリ,且ツ點Dト點Aトガ邊BCノ同ジ側ニアル樣ニ,△DEFノ平面ヲ△ABCノ平面ノ上ニオケ. 然ルトキハ角Eト角Bトハ相等シキユヱ,半直線EDハ半直線BAノ上ニ重ナル. 又角Fハ角Cニ等シキユヱ,半直線FCハ半直線CAノ上ニ重ナル. 從テEDトFDトノ交點DハBAトCAトノ交點Aノ上ニ落ツ.

$\therefore\quad \triangle ABC\equiv\triangle DEF$

從テ $AB=DE,\ AC=DF,\ \angle A=\angle D$

問題 13. 二ツノ線分ヨリ成ル屈線ノ首尾ヲ結付クル直線ガ屈線ノナス角ノ二等分線ニ垂直ナルトキハ此二ツノ線分ハ相等シ.

問題 14. 一ツノ角ノ二等分線ニ垂直ナル二ツノ直線ガ角ノ二邊ヨリ截リ取ル線分ハ相等シ.

36. 定義 二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**トイフ.

二等邊三角形ニアリテハ其相等シキ二邊ガナス角ヲ特ニ其**頂角**トイヒ殘リノ二角ヲ其**底角**トイフ,而シテ頂角ニ對スル邊ヲ其**底邊**トイフ.

頂角ノ頂點ヲ二等邊三角形ノ**頂點**トイフ.

37. 定理 8. 二等邊三角形の二つの底角は相等し.

$\triangle ABC$ ニ於テ邊 AB ト邊 AC トガ相等シトセヨ.
然ルトキハ $\angle C=\angle B$ ナルベシ.

證明 $\triangle ABC$ ヲ裏返ニシタル者ニ等シキ $\triangle A'B'C'$ ヲ作リ, A ト A′ ト, B ト B′ ト, C ト C′ トガ夫々相對應スルトセヨ. 然ルトキハ $\angle A'$ ト $\angle A$ トハ相等シク, AB ト AC トハ相等シキニヨリ A′C′ ハ AB ニ等シク, A′B′ ハ AC ニ等シ.

$$\triangle A'C'B' \equiv \triangle ABC \qquad \text{(定理 6)}$$

$\therefore \quad \angle C'=\angle B$

然ルニ $\quad \angle C'=\angle C$

$\therefore \quad \angle B=\angle C$

系 1. 三邊が相等しき三角形の三つの角は相等し. 即ち三邊が相等しき三角形は正三角形なり.

系 2. 二等邊三角形の頂角の二等分線は底邊を垂直に二等分す.

38. 定理 9. 一つの三角形の二角が相等しければ之に對する二邊も亦相等し. 即ち此三角形は二等邊三角形なり.

$\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=\angle C$ トセヨ.
然ルトキハ AC=AB ナルベシ.

證明 $\triangle ABC$ ヲ裏返ニシタル者ニ等シキ $\triangle A'B'C'$ ヲ作リ, A ト A′ ト, B ト B′ ト, C ト C′ トガ夫々相對應スルトセヨ. 然ルトキハ $\triangle A'C'B'$ ト $\triangle ABC$ トニ於テ

$$\angle C'=\angle B,\quad \angle B'=\angle C,\quad C'B'=BC$$

$\therefore$ $\triangle A'C'B' \equiv \triangle ABC$ （定理7）

$\therefore$ $A'C' = AB$

然ルニ $A'C' = AC$

$\therefore$ $AB = AC$

系 三つの角が相等しき三角形の三邊は相等し．即ち三つの角が相等しき三角形は正三角形なり．

問題 15. 二等邊三角形ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結付クル直線ハ底邊ニ垂直ニシテ且ツ頂角ヲ二等分ス．

問題 16. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ト之ニ對スル邊ノ中點トヲ結付クル二ツノ線分ハ相等シ．

問題 17. 二等邊三角形ノ二ツノ底角ニ接スル外角ノ二等分線ト底邊トハ二等邊三角形ヲナス．

問題 18. 正三角形ノ三邊ノ中點ハ亦一ツノ正三角形ノ頂點ヲ爲ス．

39. 定理 10. 三邊が夫夫相等しき二つの三角形は相等し,而して相等しき邊に對する角は相等し．

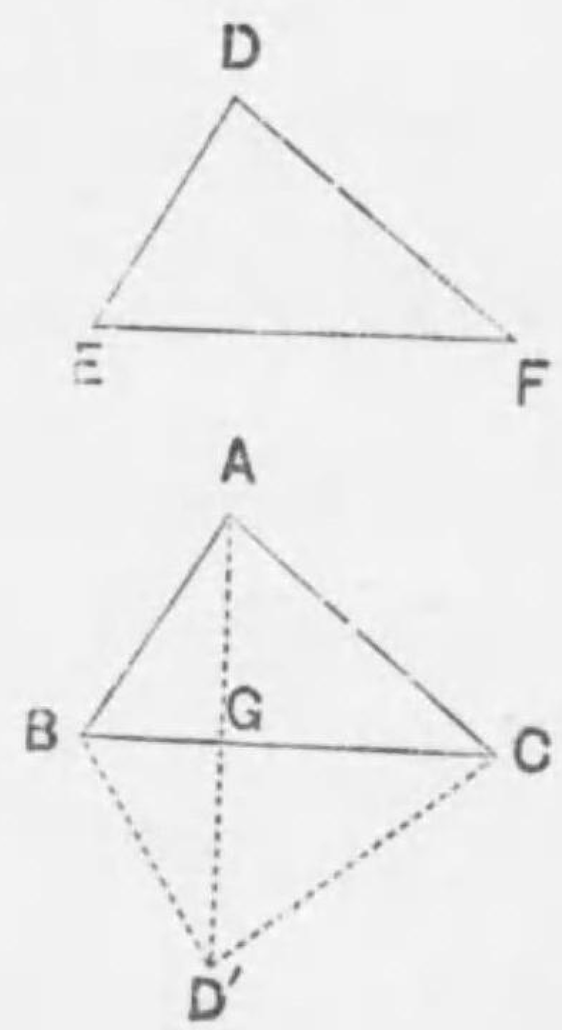
$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$$AB=DE,\quad BC=EF,\quad CA=FD$$

トセヨ．然ルトキハ此二ツノ三角形ハ相等シク,

$\angle C=\angle F$, $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$ ナルベシ．

證明 點 E ガ點 B ノ上ニ,邊 EF ガ夫レニ等シキ邊 BC ノ上ニ重ナリ,點 D ト點 A トガ邊 BC ノ反對ノ側ニアル様ニ,$\triangle DEF$ ノ平面ヲ $\triangle ABC$ ノ平面ノ上ニオキ點 D ガ落ツル點ヲ D′ トシ,A ト D′ トヲ結付ケ,邊 BC ト點 G ニ於テ交ラシムレバ



$$AB=DE,\quad DE=BD'$$

ナルユヱ,二等邊三角形 ABD′ ニ於テ

$$\angle BAD'=\angle BD'A \qquad (定理\ 8)$$

同様ニ $$\angle CAD'=\angle CD'A \qquad (定理\ 8)$$

$$\therefore \quad \angle BAD'+\angle CAD'=\angle BD'A+\angle CD'A$$

即チ $$\angle BAC=\angle BD'C$$

然ルニ $$\angle BD'C=\angle EDF$$

$$\therefore \quad \angle BAC=\angle EDF$$

サテ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$$AB=DE,\ AC=DF,\ \angle BAC=\angle EDF$$

$$\therefore \quad \triangle ABC\equiv\triangle DEF \qquad (定理\ 6)$$

從テ $$\angle C=\angle F,\ \angle B=\angle E$$

注意 上圖デハ AD′ ト BC トガ點 B ト點 C トノ間ニ於テ交ルトシテ此定理ヲ證明シタリ,然レドモ AD′ ガ丁度邊 BC ノ何レカ一端ヲ通ルカ,若クハ邊 BC ノ延長ト相交ル場合ニテモ上ノ證明ト同様ニシテ此定理ノ眞ナルコトヲ證明シ得ルナリ.

系 1. 一つの正三角形の一邊が他の正三角形の一邊に等しければ二つの正三角形は相等し.

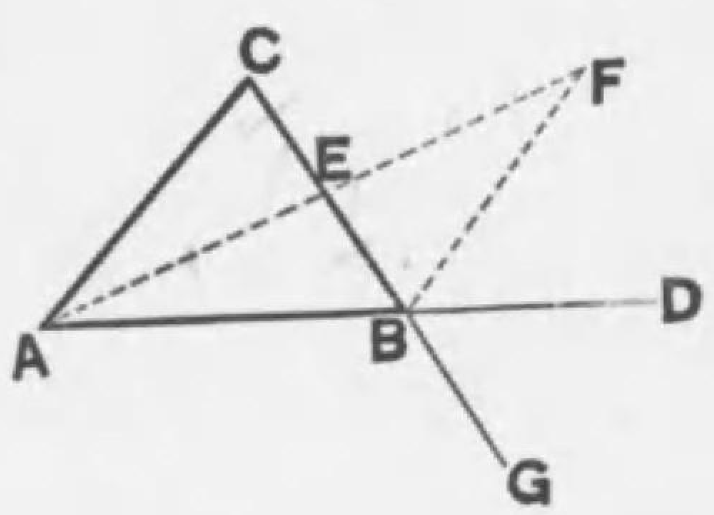
系 2. 二定點より相等しき距離にある點は此二定點を結付くる線分を直垂に二等分する直線上にあり.

問題 19. 同ジ底邊ノ上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ通ル直線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分ス.

40. 定義 三角形ニ於テ一ツノ外角ニ接セザル二ツノ内角ノ各ヲ其外角ノ**內對角**トイフ.

41. 定理 11. 三角形の外角は其內對角の何れよりも大なり.

$\triangle ABC$ ノ任意ノ一邊 AB ヲ延長シテ生ズル外角ヲ $\angle CBD$ トスレバ $\angle CBD$ ハ $\angle A$, $\angle C$ ノ何レヨリモ大ナルベシ.



證明 BC ノ中點ヲ E トシ AE ヲ結付ケ之ヲ E ノ方ヘ延長シ,其上ニ AE ニ等シク EF ヲ取リ,F ト B トヲ結付クレバ BF ハ $\angle CBD$ ノ內ニ含マル.

$\triangle ACE$ ト $\triangle FBE$ トニ於テ

$$EA=EF,\ EC=EB \quad (\text{作圖})$$

$$\angle CEA=\angle BEF \quad (\text{定理}2)$$

$$\therefore \quad \triangle ACE\equiv\triangle FBE \quad (\text{定理}6)$$

$$\therefore \quad \angle C=\angle EBF$$

然ルニ $\angle CBD>\angle CBF$

$$\angle CBD>\angle C$$

次ニ CB ヲ B ノ方ヘ延長シ之ヲ BG トセヨ.

然ルトキハ上ト同理ニヨリ

$$\angle ABG>\angle A$$

然ルニ $\angle ABG=\angle CBD$ (定理2)

$$\therefore \quad \angle CBD>\angle A$$

系 1. 三角形の何れの二角の和も二直角より小なり.

系 2. 三角形の一角が直角若くは鈍角なれば他の二角は何れも鋭角なり.

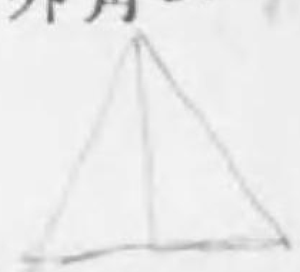
定義 一ツノ角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイヒ,其直角ニ對スル邊ヲ其**斜邊**トイフ.

一ツノ角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**トイフ.

三ツノ角ガ何レモ鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**トイフ.

問題 20. $\triangle ABC$ 內ノ任意ノ一點ヲ D トスレバ $\angle BDC$ ハ $\angle A$ ヨリ大ナリ.

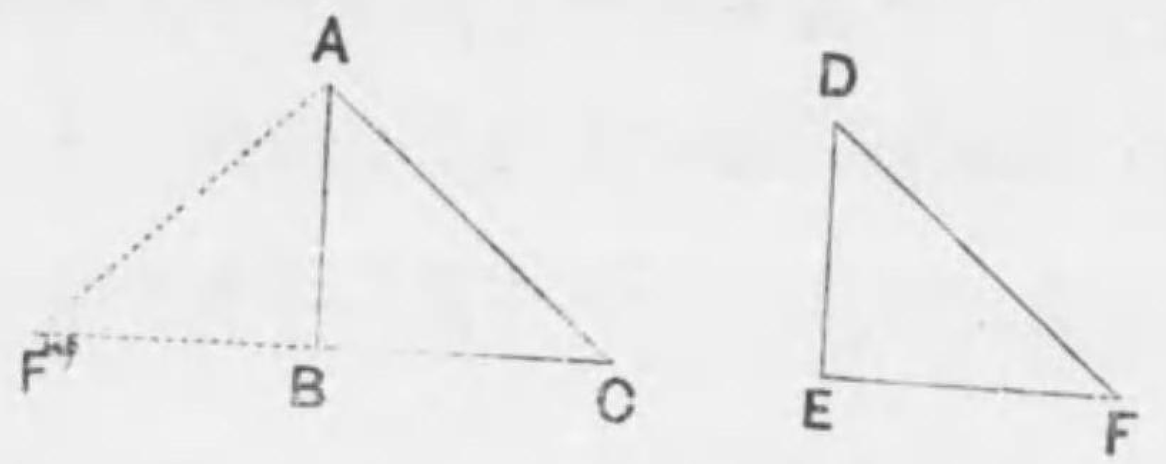
問題 21. 二等邊三角形ノ底角ニ接スル外角ハ鈍角ナリ.



42. 定理 12. 斜邊と他の一邊とが夫夫相等しき二つの直角三角形は相等し.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ角 B ト角 E トガ直角ニシテ $AC=DF$, $AB=DE$ トセヨ.

然ルトキハ此二ツノ三角形ハ相等シカルベシ.



證明　點Dガ點Aノ上ニ,邊DEガ夫レニ等シキ邊ABノ上ニ重ナリ,且ツ點Fト點Cトガ邊ABノ反對ノ側ニアル樣ニ,$\triangle DEF$ノ平面ヲ$\triangle ABC$ノ平面ノ上ニオキ,點Fノ落ツル點ヲF'トセヨ.

然ルトキハ

$$\angle ABC=\angle DEF=\angle ABF'=\angle R$$

ナルユヱ,BCトBF'トハ同一直線ヲナス.

$\triangle AF'C$ニ於テ

$$AC=DF=AF'$$

$$\therefore \quad \angle C=\angle F' \qquad \text{(定理8)}$$

$$\therefore \quad \angle C=\angle F$$

ソコデ點Dハ點Aノ上ニ,邊DFハ夫レニ等シキ邊ACノ上ニ重ナリ,且ツ點Eト點Bトガ邊ACノ同ジ側ニアル樣ニ$\triangle DEF$ノ平面ヲ$\triangle ABC$ノ平面ノ上ニオケバ角Fハ角Cニ等シキヲ以テ半直

線FEハ半直線CBノ上ニ重ナル. $\angle E=\angle B=\angle R$ナルヲ以テDEトABトハ何レモ點Aヨリ直線CBヘノ垂線ナリ. 故ニDEハABト一致ス(定理5).

故ニ點Eハ點Bニ合ス.

$$\therefore \quad \triangle DEF\equiv\triangle ABC$$

系　或點より定角の二邊へ下したる垂線の長さが相等しきときは,此點は此角の二等分線上にあり.

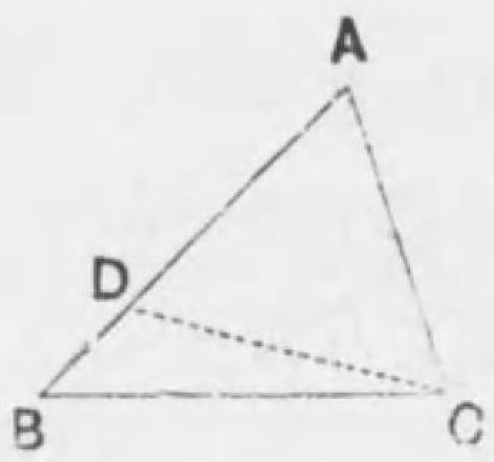
問題22.　二ツノ三角形ノ相等シキ場合ヲ列擧セヨ.

問題23.　一ツノ三角形ノ高サガ總テ相等シキトキハ其三角形ハ正三角形ナリ.

43.　**定理13.**　二邊が相等しからざる三角形の大なる邊に對する角は小なる邊に對する角より大なり.

$\triangle ABC$ニ於テ$AB>AC$トセヨ. 然ルトキハ$\angle C>\angle B$ナルベシ.

證明 邊ABノ上ニ邊ACニ等シキ線分ADヲ取リ,DトCトヲ結付ケヨ.



然ルトキハCDハ邊ACト邊BCトノ間ニアリ. サテ△ACDニ於テ

$$\angle ACB > \angle ACD$$

又 $\angle ADC > \angle B$ (定理11)

然ルニ $AD = AC$ (作圖)

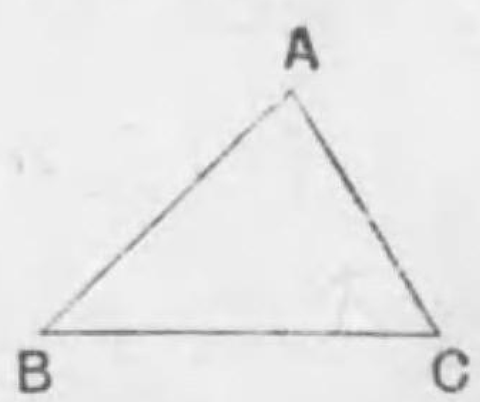
$\therefore$ $\angle ACD = \angle ADC$ (定理8)

$\therefore$ $\angle ACB > \angle ABC$

44. 定理14. 二つの角が相等しからざる三角形の大なる角に對する邊は小なる角に對する邊より大なり.

△ABCニ於テ $\angle C > \angle B$ ナリトセヨ.

然ルトキハ $AB > AC$ ナルベシ.



證明 若シ $AB = AC$

ナランニハ

$\angle C = \angle B$ (定理8)

トナリテ $\angle C > \angle B$ ナル假定ト矛盾ス.

$\therefore$ $AB \neq AC$

又若シ $AB < AC$

ナランニハ $\angle C < \angle B$ (定理13)

トナリテ,是亦 $\angle C > \angle B$ ナル假定ト矛盾ス.

$\therefore$ $AB \not< AC$

$\therefore$ $AB > AC$

注意 $\not<$ ハ其左方ニ書キアル者ガ其右方ニ書キアル者ヨリ小ナラザルコトヲ示シ,$\not>$ ハ其左方ニアル者ガ其右方ニアル者ヨリ大ナラザルコトヲ示ス. 又 $\neq$ ハ相等シカラザルコトヲ示ス符號ニシテ矢張不等號ノ一ツナリ.

系 直角三角形の斜邊は他の二邊の何れより大なり. 又鈍角三角形にありては鈍角に對する邊が最大なり.

問題24. 二等邊三角形ノ底邊ガ他ノ二邊ヨリ大ナラザレバ此三角形ハ鋭角三角形ナリ.

問題 25. 一ツノ三角形ノ三ツノ高サノ和ハ其三角形ノ周ヨリ小ナリ.

問題 26. 定理13ノ圖ニ於テ $\angle BCD$ ハ $\angle ACB$ ト $\angle ABC$ トノ差ノ半分ニ等シ.

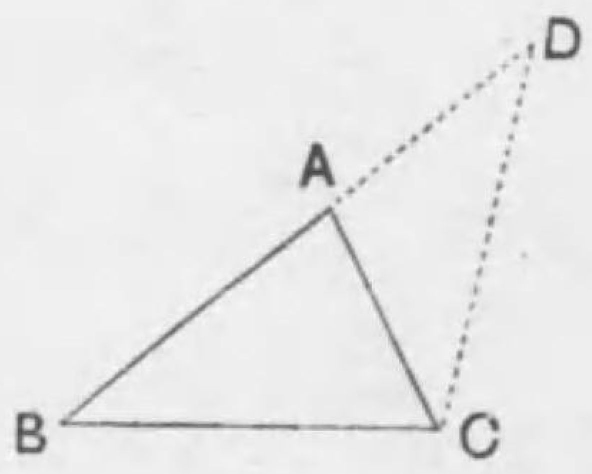
問題 27. $\triangle ABC$ ノ角 A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トスレバ $AB>BD$, $AC>CD$ ナリ.

問題 28. 四邊形 ABCD ノ邊ノ中デ最大ナル邊ガ AD ニシテ最小ナル邊ガ BC ナルトキハ, $\angle ABC$ ハ $\angle ADC$ ヨリ大ニシテ $\angle BCD$ ハ $\angle BAD$ ヨリ大ナリ.

45. 定理 15. 三角形の二邊の和は殘りの邊より大なり.

$\triangle ABC$ ニ於テ $AB+AC>BC$ ナルベシ.

證明 邊 BA ヲ A ノ方ヘ延長シテ邊 AC ニ等シキ線分 AD ヲ其上ニ取リ, D ト C トヲ結付ケヨ.



然ルトキハ $\triangle ACD$ ハ二等邊三角形ナリ.

$\therefore \quad \angle ACD=\angle D$ (定理 8)

然ルニ $\angle BCD>\angle ACD$

$\therefore \quad \angle BCD>\angle D$

$\therefore \quad \triangle BCD$ ニ於テ

$BD>BC$ (定理14)

然ルニ $BD=BA+AD=BA+AC$

$\therefore \quad AB+AC>BC$

系 1. 三角形の二邊の差は殘りの邊より小なり.

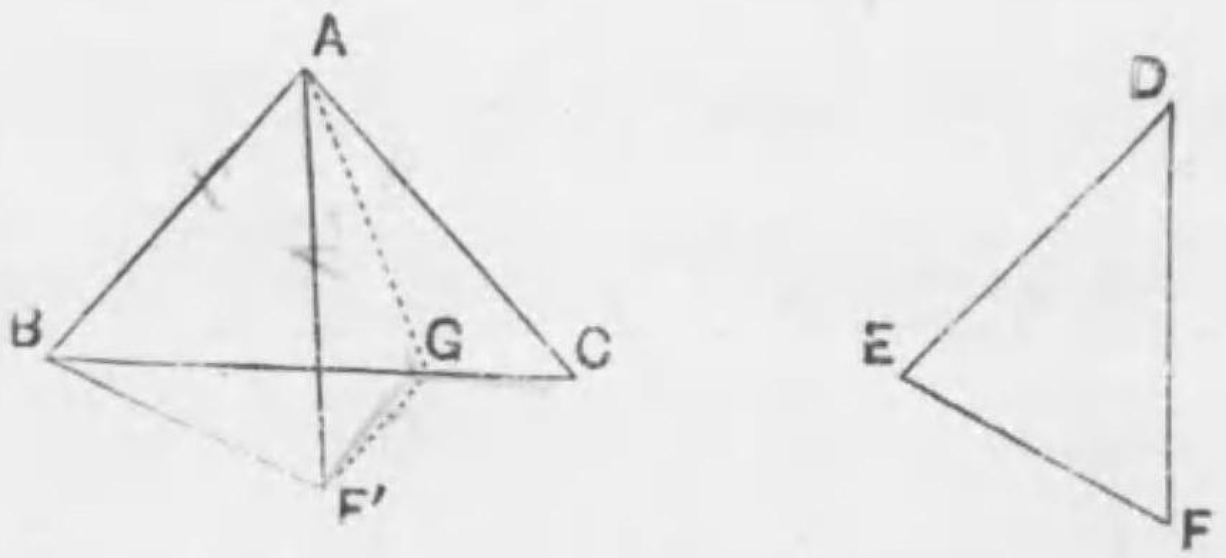
系 2. 二定點を兩端とする線分は同じ二點を兩端とする屈線より短かし.

問題 29. 三角形ノ一ツノ頂點ト,之ニ對スル邊ノ中點トヲ結付クル線分ハ他ノ二ツノ邊ノ和ノ半分ヨリ小ナリ.

問題 30. 四邊形ノ周ハ其二ツノ對角線ノ和ヨリ大ニシテ其和ノ二倍ヨリハ小ナリ.

46. 定理16. 一つの三角形の二邊が夫夫他の三角形の二邊に等しく,其夾角が相等しからざるときは,大なる夾角の對邊は小なる夾角の對邊より大なり.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A>\angle D$ トセヨ. 然ルトキハ $BC>EF$ ナルベシ.



證明 點Dガ點Aノ上ニ,邊DEガ夫レニ等シキ邊ABノ上ニ重ナリ,且ツ點Fト點Cトガ邊ABノ同ジ側ニアル樣ニ,$\triangle DEF$ ノ平面ヲ $\triangle ABC$ ノ平面ノ上ニオキ,點Fガ落ツル點ヲF′トセヨ.

然ルトキハ $AF'=DF$, $BF'=EF$ ナリ.

又 $\angle D<\angle A$

ナルユヱ, AF′ハ邊ABト邊ACトノ間ニアリ.

ソコデ $\angle F'AC$ ノ二等分線ヲ引キ,邊BCト點Gニ於テ交ラシメヨ.

然ルトキハ $\triangle AF'G$ ト $\triangle ACG$ トニ於テ

$AF'=AC$, AGハ共通

$\angle GAF'=\angle GAC$ (作圖)

$\therefore \triangle AF'G\equiv\triangle ACG$ (定理6)

$\therefore GF'=GC$

$\therefore BC=BG+GC=BG+GF'$

然ルニ點F′ガ邊BCノ上ニアルトキハ勿論,然ラザルトキモ $BG+GF'>BF'$ (定理15)

$\therefore BC>BF'$

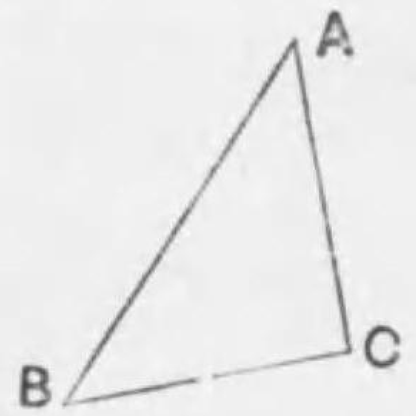
$\therefore BC>EF$

47. 定理17. 一つの三角形の二邊が夫夫他の三角形の二邊に等しく,第三邊が相等しからざるときは,其大なる邊に對する角は小なる邊に對する角より大なり.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$$AB=DE,\ AC=DF,\ BC>EF$$

ナリトセヨ. 然ルトキハ $\angle A>\angle D$ ナルベシ.



證明 若シ $\angle A=\angle D$ ナランニハ

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

從テ $BC=EF$ トナリテ $BC>EF$ ナル假定ト矛盾ス.

$$\therefore \quad \angle A \neq \angle D$$

若シ $\angle A<\angle D$ ナランニハ

$$BC<EF \qquad \text{(定理16)}$$

トナリ,是亦假定ト矛盾ス.

$$\therefore \quad \angle A \nless \angle D$$

$$\therefore \quad \angle A>\angle D$$

問題 31. 線分ノ中點ヲ通ル其斜線ノ上ニ在ル點ハ此線分ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニアラズ.

問題 32. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ヲ點 C ノ方ヘ D マデ延長シ, CD ヲ邊 AB ニ等シクナシ, A ト D トヲ結付クレバ AD ハ BC ヨリ大ナリ.

問題 33. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點ヲ D トスルトキ, $AB>AC$ ナレバ $\angle ADB>\angle R$ ナリ.

48. 定理 18. 直線上にあらざる點より,此直線へ垂線と斜線とを作れば

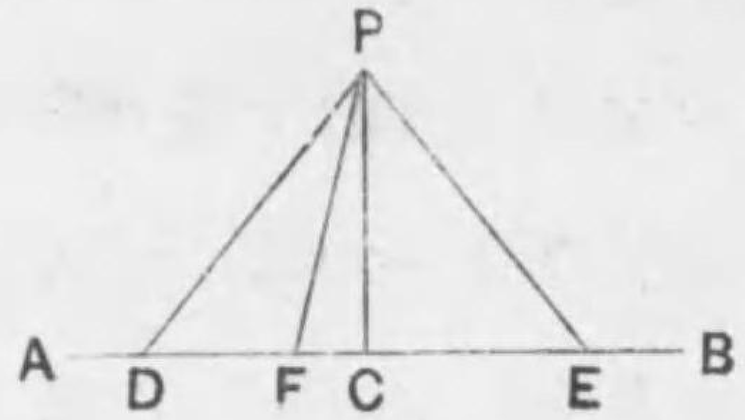
(第一) 垂線は最も短かし.

(第二) 二つの斜線の足と垂線の足との間の距離が相等しければ,此二つの斜線は相等し.

(第三) 二つの斜線の足と垂線の足との間の距離が相等しからざるときは,其距離の大なる斜線は其距離の小なる斜線より大なり.

AB ハ一ツノ直線, P ハ其外ニアル點ニシテ, P

ヨリ AB ヘ垂線 PC 及斜線 PD, PE, PF ヲ作リ DC=EC, DC>FC ナリトセヨ.



然ルトキハ(第一)此等ノ線分ノ中 PC ハ最モ短カク,(第二) PD=PE, (第三) PD>PF ナルベシ.

第一の證明　$PC \perp AB$　(假定)

故ニ　$\triangle PCF$ ニ於テ

$$\angle PCF = \angle R$$

$\therefore$　$PC < PF$　(定理 14 系)

第二の證明　$DC = EC$　(假定)

$CP \perp DE$　(假定)

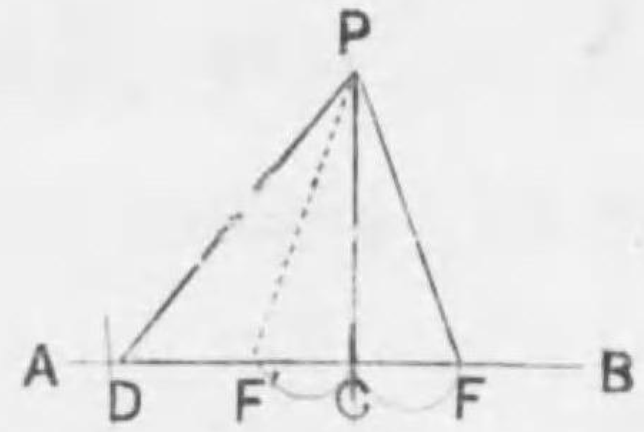
$\therefore$　$PD = PE$　(定理 6 系)

第三の證明　點 F ガ線分 DC ノ上ニアリテ DC>FC ナルトキハ, $\triangle PCF$ ノ外角 PFD ハ $\angle PCF$ ヨリ大ナリ.　故ニ $\angle PFD$ ハ鈍角ナリ.

故ニ $\triangle PFD$ ニ於テ

$PD > PF$　(定理 14 系)

次ニ右ノ圖ニ示スガ如ク PD ト PF トガ PC ノ兩側ニ一ツ宛アリトセンニ, CD ノ上ニ於テ CF ニ等シク CF′ ヲ取リ, P ト F′ トヲ結付ケヨ.



然ルトキハ上ノ證明ニヨリ

$$PD > PF'$$

然ルニ(第二)ノ證明ニヨリ

$$PF' = PF$$

$\therefore$　$PD > PF$

系　一定點より,之を通らざる直線へ二つより多くの相等しき斜線を引くことを得ず.

定義　一ツノ直線外ノ一點ヨリ之ヘ引ケル垂線ノ長サヲ**其直線と其點との距離**トイフ.

問題 34. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ上ニ一ツヅツ取リタル點ヲ結付クル線分ハ斜邊ヨリ小ナリ.

練習第一

問題 35. ABCD ヲ四邊形トシOヲ任意ノ點トスレバ四ツノ線分 OA, OB, OC, OD ノ和ハ二ツノ對角線 AC, BD ノ和ヨリ大ナリ.

問題 36. 三角形 ABC ノ各頂點ト,其内ノ一點Oトヲ結付クル三ツノ線分 AO, BO, CO ノ和ハ三角形ノ周ノ半分ヨリ大ナリ.

問題 37. 二等邊三角形ノ底角ノ頂點ト其對邊上ニアル任意ノ一點トヲ結付クル直線ハ,同ジ點ト底邊上ノ任意ノ一點トヲ結付クル直線ヨリ大ナリ.

問題 38. 正三角形ノ二邊ノ上ニ,其兩端ヲ一ツ宛有スル線分ハ此三角形ノ各邊ヨリ小ナリ.

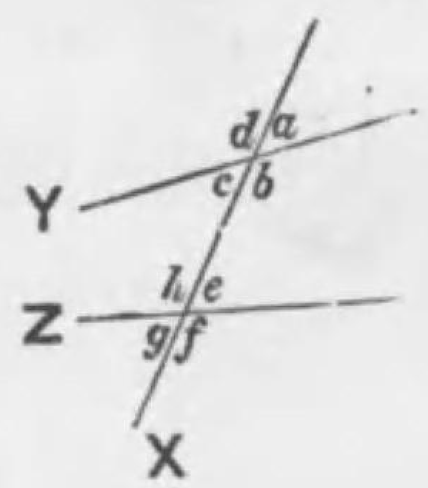
問題 39. 三ツノ線分 AA′, BB′, CC′ ガ同一點Oニ於テ交リ O ガ各線分ノ中點ナレバ △ABCト△A′B′C′ トハ相等シ. 若シ三點 A, B, C ガ同一直線上ニアレバ A′, B′, C′ モ亦同一直線上ニアリ.

問題 40. P, Q ハ直線 CD ノ同ジ側ニ在ル二點ナリ, A ハ CD 上ノ點ニシテ二ツノ線分 PA, QA ハ

CDト相等シキ角ヲ爲ス. B ヲ CD 上ノ他ノ任意ノ點トスレバ PA, QA ノ和ハ二ツノ線分 PB, QB ノ和ヨリ小ナリ.

平行直線

49. 定義 下圖ノ如ク,一直線Xガニ直線YトZトニ交ルトキハ a, b, c, d, e, f, g, hナル羅馬字ニテ表サルル八ツノ角ヲ生ズ,而シテ此等ノ位置ノ相互ノ關係ニヨリ次ノ如キ名稱アリ.



(第一) $\angle b$, $\angle c$, $\angle e$, $\angle h$ ノ如ク,YトZトノ間ニアル四ツヲ角ヲ**內角**トイフ.

(第二) $\angle a$, $\angle d$, $\angle f$, $\angle g$ ノ如ク,YトZトノ間ニアラザル四ツノ角ヲ**外角**トイフ.

(第三) $\angle b$ト$\angle h$ト; $\angle c$ト$\angle e$ト; $\angle a$ト$\angle g$ト; $\angle d$ト$\angle f$トノ如ク,Xノ兩側ニ一ツ宛アリテ接角ナラザル二ツノ內角又ハ二ツノ外角ヲ**錯角**トイフ.

(第四) $\angle a$ト$\angle e$ト; $\angle b$ト$\angle f$ト; $\angle d$ト$\angle h$ト; $\angle c$ト$\angle g$トノ如ク,Xノ同ジ側ニアル接角ナラザル內角ト外角トヲ**同位角**トイフ.

(第五) $\angle b$ト$\angle e$ト; $\angle c$ト$\angle h$トノ如ク,Xノ同ジ側ニアル二ツノ內角ヲ**同傍內角**トイフ.

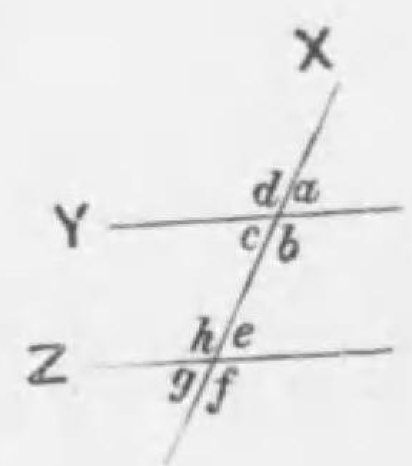
(第六) $\angle a$ト$\angle f$ト; $\angle d$ト$\angle g$トノ如ク,Xノ同ジ側ニアル二ツノ外角ヲ**同傍外角**トイフ.

50. 定理19. 一直線が他の二直線に交りてなす同位角の中の一組が相等しきときは

(第一) 其他の三組の同位角は夫夫相等し.

(第二) 四組の錯角は夫夫相等し.

(第三) 二組の同傍內角は夫夫互に補角をなし,二組の同傍外角も亦夫夫互に補角をなす.



直線Xガニ直線Y, Zニ交リテ生ズル一組ノ同位角aトeトガ相等シケレバ(第一)他ノ三組ノ同位角bトfト;

dトhト; cトgトハ夫夫相等シク, (第二) 四組ノ錯角cトeト; bトhト; aトgト; dトfトハ夫夫相等シク, (第三) 二組ノ同傍内角bトeト; cトhト; 二組ノ同傍外角aトfト; dトgトハ夫夫互ニ補角ヲナスベシ.

第一の證明 $\angle a=\angle c,\ \angle e=\angle g$ (定理2)

然ルニ $\angle a=\angle e$ (假定)

$\therefore$ $\angle c=\angle g$

從テ $\angle b=\angle f$

$\angle d=\angle h$

第二の證明 $\angle a=\angle c$ (定理2)

然ルニ $\angle a=\angle e$ (假定)

$\therefore$ $\angle c=\angle e$

同樣ニ $\angle b=\angle h$

又 $\angle e=\angle g$ (定理2)

然ルニ $\angle a=\angle e$ (假定)

$\therefore$ $\angle a=\angle g$

同樣ニ $\angle d=\angle f$

第三の證明 $\angle a+\angle b=2\angle R$ (定理1系3)

然ルニ $\angle a=\angle e$ (假定)

$\therefore$ $\angle b+\angle e=2\angle R$

同樣ニ $\angle c+\angle h=2\angle R$

又 $\angle e+\angle f=2\angle R$ (定理1系3)

然ルニ $\angle e=\angle a$ (假定)

$\therefore$ $\angle a+\angle f=2\angle R$

同樣ニ $\angle d+\angle g=2\angle R$

系 1. 一直線が他の二直線に交りてなす錯角の中の一組が相等しきときは

(第一) 其他の三組の錯角は夫夫相等し.

(第二) 四組の同位角は夫夫相等し.

(第三) 二組の同傍内角及二組の同傍外角は夫夫互に補角をなす.

系 2. 一直線が他の二直線に交りてなす同傍内角(若くは同傍外角)の中の一組が互に補角をなすときは

(第一) 其他の一組の同傍内角(若く

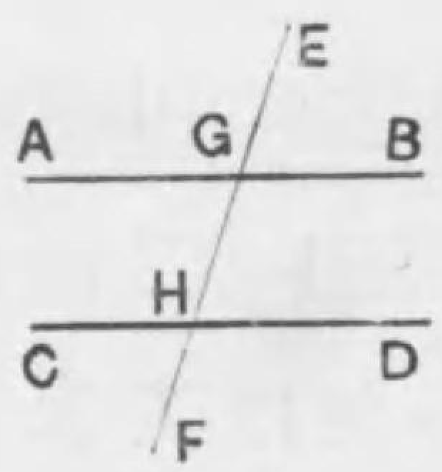
は同傍外角)は互に補角をなし,二組の同傍外角(若くは同傍內角)も亦夫夫互に補角をなす.

(第二) 四組の同位角は夫夫相等し.

(第三) 四組の錯角は夫夫相等し.

51. 定理 20. 二直線が他の一直線と交りてなす同位角が相等しきとき此二直線は相交らず.

二直線 AB, CD ガ他ノ一直線 EF ト夫夫 G, H ニ於テ交リテ爲ス同位角 EGB, GHD ガ相等シケレバ AB, CD ハ相交ラザルベシ.



證明 若シ AB, CD ガ半直線 GB, HD ノ側ニ於テ交ルナラバ其交點ヲ M トスレバ △MGH ノ頂點 G ニ於ケル外角 EGB ハ其內對角 GHD ヨリ大ナリ.

然ルニ是ハ $\angle EGB=\angle GHD$ ナル假定ト矛盾ス.

故ニ AB, CD ハ半直線 GB, HD ノ側ニ於テ交ルコトナシ.

同樣ニ AB, CD ハ半直線 GA, HC ノ側ニ於テ交ルコトナキヲ證明スルコトヲ得.

故ニ CD, EF ハ相交ラズ.

52. 定義 同一平面上にありて相交らざる二直線を**互に平行なり**といふ.

二直線AB, CDガ互ニ平行ナルコトヲ $AB \parallel CD$ ト記スコトアリ.

注意 1. 互ニ平行ナル二直線ノ各ノ上ニ取リタル二ツノ線分ヲモ互ニ平行ナリトイフ,而シテ二ツノ線分 EF, GH ガ互ニ平行ニシテ且ツ相等シキ長サヲ有スルコトヲ $EF \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} GH$ ト記スコトアリ.

注意 2. 相一致スル二直線ハ互ニ平行ナル二直線ノ特別ナル場合ナリ.

53. 平行直線ノ定義ト定理20トヨリ次ノ定理ヲ得.

定理 21. 二直線が他の一直線と交りてなす同位角が相等しければ此二直線は互に平行なり.

系 1. 同一の直線に垂直なる二直線は互に平行なり.

系 2. 二直線が他の一直線と交りてなす錯角が相等しきか或は同傍內角若くは同傍外角が互に補角をなすときは此二直線は互に平行なり.

系 3. 定點を通りて定直線に平行る直線は一つは必ず存在す.

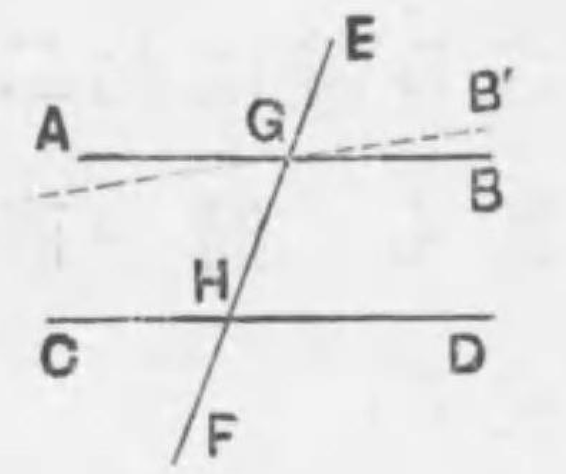
54. **公理 4.** 定點を通り定直線に平行なる直線は唯一つに限る.

系 1. 同一の直線に平行なる二直線は互に平行なり.

系 2. 平行二直線の中の一つに交る直線は他の直線にも交る.

55. **定理 22.** 一直線が二つの平行直線に交りてなす同位角は相等し.

一直線 EF ガ二ツノ平行直線 AB, CD ト夫夫 G, H ニ於テ交レバ,其為ス所ノ同位角 EGB ト EHD トハ相等シカルベシ.



證明 G ヲ通リ EF ト ∠EHD ニ等シキ角ヲナス半直線 GB′ ヲ HD ノ側ニ引ケ. 然ルトキハ

$$GB' \parallel HD$$

然ルニ $GB \parallel HD$

故ニ G ヲ通リ ∠GHD ト等シキ同位角ヲ為ス直線ハ GB ト一致ス. (公理 4)

$$\therefore \quad \angle EGB = \angle EHD$$

系 1. 一直線が二つの平行直線に交りて爲す錯角は夫夫相等しく,同傍內角及同傍外角は夫夫互に補角をなす.

系 2. 一直線が二つの平行直線の一つに垂直なれば他にも垂直なり.

系 3. 一直線が他の二直線と交りて爲す同位角が相等しからざるか,或は錯角が相等しからざるか,或は同傍內角(若くは同傍外角)が互に補角をなさざる時は此二直線は相交る.

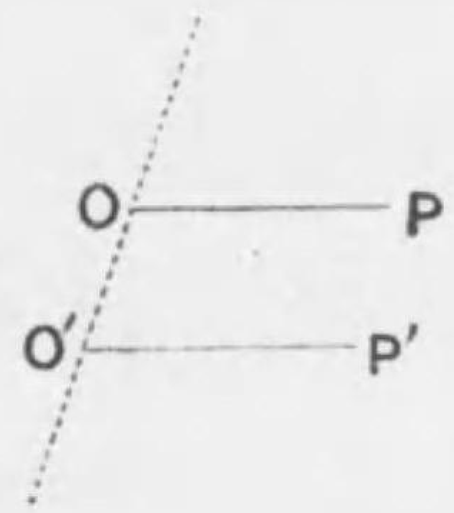
系 4. 同一直線の垂線と斜線とは相交る.

系 5. 相交る二直線に夫夫垂直なる二直線は相交る.

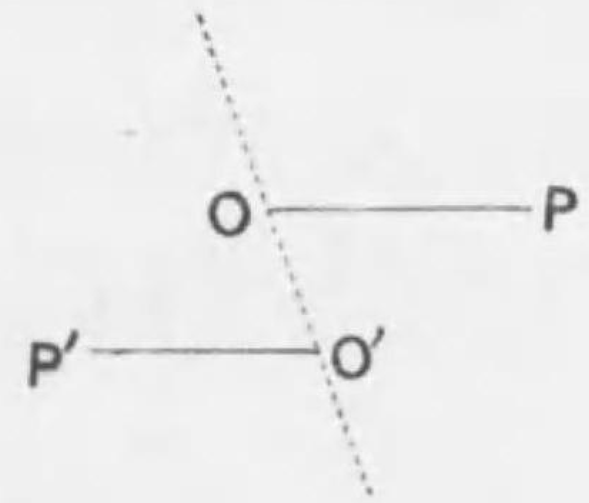
56. 定義 二ツノ半直線ガ其等ノ原點ヲ通ル直線ノ同ジ側ニアリテ互ニ平行ナルトキハ

此等ノ半直線ハ**同方向を有す**ト稱セラレ(甲圖ノ如シ),原點ヲ通ル直線ノ兩方ニ一ツ宛アリテ互ニ平行ナルトキハ此等ノ半直線ハ**正反對の方向を有す**ト稱セラル(乙圖ノ如シ).

(甲)



(乙)



注意 半直線 OP ノ延長 OP′ ハ,上ノ乙圖ノ點 O′ ガ點 O ト一致シタル特別ノ場合ナリ.

問題 41. 二等邊三角形ノ頂點ヲ通リ,底邊ニ平行ナル直線ハ頂點ニ於ケル外角ヲ二等分ス.

問題 42. 相交ル二直線ニ夫夫平行ナル二直線ハ相交ル.

問題 43. 二ツノ平行直線ニ夫夫垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ.

問題 44. 二ツノ角アリテ其一ツノ角ノ二邊ガ夫夫他ノ角ノ二邊ニ平行ナレバ,此二ツノ角ハ相等シキカ若クハ互ニ補角ヲナス.

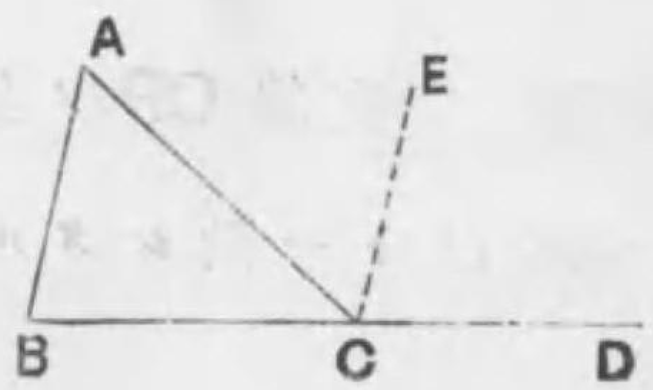
問題 45. 一直線ガ二ツノ平行直線ト交リテナス錯角ヲ二等分スル二直線ハ互ニ平行ニシテ,同傍內角ヲ二等分スル二直線ハ互ニ垂直ナリ.

57. 定理 23. 三角形の三つの角の和は二直角に等し.

$\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$

ナルベシ.



證明 邊 BC ヲ C ノ方ヘ延長シ之ヲ CD トス,C ヨリ邊 BA ト同方向ヲ有スル半直線 CE ヲ引ケ. 然ルトキハ

$\angle A=\angle ACE,\ \angle B=\angle ECD$ (定理 22 及系1)

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C=\angle ACE+\angle ECD+\angle ACB$

然ルニ BCD ハ一直線ナルヲ以テ

$\angle ACE+\angle ECD+\angle ACB=2\angle R$ (定理1系3)

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$

系 1. 三角形の外角は其內對角の和に等し.

系 2. 直角三角形の二つの鋭角は互に餘角をなす.

系 3. 一つの三角形の二角が夫夫他の一つの三角形の二角に等しければ各三角形の第三角も亦相等し.

系 4. 二つの三角形に於て二角が夫夫相等しく,其中の一組の相等しき角に對する邊が相等しきときは此二つの三角形は相等し.

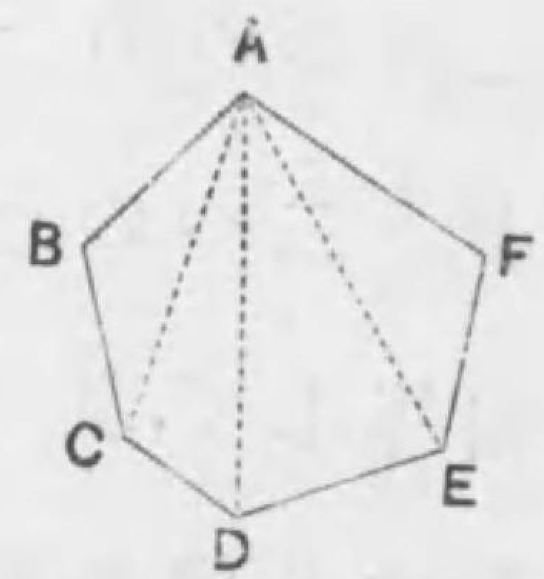
系 5. 斜邊と一つの鋭角とが夫夫相等しき二つの直角三角形は相等し.

58. 定理 24. 多角形の總ての內角の和は邊の數より2少なる數を二直角に掛けたるものに等し.

例ヘバ ABCDEF ヲ六邊形トスレバ其總テノ內角ノ和ハ2直角ノ(6—2)倍即チ4倍ニ等シカルベシ.

證明 一ツノ頂點Aヨリ對角線ヲ引ケバ六邊形ハAヲ頂點トスル(6—2)個即チ4個ノ三角形ニ分タル.

而シテ此等ノ三角形ノ總テノ內角ノ和ハ此六邊形ノ各內角ノ和ニ等シ.



サテ三角形ノ內角ノ和ハ $2\angle R$ ニ等シキユヱ(定理23), 4個ノ三角形ノ內角ノ和ハ $2\angle R$ ノ四倍即チ $8\angle R$ ニ等シ.

系 1. 邊の數が相等しき二つの正多角形の一つの內角は相等し.

系 2. 多角形の各邊を順次に延長するときに生ずる,すべての外角の和は四直角に等し.

問題 46. 三角形ノ一ツノ角ガ他ノ二ツノ角ノ和ヨリ小ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ其角ハ鋭角,直角或ハ鈍角ナリ.

問題 47. 三角形ノ一ツノ底邊ト其底角ノ二等分線トニテ爲ス三角形ハ鈍角三角形ナリ.

問題 48. 正三角形ヨリ正十二邊形マデノ各正多角形ニ付テ其一ツノ頂點ニ於ケル外角ト內角トヲ求メヨ.

問題 49. 或正多角形ノ一ツノ內角ガ外角ノ三倍ニ等シトイフ. 此正多角形ノ邊數ヲ求メヨ.

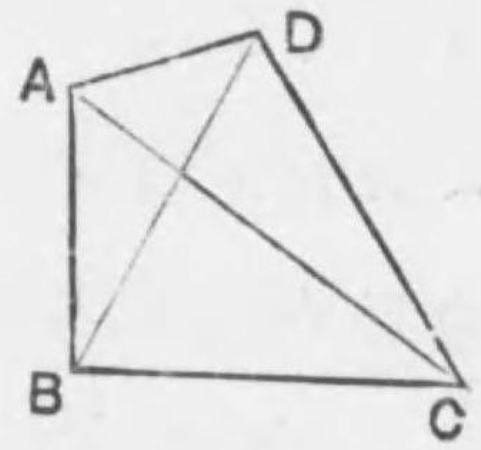
問題 50. 二等邊三角形ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行ナリ.

問題 51. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ニ垂直ナル直線ガ他ノ二ツノ邊又ハ其延長ト夫夫 P 及 Q ニ於テ交ルトキハ線分 AP ハ線分 AQ ニ等シ.

問題 52. 三角形 ABC ノ角 B ノ二等分線ト C ニ於ケル外角ノ二等分線トノ交點ヲ D トスレバ角 BDC ハ角 A ノ半分ニ等シ.

平行四邊形

59. 定義 四邊形ノ四邊ノ中デ相隣ラザル二邊ヲ**相對する邊**トイフ. 又其四ツノ角ノ中デ相隣ラザル二角ヲ**相對する角**トイフ.

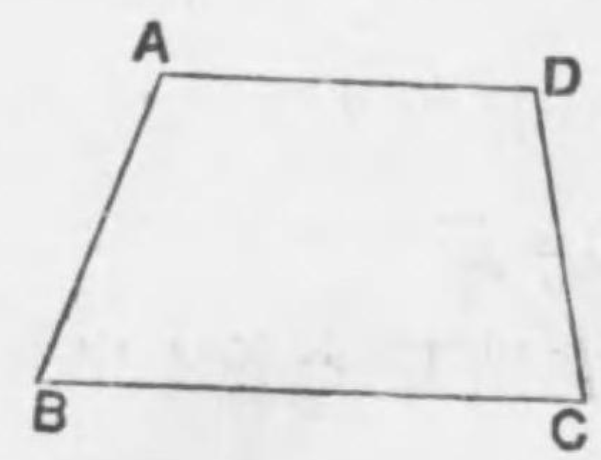


例ヘバ上圖ノ四邊形 ABCD ニ於テ AB ト CD ト; BC ト AD トガ夫夫相對スル二邊ニシテ, ∠A ト ∠C ト; ∠B ト ∠D トガ相對スル二角ナリ.

四邊形ニハ對角線ガ二ツアリ,即チ二組ノ相對スル二角ノ頂點ヲ結付クル二ツノ線分之レナリ.

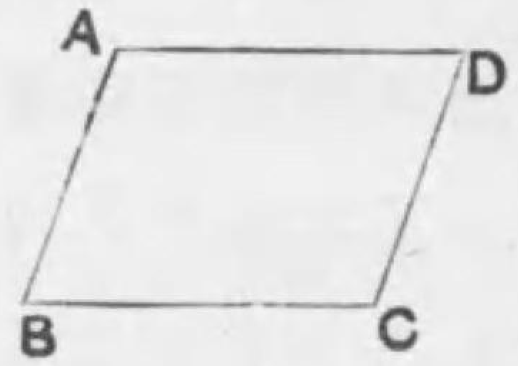
例ヘバ上圖ニ於ケル AC, BD ガ四邊形 ABCD ノ對角線ナリ.

60. 定義 一組ノ相對スル二邊ガ互ニ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイフ. 而シテ此互ニ平行ナル二邊ノ各ヲ梯形ノ底トイフ.



例ヘバ前ノ圖 ABCD ハ梯形ニシテ AB, CD ガ其底ナリ.

61. 定義 二組ノ相對スル二邊ガ夫夫互ニ平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**トイフ.



例ヘバ右ノ圖ニ示セル四邊形 ABCD ノ如シ.

62. 定理 25. 平行四邊形に於て

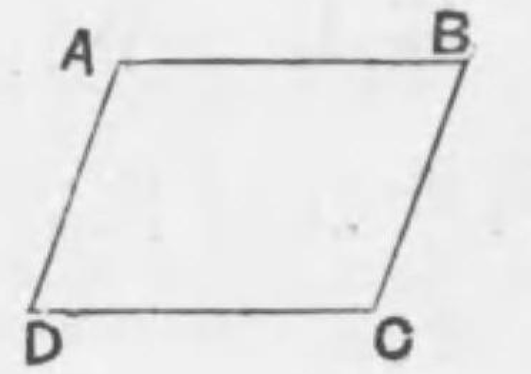
(第一) 相對する角は相等しく,相隣れる角は互に補角をなす.

(第二) 相對する邊は相等し.

(第三) 對角線の交點は其各の中點なり.

ABCD ヲ平行四邊形ナリトセヨ. 然ルトキハ (第一) 角Aト角Cト, 角Bト角Dトハ夫夫相等シカルベク,相隣レル二角例ヘバ AトBトハ互ニ補角ヲナスベク; (第二) AB, BC ハ夫夫 CD, AD ニ等シカルベク; (第三) 二ツノ對角線 AC, BD ノ交點 O ハ各ノ中點ナルベシ.

第一の證明 $AB \parallel CD,\ BC \parallel AD$



$\therefore\ \angle B+\angle C=2\angle R$ (定理22系1)

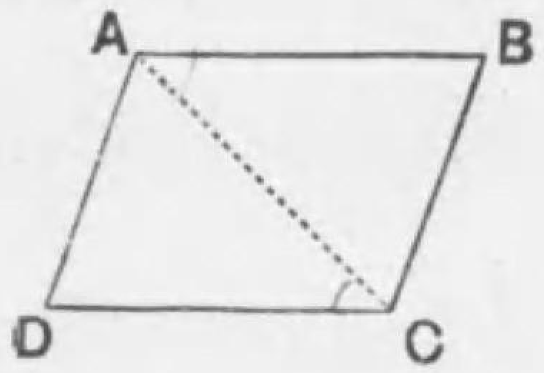
$\angle A+\angle B=2\angle R$

$\therefore\ \angle A+\angle B=\angle B+\angle C$

$\therefore\ \angle A=\angle C$

同樣ニ $\angle B=\angle D$

第二の證明 A ト C トヲ結付クレバ $\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トニ於テ



$AB \parallel CD,\ BC \parallel DA$

$\therefore\ \angle CAB=\angle ACD$

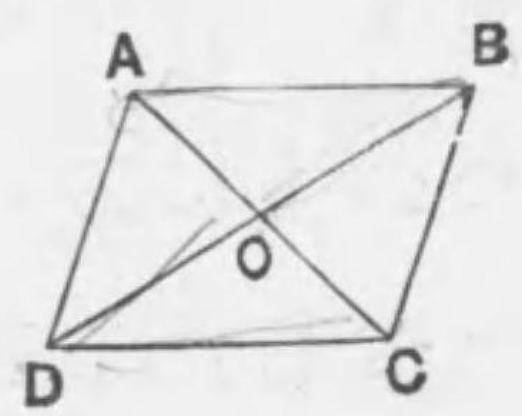
$\angle ACB=\angle CAD$

AC ハ共通

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (定理 7)

$\therefore\ AB=CD,\ BC=DA$

第三の證明 $\triangle AOB$ ト $\triangle COD$ トニ於テ上ノ證明ニヨリテ



$AB=CD$

然ルニ $AB \parallel CD$

$\therefore\ \angle OAB=\angle OCD$

$\angle OBA=\angle ODC$

$\therefore \quad \triangle AOB \equiv \triangle COD$ (定理7)

$\therefore \quad AO=CO, \quad BO=DO$

系 1. 平行四邊形の一つの角が直角なれば他の三つの角も亦直角なり.

定義 スベテノ角ガ直角ナル平行四邊形ヲ**矩形**トイフ.

系 2. 平行四邊形の相隣れる二邊が相等しければ其總ての邊は互に相等し.

定義 邊ガ總テ互ニ相等シキ平行四邊形ヲ**菱形**トイフ.

定義 邊ガ總テ互ニ相等シキ矩形ヲ**正方形**或ハ**平方形**トイフ. 正方形ハ矩形ニシテ且ツ菱形ナリ.

系 3. 互に平行なる二直線の中の一つの上にある任意の點より他の直線に下したる垂線の長さは不易なり.

定義 平行二直線ノ中ノ一ツノ上ノ點ヨリ他ノ直線ニ下シタル垂線ノ長サヲ此平行**二直線間の距離**トイフ.

平行四邊形ノ四邊ノ中ノ何レニテモ其**底邊**ト看做スヲ得,而シテ其邊ト之ニ對スル邊トノ間ノ距離ヲ其**高さ**トイフ.

梯形ノ二ツノ底ノ間ノ距離ヲ梯形ノ**高さ**トイフ.

