大學用書

統計方法大綱

Arkin and Colton 著

朱君毅譯述

正中書局印行

大學用書

統計方法大綱

Arkin and Colton 著
朱君毅譯述

正中書局印行

譯者序

本書原名 An Outline of Statistical Methods, 爲美國紐約大學亞金 (Herbert Arkin) 與科登 (Raymond R. Colton) 二氏所編，彭那書局 (Barnes and Noble, Inc.) 所發行大學各科大綱叢書之一.是書之特點:以十八種英美大學標準統計教本爲藍本，删去繁蕪，採擷精華，一也. 書中之統計方法，非若他書之祇就一專門學科，單純發揮，如經濟統計，生物統計等書之所論列者；舉凡經濟、商業、教育、心理、生物、生命之統計方法，莫不兼收並舉，纖巨不遺，二也.是書雖式例繁多，證引宏富，然皆條分縷析，要言不煩，致廣大而盡精微，三也.至若卷端冠以各章要目之參考書按頁速檢表，及書末殿以重要公式之數理疇範，便於檢討，猶其餘事耳.鄉居夜寂，執筆迻譯，稿成，囑堂弟高岳繕校繪製，付梓人以公同好.凡大學統計學生，或從事統計人員，倘能人手一册，則無論檢尋定式，以應實用，或探索源委，以供研摘，均當不無少補焉耳.

民國三十三年一月朱君毅序於四川北碚金剛碑

序

袖珍書册之編印，在歐洲久已通行．其目的在將鉅大數本之詳贍內容，作簡括之撮錄，以應學子臨時檢閱之需．其性質實介於短篇論文與百科全書及廣泛教材之間；其取材之蕪雜者，則脊檢簸揉，以得其精華；博大者則爬羅剔抉，以見其輪廓，使凡一學科之堅實結構，永印於讀者之心，以供後日體驗之用．其在美國，尙乏此例．今彭那書局，有鑒於此，特創爲之，實足彌補教育與文化上之一大缺憾．

本書討論統計之學，言不求詳．但關於此科鴻著之精華，則已牢括靡遺．故學校士子，或就業人員，無論其統計工作之部門爲何，當以此册爲最良工具．其示式舉例，用宏取精，諸凡經濟實業、社會、教育、各門所需者，均爲採入．造意立言，務求扼要，一切深邃數理，盡力删除．如是，則讀者在其日常問題之應用，可免窮探苦索之勞．就業統計者，或將視此册如計算機之不可須臾離手歟．

Justin H. Moore,

紐約市立大學商業市政學院院長

目　次

原發行人附言

希臘字母

Α	α	alpha	Ν	ν	nu
Β	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	Ο	ο	omicro
Δ	δ	delta	Π	π	pi
Ε	ϵ	epsilon	Ρ	ρ	rho
Ζ	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
Η	η	eta	Τ	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	upsilon
Ι	ι	iota	Φ	φ	phi
Κ	κ	kappa	Χ	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
Μ	μ	mu	Ω	ω	omega

原發行人附言

此書在本版內,包括十八種標準統計教本.各書之參考頁數,均詳載次頁之表中.下列者爲各書之著者姓名,書名及出版處.

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, D. C. Heath and Co, New York, 1931.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, Houghton, Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., and Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, Prentice, Hall Inc, New York, 1934.

Crum, William L. and Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, McCraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R. and Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in Social Sciences*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, Macmillan Co., New York, 1930.

Garrett, Henry E., *Statistics in Psychology and Education*, Longmans Green and Company, New York, 1926.

Harper, F, *Elements of Practical Statistics*, Macmillan

Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, Ginn and Company, New York, 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, Harper and Bros., New York, 1924.

Kelley, Truman L., *Statistical Method*, Macmillan Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, Henry Holt and Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 14–27, D. Appleton-Century Co., New York, 1935.

Richardson, C. H. *An Int oduction to Statistical Analysis*, Harcourt, Brace and Co., New York, 1934.

Riggleman, John R., and Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, McGraw-Hill and Co., New York, 1932.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, Macmillan Co., New York, 1925.

Yule, G. Udny, *An Introduction to the Theory of Statistics*, Charles Grifflin & Co., Ltd., London, 1929.