問題 53. 對角線ガ相等シキ平行四邊ハ矩形ナリ.

問題 54. 平行四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナレバ其平行四邊形ハ菱形ナリ.

63. 定理 26. 一つの四邊形に於て

(第一) 相對する角が夫夫相等しきとき.

(第二) 相對する邊が夫夫相等しきとき.

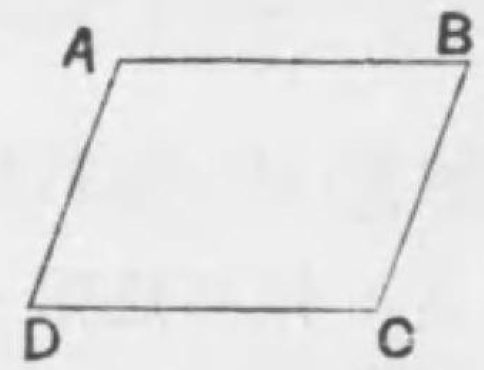
(第三) 一組の相對する邊が相等しく且つ互に平行なるとき.

(第四) 二つの對角線が互に二等分するとき.

此四邊形は平行四邊形なり.

四邊形 ABCD ニ於テ (第一) $\angle A=\angle C, \angle B=\angle D$ 或ハ (第二) $AB=CD, BC=AD$ 或ハ (第三) $AB \mathrel{\overset{/\!/}{=}} CD$ 或ハ (第四) AC ト BD トガ互ニ點 O ニ於テ二等分スルトセヨ. 然ルトキハ此四ツノ何レノ場合ニ於テモ, ABCD ハ平行四邊形ナルベシ.

第一の證明 假定ニヨリ



$\angle A=\angle C$

$\angle B=\angle D$

$\therefore \angle A+\angle B=\angle C+\angle D$

然ルニ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R$ (定理 24)

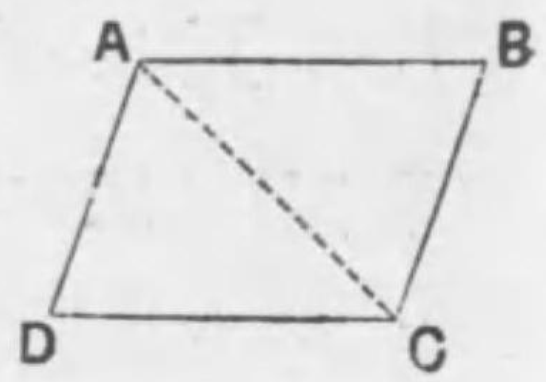
$\therefore \angle A+\angle B=2\angle R$

$\therefore AD \parallel BC$ (定理 21 系 2)

同様ニ $AB \parallel CD$

即チ四邊形 ABCD ハ平行四邊形ナリ.

第二の證明 對角線 AC ヲ引ケ. 然ルトキハ $\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トニ於テ



$AB=CD$

$BC=DA$ (假定)

AC ハ共通

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (定理 10)

$\therefore \angle ACB=\angle CAD$

$\therefore BC \parallel AD$ (定理 21 系)

又 $\angle CAB=\angle ACD$

$\therefore AB \parallel CD$ (定理 21 系)

即チ四邊形 ABCD ハ平行四邊形ナリ.

第三の證明 $\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トニ於テ

$AB=CD$ (假定)

AC ハ共通

$\angle CAB=\angle ACD$ ($\because AB \parallel CD$)

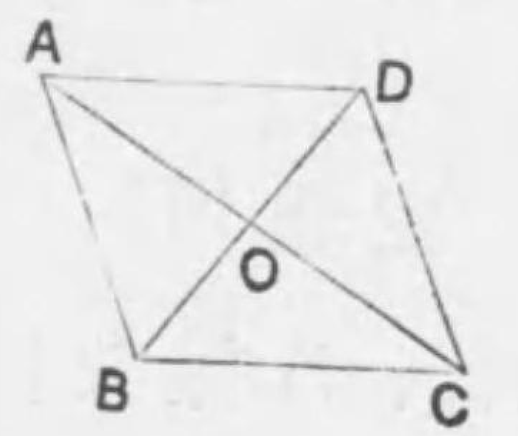
$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (定理 6)

$\therefore \angle ACB=\angle CAD$

$\therefore BC \parallel AD$

即チ四邊形 ABCD ハ平行四邊形ナリ.

第四の證明 $\triangle AOB$ ト $\triangle COD$ トニ於テ



$AO=CO$ (假定)

$BO=DO$ (假定)

$\angle AOB=\angle COD$ (定理 2)

∴ $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (定理6)

∴ $\angle ABO = \angle CDO$

∴ $AB \parallel CD$ (定理21系2)

同樣ニ $\angle BCO = \angle DAO$

∴ $BC \parallel AD$ (定理21系2)

卽チ ABCD ハ平行四邊形ナリ.

問題 55. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル二邊 AB 及 CD ノ各ノ中點ヲ其對邊ノ兩端ニ結付クル四ツノ線分ハ平行四邊形ヲナス.

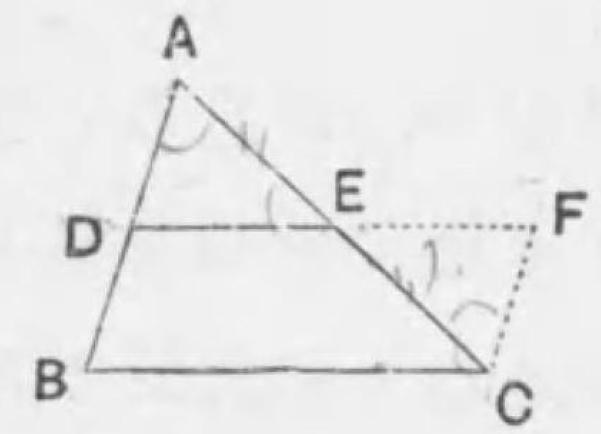
問題 56. 平行四邊形 ABCD ノ四邊 AB, BC, CD, DA ノ各ノ上ニ夫夫相等シキ線分 AK, BL, CM, DN ヲ取レバ,四邊形 KLMN モ亦平行四邊形ナリ.

問題 57. 梯形ノ平行セザル二邊ガ相等シキトキハ其相對スル角ハ互ニ補角ヲナス.

64. 定理 27. 三角形の二邊の中點を結付くる線分は第三邊に平行にして且つ其半分に等し.

△ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫夫D, E トセヨ. 然ルトキハ DE ハ BC ニ平行ニシテ且ツ其半分ニ等シカルベシ.

證明 DE ヲ延長シ, C ヨリ BA ニ平行ニ引キタル直線ト點 F ニ於テ交ラシメヨ.



然ルトキハ △ADE ト △CFE トニ於テ

$AE = EC$ (假定)

$\angle AED = \angle CEF$ (定理2)

$\angle DAE = \angle FCE$ ($\because AB \parallel CF$)

∴ $\triangle ADE \equiv \triangle CFE$ (定理7)

∴ $AD = CF$

然ルニ $AD = DB$ (假定)

∴ $CF = DB$

而シテ $CF \parallel DB$ (作圖) ナルユヱ, BDFC ハ平行四邊形ナリ (定理26).

∴ $DE \parallel BC$

次ニ $\triangle ADE \equiv \triangle CFE$ (定理7)

∴ $DE = EF$

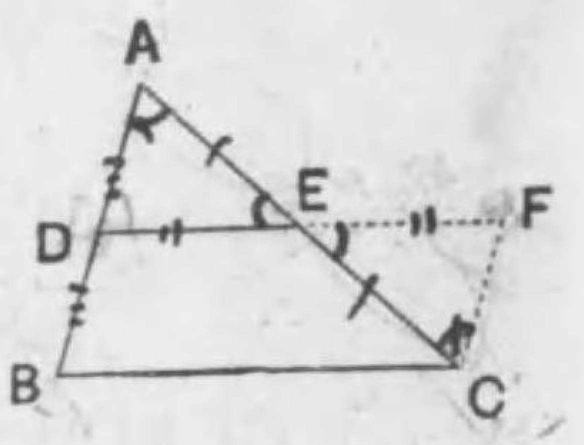
∴　$DE=\frac{1}{2}DF$

然ルニ　$DF=BC$　（定理25）

∴　$DE=\frac{1}{2}BC$

問題 58. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結付クルトキ生ズル四邊形ハ平行四邊形ニシテ,其周ハ此四邊形ノ對角線ノ和ニ等シ.

65.　定理 28. 三角形の一つの邊の中點より他の邊に平行に引きたる直線は第三邊の中點を通る.



△ABC ノ邊 AB ノ中點 D ヨリ邊 BC ニ平行ニ引キタル直線ハ邊 AC ノ中點ヲ通ルベシ.

證明　此 BC ニ平行ナル直線ト AC トノ交點ヲ E トシ, C ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ, DE ノ延長ト F ニテ交ラシメヨ.

然ルトキハ BCFD ハ平行四邊形ナリ.

∴　$DB=CF$　（定理25）

然ルニ　$BD=AD$　（假定）

∴　$AD=CF$

又　$\angle DAE=\angle FCE$

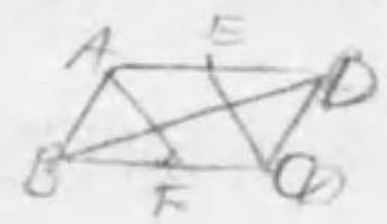
$\angle EDA=\angle EFC$

∴　$\triangle ADE\equiv\triangle CFE$　（定理7）

∴　$AE=CE$

卽チ E ハ AC ノ中點ナリ.

問題 59. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル邊 AD, BC ノ中點ヲ夫夫 E, F トスレバ AF, CE ハ對角線 BD ヲ三等分ス.

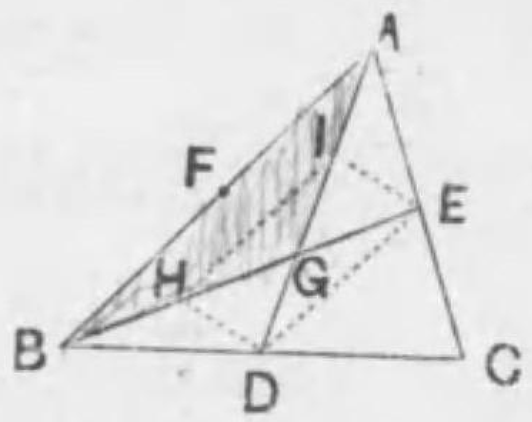


66.　定義　三角形ノ一ツノ頂點ト其對邊ノ中點トヲ結付クル線分ヲ三角形ノ**中線**トイフ.

67.　定理 29. 三角形の三つの中線は同一の點を通る,而して其點と各頂點との距離は其頂點を通る中線の三分の二に等し.

證明　△ABC ノ三ツノ中線ヲ AD, BE, CF トセヨ.

點Bト點EトハAD ノ兩方ニ一ツ宛アルユエ,ADトBEトハ相交ル. ソコデ其交點ヲGトシ, BGトAGトノ中點ヲ夫夫H及Iトシ; HトIト; IトEト; EトDト; DトHトヲ結付ケヨ. 然ルトキハ



$$HI \parallel AB, \quad HI=\tfrac{1}{2}AB \qquad \text{(定理 27)}$$

又 $$DE \parallel AB, \quad DE=\tfrac{1}{2}AB \qquad \text{(定理 27)}$$

$$\therefore \quad HI \mathrel{\underline{\parallel}} DE$$

故ニ DEIH ハ平行四邊形ナリ　(定理 26)

$$\therefore \quad GI=GD, \quad GH=GE \qquad \text{(定理 25)}$$

$$\therefore \quad AG=\tfrac{2}{3}AD, \quad BG=\tfrac{2}{3}BE$$

同樣ニ AD ト CF トノ交點ト A トノ距離ハ AD ノ三分ノ二ニ等シ.

因テ AD, BE, CF ハ同一ノ點 G ヲ通ル.

定義　三角形ノ三ツノ中線ノ交點ヲ名ヅケテ三角形ノ**重心**トイフ.

問題 60. 二ツノ中線ガ相等シキ三角形ハ二等

邊三角形ナリ.

問題 61. △ABC ノ重心 G ト頂點 A トヲ結付ケタル直線ヲ G ノ方ヘ AG ニ等シク H マデ延長シ,三點 B, G, H ヲ頂點トスル三角形ヲ作レバ,其三邊ハ夫夫△ABC ノ中線ノ三分ノ二ニ等シ.

68. 定理の假設及終結

一般ニ

甲なれは乙なり……………………(1)

ナル形式ヲ有スル定理ニ於テ甲ヲ此定理ノ**假設**トイヒ,乙ヲ其**終結**トイフ.

69. 逆定理

前節ニ述ベタル形式(1)ヲ有スル定理ト其假設ナル甲ト其終結ナル乙トヲ入レ換ヘタル形式即チ

乙なれは甲なり……………………(2)

トイフ形式ノ定理トハ**互に逆なり**トイフ. 或ハ其中ノ一ツヲ他ノ定理ノ**逆定理**トイフ.

例　次ノ二定理ハ互ニ逆ナリ.

「三角形の二邊が相等しければ其對角は相等し」

(定理 8 ノ言ヒ換ヘ)

「三角形の二角が相等しければ其對邊は相等し」
(定理9ノ言ヒ換ヘ)

注意 1. 逆定理ニ對シテ原ノ定理ヲ本定理トイフコトアリ.

注意 2. 一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタル者ハ必ズシモ眞ナラズ. 故ニ或定理ト其逆定理トハ別別ニ證明スルコトヲ要スル者ナリ.

例ヘバ 「菱形の對角線は互に垂直なり」トイフ定理ハアレドモ,「對角線が互に垂直なる四邊形は菱形なり」トイフ定理ハナシ,ソハ菱形ニアラズトモ其對角線ガ互ニ垂直ナル者アリ得ベケレバナリ.

70. 或定理の對偶

「菱形の對角線は互に垂直なり」トイフ定理ヲ言ヒ換ヘテ「對角線が互に垂直ならざれば菱形にあらず」トスルコトヲ得ルガ如ク

甲なれは乙なり……………………………(1)

トイフ定理ヲ言ヒ換ヘテ

乙ならざれは甲ならず……………(3)

トスルコトヲ得.

一般ニ一ツノ定理ノ終結ト反對ノ事柄ヲ假設トシ,其假設ト反對ノ事柄ヲ終結トセル定理ヲ原定理ノ對偶トイフ. 「甲ならず」ノ反對ノ事柄ハ「甲なり」ニシテ「乙ならず」ノ反對ノ事柄ハ「乙なり」ナルユヱ,(1)ト(3)トハ互ニ對偶ナリ.

注意 或定理ノ對偶ハ必ズ眞ナリ. 而シテ或定理ヲ證明スルヨリモ其對偶定理ヲ證明スルコトノ便利ナルコトアリ.

71. 或定理の裏

或定理ノ假設ト反對ノ事柄ヲ假設トシ,其終結ト反對ノ事柄ヲ終結トセル定理ヲ原定理ノ裏トイフ. 例ヘバ

甲なれは乙なり……………………………(1)

ノ裏ハ

甲ならざれは乙ならず…………(4)

ナリ.

注意 1. 或定理ノ裏ハ本定理トハ別別ニ證明スルコトヲ要スル者ナリ.

注意 2. (2)ト(4)トヲ比較スレバ明カナル如ク或定理ノ裏ト同ジ定理ノ逆トハ互ニ對偶ナリ.

問題 62. 是迄學ビタル定理及定理ノ系ノ中ニテ互ニ逆ナル者ヲ擧ゲヨ.

練習第二

問題 63. 直角三角形ノ一ツノ鋭角ガ他ノ鋭角ノ二倍ニ等シキトキハ,其斜邊ハ最小ナル邊ノ二倍ニ等シ.

問題 64. 正方形 ABCD ノ相對スル頂點 A, C ヨリ他ノ頂點 B ヲ通ル任意ノ直線ヘ下セル垂線ノ足ヲ夫夫 A′, C′ トスレバ AA′=BC′ ナリ.

問題 65. ABC, DEF ハ一ツノ頂點 A ヲ共有スル正三角形ナルトキハ線分 BD, CE ハ相等シ.

問題 66. 三角形内ノ一點ヲ一ツノ邊ノ兩端ニ結付クル二線分ノ和ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小サク,此二線分ノナス角ハ此二邊ノナス角ヨリ大ナリ.

問題 67. 三角形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ引キタル中線ガ其角ノ二邊ノ各トナス角ノ中,小ナル邊トナス角ハ大ナル邊トナス角ヨリ大ナリ.

問題 68. 三角形ノ三ツノ中線ノ和ハ三角形ノ周ノ四分ノ三ヨリ大ニシテ,周ヨリ小ナリ.

問題 69. 四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結付クル二ツノ線分ト,對角線ノ各ノ中點ヲ結付クル線分トハ同一ノ點ヲ通ル.

問題 70. BD, CE ハ △ABC ノ中線ニシテ DF ハ D ヲ通リ CE ト同方向ニシテ且ツ之ニ等シキ線分ナリトスレバ △BDF ノ三邊ハ夫夫 △ABC ノ三中線ニ等シ.

問題 71. 二等邊三角形ノ底邊上ニアル任意ノ點ヨリ夫夫他ノ二邊ニ平行ニ引キタル直線ガ他ノ邊ト交リテ出來ル線分ノ和ハ不易ナリ.

若シ底邊ノ延長ノ上ノ點ヨリナラバ如何.

問題 72. 矩形ノ邊ノ上ノ一點ヨリ其二ツノ對角線ヘ下セル垂線ノ和ハ不易ナリ.

問題 73. 一ツノ角ノ二邊ガ夫夫他ノ一ツノ角ノ二邊ニ垂直ナレバ二ツノ角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲナス.

問題 74. 一ツノ角ノ二邊ガ夫夫他ノ角ノ二邊ニ垂直ナレバ,此二ツノ角ノ二等分線ハ互ニ平行

ナルカ,若クハ互ニ垂直ナリ.

ム **問題 75.** △ABC ニ於テ AB>AC ニシテ AD ハ中線ナリトスレバ角 BAD ハ角 CAD ヨリ大ナリ.

問題 76. 梯形ノ平行ナラザル二邊ノ中點ヲ結付クル線分ハ其底ニ平行ニシテ且ツ二ツノ底ノ和ノ半分ニ等シ.

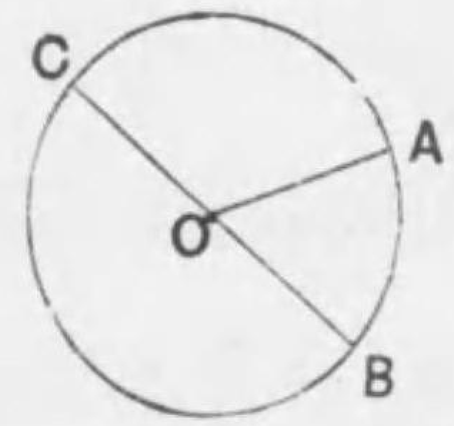
問題 77. 四邊形ノ各ノ角ノ二等分線ニテ出來ル四邊形ノ對角ハ互ニ補角ヲナス.

若シ第一ノ四邊形ガ平行四邊形(若クハ矩形)ナルトキハ第二ノ四邊形ハ如何ナル形トナルカ.

第三編　圓

基本ノ性質

72. 定義 線分ノ一端ヲ~~固定シオキ,此線分ガ一ツノ平面上ヲ離レヌ樣ニ,此端ノ周リニ始終同ジ向キニ之ヲ廻シテ再ビ元ノ位置ニ來ラシムルトキ,他ノ端ガ生ズル線ヲ**圓周**トイヒ,圓周ニテ圍マルル平面形ヲ**圓**トイフ~~.



始メ固定シオキタル端(O)ヲ圓ノ**中心**トイフ. 中心ヨリ圓周マデ引キタル線分(OA)ヲ**半徑**トイヒ,圓ノ中心ヲ通リ其兩端ガ圓周上ニアル線分(BC)ヲ**直徑**トイフ.

圓ヲ示スニハ通例其中心ヲ示ス文字ヲ以テス. 例ヘバ圓 O ノ如シ.

圓周ノ一部分(AB)ヲ圓ノ**弧**トイフ. 合セテ一圓周ヲ成ス二ツノ弧ヲ**互に共軛なり**トイヒ,其大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**トイフ.

弧ヲ示スニハ其兩端ヲ示ス文字ヲ以テスルカ,若クハ其文字ノ間ニ弧ノ上ノ任意ノ一點ヲ示ス文字ヲオク者トス.

例ヘバ弧ACBトイフガ如シ. 時トシテハ之ヲ $\overset{\frown}{ACB}$ ト書クコトアリ.

注意 1. 圓ノ半徑ハ前ニ述ベタル廻轉スル線分ノ一ツノ位置ニ外ナラズ故ニ其長サハ一定ナリ. 又同一ノ直線ヲナス,二ツノ半徑ハ直徑ヲナス,故ニ直徑ノ長サモ一定ニシテ半徑ノ長サノ二倍ニ等シ. 從テ圓ノ中心ハ直徑ノ中點ナリ.

注意 2. 半徑ノ長サ,直徑ノ長サナドイフベキヲ略シテ單ニ半徑,直徑ナドトイフコトアリ.

注意 3. 圓ノ中心ヨリノ距離ガ半徑ノ長サニ等シカラザル點ハ圓周上ニアラズ,即チ其距離ガ半徑ノ長サヨリ大ナル者ハ圓ノ外ニアリテ,半徑ノ長サヨリ小ナル者ハ圓ノ内ニアリ.

注意 4. 圓ノ中心ヨリ引キタル半直線ハ圓周ト唯一ツノ點ニ於テ交ル.

注意 5. 圓ノ中心ヲ通ル直線ト圓周トノ交點ハ二ツアリ,而シテ唯二ツニ限ル.

73. 定理 1. 相等しき半徑を有する二つの圓は相等し.

圓Oト圓O′トヲ相等シキ半徑ヲ有スル二ツノ圓トセヨ. 然ルトキハ此二ツノ圓ハ相等シカルベシ.

證明 圓Oノ平面ヲ圓O′ノ平面ノ上ニ重ネ此平面ヲ離レヌ様ニ圓Oヲ動カシテ其中心ヲ他ノ圓O′ノ中心ノ上ニ重ヌレバ,此二ツノ圓ノ半徑ハ相等シキユエ,此二ツノ圓ノ周ハ同ジ長サノ線分ノ一端ヲ點Oニオキ,之ヲOノ周リニ廻ストキ,他ノ端ガ生ズル線ナレバ相重ナル,故ニ此二ツノ圓ハ相等シ.

系 1. 相等しき圓の半徑は相等し.

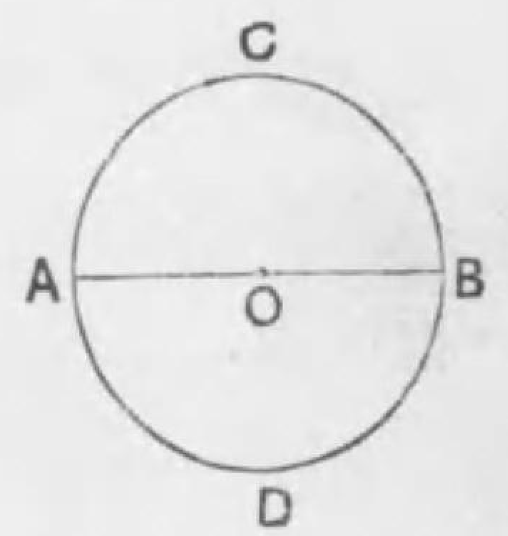
系 2. 一つの圓を其中心の周りに廻しても常に元の位置にありし時の

者と相一致す.

系 3. 同じ圓或は相等しき二つの圓には相等しき弧はあり.

74. 定理 2. 圓の直徑は圓周及圓を二等分す.

證明 圓 O ヲ其中心ノ周リニ廻シ,線分 AB ノ一端 A ヲ他ノ端 B ノ位置ニ來ラシムル時ハ前節系 2 ニヨリテ弧 BCA ハ弧 ADB ノ元ノ位置ニアリシ者ト一致シ,弧 ADB ハ弧 BCA ノ元ノ位置ニアリシ者ト一致スレバナリ.



系 互に垂直なる二つの直徑は圓及圓周を四つの相等しき部分に分つ.

定義 圓周ノ半分ニ等シキ弧ヲ**半圓周**トイヒ,半圓周ノ半分ニ等シキ弧ヲ**四分圓周**或ハ**象限**トイフ.

定義 同一平面上ノ一直線ノ兩側ニ一ツ宛圖形ガアリテ此直線ヲ折目トシテ此平面ヲ折返ストキ一ツノ圖形ガ今一ツノ圖形ニ合スルトキハ此等ノ圖形ヲ**此直線に付て對稱なり**トイフ.

例ヘバ圓ヲ其直徑ニテ分ツトキニ生ズル二ツノ半圓ハ此直徑ニ付テ對稱ナル圖形ナリ.

問題 1. 一定點 P ヲ通リ,且ツ一定直線 AB ノ上ニ中心ヲ有スル總テノ圓周ハ皆他ノ一定點ヲ通ル.

註 定點ガ一ツノ圓周上ニアルトキ,此圓ヲ**此定點を通る圓**トイフコトアリ.

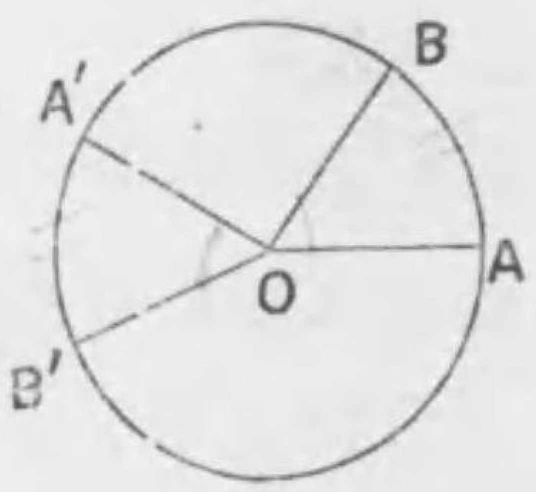
問題 2. 圓內ノ一點ヨリ,其點ヲ通ル直徑ト其兩側ニ於テ,相等シキ角ヲナス二ツノ線分ヲ引キ,圓周ニ終ラシムルトキハ此二ツノ線分ハ相等シ.

75. 定義 圓ノ二ツノ半徑ガナス角ヲ**中心角**トイフ. 中心角ハ其兩邊ノ間ニ夾マルル弧**の上に立つ**トイヒ,又其弧ト中心角トハ**相對す**トイフ.

76. 定理 3. 同じ圓或は相等しき圓に於て,相等しき中心角に對する弧は相等しく,相等しからざる中心角の中の大なる者に對する弧は,小なる者に對する弧より大なり.

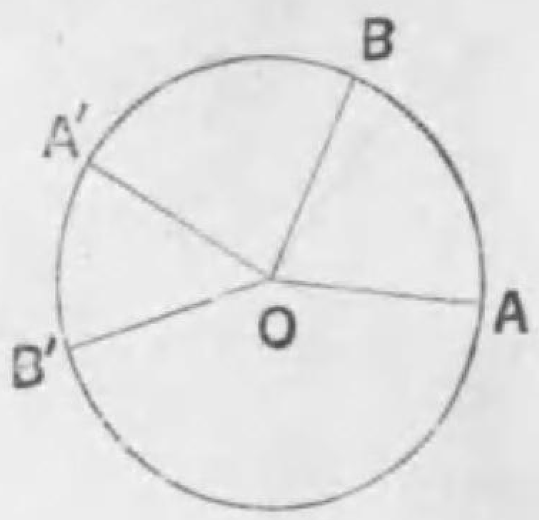
(1) **同じ圓に於ける場合**

(第一) 同ジ圓Oニ於テ中心角AOB, A′OB′ヲ相等シトセヨ. 然ルトキハ $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$ ナルベシ.



證明 中心Oノ周リニ之ヲ廻セバ ∠A′OB′ ヲ ∠AOB ノ最初ノ位置ノ上ニ重ネ合スコトヲ得,從テ $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$ ナリ.

(第二) 同ジ圓Oニ於テ ∠AOB>∠A′OB′ ナレバ $\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$ ナルベシ.



證明 中心Oノ周リニ之ヲ廻シテ ∠A′OB′ ノ一邊ヲ ∠AOB ノ最初ノ位置ノ一邊

ノ上ニ重ネ,且ツ此二ツノ角ガ其邊ノ同ジ側ニアル樣ニオクコトヲ得. 然ルトキハ ∠A′OB′ ノ他ノ邊ハ ∠AOB ノ最初ノ位置ニ於ケル其角ノ內ニ落ツ.從テ $\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$ ナリ.

(2) **相等しき圓に於ける場合**

證明 相等シキ二ツノ圓ハ之ヲ重ネ合スコトヲ得ルヲ以テ上ニ述ベタル同ジ圓ニ於ケル場合ノ證明ニヨリ,相等シキ二ツノ圓ニ於テモ本定理ノ眞ナルコト明カナリ.

系 同じ圓或は相等しき圓に於て,相等しき弧に對する中心角は相等し,相等しからざる弧の中の大なる者に對する中心角は小なる者に對する中心角より大なり.

注意 1. ココニ中心角トアルハ優角ヲモ含ミ,弧トアルハ優弧ヲモ含ム.

注意 2. 是ヨリ後相等シキ圓及同ジ圓ノ兩方ニ付テ眞ナル定理ハ,相等シキ圓カ若クハ同ジ圓ニ付テ之ヲ證明シ一ツダケヲ省クコトトス.

問題 3. 圓 O ニ於テ中心角 AOB ガ中心角 COD ノ二倍ニ等シケレバ $\angle AOB$ ニ對スル弧 AB ハ $\angle COD$ ニ對スル弧 CD ノ二倍ニ等シ.

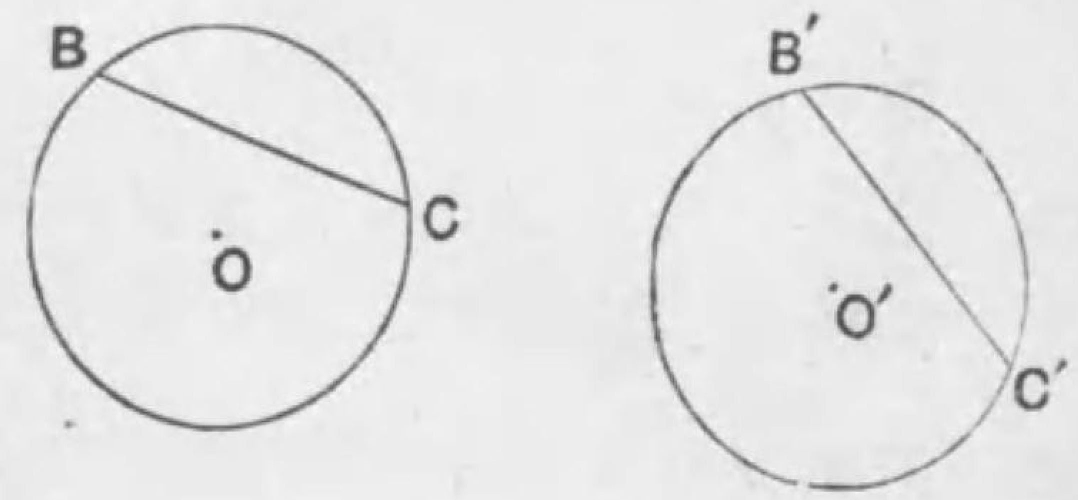
弧及弦

77. 定義 弦トハ圓周上ノ二點ヲ結付クル線分ノコトナリ.

弧ノ兩端ヲ結付クル弦ヲ此弧を張る弦トイフ.

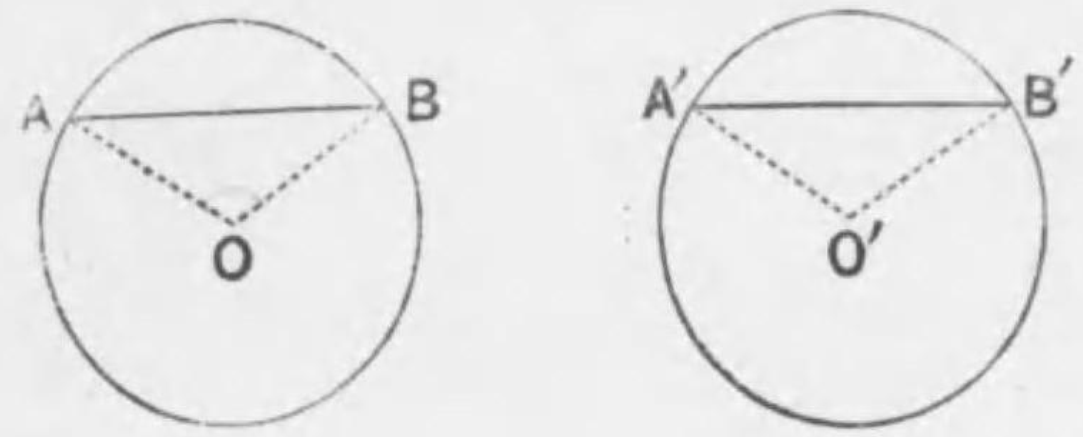
78. 定理 4. 相等しき圓或は同じ圓に於て相等しき弧を張る弦は相等し.

證明 相等シキ二ツノ圓 O ト O′ トニ於テ弧 BC ト弧 B′C′ トガ相等シトセヨ. 然ルトキハ弧 B′C′ ヲ弧 BC ノ上ニ重ネ合スコトヲ得. 從テ之ヲ張ル弦 BC ト B′C′ トハ相合ス,故ニ相等シ.



79. 定理 5. 相等しき圓或は同じ圓に於て相等しき弦が張る弧は相等し.

相等シキ二ツノ圓 O ト O′ トニ於テ弦 AB ト弦 A′B′ トガ相等シトセヨ. 然ルトキハ $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$ ナルベシ.



證明 圓 O ノ弦 AB ノ兩端ト其中心トヲ結付ケ,又圓 O′ ノ弦 A′B′ ノ兩端ト其中心トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ $\triangle AOB$ ト $\triangle A'O'B'$ トニ於テ三邊ガ夫夫相等シキユヱ,此二ツノ三角形ハ相等シ.

$$\therefore \quad \angle AOB=\angle A'O'B'$$

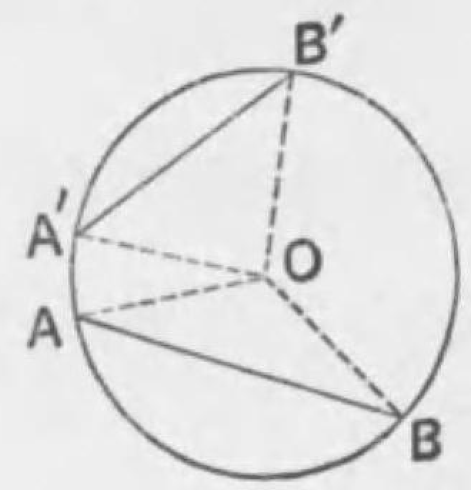
$$\therefore \quad \widehat{AB}=\widehat{A'B'} \quad \text{(定理 3)}$$

80. 定理 6. 相等しき圓或は同じ圓に於て,相等しからざる二つの劣弧

の中の大なる者を張る弦は小なる者を張る弦より大なり.

一ツノ圓Oニ於テ $\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$ ナリトセヨ.

然ルトキハ弦ABハ弦A'B'ヨリ大ナルベシ.



證明 中心OヲA, B, A', B'ノ各ニ結付クレバ

$\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$ (假設)

∴ $\angle AOB>\angle A'OB'$ (定理3系)

故ニ $\triangle AOB$ ト $\triangle A'OB'$ トニ於テ

$OA=OA'$, $OB=OB'$, $\angle AOB>\angle A'OB'$

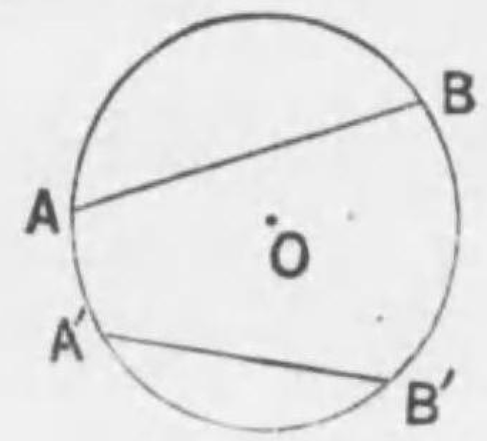
∴ $AB>A'B'$ (第一編定理16)

系 相等しき圓或は同じ圓に於て,相等しからざる二つの優弧の中の大なる者を張る弦は小なる者を張る弦より小なり.

81. 定理7. 相等しき圓或は同じ

圓に於て,相等しからざる二つの弦の中の大なる者が張る劣弧は小なる者が張る劣弧より大なり.

一ツノ圓Oニ於テ弦ABハ弦A'B'ヨリ大ナリトセヨ. 然ルトキハ劣弧ABハ劣弧A'B'ヨリ大ナルベシ.



證明 若シ $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$ ナランニハ

$AB=A'B'$ (定理4)

トナリテ $AB>A'B'$ ナル假設ト矛盾ス.

∴ $\widehat{AB}\neq\widehat{A'B'}$

若シ $\widehat{AB}<\widehat{A'B'}$ ナランニハ

$AB<A'B'$ (定理6)

トナリ,是亦假設ト矛盾ス.

∴ $\widehat{AB}\nless\widehat{A'B'}$

∴ $\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$

注意 優弧ノ場合ニテハ其大小ノ關係ハ劣弧ノ場合ト反對ナリ.

系　同じ圓或は相等しき圓に於て相等しき弦は相等しき中心角に對す.

相等しからざる弦の中の大なる者は大なる中心角に對す.

問題 4.　同ジ圓ニ於テ,一ツノ弧ガ他ノ弧ノ二倍ニ等シキトキハ,第一ノ弧ヲ張ル弦ハ第二ノ弧ヲ張ル弦ノ二倍ヨリ小ナリ.

82.　定理 8.　圓の一つの弦に垂直なる直徑は,此弦及之が張る共軛弧の各を二等分す.

圓 O ノ弦 AB ニ垂直ナル直徑ヲ CD トセヨ.

然ルトキハ CD ハ弦 AB 及之ガ張ル共軛弧ノ各ヲ二等分スベシ.

證明　直徑 CD ヲ折目

トシテ圓 O ノ平面ヲ折返セバ,其一方ニアル半圓 CAD ト他方ニアル半圓 CBD トハ相合ス.(定理 2)

而シテ　$AB \perp CD$　(假設)

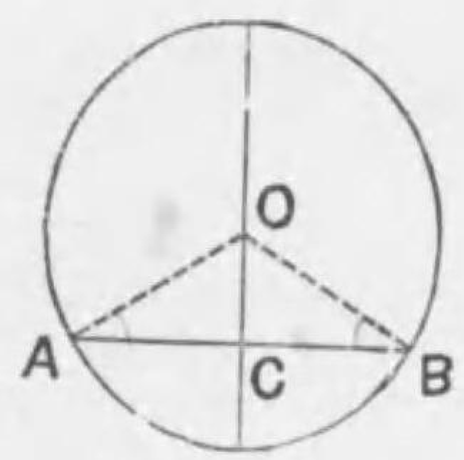
ナルニヨリ其交點ヲ E トスレバ,半直線 EA ハ半直線 BE ノ上ニ重ナリ,從テ點 A ト點 B トハ相重ナル.

因テ　$AE=BE,\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD},\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$

83.　定理 9.　圓の中心と,其直徑ならざる弦の中點とを通る直線は弦に垂直なり.

AB ヲ圓 O ノ直徑ナラザル弦,C ヲ其中點トセヨ.

然ルトキハ直線 OC ハ AB ニ垂直ナルベシ.



證明　半徑 OA, OB ヲ結付ケヨ.

然ルトキハ △ACO ト △BCO トニ於テ三邊ガ夫夫相等シ

$\therefore\ \triangle ACO \equiv \triangle BCO$　(第一編定理 10)

$\therefore\ \angle ACO = \angle BCO$

$\therefore\ OC \perp AB$

系　圓の弦を垂直に二等分する直線は中心を通る.

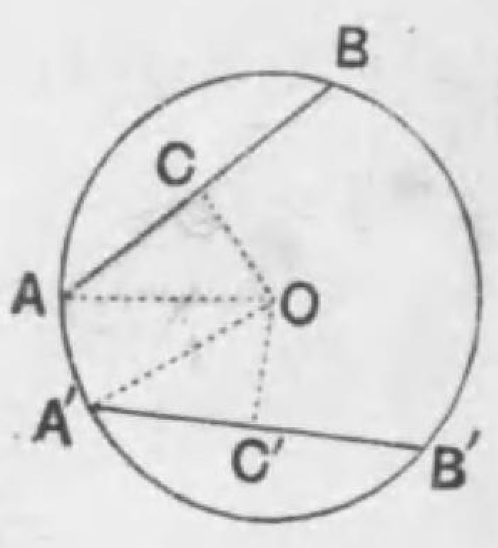
問題 5.　二定點ヲ通ル總テノ圓ノ中心ハ皆此二點ヲ結付クル線分ヲ垂直ニ二等分スル直線上ニアリ.

問題 6.　中心ヲ通ラザル二ツノ弦ガ相交ルトキハ,其交點ハ同時ニ各ノ弦ノ中點ナルコトナシ.

問題 7.　平行ナル二ツノ弦ハ圓周上ニ相等シキ弧ヲ夾ム.

84.　定理 10.　相等しき圓或は同じ圓に於て,(第一)相等しき弦は中心より相等しき距離にあり,(第二) 中心より相等しき距離にある弦は相等し.

證明　圓 O ニ於テ弦 AB ト弦 A′B′ トノ中點ヲ夫夫 C, C′ トシ,之ト中心 O トヲ結付ケヨ.



然ルトキハ

$OC \perp AB,\ OC' \perp A'B'$　(定理 9)

(第一)　$AB = A'B'$　ナレバ

$AC = A'C'$

而シテ　$AO = A'O$

$\therefore\ \triangle OAC \equiv \triangle OA'C'$　(第二編定理 12)

$\therefore\ OC = OC'$

(第二)　$OC = OC'$　ナレバ

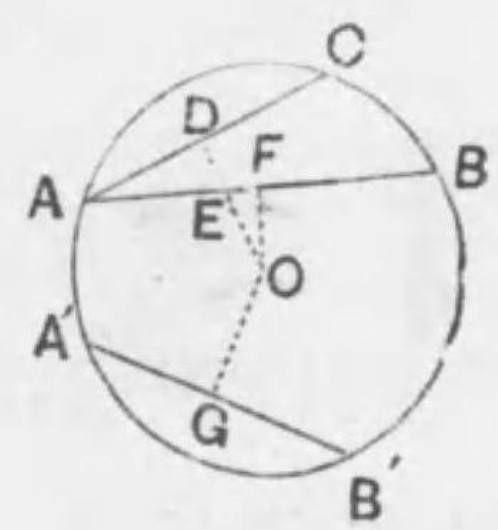
$\triangle OAC \equiv \triangle OA'C'$　(第二編定理 12)

$\therefore\ AC = A'C'$

$\therefore\ AB = A'B'$

85.　定理 11.　相等しき圓或は同じ圓に於て,相等しからざる二つの弦の中の大なる者と中心との距離は,小なる者と中心との距離より小なり.

圓 O ニ於テ弦 AB ハ弦 A′B′ ヨリ大ナリトセヨ.



然ルトキハ AB ト O トノ距離ハ A′B′ ト O トノ距離ヨリ小ナルベシ.

證明　$AB>A'B'$　(假設)

$\therefore$ 劣弧 $AB>$ 劣弧 $A'B'$　(定理7)

ソコデ弧 AB ノ上ニ弧 A'B' ニ等シキ弧 AC ヲ取リ, A ト C トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ弦 AC ト中心 O トハ弦 AB ニ對シ反對ノ側ニアリ,從テ AC ノ中點 D ト O トヲ結付クル線分ハ弦 AB ニ交ル.

ソコデ其交點ヲ E トシ, O ヨリ弦 AB ニ垂線ヲ下シ,其足ヲ F トセヨ. 然ルトキハ

$OD\perp AC$　(定理9)

$OD>OE$

然ルニ　$OE>OF$　(第二編定理18)

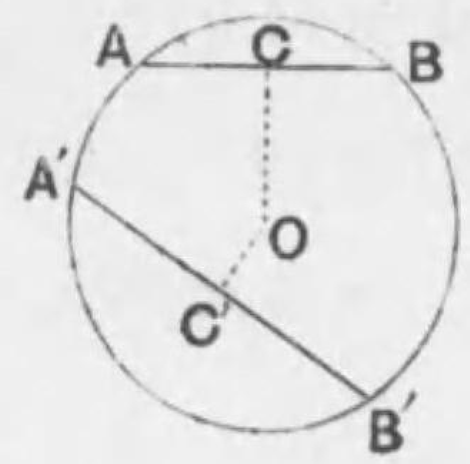
$\therefore$　$OD>OF$

サテ中心 O ヨリ弦 A'B' ニ垂線 OG ヲ引ケバ

$OG=OD$　(定理10)

$\therefore$　$OG>OF$

86.　定理 12.　相等しき圓或は同じ圓の弦の中で,中心よりの距離が大なる者程其長さは小なり.



證明　圓 O ノ中心ヨリ二ツノ弦 AB, A'B' ニ下シタル垂線ノ足ヲ夫夫 C 及 C' トセヨ.

然ルトキハ $OC>OC'$ ナレバ $AB<A'B'$ ナルベシ.

證明　若シ　$AB=A'B'$　ナランニハ

$OC=OC'$　(定理10)

トナリテ　$OC>OC'$　ナル假設ト矛盾ス.

$\therefore$　$AB\neq A'B'$

又　$AB>A'B'$　ナランニハ

$OC<OC'$.　(定理11)

トナリテ是亦假設ト矛盾ス.

$\therefore$　$AB\ngtr A'B'$

$\therefore$　$AB<A'B'$

系　直徑は最も大なる弦なり.

問題 8.　圓内ノ一定點ヲ通ル弦ノ中デ其點ヲ通ル直徑ニ垂直ナル者ガ最モ短シ.

問題 9.　一ツノ圓ニ於テ相等シキ二ツノ弦若クハ其延長ノ交點ヨリ弦ノ兩端マデノ距離ハ二

ツ宛相等シ.

問題 10. AB, CD ハ一ツノ圓ノ相等シキ弦, E,F ハ夫夫 AB, CD ノ上ノ點ニシテ AE=CF トス. 然ルトキハ線分 EF ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

割線及切線

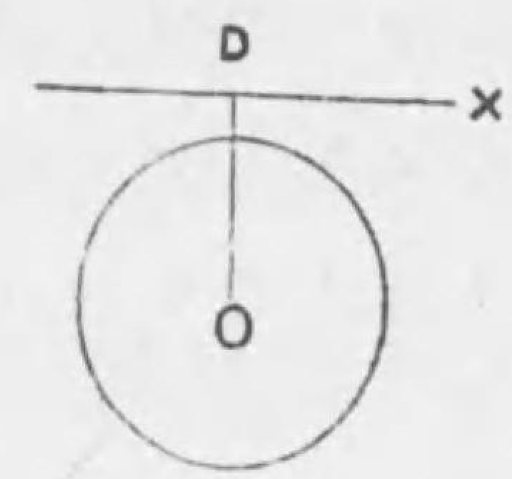
87. 定理 13. 圓の中心と直線との距離が

(第一) 半徑より大なれば,此直線と圓周とに共有なる點はなし.

(第二) 半徑に等しければ,此直線と圓周とに共有なる點は一つは必ずあり,而して唯一つに限る.

(第三) 半徑より小なれば,此直線と圓周とに共有なる點は二つは必ずあり,而して唯二つに限る.

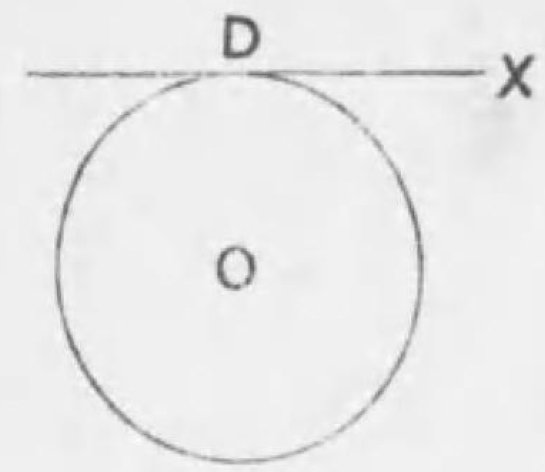
圓Oノ中心ヨリ直線Xヘノ垂線ノ足ヲDトス.



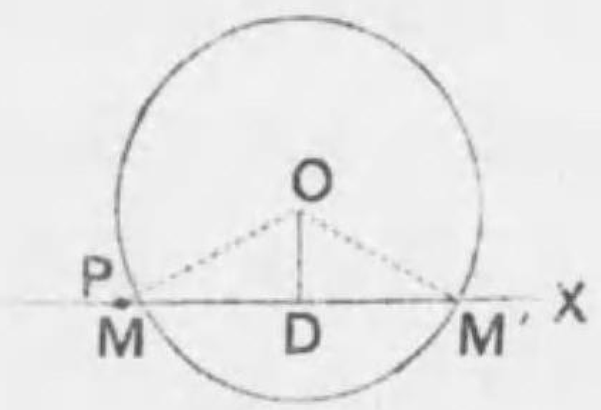
第一の證明 OD>半徑ナルユヱ,點DハOノ外ニアリ. 而シテ直線X上ノ其他ノ點トOトノ距離ハ皆ODヨリ大ナルユヱ(第二編定理18), 點Dノ他ノ點モ皆圓ノ外ニアリ.

因テ直線Xト圓Oノ周トニハ共有點ナシ.

第二の證明 OD=半徑ナルユヱ,點Dハ圓Oノ周ノ上ニアリ. 而シテ直線X上ノ其他ノ點ト中心トノ距離ハ,スベテOD(卽チ半徑)ヨリ大ナルユヱ,點Dヨリ他ノ點ハ總テ圓ノ外ニアリ.



因テ直線Xト圓Oノ周トノ共有點ハDダケニシテ其他ニハナシ.



第三の證明 OD<半徑ナルユヱ,點Dハ圓Oノ內ニアリ. 今直線Xノ上ニ於テ點Dヨリ圓ノ半徑ヨリ大ナル距離ニアル點

Pヲ取レバPOハPDヨリ大ナルユヱ,點Pハ圓Oノ外ニアリ. 因テ直線Xハ圓Oノ内ニアル點Dト圓Oノ外ニアル點Pトヲ通ル直線ナルユヱ,此直線ト圓ノ周トニハ共有點アリ. 之ヲMトセヨ.

同様ニ直線X上ニ於テ點Dニ關シテMトハ反對ノ側ニアル半直線ト圓周トニモ共有點アルコトヲ知ル. 之ヲM′トセヨ.

ソコデ半徑OM, OM′ヲ引ケ. 點Oヨリ直線Xヘ此等ニ等シキ斜線ハ此外ニ引クコトヲ得ザルユヱ(第二編定理18系),直線Xト圓Oノ周トニハ二點M, M′ノ外ニハ共有點ナシ.

系 1. 一つの直線と一つの圓周とには二つより多くの共有點なし.

定義 圓周ト二點ヲ共有スル直線ヲ圓ノ**割線**トイヒ,割線ハ圓周ニ交るトイフ.

定義 圓周ト唯一點ヲ共有スル直線ヲ圓周に切する直線或ハ**圓の切線**トイヒ,其共有點ヲ**其切點**トイフ.

系 2. 半徑の端に於て之に垂直な

る直線は此點に於て圓周に切す.

系 3. 切線は其切點へ引ける半徑に垂直なり.

系 4. 圓内の一點を通る直線は圓の割線なり.

系 5. 圓周上の一點に於ける切線は必ず唯一つあり.

系 6. 圓周と直線とに共有點がなければ此圓の中心と此直線との距離は半徑より大なり. 圓の割線と中心との距離は半徑より小なり.

問題 11. 一ツノ圓ニ於テ互ニ相等シキ總テノ弦ハ皆此圓ト同心ナル他ノ一ツノ圓ノ周ニ切ス.

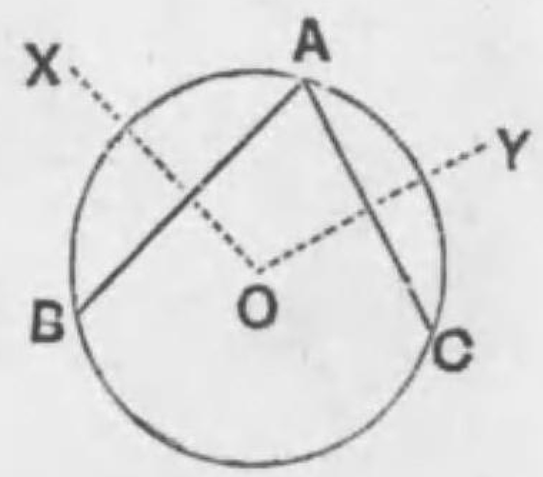
定義 一ツノ圓ト同心なる圓トハ此圓ノ中心ヲ中心トスル他ノ圓ノコトナリ.

問題 12. 圓ノ切線ニ平行ナル弦ガ張ル一ツノ弧ハ其切線ノ切點ニヨリテ二等分セラル.

問題 13. 一直線ガ二ツノ同心圓ノ各ノ周ト交ルトキ,此二圓周ノ間ニ夾マルル,ソレノ二ツノ線分ハ相等シ.

二ツノ圓ノ位置ノ關係

83. 定理 14. 同一直線上にあらざる三點を通る圓周は一つは必ずあり,而して唯一つに限る.



證明 A, B, C ヲ同一直線上ニ在ラザル三點トセヨ.

線分 AB ヲ垂直ニ二等分スル直線Xト,線分 AC ヲ垂直ニ二等分スル直線Yトハ,相交ル二直線ニ夫夫垂直ナルガユヱニ相交ル(第二編定理22系5). ソコデ其交點ヲOトセヨ. Oハ直線Xノ上ニアルガユヱニ,AトBトヨリ相等シキ距離ニアリ.(第二編定理6系)

又OハYノ上ニアルガユヱニ,AトCトヨリ相等シキ距離ニアリ.

故ニOハ三點A, B, Cヨリ相等シキ距離ニアリ. 因テOヲ中心トシ,OAヲ半徑トスル圓ノ周ハ三點 A, B, C ヲ通ル. 故ニ此三點ヲ通ル圓ハ少ナクモ一ツアリ.

次ニ三點A, B, Cヲ通ル圓ノ中心ハAトBトヨリ相等シキ距離ニアルベキガユヱニ,直線Xノ上ニアラザルベカラズ.(第二編定理10系2)

又箇樣ナル圓ノ中心ハ直線Yノ上ニアラザルベカラズ.

故ニ三點 A, B, C ヲ通ル圓ノ中心ハ二直線XトYトノ上ニアラザルベカラズ. 然ルニXトYトハ唯一ツノ共有點Oヲ有スルノミ.

故ニ三點A, B, Cヲ通ル圓ノ中心ハOヨリ外ニナシ. 而シテ其半徑ハOAニ等シカラザルコト能ハズ. 故ニ三點A, B, Cヲ通ル圓周ハ唯一ツニ限ル.

系 1. 三點を共有する二つの圓周は相一致す.

系 2. 相一致せざる二つの圓周は二つより多くの點を共有すること能

はず.

注意　圓ガ幾ツモアリテ,中心ノ文字ダケニテハ紛ラハシキトキハ,圓周上ニ在ル三點ヲ示ス文字ヲ列記スルモノトス,例ヘバ圓 ABC ノ如シ.

系 3.　三角形の三項點を通る圓周は一つは必ずあり,而して唯一つに限る.

定義　箇樣ナル圓ヲ此三角形ノ**外接圓**トイフ,而シテ此圓ノ中心ヲ三角形ノ**外心**トイフコトアリ.

系 4.　三角形の各邊を垂直に二等分する直線は同一點を通る.

問題 14.　圓內ノ一點ヨリ圓周ヘ引ケル三ツノ線分ガ互ニ相等シケレバ此點ハ此圓ノ中心ナリ.

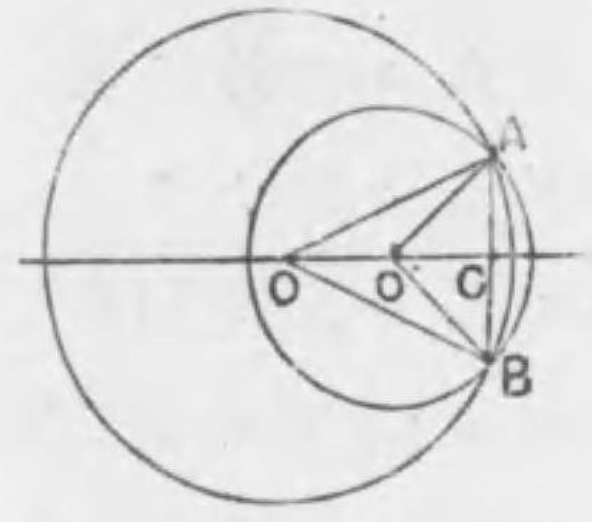
問題 15.　三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ通ル.

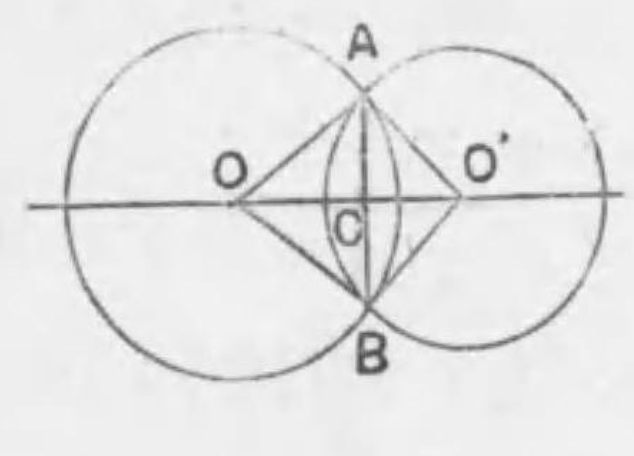
定義　此三ツノ垂線ガ通ル同一ノ點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ.

89. 定理 15.　二つの圓周が其中心を通る直線上に在らざる一點を共有するときは,此二つの圓周は亦他の一點を共有す,而して其二つの共有點を結付くる線分は二つの圓の中心を通る直線によりて垂直に二等分せらる.

證明　二ツノ圓ノ中心ヲ夫夫 O, O′ トシ, A ヲ此兩圓周ノ共有點トセヨ.

A ヨリ直線 OO′ ヘ垂線 AC ヲ下シ,之ヲ延長シテ AC ニ等シク CB ヲ取レバ OO′ ハ AB ニ垂直ニシテ且ツ其中點 C ヲ通ルガユヱニ,線分 OA, O′A ハ夫夫線分 OB, O′B ニ等シ(第二編定理6系).



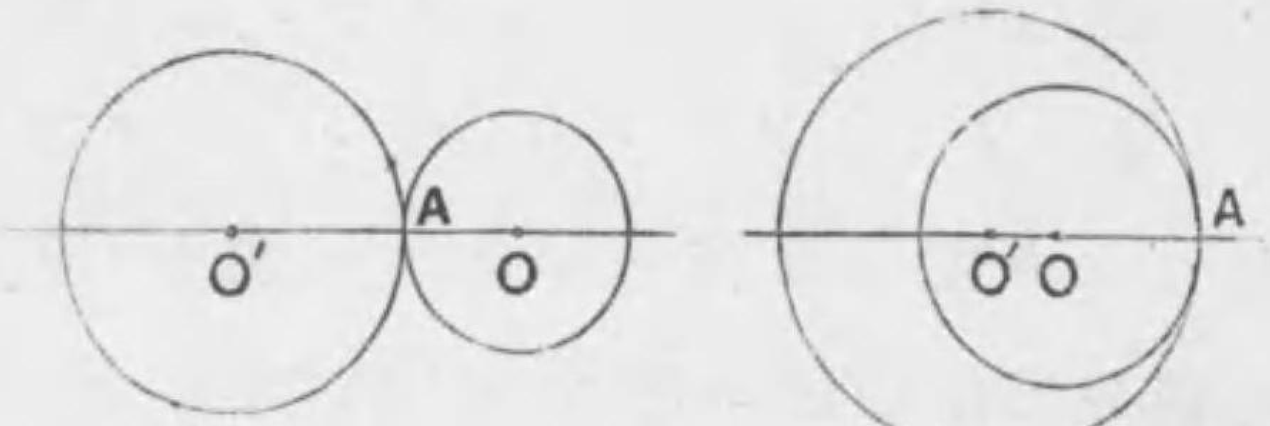


然ルニ OA ハ圓 O ノ半徑ニシテ O′A ハ圓 O′ ノ半徑ナリ. 故ニ OB ハ圓 O ノ半徑, O′B ハ圓 O′ ノ

半徑ナリ．故ニBハ同時ニ二ツノ圓周上ニアリ，即チ其共有點ナリ．而シテABハOO′ニヨリテ垂直ニ二等分セラル．

定義　相一致セザル二ツノ圓周ガ二點ヲ共有スルトキ,此二ツノ圓周は**相交る**トイフ．

系 1.　相一致せざる二つの圓周が其中心を通る直線上の一點を共有するときは,此二つの圓周は其他の點を共有せず．



證明　假リニ二ツノ圓周ニAヨリ外ノ共有點アリトセンニ,若シ夫レガOO′上ノ點ナランニハ二ツノ圓ハ同ジ直徑ヲ有スル圓ニシテ相一致ス．

若シ夫レガOO′上ニアラザル點トスレバ,此二圓周ハ矢張OO′上ニ在ラザル他ノ一點ヲ共有セザルベカラズ（本節定理），從テ三點ヲ共有スルガユヱニ此二ツノ圓周ハ相一致セザルベカラズ．

故ニ此二ツノ圓ガ相一致スルニ非レバAヨリ外ノ點ヲ共有スルコトナシ．

定義　二ツノ圓周ガ唯一點ヲ共有スルトキ此二ツノ圓周ハ**相切す**トイヒ,其共有點ヲ**其切點**トイフ．此場合ニ於テ切點ガ二ツノ圓ノ中心間ニアルトキハ互ニ**外切す**トイヒ,切點ガ二ツノ中心ノ各ニ對シ同ジ側ニアルトキハ互ニ**內切す**トイフ．

注意　二ツノ相等シキ圓ガ相切シ且ツ其二ツノ中心ガ切點ノ同ジ側ニアルトキハ此二圓ハ相一致ス．以後箇樣ナル場合ハ互ニ內切スル二ツノ圓ノ特別ナル場合ナリト看做ス．

系 2.　二つの圓周が相切するときは,其切點は二つの圓の中心を通る直線上にあり．

系 3.　二つの圓周が相切するときは二つの圓は切點に於て一つの切線を共有す．

問題 16. 相一致セザル二ツノ圓ノ位置ノ關係ヲ分類セヨ.

90. 定理 16. 二つの圓周ありて

(第一) 各が他の圓の外にあれば,其中心間の距離は其半徑の和より大なり.

(第二) 互に外切するときは,其中心間の距離は其半徑の和に等し.

(第三) 相交るときは,其中心間の距離は其半徑の和より小にして其差より大なり.

(第四) 互に内切するときは,其中心間の距離は其半徑の差に等し.

(第五) 一つの圓が他の圓の内にあるときは,其中心間の距離は其半徑の差より小なり.

第一の證明 圓Oノ半徑ヲr, 圓O′ノ半徑ヲ

r'トセヨ. 圓Oハ圓O′ノ外ニアルヲ以テ直線OO′ハ圓O′ノ周ニ出會フ. 其點ヲBトセヨ.

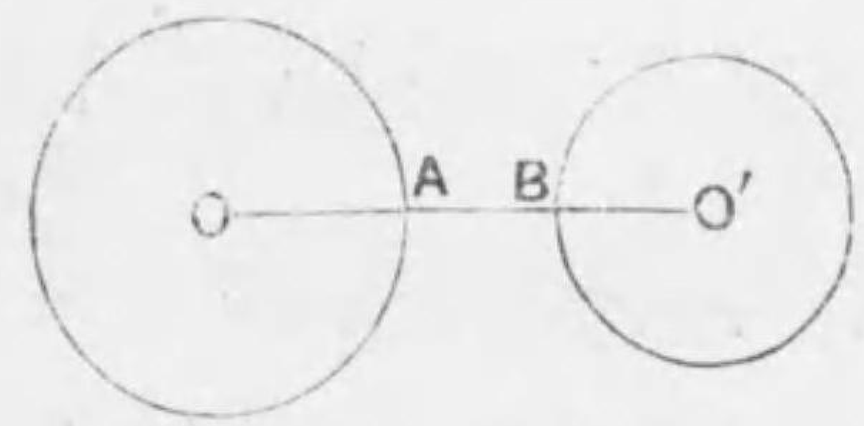
圓O′ハ圓Oノ外ニ在ルヲ以テO′ノ周上ノ點Bハ圓Oノ外ニアリ.

$$\therefore \quad OB>r$$

又 $$O'B=r'$$

然ルニ $$OO'=OB+O'B$$

$$\therefore \quad OO'>r+r'$$



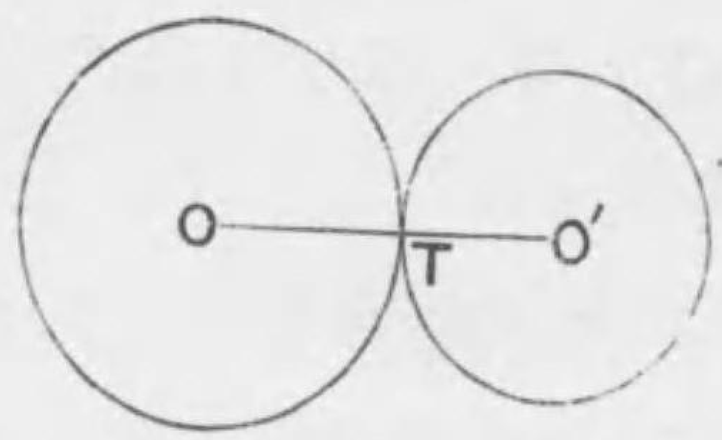
第二の證明 二ツノ圓O, O′ハ互ニ外切スルヲ以テ中心O′ハ圓Oノ外ニアリ. 故ニOO′ノO′ヲ越エテノ延長上ノ點ハ悉ク圓Oノ外ニアリ.

故ニ兩圓ノ周ハOO′ノO′ヲ越エテノ延長上ニ於テ出會ハズ.

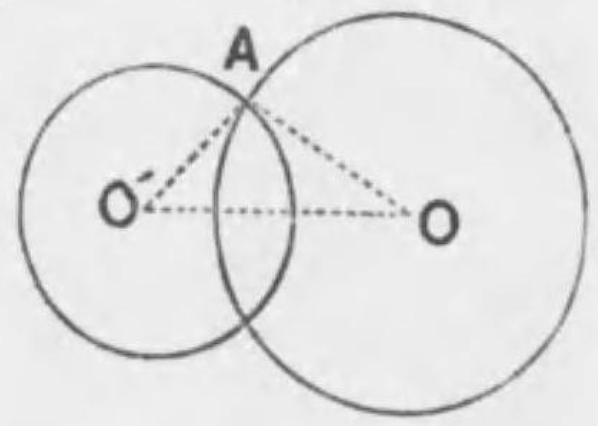
同樣ニ兩圓ノ周ハOO′ノOヲ越エテノ延長上ニ於テモ出會ハズ

故ニ兩圓ノ切點TハOトO′トノ間ニアリ.

$$\therefore \quad OO' = r + r'$$



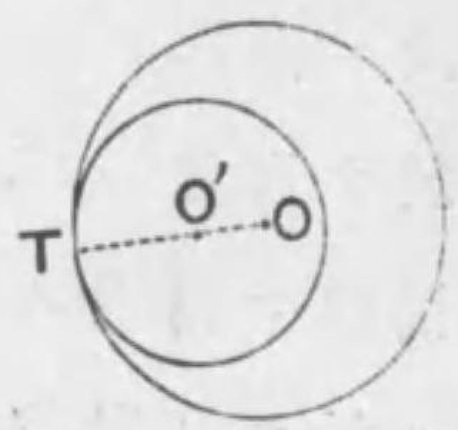
第三の證明　此場合ニ於テハ,二ツノ交點ハ何レモ直線OO′ノ上ニアラズ,故ニOトO′ト此二交點ノ中ノ何レカ一ツ,例ヘバAトハ三角形ノ頂點ヲナス.



$$\therefore \quad r + r' > OO' > r \sim r'$$

注意　二ツノ線分例ヘバr, r'ノ何レガ大ナルカ分カラヌトキ其差ヲ書キ表スニ$r \sim r'$ナル記號ヲ用フ.

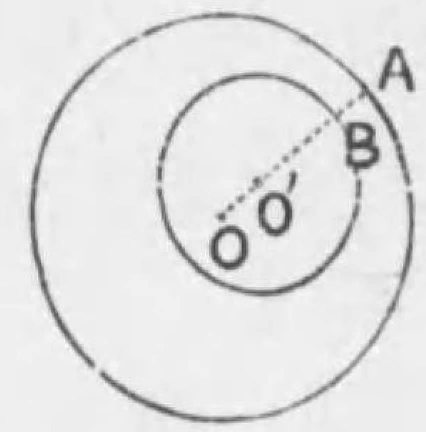
第四の證明　圓O′ト圓Oトガ互ニ内切スルトシ,圓Oヲ圓O′ヨリ大ナリトセヨ. 然ルトキハ中心O′ハ圓Oノ内ニアルヲ以テOO′ハ圓Oノ半徑ヨリ小ナリ. 故ニ



兩圓ノ切點TハOO′ノ延長ノ上ニアリ. 即チOO′ハOTトOT′トノ差ニ等シ.

$$\therefore \quad OO' = r - r'$$

第五の證明　圓O′ガ圓Oノ内ニアリトシOO′ヲ中心Oヲ越エテ延長シ,圓O′ノ周トBニ於テ出會ハシメヨ. 然ルトキハ圓O′ハ全ク圓Oノ内ニアルヲ以テBモ亦圓Oノ内ニアリ.



$$\therefore \quad OB < r$$

$$\text{又} \quad O'B = r'$$

$$\text{然ルニ} \quad OO' = OB - O'B$$

$$\therefore \quad OO' < r - r'$$

系 1.　二つの圓の中心間の距離が

(第一)　半徑の和より大なるときは,各の圓は他の圓の外にあり.

(第二)　半徑の和に等しきときは,二つの圓周は互に外切す.

(第三)　半徑の和より小にして其差

より大なるときは,二つの圓周は相交る.

(第四) 半徑の差に等しければ,二つの圓周は互に內切す.

(第五) 半徑の差より小なるときは,一つの圓は他の圓の內にあり.

系 2. 相等しき二つの圓の半徑が其中心間の距離の半分より大なれば二つの圓周は相交る.

問題 17. 互ニ相切スル二ツノ圓周ノ切點ヲ通ル直線ガ,此圓周ノ各ニ交ル點ヲ其圓ノ中心ニ結付クル二線分ハ互ニ平行ナリ.

問題 18. 三角形ノ一ツノ邊ノ中點ヲ中心トシ他ノ二邊ノ和ノ半分ヲ半徑トスル圓周ハ他ノ二邊ヲ各直徑トスル二ツノ圓周ニ切ス.

問題 19. 一ツノ圓ノ半徑ガ他ノ圓ノ直徑ナレバ二ツノ圓周ハ互ニ內切シ,切點ヨリ引ケル外ナル圓ノ弦ハ內ナル圓ノ周ニテ二等分セラル.

作　圖　題

91. 定義 **作圖題**トハ與ヘラレタル條件ニ適合スル圖形ヲ作ルベキコトヲ要求スル問題ノコトナリ. 而シテ其圖形ヲ作ルコトヲ**作圖題を解く**トイフ.

初等幾何學ニ於テ最初ヨリナシ得ルト認ムル所ノ作圖ハ次ノ三ツニ限ル.

(第一) 二定點ヲ通ル直線ヲ引クコト.

(第二) 線分ヲ任意ニ延長スルコト.

(第三) 任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ニテ圓ヲ書クコト.

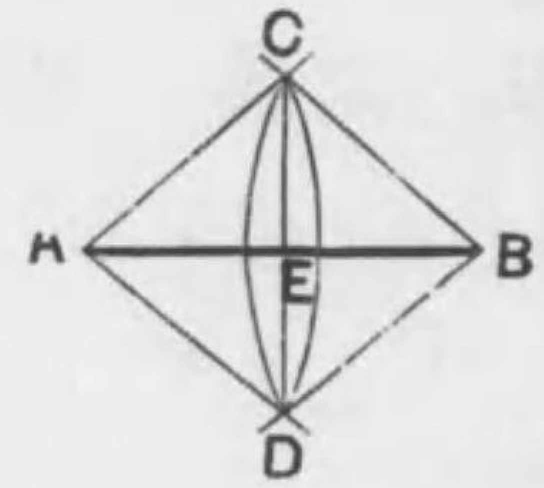
此等ノ作圖ヲナスニ用フルコトヲ許ス器械ハ定規及**兩脚規**ニ限ル,卽チ定規ハ直線ヲ引ク爲ニ,兩脚規ハ圓ヲ書クカ又ハ距離ヲ寫ス爲ニ用ヒラル.

92. 作圖題 1. 定まれる線分を二等分すること.

AB ヲ定マレル線分トシ,之ヲ二等分スルコト

ヲ求ム.

作圖法 點A及點Bヲ中心トシ,ソレガ相交ルホド十分ニ大ナル任意ノ相等シキ半徑ニテ二ツノ圓弧ヲ書キ,點C卜點Dトニテ交ラシメ,CトDトヲ結付ケヨ. 然ルトキハ CD ト AB トノ交點EガABノ中點ナリ.



證明 作圖ニヨリテ四邊形ADBCハ菱形ナリ,故ニ其對角線 CD ハ對角線 AB ヲ二等分ス(第二編定理24)

注意 コレト同様ノ作圖ニヨリテ次ノ問題ヲ解クコトヲ得.

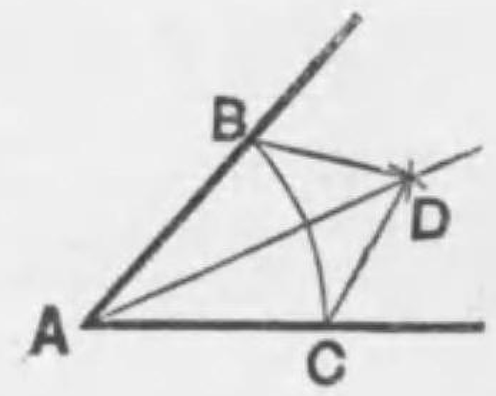
93. 作圖題 2. 定まれる線分の中點を通り,此線分に垂直なる直線を引くこと.

何トナレバ前節ノ圖ニ於ケル二點ノ C, D ヲ結付クル線分ハ AB ニ垂直ナレバナリ (定理15)

94. 作圖題 3. 定まれる角を二等分すること.

Aヲ定マレル角トシ,之ヲ二等分スル事ヲ求ム.

作圖法 頂點Aヲ中心トシ,任意ノ半徑ニテ圓弧ヲ書キ,角Aノ二邊ト夫夫點B卜點Cトニテ交ラシメヨ. 次ニ作圖題2ニヨリテBトCトヲ結付クル線分ノ中點ヨリ之ニ垂直ナル直線 AD ヲ引ケバ是ガ角A(及其共軛角)ノ二等分線ナリ.



證明 直線 AD ハ弧 BC ガ屬スル圓ノ中心 A ヲ通リ,且ツ弧 BC ヲ二等分ス,從テ其相等シキ二ツノ弧ノ上ノ中心角 CAD, BAD ハ相等シ. 卽チ AD ハ角Aノ二等分線ナリ.

95. 作圖題 4. 定直線上の一定點より此直線に垂線を引くこと.

AB ヲ定直線, C ヲ其上ニ在ル一定點トシ, C ヨリ AB ニ垂線ヲ引クコトヲ求ム.

今求ムル所ノ垂線ハ半直線 CA ト半直線 CB

トガナス平角ノ二等分線ニ外ナラズ. 故ニ前問題ニヨリテ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 點Cヲ中點トシ,任意ノ半徑ニテ圓ヲ書キ,其周ト直線ABトノ交點ヲD,Eトセヨ. D,Eノ各ヲ中心トシ今書キタル圓ノ半徑ヨリ大ナル任意ノ相等シキ半徑ニテ圓弧ヲ書キ,其交點ノ一ツナルFトCトヲ通ル直線ヲ引ケバ,是ガ求ムル所ノ者ナリ.

問題 20. 定マレル角ヲ四等分スルコト.

問題 21. 直角ヲ作ルコト.

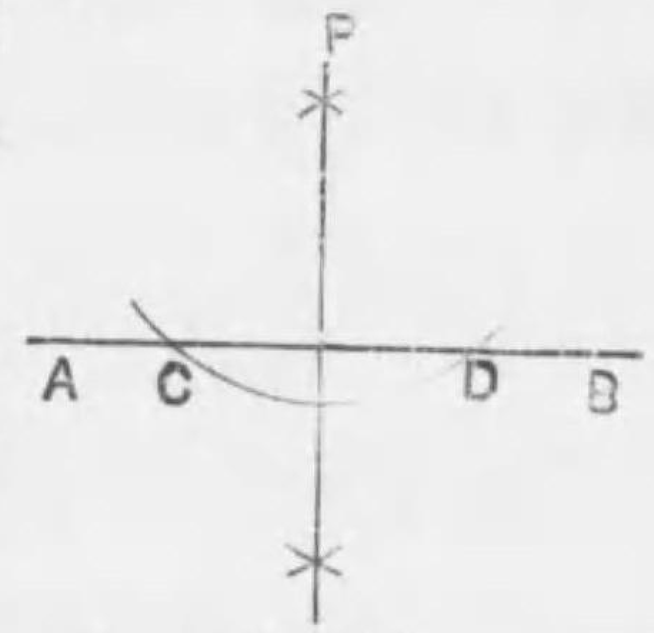
問題 22. 與ヘラレタル線分ニ等シキ長サノ邊ヲ有スル正方形ヲ作ルコト.

問題 23. 與ヘラレタル二ツノ線分ニ等シキ長サノ相隣レル二邊ヲ有スル矩形ヲ作ルコト.

96. 作圖題 5. 定直線外の一定點より,此直線へ垂線を引くこと.

ADヲ定直線,Pヲ其上ニ在ラザル一定點トシ,PヨリABニ垂線ヲ引クコトヲ求ム.

作圖法 點Pヲ中心トシ,十分大ナル半徑ニテ圓弧ヲ書キ,直線ABトニツノ點CトDトニテ交ラシメヨ. 次ニCDヲ垂直ニ二等分スル直線ヲ作レバ是ガ求ムル垂線ナリ.

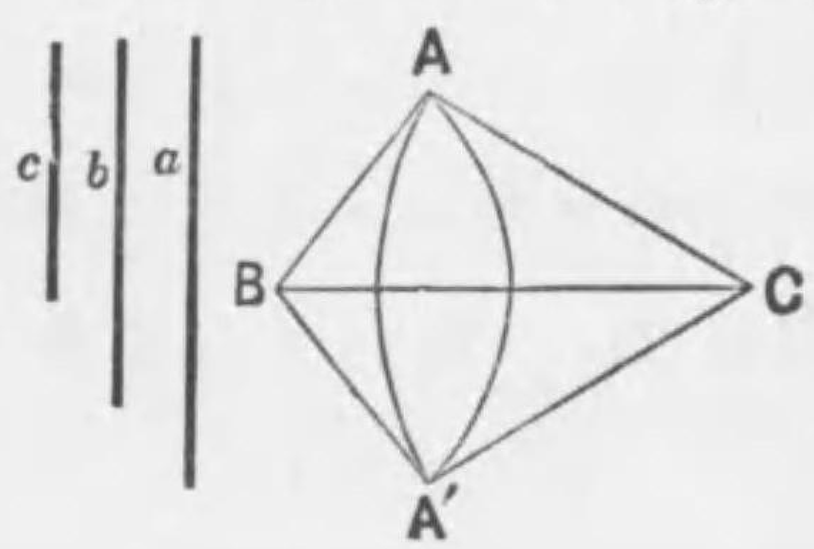


證明 Pヲ中心トスル圓ノ弦CDヲ垂直ニ二等分スル直線ハ圓ノ中心Pヲ通レバナリ (定理9系)

97. 作圖題 6. 三邊を與へて三角形を作ること.

a, b, cヲ與ヘラレタル三ツノ線分トシ,三邊ガ夫夫a, b, cニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.

作圖法 任意ノ直線ヲ引キ,其上ニaニ等シキ線分BCヲ取リ,其一端Cヲ中心トシ,bニ等シ



キ半徑ニテ圓周ヲ書ケ. 次ニ他ノ端Bヲ中心トシ, c ニ等シキ半徑ニテ圓周ヲ書ケ. 此二ツノ圓周ノ一ツノ交點AヲBトCトニ結付ケテ得ル所ノ△ABCガ求ムル所ノ者ナリ.

吟味 問題ガ出來ルタメニハ此二ツノ圓周ガ相交ラザルベカラズ,卽チ其中心間ノ距離 a ガ其半徑 b, c ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナラザルベカラズ(定理16及系). 此條件ガ成リ立ツトキハ,二ツノ圓周ハ二ツノ交點A, A′ヲ有ス. 然レドモ△A′BCハ△ABCニ等シキガユヱニ,ツマリ唯一ツノ解ヲ得.

註 作圖題の吟味トハ求ムル圖形ヲ作圖シ得ルヤ否ヤ,又作圖シ得ル場合ニハ幾通リノ相異ナレル圖形ヲ作リ得ベキカ等ヲ講究スルコトナリ.

問題 24. 一邊ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ正三角形ヲ作ルコト.

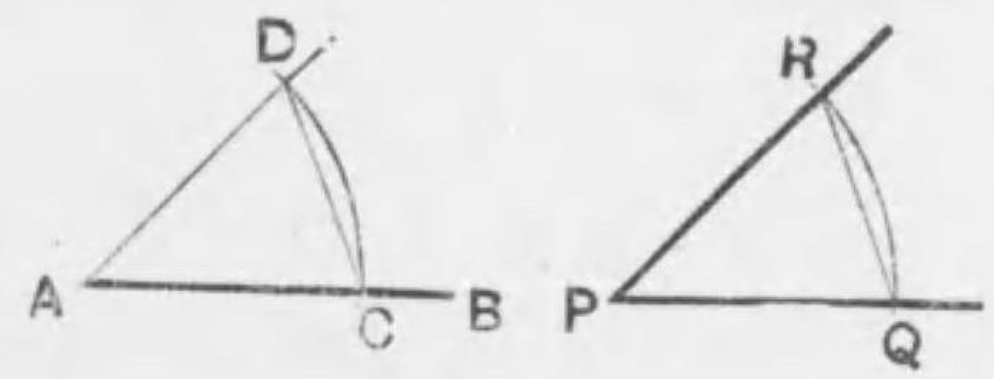
問題 25. 直角ヲ三等分スルコト.

98. 作圖題 7. 定半直線の原點より其定まれる側に他の半直線を引き此二つの半直線がなす角を與へられたる角に等しからしむること.

AB ヲ定半直線, A ヲ其原點, P ヲ與ヘラレタル角トシ, AB ノ定マレル側ニ於テAヨリ半直線ヲ引キ,ソレトABトガナス角ヲPニ等シクナスコトヲ求ム.

作圖法 角Pノ頂點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ニテ圓弧ヲ書キ,二ツノ邊ト夫夫點Qト點Rトニテ交ラシメヨ. 次ニAヲ中心トシ,前ト同ジ半徑ニテ圓弧ヲ書キ, ABト點Cニ於テ交ラシメヨ. 點Cヲ中心トシ,前ノ弧ノ弦QRニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ書キ, ABノ定マレル側ニ於テ前ノ圓弧ト點Dニ於テ交ラシメヨ. ADガ卽チ求ムル所ノ半直線ナリ.

證明 △ACDノ三邊ガ夫夫△PQRノ三邊ニ

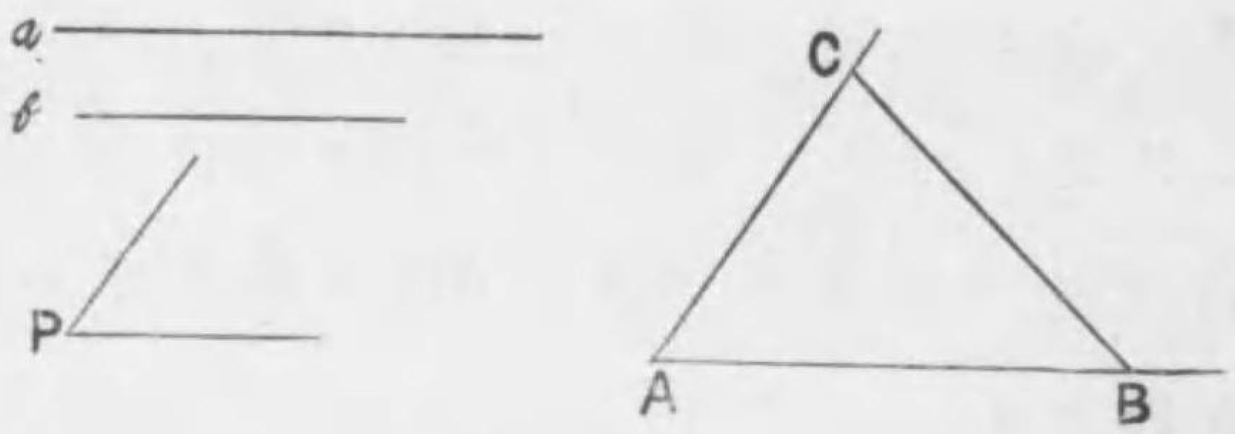


等シキガユヱニ,此二ツノ三角形ハ相等シ,從テ角 A ハ角 P ニ等シ.

99. 作圖題 8. 二邊及其夾角を與へて三角形を作ること.

a, b ヲ與ヘラレタル二ツノ線分, P ヲ與ヘラレタル角トシ, 二邊ガ夫夫 a, b ニ等シク,其夾角ガ P ニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.

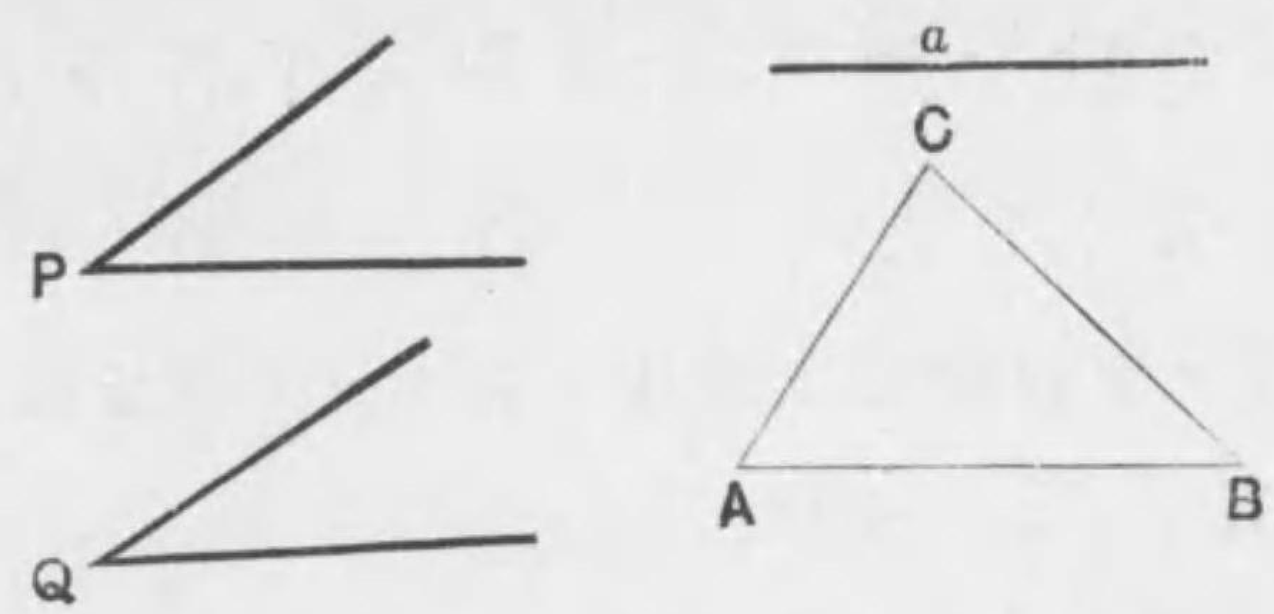
作圖法 角 P ニ等シキ角 BAC ヲ任意ノ位置ニ作リ(作圖題6),其二邊 AB, AC ヲ夫夫 a, b ニ等シク取リテ, B ト C トヲ結付クレバ △ABC ガ求ムル所ノ者ナリ.



100. 作圖題 9. 二角及其頂點間の邊を與へて三角形を作ること.

a ヲ與ヘラレタル線分, P, Q ヲ與ヘラレタル二ツノ角トシ,二角ガ P, Q ニ等シク,其頂點間ノ

邊ガ a ニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.



作圖法 a ニ等シキ線分 AB ヲ任意ノ位置ニ取リ,其一端 A ヨリ之ト角 P ニ等シキ角ヲナス半直線ヲ引キ,次ニ他ノ端 B ヨリ AB ト角 Q ニ等シキ角ヲナス半直線ヲ, AB ニ對シ前ニ引キタル半直線ト同ジ側ニ引ケ. 此二ツノ半直線ノ交點ヲ C トセヨ. 然ルトキハ三角形 ABC ガ求ムル所ノ者ナリ.

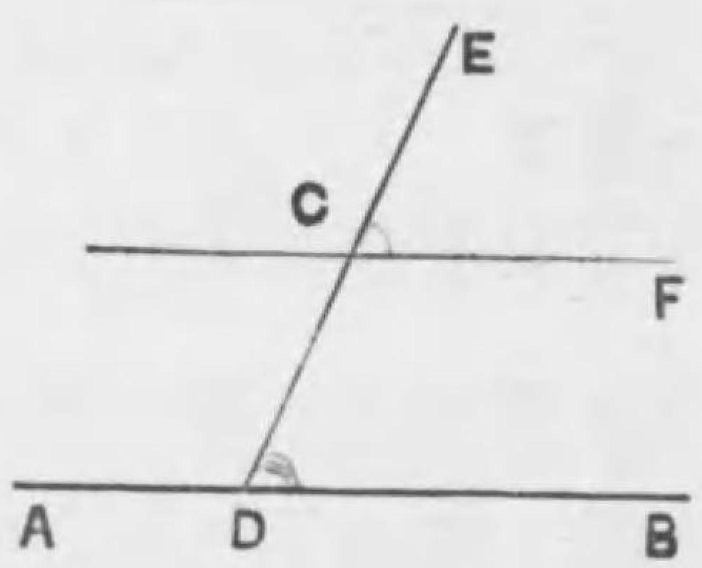
吟味 $\angle P+\angle Q<2\angle R$ ナレバ二ツノ半直線 AC ト BC トハ必ズ相交ルユヱ(第二編定理22系3),此問題ニハ一ツノ解アリ.

若シ $\angle P+\angle Q\geqq 2\angle R$ ナレバ解ナシ.

問題 26. 三角形ノ二ツノ角ガ與ヘラルルトキ今一ツノ角ヲ求ムルコト.

101. 作圖題 10. 定直線上にあらざる一定點を通り,此直線に平行なる直線を引くこと.

AB ヲ定直線, C ヲ其上ニ在ラザル一定點トシ, C ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ヲ引クコトヲ求ム.



作圖法 AB 上ノ任意ノ點 D ト C トヲ結付ケ之ヲ C ノ方ヘ延長シ,之ヲ CE トセヨ. ∠CDB ニ等シキ同位角 ECF ヲ爲ス直線 CF ヲ作レバ (作圖題 7), CF ハ AB ニ平行ナリ. (第二編定理21)

問題 27. 二角及其一ツニ對スル邊ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

問題 28. 三定點ヲ三ツノ頂點ニ有スル平行四邊形ヲ作ルコト.

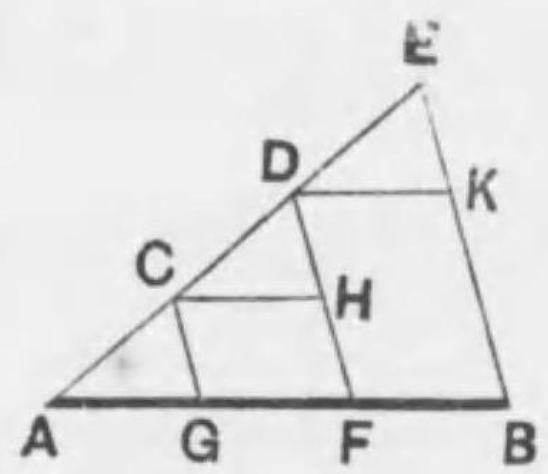
問題 29. 一定點ヲ通リテ直線ヲ引キ,ソレガ

定マレル平行二直線ノ間ニ夾マルル部分ヲシテ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト.

102. 作圖題 11. 定まれる線分を幾つかに等分すること.

例ヘバ AB ヲ三等分セントス.

作圖法 點 A ヨリ任意ノ半直線ヲ引キ,其上ニ任意ノ相等シキ三ツノ線分 AC, CD, DE ヲ取リ,最後ノ端 E ト點 B トヲ結付ケヨ. 次ニ C, D ノ各ヨリ EB ニ平行ナル直線ヲ引キ, AB ト夫夫 G, F ニテ交ラシメヨ. 然ルトキハ此等ノ交點ガ AB ヲ三等分スル點ナリ.



證明 C 及 D ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ, DF, EB ト夫夫 H, K ニ於テ交ラシメヨ.

然ルトキハ　△ACG≡△CDH　(第二編定理 7)

∴　AG=CH

然ルニ　CH=GF　(第二編定理25)

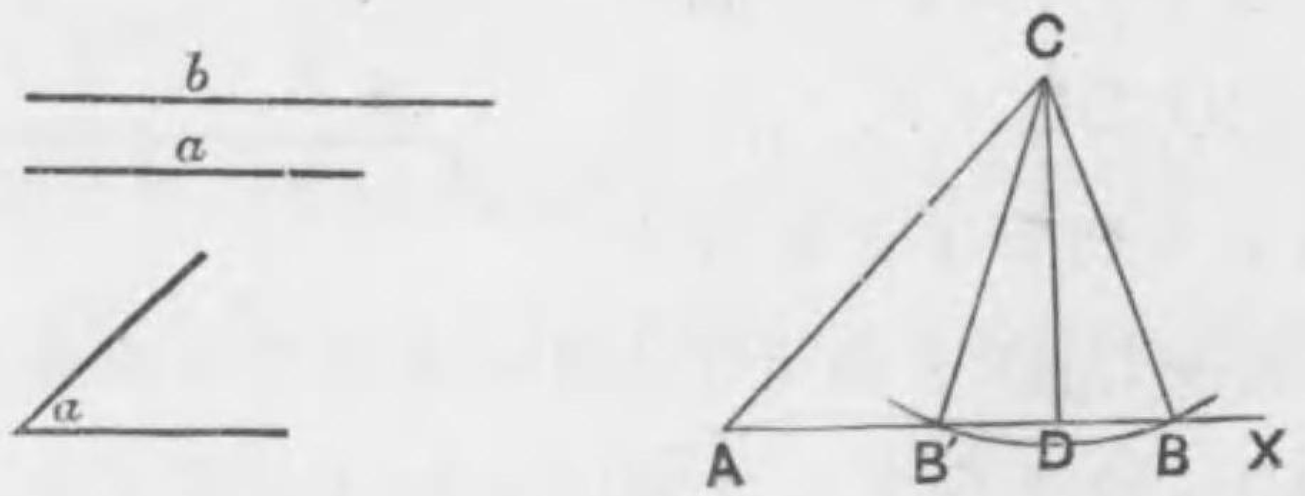
∴　AG=GF

同樣ニ　GF=FB

∴　AG=GF=FB

103. 作圖題 12. 二邊及其一つに對する角を與へて三角形を作ること.

a, b ヲ與ヘラレタル二ツノ線分, α ヲ與ヘラレタル角トシ, 二邊ガ a, b ニ等シク, a ニ等シキ邊ノ對角ガ α ニ等シキ樣ナル三角形ヲ作ルコトヲ求ム.



作圖法　b ニ等シキ線分 AC ヲ任意ノ位置ニ引キ, 其任意ノ側ニ於テ之ト與ヘラレタル角 α ニ等シキ角ヲナス半直線 AX ヲ引ケ. C ヲ中心トシ, a ニ等シキ半徑ニテ圓周ヲ書ケ. 此圓周ト半直線 AX トノ交點 B, B′ ノ各ヲ C ニ結付クレバ △AEC 及 △AB′C ハ求ムル所ノ者ナリ.

吟味　若シ今書キタル圓周ト半直線 AX トニ

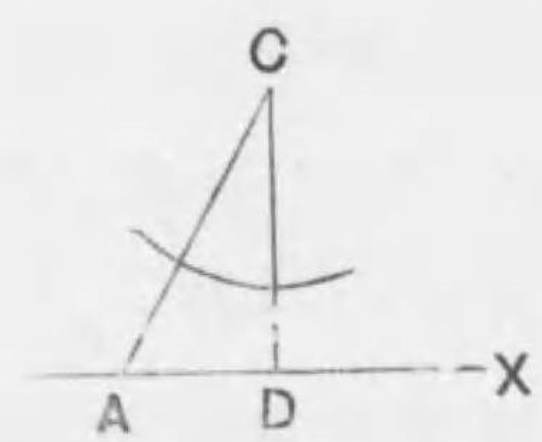
共有點ナケレバ問題ハ不可能ナリ. ソコデ a, α, a 間ノ關係ヨリ生ズル種々ノ場合ニ付テ吟味セントス.

(第一)　α ガ鋭角ナル場合.

圓 C ノ周ト AX トニ共有點ガアル爲ニハ, 其半徑 a ガ C ヨリ AX ニ下セル垂線 CD ノ長サヨリ小ナラザルコトヲ要ス.

(1)　a<CD

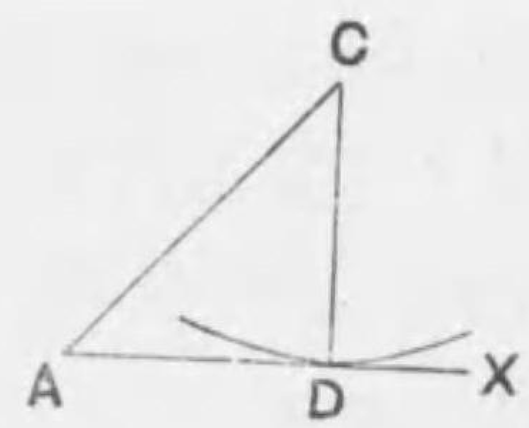
ナレバ問題ハ不可能ナリ.



(2)　a=CD

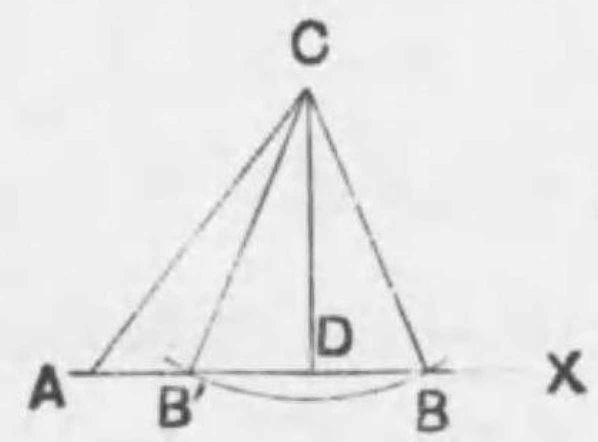
ナレバ圓 C ノ周ハ半直線 AX ト點 D ニ於テ切ス.

因テ直角三角形 ACD ガ求ムル所ノ三角形ナリ.



(3)　b>a>CD

ナレバ圓 C ノ周ハ半直線 AX ト二點 B ト B′ トニ於テ交ル. 故ニ三角形 ABC ト三角形 AB′C トガ何レモ求ムル所ノ者ナリ, 而シテ角 B ト角 B′ トハ互

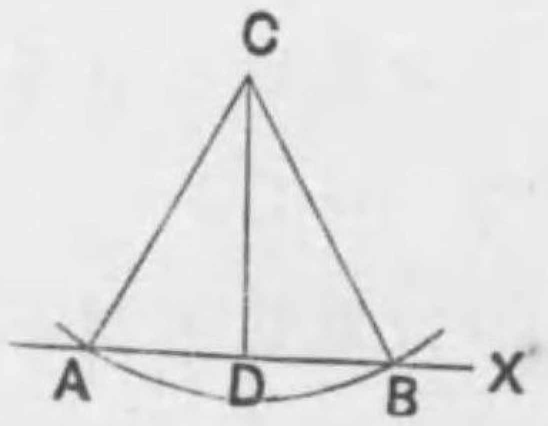


ニ補角ヲナス.

注意 △ABC, △AB′C ノ如クーツノ三角形ノ二邊ガ夫夫他ノ三角形ノ二邊ニ等シク且ツ一組ノ相等シキ邊ニ對スル角ガ相等シキトキニモ兩三角形ノ相等シカラザルコトアリ. 此場合ニハ他ノ一組ノ相等シキ二邊ニ對スル角ハ互ニ補角ヲナス.

(4) $a=b$

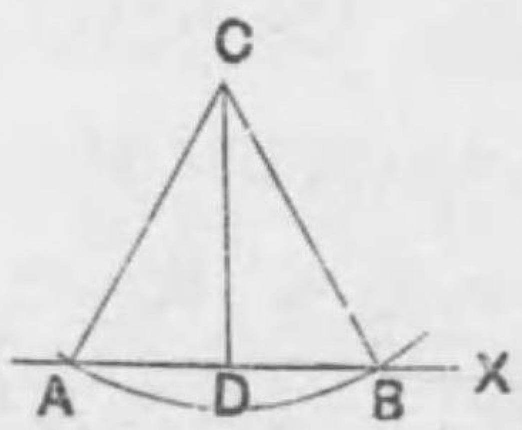
ナレバ(3)ノ場合ノ點 B′ ガ點 A ト相一致シ, AB′C ハ三角形ヲ成サズ,而シテ CB ト CA トハ相等シ.



因テ二等邊三角形 ABC ダケガ求ムル所ノ者ナリ.

(5) $a>b$

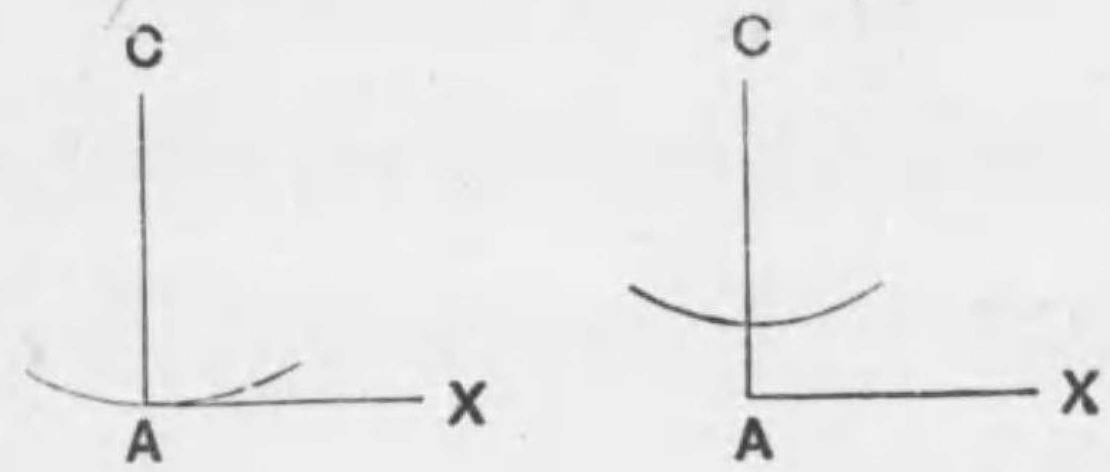
ナレバ圓 C ノ周ハ半直線 AX ト唯一ツノ點 B ニテ交ル,故ニ唯一ツノ解アリ.



(第二) α ガ直角ナル場合.

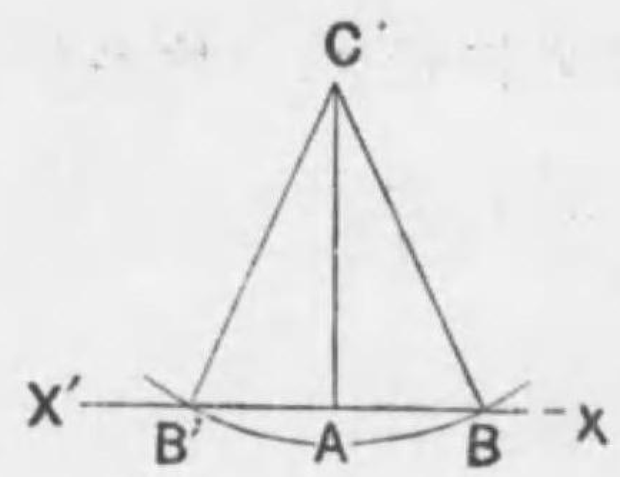
此時ハ CD ト CA トハ相一致ス. 故ニ

(1) $a \leqq b$ ナレバ問題ハ不可能ナリ.



(2) $a>b$

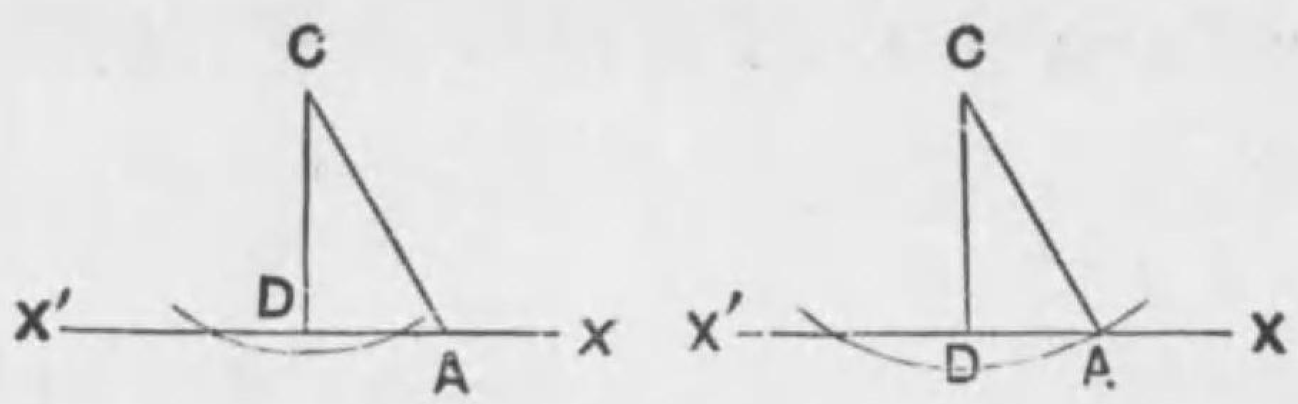
ナレバ圓 C ノ周ハ半直線 AX 及其延長 AX′ ト夫夫 B 及 B′ ニ於テ交ル,而シテ △AB′C モ △ABC ト同ジク問題ニ適スレドモ,此二ツハ相等シキ者ナレバツマリ此場合ニハ唯一通リノ解ヲ得ルコトニナル.



(第三) α ガ鈍角ナル場合.

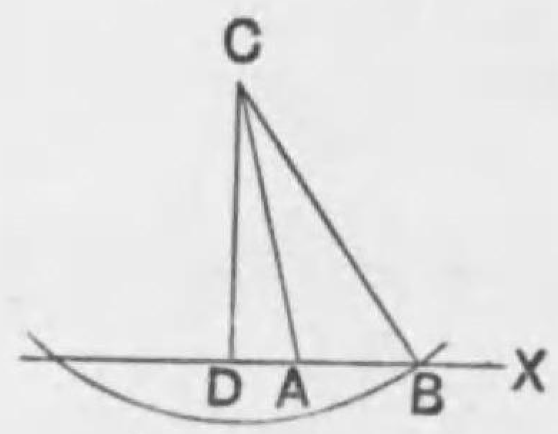
此時ハ C ヨリ半直線 AX ノ上ニ下シタル垂線ノ足ハ AX ノ延長ノ上ニアリ. 從テ A ニ對スル邊ハ AC ヨリ大ナラザルベカラズ. 故ニ

(1) $a \leqq b$ ナレバ問題ハ不可能ナリ.



(2) $a>b$

ナレバ圓Cノ周ト半直線AXトハ唯一ツノ點Bニ於テ相交ル. 故ニ唯一ツノ解アリ.

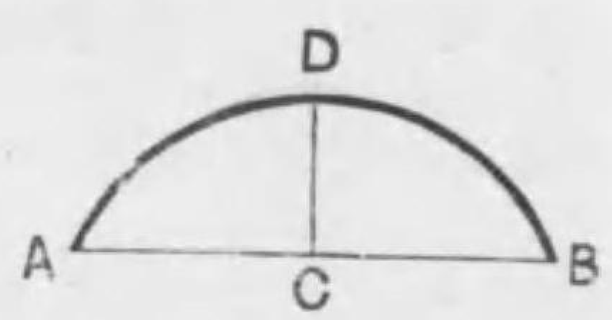


問題 30. 本節ノ吟味ノ結果ヲ纒メテ述ベヨ.

104. 作圖題 13. 定まれる圓弧を二等分すること.

ABヲ定マレル圓弧トシ. 之ヲ二等分スルコトヲ求ム.

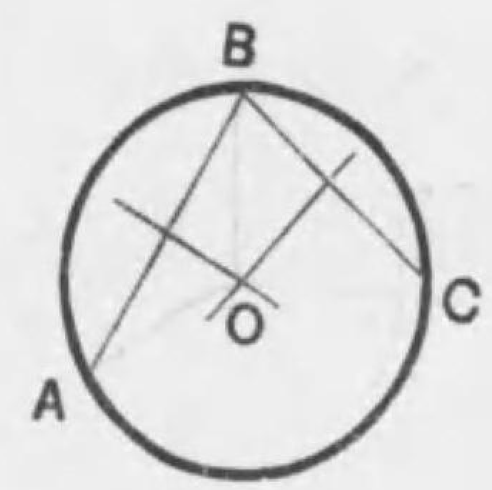
作圖法 弧ABヲ張ル弦ABヲ垂直ニ二等分スル直線ヲ引キ, 弧ABトノ交點Cヲ求ムレバ,是ガ弧ABノ中點ナリ. (定理8)



105. 作圖題 14. 定まれる圓弧が屬する圓の中心を求むること.

ABCヲ定マレル圓弧トシ, 此弧ガ屬スル圓ノ中心ヲ求ムルコト.

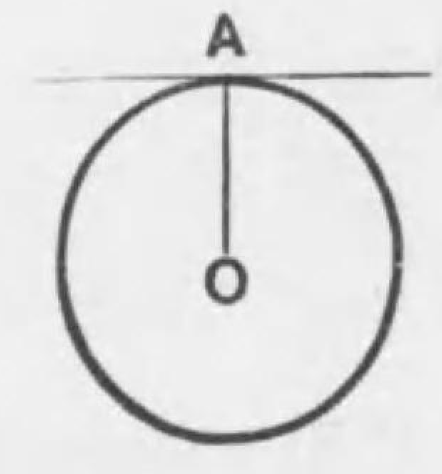
作圖法 定マレル圓弧ノ上ニ三點A, B, Cヲ任意ニ取リ, BヲA及Cニ結付ケ, 線分AB, BCノ各ヲ垂直ニ二等分スル直線ヲ作レバ,其交點Oガ求ムル所ノ中心ナリ. (定理14)



106. 作圖題 15. 定圓周上の一定點に於て,此圓に切線を引くこと.

Aヲ定圓Oノ周上ノ一定點トシ, Aニ於テ此圓ニ切線ヲ引クコトヲ求ム.

作圖法 マヅ中心Oヲ求メ (作圖題14), 之トAトヲ結付ケ, Aヲ通リOAニ垂直ナル直線ヲ引ケ. 是ガ求ムル所ノ切線ナリ. (定理13系2)



問題 31. 定圓ニ切シ,定直線ニ平行ナル直線ヲ引クコト.

練習第三

問題 32. 二定點ヲ通リ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ書クコト.

問題 33. 一定點ヲ通リ,他ノ二定點ヨリ等距離ニアル直線ヲ引クコト.

問題 34. 定角 ABC ノ內ノ一定點 P ヲ通リ,其兩端ガ此角ノ二邊ノ上ニアルベキ線分ヲ引キ,ソレガ點 P ニテ二等分セラルル樣ニスルコト.

問題 35. △ABC ノ一邊 AC ノ上ニ一點 P ヲ求メ,之ヨリ夫夫 AB, BC ニ平行ニ直線ヲ引キ BC, AB ト夫夫點 X, Y ニ交ラシムルトキ, PX ト PY トガ相等シクナル樣ニセヨ.

問題 36. 底邊ト,一ツノ底角ト,他ノ二邊ノ和トヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

問題 37. 底邊ト,一ツノ底角ト,他ノ二邊ノ差トヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

問題 38. 二ツノ圓周ノ交點ノ一ツヲ通リ,其兩端ガ各ノ圓周上ニ一ツ宛アルベキ線分ノ中デ,最モ長キ者ヲ引クコト.

問題 39. 定マレル圓周ニ切シ,半徑ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ圓周ヲ作ルコト.

問題 40. 二定圓周ノ各ニ切スル任意ノ圓ノ中心ヨリ此二定圓ノ中心マデノ距離ノ和或ハ差ハ二定圓ノ半徑ノ和或ハ差ニ等シ.

圓周角

107. 定義 圓周上ノ一點ヨリ引キタル二ツノ弦ガナス角ヲ**圓周角**トイフ.

圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マルル弧ノ**上に立つ**ト稱セラル.

108. 定義 弧ト,ソレヲ張ル弦トニテ圍マルル圓ノ一部分ヲ**弓形**トイフ. スベテ弦ハ圓ヲ二ツノ弓形ニ分ツ.

角ノ頂點ガ弓形ノ弧ノ上ノ一點ニシテ其二邊ガ夫夫弓形ノ弦ノ兩端ヲ通ルトキ,其角ヲ**弓形**が

含む角或ハ弓形に於ける角トイフ.

故ニ弓形ニ於ケル角トハ此弓形ノ弧ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角ノコトナリ.

109. 定理 17. 一つの弧の上に立つ圓周角は同じ弧の上に立つ中心角の半分に等し.

圓 O ノ弧 AB ノ上ニ立ツ圓周角ト中心角トヲ夫夫 APB, AOB トスレバ $\angle APB$ ハ $\angle AOB$ ノ半分ニ等シカルベシ.

證明 (第一) 中心 O ガ圓周角ノ一邊,例ヘバ PB ノ上ニアル場合.

此場合ニ於テハ $\angle AOB$ ハ $\triangle AOP$ ノ外角ナリ.

$\therefore \angle AOB=\angle OAP+\angle APO$

然ルニ $\triangle AOP$ ニ於テ

$$OA=OP$$

$$\therefore \quad \angle OAP=\angle APO$$

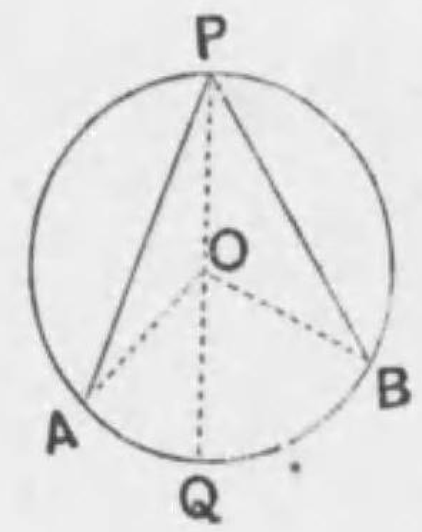
$$\therefore \quad \angle AOB=2\angle APB$$

$$\therefore \quad \angle APB=\tfrac{1}{2}\angle AOB$$

(第二) 中心 O ガ圓周角ノ内ニアル場合.

點 P ヲ通ル直徑 PQ ヲ引ケ. 然ルトキハ

$\angle APB=\angle APQ+\angle BPQ$



然ルニ(第一)ノ場合ノ證明ニヨリ

$$\angle APQ=\tfrac{1}{2}\angle AOQ$$

$$\angle BPQ=\tfrac{1}{2}\angle BOQ$$

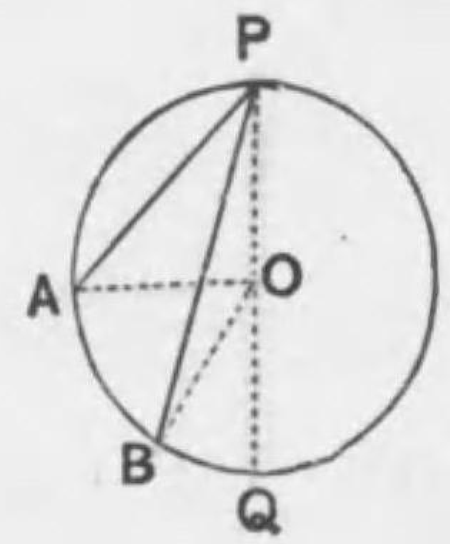
$$\therefore \quad \angle APQ+\angle BPQ=\tfrac{1}{2}(\angle AOQ+\angle BOQ)$$

卽チ $\angle APB=\tfrac{1}{2}\angle AOB$

(第三) 中心 O ガ圓周角ノ外ニアル場合.

點 P ヲ通ル直徑 PQ ヲ引ケ. 然ルトキハ

$$\angle APB=\angle APQ\sim\angle BPQ$$



然ルニ $\angle APQ=\tfrac{1}{2}\angle AOQ$

$\angle BPQ=\tfrac{1}{2}\angle BOQ$

$\therefore \quad \angle APQ\sim\angle BPQ$

$=\tfrac{1}{2}(\angle AOQ\sim\angle BOQ)$

卽チ $\angle APB=\tfrac{1}{2}\angle AOB$

系 1. 同じ圓或は相等しき圓に於

て相等しき弧の上に立つ圓周角は相等し.

系 2. 一つの弧の上に立つ圓周角は此弧の半分に等しき弧の上に立つ中心角に等し.

系 3. 同じ弓形が含む,すべての角は相等し.

系 4. 半圓が含む角は直角なり.

問題 41. 第95節ノ方法ニヨラズシテ定直線上ノ一定點ヨリ之ニ垂線ヲ引クコト.

問題 42. 第96節ノ方法ニヨラズシテ定直線上ニアラザル一定點ヨリ之ニ垂線ヲ引クコト.

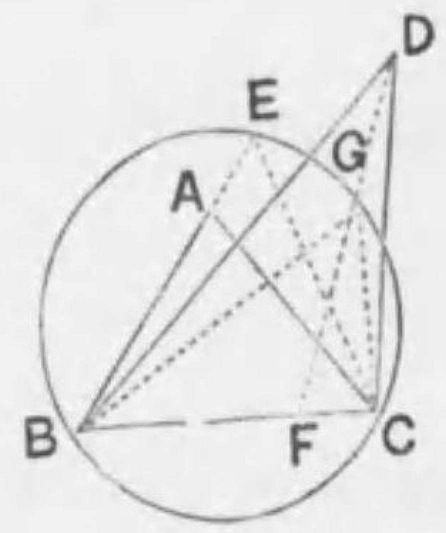
110. 定義 一ツノ點ニ於テ一ツノ線分ヲ見込む角トハ其點ヲ原點トシ其線分ノ兩端ヲ通ル二ツノ半直線ガナス角ノコトナリ.

111. 定理 18. 弓形内の一點に於て

其弦を見込む角は弓形が含む角より大なり. 弦に對し弓形と同じ側に,其外に在る點に於て弦を見込む角は弓形が含む角より小なり.

Aヲ弓形内ノ一點, Dヲ其弦BCニ對シ弓形ト同ジ側ニ,其外ニ在ル一點トセヨ. 然ルトキハ∠BACハ弓形ガ含ム角ヨリ大ニシテ, ∠BDCハ弓形ガ含ム角ヨリ小ナルベシ.

證明 ∠BACノ一邊ABヲAノ方ヘ延長シテ弓形ノ弧トEニ於テ交ラシメ,EトCトヲ結付ケヨ. 然ルトキハ∠BACハ△AECノ外角ナルユヱ, ∠BECヨリ大ナリ,即チ弓形ニ於ケル角ヨリ大ナリ.



次ニ∠CDBノ邊ノ間ニ夾マレタル弓形ノ弧ノ上ニ任意ノ一點Gヲ取リ,線分DGヲGノ方ヘ延長シテ之ヲGFトスレバ

$$\angle CDG < \angle CGF$$ (第二編定理23系1)

$$\angle BDG < \angle BGF$$

$$\therefore \quad \angle BDC < \angle BGC$$

問題 43. 一ツノ圓ノ相交ル二ツノ弦AB, CDガ其交點Eニ於テナス角AECハ弧AC及弧BDノ上ニ立ツ中心角ノ和ノ半分ニ等シ.

問題 44. 一ツノ圓ノ二ツノ弦AB, CDヲ延長シテ圓外ノ一點Eニ於テ相交ラシムルトキハ,角AECハ弧AC及弧BDノ上ニ立ツ二ツノ中心角ノ差ノ半分ニ等シ.

問題 45. 相交ル二圓周ノ交點ノ中ノ一ツヲ一端トスル,各ノ圓ノ直徑ノ他ノ端ヲ通ル直線ハ他ノ交點ヲ通ル.

問題 46. 一ツノ圓ノ二ツノ弦AB, CDガ相等シケレバ,二ツノ弦AC, BDハ相等シキカ若クハ互ニ平行ナリ.

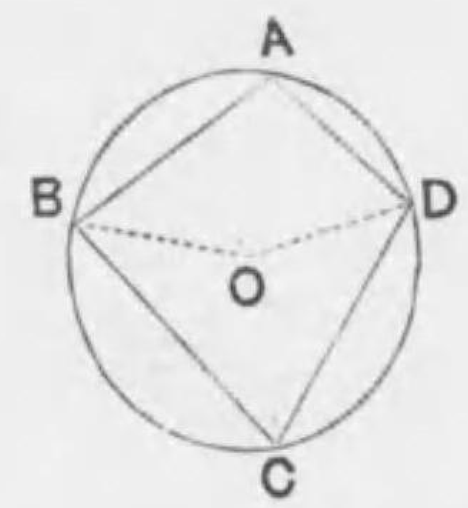
112. 定義 多角形ノ頂點ガ,スベテ一ツノ圓周上ニアル者ヲ**內接多角形**或ハ**圓に內容し得る多角形**トイヒ,此圓ヲ此多角形ノ**外接圓**トイフ.

多角形ノ邊ノ各ガ一ツノ圓周ニ切スル者ヲ**外接多角形**トイヒ,此圓ヲ此多角形ノ**內接圓**トイフ.

四邊形ノ一ツノ外角ニ接スル內角ニ對スル角ヲ其外角ノ**內對角**トイフ.

113. 定理 19. 圓に內接する四邊形の對角は互に補角をなす.

ABCDヲ圓Oニ內接スル四邊形トセヨ. 然ルトキハ∠Aト∠Cトハ互ニ補角ヲナシ,∠Bト∠Dトハ互ニ補角ヲナスベシ.



證明 ∠Aハ弧BCDノ上ニ立ツ圓周角ナルヲ以テ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シク,∠Cハ之ニ共軛ナル弧BADノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ (定理17). 故ニ∠Aト∠Cトハ中心ニ於ケル二ツノ共軛角ノ和ノ半分卽チ二直角ニ等シ. 故ニ∠Aト∠Cトハ互ニ補角ヲナス.

從テ∠Bト∠Dトモ互ニ補角ヲナス (第二編定理24)

系 1. 圓に內接する四邊形の一つ

の外角は其內對角に等し.

系 2. 其對角が互に補角をなす四邊形は圓に內容し得る四邊形なり.

問題 47. 圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形ナリ.

問題 48. 圓ニ內接スル六邊形ノ內角ヲ一ツ置キニ取リタル和ハ四直角ニ等シ.

問題 49. 二ツノ圓周ノ交點 A, B ノ各ヲ通リ二ツノ線分 PAQ, RBS ヲ引キ夫夫圓周ニ於テ終ラシムレバ弦 PR ハ弦 QS ニ平行ナリ.

問題 50. 圓 O ノ周ノ上ノ任意ノ點 A ヨリ, 定マレル二ツノ直徑ニ垂線 AB, AC ヲ引ケバ其足 B ト C トヲ結付クル線分ノ長サハ不易ナリ.

問題 51. 三角形ノ二ツノ頂點 A, B ヨリ其對邊ニ夫夫垂線 AD, BE ヲ引キ, B ヨリ直線 DE ヘ垂線 BF ヲ引ケバ,角 FBD ハ角 EBA ニ等シ.

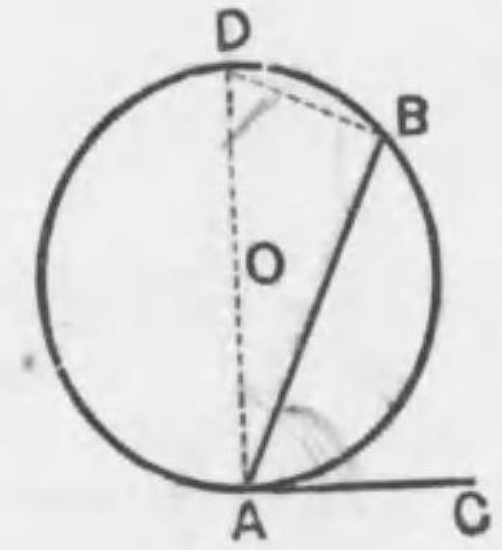
114. 定理 20. 圓の弦と其一端に於て圓に切する半直線との爲す角は其角の內に含まるる弧に對する圓周角に等し.

O ヲ中心トスル圓ノ弦ヲ AB, A ニ於テ圓ニ切スル半直線ヲ AC トセヨ. 然ルトキハ ∠BAC ハ此角ノ內ニ含マルル弧 AB ニ對スル圓周角ニ等シカルベシ.

證明 (第一) ∠BAC ガ銳角ナル場合.

半徑 AO ヲ O ノ方ヘ延長シテ圓周ト D ニ於テ交ラシメ, B ト D トヲ結付クレバ

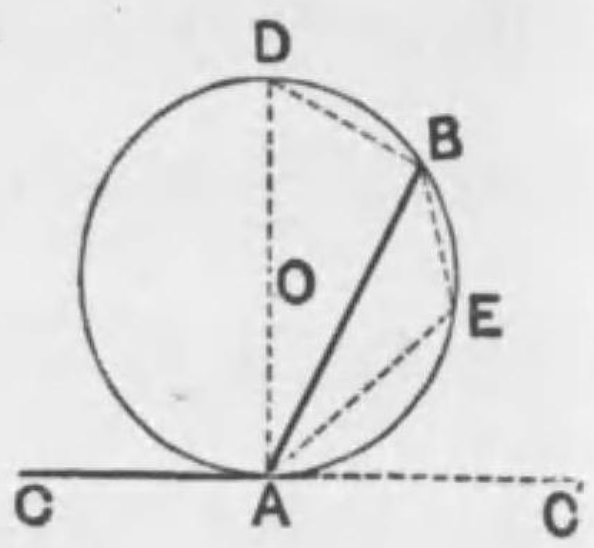
OA⊥AC (定理 13 系 4)



故ニ ∠BAC ハ ∠BAD ノ餘角ナリ. 又 △ABD ニ於テ半圓ガ含ム角 ABD ハ直角ナリ. 故ニ ∠D ハ ∠BAD ノ餘角ナリ. 故ニ ∠BAC ハ ∠D 卽チ ∠BAC ノ內ニ含マルル弧 AB ニ對スル圓周角ニ等シ.

(第二) ∠BAC ガ鈍角ナル場合

半直線ACノ延長ヲAC′トセヨ,然ルトキハ∠BACノ内ニ含マルル弧ADBニ對スル圓周角AEBハ∠Dノ補角ナリ(定理19).



然ルニ∠BACハ∠BAC′ノ補角ナリ.

而シテ　$\angle BAC'=\angle D$　(第一ノ場合)

$\therefore\quad \angle BAC=\angle AEB$

系　弦と其一端を原點とする半直線とが爲す角が,其内に含まるる弧に對する圓周角に等しければ,此半直線は其原點に於て圓に切す.

問題 52.　問題49ニ於テ兩圓周ガ相切スレバ如何.

問題 53.　圓周上ノ一點ヨリ之ニ切線ト弦トヲ引ケバ其弦ガ張ル弧ノ中點ハ切線及弦ヨリ相等シキ距離ニアリ.

問題 54.　二等邊三角形ノ各頂點ニ於テ其外接圓ニ切スル三ツノ直線ハ又二等邊三角形ヲ成ス.

問題 55.　直角三角形ノ直角ノ一邊ヲ直徑トスル圓周ガ斜邊ト交ル點ニ於テ此圓ニ切スル直線ハ他ノ邊ヲ二等分ス.

軌　跡

115. 定義　或線(或は線の一部分或は線の群)ありて

(第一)　其上にある點は或與へられたる性質を有す.

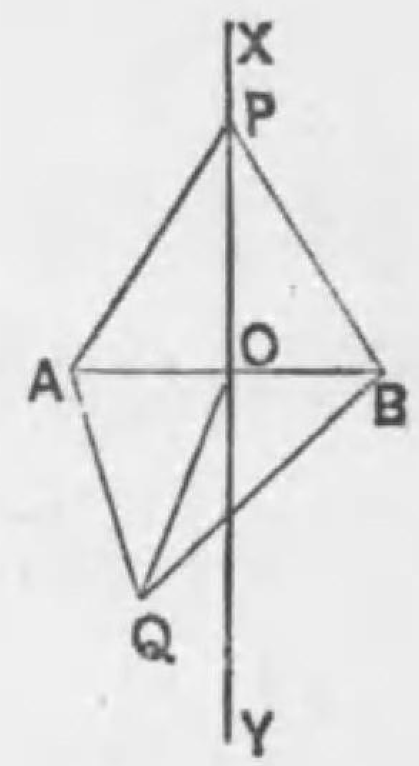
(第二)　其上にあらざる點は此性質を有せず.

といふ二つの定理が成り立つ時は,此線(或は線の一部分,或は線の群)を與へられたる性質を有する點の**軌跡**といふ.

116. 定理 21.　二定點より相等しき

距離にある點の軌跡は此二定點を結付くる線分を垂直に二等分する直線なり.

A,B ヲ二定點トシ,線分 AB ヲ其中點 O ニ於テ垂直ニ二等分スル直線ヲ XY トセヨ. 然ルトキハ A,B ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ直線XYナルベシ.



證明 (第一) P ヲ XY 上ノ任意ノ點トセヨ. XY ハ AB ヲ垂直ニ二等分スル直線ナルヲ以テ二ツノ線分 PA ト PB トハ相等シ(第二編定理6系),卽チ XY 上ノ任意ノ點ハ A, B ヨリ相等シキ距離ニアリ.

(第二) Q ヲ XY 上ニアラザル任意ノ點トシ之ヲ A,B,O ノ各ニ結付ケヨ. 然ルトキハ OQ ハ AB ニ垂直ナラズ,從テ ∠QOA ト ∠QOB トハ相等シカラズ,故ニ QA ハ QB ニ等シカラズ(第二編定理16). 卽チ XY 上ニアラザル任意ノ點ハ A,B ヨリ相等

シキ距離ニアラズ.

故ニ XY ハ A, B ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ナリ.

注意 1. 或線ガ或與ヘラレタル性質ヲ有スル點(卽チ或與ヘラレタル條件に適する點)ノ軌跡ナルコトヲ證明スル爲ノ(第一)ノ定理,卽チ

此線上ノ點ハ總テ與ヘラレタル性質ヲ有ス.

ヲ證明スル代リニ其對偶定理ナル

(第三) **此性質を有せざる點は此線上にあらず**

ヲ證明シ,又前節ノ(第二)定理,卽チ

此線上ニアラザル點ハ此性質ヲ有セズ.

ノ代リニ其對偶定理ナル

(第四) **此性質を有する點は總て此線上にあり**

ヲ證明シテモヨシ.

注意 2. 軌跡トイフ言葉ヲ用フルトキハ圓周ノ定義ヲ次ノ如ク述ブルコトヲ得.

圓周は一定點(卽ち中心)より一定の距離にある同一平面上の點の軌跡なり.

問題 56. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求

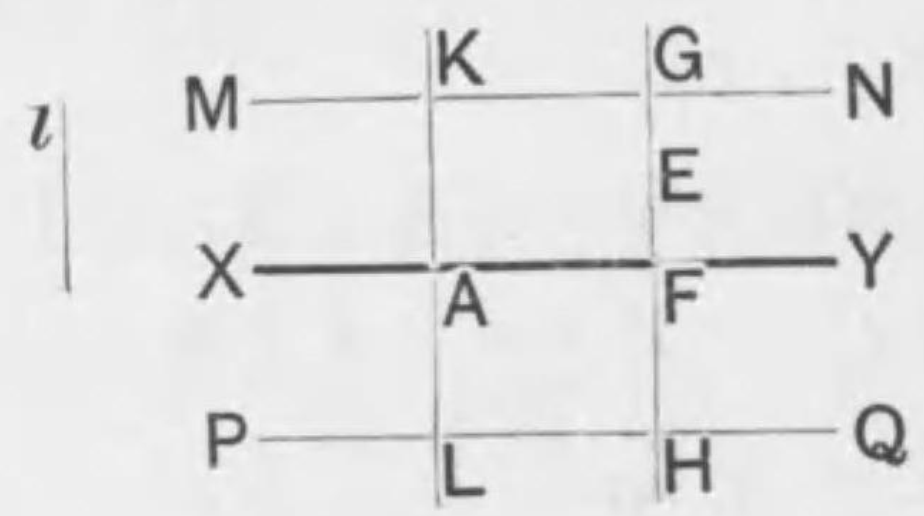
ムルコト.

問題 57. 二定點ヨリ相等シキ距離ニアル點ヲ定直線上ニ求ムルコト.

117. 軌跡題 1. 定直線よりの距離が,與へられたる線分の長さに等しき點の軌跡を求むること.

XY ヲ定直線, l ヲ與ヘラレタル線分トシ, XY ヨリノ距離ガ l ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム.

解 XY 上ノ任意ノ點 A ヨリ之ニ垂線ヲ引キ,其上ニ A ノ兩方ニ於テ l ニ等シキ線分 AK, AL ヲ取レ. K ト L トノ各ヨリ XY ニ平行ナル直線 MN, PQ ヲ引ケバ,此二直線ガ求ムル所ノ軌跡ナリ.



證明 先ヅ此二直線ノ中ノ一ツノ上ニアル任意ノ點ヨリ XY ニ下シタル垂線ノ長サハ AK 又ハ AL ノ長サ,卽チ l ノ長サニ等シ(第二編定理25系3).

次ニ MN ノ上ニモ, PQ ノ上ニモアラザル任意ノ一點ヲ E トシ,之ヨリ XY ヘ垂線 EF ヲ引キ,ソレ或ハ其延長ガ MN, PQ ニ交ル點ヲ夫夫 G, H トセヨ. 然ルトキハ F ハ MN, PQ ノ何レノ上ニモアラザルヲ以テ E ハ G, H ト異ナル. 故ニ FE ハ FG 或ハ FH ト等長ナラズ,故ニ FE ハ l ニ等シカラズ.

故ニ MN ノ上ニモ, PQ ノ上ニモアラザル點ト XY トノ距離ハ l ニ等シカラズ.

故ニ XY ヨリノ距離ガ l ニ等シキ點ノ軌跡ハ二直線 MN, PQ ナリ.

問題 58. 定直線ニ切シ,半徑ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト.

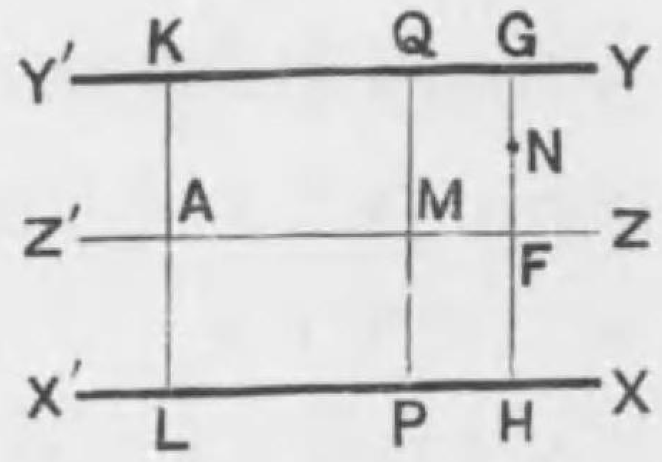
118. 軌跡題 2. 二定直線より相等しき距離にある點の軌跡を求むること.

XX′, YY′ ヲ二定直線トシ,此二直線ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求ム.

解 (第一) XX′ ト YY′ トガ互ニ平行ナル場合.

YY′上ノ任意ノ一點KヨリXX′ニ垂線KLヲ下シ,其中點AヨリXX′トYY′トニ平行ナル直線ZZ′ヲ引ケバ,ZZ′ガ求ムル所ノ軌跡ナリ.

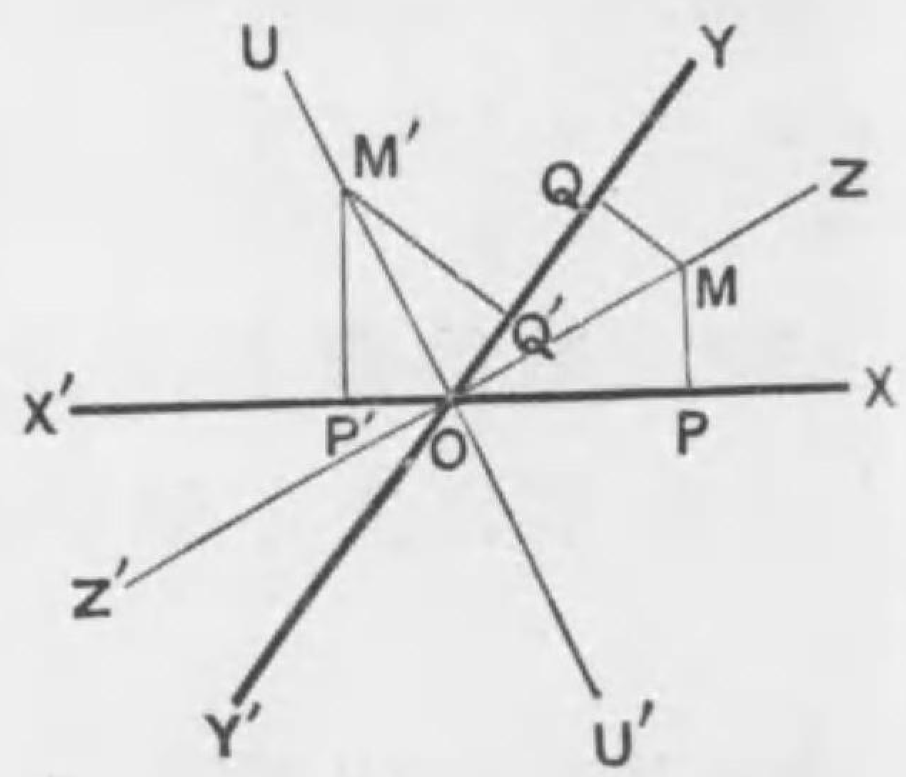
證明　ZZ′上ノ任意ノ點MヨリXX′及YY′ヘノ距離ハ孰レモKLノ半分ニ等シキガユヱ,互ニ相等シク,ZZ′上ニアラザル一點NヨリXX′及YY′ヘノ距離ハ相等シカラズ.因テZZ′ガ求ムル所ノ軌跡ナリ.



(第二)　XX′トYY′トガ點Oニ於テ相交ル場合.

マヅMヲXX′トYY′トヨリ相等シキ距離ニアル點トセヨ.

Mヨリ此二直線ニ垂線MP, MQヲ下セ.



然ルトキハ二ツノ直角三角形MPO, MQOハ相等シ(第二編定理12).

$$\therefore \quad \angle MOP=\angle MOQ$$

故ニMガ角XOY又ハ其對頂角X′OY′ノ内ニアレバ,Mハ此二ツノ角ヲ二等分スル直線ZZ′ノ上ニアリ.然ラザレバMハ角YOX′及XOY′ヲ二等分スル直線UU′ノ上ニアリ.

次ニZZ′若クハUU′上ノ任意ノ點M′ヨリXX′及YY′ヘ垂線M′P′, M′Q′ヲ引ケ.然ルトキハ二ツノ直角三角形M′OP′トM′OQ′トハ相等シ.(第二編定理23系5)

$$\therefore \quad M'P'=M'Q'$$

卽チZZ′及UU′上ノ點ハXX′トYY′トヨリ相等シキ距離ニアリ.因テ

相交る二直線より相等しき距離にある點の軌跡は其交點を頂點とする二組の對頂角の二等分線にして互に垂直なる二直線なり.

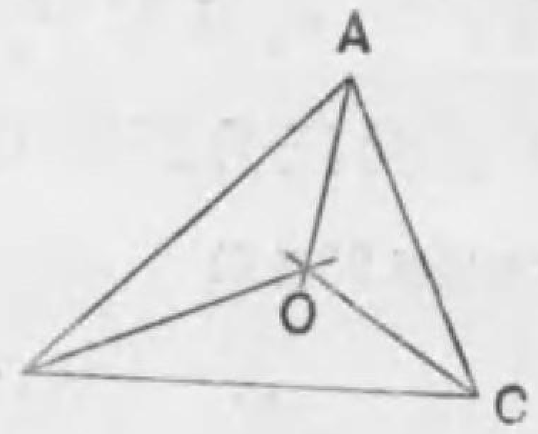
問題59.　二定直線ニ切シ且ツ半徑ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ圓周ヲ書クコト.

問題60.　二定直線ニ切シ且ツ中心ガ他ノ定

直線ノ上ニアル圓ヲ書クコト.

119. 定理 22. 三角形の三つの角の二等分線は同一の點を通る.

證明 △ABC ノ二角 A 及 B ノ二等分線ハ三角形内ノ一點ニ於テ相交ル. ソコデ其交點ヲ O トセンニ, O ハ邊 AB ト邊 AC トヨリ相等シキ距離ニアリ, 又邊 AB ト邊 BC トヨリモ相等シキ距離ニアリ(前節軌跡題2). 因テ O ハ邊 BC ト邊 AC トヨリモ相等シキ距離ニアリ.



故ニ O ハ角 C ノ二等分線上ニアリ(前節軌跡題2), 卽チ此二等分線ハ點 O ヲ通ル.

因テ三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.

問題 61. 三角形ノ內ニアリテ其三邊ニ切スル圓ヲ書クコト.

定義 箇樣ナル圓ヲ三角形ノ內接圓トイヒ, 其中心ヲ三角形ノ內心トイフ.

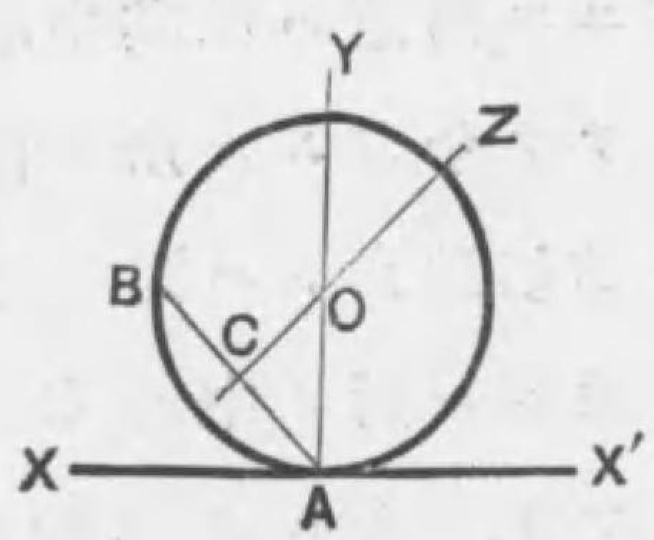
問題 62. 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ書クコト.

定義 三角形ノ二邊ノ延長ト他ノ一邊トニ切スル圓ヲ三角形ノ傍接圓トイヒ, 其中心ヲ三角形ノ傍心トイフ.

問題 63. 三角形ノ三ツノ傍心ノ中何レカ二ツヲ結付クル線分ハ一ツノ頂點ヲ通リ且ツ殘リノ傍心ト內心トヲ通ル直線ニ垂直ナリ.

120. 作圖題 16. 定直線上の一定點に於て之に切し, 此直線上にあらざる他の一定點を通る圓を書くこと.

XX′ ヲ定直線, A ヲ其上ニ在ル一定點, B ヲ其上ニ在ラザル他ノ一定點トシ, A ニ於テ XX′ ニ切シ, 且ツ B ヲ通ル圓ヲ書クコトヲ求ム.



解　今求ムル所ノ圓ノ中心Oハ A ニ於ケル XX′ノ垂線AYノ上ニアルベク,且ツABヲ垂直ニ二等分スル直線CZノ上ニモアルベキガユヱニ,此二ツノ直線ノ交點ナラザルベカラズ．ソコデ其交點Oヲ中心トシ,OA又ハOBヲ半徑トシテ書キタル圓ノ周ハA,Bヲ通リ,且ツAニ於テXX′ニ切ス,故ニ是ガ求ムル所ノ圓ナリ．

121. 作圖題 17.　定圓周上の一定點に於て之に切し,且つ定直線に切する圓を書くこと．

Oヲ定圓, Aヲ其圓周上ノ一定點, XYヲ定直線トシ, Aニ於テ圓Oニ切シ,且ツXYニ切スル圓ヲ書クコトヲ求ム．

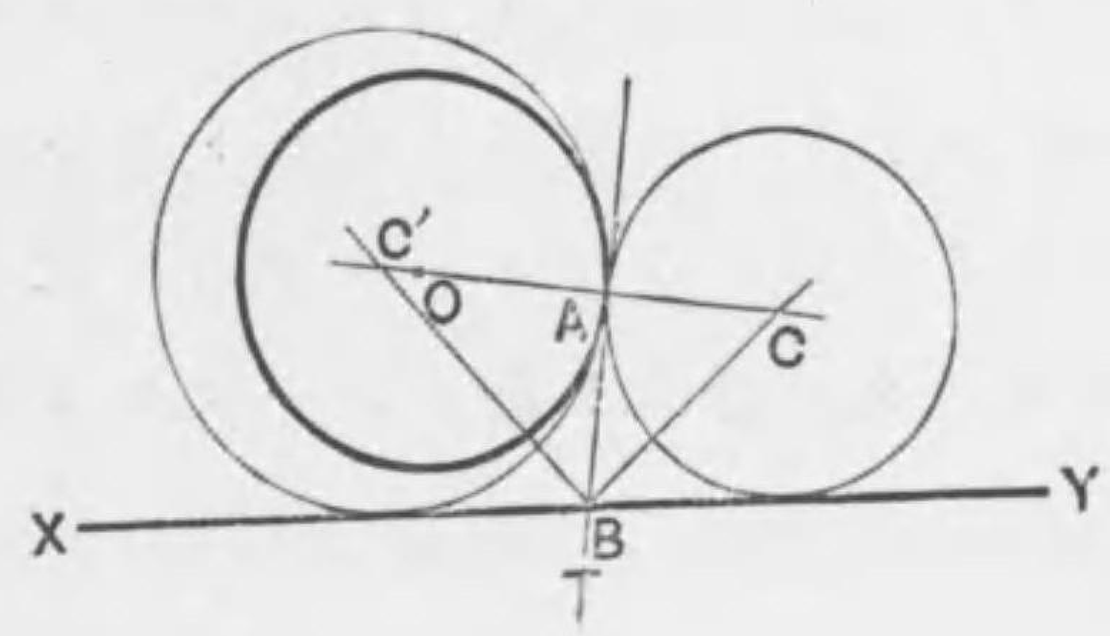
解　今求ムル所ノ圓周上ノ一點Aガ知レテアルユヱ,問題ハ唯其中心ヲ求ムルコトニ歸ス．

サテ今求ムル所ノ圓ノ中心Cト定圓ノ中心OトSSB切點Aトハ同一直線上ニアリ(定理15系2)．故ニ今求ムル所ノ中心CハOトAトヲ通ル直線上ニアリ．次ニAニ於ケル圓Oノ切線ATハ亦圓Cノ切線ナリ,而シテXYモ亦圓Cノ切線ナルユヱ,今求ムル所ノ中心CハXYトATトヨリ相等シキ距離ニアリ(定理13)．故ニ中心CハATトXYトヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ト直線OAトノ交點ナリ．

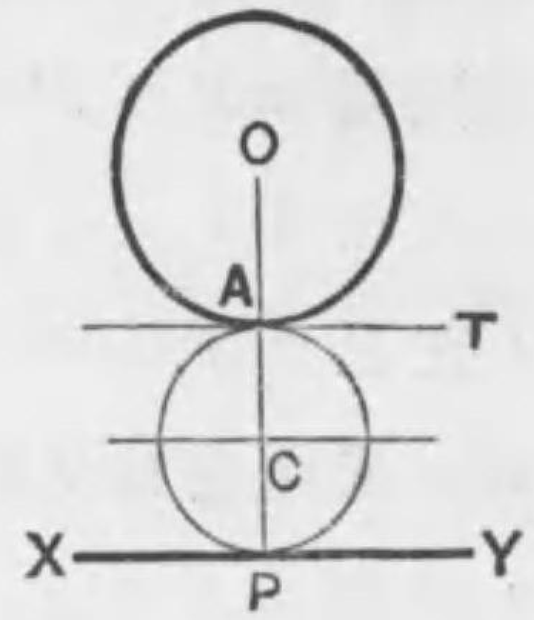
サテ又此交點ヲ中心シ,ソレヲAニ結付クル線分ヲ半徑トスル圓ハ圓OニAニ於テ切シ,且ツ直線XYニ切スルコト明カナリ．因テ次ノ作圖法ヲ得．

作圖法　先ヅ直線OAヲ引キ,次ニAニ於テ圓Oニ切線ヲ引ケ．

若シATガXYトBニ於テ交ラバ,角YBA及其接角ノ二等分線ヲ作リ,夫レトOAトノ交點C, C′ノ各ヲ中心トシ,前ノ如クシテ求ムル所ノ圓ヲ得ベシ．



若シ AT ガ XY ニ平行ナラバ, AT ト XY トヨリ相等シキ距離ニアル直線ヲ作リ, ソレト OA トノ交點 C ヲ求メヨ. C ヲ中心トシ, CA ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ, 是ガ求ムル所ノ圓ナリ.



吟味 (第一) AT ガ XY ニ交ルトキハ, OA ハ AT ニ垂直ナルユヱ,角 XBA 及角 YBA ノ二等分線ガ AT トナス角ハ何レモ直角ニアラズ. 故ニ此二直線ノ各ハ OA ニ交ル. 故ニ此場合ニハ二ツノ解アリ.

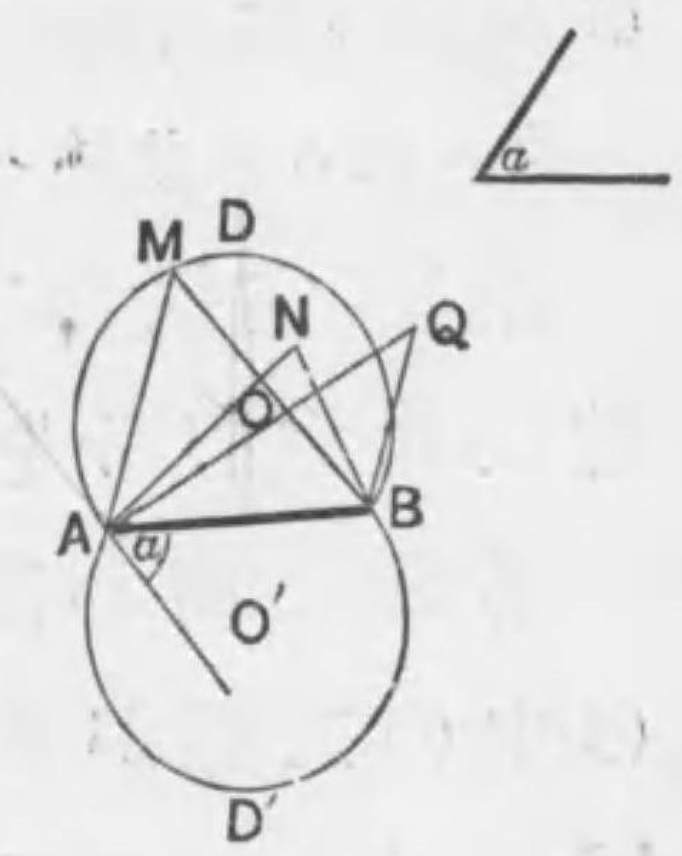
(第二) AT ガ XY ニ平行ナル場合ニ於テハ,求ムル所ノ圓ノ中心ハ AT ト XY トヨリ相等シキ距離ニアリテ且ツ直線 OA 上ニアルベキニヨリ O ヨリ XY ニ下シタル垂線ノ足 P ト A トヲ兩端トスル線分ノ中點ナラザルベカラズ. 故ニ此場合ニハ必ズ一ツノ解アリ,而シテ一ツヨリ外ニハナシ.

問題 64. 定直線上ノ一定點ニ於テ之ニ切シ, 且ツ定圓周ニ切スル圓ヲ畫クコト.

122. 軌跡題 3. 定線分を見込む角が與へられたる角に等しき點の軌跡を求むること.

解 AB ヲ定線分, α ヲ與ヘラレタル角トセヨ.

AB ヲ雙方ヘ延長スレバ此直線ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ツ. ソコデ,マヅ其中ノ一ツノ部分ダケヲ取リ其上ニ於テ AB ヲ見込ム角ガ角 α ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求メントス.



AB ノ一端 A ヨリ,之ト α ニ等シキ角ヲナス半直線ヲ平面ノ他ノ部分ニ引キ, A ニ於テ此半直線ニ切シ,且ツ點 B ヲ通ル圓ヲ畫ケ(作圖題16). 然ルトキハ AB ニ對シ此半直線ト反對ノ側ニアリテ,今畫キタル圓ノ弧 ADB 上ノ點ニ於テ AB ヲ見込ム角ハ α ニ等シ. (定理20)

又此弧ノ上ニアラザル點ニ於テ AB ヲ見込ム角ハ α ニ等シカラズ(定理18).

平面ノ他ノ部分ニアリテハ弧 ADB トハ AB ニ對シテ反對ノ側ニ,上ニ述ベタルト同樣ニシテ作リタル,弧 ADB ニ等シキ弧 AD'B 上ノ點ニ限リ,此性質ヲ有ス.

故ニ AB ヲ見込ム角ガ α ニ等シキ點ノ軌跡ハ弧 ADB ト弧 AD'B トナリ.

故ニ求ムル軌跡ハ二ツノ弧 ADB, AD'B ナリ.

系 1. 定線分を直角に見込む點の軌跡は此定線分を直徑とする圓周なり.

系 2. 同一直線上にあらざる四點の中の二點が他の二點を通る直線の同じ側にありて,前の二點の各に於て後の二點を結付くる線分を見込む角が相等しければ,此四點は同一圓周上にあり.

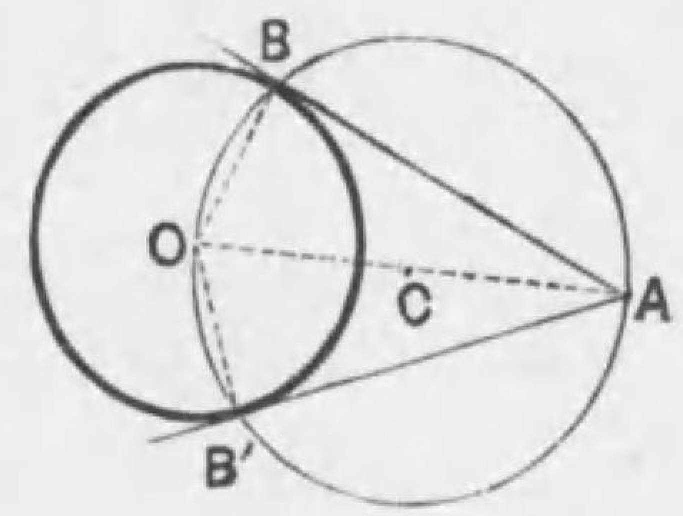
問題 65. 一定點ヲ通ル,定圓ノ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

問題 66. 弧 APB 上ノ任意ノ點 P ト A トヲ結付ケ之ヲ P ノ方ヘ BP ニ等シキダケ延長シ,其端ヲ Q トスレバ, Q ノ軌跡如何.

123. 作圖題 18. 定圓外の一定點より,之に切線を引くこと.

定圓 O 外ノ一定點 A ヨリ圓 O ニ切線ヲ引クコトヲ求ム.

解 今問題ガ解カレタリト假定シ, AB ガ求ム切線ニシテ,B ガ其切點ナリトセヨ. 然ルトキハ角 ABO ハ直角ナリ,故ニ點 B ハ圓 O ノ周ノ上ニアルト同時ニ, OA ヲ直徑トシテ書キタル圓周上ニアリ(軌跡題3系1).



逆ニ此二ツノ圓周ノ交點ヲ A ニ結付クル線分ハ圓 O ノ一ツノ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナルユヱ,圓 O ニ切ス(定理13系2). 因テ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 O ト A トヲ結付クル線分ヲ直徑トス

圓Cヲ畫キ,其周ト圓Oノ周トノ交點トAトヲ通ル直線ヲ引ケ. 是ガ求ムル所ノ切線ナリ.

吟味 圓Cノ周ハ圓Oノ內ノ一點Oト其外ノ一點Aトヲ通ルガユヱニ,圓Oノ周ニ交ル.

サテ此二ツノ圓周ノ交點ハ二ツアリ,而シテ二ツヨリ多クハナシ(定理13系1),故ニAヨリ圓Oニ二ツノ切線ハ必ズ引カレ,二ツヨリ多クハ引カレズ.

系 圓外の一點と,此點より此圓へ引きたる二つの切線の各の切點とを兩端とする二つの線分は相等しく,此點及圓の中心を結付くる線分と切線の各とがなす二つの角は相等し.

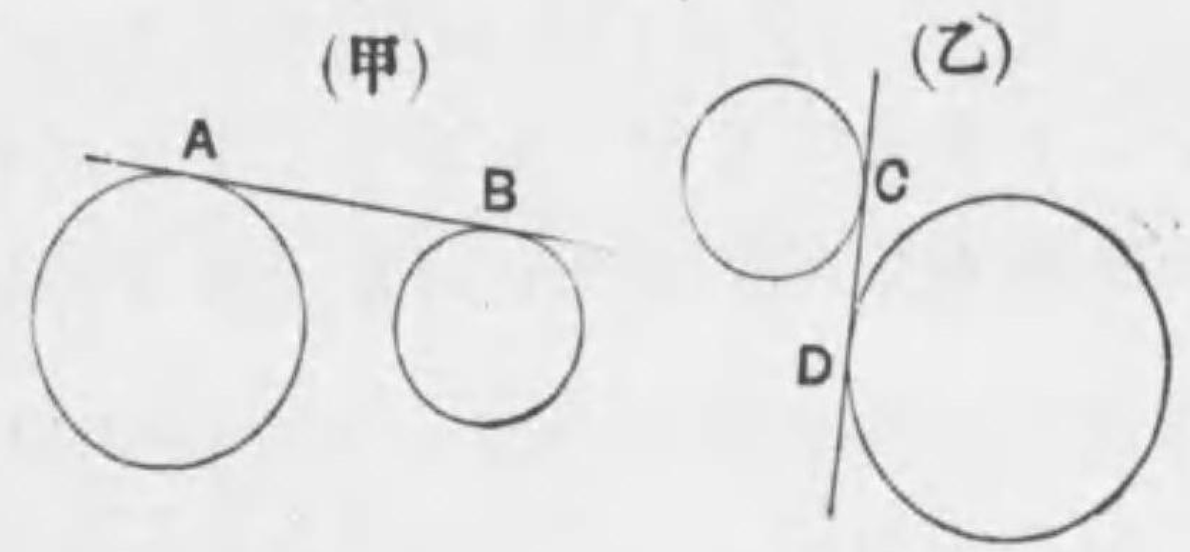
定義 此相等シキ二ツノ線分ノ長サヲ圓外ノ一點ヨリ引キタル**切線の長さ**トイフ.

問題 67. 圓Oノ互ニ平行ナル二ツノ切線ガ任意ノ第三ノ切線ト夫夫A, Bニ於テ交レバ角AOBハ直角ナリ.

124. 定義 二ツノ圓ニ共通ナル切線ヲ其

公切線トイフ. 其中デ二ツノ圓ガ夫レノ同ジ側ニアル者ヲ**外公切線**トイヒ,二ツノ圓ガ夫レノ反對ノ側ニアル者ヲ**內公切線**トイフ.

例ヘバ甲圖ノ直線ABハ外公切線ニシテ,乙圖ノ直線CDハ內公切線ナリ.



125. 作圖題 19. 二定圓に公切線を引くこと.

二定圓O及O'ニ公切線ヲ引クコトヲ求ム.

(第一) 外公切線ヲ引クコト.

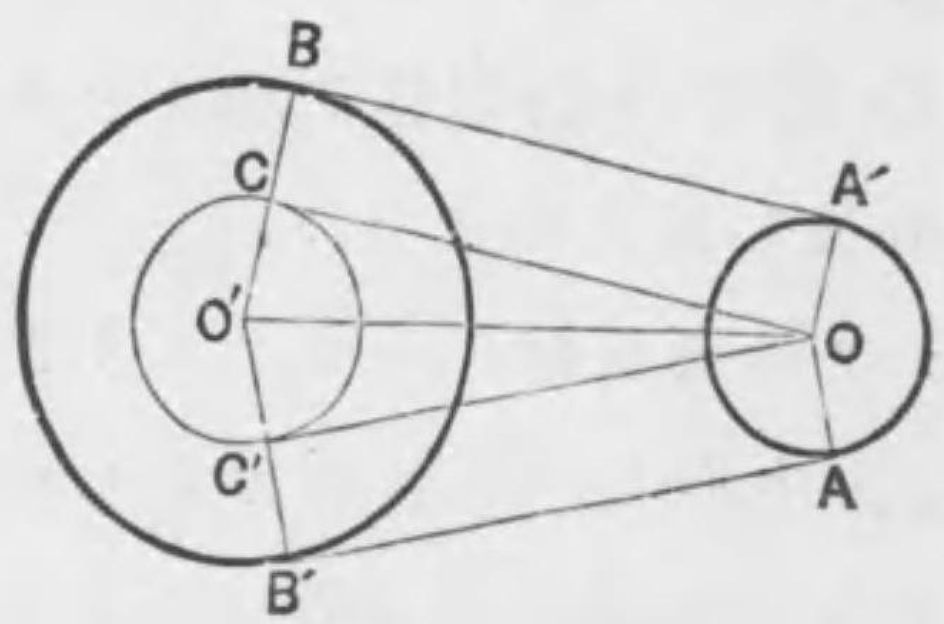
解 ABヲ外公切線ノ一ツナリト假定シ,切點A, Bヲ夫夫中心O, O'ニ結付クレバ $OA \perp AB$, $O'B \perp AB$ナリ. 今OヨリABニ平行直線ヲ引キO'BトCニテ交ラシムレバ四邊形OABCハ矩形ニシテO'Cハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シ,而シテOCハO'ヲ中心トシO'Cヲ半徑トスル圓ニ切ス. 因テ

次ノ作圖法ヲ得.

作圖法　一ツノ圓 O' ノ中心ヲ中心トシ,二ツノ圓ノ半徑ノ差ニ等シキ半徑ニテ圓ヲ畫ケ.

次ニ此圓ニ他ノ圓ノ中心 O ヨリ引キタル切線ノ切點ヲ求メヨ(作圖題18). 此切點ヲ C, C' トシ,之ヲ通ル定圓 O' ノ半徑 $O'B$, $O'B'$ ヲ引ケ. ソコデ $O'B$, $O'B'$ ト夫夫同方向ニ定圓 O ノ半徑 $O'A$, $O'A'$, ヲ引キ直線 AB, $A'B'$ ヲ作レバ是ガ求ムル外公切線ナリ.

何トナレバ,箇様ニシテ得ル圖形 $OABC$ ハ矩形ニシテ直線 AB ハ A ト B トニ於テ,夫夫半徑 OA, $O'B$ ニ垂直ナレバナリ. $A'B'$ モ亦同樣ナリ.



吟味　二ツノ圓ノ半徑ヲ夫夫 r, r' トシ, $r'>r$ トスレバ $O'C=r'-r$ ニ等シ. ソコデ

(1)　$OO'>r'-r$ ナルトキ卽チ圓 O ノ周ト圓 O' ノ周トガ相交ルカ,若クハ互ニ外切スルカ,若クハ各ノ圓ガ全ク他ノ圓ノ外ニアルトキハ,點 O ハ此同心圓ノ外ニアルユヱ,此圓ニ切線ガ二ツハ引カル. 因テ圓 O ト圓 O' トノ外公切線ハ二ツハ必ズアリ,而シテ唯二ツニ限ル.

(2)　$OO'=r'-r$ ナルトキ,卽チ二ツノ圓ガ內切スルトキニハ此切點ニ於テ必ズ唯一ツノ外公切線アリ.

(3)　$OO'<r'-r$ ナルトキ,卽チ一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ內ニアルトキハ,二ツノ圓ハ外公切線ヲ有セズ.

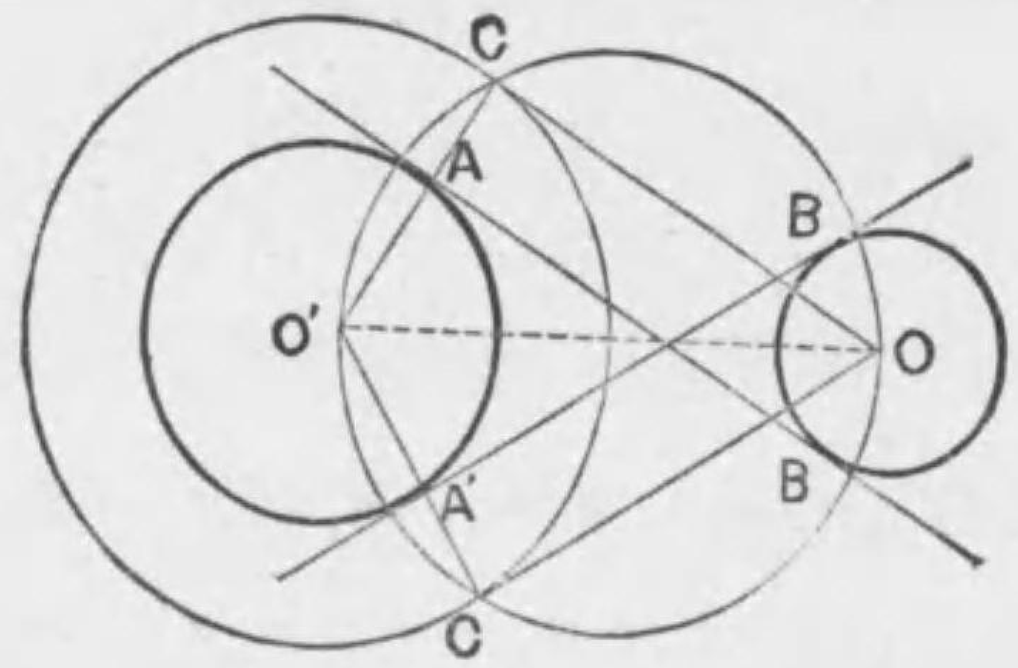
注意　二ツノ圓ガ相等シキ場合ニハ二ツノ中心ヲ結付クル線分 OO' ニ垂直ナル各圓ノ直徑 AOA', $BO'B$ ヲ作リ, OO' ノ同ジ側ニアル端 A ト B ト; A' ト B' トヲ結付クレバ是ガ求ムル外公切線ナリ.

(第二)　內公切線ヲ引クコト.

第一ノ場合ト同樣ニシテ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法　一ツノ定圓 O' ノ中心ヲ中心トシ,二ツノ圓ノ半徑ノ和ニ等シキ半徑ニテ圓ヲ畫キ,次

ニ OO' ヲ直徑トスル圓ヲ書ケ. 此二ツノ圓周ノ交點 C ト中心 O' トヲ結付ケ,ソレト圓 O' ノ周トノ交點 A ヲ求メヨ. A ヨリ直線 CO ニ平行ナル直線ヲ引ケ,是ガ求ムル所ノ內公切線ナリ.



吟味 (1) $OO'>r+r'$ ナルトキ,卽チ各ノ圓ガ全ク他ノ圓ノ外ニアルトキハ點 O ハ圓 O' ノ同心圓ノ外ニアルユヱ,此點ヨリ此圓ニ切線ガ二ツ引カル. 因テ圓 O ト圓 O' トノ內公切線ハ二ツハ必ズアリ,而シテ唯二ツニ限ル.

(2) $OO'=r+r'$ ナルトキ,卽チ二ツノ圓ガ互ニ外切スルトキハ此切點ニ於テ必ズ唯一ツノ內公切線アリ.

(3) $OO'<r+r'$ ナルトキ,卽チ二ツノ圓ノ周ガ相交ルカ,又ハ二ツノ圓周ガ內切スルカ,或ハ一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ內ニアルトキハ此二ツノ圓ハ內公切線ヲ有セズ.

問題 68. 定圓ニ於テ與ヘラレタル長サノ弦ヲ引キ,其延長ガ他ノ定圓ニ切スル樣ニスルコト.

問題 69. 頂角,周及高サヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

練習第四

問題 70. 圓ニ外接スル四邊形ノ相對スル邊ノ和ハ相等シ.

問題 71. 圓ノ二ツノ弦 AB, CD ガ互ニ垂直ナルトキハ $\widehat{AD}+\widehat{BC}$ ハ半圓周ニ等シ.

問題 72. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ, PA ハ PB ト PC トノ和ニ等シ.

問題 73. 三角形 ABC ノ內接圓ノ中心 O ト頂點 A トヲ通ル直線ガ,此三角形ノ外接圓ノ周ト交ル點ヲ D トスレバ,三ツノ線分 DB, DO, DC ハ互ニ相等シ.

問題 74. 定直線ニ常ニ平行ニシテ,且ツ其一

端ガ定圓周上ヲ離レヌ様ニ,與ヘラレタル長サノ線分ヲ動カストキ,此線分ノ他ノ端ノ軌跡ヲ求ム.

問題 75. AB ヲ一ツノ圓ノ直徑, BC ハ AB ノ延長ニシテ半徑ニ等シトス, C ヨリノ切線ノ一ツノ切點ヲ D トスレバ △ACD ハ二等邊三角形ナリ.

問題 76. A, B ハ二ツノ圓周ノ交點ナリ,其一ツノ圓周上ノ任意ノ一點 C ヨリ二ツノ半直線 CA, CB ヲ引キ,他ノ圓周ト夫夫點 D, E ニ於テ交ラシムルトキハ弧 DE ノ長サハ不易ナリ.

問題 77. 同一點ヲ通ラザル三ツノ定直線ノ各ヨリ同一ノ與ヘラレタル線分ニ等シキ長サノ弦ヲ截リ取ル圓周ヲ書クコト.

問題 78. 二ツノ圓周ノ交點ノ中ノ一ツ A ヲ通リテ直線ヲ引キ,各ノ圓周ト夫夫 B, C ニ於テ交ラシメ,又 A ヲ通ル任意ノ直線ヲ引キ,圓周ト P, Q ニテ交ラシムレバ,二ツノ弦 BP, CQ ノ延長ノ交點 R ノ軌跡ハ或一ツノ圓周ナリ.

問題 79. 定直線ト定圓周トニ切シ,與ヘラレタル長サノ半徑ヲ有スル圓周ヲ書クコト.

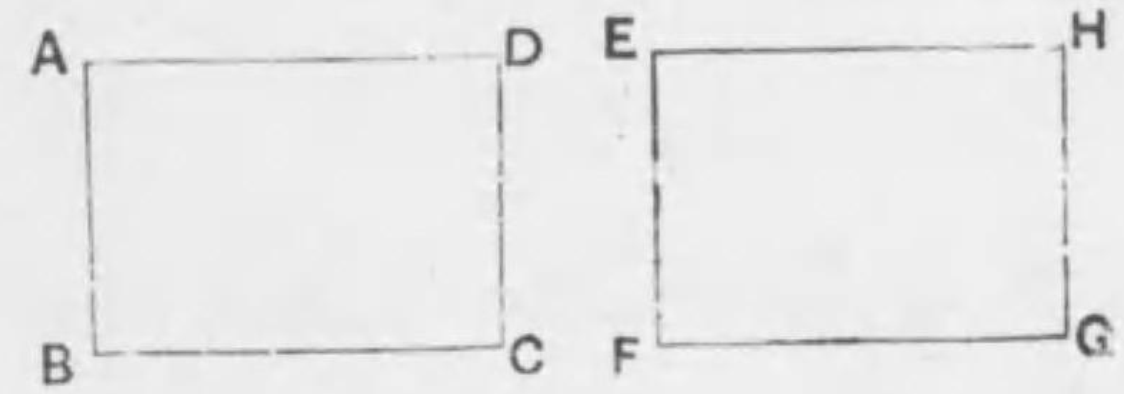
第四編 面積

126. 定義 相等シキ廣サ(卽チ相等シキ面積)ヲ有スル二ツノ圖形ヲ**等積なり**ト云フ.

注意 相等シキ二ツノ圖形ハ必ズ等積ナリ. 然レドモ等積ナル二ツノ圖形ハ必ズシモ相等シカラズ.

127. 定理 1. 相隣れる二邊が夫夫相等しき二つの矩形は相等し.

二ツノ矩形 ABCD ト EFGH トニ於テ, AB ト EF トガ相等シク, BC ト FG トガ相等シトセヨ. 然ルトキハ此二ツノ矩形ハ相等シカルベシ.



證明 邊 FG ガ夫レニ等シキ邊 BC ノ上ニ重ナリ且ツ點 E ト點 A トガ邊 BC ノ同ジ側ニアル様ニ矩形 EFGH ノ平面ヲ矩形 ABCD ノ平面ノ

上ニオケ．然ルトキハ EF ハ AB ニ等シキヲ以テ點 E ハ點 A ノ上ニ落ツ而シテ EH, HG ハ夫夫 FG, EF ニ平行ナルユヱ, EH ハ AD ノ上ニ, HG ハ CD ノ上ニ重ナル．卽チ此二ツノ矩形ハ相合ス,從テ此二ツノ矩形ハ相等シ．

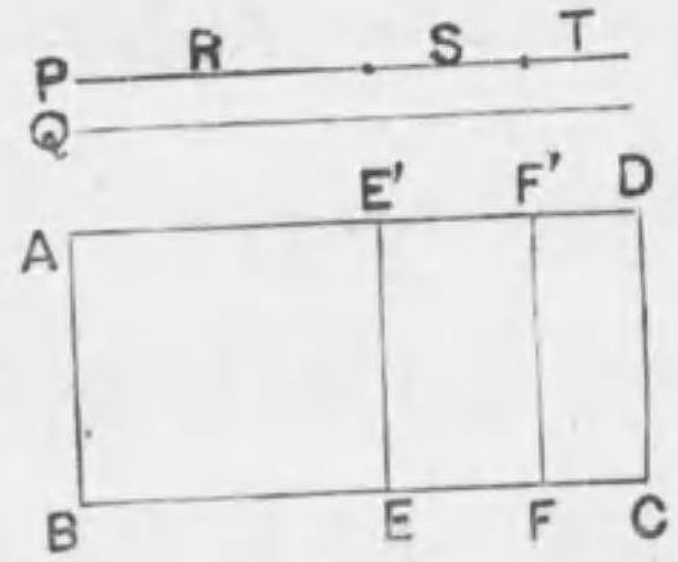
系 1. 邊の長さが相等しき二つの正方形は相等し．

定義 二ツノ與ヘラレタル線分 AB, CD ニ等シキ相隣レル二邊ヲ有スル矩形ヲ略シテ**此二線分の包む矩形**トイヒ,其面積ヲ**此二線分の積**ト名ヅク,而シテ其面積ヲ AB.CD ニ表スコトニ定ム．

又線分 EF ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ノ面積ヲ **EFの平方**ト名ヅケ,之ヲ EF^2 ニテ表スコトニ定ム．

128. 定理 2. 二つの線分の包む矩形の面積は,其中の一つを幾つかに分つとき,其各部分と他の線分との包む矩形の面積の和に等し．

P, Q ヲ二ツノ線分トシ, P ヲ例ヘバ三ツニ分チタル部分ヲ R, S, T トセヨ．然ルトキハ P, Q ノ包ム矩形ノ面積ハ R ト Q ト；S ト Q ト；T ト Q トノ各ガ包ム矩形ノ面積ノ和ニ等シカルベシ．



證明 BC=P, AB=Q ト取レバ矩形 ABCD ハ P, Q ノ包ム矩形ニ等シ．

BC ハ P(卽チ R, S, T ノ和)ニ等シキヲ以テ之ヲ二點 E, F ニテ分チ BE=R, EF=S, FC=T トスルコトヲ得．而シテ E, F 各ノヨリ AB ニ平行直線ヲ引キ AD ト夫夫 E′, F′ ニ於テ交ラシムレバ元ノ矩形 ABCD ハ三ツノ矩形 ABEE′, E′EFF′, F′FCD ニ分タル．而シテ此三ツノ矩形ハ夫夫 R ト Q ト；S ト Q ト；T ト Q トノ各ガ包ム矩形ニ等シ．

$$\therefore \quad P.Q=R.Q+S.Q+T.Q$$

系 1. 二つの線分の差と他の一つの線分との積は,第三の線分と前の二つの線分の各との積の差に等し．

系 2. 等積にして,其一邊が相等しき二つの矩形は相等し.

問題 1. 四點 A, B, C, D ガ同一ノ直線上ニ此順ニアレバ $AC.BD=AB.CD+BC.AD$ ナリ

129. 定理 3. 平行四邊形は其底邊と高さとの包む矩形と等積なり.

證明 平行四邊形 ABCD ノ底邊ノ兩端ヨリ,之ニ垂線ヲ引キ,其對邊若クハ其延長ト夫夫 E, F ニテ交ラシメヨ. 然ルトキハ四邊形 BCFE ハ平行四邊形ノ底邊 BC ト其高サ CF トノ包ム矩形ナリ.

然ルニ二ツノ直角三角形 ABE, DCF ニ於テ

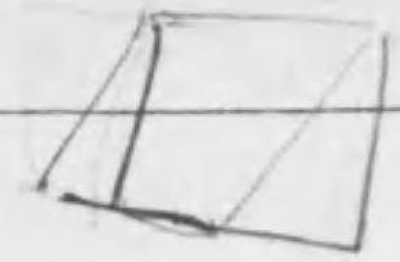
$$BA=CD \quad \text{(第二編定理 25)}$$

$$BE=CF$$

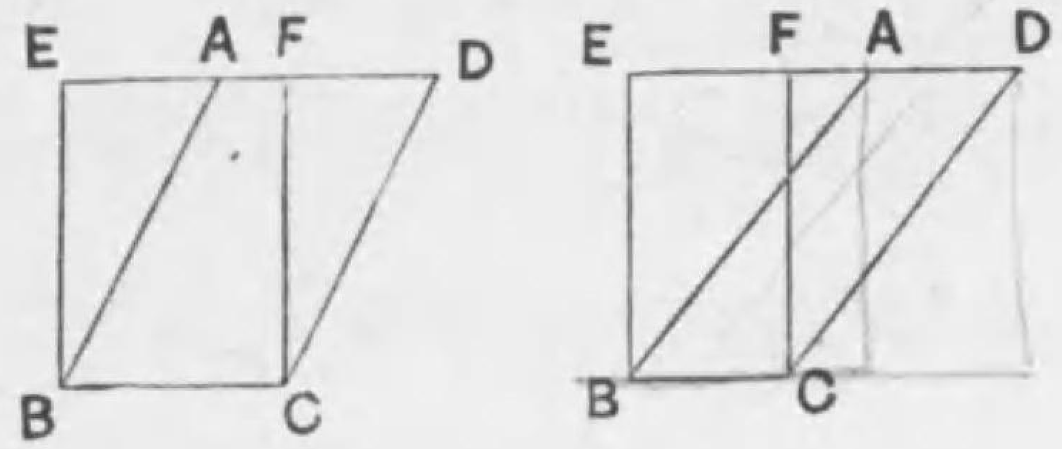
$$\therefore \triangle BAE \equiv \triangle CDF \quad \text{(第二編定理 12)}$$

故ニ梯形 BCDE ノ面積ヨリ別々ニ此二ツノ三角形ノ面積ヲ引キタル者ハ相等シ.

故ニ平行四邊形 ABCD ト矩形 BCFE トハ等



積ナリ.

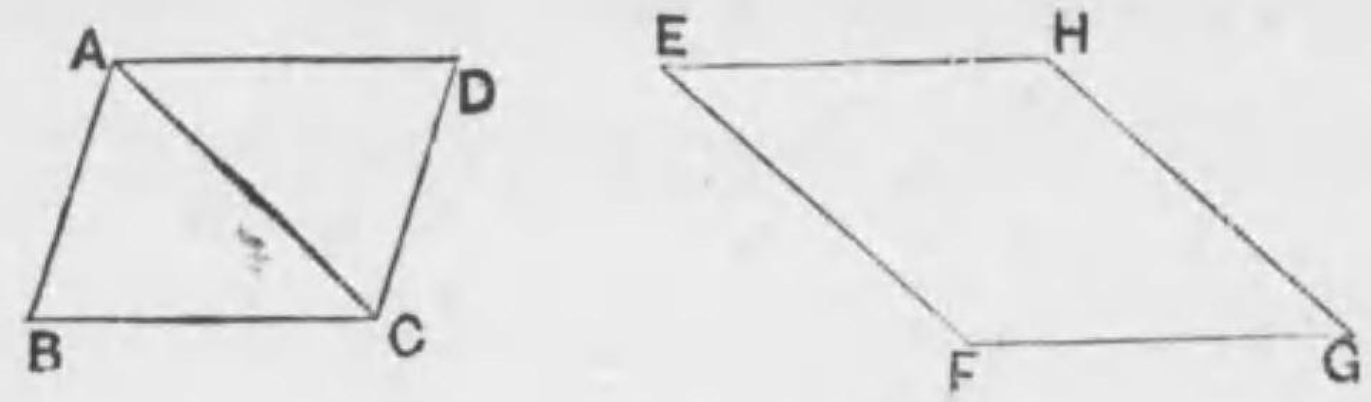


系 1. 底邊及高さが夫夫相等しき二つの平行四邊形は等積なり.

系 2. 等積なる二つの平行四邊形の底邊(或は高さ)が相等しければ其高さ(或は底邊)も亦相等し.

130. 定理 4. 三角形の面積は,之と等しき底邊及高さを有する平行四邊形の面積の半分に等し.

三角形 ABC ト平行四邊形 EFGH トニ於テ底邊 BC, FG ハ相等シク,且ツ之ニ對スル高サヲ相等シトセヨ. 然ルトキハ $\triangle ABC$ ノ面積ハ平行四邊形 EFGH ノ面積ノ半分ニ等シカルベシ.



證明　△ABC ノ二ツノ頂點 A, C ヨリ夫夫邊 BC, BA ニ平行ナル直線ヲ引キ,其交點ヲ D トセヨ. 然ルトキハ ABCD ハ平行四邊形ニシテ其底邊ト高サトハ三角形 ABC ノ夫レ等ニ同ジ,而シテ △ABC≡△ADC, 故ニ三角形 ABC ハ平行四邊形 ABCD ノ半分ニ等シ.

然ルニ平行四邊形 EFGH ノ底邊ト高サトハ夫夫△ABC ノ底邊ト高サトニ等シク,從テ ABCD ノ底邊ト高サトニ等シキユヱ, EFGH ハ ABCD ト等積ナリ. (前節定理系1)

故ニ △ABC ノ面積ハ平行四邊形 EFGH ノ面積ノ半分ニ等シ.

系 1.　三角形の面積は其底邊と高さとの包む矩形の面積の半分に等し.

系 2.　底邊及高さが夫夫相等しき

二つの三角形は等積なり.

系 3.　等積なる二つの三角形の底邊(或は高さ)が相等しければ,其高さ(或は底邊)も亦相等し.

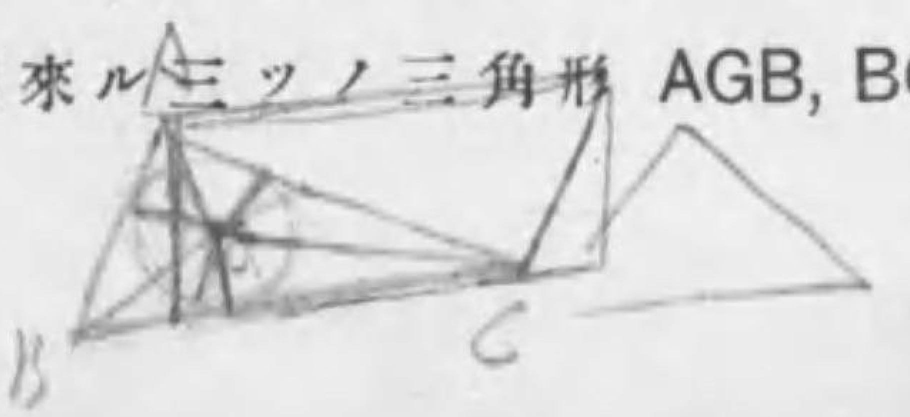
系 4.　同一直線上に相等しき底邊を有し,且つ其直線の同じ側にありて等積なる二つの三角形の頂點を通る直線は底邊に平行なり.

問題 2.　同一ノ底邊ヲ有シ,其兩側ニアル等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ結付クル線分ハ底邊若クハ其延長ニヨリテ二等分セラル.

問題 3.　四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスルトキ,二ツノ三角形 AOD ト BOC トガ等積ナレバ, AB ハ CD ニ平行ナリ.

問題 4.　平行四邊形ノ二ツノ對角線ハ之ヲ等積ナル四ツノ部分ニ分ツ.

問題 5.　三角形 ABC ノ重心 G ヲ各頂點ニ結付ケテ出來ル三ツノ三角形 AGB, BGC, AGC ハ

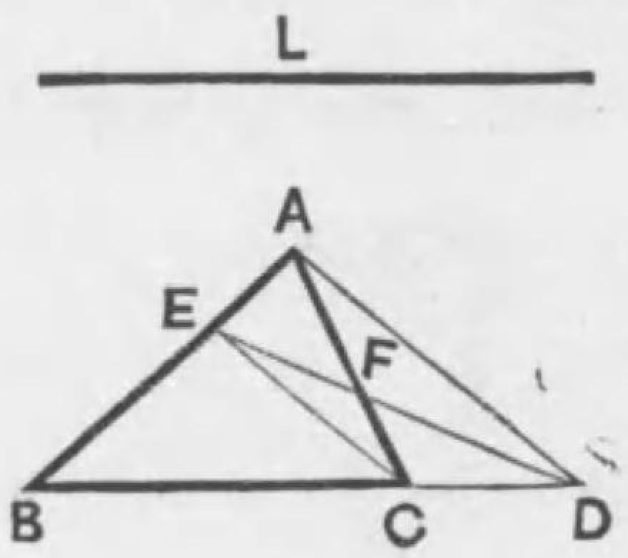


互ニ等積ナリ.

問題 6. 與ヘラレタル長サノ二邊ヲ有スル三角形ノ中デ面積ノ最大ナル者ヲ作ルコト.

131. 作圖題 1. 與へられたる線分に等しき底邊を有し,其一端に於ける角が與へられたる三角形の一つの角に等しく,且つ之と等積なる三角形を作ること.

L ヲ與ヘラレタル線分, ABC ヲ與ヘラレタル三角形トシ,底邊ガ L ニ等シク,其一端ニ於ケル角ガ角 B ニ等シクシテ △ABC ト等積ナル三角形ヲ作ルコトヲ求ム.



作圖法 角 B ヲ夾ム一ツノ邊 BC ノ上ニ L ニ等シキ線分 BD ヲ取リ, A ト D トヲ結付ケヨ. C ヨリ AD ニ平行ナル直線ヲ引キ, AB (若クハ

其延長)ト E ニ於テ交ラシムレバ三角形 BED ガ求ムル所ノ者ナリ.

證明 $EC \parallel AD$

$\therefore \quad \triangle DEC = \triangle AEC$ (前節定理系 2)

故ニ之ヲ △EBC ニ加ヘ(或ハ之ヨリ引キ)タル者ハ相等シ.

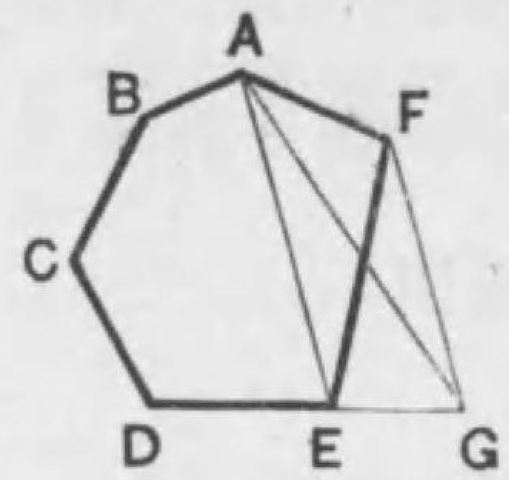
即チ $\triangle EBD = \triangle ABC$

問題 7. 定マレル三角形ノ底邊上ニアル一定點ヨリ直線ヲ引キ,之ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

132. 作圖題 2. 與へられたる多角形と等積にして,邊の數が元より一つだけ少なき多角形の一つを作ること.

ABCDEF ヲ與ヘラレタル六邊形トシ,之ト等積ナル五邊形ノ一ツヲ作ルコトヲ求ム.

作圖法 對角線AEヲ引キ,點FヨリAEニ平行ナル直線ヲ引キ,DEノ延長ト點Gニ於テ交ラシメ,AトGトヲ結付ケヨ. 然ルトキハ五邊形ABCDGハ與ヘラレタル六邊形ト等積ナリ.



注意 此作圖ヲ續ケ行ヘバ終ニ「與へられたる多角形と等積なる三角形を作る」コトヲ得ベシ.

問題8. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル矩形ノ一ツヲ作ルコト.

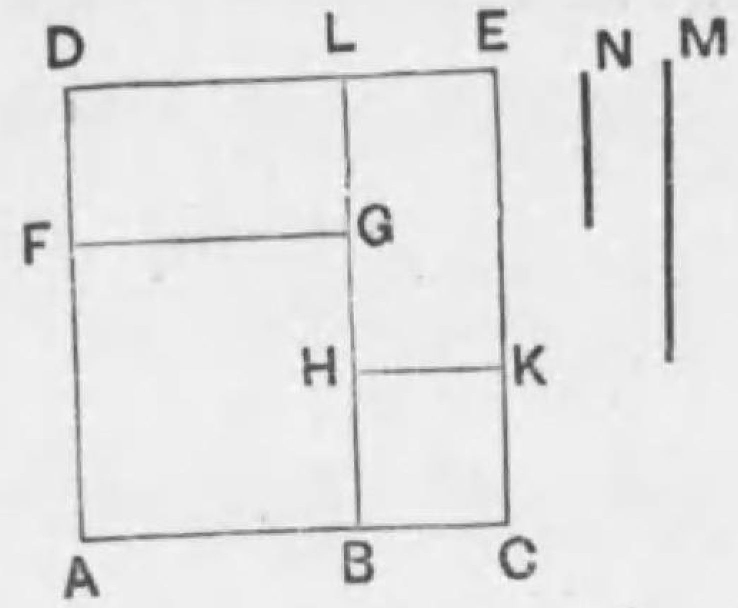
133. 定理5. 二つの線分の和の平方は其各の平方と其積の二倍との和に等し.

M及Nヲ二ツノ線分トスレバ

$$(M+N)^2=M^2+N^2+2M.N$$ ナルベシ.

證明 Mニ等シキ線分ABヲ引キ,之ヲCマデ延長シBCヲNニ等シクセヨ.

然ルトキハACハMトNトノ和ニ等シ. ソコデACノ上ニ正方形ヲ作リ,夫レト同ジ側ニAB, BCノ上ニ夫夫正方形ABGF, BCKHヲ作レバ點Fハ直線ADノ上ニ落チ,點Hハ直線BGノ上ニ落チ,點Kハ直線CEノ上ニ落ツ. 次ニBGヲ延長シテDEトLニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ



$$FG=HL=M, \quad DF=HK=N$$

$$\therefore \quad AC^2=AB^2+BC^2+FG.DF+HL.HK$$

即チ
$$(M+N)^2=M^2+N^2+M.N+M.N$$
$$=M^2+N^2+2M.N$$

系 一つの線分の平方は其半分の線分の平方の四倍に等し.

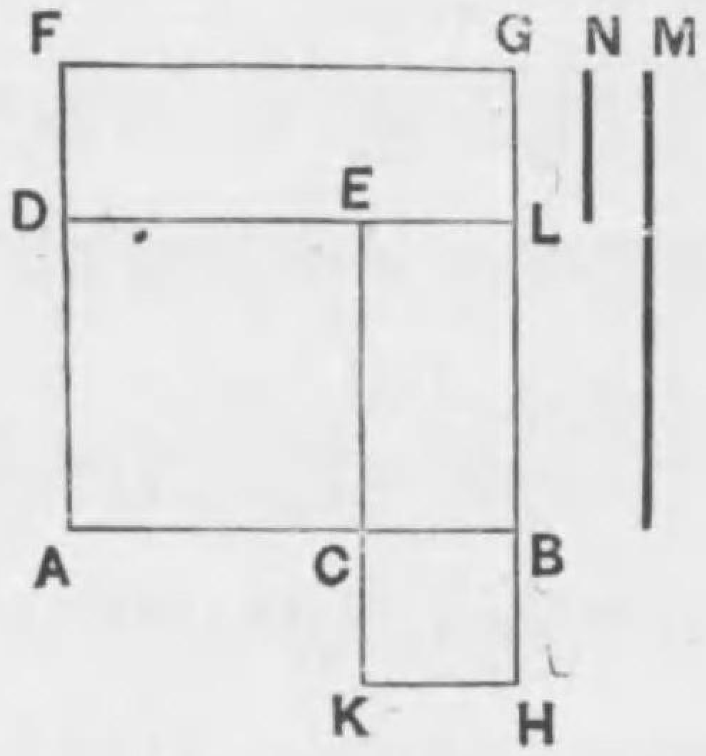
134. 定理6. 二つの線分の差の平方は其各の平方の和より此二つの線分の積の二倍を引きたる者に等し.

M及N ヲ二ツノ線分トシ,而シテ $M>N$ トスレバ

$$(M-N)^2=M^2+N^2-2M.N$$

ナルベシ.

證明 M ニ等シキ線分 AB ヲ引キ,其上ニ於テ BC ヲ N ニ等シク取リ, AC, AB ノ上ニ同ジ側ニ夫夫正方形 ACED, ABGF ヲ作レバ點 D ハ AF ノ上ニ落ツ. 次ニ今作リタル正方形トハ反對ノ側ニ BC ノ上ニ正方形 BCKH ヲ作レバ CK ト CE トハ同一直線ヲナシ, BG ト BH トハ同一直線ヲナス. ソコデ DE ヲ延長シテ BG ト, L ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ



$$AC^2=AB^2+BC^2-(DL.LG+HL.HK)$$

然ルニ
$$AC=M-N$$
$$DL=HL=M$$
$$LG=HK=N$$

$$\therefore \quad (M-N)^2=M^2+N^2-(M.N+M.N)$$
$$=M^2+N^2-2M.N$$

系 等積なる二つの正方形は相等し.

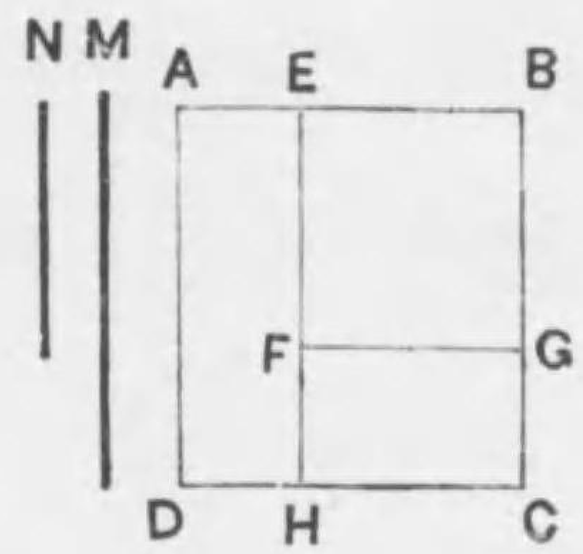
135. 定理 7. 二つの線分の各の平方の差は此二つの線分の和と差との積に等し.

M及N ヲ二ツノ線分,而シテ $M>N$ トスレバ

$$M^2-N^2=(M+N).(M-N)$$

ナルベシ.

證明 M ニ等シキ線分 AB ヲ引キ,其上ニ於テ BE ヲ N ニ等シク取リ, AB ノ同ジ側ニ AB ヲ邊トスル正方形 ABCD ト, BE ヲ邊トスル正方形 BEFG トヲ書キ, EF ノ延長ト CD トヲ H ニ於テ交ラシムレバ



$$AB^2-BE^2=AE.AD+GC.GF$$

然ルニ $AE=GC=M-N$

$$\therefore \quad AE.AD+GC.GF=AE.(AD+GF) \quad \text{(定理 2)}$$

$$\therefore \quad M^2-N^2=(M-N).(M+N)$$

系 二つの線分の和の平方と差の平方との差は此二線分の積の四倍に等し.

問題 9. 與ヘラレタル周ヲ有スル矩形ノ中デ其面積ノ最大ナル者ハ正方形ナリ.

問題 10. 一ツノ線分ヲ其上ノ任意ノ點ニテ分ツトキ,其二ツノ分ノ包ム矩形ノ面積ハ其線分ノ半分ノ平方ト,中點ト分點トヲ兩端トスル線分ノ平方トノ差ニ等シ.

問題 11. 一ツノ線分ヲ其上ノ任意ノ點ニテ分ツトキ,其二ツノ分ノ平方ノ和ハ其線分ノ半分ノ平方ト,中點ト分點トヲ兩端トスル線分ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ.

又其二ツノ分ノ平方ノ差ハ中點ト分點トヲ兩端トスル線分ト全線分トノ包ム矩形ノ面積ノ二倍ニ等シ.

136. 定理 8. 直角三角形の斜邊の平方は,其他の二邊の平方の和に等し.

ABC ヲ A ニ於テ直角ヲ有スル直角三角形トセヨ. 然ルトキハ $BC^2=AB^2+AC^2$ ナルベシ.

證明 三角形 ABC ノ外側ニアル樣ニ,各ノ邊ヲ邊トスル三ツノ正方形 BCDE, ABFG, ACHI ヲ書キ,頂點 A ヨリ斜邊 BC ニ垂線 AK ヲ引キ,之ヲ延長シテ ED ト L ニ於テ交ラシメヨ.

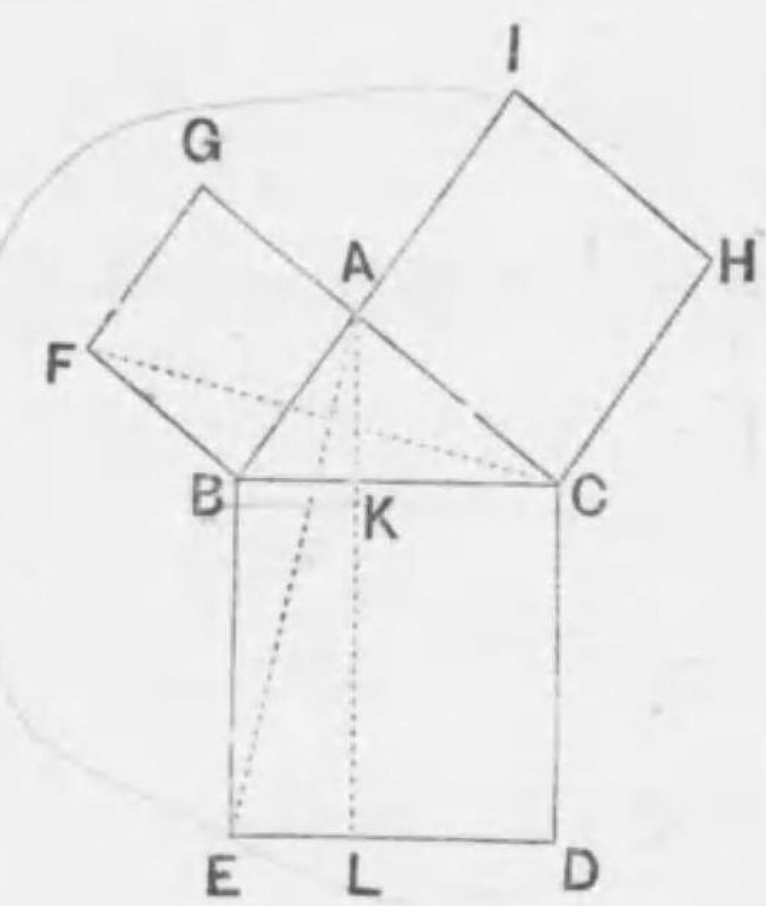
F ト C ト; A ト E トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ三角形 ABE ト三角形 FBC トニ於テ

$$BE=BC$$

$$AB=BF$$

$$\angle ABE=\angle FBC$$

$$\therefore \quad \triangle ABE \equiv \triangle FBC$$



然ルニ BK.BE ハ三角形 ABE ノ面積ノ二倍ニ等シク, AB^2 ハ三角形 FBC ノ面積ノ二倍ニ等シ(定理 4 系 1).

$\therefore \quad AB^2=BK.BE$

同樣ニ $\quad AC^2=CK.CD$

$\therefore \quad AB^2+AC^2=BK.BE+CK.CD=BC^2$

系 直角三角形の直角を夾む二邊の中の一つの平方は斜邊の平方より他の邊の平方を引きたる者に等し.

問題 12. 本節ノ圖ニ於テ $AE \perp CF$ ナルコトヲ證明セヨ.

問題 13. 四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ,一組ノ相對スル邊ノ平方ノ和ハ,他ノ一組ノ相對スル邊ノ平方ノ和ニ等シ.

問題 14. $\triangle ABC$ ノ頂點 A ヨリ邊 BC ニ垂線 AD ヲ引ケバ, $AB^2 \sim AC^2$ ハ $BD^2 \sim CD^2$ ニ等シ.

問題 15. 問題 13 ノ逆ヲ證明セヨ.

問題 16. 正三角形ノ一ツノ頂點ヨリ其對邊ヘ下シタル垂線ノ平方ハ邊ノ半分ノ平方ノ三倍ニ等シ.

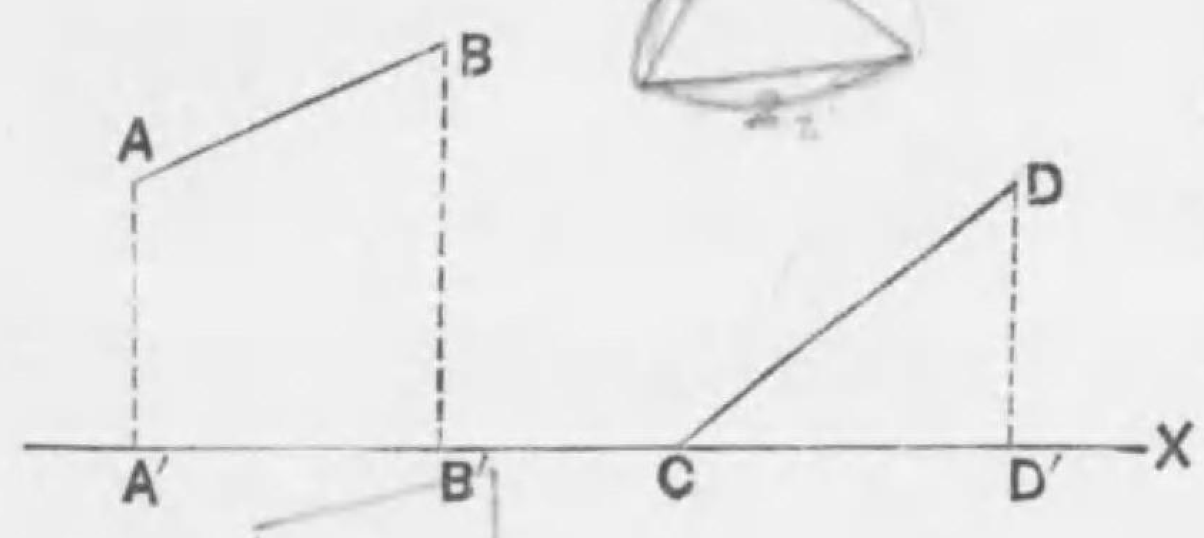
問題 17. 與ヘラレタル二ツノ正方形ノ面積

ノ和(或ハ差)ニ等シキ面積ノ正方形ヲ作ルコト.

137. 定義 一ツノ線分ノ兩端ヨリ他ノ一ツノ直線ヘ下シタル垂線ノ足ヲ兩端トスル線分ヲ名ヅケテ,**此直線上に於ける此線分の直射影(或は正射影)**トイフ.

若シ線分ノ一端ガ直射影ヲ受クベキ直線上ニ在ルトキハ,此端ト他ノ端ヨリ下シタル垂線ノ足トヲ兩端トスル線分ガ其直射影ナリ.

例ヘバ下圖ニ於ケル A'B' ハ線分 AB ノ直線X上ニ於ケル直射影ニシテ, CD' ハ線分 CD ノ直線X上ニ於ケル直射影ナルガ如シ.



138. 定理 9. 鈍角三角形の鈍角に對する邊の平方は,其他の二邊の各の

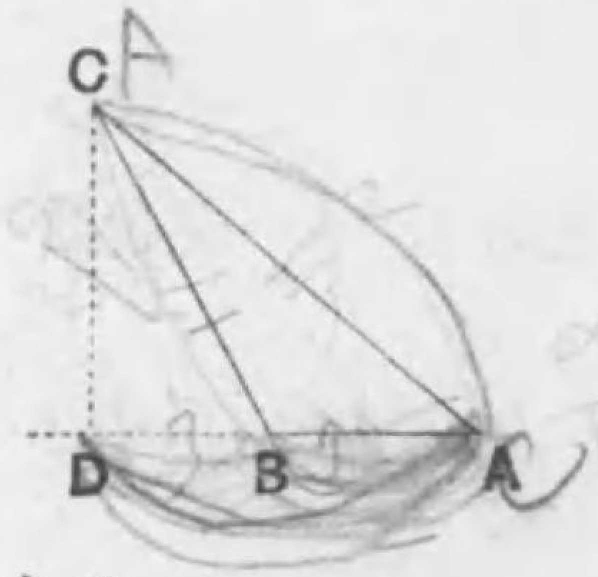
平方の和に,此二邊の中の一つと,其邊と一致する直線上に於ける他の邊の直射影との積の二倍を加へたる者に等し.

$\triangle ABC$ ニ於テ, B ヲ鈍角トシ, CD ヲ C ヨリ AB ノ延長ヘ下シタル垂線ナリトセヨ. 然ルトキハ

$$AC^2=BC^2+AB^2+2.AB.BD$$

ナルベシ.

證明 角 ABC ハ鈍角ナリ, 故ニ C ヨリ AB ヘノ垂線ノ足 D ハ B ノ方ヘノ AB ノ延長ノ上ニアリ.



$\therefore\quad AD=AB+BD$

又 $\triangle ADC$ ニ於テ $\angle D=\angle R$ ナリ.

$\therefore\quad AC^2=CD^2+AD^2$ (定理 8)

$AD^2=AB^2+BD^2+2AB.BD$ (定理 5)

然ルニ $\triangle BCD$ ハ直角三角形ナルニヨリ

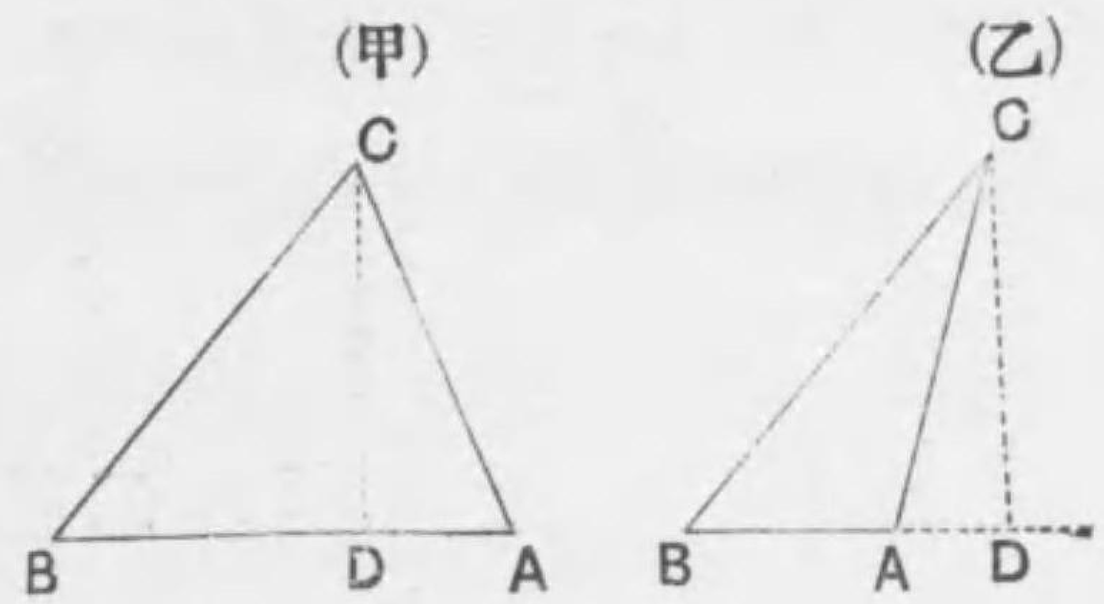
$CD^2+BD^2=BC^2$ (定理 8)

$\therefore\quad AC^2=BC^2+AB^2+2AB.DB$

139. 定理 10. 三角形の鋭角に對する邊の平方は,其他の二邊の各の平方の和より,其中の一つと,其邊と一致する直線上に於ける他の邊の直射影との積の二倍を引きたる者に等し.

$\triangle ABC$ ニ於テ, B ヲ鋭角トシ, 邊 AB ト一致スル直線上ニ於ケル邊 BC ノ直射影ヲ BD トセヨ. 然ルトキハ

$$AC^2=BC^2+AB^2-2.AB.BD$$ ナルベシ.



證明 角 ABC ハ鋭角ナリ, 故ニ C ヨリ AB ニ垂線ヲ下セバ其足 D ハ B ニ對シテ A ノ側ニアリ.

$\therefore\quad BA\sim BD=AD$

三角形 ADC ニ於テ $\angle D=\angle R$ ナルヲ以テ

$$AC^2=CD^2+DA^2$$

然ルニ $AD^2=BD^2+BA^2-2.AB.BD$

$\therefore \quad AC^2=CD^2+BD^2+BA^2-2.AB.BD$

$=BC^2+BA^2-2.AB.BD$

注意 角Aガ直角ナルトキハ點Dハ點Aト一致シ,從テBDハABニ等シ.

$\therefore \quad AC^2=BC^2-AB^2=BC^2+AB^2-2.AB^2$

$=BC^2+AB^2-2.BD.BA$

ニシテ上ノ定理ハ眞ナリ.

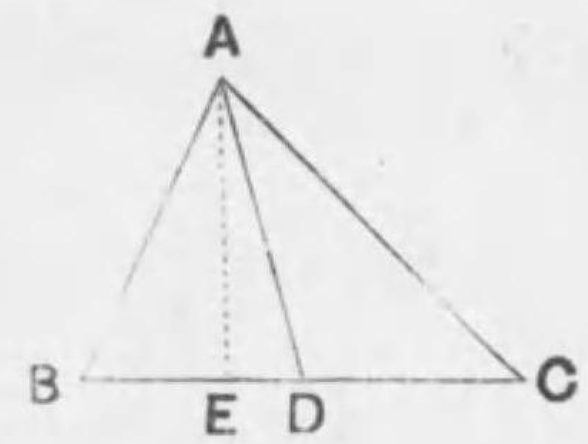
問題 18. 三角形ノ一ツノ角ニ對スル邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ大ナルカ,和ニ等シキカ,或ハ和ヨリ小ナルカニ從テ,此角ハ鈍角ナリ,或ハ直角ナリ,或ハ銳角ナリ.

140. 定理 11. 三角形の二邊の平方の和は,第三邊の半分の平方と其邊への中線の平方との和の二倍に等し.

△ABCノ頂點Aヨリ引キタル中線ヲADトセヨ. 然ルトキハ

$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$ ナルベシ.

證明 頂點AヨリBCニ下シタル垂線ノ足ヲEトセヨ. 而シテ,例ヘバ$\angle ADB<\angle R$トセヨ. 然ルトキハ



$AB^2=AD^2+BD^2-2.BD.DE$ (定理 10)

$AC^2=AD^2+CD^2+2.CD.DE$ (定理 9)

然ルニ $BD=CD$

$\therefore \quad BD^2=CD^2$

$2.BD.DE=2.CD.DE$

$\therefore \quad AB^2+AC^2=2.AD^2+2.BD^2$

$=2(AD^2+BD^2)$

注意 若シ $\angle ADB=\angle R$ ナレバ

$AB=AC$

而シテ $AB^2=AD^2+BD^2$

$\therefore \quad 2.AB^2=AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$

問題 19. 平行四邊形ノ各邊ノ平方ノ和ハ其對角線ノ平方ノ和ニ等シ.

問題 20. 定直線上ニ於テ,其上ニアラザル二

定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ最小ナル點ヲ求ムルコト

練習第五

問題 21. 四邊形ノ一組ノ相對スル邊ノ中點ヲ結付クル線分ガ其四邊形ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツトキハ其二邊ハ平行ナリ.

問題 22. 等邊直線形内ノ任意ノ點ヨリ其各邊ヘ引ケル垂線ノ和ハ不易ナリ.

問題 23. 四邊形ノ面積ハ,其二ツノ對角線及夫レガ其交點ニ於テナス角ヲ,夫夫二邊ト其夾角トニ有スル三角形ノ面積ニ等シ.

問題 24. 梯形ハ其二ツノ底ノ和ノ半分ト其高サトノ包ム矩形ト等積ナリ.

問題 25. 圓ノ二ツノ弦 AB, CD ガ點 O ニ於テ互ニ垂直ニ交ルトキハ, O,A OB, OC, OD ノ各ノ平方ノ和ハ直徑ノ平方ニ等シ.

問題 26. 四邊形ノ一ツノ頂點ヨリ半直線ヲ引キ,此四邊形ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

問題 27. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 BD 上ノ任意ノ一點 E ヲ通リ,二邊 AB, CD ニ夫夫平行ナル直線ヲ作レバ其時ニ出來ル二ツノ平行四邊形 AE, EC ハ等積ナリ.

問題 28. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 D ヨリ任意ノ一直線 DEF ヲ引キ,邊 BC ト E ニ於テ, AB ノ延長ト F ニ於テ交ラシムレバ二ツノ三角形 ABE, CEF ハ等積ナリ.

問題 29. ABCD ハ正方形ニシテ E ハ對角線 BD 上ノ任意ノ點トスレバ $2.AE^2=BE^2+ED^2$ ナリ.

問題 30. 定角ノ内ニアル一定點ヲ通リテ,其兩端ガ此角ノ邊ノ上ニアル樣ナル線分ヲ引キテ出來ル三角形ノ中デ,此線分ガ此定點ニテ二等分セラルル樣ナル者ノ面積ガ最小ナリ.

問題 31. B, C ハ一ツノ線分 AD ノ兩側ニアル二點ナリ. AD ノ中點ヲ M トスレバ △MBC ノ面積ハ二ツノ三角形 ABC, DBC ノ差ノ半分或ハ和ノ半分ニ等シ.

問題 32. 梯形 ABCD ノ互ニ平行ナル二邊 AD,

BC ニ平行ナル任意ノ直線ガ邊 AB, CD 及兩對角線ト交ル點ヲ夫夫 E, F, G, H トスレバ EG ハ FH ニ等シ.

問題 33. 四邊形ノ對角線ノ平方ノ和ハ相對スル邊ノ中點ヲ結付クル線分ノ平方ノ和ノ二倍ナリ.

問題 34. 四邊形ノ各ノ頂點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ハ或一ツノ圓周ナリ.

問題 35. △ABC ノ底邊 BC 上ニ於テ BD ガ DC ノ半分ニ等シキ樣ナル點 D ヲ取レバ

$$2.AB^2+AC^2=6.BD^2+3.AD^2$$

ナリ.

問題 36. 三角形ノ各邊ノ平方ノ和ノ三倍ハ各中線ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ.

第五編　比及比例

緒　論

141. 定義 同種類ノ二ツノ量 A ト B トガアリテ, A ノ中ニ B ガ丁度幾ツカ合マルルトキハ A ヲ B ノ**倍量**トイヒ, B ヲ A ノ**約量**トイフ.

例ヘバ 2 尺ノ長サハ 1 尺ノ長サノ倍量ニシテ 3 斤ノ目方ハ 6 斤ノ目方ノ約量ナリ.

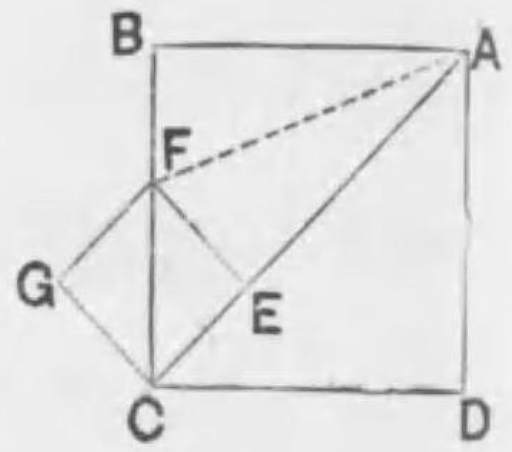
二ツノ量 A ト B トガ何レモ或第三ノ量 C ノ倍量ナルトキハ此二ツノ量ハ**通約すべき量**ナリトイヒ,此第三ノ量 C ヲ二ツノ量 A, B ノ**公度**又ハ**公約量**トイフ.

二ツノ同種類ノ量ノ間ニ公度ナキトキハ此二ツノ量ヲ**通約すべからざる量**トイフ.

モシ二ツノ量ノ間ニ一ツノ公度アレバ其外ニ無數ノ公度アリ. 何トナレバ其公度ヲ幾ツカニ等分シタル者ハ何レモ此二ツノ量ノ公度ナレバナリ.

142. 通約すべからざる量の例

正方形の對角線と其一邊との間には公度なし.



ABCD ヲ正方形トスレバ其對角線 AC ト一邊 AB トノ間ニハ公度ナカルベシ.

證明 若シ AC ト AB トノ間ニ公度アリトスレバ之ヲ X トシ, AC ノ上ニ AB ニ等シク AE ヲ取リ, E ヨリ AE ニ垂線ヲ作リ BC ト F ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

$$BF=EF \qquad \text{(第一編定理12)}$$
$$EF=CE \qquad \text{(第一編定理9)}$$
$$\therefore \quad BF=EF=CE$$
$$\therefore \quad CE=AC-AB \cdots\cdots (1)$$
$$CF=AB-CE \cdots\cdots (2)$$

school to do you The fall what are you going

而シテ AC ト AB トハ X ノ倍量ナルユヱ, (1) ニヨリテ CE モ亦 X ノ倍量ナリ, 從テ (2) ニヨリテ CF モ亦 X ノ倍量ナリ.

然ルニ CE ハ正方形 CEFG ノ一邊ニシテ, CF ハ其對角線ナリ. 而シテ CE 即チ FB ハ FC ヨリ小ナルユヱ,新正方形ノ一邊 CE ハ元ノ正方形ノ一邊ノ半分ヨリ小ナリ. ソコデ此新正方形 CEFG ニツキテ前ト同ジコトヲ行ヘバ,此一邊ノ半分ヨリ短キ邊ヲ有スル正方形ヲ得ベク,而シテ其邊ト對角線トガ矢張 X ノ倍量ナラザルベカラズ. 此手數ヲ際限ナク續ケ行ヘバ漸々ニ小サキ正方形ガ出來テ竟ニハ其一邊ハ望ミ通リ小サクナルユヱ, X ヨリモ小ナラシムルコトヲ得. 而シテ其一邊ハ矢張 X ノ倍量ナラザルベカラズ.

然ルトキハ,或量ガ夫レヨリモ大ナル量ノ倍量ナリトイフ不合理ナルコトヲ生ズ.

故ニ AC ト AB トノ間ニハ公度アルコト能ハズ,即チ AC ト AB トハ通約スベカラザル量ナリ.

143. 通約すべき量の比

同種類ノ二ツノ量 A ト B トニ一ツノ公度 C ガアルトキ,例ヘバ

$$A=mC, \quad B=nC \qquad (m, n \text{ ハ正ノ整數})$$

ナルトキハ C ハ B ノ n 分ノ一ニシテ C ノ m 倍ガ A ニ等シキユヱ,

$$A=B\times\frac{m}{n}$$

ナリ. 此 $\frac{m}{n}$ ヲ **A の B に對する比** トイフ.

又若シAガBノp倍ニ等シキトキ卽チ

$$A=pB \qquad (p\text{ハ正ノ整數})$$

ナルトキハpヲ**AのBに對する比**トイフ.

是ハ(A,Bノ公度ガBナルガ爲ニ)前ニ述ベタル一般ノ場合ニ於ケル$\frac{m}{n}$ノnガ1ニ等シク,mガpニ等シキ特別ノ場合ナリ.

注意 mCトハC×mノコトナリ,其他モ之ニ準ズ.

144. 通約すべからざる量の比

同種類ノ二ツノ量AトBトニ公度ガナキトキnヲ任意ノ正ノ整數トシ,Bノn分ノ一ニ等シキ者ヲAノ中ヨリ取レルダケ取ルニm箇ダケ取レルトスレバ

$$B\times\frac{m}{n}<A<B\times\frac{m+1}{n}$$

ナリ. 而シテnニ漸々大ナル値ヲ與フレバ$\frac{m}{n}$ト$\frac{m+1}{n}$トノ差$\frac{1}{n}$ハ如何樣ニモ小サクナルユヱ,箇樣ニシテ互ニ限リナク相近寄ル所ノ二組ノ分數ヲ得. 此二組ノ分數ノ間ニ挾マルル**無理數**ヲ**AのBに對する比**トイフ.

一ツノ量ニ或無理數ヲ掛ケタル者トハ此量ニ

此無理數ノ近似値ヲ掛ケタル者ノ間ニ挾マルル量ノコトナリ.

故ニAノBニ對スル比ガ無理數ナルトキモ,夫レガ有理數ナルトキト同ジク,之ヲBニ掛クレバAニ等シクナル. 故ニ一般ニ

一つの量Aの之と同種類の他の量Bに對する比(又はAとBとの比)とは之をBに掛くればAとなる樣なる數のことなり.

ツマリAノBニ對スル比ハBヲ單位トスルトキAヲ表ス數ナリ.

AノBニ對スル比ヲ表スニハ A:B 又ハ$\frac{A}{B}$ト書キ,Aヲ比ノ**前項**,Bヲ比ノ**後項**トイフ.

注意 1. 一ツノ數aノ他ノ數bニ對スル比トハ,二量ノ比ト同樣ニ,aヲ得ル爲ニbニ掛ケルベキ數ノコトナリ. 而シテ之ヲ$a:b$又ハ$\frac{a}{b}$ニテ表ス.

注意 2. 以下總テ量ヲ表スニハ大羅馬字A, B, C等ヲ用ヒ,數ヲ表スニハ小羅馬字a, b, c等

ヲ用フ. 而シテ今後文字ニテ表ス數ハ正ノ數ニ限ルモノトス.

注意 3. 有理數ノ計算ニ關スル諸定則ハ,スベテ無理數ノ不足ナル近似値ニモ過剩ナル近似値ニモ當テ嵌マル,從テ無理數ニモ當テ嵌マル者ナリ. ソコデ a, b, c ガ有理數ナルトキニ成リ立ツ等式,例ヘバ

$$aA+bA=(a+b)A$$

$$aA\sim bA=(a\sim b)A$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

等ハ a, b, c ガ無理數ナル場合ニモ當テ嵌マルガ如シ.

145. 反比 一ツノ量Aノ他ノ量Bニ對スル反比(又ハ逆比)トハ BノAニ對スル比ノコトナリ.

此反比ニ對シテ A:B ヲ正比トイフコトアリ.

注意 A:B ト B:A トハ互ニ逆數ヲナス數ナリ.

146. 定理 1. 二量の比は此等の量を同じ單位にて表す二數の比に等し.

同種類ノ二量 A, B ヲ同ジ單位 C ニテ表ス數ヲ夫夫 a, b トスレバ $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ ナルベシ.

證明 $A=aC,\quad B=bC$ (假設)

$$\therefore\quad C=\frac{1}{b}B$$

$$\therefore\quad A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B$$

$$\therefore\quad \frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

147. 定理 2. 一つの量Aを表す數が a なれば,同じ單位を取るときAに任意の數 k を掛けたる者 $A\times k$ を表す數は $a\times k$ なり.

證明 Cヲ單位トスレバ

$$\frac{A}{C}=a \qquad \text{(假設)}$$

次ニCヲ單位トスルトキ $A\times k$ ヲ表ス數ヲ x トスレバ

$$\frac{A\times k}{C}=x$$

$$\therefore\quad \frac{A\times k}{A}=\frac{x}{a} \qquad \text{(定理 1)}$$

然ルニ

$$\frac{A\times k}{A}=k \qquad \text{(第141節)}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a}=k$$

$$\therefore \quad x=a\times k$$

148. 定理 3. 比の兩項に同數を掛けても比は變らず.

即チ $nA:nB=A:B \quad (n\neq 0)$

ナルベシ.

證明 同ジ單位ニテA, Bヲ表ス數ヲ夫夫a, bトスレバnA, nBヲ表ス數ハ夫夫na, nbナリ(定理2).

$$\therefore \quad \frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{nA}{nB}=\frac{na}{nb}$$

然ルニ $$\frac{na}{nb}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{nA}{nB}=\frac{A}{B}$$

149. 定義 AとBとが同種類の量, CとDとが亦同種類の量にしてA:BがC:Dに等しきときA, BはC, Dに比例すといふ.

而シテA, BガC, Dニ比例スルコトヲ書キ表ス等式,即チ

$$A:B=C:D \quad 又ハ \quad \frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

ヲ**比例式**又ハ**比例**トイフ.

A, B, C, Dヲ總稱シテ比例ノ**項**トイヒ, AトDトヲ其**外項**, BトCトヲ其**内項**, DヲA, B, Cノ**第四比例項**トイフ.

又此比例式ニ於テAトCト, BトDトヲ夫夫**對應する項**トイフ.

注意 1. A, BガC, Dニ比例スルコトヲA, B, C, D**が比例をなす**トモイフ.

注意 2. $A:B=C:D$ナル比例式ニ於テ

$A\gtreqless B$ナレバ$C\gtreqless D$ナリ.

注意 3. $A:B=C:D$ニ於テ前ノ二項ト後ノ二項トハ必ズシモ同種類ノ量ナラズ. 例ヘバA, Bハ何レモ面積ニシテ, C, Dハ何レモ長サナルコトモアルベク, 又A, B, C, Dガ何レモ長サナルコトモアルベシ

150. 定義 同種類ノ三ツノ量A, B, Cア

リテ其間ニ A:B=B:C ナル比例式ガ成リ立ツトキハ此等ノ三量は比例をなすトイフ.

而シテ B ヲ A ト C トノ比例中項トイヒ, C ヲ A, B ノ第三比例項トイフ.

151. 定理 4. 同種類の四量が比例をなすときは,其内項又は外項を交換しても比例は成り立つ.

A, B, C, D ハ同種類ノ量ニシテ A:B=C:D ナレバ A:C=B:D, D:B=C:A ナルベシ.

證明 此四量ヲ同ジ單位ニテ表ス數ヲ a, b, c, d トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{C}{D}=\frac{c}{d}\qquad \text{(定理 1)}$$

然ルニ $$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

此等式ノ兩邊ニ $\frac{b}{c}$ ヲ掛クレバ

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

然ルニ $$\frac{a}{c}=\frac{A}{C},\quad \frac{b}{d}=\frac{B}{D}\qquad \text{(定理 1)}$$

$$\therefore\quad \frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

同樣ニシテ $$\frac{D}{B}=\frac{C}{A}$$

ナルコトヲ證明シ得.

152. 定理 5. 二つの比が相等しきときは各の比の前項と後項との和若くは差の後項に對する比も亦相等し.

A:B=C:D ナレバ

$$A+B:B=C+D:D$$

又 $$A\sim B:B=C\sim D:D$$

ナルベシ.

證明 A, B ヲ同ジ單位 T ニテ表ス數ヲ夫夫 a, b トシ, C, D ヲ同ジ單位 T′ ニテ表ス數ヲ夫夫 c, d トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{C}{D}=\frac{c}{d}\qquad \text{(定理 1)}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

即チ $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

サテ aT=A, bT=B

$$\therefore \quad (a+b)\mathrm{T}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{B}}$$

同様ニ $$\frac{c+d}{d}=\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{D}}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{D}}$$

同様ニシテ $$\frac{\mathrm{A}\sim\mathrm{B}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}\sim\mathrm{D}}{\mathrm{D}}$$

ヲ證明スルコトヲ得.

153. 定理 6. 二つの比が相等しきときは各の比の前項と後項との和の其前項と後項との差に對する比も亦相等し.

$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ ナレバ $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}\sim\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{C}\sim\mathrm{D}}$ ナルベシ.

證明 AB ヲ同ジ單位 T ニテ表ス數ヲ夫夫 a, b トシ, C, D ヲ同ジ單位 T′ ニテ表ス數ヲ夫夫 c, d トスレバ

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{a}{b}, \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}=\frac{c}{d} \qquad \text{(理定1)}$$

然ルニ $$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

又 $$\frac{a\sim b}{b}=\frac{c\sim d}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a\sim b}=\frac{c+d}{c\sim d}$$

然ルニ $$\mathrm{A}+\mathrm{B}=(a+b)\mathrm{T}$$

$$\mathrm{A}\sim\mathrm{B}=(a\sim b)\mathrm{T}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}\sim\mathrm{B}}=\frac{a+b}{a-b}$$

同様ニ $$\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{C}\sim\mathrm{D}}=\frac{c+d}{c\sim d}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}\sim\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{C}\sim\mathrm{D}}$$

154. 定理 7. 幾つかの比の總ての項が皆同種類の量にして且つ此等の比が相等しきときは,其各の前項の和の後項の和に對する比は元の比に等し.

例ヘバ A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 ガ總テ同種類ノ

量ニシテ且ツ $\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{A_3}{B_3}$ ナリトセヨ.

然ルトキハ $\dfrac{A_1+A_2+A_3}{B_1+B_2+B_3}=\dfrac{A_1}{B_1}$ ナルベシ.

證明 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ ヲ同ジ單位 T ニテ表ス數ヲ夫夫 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ トスレバ

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \quad (\text{定理 } 1)$$

今 $\dfrac{a_1}{b_1}=r$ トオケバ

$$\frac{a_2}{b_2}=r, \quad \frac{a_3}{b_3}=r$$

$$\therefore \quad a_1=b_1r, \quad a_2=b_2r, \quad a_3=b_3r$$

$$\therefore \quad a_1+b_2+a_3=(b_1+b_2+b_3)r$$

$$\therefore \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=r=\frac{a_1}{b_1}$$

然ルニ $A_1+A_2+A_3=(a_1+a_2+a_3)T$

又 $B_1+B_2+B_3=(b_1+b_2+b_3)T$

$$\therefore \quad \frac{A_1+A_2+A_3}{B_1+B_2+B_3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+b_2+b_3}$$

$$\therefore \quad \frac{A_1+A_2+A_3}{B_1+B_2+B_3}=\frac{A_1}{B_1}$$

系 A_1, A_2, B_1, B_2 が總て同種類の量にして且つ $\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{A_2}{B_2}$ なるときは $\dfrac{A_1\sim A_2}{B_1\sim B_2}=\dfrac{A_1}{B_1}$ なり.

155. 定理 8. 同種類の三つの量ありて,第一量と第二量との比及第二量と第三量との比の積は第一量と第三量との比に等し.

例ヘバ A, B, C ヲ同種類ノ三ツノ量トスレバ

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{A}{C}$$ ナルベシ.

證明 A, B, C ヲ同ジ單位ニテ表ス數ヲ夫夫 a, b, c トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}, \quad \frac{B}{C}=\frac{b}{c}, \quad \frac{A}{C}=\frac{a}{c}$$

然ルニ $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{c}$

$$\therefore \quad \frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{A}{C}$$

156. 定義 一組ノ同種類ノ量 $A_1, A_2, A_3,$

……ト之ト同數ノ他ノ一組ノ同種類ノ量 $B_1, B_2, B_3,$……トガアリテ第一ノ組ノ任意ノ二量(例ヘバ A_1, A_3) ノ比ガ第二ノ組ノ之ニ對應スル二量 (B_1, B_3) ノ比ニ等シキトキ**第一の組の量は第二の組の量に比例す或ハ此二組の量は互に比例す**トイフ. 而シテ之ヲ

$$A_1 : A_2 : A_3 : \cdots\cdots = B_1 : B_2 : B_3 : \cdots\cdots$$

ト書クコトアリ.

157. 定理 9. 二組の同數の同種類の量が互に比例するときは其相對應する二量の比は相等し.

例ヘバ A_1, A_2, A_3, A_4 ; B_1, B_2, B_3, B_4 ガ總テ同種類ノ量ニシテ

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = B_1 : B_2 : B_3 : B_4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナレバ
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4}$$

ナルベシ.

證明
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad \text{(前節)}$$

$$\therefore \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \qquad \text{(定理 4)}$$

同樣ニ
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_3}{B_3}$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_4}{B_4}$$

$$\therefore \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

注意　逆ニ(2)ヨリ(1)ヲ導クコトヲ得. 因テ同種類ノ二組ノ量ガ互ニ比例スルコトヲ(1)或ハ(2)ノ何レカ一ツニテ表スコトヲ得.

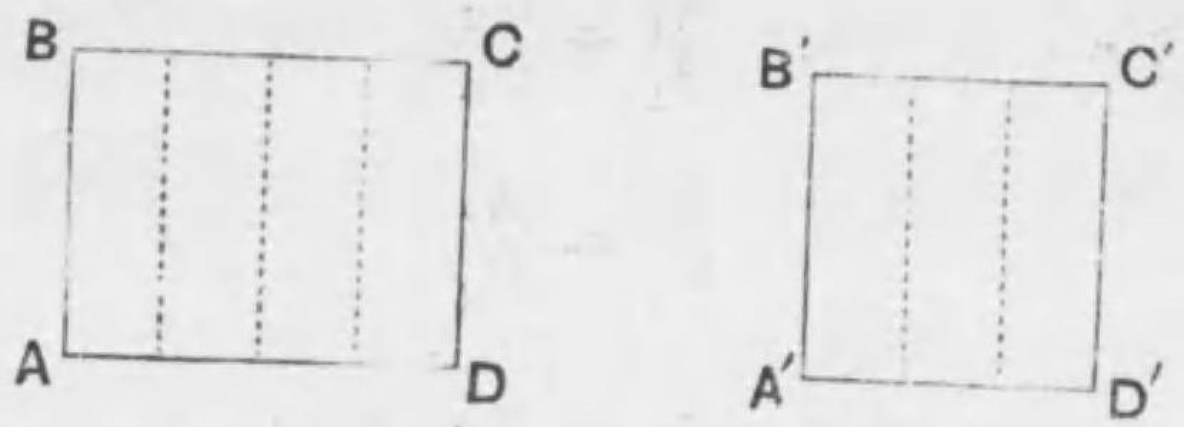
面積ノ續キ

158. 定理 10. 相等しき一邊を有する二つの矩形の面積は,之に隣れる邊の長さに比例す.

二ツノ矩形 ABCD ト A′B′C′D′ トニ於テ,邊 AB ト邊 A′B′ トガ相等シトセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AB.AD}{A'B'.A'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$ ナルベシ.

證明　(第一) AD ト A′D′ トガ公度ヲ有スル場合.



ABガ公度ノm倍ニ等シク,A'D'ガ公度ノn倍ニ等シトスレバ $\frac{AD}{A'D'}=\frac{m}{n}$ ナリ (定理1).

ソコデADヲm箇ニ等分シ,其各分點ヨリABニ平行ナル直線ヲ引ケバ,矩形ABCDハm箇ノ相等シキ矩形ニ分タル. 又A'D'ヲn箇ニ等分シ,其各分點ヨリA'B'ニ平行ナル直線ヲ引ケバ,矩形A'B'C'D'ハn箇ノ相等シキ矩形ニ分タル.

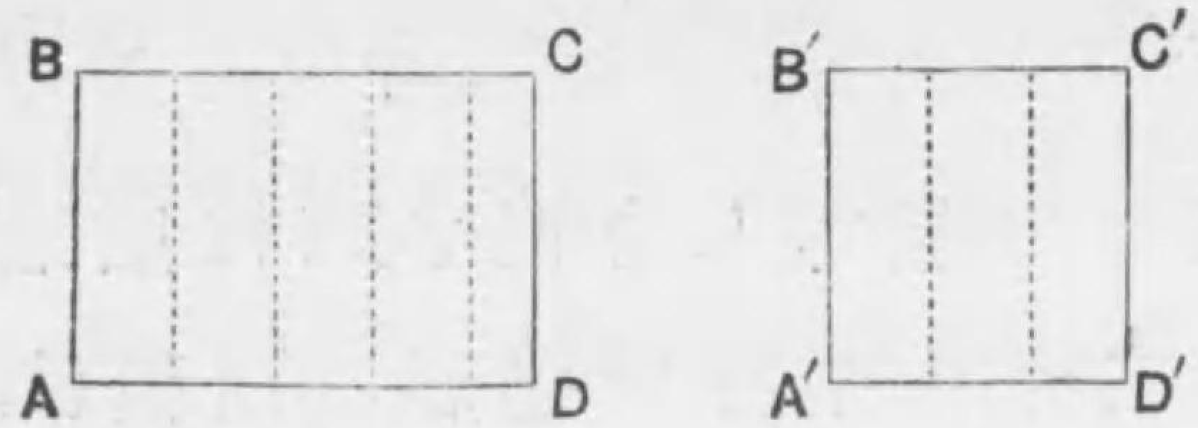
而シテ箇様ニ分タレタル二ツノ矩形ノ各部分ハ相等シキ矩形ナリ. 因テAB.ADハ其矩形ノ面積ノm倍ニ等シク, A'B'.A'D'ハ其n倍ニ等シ.

$$\therefore \quad \frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}=\frac{m}{n} \qquad \text{(定理1)}$$

$$\therefore \quad \frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}=\frac{AD}{A'D'}$$

(第二) ADトA'D'トガ公度ヲ有セザル場合.

A'D'ヲn等分シ,其一部分ニ等シキ者ヲADノ



中ヨリ取レルダケ取レバm箇ダケ取レテ,之ニ足ラザル殘リガアルトセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{m}{n}<\frac{AD}{A'D'}<\frac{m+1}{n}$$

ソコデA'D'ノ各分點ヲ通リテA'B'ニ平行ナル直線ヲ引ケバ矩形A'B'C'D'ハn箇ノ相等シキ矩形ニ分タル. 又ADノ各分點ヲ通リABニ平行ナル直線ヲ引ケバ矩形ABCDハ矩形A'B'C'D'ノn分ノ一ニ等シキ者m箇ト之ニ足ラザル者トニ分タル.

$$\therefore \quad \frac{m}{n}<\frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}<\frac{m+1}{n}$$

因テnガ如何ナル整數ニテモ$\frac{AD}{A'D'}$ト$\frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}$トハ何レモ同ジ二組ノ數$\frac{m}{n}$ト$\frac{m+1}{n}$トノ間ニ夾マレ,且ツ此二數ノ差即チ$\frac{1}{n}$ハnヲ大キクスレバスル程,如何様ニモ小サクナル.

$$\therefore \quad \frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}=\frac{AD}{A'D'} \qquad (\text{第141節})$$

系 1. 相等しき高さ(或は底邊)を有する二つの平行四邊形の面積は,其底邊(或は高さ)に比例す.

系 2. 相等しき高さ(或は底邊)を有する二つの三角形の面積は,其底邊(或は高さ)に比例す.

問題 1. 三角形 ABC ノ內心 O ヲ各頂點ニ結付クルトキ出來ル三ツノ三角形 AOB, BOC, COA ノ面積ハ三邊 AB, BC, CA ノ長サニ比例ス.

問題 2. 三角形 ABC 內ノ一點 O ヲ通ル半直線 AO, BO, CO ヲ各頂點ヨリ引キ, AO ト邊 BC トノ交點ヲ D トスレバ,二ツノ三角形 AOB, AOC ノ面積ノ比ハ BD, CD ノ比ニ等シ.

159. 定理 11. 四つの線分が比例をなすときは,其外項の積は其內項の積

に等し.

L, M, N, P ガ四ツノ線分ニシテ $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ ナリトセヨ. 然ルトキハ L.P=M.N ナルベシ.

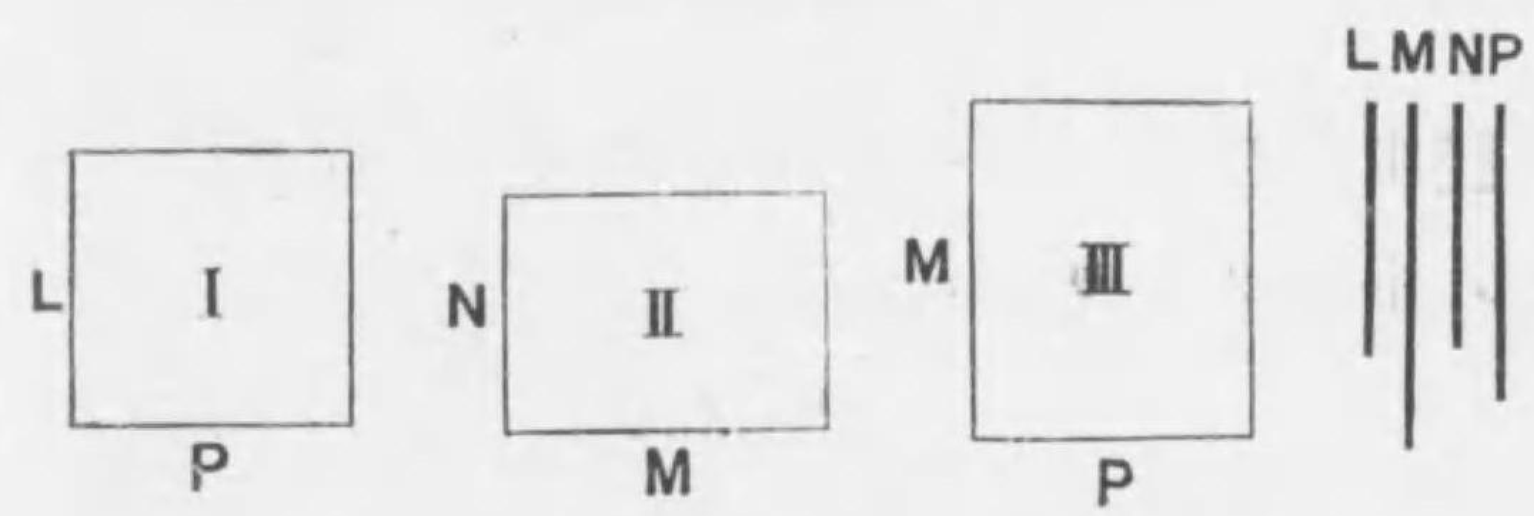
證明 矩形 I ノ相隣レル二邊ガ夫夫 L, P ニ等シク,矩形 II ノ相隣レル二邊ガ夫夫 M, N ニ等シトセヨ. ソコデ其相隣レル二邊ガ夫夫 M, P ニ等シキ矩形 III ヲ作レ. 然ルトキハ

$$\frac{L.P}{M.P}=\frac{L}{M} \quad \text{又} \quad \frac{M.N}{M.P}=\frac{N}{P} \qquad (\text{前節定理})$$

$$\text{然ルニ} \qquad \frac{L}{M}=\frac{N}{P} \qquad (\text{假設})$$

$$\therefore \quad \frac{L.P}{M.P}=\frac{M.N}{M.P}$$

$$\therefore \quad L.P=M.N$$



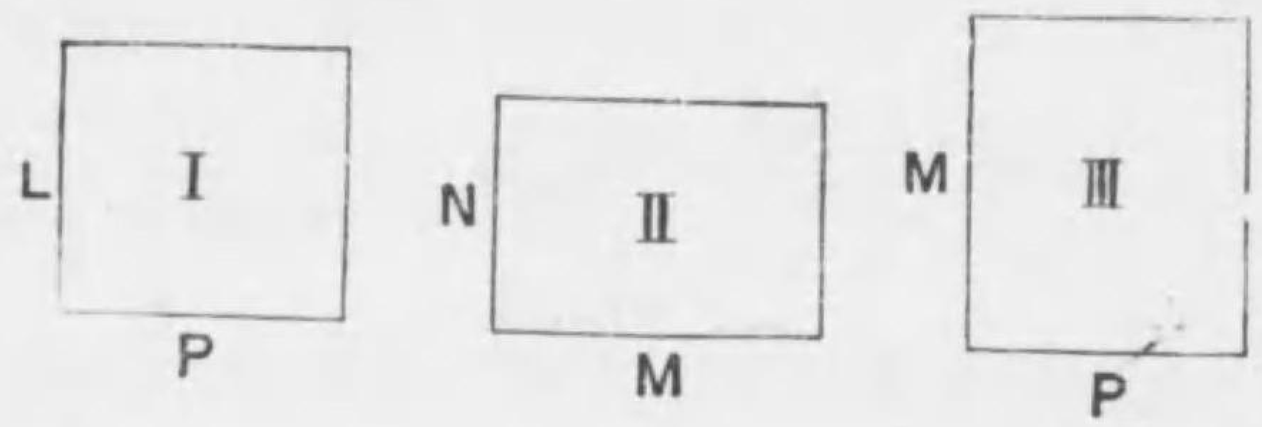
系 一つの線分が他の二つの線分の比例中項なるときは,第一の線分の

平方は他の二つの線分の積に等し.

160. 定理 12. 二つの矩形が等積なるときは,一つの矩形の相隣れる二邊が外項,他の矩形の相隣れる二邊が内項なる比例が成り立つ.

相隣レル二邊ガ L, P ニ等シキ矩形ト相隣レル二邊ガ M, N ニ等シキ矩形トガ等積ナリトセヨ.

然ルトキハ $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ ナルベシ.



證明 相隣レル一邊ガ夫夫 M, P ニ等シキ第三ノ矩形ヲ作ランニ

$$L.P=M.N \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{L.P}{M.P}=\frac{M.N}{M.P}$$

然ルニ $\frac{L.P}{M.P}=\frac{L}{M}$, $\frac{M.N}{M.P}=\frac{N}{P}$ (定理 1)

$$\therefore \quad \frac{L}{M}=\frac{N}{P}$$

系 一つの正方形と一つの矩形とが等積なれば正方形の一邊は矩形の相隣れる二邊の比例中項なり.

問題 3. 一ツノ三角形ニ於テ其二邊ノ比ハ之ニ對應スル高サノ反比ニ等シ.

161. 定理 13. 一つの矩形の面積の他の矩形の面積に對する比は,其底邊の比と其高さの比との積に等し.

第一ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ M, N トシ,第二ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ P, Q トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{M.N}{P.Q}=\frac{M}{P}\times\frac{N}{Q}$$

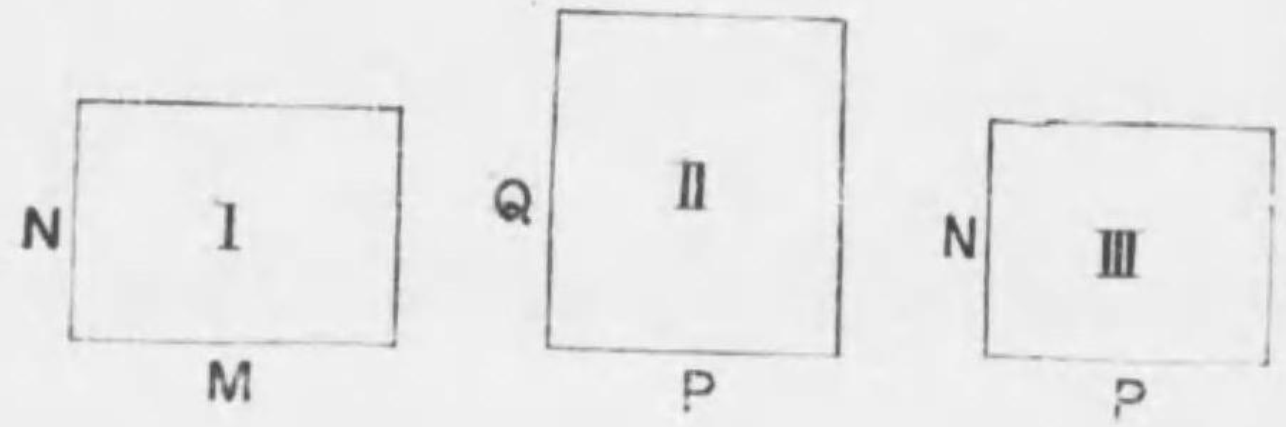
ナルベシ.

證明 マヅ其相隣レル二邊ガ夫夫 P, N ニ等シキ第三ノ矩形ヲ作レ. 然ルトキハ

$$\frac{M.N}{P.N}=\frac{M}{P} \qquad \frac{P.N}{P.Q}=\frac{N}{Q} \qquad \text{(定理 1)}$$

然レニ
$$\frac{M.N}{P.N}\times\frac{P.N}{P.Q}=\frac{M.N}{P.Q} \qquad \text{(定理 8)}$$

$$\therefore \quad \frac{M.N}{P.Q}=\frac{M}{P}\times\frac{N}{Q}$$



系 1. 二つの正方形の面積の比は其邊の比の平方に等し.

系 2. 二つの平行四邊形の面積の比は其高さの比と其底邊の比との積に等し.

系 3. 二つの三角形の面積の比は其高さの比と其底邊の比との積に等し.

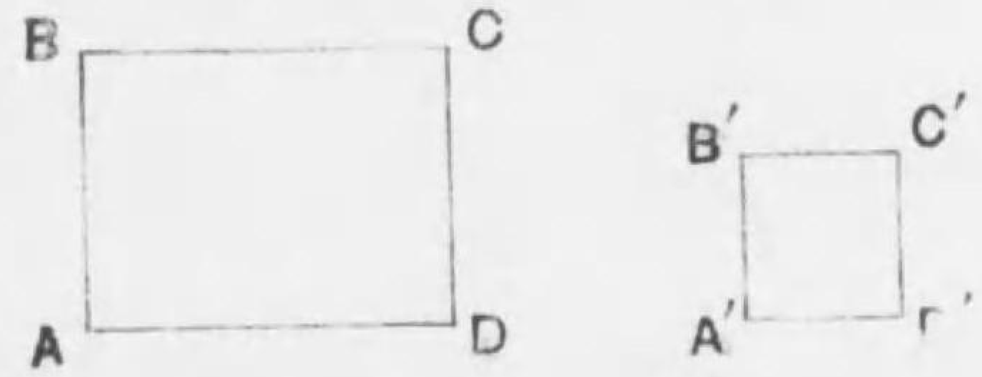
162. 定理 14. 其各の邊の長さが長

さの單位に等しき正方形の面積を面積の單位とすれば,矩形の面積を表す數は其底邊の長さを表す數と其高さを表す數との積に等し.

A′B′C′D′ ヲ長サノ單位ニ等シキ一邊ヲ有スル正方形トシ,其面積ヲ面積ノ單位トスルトキ,矩形 ABCD ノ面積ヲ表ス數ヲ m; AB, AD ヲ表ス數ヲ夫夫 a, b トスレバ

$$m=ab$$

ナルベシ.



證明 $m=\dfrac{AB.AD}{A'B'.A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}\times\dfrac{AD}{A'D'}$ (前節定理)

然ルニ A′B′, A′D′ ハ長サノ單位ニ等シク, AB, AD ヲ表ス數ハ夫夫 a, b ナリ (假設). 卽チ

$$\frac{AB}{A'B'}=a, \qquad \frac{AD}{A'D'}=b$$

$$\therefore \quad m=ab$$

系 1. 正方形の面積を表す數は其一邊を表す數の平方に等し.

系 2. 平行四邊形の面積を表す數は其底邊を表す數と高さを表す數との積に等し.

系 3. 三角形の面積を表す數は其底邊を表す數と其高さを表す數との積の半分に等し.

注意 1. 凡テ面積ノ單位ハ必ズ長サノ單位ヲ邊トスル正方形ノ面積ナリトイフコトニ定ム. 而シテ長サノ單位ノ名ノ上ニ平方トイフ語ヲ冠ラセテ之ヲ面積ノ單位ノ名トス. 因テ是ヨリ後ハ本定理ノ系ニ於ケルガ如ク此規約ヲ明言スルコトヲ省略スル者トス.

注意 2. AB ト CD トノ比例中項ヲ $\sqrt{AB.CD}$ ニテ表シ, 矩形ノ面積ガ Q^2 ニ等シク一邊ノ長サガ P ナル.トキ其隣レル邊ヲ $\frac{Q^2}{P}$ ニテ表スコトア

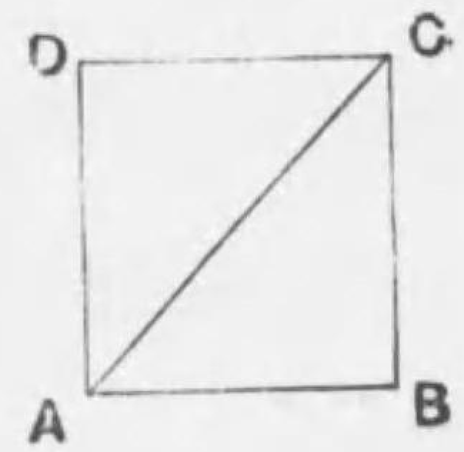
リ.

163. 定理 15. 正方形の對角線の一邊に對する比は $\sqrt{2}$ に等し.

ABCD ヲ正方形トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$$

ナルベシ.



證明 $AC^2=AB^2+BC^2$

$=2.AB^2$ (第四編定理8)

$$\therefore \quad \frac{AC^2}{AB^2}=2$$

然ルニ $\frac{AC^2}{AB^2}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$ (定理13系1)

$$\therefore \quad \left(\frac{AC}{AB}\right)^2=2$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$$

164. 定理 16. 四つの線分が比例をなすときは,其各の平方も亦比例をなす. 逆に,四つの線分の各の平方が比例をなすときは,此等の線分も亦比例をなす.

L, M, N, P ヲ四ツノ線分トセヨ. 然ルトキハ

(第一) $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ ナラバ $\frac{L^2}{M^2}=\frac{N^2}{P^2}$ ナルベク

(第二) $\frac{L^2}{M^2}=\frac{N^2}{P^2}$ ナラバ $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ ナルベシ.

第一の證明 $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ (假設)

$\therefore \left(\frac{L}{M}\right)^2=\left(\frac{N}{P}\right)^2$

然ルニ $\frac{L^2}{M^2}=\left(\frac{L}{M}\right)^2$ (定理13系1)

$\frac{N^2}{P^2}=\left(\frac{N}{P}\right)^2$ (同上)

$\therefore \frac{L^2}{M^2}=\frac{N^2}{P^2}$

第二の證明 $\frac{L^2}{M^2}=\frac{N^2}{P^2}$ (假設)

然ルニ $\frac{L^2}{M^2}=\left(\frac{L}{M}\right)^2$ (定理13系1)

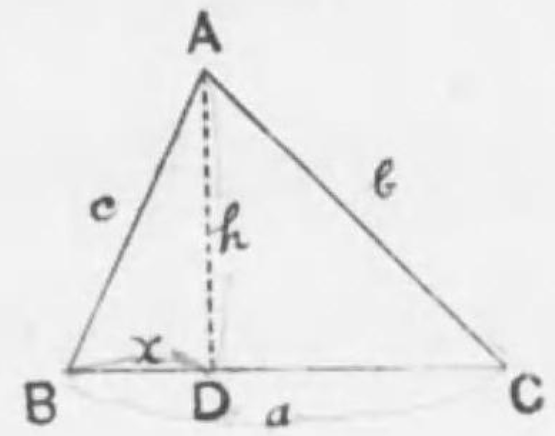
$\frac{N^2}{P^2}=\left(\frac{N}{P}\right)^2$ (同上)

$\therefore \left(\frac{L}{M}\right)^2=\left(\frac{N}{P}\right)^2$

$\therefore \frac{L}{M}=\frac{N}{P}$

165. 定理 17. 三角形の三邊を表す數を a, b, c とし,周の半分を表す數を s とすれば三角形の面積を表す數は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ なり.

證明 △ABC ニ於テ三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ表ス數ヲ夫夫 a, b, c トセヨ. A ヨリ BC ニ引キタル垂線ヲ AD トシ,其長サヲ表ス數ヲ h トスレバ



$$S=\frac{1}{2}ah \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリ. ソコデ BD ヲ表ス數ヲ x トスレバ CD 即チ BC−BD ヲ表ス數ハ $a-x$ ナリ.

$\therefore \quad c^2-x^2=h^2$

又 $\quad b^2-(a-x)^2=h^2$

$\therefore \quad c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$

$\therefore \quad x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

$$\therefore \quad h^2=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2=\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$\therefore \quad 4a^2h^2=(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)$$

$$=[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]$$

$$=(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$$

$$=16s(s-a)(s-b)(s-c) \qquad [\because \quad a+b+c=2s]$$

$$\therefore \quad h^2=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\therefore \quad h=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

之ヲ (1) ニ代用スレバ

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}a.\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

注意　D ガ BC ノ延長上ニアル場合ニハ CD ヲ $a+x$ ニテ表シテ上ト同樣ニ演算スレバ同一ノ結果ヲ得.

又 D ガ B ト一致スル場合卽チ $\triangle$ABC ノ $\angle$B ガ $\angle$R ナルトキハ $a^2+c^2=b^2$ 卽チ $a^2+c^2-b^2=0$

$$\therefore \quad 4a^2h^2=4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2$$

因テ此場合ニ於テモ上ト同一ノ結果ヲ得ベシ.

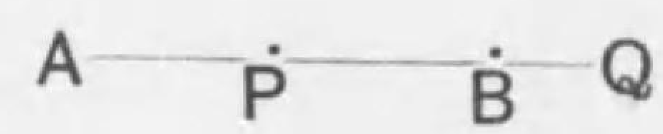
問題 4.　三角形アリ,其三邊ノ長サハ夫夫10米,8米,12米ナリ. 12米ナル邊ヲ底邊トセル高サヲ求メヨ.

問題 5.　梯形ノ二ツノ底ヲ表ス數ガ夫夫 a, b ニシテ他ノ二邊ヲ表ス數ガ各 c ナルトキ其面積ヲ求メヨ. 又 $a=32$, $b=20$, $c=10$ (長サノ單位ガ寸)ナラバ其面積幾何.

問題 6.　三邊ノ長サガ夫夫 6寸, 5寸, 4寸ナル三角形ノ內接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

比　例　線

166.　定義　有限直線(AB)ノ上ニ任意ノ一點(P)ヲ取ルトキニ生ズル二ツノ線分 (PA, PB) ヲ此有限直線ノ內分トイヒ, 此點(P)ヲ此有限直線(AB)ノ內分點トイフ. 又有限直線(AB)ノ延長ノ上ニ任意點ノ(Q)ヲ取ルトキ,ソレト有限直線(AB)ノ各ノ端トヲ兩端



トスル二ツノ線分 (AQ, BQ) ヲ此有限直線(AB)ノ**外分**トイヒ,此點(Q)ヲ此有限直線(AB)ノ**外分點**トイフ.

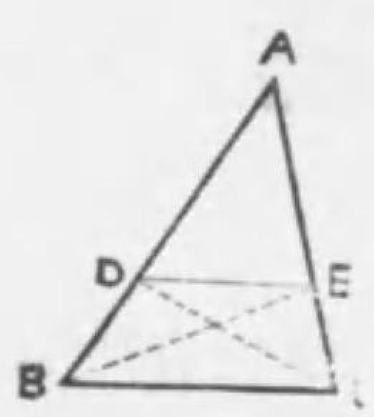
內分,外分ヲ總稱シテ**分**トイフ. 有限直線ノ內分(若クハ外分)ノ比ガ,與ヘラレタル比ニ等シキトキハ,此內分點(若クハ外分點)ガ此有限直線ヲ與ヘラレタル比ニ**內分**(若クハ**外分**)するトイフ.

167. 定理 18. 三角形の一邊に平行なる直線は,他の二邊を同じ比に內分若くは外分す.

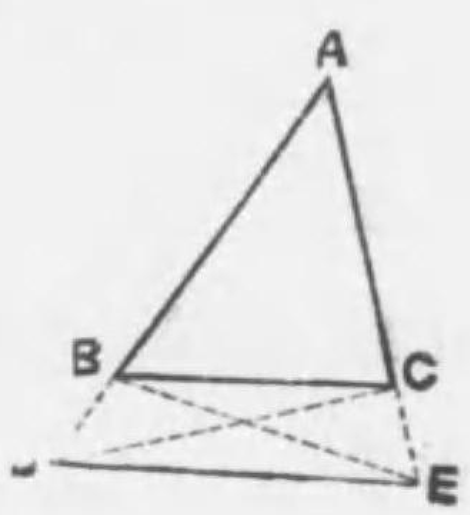
$\triangle ABC$ ノ一邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,他ノ二邊(若クハ其延長)ト夫夫 D, E ニテ交ラシメヨ.

然ルトキハ $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{EA}{EC}$ ナルベシ.

(甲圖)



(乙圖)



(丙圖)

證明 B ト E ト; C ト D トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\frac{DA}{DB} \qquad \text{(定理10系2)}$$

又 $$\frac{\triangle ADE}{\triangle CDE}=\frac{EA}{EC} \qquad \text{(同上)}$$

然ルニ $$\triangle BDE=\triangle CDE \qquad (\because DE \parallel BC)$$

$$\therefore \quad \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$$

注意 例ヘバ點 P ガ線分 AB ヲ M : N ニ內分(若クハ外分)スルトハ PA : PB=M : N ナル樣ニ AB ヲ分ツコトニシテ PA ハ M ニ對應シ,PB ハ N ニ對應ス. 若シ PB : PA=M : N ナルトキハ P ハ線分 BA ヲ M : N ノ比ニ分ツトイフ.

系 1. $$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC} \qquad \text{(定理5)}$$

$$\frac{AB}{DA}=\frac{AC}{EA} \qquad \text{(逆比及定理5)}$$

系 2. $$\frac{DA}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

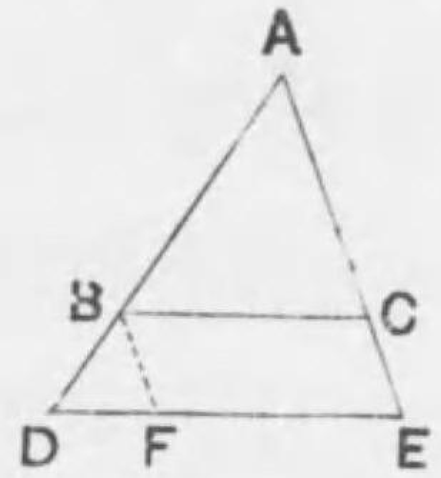
證明 B ヨリ AE ニ平行ナル直線ヲ引キ, DE 又ハ其延長ト F ニ於テ交ラシムレバ

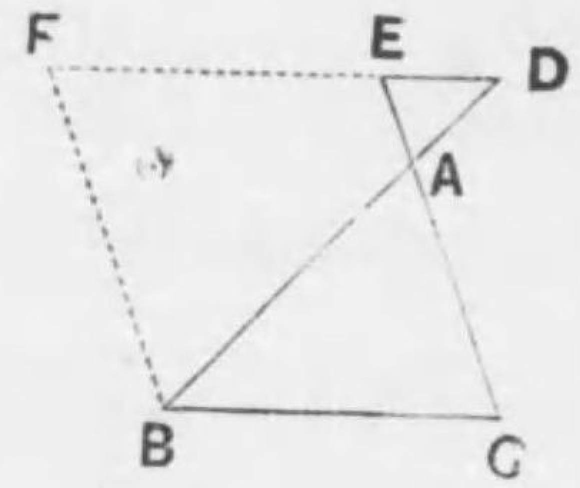
$$\frac{DB}{AB}=\frac{DF}{EF}$$

$$\therefore \quad \frac{DA}{AB}=\frac{DE}{EF} \qquad \text{(系1}$$

然ルニ　　$EF=BC$

$\therefore\quad \dfrac{DA}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$





系 3.　互に平行なる直線が一つの直線の上に截り取る線分は,此等の平行直線が他の一つの直線の上に截り取る線分に比例す.

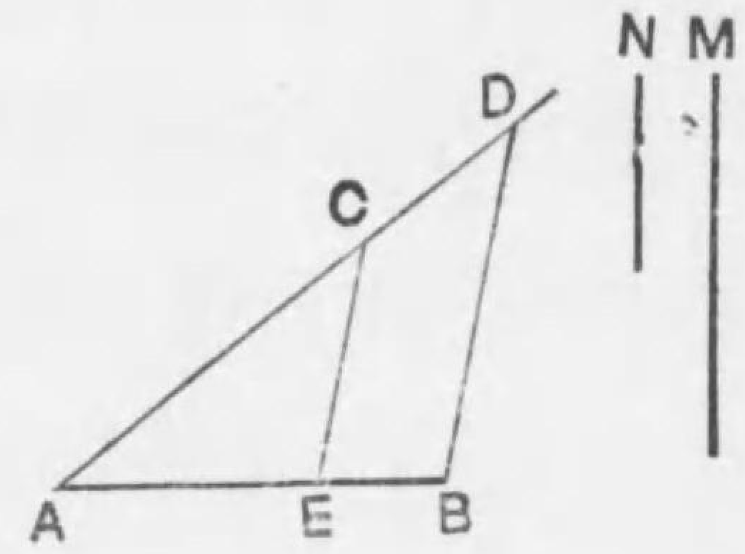
168. 定理 19.　定線分を與へられたる比に内分することを得, 又1に等しからざる與へられたる比に外分することを得,而して各の場合に於て分點は唯一つに限る.

AB ヲ定線分, M : N ヲ與ヘラレタル比トス.

内分の場合　AB ノ一端ヨリ任意ノ半直線 AC ヲ引キ其上ニ AC=M, CD=N ヲ取リ, B ト D ト

ヲ結付ケヨ. C ヨリ DB ニ平行ナル直線ヲ引キ AD トノ交點ヲ E トスレバ E ハ AB ヲ M : N ニ内分スベシ.

證明　$CE \parallel BD$



$\therefore\quad \dfrac{EA}{EB}=\dfrac{CA}{CD}$　（前節）

$\therefore\quad \dfrac{EA}{EB}=\dfrac{M}{N}$

次ニ E′ ガ AB ノ内分點ニシテ

$$\frac{E'A}{E'B}=\frac{M}{N}$$

ナリトスレバ

$$\frac{E'A}{E'B}=\frac{EA}{EB}$$

$$\therefore\quad \frac{E'A+E'B}{E'B}=\frac{EA+EB}{EB}\quad\text{（定理5）}$$

即チ　$\dfrac{AB}{E'B}=\dfrac{AB}{EB}$

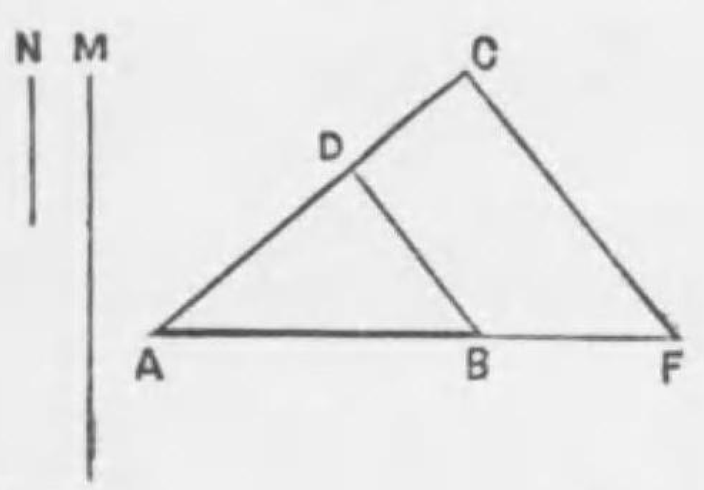
$$\therefore\quad E'B=EB$$

故ニ　E′ ト E トハ相一致ス.

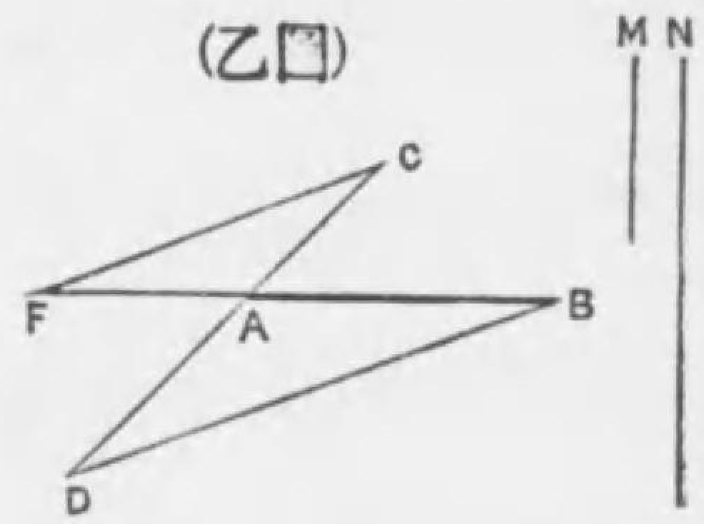
故ニ AB ヲ $M:N$ ニ内分スル點ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

外分の場合 此場合ニハ CA 或ハ CA ヲ A ノ方ヘ延長シタル部分ノ上ニ N ニ等シク CD′ ヲ取リテ D′ ト B トヲ結付ケヨ. C ヨリ D′B ニ平行ナル直線ヲ引キ, AB ヲ B 或ハ A ノ方ヘ延長シタル者ト F ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ内分ノ場合ト同様ニシテ F ガ AB ヲ $M:N$ ニ外分スル唯一ツノ點ナルコトヲ知ル.

(甲圖)



(乙圖)



注意 外分ノ場合ニハ其二ツノ分ハ常ニ相等シカラズ. 故ニ AB ヲ相等シキ比(即チ等比)ニ外分スルコト能ハズ.

169. 定理 20. 三角形の二邊を,其共

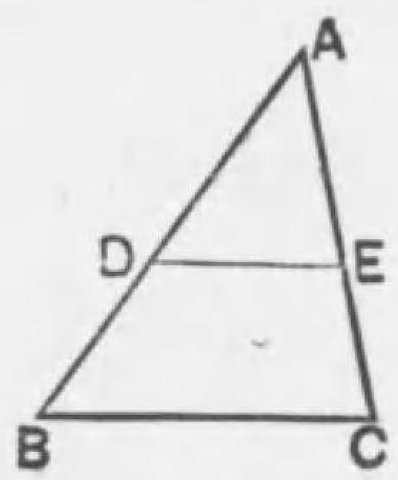
有の端を一端とせる分が相對應して比例を爲す様に分つ直線は第三邊に平行なり.

一ツノ直線ガ △ABC ノ二邊 AB, AC ノ各ヲ夫夫 D, E ニ於テ内分若クハ外分スルトキ

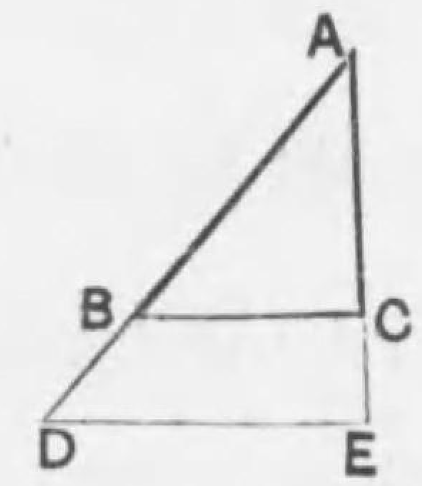
$$DA:DB=EA:EC$$

ナリトセヨ. 然ルトキハ $DE \parallel BC$ ナルベシ.

(甲圖)



(乙圖)



證明 D ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ヲ作リ AC ト E′ ニ於テ交ラシムレバ E′ ト D トハ夫夫 AC, AB ヲ同ジ比ニ内分若クハ外分ス(定理18), 然ルニ點 E モ AC ヲ同様ニ分ツ.

故ニ E ト E′ トハ相合ス(前節定理).

故ニ DE ハ DE′ ト相合ス. 即チ $DE \parallel BC$ ナリ.

問題 7. 同ジ底邊ヲ有スルニツノ三角形 ABC,

ABD アリテ其底邊上ノ任意ノ一點 E ヨリ AC, AD ト同方向ヲ有スル二直線ヲ引キ,夫夫BC, BD ト F, G ニ於テ交ラシムレバ CD, FG ハ互ニ平行ナリ.

問題 8. 二ツノ線分 AC, A′C′ ハ平行ニシテ B, B′ ハ夫夫 AC, A′C′ ヲ 1 ニ等シカラザル同ジ比ニ內分(若クハ共ニ外分)スルトキハ三ツノ直線 AA′, BB′, CC′ ハ同一點ヲ通ル.

170. 作圖題 1. 與へられたる三つの線分の第四比例項を求むること.

M, N, P ヲ與ヘラレタル三ツノ線分トシ,

$\dfrac{M}{N}=\dfrac{P}{X}$ ニ適スル線分 X ヲ求ム.

作圖法 一點 O ヨリ任意ニ二ツノ半直線 OX ト OY トヲ引キ, OX ノ上ニ於テ OA, AB ヲ夫夫 M, N ニ等シク取リ,次ニ OY ノ上ニ於テ OC ヲ P ニ等シク取リ, A ト C トヲ結付ケ, B ヨリ AC ニ平行ナル直線ヲ引キ, OY ト D ニ於テ交ラシメヨ.

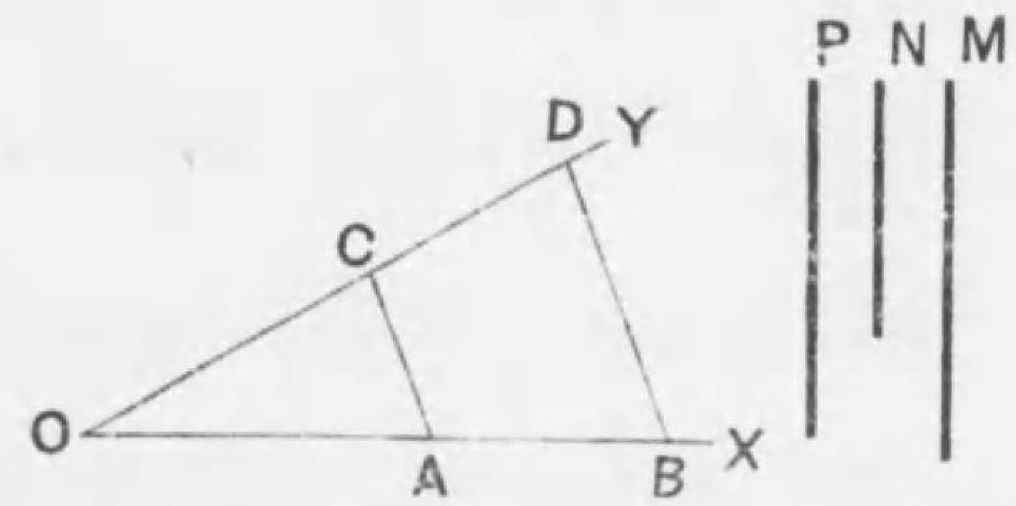
然ルトキハ CD ガ求ムル所ノ第四比例項ナリ.

證明 $AC \parallel BD$

$\therefore \quad \dfrac{OA}{AB}=\dfrac{OC}{CD}$

即チ $\dfrac{M}{N}=\dfrac{P}{CD}$ (定理 9)

$\therefore \quad CD=X$



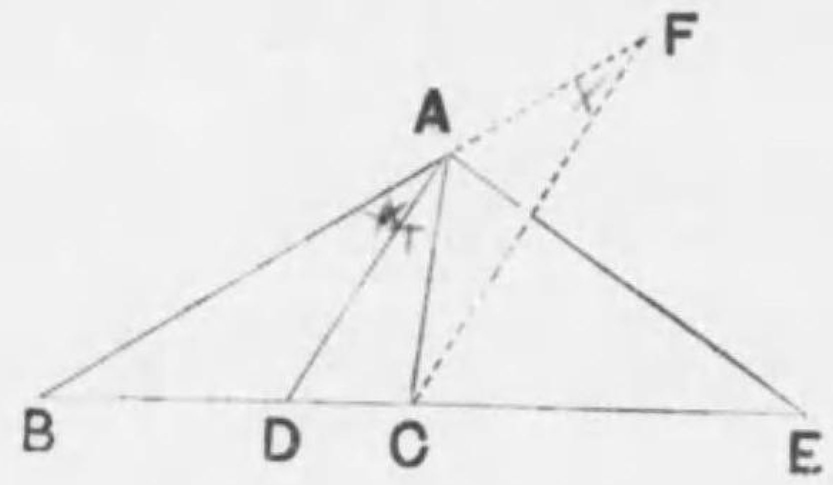
注意 若シ P=N ナレバ,問題ハ與ヘラレタル線分 M, N ノ第三比例項ヲ求ムルコトニナル. 然レドモ其作圖法ハ今述ベタルノト毫モ異ナルコトナシ.

171. 定理 21. 三角形の頂角及之に接する外角の二等分線は,夫夫底邊を他の二邊の比に內分及外分す.

△ABC ノ頂角 A 及之ニ接スル外角ノ二等分線ガ底邊BC及其延長ニ交ル點ヲ夫夫 D, E トセヨ.

然ルトキハ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}\quad \text{ナルベシ.}$$



證明 C ヨリ AD ニ平行ナル直線ヲ引キ, BA ノ延長トFニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AF}$$

$$\angle BAD=\angle AFC$$

又 $\angle DAC=\angle ACF$

然ルニ $\angle BAD=\angle DAC$ (假設)

$\therefore$ $\angle AFC=\angle ACF$

$\therefore$ $AC=AF$

$\therefore$ $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$

同様ニ, C ヨリ AE ニ平行ナル直線ヲ引キ,

$$\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}$$

ナルコトヲ證明スルヲ得.

注意 △ABC ガ二等邊三角形ニシテ AB=AC ナレバ AE∥BC ナリ, 故ニ此場合ニハ外分點ヲ求ムルヲ得ズ.

問題 9. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點ヲ D トシ,角 ADC, 角 ADB ノ各ノ二等分線ガ夫夫 AC, AB ト交ル點ヲ E, F トスレバ,直線 EF ハ BC ニ平行ナリ.

172. 定理 22. 三角形の底邊を他の二邊の比に內分若くは外分する點と頂點とを結付くる線分は,夫夫頂角及之に接する外角を二等分す.

△ABC ノ底邊 BC ヲ $\dfrac{AB}{AC}$ ナル比ニ內分及外分スル點ヲ夫夫 D, E トセヨ. 然ルトキハ線分 AD ハ頂角 A ヲ二等分シ, 線分 AE ハ頂角 A ニ接スル外角ヲ二等線分スベシ.

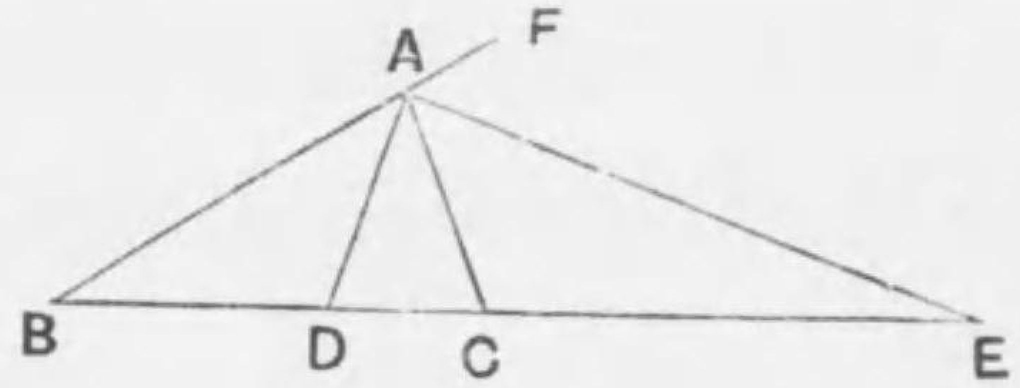
證明 角 A ノ二等分線ヲ引キ,夫レガ BC ト D′ ニテ交ルトセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$$ （前節定理）

然ルニ $$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$$ （假設）

故ニDモD′モBCヲ $\frac{AB}{AC}$ ニ内分スル點ナルベキニヨリ,此二點ハ相一致ス（定理19）. 故ニADハ角Aノ二等分線ナリ.

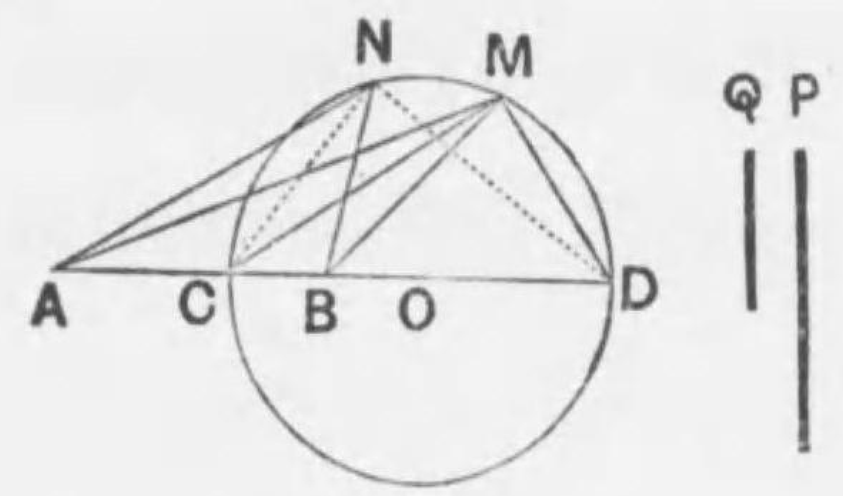
同樣ニシテ, AEハ角Aニ接スル外角CAFノ二等分線ナルコトヲ證明シ得.



問題10.　四邊形ABCDノ二角A及Cノ二等分線ガ對角線BDノ上ニ於テ相交レバ,他ノ二角B及Dノ二等分線モ對角線ACノ上ニ於テ相交ル.

173. 軌跡題　二定點よりの距離の比が,與へられたる比に等しき點の軌跡を求むること.

A, Bヲ二定點, P, Qヲ與ヘラレタル二ツノ線分トシ, A, Bヨリノ距離ノ比ガ $\frac{P}{Q}$ ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム.



解　マヅ線分ABヲ $\frac{P}{Q}$ ニ内分及外分シタル點ヲ夫夫C及Dトスレバ,此二點ハ與ヘラレタル性質ヲ有スル點ナリ.

今與ヘラレタル性質ヲ有スル任意ノ一點ヲMトシ,之トA, B, C, Dノ各トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ

$$\frac{MA}{MB}=\frac{P}{Q}=\frac{AC}{BC}$$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{P}{Q}=\frac{AD}{BD}$$

ナルユヱ, MCハ三角形AMBノ角Mノ二等分線ニシテ, MDハ角Mニ接スル外角ノ二等分線ナリ（前節定理）.

$$\therefore\quad \angle CMD=\angle R$$

故ニ與ヘラレタル性質ヲ有スル點ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアリ.

次ニ此圓周上ニ任意ノ點 N ヲ取リ,之ト A, C, B, D ノ各トヲ結付ケ, NC ト角 ANC ニ等シキ角ヲナス直線ヲ, AN トハ反對ノ側ニ引キ, CD ニ B′ ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ CN ハ角 ANB′ ノ二等分線ナリ.

$$\therefore \quad \frac{AN}{B'N}=\frac{AC}{B'C}$$

又 CN⊥ND ナルユエ,ND ハ三角形 ANB′ ノ N ニ於ケル外角ノ二等分線ナリ.

$$\therefore \quad \frac{AN}{B'N}=\frac{AD}{B'D}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{B'C}=\frac{AD}{B'D}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{AD}=\frac{B'C}{B'D}$$

然ルニ $\frac{AC}{AC}=\frac{AD}{BD}$

$$\therefore \quad \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

$$\therefore \quad \frac{B'C}{B'D}=\frac{BC}{BD}$$

故ニ B モ B′ モ線分 CD ヲ同ジ比ニ内分スル點ナリ. 因テ B ト B′ トハ同一ノ點ナラザルベカラズ.

故ニ NC ハ角 ANB ノ二等分線ナリ.

故ニ N ハ與ヘラレタル性質ヲ有ス. 因テ

二定點よりの距離の比が與へられたる比に等しき點の軌跡は,此二定點を結付くる線分を此比に内分及外分する二點を兩端とする線分を直徑として畫きたる圓周なり.

注意 P=Q ナレバ A, B ヨリノ距離ガ相等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコトトナル,而シテ第三編軌跡題1ニ於テ既ニ之ヲ述ベオキタリ.

問題 11. 三ツノ點 A, B, C ガ同一直線上ニ此順ニ並ブトキ,二ツノ線分 AB ト BC トヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

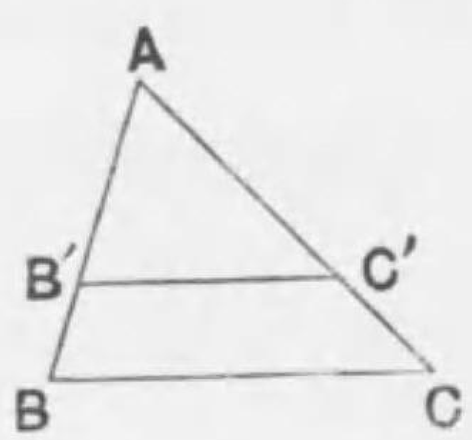
問題 12. 頂角ト底邊ト其他ノ二邊ノ比トヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

相似多角形

174. 定義 一ツノ多角形ノ(順ニ取リタル)角ガ夫夫他ノ多角形ノ(順ニ取リタル)角ニ等シキトキハ此兩多角形ハ**互に等角なり**トイフ,而シテ一ツノ多角形ノ各ノ角ヲ他ノ多角形ノ之ニ等シキ角ニ**對應する**トイヒ,相對應スル角ノ頂點ノ間ニアル邊ヲ**對應邊**トイフ.

175. 定理 23. 三角形の一邊に平行なる直線を作るとにきに生ずる三角形と,原三角形とは等角にして,且つ其對應邊は比例をなす.

證明 △ABCノ邊BCニ平行ナル直線ヲ引キ,他ノ二邊AB, ACト夫夫B', C'ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ三角形ABCト三角形AB'C'トニ於テ,角Aハ共通ニシテ,角Bト角B'トハ相等シク,角Cト角C'トハ相等シ.



次ニ　$BC \parallel B'C'$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \qquad \text{(定理18)}$$

$$\text{又} \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \qquad \text{(定理18及系2)}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

176. 定義 二つの三角形が等角にして,對應邊が比例を爲すときは,此二つの三角形は**互に相似なり**といふ.

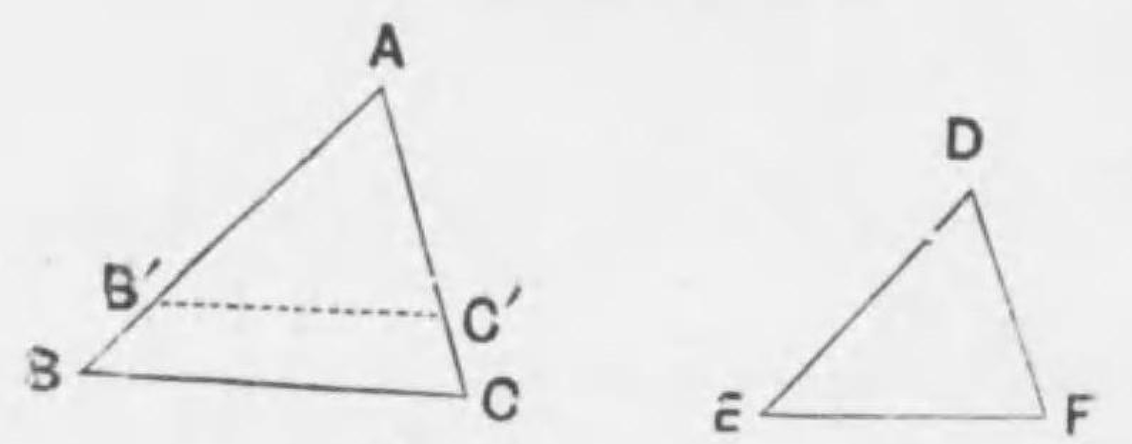
例ヘバ前節ノ定理ニ於ケル三角形ABCト三角形AB'C'トハ互ニ相似ナリ. 故ニ前節ノ定理ハ亦次ノ如クニ言ヒ表スコトヲ得.

定理 24. 三角形の一邊に平行なる直線を作るときに生ずる三角形と原三角形とは互に相似なり.

注意 「三角形ABCト三角形DEFトガ互ニ相似ナリ」トイフコトヲ書キ表スニ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ナル記號ヲ用フルコトアリ.

177. 定理 25. 二つの角が夫夫相等しき二つの三角形は互に相似なり.

△ABC, △DEF ニ於テ ∠A=∠D, ∠B=∠E トセヨ. 然ルトキハ △ABC∽△DEF ナルベシ.



證明 AB ノ上ニ, DE ニ等シク AB′ ヲ取リ B′ ヨリ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC ト C′ ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

△ABC∽△AB′C′ (前節定理)

サテ △AB′C′ ト △DEF トニ於テ

AB′=DE (作圖)

∠B′=∠B=∠E (假設)

∴ △AB′C′≡△DEF

∴ △ABC∽△DEF

系 1. 一つの鋭角が相等しき二つの直角三角形は互に相似なり.

系 2. 二つの相似三角形の對應邊の比は,此等の邊を底邊と看做したるときの三角形の高さの比に等し.

系 3. 三邊が夫夫互に平行なるか若くは互に垂直なる二つの三角形は互に相似なり.

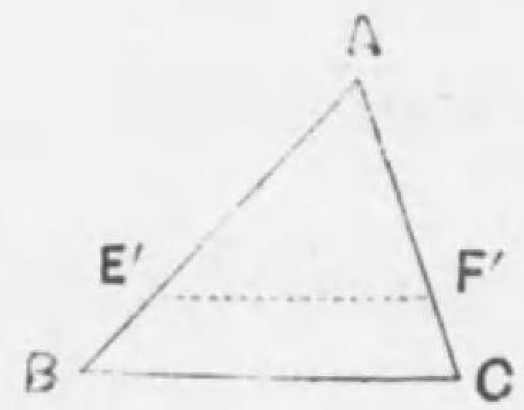
問題 13. 一點 A ヨリ,一ツノ圓ニ切線ト割線トヲ引キ,此切線ノ切點ヲ B トシ,此割線ト圓周トノ交點ヲ C 及 D トスルトキハ,三角形 ABC ト三角形 ABD トハ互ニ相似ナリ.

問題 14. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 B ヨリ AC ニ垂線 BD ヲ下ストキハ

$BC^2=2.AC.CD$ ナリ.

178. 定理 26. 二邊の比及其二邊の夾角が夫夫相等しき二つの三角形は互に相似なり.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$ 及 $\angle A=\angle D$ ナリトセヨ. 然ルトキハ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ナルベシ.



證明 $\angle D$ ガ之ニ等シキ $\angle A$ ノ上ニ重ナリ,邊 DE, DF ガ夫夫邊 AB, AC ノ上ニ重ナル樣ニ $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ移シ,點 E, F ノ落ツル點ヲ夫夫 E′, F′ トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF} \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AE'}=\frac{AC}{AF'}$$

$$\therefore \quad E'F' \parallel BC \qquad \text{(定理20)}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle AE'F'$$

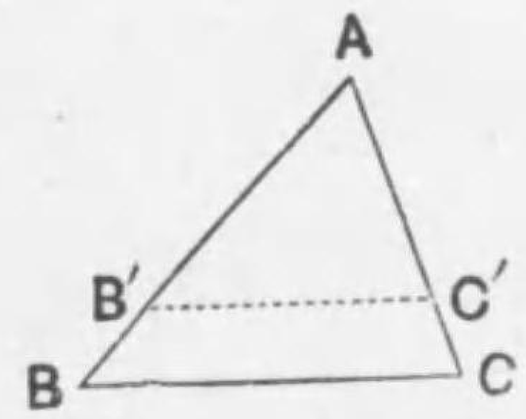
$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

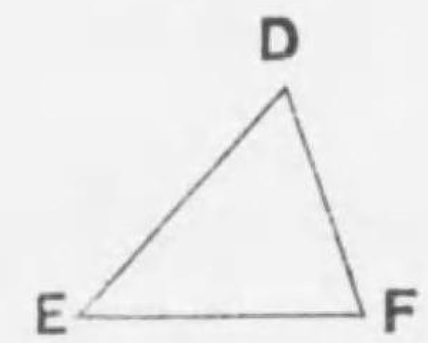
系 頂角が相等しき二つの二等邊三角形は互に相似なり.

問題 15. 三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引キタル垂線ガ三角形ノ內ニアリテ,且ツ其足ニテ生ズル底邊ノ二ツノ分ノ比例中項ナルトキハ,此三角形ハ直角三角形ナリ.

179. 定理 27. 三邊が夫夫比例を成す二つの三角形は互に相似なり.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}$ ナリトセヨ. 然ルトキハ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ナルベシ.





證明 AB ノ上ニ,DE ニ等シク AB′ ヲ取リ, B′ ヨリ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC ト C′ ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'} \qquad \text{(定理23)}$$

然ルニ $\quad AB'=DE \qquad$ (作圖)

∴ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{AC'}$

而シテ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ (假設)

∴ $\frac{AC}{AC'}=\frac{AC}{DF}$

∴ $AC'=DF$

同様ニ $B'C'=EF$

∴ $\triangle AB'C'\equiv\triangle DEF$

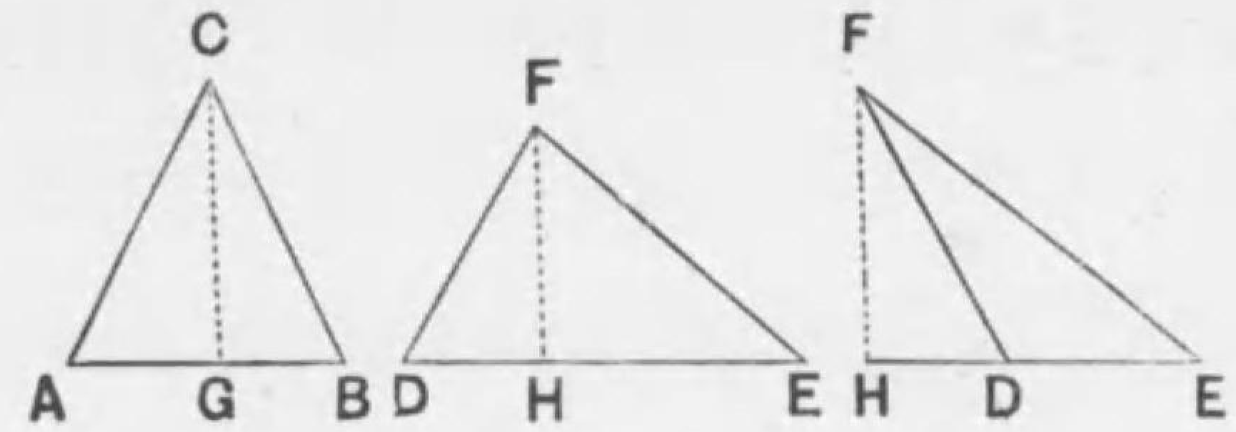
然ルニ $\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$ (定理24)

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$

180. 定理 28. 一つの三角形の一つの角と他の三角形の一つの角とが相等しきか,若くは互に補角をなすときは,此二つの三角形の面積の比は此角を夾む二邊の積の比に等し.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ,角 A ト角 D トガ相等シキカ,若クハ互ニ補角ヲナストセヨ.

然ルトキハ $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB.AC}{DE.DF}$ ナルベシ.



證明 三角形 ABC ノ邊 AB ヲ底邊トスルトキノ高サヲ CG トシ,三角形 DEF ノ邊 DE ヲ底邊トスルトキノ高サヲ FH トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{CG}{FH} \quad \text{(定理13系3)}$$

然ルニ $\triangle ACG\backsim\triangle DFH$ (定理25系1)

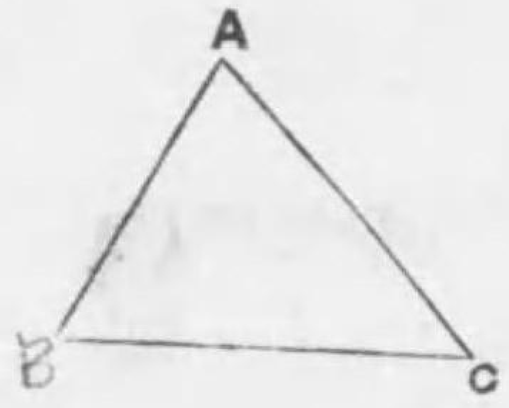
∴ $\frac{CG}{FH}=\frac{AC}{DF}$

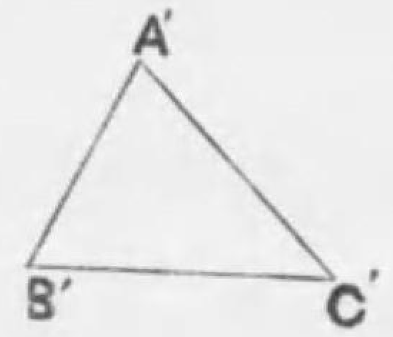
∴ $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{AC}{DF}=\frac{AB.AC}{DE.DF}$ (定理13)

系 相等しき一つの角を有する二つの平行四邊形の面積の比は其相隣れる二邊の積の比に等し.

181. 定理 29. 互に相似なる二つの三角形の面積の比は其對應邊の平方の比に等し.

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ ナリトスレバ $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB^2}{A'B'^2}$ ナルベシ.





證明 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C$

$\therefore \quad \angle A=\angle A'$

$\therefore \quad \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}\times\dfrac{AC}{A'C'}$ (前節定理)

然ルニ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

$\therefore \quad \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2=\dfrac{AB^2}{A'B'^2}$

問題 16. 相似三角形ノ面積ハ其内接圓若クハ其外接圓ノ半徑ノ平方ニ比例ス.

182. 定理 30. 直角三角形に於て

(第一) 直角を夾む邊の各は,斜邊の

上に於ける夫れの直射影と斜邊との比例中項なり.

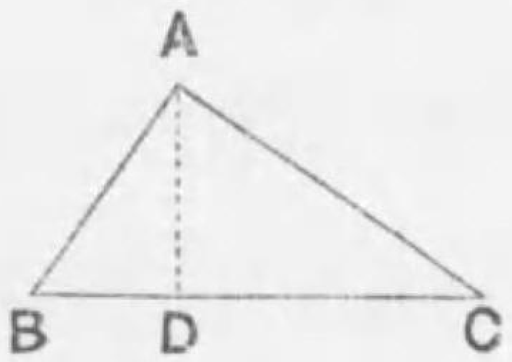
(第二) 直角の項點より斜邊へ引きたる垂線は,其足にて生ずる斜邊の二つの分の比例中項なり.

直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ニ下シタル垂線ノ足ヲ D トセヨ. 然ルトキハ

(第一) AB ハ BD ト BC トノ比例中項ナルベク,

(第二) AD ハ BD ト CD トノ比例中項ナルベシ.

第一の證明 $\triangle ABC$ ト $\triangle ABD$ トハ何レモ直角三角形ニシテ,銳角 B ヲ共有ス.



$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle ABD$ (定理25系1)

$\therefore \quad \dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AB}{BD}$

即チ AB ハ BC ト BD トノ比例中項ナリ.

第二の證明 二ツノ直角三角形 ABD ト ACD トニ於テ $\angle B=\angle CAD$ ($\because$ $\angle BAD$ ノ餘角)

$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle ACD$ （定理25系1）

$$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$

卽チ AD ハ BD ト CD トノ比例中項ナリ.

系 1. 圓の弦の平方は,其一端を通る直徑の上に於ける夫れの直射影と直徑との積に等し.

系 2. 圓周上の一點より一つの直徑へ下したる垂線の平方は,其足にて生ずる此直徑の二つの分の積に等し.

系 3. 直角三角形の直角を夾む二邊の平方の比は斜邊の上に於ける夫等の直射影の比に等し.

問題 17. 圓ノ互ニ平行ナル二ツノ切線ガ,點 A ニ於テ同ジ圓ニ切スル第三ノ切線ト P, Q ニ於テ交ルトキ,此圓ノ半徑ハ AP ト AQ トノ比例中項ナリ.

問題 18. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ,次ニ角 B ノ二等分線ヲ引キ, AC, AD ト夫夫 E, F ニテ交ラシムレバ

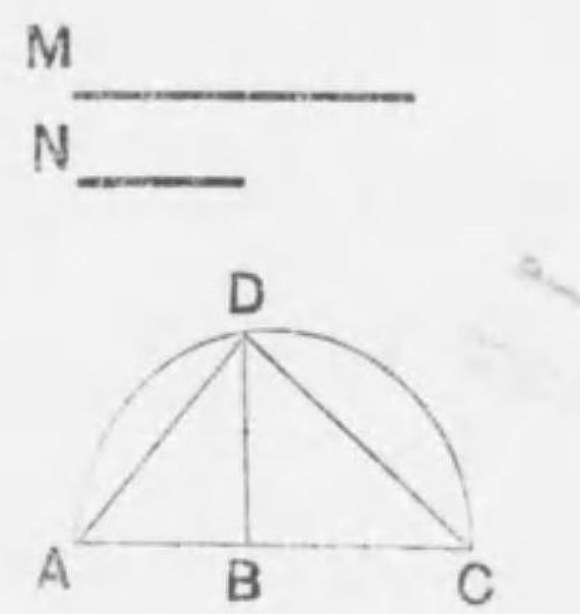
$$\frac{DF}{AF} = \frac{AE}{CE}$$ ナリ.

183. 作圖題 2. 與へられたる二つの線分の比例中項を求むること.

M, N ヲ與ヘラレタル二ツノ線分トシ, M ト N トノ比例中項ヲ求ム.

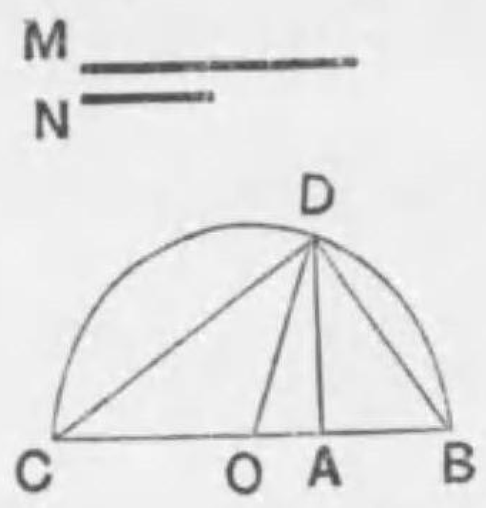
作圖法第一 M>N ナリト假定セン.

點 A ヨリ任意ニ半直線ヲ引キ,其上ニ於テ其原點 A ヨリ, AB ヲ N ニ等シク, AC ヲ M ニ等シク取リ, AC ヲ直徑トスル半圓周ヲ書ケ. 次ニ B ヨリ AC ニ垂線ヲ引キ,此半圓周ト點 D ニ於テ交ラシメ,



A ト D トヲ結付ケヨ. AD ガ卽チ求ムル所ノ長サナリ（前節定理系1）.

作圖法第二　任意ニ直線ヲ引キ,其上ノ一點Aヨリ反對ノ側ニABガNニ等シク,ACガMニ等シキ様ニ點BトCトヲ其上ニ取リ,BCヲ直徑トシテ半圓周ヲ書ケ.次ニAヨリBCニ垂線ヲ引キ,此半圓周トDニ於テ交ラシムレバ,ADガ卽チ求ムル所ノ長サナリ(前節定理系2).



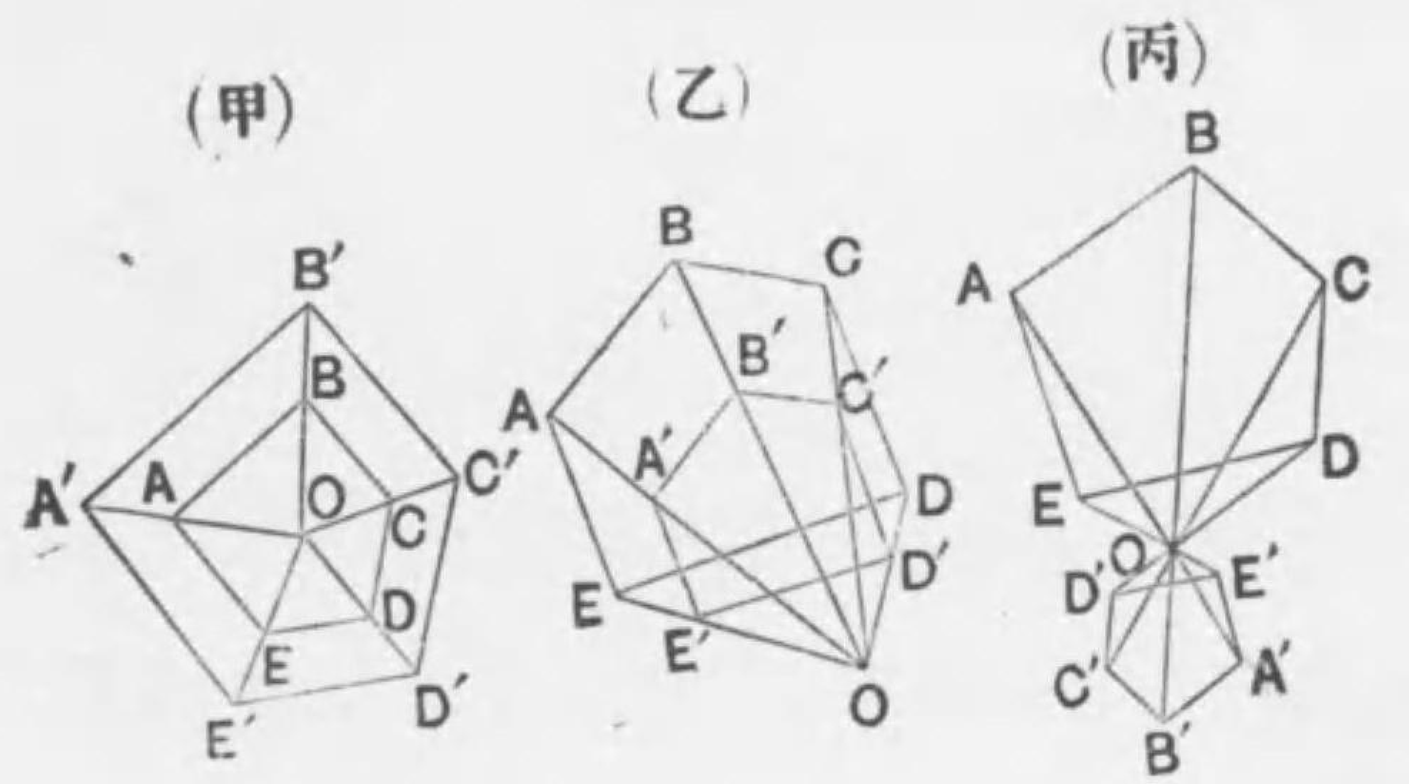
系　相等しからざる二つの線分の比例中項は,其等差中項,卽ち其和の半分より小なり.

問題 19.　與ヘラレタル正方形ト等積ニシテ且ツ與ヘラレタル線分ニ等シキ一邊ヲ有スル矩形ヲ作ルコト.

問題 20.　與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作ルコト.

184. 定理 31.　多角形の各項點を一つの點に結付けたる線分を同じ比に内分,若くは外分し,其各分點と其次の分點とを結付けて得る所の多角形は原多角形と等角にして且つ其對應邊は比例をなす.

多角形ABCDEノ各項點A, B, C, D, Eヲ一ツノ點Oニ結付クル線分ヲ同ジ比ニ內分若クハ外分スル點ヲ夫夫A′, B′, C′, D′, E′トセヨ.然ルトキハ多角形A′B′C′D′E′ト多角形ABCDEトハ等角ニシテ其對應邊ハ互ニ比例ヲナスベシ.



證明　　$\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$　　(定理26)

$\triangle OBC \backsim \triangle OB'C'$

$\therefore$　$\angle ABO = \angle A'B'O$

$\angle OBC = \angle OB'C'$

$\therefore$　$\angle ABC = \angle A'B'C'$

同樣ニ角 C, 角 E 等ハ夫夫角 C', 角 E' 等ニ等シキコトヲ知ル.

次ニ　$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{OB}{OB'}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

同樣ニ　$\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'}$　等ナリ.

注意　ココニ論ジタル二ツノ多角形ノ邊ハ二ツ宛互ニ平行ナルコト明カナリ.

185. 定義　二つの多角形が等角にして對應邊が比例をなすときは,此二つの多角形は**互に相似なり**といふ.

對應邊ノ比ヲ名ヅケテ**相似比**トイフ.

例ヘバ前節ニ示シタル二ツノ五邊形 ABCDE

ト A'B'C'D'E' トハ互ニ相似ナル多角形ニシテ,其對應邊ガ夫夫平行ナル特別ノ位置ニオカレタルモノナリ. 而シテ OB : OB' 即チ AB : A'B' ガ其相似比ナリ.

注意 1.　相似三角形ハ相似多角形ノ最モ簡單ナル場合ナリ.

注意 2.　相等シキ多角形ハ相似多角形ノ特別ナル場合ニシテ其相似比ガ 1 ニ等シキ者ナリ.

問題 21.　一ツノ四邊形 ABCD ノ三ツノ角 A, B, C ガ夫夫他ノ四邊形 EFGH ノ三ツノ角 E, F, G ニ等シク,其中ノ一ツノ角,例ヘバ角 A ノ二邊 AB, AD ガ夫レニ等シキ角 E ノ二邊 EF, EH ニ比例スルトキハ,此二ツノ四邊形ハ互ニ相似ナリ.

186. 定理 32.　互に相似なる二つの多角形の周の比は其相似比に等し.

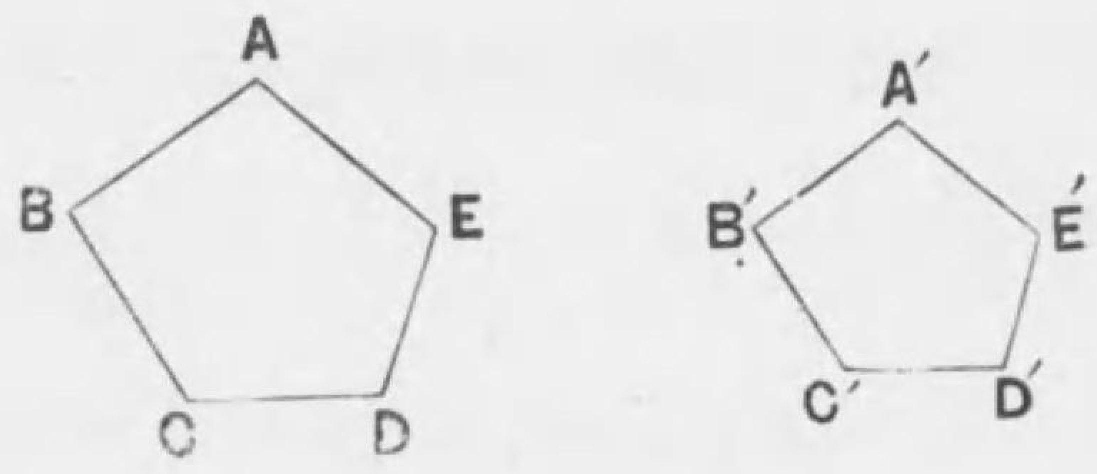
證明　ABCDE, A'B'C'D'E' ヲ互ニ相似ナル二ツノ多角形トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} \quad \text{(假設)}$$

然ルニ此等ノ相等シキ比ト

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}$$

トハ相等シ (定理7).



187. 定理 33. 互に相似なる二つの多角形は同數の互に相似なる三角形に分たる.

證明 例ヘバ ABCDE, A′B′C′D′E′ ヲ互ニ相似ナル二ツノ五邊形トセヨ. マヅ ABCDE ノ一ツノ頂點 A ヲ各頂點ニ結付ケ,次ニ A′B′C′D′E′ ノ A ニ對應スル頂點 A′ ト各頂點トヲ結付ケヨ.

然ルトキハ ABCDE ハ三角形 ABC, ACD, ADE ニ分タレ, A′B′C′D′E′ ハ同數ノ三角形 A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′ ニ分タル.

サテ　$\angle B=\angle B'$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

$\therefore$　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$　(定理26)

$\therefore$　$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{B'C'}{A'C'}$

然ルニ　$\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{C'D'}{B'C'}$　(假設)

$\therefore$　$\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{C'D'}{A'C'}$　(定理8)

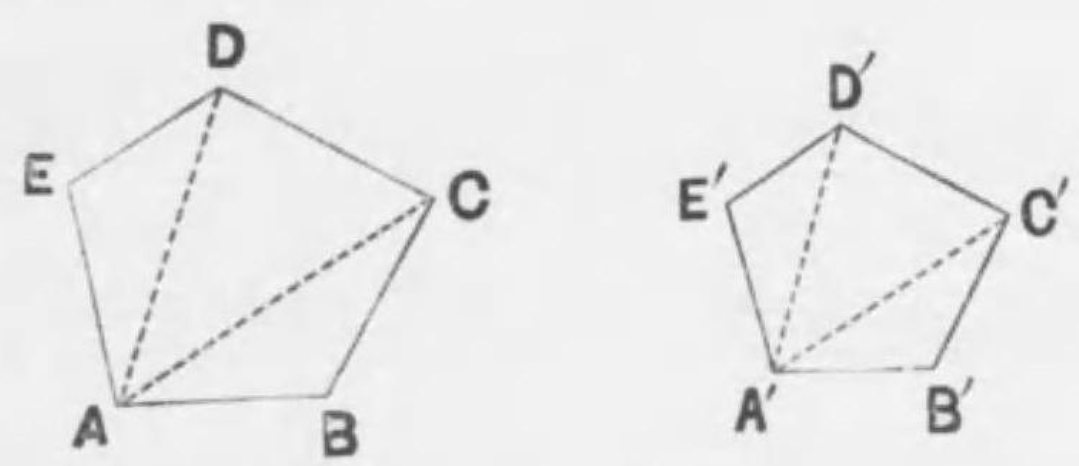
又　$\angle BCA=\angle B'C'A'$

然ルニ　$\angle BCD=\angle B'C'D'$

$\therefore$　$\angle ACD=\angle A'C'D'$

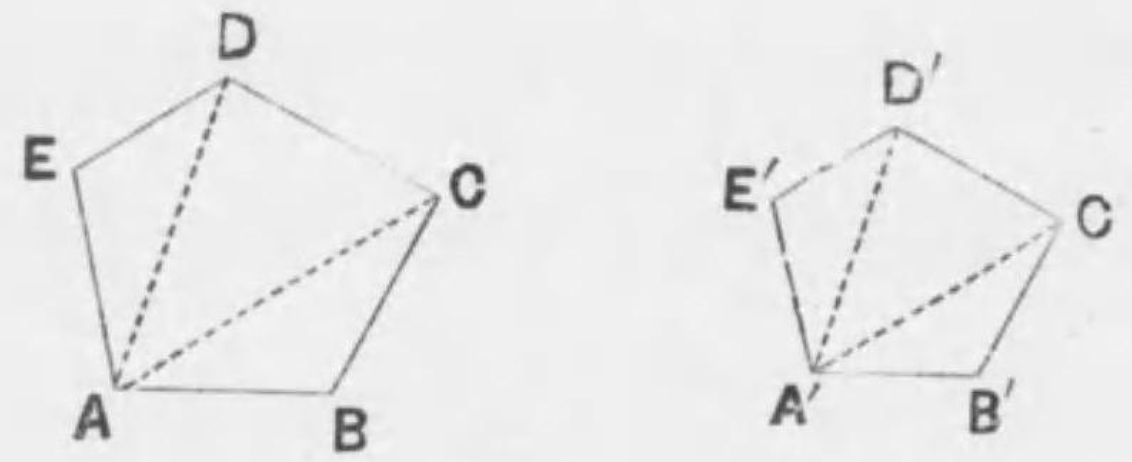
$\therefore$　$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$　(定理26)

同樣ニ　$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$



188. 定理 34. 相似多角形の面積は其對應邊の平方に比例す.

ABCDE, A′B′C′D′E′ ヲ二ツノ相似多角形トセヨ.
然ルトキハ其面積ノ比ハ對應邊 AB, A′B′ ノ平方ノ比ニ等シカルベシ.



證明 A, A′ ヨリ各頂點ヘ對角線ヲ引ケ.

然ルトキハ △ABC, △ACD, △ADE ハ夫夫 △A′B′C′, △A′C′D′, △A′D′E′ ニ相似ナリ (前節定理)

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad (\text{定理29})$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}=\frac{CD^2}{C'D'^2}=\frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad (\text{同上})$$

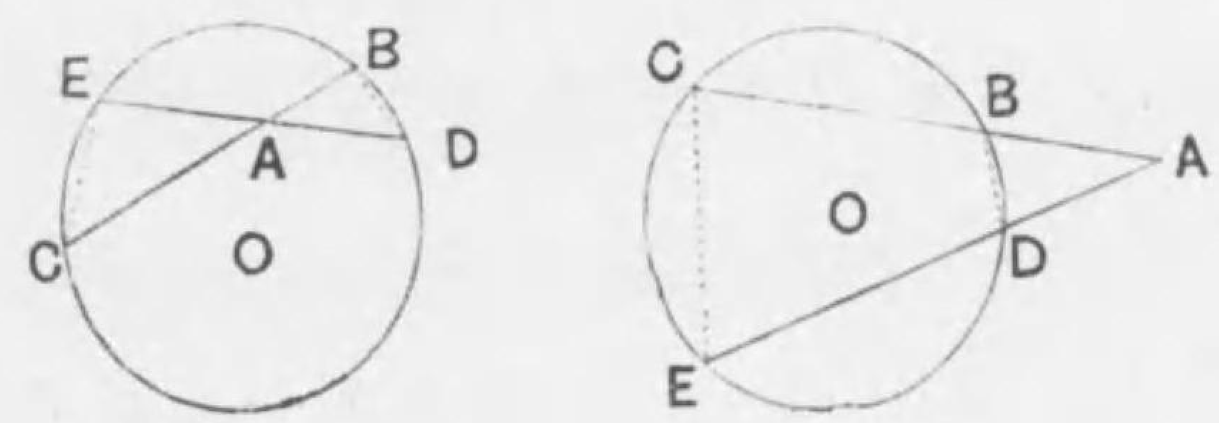
$$\frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'}=\frac{DE^2}{D'E'^2}=\frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad (\text{同上})$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE}{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\triangle A'D'E'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

卽チ
$$\frac{\text{多角形 } ABCDE}{\text{多角形 } A'B'C'D'E'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

189. 定理 35. 圓の弦或は其延長が圓内若くは圓外の一定點を通るとき其點に於て生ずる二つの内分若くは外分の積は何れの弦にても皆相等し.

二ツノ弦 BC, DE 或ハ其延長ガ一定點 A ヲ通ルトキハ AB.AC=AD.AE ナルベシ.



證明 B ト D ト; C ト E トヲ結付クレバ二ツノ三角形 ABD, ACE ニ於テ

$$\angle BAD=\angle CAE$$

$$\angle ABD=\angle AEC \qquad (\text{第三編定理17系1})$$

$$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle AEC \qquad (\text{定理25})$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$$

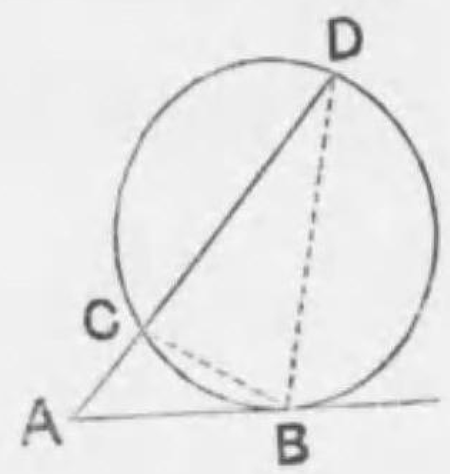
$$\therefore \quad AB.AC=AD.AE$$

系 二つの線分若くは其等の延長が相交り,其交點にて生ずる各線分の二つの分の積が相等しければ此二線分の端點は同一圓周上にあり.

問題 22. 相交ル二ツノ圓ノ共有弦ノ上ニアル一點Cヲ通リテ一ツノ直線ヲ引キ,一ツノ圓周トノ交點ヲA及Dトシ,他ノ圓周トノ交點ヲB及Eトスレバ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD}$ ナリ.

問題 23. 圓周上ノ一點Aヨリ半直線ヲ引キ,此點ヲ通ル直徑ニ垂直ナル直徑トCニ於テ交ラシメ,圓周トDニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハAC.ADハ此圓ノ半徑ノ平方ノ二倍ニ等シ.

190. 定理 36. 圓外の一點より引きたる切線の長さは,同じ點より引きたる割線上の弦が此點にて分たれて生ずる外分の比例中項なり.



圓外ノ一點Aヨリ引キタル切線ノ切點ヲBトシ, Aヨリ引キタル割線ガ圓周ト交ル點ヲC, Dトセヨ. 然ルトキハ $AB^2=AC.AD$ ナルベシ.

證明 BヲC, Dノ各ニ結付ケヨ. 然ルトキハ二ツノ三角形ABD, BCAニ於テ

$\angle A$ ハ共通

$\angle ADB=\angle ABC$ (第三綴定理20)

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle BCA$ (定理25)

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$

$\therefore AB^2=AC.AD$

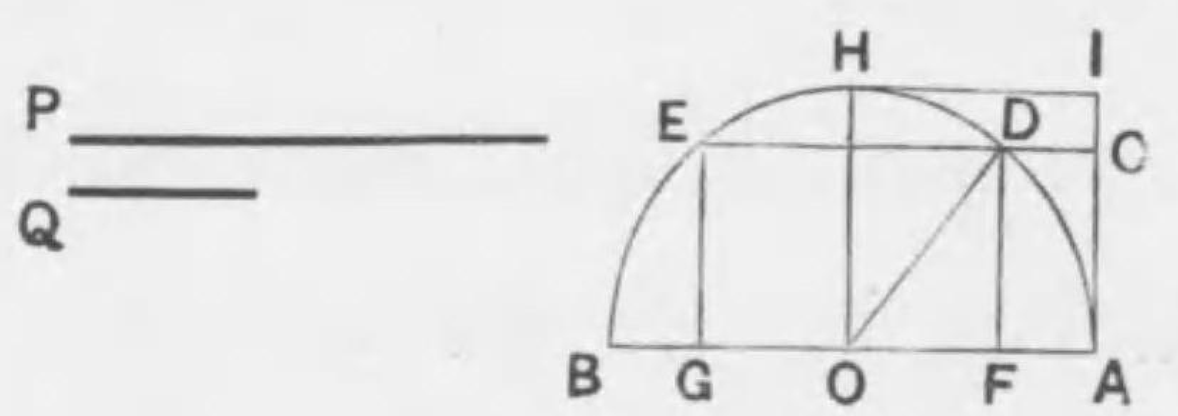
系 圓外の一點を通る割線が此點にて分たれて生ずる二つの分の積と,同じ點を圓周上の一點に結付けたる線分の平方とが相等しければ此線分は圓に切す.

問題 24. 二ツノ定點ヲ結付クル線分ノ延長ノ上ニアル一點ヨリ,此二點ヲ通ル總テノ圓ヘ引キタル切線ノ長サハ相等シ.

問題 25. 圓外ノ一點ヨリ此圓ニ切線ト割線トヲ引キ,又同ジ點ヨリ今引キタル切線ト等長ナル線分ヲ任意ノ方向ニ引ケバ,此線分ハ其端ト前ニ引キタル割線ト圓周トノ交點ノ各トヲ通ル二直線ガ再ビ圓周ト交ル二點ヲ結付クル線分ニ平行ナリ.

191. 作圖題 3. 二つの線分の和と積とを知りて,其各線分を求むること.

P ヲ二ツノ線分ノ和, Q^2 ヲ其積トシ,其線分ノ各ヲ求ム.



解 此問題ハ P ニ等シキ線分ヲ内分シ,其積ヲ Q^2 ニ等シクナスニアリ. サテ,マヅ $AB=P$ トシ, AF, BF ヲ求ムル所ノ線分トセヨ. AB ヲ直徑トスル半圓周ヲ畫キ, F ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ,半圓周ト D ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

$$DF^2=AF.BF$$

ナルユヱ, $DF=Q$

ナラザルベカラズ. 因テ D ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ, A ニ於ケル圓ノ切線ト C ニ於テ交ラシムレバ $AC=DF=Q$

ナルベシ. 故ニ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 P ニ等シキ線分 AB ヲ直徑トシテ半圓周ヲ畫キ, A ニ於ケル切線上ニ於テ半圓周ト同ジ側ニ, $AC=Q$ ナル樣ニ點 C ヲ取リ, C ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ,半圓周ト D ト E トニテ交ラシメ, D 及 E ヨリ AB ヘ夫夫垂線 DF, EG ヲ引クトキニ生ズル内分 AF ト BF ト又ハ AG ト BG トガ求ムル所ノ者ナリ.

吟味 OH ヲ AB ニ垂直ナル圓ノ半徑トスレバ C ヨリ AB ニ平行ニ引キタル直線ト半圓周トニ共有點ガアル爲ニハ AC ガ OH ヨリ大ナラザルコトヲ要ス.

故ニ問題ガ出來ル爲ニハ

$$Q\geqq\tfrac{1}{2}P$$

ナラザルベカラズ　ソコデ

(第一) $Q<\frac{1}{2}P$ ナルトキハ,二ツノ交點 D, E ヲ得,然レドモ E ニヨリテ得ル所ノ二ツノ線分 AG, BG ハ夫夫 BF, AF ニ等シ.

(第二) $Q=\frac{1}{2}P$ ナルトキハ, OA 即チ $\frac{1}{2}P$ ガ求ムル所ノ者ナリ.

(第三) $Q<\frac{1}{2}P$ ナルトキハ,問題ハ不可能ナリ.

故ニ其和が與へられたる線分に等しき二つの線分の積は,各が相等しきとき最大なり.

注意 1. AF, BF ノ長サハ次ノ如クシテ求メラル.

$$AF=OA-OF$$
$$BF=OB+OF=OA+OF$$

而シテ　$OA=\frac{1}{2}P=OD$

又直角三角形 OFD ヨリ

$$OF^2=OD^2-DF^2=\tfrac{1}{4}P^2-Q^2$$

$$\therefore\quad OF=\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2-Q^2}$$
$$\therefore\quad AF=\tfrac{1}{2}P-\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2-Q^2}$$
$$BF=\tfrac{1}{2}P+\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2-Q^2}$$

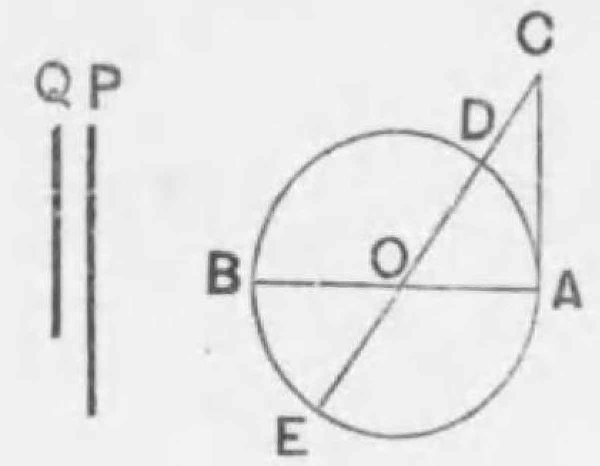
注意 2. 本問題ハ代數學ニ於ケル

$$x+y=P$$
$$xy=Q^2$$

ナル聯立方程式,從テ $z^2-Pz+Q^2=0$ ナル一元二次方程式ノ根ヲ求ムルコトニ對應スルモノナリ.

192. 作圖題 4. **二つの線分の差と積とを知りて其各線分を求むること.**

P ヲ二線分ノ差, Q^2 ヲ其積トシ,其各ヲ求ム.



作圖法　P ニ等シキ長サノ線分 AB ヲ直徑トシテ圓 O ヲ畫キ, A ニ於ケル切線上ニ, AC=Q ナル樣ニ C ヲ取リ, C ト O トヲ通ル直線ヲ引キ,圓 O ノ周ト D, E ニ於テ交ラシメヨ. CE ト CD トガ即チ求ムル所ノ者ナリ.

證明 $$CE-CD=DE=AB=P$$

$$CD.CE=AC^2=Q^2 \quad \text{(定理23)}$$

而シテ此問題ハ常ニ成リ立ツ.

注意 1. 次ノ如クニシテ CD ト CE トノ長サヲ計算スルヲ得.

$$CE=CO+OA$$

$$CD=CO-OA$$

$$OA=\tfrac{1}{2}P$$

直角三角形 OAC ヨリ

$$OC^2=OA^2+AC^2$$

$$\therefore \quad OC=\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2+Q^2}$$

$$\therefore \quad CE=\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2+Q^2}+\tfrac{1}{2}P$$

$$CD=\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2+Q^2}-\tfrac{1}{2}P$$

注意 2. 本問題ハ代數學ニ於ケル

$$x-y=P$$

$$xy=Q^2$$

ナル聯立方程式,從テ $z^2-Pz-Q^2=0$ ナル一元二次方程式ノ根ヲ求ムル問題ニ對應スル者ナリ.

193. 定義 定線分ヲ,其一ツノ分ガ他ノ分ト全線分トノ比例中項トナル樣ニ二ツノ分ニ分ツコトヲ此線分ヲ**中末比に分つ**トイフ.

194. 作圖題 5. 定線分を中末比に分つこと.

解　定線分ヲ AB トシ, AB ヲ中末比ニ分ツ外分點ヲ C, 内分點ヲ D トシ,其位置ガ見出サレタル者トスレバ C ハ AB ヲ A ノ方ヘ延長シタル者ノ上ニアラザルベカラズ. 何トナレバ若シ C ガ AB ヲ B ノ方ヘ延長シタル者ノ上ニアリトスレバ AC ハ AB, BC ノ何レヨリモ大トナルヲ以テ其比例中項ニ等シキコト能ハザレバナリ.

マヅ C ト D トノ位置ガ見出サレタル者ト假定シ,ソレト A, B トノ位置ノ間ニ如何ナル關係アルカヲ研究セントス.

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \quad AC^2=AB.BC$$

又 $$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{AB}$$

$$\therefore \quad AD^2=AB.BD$$

$$\therefore \quad AC^2-AD^2=AB.(BC-BD)$$

$$\therefore \quad (AC+AD).(AC-AD)=AB.DC$$

然ルニ $$AC+AD=DC$$

$$\therefore \quad AC-AD=AB$$

又 $$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$$

$$\therefore \quad \frac{AC-AB}{AB}=\frac{BC-AC}{AC}$$

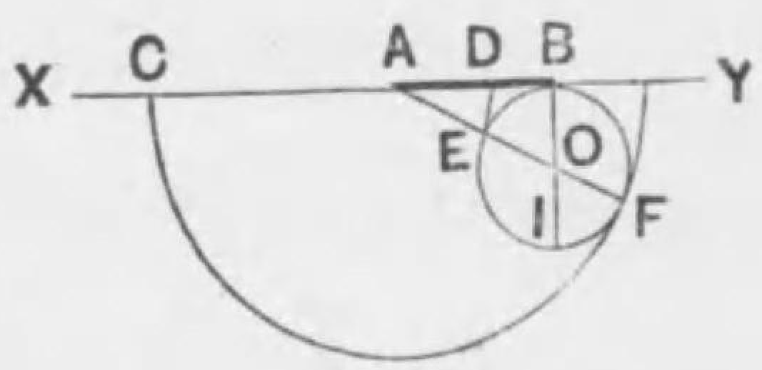
$$\therefore \quad \frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \quad AC.AD=AB^2$$

故ニ今求メントスル點 C, D ハ其 A ヨリノ距離ノ差ガ AB ニ等シク,其積ガ AB^2 ニ等シキ者ナリ.

因テ前節ノ作圖題ニヨリ,次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 B ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ其上ニ於テ BI=AB ナル樣ニ I ヲ取リ, BI ヲ直徑トシテ圓Oヲ書キ, A トOトヲ通ル直線ヲ



引キ,圓Oノ周トE及Fニ於テ交ラシメ AD=AE, AC=AF ナル樣ニ D, C ヲ XY ノ上ニ取レバ是ガ求ムル所ノ點ナリ.

注意 前節ノ注意1ニ於テ求メオキタル結果ノ右邊ノ P, Q ノ各ニ AB ヲ代用シタル者ガ AC, AD ノ長サナリ. 故ニ

$$AC=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$$

$$AD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$$

195. 作圖題 6. 定直線に切し其上にあらざる二定點を通る圓を書くこと.

XY ヲ定直線, A, B ヲ XY 上ニ在ラザル二定點トシ, A, B ヲ通リ XY ニ切スル圓ヲ書クコトヲ求ム.

解 マヅ問題ハ解カレタル者トシ,圓Oヲ求ムル所ノ圓ト假定シ,ソレトXYトノ切點ヲCトセヨ.

A ト B トガ XY ノ兩側ニ一ツヅツアレバ A, B ヲ通ル圓周ハ總テ XY ト交ルユヱ,問題ハ不可能

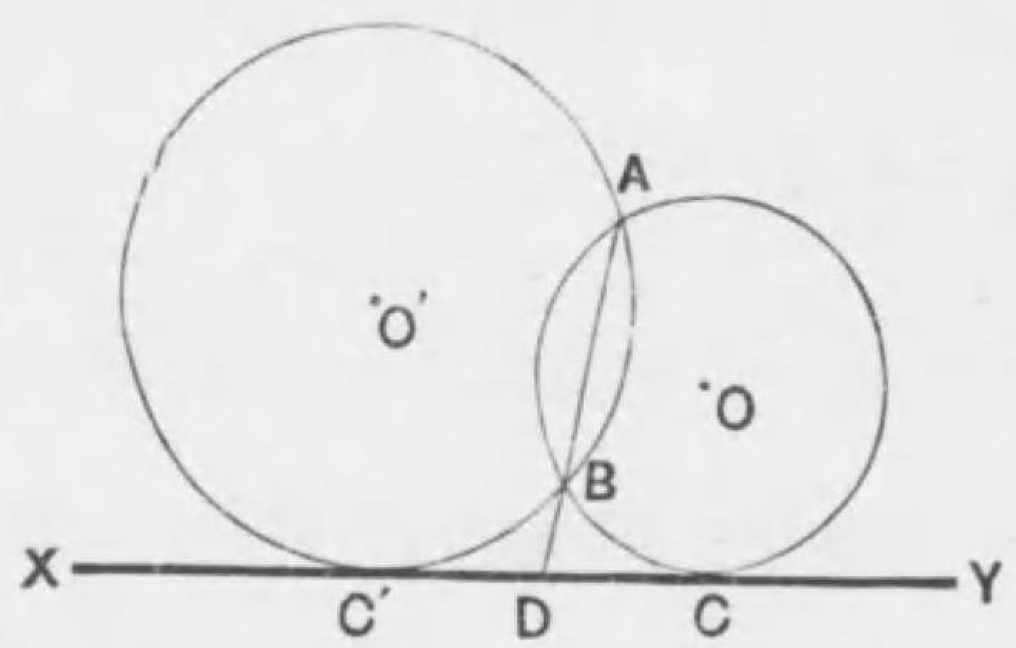
ナリ. 故ニ A, B ハ XY ノ同ジ側ニアリトス.

(第一) 線分 AB ガ XY ニ平行ナラザレバ AB ノ延長ト XY トノ交點ヲ D トセヨ. 然ルトキハ D ハ定マレル點ニシテ

$$AD.BD=CD^2 \qquad \text{(定理23系)}$$

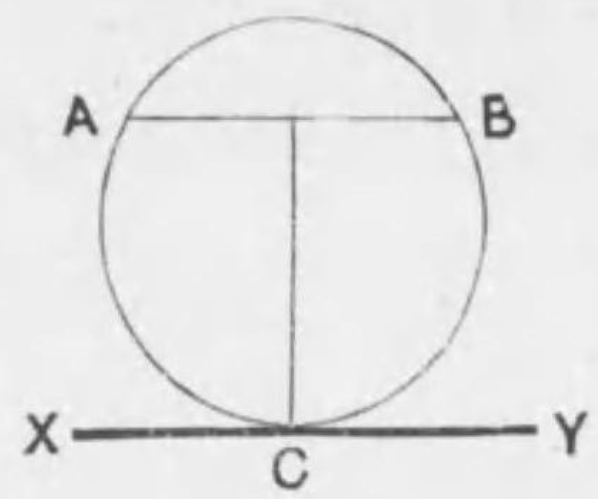
故ニ CD ノ長サハ定マル. 因テ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 A, B ヲ通ル直線ト XY トノ交點 D ヲ求メ, AD ト BD トノ比例中項ヲ求メ,之ヲ半徑トシ, D ヲ中心トシテ圓周ヲ書キ, XY ト C 及 C′ ニ於テ交ラシム. A, B, C ヲ通ル圓ト A, B, C′ ヲ通ル圓トハ何レモ求ムル所ノ者ナリ. (定理23系)



(第二) 線分 AB ガ XY ニ平行ナルトキハ AB ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ XY ニ垂直ナリ. 故

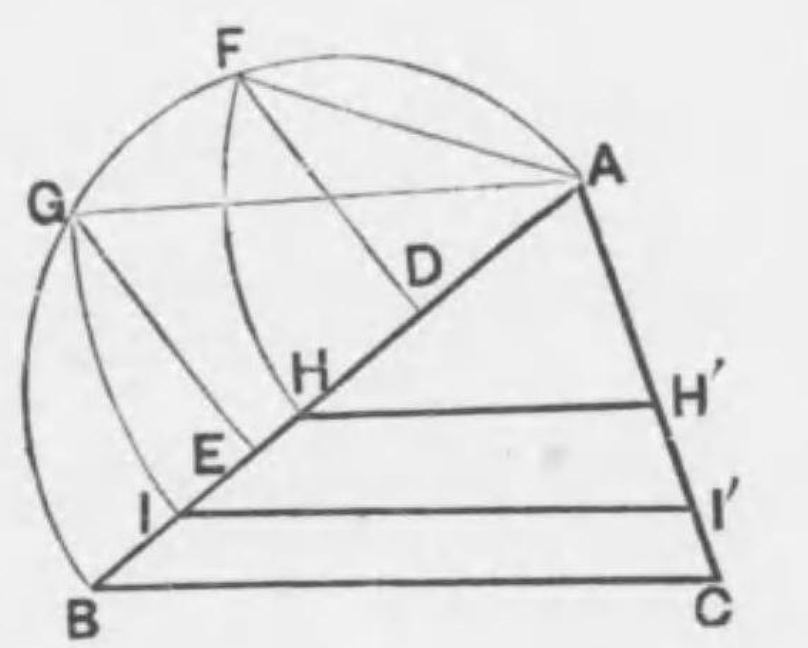
ニ夫レト XY トノ交點 C ト A 及 B トヲ通ル圓周ヲ書ケバ,是ガ求ムル所ノ者ニシテ唯一ツノ解アリ.



問題 26. 定直線上ノ一點ト其上ニアラザル二定點ノ各トヲ結付クル二ツノ線分ノナス角ガ最大ナル樣ニスルコト.

196. **作圖題 7.** 與へられたる三角形を其一邊に平行なる直線によりて n 個の等積なる部分に分つこと.

△ABC ヲ與ヘラレタル三角形トシ之ヲ BC ニ平行ナル直線ニヨリテ例ヘバ三ツノ等積ナル部分ニ分タントス.



作圖法 AB ヲ D, E ニ於テ三等分シ(第三編作圖題10 各分點ヨリ AB ニ垂線ヲ作リ, AB ヲ直徑トスル圓周ト此垂線トノ交點ヲ夫夫 F, G トス. AB上ニ $AH=AF$, $AI=AG$ ナル樣ニ H, I ヲ取リ, 之ヲ通リテ BC ニ平行ナル直線 HH′, II′ ヲ引ケバ是ガ △ABC ヲ三ツノ等積ナル部分, AHH′, HII′H′, IBCI′ ニ分ツ直線ナリ.

證明 $\triangle AHH' \backsim \triangle ABC$

$$\therefore \quad \frac{\triangle AHH'}{\triangle ABC}=\frac{AH^2}{AB^2} \qquad \text{(定理20)}$$

$$=\frac{AF^2}{AB^2} \qquad \text{(作圖)}$$

$$=\frac{AD.AB}{AB^2} \qquad \text{(定理21系1)}$$

$$=\frac{AD}{AB} \qquad \text{(定理 1)}$$

$$=\frac{1}{3}$$

同樣ニ $\dfrac{\triangle AII'}{\triangle ABC}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2}{3}$

故ニ △ABC ノ面積ヲ單位トスレバ △AHH′, △AII′ ハ夫夫 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ニテ表サル.

然ルニ四邊形 HII′H′ ハ $\triangle AII'-\triangle AHH'$ ナリ.
故ニ此面積ヲ表ス數ハ $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ニシテ,從テ殘レル部分ノ面積ヲ表ス數モ亦 $\frac{1}{3}$ ナリ.

故ニ HH′, II′ ニヨリテ分タレタル三ツノ部分ハ等積ナリ.

問題 27. 與ヘラレタル三角形ヲ其一邊ニ平行ナル直線ニテ與ヘラレタル比ニ分ツコト.

練習第六

問題 28. 一ツノ三角形ノ三邊ガ夫夫他ノ三角形ノ三邊ニ平行ナレバ對應スル頂點ヲ通ル三ツノ直線ハ同一點ヲ通ルカ若クハ互ニ平行ナリ.

問題 29. 互ニ外切スル二ツノ圓ノ外公切線ノ切點間ノ線分ハ此二ツノ圓ノ直徑ノ比例中項ナリ.

問題 30. 直角三角形 ABC ノ直角 A ノ二等分線ガ斜邊及外接圓周ニ交ル點ヲ夫夫 D, E ト

スレバ AD.AE ハ $\triangle ABC$ ノ面積ノ二倍ニ等シ.

問題 31. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ト D ニ於テ交レバ

$$AB.AC = AD^2 + BD.CD \qquad ナリ.$$

問題 32. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC ノ上ニ任意ノ一點 P ヲ取レバ

$$PA^2 = PB.PC + BC^2 \qquad ナリ.$$

問題 33. 鋭角三角形 ABC ノ邊 BC ヲ直徑トシテ圓ヲ書キ,邊 AB ノ上ニ A ヨリ此圓ニ引キタル切線ノ長サニ等シキ線分 AD ヲ取リ, D ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ,邊 AC ノ延長ト E ニ於テ交ラシムルトキハ三角形 ABC ト三角形 ADE トハ等積ナリ.

問題 34. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ヘ垂線 AP ヲ引キ, P ヨリ二邊 AB, AC ヘ夫夫垂線 PX, PY ヲ引ケバ $\frac{BX}{CY}$ ハ $\left(\frac{AB}{AC}\right)^3$ ニ等シ.

問題 35. P ハ定圓周上ノ一定點ナリ. 弦 PQ 或ハ其延長ノ上ノ一點ヲ Q′ トシ, PQ ト PQ′ トノ積ガ與ヘラレタル正方形ノ面積ニ等シキトキ Q′ ノ軌跡ヲ求メヨ.

問題 36. OX, OY ヲ一點 O ヨリ引キタル二ツノ定マレル半直線トス,正方形ノ一邊ガ OX ノ上ニアリテ其一ツノ頂點ガ OY ノ上ニアルトキ殘リノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.

問題 37. 定點 O ヨリ定直線ト P ニ於テ交ル任意ノ半直線ヲ引キ,其上ニ OP : OQ ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點 Q ヲ取レバ, Q ノ軌跡如何.

若シ此問題ニ於テ「定直線」トアルヲ「定圓周」トスレバ, Q ノ軌跡如何.

問題 38. 二ツノ圓ノ中心ヲ結付クル線分ヲ兩圓ノ半徑ノ比ニ內分或ハ外分スル點ヲ通ル直線ヨリ各圓周ガ截リ取ル弦ノ比ハ半徑ノ比ニ等シ.

定義 此內分點及外分點ヲ夫夫二ツノ圓ノ相似の內心及外心トイフ.

問題 39. 二ツノ圓ヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ム.

註 一點ニ於テ一ツノ圓ヲ見込ム角トハ此點ヨリノ二ツノ切線ノナス角ノコトナリ.

問題 40. 與ヘラレタル二ツノ正三角形ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル正三角形ヲ作ルコト.

問題 41. 與ヘラレタル二ツノ正三角形ノ面積ノ比ニ等シキ比ヲ有スル二ツノ線分ヲ求メヨ.

問題 42. O ハ一定點ニシテ, P ハ定直線 AB 上ノ定點ナリ. 今 O ヲ中心トシテ圓ヲ畫キ AB ト M, N ニ於テ交ラシメ, PM, PN ノ比例中項ガ與ヘラレタル長サニ等シクナル樣ニスルコト.

問題 43. 一定點 O ヨリ直線ヲ引キ定直線ト P, 定圓周ト Q ニ於テ交ラシメ, OP : OQ ヲ與ヘラレタル比ニ等シカラシムルコト.

問題 44. B, C ハ線分 AD 上ノ二點ニシテ

$AB:BD=3:7,\quad AC:CD=5:4$ ナルトキ

$AB:BC:CD$ ヲ求メヨ.

問題 45. D, E, F ハ夫夫 △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニアリテ BD, CE, AF ハ夫夫其邊ノ三分ノ一ニ等シ. △DEF, △ABC ノ面積ノ比ヲ求メヨ.

問題 46. 三角形ノ三ツノ中線ヲ邊トスル三角形ノ面積ノ原三角形ノ面積ニ對スル比如何.

問題 47. △ABC ノ底邊 BC ヲ之ニ等シク延長シテ CD トシ, D ト AC ノ中點 E トヲ結付クル線分ノ延長ト AB トノ交點ヲ F トスレバ EF, ED ノ比如何.

問題 48. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線及其頂點ニ於テ出會フ二邊ノ第四比例項ナリ. 又之ニヨリテ二邊ガ夫夫 4尺, 5尺, 7尺 ナル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

正多角形圓周及圓ノ面積

197. 定理 37. 圓周を n 等分したる各分點を順次に結付くれば圓に內接する正 n 邊形を生じ,又各分點に於て圓に切線を引けば圓に外接する正 n 邊形を生ず.

證明 各分點 A, B, C,………ヲ順次ニ結付ケテ作ラレタル多角形ノ各邊ハ相等シ. ソハ何レモ圓周ノ n 分ノ一ニ等シキ弧ヲ張ル弦ナレバナリ. 而シテ其各ノ角モ亦相等シ. ソハ何レモ圓周ノ $\frac{n-2}{n}$ ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ナレバナリ.

故ニ此多角形ハ內接正 n 邊形ナリ.

次ニ A, B, C,……ニ於ケル切線ハ外接正 n 邊形ヲナスコトヲ證明セントス.

マヅ其相隣レル分點 A, B ニ於ケル切線ノ交點ヲ A′ トセヨ. 箇樣ニ次ギ次ギノ切線ノ交點ヲ夫夫 B′, C′,……トセヨ. 然ルトキハ此等ノ切線ニテ外接 n 邊形ヲ生ズ.

サテ三角形 AA′B, BB′C ニ於テ邊 AB ト邊 BC トハ上ニ言ヘルコトニヨリテ互ニ相等シク,且ツ角 A′AB, B′BC ハ何レモ圓周ノ n 分ノ一ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シキヲ以テ相等シ.
(第三編定理21)

因テ此二ツノ三角形ハ二等邊三角形ニシテ且ツ相等シ.

同樣ニ △B′BC, △C′CD, △D′DE,……ハ皆互ニ相等シ. 故ニ

(1) 多角形 A′B′C′ …..ノ各ノ角ハ相等シ.

(2) 各邊ノ長サハ AA′ ノ二倍ニ等シ, 故ニ互ニ相等シ.

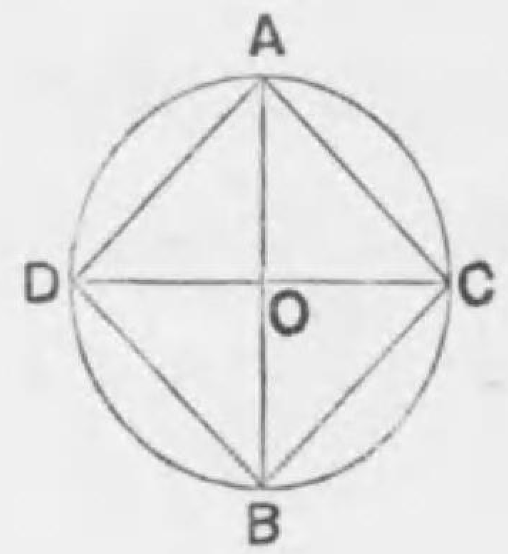
因テ多角形 A′B′C′……ハ外接正 n 邊形ナリ.

系 1. 同じ圓に內接する同數の邊を有する正多角形の邊は相等し.

系 2. 圓の內接正n邊形の頂點及其各邊が張る弧の中點を順次に結付くれば邊の數が$2n$なる內接正多角形を生ず．而して此新らしき正多角形の各頂點に於て圓の切線を引けば,邊の數が$2n$なる外接正多角形を生ず．

198. 作圖題 8. 圓に內接する正方形を畫くこと．

作圖法 圓Oニ於テ互ニ垂直ナル二ツノ直徑ABトCDトヲ引キ,相隣レル端ヲ順次ニ結付ケテ得ル四邊形ACBDガ卽チ求ムル所ノ者ナリ．



證明 A, C, B, D ハ圓周ヲ四等分スル點ナレバナリ．

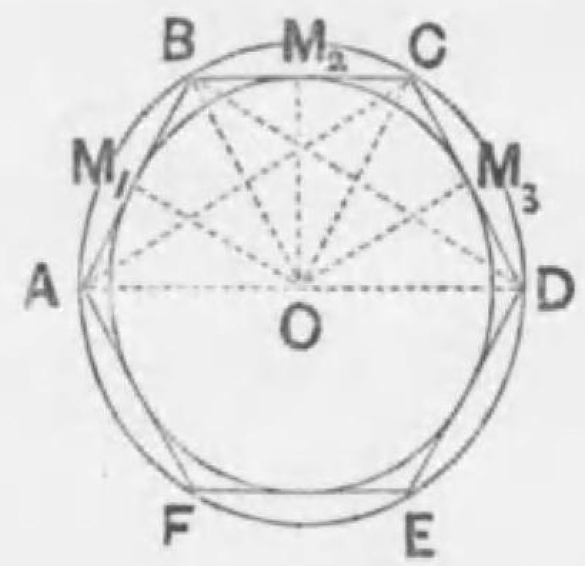
系 圓の半徑をRとすれば,其內接

正方形の一邊は$\sqrt{2}$Rなり．

199. 定理 38. 正多角形には,夫れに外接する圓と,又夫れに內接する圓とを畫くことを得．

證明 例へバ ABCDEF ヲ正六邊形トセヨ．

マヅ相隣レル三ツノ頂點 A, B, C ヲ通ル圓周ヲ畫キ, AトCトヲ結付ケ,且ツCニ隣レル頂點DヲBニ結付クレバ



$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$

且ツ原形ハ凸多角形ナルユヱAトDトハBCノ一方ニアリ．故ニ點Dハ今畫キタル圓周ノ上ニアリ (第三編軌跡題3系2)．

同理ニヨリDニ隣レル頂點EモB, C, Dヲ通ル圓周,卽チ前ト同ジ圓周ノ上ニアリ．箇樣ニシテ,スベテノ頂點ガ皆同一ノ圓周上ニアルコトヲ知ル．

因テ此正多角形ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得．

次ニ此圓ノ中心Oヨリ正多角形ノ各邊ニ垂線 $OM_1, OM_2, \dots\dots$ ヲ下セバ,各邊ガ相等シキユヱ,此等ノ垂線ハ相等シ(第三編定理10).

因テ O ヲ中心トシ OM_1 ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ,此正多角形ニ内接ス.

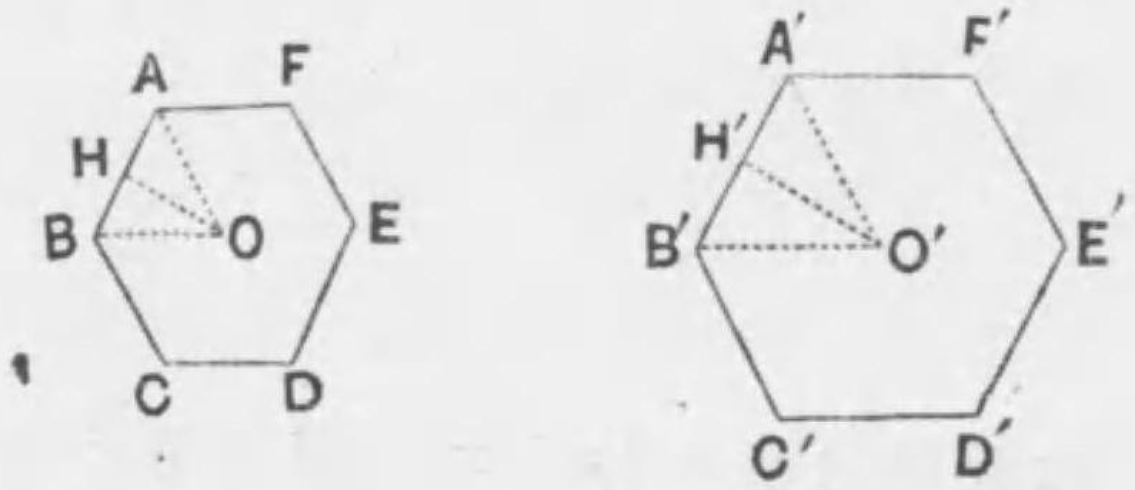
系 正多角形の面積は,其周と其内接圓の半徑との積の半分に等し.

200. 定理 39. 邊の數が同じき二つの正多角形は互に相似にして,其相似比は其各の外接圓(若くは内接圓)の半徑の比に等し.

證明 ABCDEF, A'B'C'D'E'F' ヲ何レモ正六邊形トセヨ. 然ルトキハ其各角ハ互ニ相等シ.

又 $$AB=BC=CD=DE=EF=FA$$

$$A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'F'=F'A'$$



$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\dots\dots=\frac{FA}{F'A'}$$

故ニ二ツノ多角形ハ互ニ相似ナリ.

今各多角形ノ外接圓ノ中心ヲ夫夫 O, O' トスレバ二ツノ二等邊三角形 OAB, O'A'B' ニ於テ頂角 O, O' ハ何レモ四直角ノ六分ノ一ニシテ相等シ. 故ニ兩三角形ハ相似ナリ(定理26系).

$$\therefore \quad \frac{OA}{O'A'}=\frac{AB}{A'B'}$$

又兩三角形ノ高サヲ OH, OH' トスレバ △OAH ト △O'A'H' トニ於テ

$$\angle H=\angle H'=\angle R$$

$$\angle OAH=\angle O'A'H'$$

$$\therefore \quad \triangle OAH \backsim \triangle O'A'H'$$

$$\therefore \quad \frac{OH}{O'H'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{AB}{A'B'}$$

而シテ OH, O'H' ハ其内接圓ノ半徑ナリ.

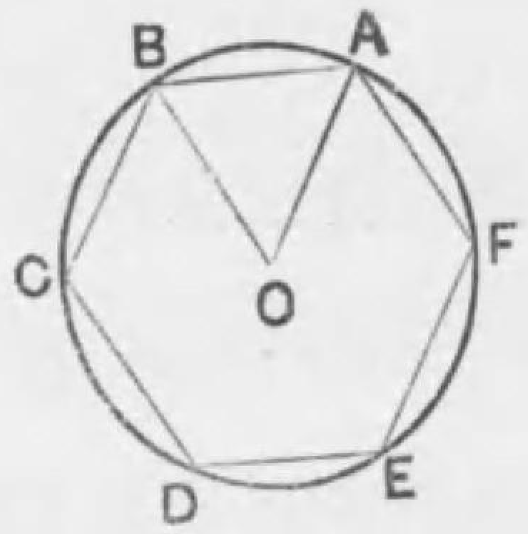
故ニ此二ツノ正多角形ノ相似比ハ其各ノ外接圓若クハ内接圓ノ半徑ノ比ニ等シ.

系 邊の數が同じき二つの正多角形の周の比は其各の外接圓(若くは内

接圓)の半徑の比に等し.

201. 作圖題 9. 圓に內接する正六邊形を書くこと.

解　マヅ問題ハ解カレタル者トシ,ABCDEFヲ圓Oノ內接正六邊形トセヨ. 中心OトA及Bノ各トヲ結付ケヨ.



然ルトキハ

$$\angle AOB=\frac{4}{6}\angle R=\frac{2}{3}\angle R$$

故ニ三角形AOBハ正三角形ニシテABハ圓Oノ半徑ニ等シキコトヲ知ル. 因テ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法　圓周上ノ任意ノ點ヲ中心トシ,圓Oノ半徑ニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ書キ,圓周ト相交ルーツノ點ヲBトスレバ,ABガ求ムル所ノ正六邊形ノ一邊ナリ. 旣ニ此多角形ノ一邊ヲ得レバ此多角形ヲ書クコトヲ得.

注意　內接正六邊形ノ頂點ヲ一ツオキニ結付クレバ內接正三角形ヲ得.

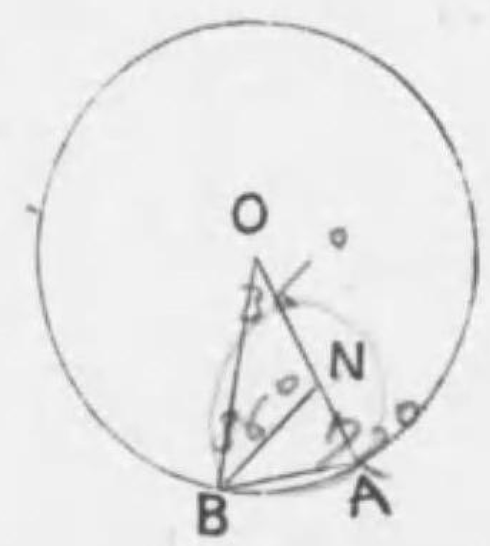
系 2. 圓の半徑をRとすれば,其內接正三角形の一邊は$\sqrt{3}R$なり.

問題 49.　同ジ圓ニ內接スル正六邊形ノ一邊ト正三角形ノ一邊トノ上ニ書キタル二ツノ正方形ノ面積ノ比ヲ求メヨ.

問題 50.　一邊ガa寸ナル正三角形ノ內接圓及外接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

202. 作圖題 10. 圓に內接する正十邊形を書くこと.

解　マヅ問題ハ解カレタル者ト假定シ,ABヲ圓Oノ內接正十邊形ノ一邊ナリトセヨ. OトA及Bノ各トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ∠AOBハ4∠Rノ$\frac{1}{10}$即チ$\frac{2}{5}\angle R$ナリ.



∴ $\angle OBA=\angle OAB=\frac{1}{2}(2\angle R-\frac{2}{5}\angle R)=\frac{4}{5}\angle R$

故ニ $\angle OBA$ 及 $\angle OAB$ ハ何レモ $\angle AOB$ ノ二倍ニ等シ. ソコデ$\angle OBA$ ノ二等分線ヲ引キ OA トN ニ於テ交ラシムレバ

$$\angle ABN=\angle AOB$$

∴ $$\triangle ABN \backsim \triangle AOB$$

∴ $$\frac{AN}{AB}=\frac{AB}{AO}$$

∴ $$AB^2=AN.AO$$

然ルニ $$\angle OBN=\angle AOB$$

∴ $$\angle BNA=2\angle AOB$$

∴ $$\angle BNA=\angle NAB$$

∴ $$AB=BN=NO$$

∴ $$NO^2=AN.AO$$

因テ點 N ハ OA ヲ中末比ニ分ツ內分點ナルコトヲ知ル.

因テ ON ヲ求メ(作圖題5), 之ヲ一邊トシテ內接正多角形ヲ作レバ求ムル所ノ正十邊形ヲ得.

系 半徑をRとすれば內接正十邊形の一邊の長さは $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$ なり.

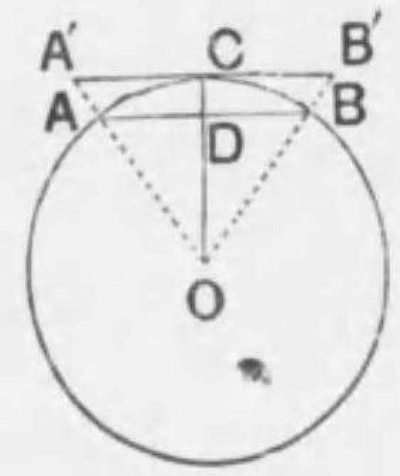
注意 圓ノ內接正十邊形ノ頂點ヲ一ツオキニ結付クレバ內接正五邊形ヲ得.

問題51. 直角ヲ五等分スルコト.

問題52. 圓ニ內接スル正十五邊形ヲ書クコト.

203. 定理40. 半徑Rなる圓に內接する正n邊形の一邊の長さの半分をL,外接正n邊形の一邊の半分をL'とすれば $L'=\frac{R.L}{\sqrt{R^2-L^2}}$ なり.

證明 AB ヲ圓 O ノ內接正n邊形ノ一邊トシ, D ヲ其中點トス. 弧 AB ノ中點 C ニ於テ圓 O ニ切線ヲ引キ, OA, OB ノ延長ト夫夫 A', B' ニ交ラシムレバ, A'B' ハ圓 O ノ外接正n邊形ノ一邊ナリ.



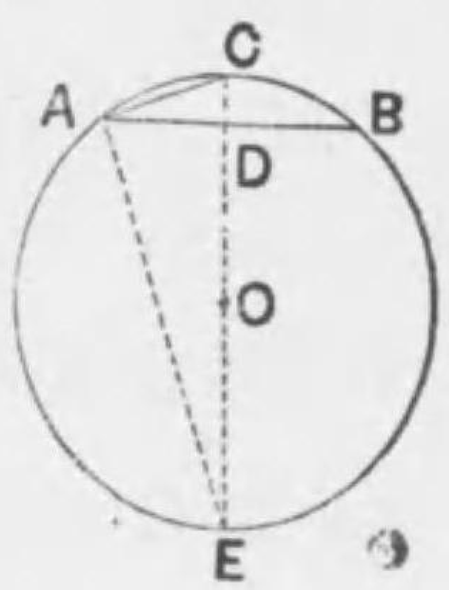
サテ　$A'C : AD = OC : OD$　(定理18系2)

即チ　$L' : L = R : \sqrt{R^2 - L^2}$

$$\therefore \quad L' = \frac{R.L}{\sqrt{R^2 - L^2}}$$

204. 定理41. 半徑Rなる圓の內接正n邊形の一邊の長さの半分をL, 同じ圓に內接し邊の數が$2n$なる正多角形の一邊の長さの半分をL_1とすれば　$L_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2R.(R - \sqrt{R^2 - L^2})}$　なり.

證明　ABヲ圓Oノ內接正n邊形ノ一邊トセヨ,弧ABノ中點CトAトヲ結付クル線分ACハ圓Oニ內接シ,邊ノ數ガ$2n$ナル正多角形ノ一邊ナリ. ソコデ直徑CEヲ引キ,ソレトABトノ交點即チABノ中點ヲDトスレバ



$$CA^2 = CE.CD \quad (定理30)$$

$$\therefore \quad CA^2 = CE.(CO - DO)$$

$$\therefore \quad CA^2 = 2R.(R - \sqrt{R^2 - L^2})$$

$$\therefore \quad CA = \sqrt{2R.(R - \sqrt{R^2 - L^2})}$$

然ルニ　$CA = 2L_1$

$$\therefore \quad L_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2R.(R - \sqrt{R^2 - L^2})}$$

問題53.　弓形ACBニ於テ弦AB=1尺6寸,弧ノ中點CヨリABヘノ垂線CD=4寸ナルトキ半徑ヲ求メヨ.

問題54.　半徑Rナル圓ニ內接スル正五邊形ノ一邊ヲ張ル弧ノ中點ヨリ其邊ニ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ. 之ニヨリテ其五邊形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ.

205. 定理42. 圓の內接正n邊形の周と同じ圓の外接正n邊形の周とは,nを十分に大きくなすとき,同一の或一定の長さに限りなく近寄る,(而して此一定の長さを圓の內接多角形及外接多角形の周の極限といふ).

證明 圓ノ半徑ヲ R トシ,內接正 n 邊形及其外接正 n 邊形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ夫夫 L, L′, 其周ヲ夫夫 P_n, P_n' トスレバ

$$\frac{P_n'}{P_n}=\frac{L'}{L}$$

$$\therefore \quad \frac{P_n'}{P_n}=\frac{R}{\sqrt{R^2-L^2}} \qquad \text{(定理40)}$$

$$\therefore \quad \frac{P_n'-P_n}{P_n}=\frac{R-\sqrt{R^2-L^2}}{\sqrt{R^2-L^2}}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}}{\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}}$$

$$\therefore \quad P_n'-P_n=\frac{1-\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}}{\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}}.P_n$$

然ルニ n ヲ十分ニ大キクナセバ L ハ如何樣ニモ小サクナリ,從テ $\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}$ ハ如何樣ニモ 1 ニ近ヅクユエ此等式ノ右邊ナル P_n ノ係數ハ n ヲ十分ニ大キクナセバ如何樣ニモ小サクナル,而シテ P_n ハ n ヲ十分ニ大キクナセバ次第ニ或一定ノ大サニ近付キ竟ニ之ト P_n トノ差ガ如何樣ニモ小サクナル者ナリ. 故ニ此等式ノ右邊ハ n ガ十分ニ大キクナレバ如何樣ニモ小サクナル. 故ニ $P_n'-P_n$ ハ n ヲ十分ニ大キクナセバ如何樣ニモ小サクナル.

故ニ P_n' ト P_n トハ同一ノ極限ニ近寄ル.

定義 圓周の長さトハ之ニ內接スル正多角形ト之ニ外接スル正多角形ノ邊ノ數ガ限リ無ク增加スルトキノ兩多角形ノ周ノ長サノ極限ノコトナリ.

206. 定理 43. 圓の周は其半徑に比例す.

證明 二ツノ圓 O, O′ ノ半徑ヲ R, R′ トシ,其周ノ長サヲ P, P′ トシ,此二ツノ圓ニ內接スル正 n 邊形ノ周圍ヲ P_n, P_n' トスレバ

$$\frac{P_n}{P_n'}=\frac{R}{R'} \qquad \text{(定理30)}$$

$$\therefore \quad R'.P_n=R.P_n'$$

故ニ $P_n=P-k,\quad P_n'=P'-k'$ トオケバ

$$R'.(P-k)=R.(P'-k')$$

$$\therefore \quad R'.P\sim R.P'=R'.k\sim R.k'$$

然ルニ前節ニ述ベタル定理ニヨリ,nヲ十分大キクナセバk及k'ハ限リナク小サクナル, 從テ $R'.k' \sim R.k'$ モ亦然リ. 故ニ

$$R'.P \sim R.P' = 0$$

$$\therefore \quad R'.P = R.P'$$

$$\therefore \quad \frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}$$

系 1. 圓周の圓の直徑に對する比は,すべての圓に付て同一なり.

定義 圓周ノ圓ノ直徑ニ對スル比ヲ**圓周率**ト名ヅケ,之ヲπナル文字ニテ表ス.

系 2. 圓周は圓の直徑の長さと圓周率との積に等し.

卽チ　$P = (2R)\pi = 2\pi R$

系 3. 半圓周は圓の半徑の長さと圓周率との積に等し.

207. π の近似値の求め方

半徑ノ長サヲ單位トシタルトキ,半圓周ノ長サヲ表ス數ガ卽チπナリ. ソコデ**定理40**ノ公式ト**定理41**ノ公式トニ於テ L, L', L_1, R ヲ何レモ長サヲ表ス數ナリト看做シ, $R=1$ トオケバ

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1-L^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$L_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-L^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ソコデ,邊ノ長サガ分カリ居ルカ,若クハ容易ニ求メラルル內接正n邊形ノ一邊ノ長サノ半分Lヲ直接ニ計算スレバ(1)ニヨリテL'ヲ求メ得ベク,且ツ又(2)ニヨリテL_1(卽チ邊ノ數ガ$2n$ナルトキノL)ヲ求メ得ベキガユヱニ,更ニ(1)ニヨリテ邊ノ數ガ$2n$ナルトキノL'ヲ求メ得ベシ. 箇樣ニ此二式ヲ繰リ返シ應用シテ其邊ノ數ガ次第ニ多クナル所ノ內接及外接正多角形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ求ムルコトヲ得ルガユヱニ,其周ノ半分ヲモ求ムルコトヲ得.

箇樣ニシテ得ル所ノ二組ノ數ガπヲ挾ム所ノ者卽チπノ不足ナル近似値ト其過剩ナル近似値トナリ.

サテ圓ノ內接正六邊形ノ一邊ハ半徑ニ等シキユエ, $n=6$ ヨリ始メテ(1)及(2)ニヨリ L及L′ノ値ヲ小數第六位マデ計算スレバ次ノ如シ.

$n=6$ ナルトキ　$L=0.5$, $L'=0.57351$

$n=12$ ナルトキ　$L=0.258819$, $L'=0.267949$

....

ソコデ次ニ示ス如キπノ近似値ノ表ヲ得ルナリ.

n	nL	nL'
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187
384	3.14156	3.14166
768	3.14158	3.14161
1536	3.14159	3.14160

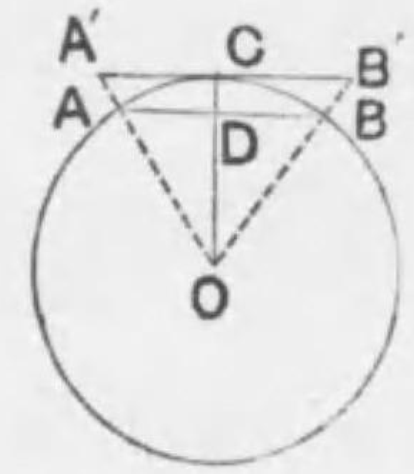
此表ニヨレバ,πハ 3.14159 ト 3.1416 トノ間ニアルコトヲ知ル.

今別ニπノ値ヲ小數點下第十六位迄求メタルモノヲ示セバ次ノ如シ.

$$\pi=3.1415926535897932\cdots\cdots$$

208. 定理44. 圓の內接正 n 邊形の面積と,同じ圓の外接正 n 邊形の面積とは, n が限りなく大きくなるとき,何れも限りなく圓の面積に近寄る(而して圓の面積を此圓の內接多角形及外接多角形の面積の**極限**といふ).

證明 內接正 n 邊形ノ面積ト外接正 n 邊形ノ面積トヲ夫夫 S_n, S_n' トシ,圓ノ面積ヲ S トスレバ



$$S_n<S<S_n'$$

サテ上圖(卽チ定理40ノ圖ト同圖)ニヨリテ

$$\frac{S_n'}{S_n}=\frac{A'B'^2}{AB^2}=\frac{OA'^2}{OA^2}=\frac{OC^2}{OD^2}$$

因テ圓ノ半徑ヲ R トシ,內接正 n 邊形ノ一邊ノ半分ヲ L トスレバ

$$\frac{S_n'}{S_n}=\frac{R^2}{R^2-L^2}$$

$$\therefore\quad S_n'-S_n=\frac{L^2}{R^2-L^2}.S_n<\frac{L^2}{R^2-L^2}.S$$

サテnヲ十分ニ大キクナセバLハ如何様ニモ小サクナル. 故ニ$S_n'-S_n$モ亦如何様ニモ小サクナル. 故ニ$S_n'-S_n$及$S-S_n$モ亦如何様ニモ小サクナル. 卽チS_n及S_n'ノ極限ハ何レモSナリ.

209. 定理45. 圓の面積は其半徑の平方に圓周率を掛けたる者に等し.

圓ノ半徑ヲR, 其面積ヲS, 圓ノ外接正n邊形ノ周圍ヲP_n', 其面積ヲS_n'トセヨ. 然ルトキハ

$$S_n'=\tfrac{1}{2}P_n'.R \qquad \text{(定理38系)}$$

然ルニ, nガ無限ニ大キクナリタルトキノP_n'ノ極限ハ圓周卽チ $2\pi R$ ニシテ (定理43系2), 其時ノS_n'ノ極限ハ圓ノ面積Sナリ (前節定理).

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}(2\pi R).R$$

卽チ $$S=\pi R^2$$

系 圓の面積は其半徑の平方に比例す.

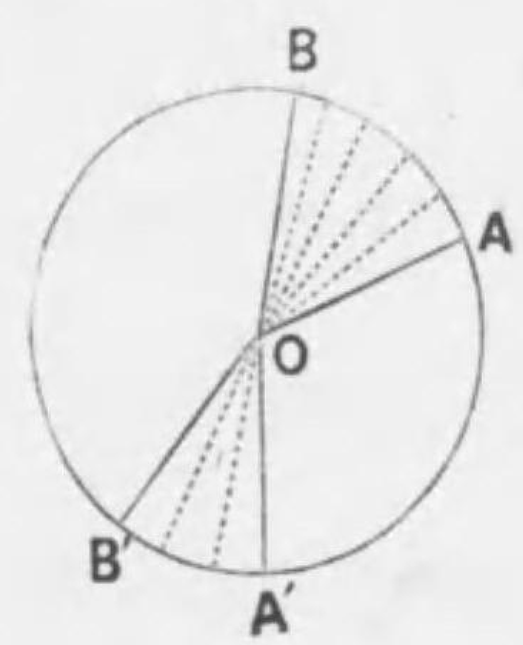
問題55. 圓周ガ二尺ナル圓ノ面積ヲ計算セヨ.

問題56. 二ツノ同心圓ノ周ノ間ニアル部分ノ面積ハ其中ノ小ナル圓ノ周ニ切スル,大ナル圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シ.

問題57. 一ツノ圓ヲ之ト同心ナル圓周ニテ等積ナルn個ノ部分ニ分ツコト.

210. 定理46. 同じ圓若くは相等しき圓の弧は,夫れに對する中心角に比例す.

(第一) $\widehat{AB}$ト$\widehat{A'B'}$トガ公度ヲ有スル場合.



證明 弧ABガ公度ノm倍ニ等シク,弧A'B'ガ公度ノn倍ニ等シトスレバ $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}=\frac{m}{n}$ ナリ.

ソコデ弧ABヲm箇ニ等分シ,其各分點ト中心

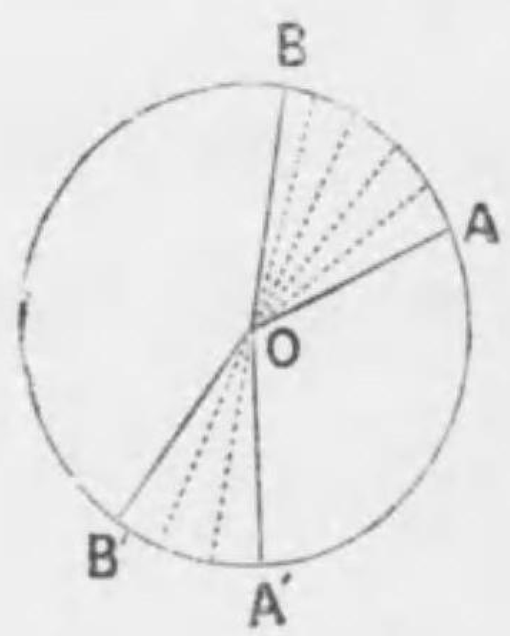
Oトヲ結付クレバ相等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シキユヱ,中心角AOBハm箇ノ相等シキ角ニ分タル. 又弧A′B′ヲn箇ニ等分シ,其各分點ト中心トヲ結付クレバ,中心角A′OB′ハn箇ノ相等シキ角ニ分タレ,而シテ第一ノ中心角ノ各部分ト,第二ノ中心角ノ各部分トハ相等シ. 従テ

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}=\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}$$

(第二) $\overset{\frown}{AB}$ ト $\overset{\frown}{A'B'}$ トガ公度ヲ有セザル場合.

證明 弧A′B′ヲn等分シ,其一部分ニ等シキ者ヲ弧ABノ中ヨリ取レルダケ取レバm箇ダケ取レテ,之ニ足ラザル殘リガアルトセヨ. 然ルトキハ



$$\frac{m}{n}<\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}<\frac{m+1}{n}$$

ソコデA′B′ノ各分點ト圓ノ中心Oトヲ結付

クレバ,中心角A′OB′ハn箇ノ相等シキ部分ニ分タル. 又$\overset{\frown}{AB}$ノ各分點ト中心Oトヲ結付クレバ,角AOBハ角A′OB′ノ各部分ニ等シキ者m箇ト,之ニ足ラザル者トニ分タル.

$$\therefore \quad \frac{m}{n}<\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}<\frac{m+1}{n}$$

因テnガ如何ナル整數ニテモ,$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}$ ト $\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}$ トハ何レモ同ジ二組ノ數 $\frac{m}{n}$ ト $\frac{m+1}{n}$ トノ間ニ夾マレ,且ツ此二數ノ差,即チ $\frac{1}{n}$ ハ n ヲ大キクスレバスル程,如何樣ニモ小サクナル.

$$\therefore \quad \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}=\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}$$

定義 圓ノ弧ト其兩端ヲ通ル二ツノ半徑トニテ圍マルル圓ノ一部分ヲ扇形トイヒ,其弧ニ對スル中心角ヲ扇形の角トイフ.

系 扇形の角の度數をk,其半徑をRとすれば其弧の長さは$\frac{\pi kR}{180}$なり.

證明 圓周ハ,ツマリ扇形ノ角ガ360°ナル場合

ト考ヘラルルユヱ,求ムル所ノ弧ノ長サヲ x トスレバ上ノ定理ニヨリ

$$\frac{x}{2\pi R}=\frac{k}{360}$$

$$\therefore \quad x=2\pi R\times\frac{k}{360}=\frac{\pi kR}{180}$$

問題 58. 半徑 5 尺ノ圓ニ於テ 36° ノ圓周角ニ對ズル弧ノ長サヲ求メヨ.

211. 定理 47. 同じ圓若くは相等しき圓の扇形の面積は,扇形の角(或は扇形の弧)に比例す.

證明 同シ圓若クハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弧ノ兩端ヲ中心ニ結付ケテ得ル扇形ハ重ネ合スルコトヲ得ルユヱ,其面積ハ相等シ.

又扇形ノ弧ガ小ナル者ノ面積ハ,其弧ガ大ナル者ノ面積ヨリモ小ナリ.

ソコデ前節ノ定理ノ證明ト同樣ニシテ此定理ヲ證明スルコトヲ得ベシ.

系 1. 扇形の面積は其弧の長さと半徑との積の半分に等し.

證明 弧ノ長サヲ P, 半徑ヲ R, 求ムル所ノ面積ヲ S トスレバ

$$\frac{S}{\pi R^2}=\frac{P}{2\pi R} \qquad \text{(本節定理)}$$

$$\therefore \quad S=\frac{P.(\pi R^2)}{2\pi R}=\frac{1}{2}P.R$$

系 2. 扇形の角の度數を k とすれば,其面積は $\frac{k\pi R^2}{360}$ なり.

問題 59. 半徑 2 尺ナル圓ニ於テ 60° ノ中心角ニ對スル弧ト,ソレヲ張ル弦トニテ生ズル弓形ノ面積ヲ計算セヨ.

練習第七

問題 60. 正五邊形ニ於テ,同一ノ頂點ヲ通ラザル二ツノ對角線ハ互ニ中末比ニ内分セラル.

問題 61. 與ヘラレタル線分ニ等シキ邊ヲ有

スル正五邊形ヲ書クコト.

問題 62. 一邊ガ a 寸ナル正八邊形ニ內接スル圓ノ半徑,外接スル圓ノ半徑及其等ノ者ノ面積ヲ求メヨ.

問題 63. 半徑 r 尺ナル圓ニ內接スル正八邊形及正十二邊形ノ一邊及其等ノ者ノ面積ヲ計算セヨ.

問題 64. 與ヘラレタル二ツノ圓ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ書クコト.

問題 65. 面積ガ 154 平方尺アル圓ノ周ニ等シキ周ヲ有スル正方形及正六邊形ノ面積ヲ求メヨ. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トシテ各ヲ平方尺ノ小數第二位迄求メヨ.

補充問題

第一編之部

1. O ヲ △ABC 內ノ任意ノ點トスレバ線分 OA, OB, OC ノ和ハ △ABC ノ周ヨリ小ナリ.

2. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ BC ト交ル點ヲ D トス. AB ガ AC ヨリ大ナレバ BD ハ DC ヨリ大ナリ.

3. 線分ノ兩端ヨリ他ノ直線ヘ下シタル垂線ノ足ハ此線分ノ中點ヨリ相等シキ距離ニアリ.

4. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル二ツノ頂點 A, C ノ各ヨリ對角線 BD ニ下シタル垂線ヲ夫夫 E, F トシ A ト F ト; C ト E トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ四邊形 AECF ハ平行四邊形ナリ.

5. △ABC ノ邊 AB ヲ點 A ノ方ヘ延長シ,其上ニ於テ AB ト等長ナル線分 AB′ ヲ取リ,又邊 AC ヲ A ノ方ヘ延長シ,其上ニ於テ AC ト等長ナル線分 AC′ ヲ取リ, B′ ト C′ トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ BC 及 B′C′ ノ各ノ中點ト頂點 A トハ同一直線上ニアリ.

6. 四邊形 ABCD ニ於テ邊 AB ト邊 CD トガ相等シク,邊 BC ト邊 AD トガ相等シケレバ, ∠A ト ∠C トハ相等シク, ∠B ト ∠D トモ亦相等シ.

7. 三角形 ABC ノ二邊 AC, AB ノ中ノ大ナル邊 AC ノ上ニ於テ小ナル邊 AB ト等長ナル線分 AD ヲ取リ, B ト D トヲ結付クレバ角 CBD ハ邊 BC ノ兩端ヲ夫夫其頂點トスル二ツノ角ノ差ノ半分ニ等シ.

8. 梯形ノ對角線ノ中點ノ間ノ距離ハ其二ツノ底ノ差ノ半分ニ等シ.

9. 正五邊形ノ延長ガ一ツ置キノ邊ノ延長ト交リテ爲ス星形ノ五ツノ頂點ニ於テノ角ノ和ハ 2 直角ナリ.

10. 一ツノ正多角形ノ一ツノ頂點ニ於ケル外角ノ一ツガ正十邊形ノ一ツノ內角ノ $\frac{5}{12}$ ニ等シトイフ,其邊ノ數ヲ求メヨ.

11. 一種ノ正多角形或ハ二種以上ノ正多角形ノ內角ニ等シキ角ヲ幾ツ取リテ加ヘ合スレバ其和ガ四直角ニ等シカルベキカ.

12. 三角形ニ於テ小ナル角ノ二等分線ノ長サハ大ナル角ノ二等分線ノ長サヨリ大ナリ.

13. 二等邊三角形ノ底邊上ニアル點ヨリ其二邊ニ至ル距離ノ和ハ不易ナリ.

若シ其底邊ノ延長ノ上ノ點ナラバ如何.

14. 正三角形內ノ任意ノ一點ヨリ三邊ニ至ル距離ノ和ハ不易ナリ.

若シ正三角形ノ外ニアル點ヨリナラバ如何.

15. 三角形ノ各頂點ヨリ此三角形ノ外ニアル直線ニ下シタル垂線ノ和ハ,其重心ヨリ其直線ニ下シタル垂線ノ長サノ三倍ニ等シ.

16. 四邊形ノ四ツノ頂點ヨリ此四邊形ノ外ニアル一ツノ直線ニ下シタル垂線ノ和ハ其相對スル一組ノ中點ヲ結付クル線分ノ中點ヨリ同ジ直線ニ下シタル垂線ノ四倍ニ等シ.

17. △ABC ノ各邊ヲ一邊トシ,其外側ニ正三角形 ABD, BCE, CAF ヲ書ケバ三ツノ線分 AE, BF, CD ハ相等シ.

18. 二等邊三角形 ABC ノ頂點ヲ A トシ,邊 AB ヲ延長シ,其上ニ於テ AB ニ等シキ線分 BD ヲ取リ,又 AB ノ中點ヲ E トスレバ CD ハ CE ノ二倍

ニ等シ.

19. 正方形 ABCD ノ對角線 BD 上ニ BC ニ等シキ線分 BE ヲ取リ, E ヨリ之ニ垂線ヲ引キ CD ト F ニ於テ交ラシム,然ルトキハ DE, EF, FC ハ等長ナリ.

20. 直角三角形ノ直角ノ二等分線ハ其頂點ヨリ引ケル垂線ト中線トガナス角ヲ二等分ス.

21. 四邊形ノ一組ノ相對スル角ガ相等シケレバ他ノ一組ノ相對スル角ノ二等分線ハ互ニ平行ナリ.

22. 三角形 ABC ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ノ爲ス三角形ヲ DEF トシ, DEF ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ノ爲ス三角形ヲ A′B′C′ トスレバ ∠A′ ハ ∠A ト $\frac{2}{3}$∠R トノ間ニアリ

23. △ABC ノ二ツノ邊 AB, AC ノ各ヲ四等分シ,其相對應スル分點ヲ結付ケテ BC ニ平行ナル三ツノ線分ヲ作リ;同様ニシテ CA ニ平行ナル三ツノ線分ト, AB ニ平行ナル三ツノ線分トヲ作レバ此等ノ線分ハ元ノ三角形ノ三邊ト共ニ27箇ノ三角形ヲ爲ス.

24. 相交ル二直線 X,Y ガ 60° ノ角ヲナストキ X, Y ノ上ニ夫夫一ツノ頂點ヲ有スル正三角形ノ第三ノ頂點ハ常ニ二ツノ定直線ノ何レカノ上ニアリ.

25. 直角ニ交ル二ツノ直線 X, Y ノ上ニ夫夫相對スル二頂點ヲ有スル正方形ノ他ノ二ツノ頂點ハ常ニ二ツノ定直線ノ上ニアリ.

第二編之部

26. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形ナリ.

27. 內接四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ三角形 AOB ノ外接圓ヲ畫キ, 點 O ニ於テ此圓ニ切線ヲ引ケ. 然ルトキハ此切線ハ此四邊形ノ一ツノ邊ニ平行ナリ.

28. 二ツノ同心圓周ノ中心 O ヨリ引キタル二ツノ半直線 OX, OY ガ小ナル圓周ト夫夫 A, A′; 大ナル圓周ト夫夫 B, B′ ニ於テ交レバ AB′ ト A′B トノ交點 P ト O トヲ結付クル線分 OP ハ ∠XOY ヲ二等分ス.

29. 三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ, A

ヨリ BC ヘノ垂線 AD ノ延長ガ外接圓周ト交ル點ヲ E, 垂心ヲ H トスレバ AH ハ O ヨリ BC マデ引キタル垂線ノ長サノ二倍ニ等シク, 又 DH ト DE トハ相等シ.

30. 三角形ノ垂心 H, 重心 G 及外心 O ハ同一直線上ニアリ, 而シテ GH ハ OG ノ二倍ニ等シ.

31. 圓ニ内接スル等邊直線形ハ又等角ナル直線形ナリ.

32. △ABC ノ内接圓 O ト角 A ノ内ニ在ル傍接圓 O′ トヲ書キ, 三邊トノ切點ヲ D, E, F; G, H, I トシ, 三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫夫 a, b, c ニテ表シ, 且ツ三角形ノ周ノ半分ヲ p ニテ表セバ次ノ關係アリ.

$$\left.\begin{aligned} AE=AF&=p-a\\ BD=BF&=p-b\\ CD=CE&=p-c \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} AH=AI&=p\\ BG=BI&=p-c\\ CG=BH&=p-b \end{aligned}\right\}$$

33. 三角形ノ三邊ノ上ニ各正三角形ヲ元ノ三角形ノ外側ニ作リタル各正三角形ニ外接スル圓ハ同一點ヲ通ル.

34. 内接四邊形 ABCD ノ二邊 AB, CD ノ延長ノ交點ヲ E トシ, AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トシ, 二ツノ三角形 BCE, CDF ニ各外接スル圓周ノ交點ヲ G トスレバ E, G, F ハ同一直線上ニアリ.

35. 互ニ内切スル二ツノ圓ノ切點ヲ A トシ, B ニ於テ内ナル圓ニ切スル外ノ圓ノ弦 CD ヲ作レバ AB ハ ∠CAD ヲ二等分ス.

36. ABCD ハ圓ニ内接スル四邊形ナリ. 弧 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫夫 E, F, G, H トスレバ二ツノ直線 EG, FH ハ互ニ垂直ナリ.

37. 定角 XOY ノ二等分線上ノ一點ヲ P トス. 二點 O, P ヲ通ル任意ノ圓周ガ角ノ二邊 OX, OY ニ交ル點ヲ夫夫 A, B トスレバ線分 OA, OB ノ和ハ不易ナリ.

38. 定直線ニ平行ナル直線ヲ引キ, 相交ル二定直線ガ, ソレヨリ截リ取ル部分ヲ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト.

39. 一點 O ニ於テ相交ル三ツノ直線 X, Y, Z アリ. 今此等ノ直線ニ交ル一ツノ直線ヲ引キ其 X ト Y トノ間ノ部分ヲシテ Y ト Z トノ間ノ部分ニ等シカラシムルコト.

40. 二ツノ定圓周ノ上ニ夫夫兩端ヲ有スル與ヘラレタル長サノ線分ヲ引キ且ツ定直線ニ平行ナラシムルコト.

41. 定マレル三角形ノ三ツノ邊或ハ其延長ノ上ニ夫夫三ツノ頂點ヲ有スル正三角形ヲ作ルコト.

42. 圓外ノ一定點ヨリ最大(若クハ最小)ナル距離ニアル點ヲ圓周上ニ求ムルコト.

43. 定直線上ニ於テ,其上ニ在ラザル二定點ヨリノ距離ノ和ガ最小ナル點ヲ求ムルコト.

44. 定直線上ニ於テ,其上ニ在ラザル二定點ヨリノ距離ノ差ガ最大ナルベキ點ヲ求ムルコト.

45. PP′, QQ′ ハ一ツノ圓ノ平行ナル弦ナリ. 今 P, Q ガ各定點ナルトキ PP′, QQ′ ノ和ヲ最大ナラシムルコト.

46. 定角 BAC 內ノ一定點 O ヲ一ツノ頂點トシ,此角ノ二邊ノ上ニ一ツ宛頂點ヲ有スル三角形ノ中,周圍ノ最小ナル者ヲ求ムルコト.

47. A, B ヲ各定角 XOY 內ノ二ツノ定點トス. 今屈線 ACDB ノ頂點 C, D ガ夫夫 OX, OY (或ハ OY, OX) ノ上ニアリテ其長サ(屈線ノ四ツノ線分ノ和)ノ最小ナルモノヲ求ムルコト.

48. 前題ニ於テ二點 A, B ガ相合スレバ如何.

49. 底邊,高サ及底邊ノ一端ヨリ引ケル中線ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

50. 三角形ノ周圍,頂角ノ大サ,並ニ其位置及底邊上ノ一定點ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

51. 互ニ內切スル二ツノ圓ノ切點ヲ通リテ弦ヲ引キ,兩圓周ノ間ニ夾マルル部分ガ與ヘラレタル長サニ等シクナル樣ニスルコト.

52. B, C ハ定圓周上ノ二定點トス,今圓周上ニ一點 A ヲ設ケテ平行四邊形 ABDC ノ對角線 AD ヲ最大(或ハ最小)ナラシムルコトヲ求ム.

53. 二定圓周ニ切スル圓周ヲ作リテ其半徑ヲ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト.

54. 與ヘラレタル長サノ線分 AB ノ兩端ガ夫夫定角 XOY ノ二邊ノ上ニアル樣ニ動クトキ三角形 OAB ノ外心ノ軌跡ヲ求ム.

55. 一定點 P ヲ通ル與ヘラレタル長サノ線分ヲ AB トス. AP, PB ノ上ニ其各ヲ底邊トスル二

ツノ正三角形ヲ其同ジ側ニ作リ其頂點ヲ結付クル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

56. 正三角形ノ一ツノ頂點ハ定點 P ニアリ, 他ノ一ツノ頂點ハ定直線X上ニアルトキ第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

又定直線 X ノ代リニ定圓周 O ヲ取レバ如何.

57. 正方形ノ一ツノ頂點ハ定點Pニアリ,之ニ對スル角ノ頂點ハ定直線X上ニアルトキ他ノ二ツノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

58. 定マレル底邊ト,與ヘラレタル角ニ等シキ頂角トヲ有スル三角形ノ内心ノ軌跡ヲ求ムルコト. 又其垂心ノ軌跡ヲ求ムルコト.

第三編之部

59. 四邊形 ABCD 內ノ一點ヲ O トシ,四ツノ三角形 OAB, OBC, OCD, ODA ガ等積ナルトキハ ABCD ハ平行四邊形ナリ.

60. 直角三角形 ABC ノ直角ヲ夾ム二邊 AB, AC ノ各ノ上ニ一ツ宛其端 D, E ヲ有スル線分ヲ引クトキハ $CD^2+BE^2=DE^2+BC^2$ ナリ.

61. 梯形ノ面積ハ,其二ツノ底ノ中點ヲ結付クル線分ニテ二等分セラル.

62. 三角形ノ重心ト各頂點トヲ結付クル線分ノ平方ノ和ノ三倍ハ三邊ノ各ノ平方ノ和ニ等シ.

63. G ヲ △ABC ノ重心, P ヲ任意ノ點トスレバ $AP^2+BP^2+CP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3GP^2$ ナリ.

64. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 AB 上ノ一點ヲ P トスレバ $AC^2-PC^2=AP.BP$ ナリ.

若シ點 P ガ底邊 AB ノ延長ノ上ニアラバ如何.

65. 與ヘラレタル面積ヲ有シ且ツ定マレル底邊ヲ有スル三角形ノ中デ二等邊三角形ノ周圍ガ最小ナリ.

66. 平行四邊形 ABCD ノ平面上ニ一點 O ヲ取レバ三角形 OAB ノ面積ト三角形 OAC ノ面積トノ和或ハ差ハ三角形 OAD ノ面積ニ等シ.

67. △ABC ノ各邊ノ上ニ其外側ニ作レル正方形ヲ BCFG, CAIH, ABDE トスレバ三ツノ三角形 AIE, BDG, CFH ハ等積ナリ.

68. 前題ニ於テ $AB^2+BC^2+CA^2$ ノ四倍ハ

$DE^2+DG^2+GF^2+FH^2+HI^2+IE^2$ ニ等シ.

69. AB ハ圓ノ直徑, CD ハ AB ニ平行ナル弦ニシテ, P ハ AB 上ノ任意ノ一點ナリトスレバ

$$CP^2+AP^2+BP^2$$ ナリ.

70. 三角形 ABC ノ邊 BC ヲ D, E ニテ三等分スルトキハ

$$AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+BE^2$$ ナリ.

71. 三角形 ABC ノ各邊ノ上ニ其外側ニ正方形 ABDE, BCFG, ACHK ヲ書キ, D ト G ト, F ト H ト, K ト E トヲ結付ケテ得ル六邊形 EDGFHK ノ各邊ノ平方ノ和ハ三角形 ABC ノ各邊ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ.

72. 二ツノ同心圓周 APB, CQD ノ直徑ヲ夫夫 AB, CD トシ, P, Q ヲソレゾレ圓周上ノ任意ノ點トスレバ $PC^2+PD^2=QA^2+QB^2$ ナリ.

73. 二ツノ同心圓周アリ,內ナル圓周上ノ一定點 P ヨリ任意ノ弦 PA ヲ引キ, PA ニ垂直ニ外ナル圓ノ弦 BPC ヲ引クトキハ $PA^2+PB^2+PC^2$ 及 $AB^2+BC^2+CA^2$ ハ何レモ不易ナリ. 又 $\triangle ABC$ ノ重心ヲ G トスレバ線分 GP モ不易ナリ.

74. 二定點ニ至ル距離ノ平方ノ差ノ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

75. 與ヘラレタル正方形ノ面積ノ五倍ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

76. 四定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ノ最小ナル點ヲ求ムルコト.

77. 一定點ヲ通ル直線ヲ引キ,定マレル平行四邊形ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

78. 四邊形ノ面積ヲ其一邊ノ上ノ定マレル點ヲ通ル一直線ニヨリテ二等分スルコト.

79. 四邊形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ引ケル二ツノ半直線ニテ此四邊形ノ面積ヲ三等分スルコト.

80. 定線分 AB 上ニ一點 C ヲ取リ, AC, BC ノ各ノ平方ノ差ガ與ヘラレタル正方形ノ面積ニ等シクナル樣ニスルコト.

第四編之部

81. 同ジ底邊 BC ヲ有シテ,其同ジ側ニアル等積ナル二ツノ三角形ヲ ABC, DBC トス. 此二ツノ三角形ノ二邊或ハ其延長ノ交點 E, F ヲ通ル直

線ハ底邊ヲ二等分ス.

82. 梯形 ABCD ノ對角線ノ交點 O ヲ通リ,其底 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,二邊 AB, CD ト夫夫 E, F ニ於テ交ラシムルトキハ, OE ト OF トハ相等シ.

83. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ底邊 BC ノ兩端ニ於ケル角(又ハ其外角)ノ二等分線ヘ垂線 AM, AN ヲ引ケバ MN ハ BC ニ平行ナリ.

84. 圓内ノ一點ヲ通ル弦ノ中デ最小ナル者ノ半分ハ,此點ヲ通ル其他ノ任意ノ弦ノ此點ニテ分タルルトキニ生ズル二ツノ分ノ比例中項ナリ.

85. 圓外ノ一定點ヨリ引キタル任意ノ割線上ノ弦ガ,此點ニテ分タレテ生ズル外分ノ積ハ,此點ト中心トノ距離ノ平方ヨリ半徑ノ平方ヲ引キタル者ニ等シ.

86. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ底邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ,又 A ヨリ引キタル此三角形ノ外接圓ノ直徑ヲ AE トスレバ

$$BA.AC=EA.AD$$

ナリ.

87. 三角形 ABC ノ邊 AB ノ中點 D ヨリ半直線ヲ引キ, AC ト E ニ於テ, BC ノ延長ト F ニ於テ交ラシムルトキハ　$AE:EC=BF:CF$　ナリ.

88. O, B, C ハ同一直線上ノ三點ナリ,今 OB, OC ノ中點ヲ夫夫 B′, C′ トシ, BC ヲ $m:n$ ニ内分若クハ外分スル點ヲ M トシ, OM ノ中點ヲ N トスレバ N ハ B′C′ ヲ同ジ比ニ内分若クハ外分ス.

89. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ一ツ BD ガ其二邊 AB, BC ノ比例中項ニシテ且ツ此二邊ガナス角ヲ二等分スルトキハ此對角線ガ點 E ニ於テ他ノ對角線 AC ニ交リテ生ズル二ツノ線分 AE ト CE トノ比ハ二邊 AD ト CD トノ比ノ平方(之ヲ AD ト CD トノ比ノ二乘比トモイフ)ニ等シ.

90. BC ハ圓ノ一ツノ直徑, D ハ BC 上ノ任意ノ點, D ニ於テ BC ニ垂直ナル半直線ガ圓周ト G ニ於テ交リ,弦 AB, AC 或ハ其延長ト夫夫 F, E ニ於テ交ルトキハ DG ハ DE ト DF トノ比例中項ナリ.

91. 三角形ノ各頂點ヨリ之ニ對スル邊ニ引キタル三ツノ線分ガ同一ノ點ヲ通リ,此點ニ於テ分

タルル各線分ノ二ツノ分ノ積ガ相等シキトキハ,此交點ハ垂心ナリ.

92. 半直線 OX 上ニ二點 P, Q ヲ取リ, 又他ノ半直線 OY 上ニ二點 M, N ヲ取リ, MP, NQ ガ R ニ於テ相交ルトス. 若シ $OM:MP=ON:NQ$ ナラバ三角形 PQR ハ二等邊ナリ.

93. 圓周上ノ一點 A ヨリ直徑 AB 及切線 AC ヲ引キ,切線上ノ一點Cヨリ第二ノ切線ヲ引キ其切點ヲ D トシ,D ヨリ AB ニ垂線 DE ヲ引ケバ DE ハ BC ニヨリテ二等分セラル.

94. 二ツノ圓ニ於テ二ツノ弓形 ABC, A′B′C′ ノ含ム角ガ相等シケレバ二ツノ圓ノ半徑ノ比ハ其弦 AC, A′C′ ノ比ニ等シ.

95. D ヲ三角形 ABC ノ底邊 BC 或ハ其延長上ノ任意ノ點トスレバ二ツノ △ABD, △ACD ニ外接スル圓ノ直徑ノ比ハ AB, AC ノ比ニ等シ.

96. 圓 C ノ外ニアル一點 O ヨリ二ツノ切線 OA, OB ヲ引キ,次ニOヨリ割線ヲ引キテ圓周ト P, Q ニ於テ,弦 AB トRニ於テ交ラシム. 而シテ AB ト OC トノ交點ヲ N トスレバ,NR ハ角 PNQ

ヲ二等分ス.

97. 二ツノ線分 AE, BD ハ互ニ平行ニシテ相等シク;二ツノ三角形 AOE, BOC ガ相似ナルトキハ △DEC モ亦此等ノ三角形ニ相似ナリ.

98. 與ヘラレタル圓周上ノ定マレル弧 AB ノ中點ヲ C トシ,其共軛弧ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ $(AP+BP):PC$ ハ不易ナリ.

若シ △ABC ガ正三角形ナラバ此比ハ如何.

99. 正方形 ABCD ニ外接スル圓周ニ於テ弧 AD 上ノ任意ノ點ヲPトスレバ$(PC+PA):PB$ 及 $(PC-PA):PD$ ハ何レモ不易ナリ.

100. 三角形 ABCノ各頂點ヨリ任意ノ一點 O マデ引キタル線分或ハ其延長ガ BC, CA, AB ト交ル點ヲ夫夫 X, Y, Z トスレバ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$ ナリ而シテ其逆モ亦眞ナリ (之ヲ Ceva ノ定理ト云フ).

101. 三角形 ABC ノ三ツノ邊 BC, CA, AB 或ハ其延長ガ任意ノ一直線ト交ル點ヲ夫夫 X, Y, Z トスレバ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=-1$ ナリ,而シテ其逆

モ亦眞ナリ(之ヲ Menelaus ノ定理トイフ).

102. △ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫夫二點 E, F ヲ取リ BE=2.EA, AF=2.FC ナラシメ, EF ト BC トノ交點ヲ H トスレバ BH : HC 如何.

103. 三角形ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガ對邊ト交ル點ヲ夫夫 D, E, F トスレバ D, E, F ハ同一直線上ニアリ.

104. 三角形 ABC ノ內接圓ガ三邊ニ切スル點ヲ夫夫 D, E, F トスレバ三ツノ線分 AD, BE, CF ハ同一點ヲ通ル.

105. 圓周上ノ一點ヨリ之ニ內接スル四邊形ノ相對スル邊ヘ引ケル垂線ノ積ハ相等シ. 其逆モ眞ナリ.

106. 圓ニ內容シ得ル四邊形ノ對線角ノ積ハ相對スル二邊ノ積ノ和ニ等シ. 其逆モ亦眞ナリ. (之ヲ Ptolemy ノ定理トイフ).

107. 內接四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナレバ相對スル邊ノ積ノ和ハ四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シ.

108. 正三角形 ABC ニ於テ PA=PB+PC ナルベキ點 P ハ △ABC ニ外接スル圓周上ニアリ.

109. 二ツヅツ相交ル三ツノ圓アリ. ソノ二ツ宛ニ共通ナル弦或ハ其延長ハ同一ノ點ヲ通ル.

110. 直角三角形ノ三邊ノ各ヲ直徑トスル半圓周ヲ,斜邊 BC ニ對シ此三角形ガアル側ニ書クトキニ生ズル二ツノ新月形ノ圖形ノ面積ノ和ハ此直角三角形ノ面積ニ等シ.

111. 線分 AB ヲ中末比ニ內分スル點ヲ C トシ, AC ヲ一邊トスル正方形 ACDE ヲ書キ, 次ニ矩形 CBOD ヲ作ルトキハ, AO ハ DB ニ垂直ナリ.

112. 圓ニ內接スル正八邊形ノ面積ハ同ジ圓ニ內接スル正方形ノ一邊ト其圓ノ外接正方形ノ一邊トニ等シキ相隣レル二邊ヲ有スル矩形ノ面積ニ等シ.

113. 二ツノ圓ノ相似ノ中心ノ一ツヲ O トス. O ヨリ一ツノ割線ヲ引キ一ツノ圓周ト A, A′ ニテ交リ, 他ノ圓周ト B, B′ ニ於テ交ラシムレバ OA.OB′ ハ OA′.OB ニ等シク且ツ此積ハ何レノ割線ニ就テモ總テ互ニ相等シ. 但シ A ト B ト,

A'トB'トヲ各相對應スル點トス.

114. △ABC ノ邊 AB, AC ノ上ニ夫夫任意ノ點 D, E ヲ取リ; D, E ヲ通ル直線ガ BC ノ延長ト交ル點ヲ F トシ二ツノ平行四邊形 ABGE, ADHC ヲ作レバ三點 G, H, F ハ同一ノ直線上ニアリ.

115. 圓ニ内接スル六邊形ノ相對スル邊ノ延長ノ交點ハ同一直線上ニアリ(之ヲ Pascal ノ定理トイフ).

116. 三角形 ABC ノ三邊ヲ夫夫 a, b, c トシ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ノ内ニアル傍接圓ノ半徑ヲ夫夫 r_1, r_2, r_3 トシ,又内接圓ノ半徑ヲ r トシ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ トスレバ

$$sr=(s-a)r_1=(s-b)r_2=(s-c)r_3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$r : s-b=s-c : r_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ.

117. 圓 O ニ於テ其半徑ニ等シキ長サノ弦 AD ヲ引キ, A ヨリ此圓ニ切スル半直線ヲ OA ニ對シテ弦 AD ノアル側ト反對ノ側ニ引キ,其上ニ於テ半徑ニ等シキ線分 AB ヲ取リ, B ヲ D 及 O ノ各ニ結付ケタル線分ガ圓周ト交ル點ヲ夫夫 E, F トセヨ. 然ルトキハ弧 AE ハ圓周ノ $\frac{1}{12}$ ニ等シク, 弧 EF ハ圓周ノ $\frac{1}{24}$ ニ等シ.

118. 四邊形 ABCD ノ面積ヲ求ムル次ノ圖解法ヲ證明セヨ.

B ト D トヲ結付ケ C ヨリ BD ニ平行ナル直線ヲ引キ AB ノ延長トノ交點ヲ E トス. E ヲ中心トシ,長サノ單位ノ 2 倍ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ書キ,點 A ヨリ之ニ切スル半直線 AX ヲ引キ, D ヲ通リ AB ニ平行ナル直線トノ交點ヲ X トスレバ線分 AX ヲ表ス數ハ ABCD ノ面積ヲ表ス數ニ等シ.

BD＝2 寸, AB＝1.6 寸, BC＝1.8 寸, CD＝1.6 寸, DA＝1.3 寸 トシテ計算ニヨリテ面積ヲ求メ之ヲ上ノ方法ニヨリテ求メタル結果ニ比較セヨ.

119. A, B, A′, B′ ハ同一直線上ノ四點ナリ,今同ジ直線上ニ一點 P ヲ取リテ

(1) $AP : PB = A'P : PB'$

(2) $AP : PB = B'P : A'P$

ナル樣ニスルコト.

120. 與ヘラレタル三角形ヲ其底邊ニ垂直ナル直線ニヨリテ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

121. 與ヘラレタル圓弧 AB ノ上ニ一點 M ヲ取リテ AM+MB ヲ最大ナラシムルコト.

又 AM.BM ヲ最大ナラシムルコト.

122. 三角形ノ一邊ノ上ニ一ツノ邊ガアル樣ニ,與ヘラレタル矩形ト相似ナル矩形ヲ此三角形ニ內容スルコト.

123. 與ヘラレタル三角形ノ一邊ノ上ニ一點ヲ求メテ之ヨリ他ノ二邊ニ平行ナル二直線ガ他ノ二邊トナス平行四邊形ノ面積ヲ最大ナラシムルコト.

124. 與ヘラレタル三角形ノ一邊ノ上ニ一ツノ邊ガアル樣ニ此三角形ニ內容スル矩形ヲ作リテ其面積ヲ最大ナラシムルコト.

125. 與ヘラレタル圓外ノ一點ヨリ此圓ニ引キタル二ツノ切線ノ長サノ和ヲ此點ト圓周上ノ點トノ距離ノ中デ最大ナル者ニ等シクナサントス. 此點ノ位置ヲ求メヨ.

126. 二ツノ定直線ニ切シ其何レノ上ニモアラザル一定點ヲ通ル圓ヲ書クコト.

127. 二定點ヲ通リ且ツ一定圓周ニ切スル圓ヲ作ルコト.

128. 二定圓ニ切シ且ツ一定點ヲ通ル圓周ヲ作ルコト.

129. 四邊形ヲ書キテ其一組ノ相對スル角ノ二等分線ノ交點ガ他ノ一組ノ相對スル角ノ頂點ヲ結付クル線分ノ上ニアル樣ニスルコト.

130. 一定點ヲ通リ,一定直線及定圓周ニ切スル圓周ヲ書クコト.

131. 二ツノ定圓ニ相等シキ切線ヲ引キ得ベキ點ノ軌跡ヲ求ム.

132 △ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル一ツノ直線ガ△ABC ノ邊トナス梯形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

133. 一定點 O ヨリ引キタル二ツノ線分 OP, OQ ノ比ガ一定ニシテ且ツ定マレル角ヲナストキ點 P ノ軌跡ガ直線ナレバ點 Q ノ軌跡如何.

又點 P ノ軌跡ガ圓周ナラバ點 Q ノ軌跡如何.

134 二ツノ圓周ノ交點ノ一ツ A ヲ通ル直線

ヲ引キテ各圓ノ周ニ於テ終ラシメタル線分 CD ヲ,與ヘラレタル比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求ム.

135. △ABC ニ於テ A ヨリ引キタル中線ヲ AG トシ AB=3寸, AC=4寸, AG=3寸 ナルトキ底邊 BC ノ長サヲ求メヨ.

136. △ABC ニ於テ AC=2吋, BC=3吋, BC ノ上ニ於ケル AC ノ直射影ヲ 0.5吋トスレバ AB ノ長サ如何.

137. 三ツノ角ガ夫夫 60°, 40°, 80° ナル三角形ニ外接スル圓周ガ2呎ナルトキ三角形ノ三邊ニ對スル各圓弧ノ長サヲ求ム.

138. 一邊ガ1寸及2寸ナル二ツノ正方形ノ面積ノ和ニ等シキ正方形ノ一邊ノ長サ及對角線ノ長サヲ求ム.

139. 二邊ガ10吋,底邊ガ7吋ナル二等邊三角形ノ高サ及面積ヲ求メヨ.

140. 互ニ平行ナラザル二邊ガ相等シクシテ各1寸ナル梯形ノ高サ0.7寸,小ナル底ガ2寸ナルトキ其梯形ノ面積ヲ求メヨ.

141. 圓ノ中心ヨリ4吋ノ距離ニアル點ヨリ

其圓ヘ引キタル切線ノ長サガ3吋ナルトキ,圓ノ半徑ヲ求メヨ.

142. 互ニ垂直ナル弦 AB, CD ノ交點ヲ O トシ AO=OB=2吋, CO=1.5吋ナルトキ圓ノ半徑ヲ求ム.

143. 一ツノ圓ノ互ニ平行ナル二ツノ弦ノ長サガ各1吋,其二ツノ弦ノ間ノ距離ガ1.2吋ナルトキ圓ノ半徑ヲ求メヨ.

144 ABCD ハ一邊ガ2吋ナル正方形ニシテ E ハ BC ノ中點ナリ. A, E, D ヲ通ル圓周ト DC トノ交點ヲ F トシ, DF ノ長サヲ求メヨ.

145. 線分 AB ノ長サヲ3吋トシ其上ニ BC ノ長サヲ 0.3吋ニ等シク取レ. B, C ヨリ BA ニ垂直ナル二ツノ半直線ヲ AB ノ同ジ側ニ作リ其上ニ於テ夫夫 BX=2.5吋, CY=2.2吋ナル樣ニ X, Y ヲ取リ,直線 XY ガ AB ニ交ル點ヲ Z トシ, AZ ノ長サヲ求メヨ.

146. ABCD ハ一邊ノ長サガ5糎ナル正方形ナリ. 對角線AC ヲ CB ニ等シク延長シテ CE トシ, E ヨリ AB ノ延長ヘ垂線EF ヲ作レバ線分EF,

BE ノ長サ各幾何ナルカ.

147. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ヲ夫夫 3 糎, 4 糎, 5 糎トス. 今三邊 BC, CA, AB ヨリノ距離ノ比ガ 3:4:5 ナル點 O ノ位置ヲ求ム.

148. △ABC ニ於テ底邊 BC ガ 5 寸, AB. AC ガ 8 平方寸, ∠A ノ二等分線ガ BC ト交ル點ヲ D トシ, AD ガ 2 寸ナルトキハ二邊 AB, AC ノ長サ各幾何ナルカ.

149. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ノ上ニ中心ヲ有シ,他ノ二邊ノ各ニ切スル半圓ノ半徑ヲ計算セヨ. 但シ AB=4 寸, AC=5 寸 トス.

150. 互ニ外切スル三ツノ圓ノ半徑ヲ夫夫 18 尺, 8 尺トスレバ此二ツノ圓ノ外公切線ノ二ツノ切點間ノ線分ノ長サ如何.

151. 次ノ二ツノ場合ノ各ニ於テ二ツノ圓ノ公切線ノ長サヲ求メヨ.

(1) OO′(中心間ノ距離)=15 糎,
半徑ガ夫夫 9 糎及 4.5 糎

(2) OO′=3.4 尺, 半徑ガ夫夫 2.7 尺及 1.5 尺

152. 次ノ各場合ニ於テ三角形ノ各邊ノ長サヲ求ム.

(1) 正三角形ノ面積 2 平方米ナルトキ.

(2) 三邊ノ比 13:14:15 ニシテ面積ガ 1 平方米ナルトキ.

153. 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫夫 4 糎及 4.5 糎ナルトキ第三邊ノ長サヲ求ム. 但シ其面積ハ 7 平方糎ナリ.

154. 二ツノ相似三角形ノ面積ガ夫夫 1 平方尺及 110 平方寸ナルトキ其相似比ヲ求メヨ.

155. 三邊ガ夫夫 16 尺, 24 尺, 10 尺ナル三角形ノ高サヲ求メヨ. 又其外接圓ノ直徑ヲ求メヨ.

156. 三邊ガ夫夫 3 呎, 2.5 呎及 2 呎ナル三角形ニ於テ其內接圓,外接圓及三ツノ傍接圓ノ半徑ヲ求ム.

157. 半徑ガ夫夫 1 寸, 1.5 寸及 2 寸ナル三ツノ圓ガ二ツヅツ互ニ外切スル場合ニ於ケル內公切線ノ交點ノ位置ヲ求メヨ.

又此等ノ圓ノ二ツ宛ノ相似ノ外心ノ位置ヲ求メ且ツ此等ノ點ガ同一直線上ニアルコトヲ證明セヨ.

158. 二ツノ圓ノ半徑ガ夫夫 1.5 粴及 0.8 粴ニシテ中心間ノ距離ガ 3 粴ナルトキ之ヲ二ツノ傍接圓トスル三角形ノ各邊ノ長サヲ求メヨ.

159. 三ツノ邊 BC, CA, AB ガ夫夫 10 米, 12 米, 7.2 米ナル三角形 ABC ノ頂點 B 及 A ヲ中心トシヲ書キタル圓ノ半徑ヲ夫夫 1.2 米及 0.8 米ナリトセヨ. 圓 B ニ外接シ圓 A ニ內接シ且ツ BC ニ切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ.

160. 三邊 BC, CA, AB ガ夫夫 6.4 寸, 5 寸及 8 寸ナル三角形 ABC ノ頂點 B 及 C ヲ中心トシテ書キタル圓ノ半徑ガ夫夫 2 寸及 1 寸ナリトセヨ. A ヲ通リ且ツ二ツノ圓 B, C ニ切スル第三ノ圓ノ半徑ヲ求メヨ.

161. 圓ニ內接スル四邊形 PQRS ノ PQ, QR, RS, SP ヲ表ス數ヲ夫夫 a, b, c, d トシ,對角線 PR, QS ヲ表ス數ヲ夫夫 x 及 y トシ,二ツノ弧 PQ, RS ノ和ニ等シキ弧ヲ張ル弦ヲ表ス數ヲ z トスレバ

$$xy=ac+bd,\quad zx=ad+bc,\quad yz=ab+cd$$

ナルコトヲ證明シ,之ニヨリテ x, y, z ヲ求メヨ.

162. 圓ニ內接スル四邊形ノ四ツノ邊ガ夫夫

2 呎, 3 呎, 4 呎, 5 呎ナルトキ二ツノ對角線ノ長サヲ求メヨ.

163. 四邊形 ABCD ニ於テ

$\angle A=30°$, AD=AB=2.5 尺, $\angle B=\angle D=\angle R$

ナルトキ CD, BC 及對角線 BD, AC ノ長サヲ求ム.

(中學教科平面幾何)

定價七拾錢

明治四十四年十二月十八日印刷
明治四十四年十二月廿一日發行
明治四十五年二月二十日訂正再版印刷
明治四十五年二月廿三日訂正再版發行

不許複製

此所ニ編者ノ證印ナキモノハ偽版ト認ム

編者　寺尾壽

編者　吉田好九郎
東京市神田區裏神保町九番地

印刷者
發行者兼　合資會社冨山房
同所　合資會社冨山房社長

代表者　坂本嘉治馬
東京市京橋區木挽町二丁目十三番地

印刷所　新井電新堂

發行所　合資會社冨山房
東京市神田區裏神保町九番地
(振替貯金口座東京[illegible]〇一番)
(電話本局一〇三六番、本局四一三〇番)

終