標準統計教本速檢表

表內數目字指各書之頁數

本書之章別	要目	CAMP	CHADDOCK	CROXTON and COWDEN	CRUM	DAVIES	DAY	GARRETT	HARPER	HOLZINGER	JEROME	KELLEY	MILLS	ODELL	RICHARDSON	RIGGLEMAN and FRISBEE	RUGG	THURSTONE	YULE
I	統計數列		43-80	151-153	8-12	4-33	3-47 11-133		45-64	1-8		1-8	61-2 74-9	14-27	1-41	101-131	4-26 74-81		
II	次數分配一集中趨勢一算術平均數		81-105	153-172	56-1 1 158-168	3-38	134-139	1-11	9-1 0	7-8	1 9-17	44-5	97-1	52-2 66-76	43-3	131-13	8-100 1 4-126	1-17 7-77	7-105 1 6-116
III	次數分配一集中趨勢(續)	36-42	107-148	17-202	69-181	38-57	14-162	1-13	112-21	85-96	117-133	54-68	119-146	77-114	58-71	137-159	10-14 126-147	76-8	1 6-129
IV	次數分配一離勢與偏斜度	44-43	150-173	204-219	182-195	65-8	163-179	16-58 86-89	122-192	1 -139	146-164	70-83	147-168	11-141	78-95	17-137	149-178	86-124	1 8-153
V	時間數列分析一趨勢	162-10	306-20	252-283	302-3 7	136-1 153-1 6	231-257		162-168	317-325	224-228		552-272			188-212	178-1 9	18-28	
VI	時間數列分析一最小二乘法一直線	104-111	320-334	313-325	308-323	132-137	58-26	17-1 3	1 8-178	154-161 21-22	218-233		273-280		118-33	212-21	2 8-24	1-4	
VII	時間數列分析一非直線	112-128	335-359	326-358	32-31	139-153 156-178	263-280		178-187	32-337			280-313		169-200	215-23		2-37	
VIII	時間數列分析一季節與循環		33-66	286-310	332-363	189-219	281-312				255-255		315-342			22-267			
IX	相關一直線	12-172 286-2 0	248-290	405-4 5	218-246 364-371	56-250	18-210 31-327	14-168	189-2 8-256	1 1-173	26-287	151-185	363-430	14-208 237-249	135-162	272-295	232-2 0 29-296	187-23	157-207
X	相關一非直線 複,分析	292-10 316-3 3	290-304	431-43	247-266	250-280	301-206	20-213 221-62	93-19 221-276	177-18 256-315	295	185-210	43-52 438-514	250-308	201-2 3	294	276-306	234-228	210-52 317-332
XI	品質相關	302-314								356-278				3 9-324			292-3 9		
XII	常態曲線	69-72 183-199	207-28	241-257	196-200	292-306		74-84	144-156	19-229	165-181	94-1 6 1 9-150	51-527	53-54 378-393	2 7-49		191-227	136-148	2 1-313
XIII	抽樣之理論	240-273	228-246	222-37	04-21	298-3		84-92 118-146	1-1 166-161	231-2 5 245-54	171-177	82-92	548-56	323-376	2 1-271		227-31 7-274	161-18	54-372 33-353
XIV	指數		175-2 5	362-397	367-301	91-1 3	328-67		378-28		183-223	3 1-347	16-25 344-362			151-174			
XV	次數分配之進一步分析	18-30			11-317					338-344			527-3 545-548		97-111				
XVI	材料之搜集		371-395	33-37	15-38					9-28	29-326			14-31		11-31	28-73 31 36		
XVII	統計表		97-417	19-58	39-88				31-35	31-4 56-46	22-49		73-7			11-48	87-94 31-60		
XVIII	圖示		418-445	6-129	69-134		4-113 1-2 0	59-74	66-93		50-108	9-43	11-6	416-434		42-1 1	31-36	7-49	
XIX	教育,心理與生物學上應用之特殊技術	78-1 1		234-239						全書				全書		3 5-567	全書		

各教本詳細名稱見上頁之表

第一章

統計數列

統計方法之定義

統計方法爲搜集,分析與提示數字材料之技術.

統計技術之要素

統計技術之要素包括:

1. 材料之搜集與綜合.
2. 材料之分類與縮短.
3. 材料之提示,用:
   a. 文字式.
   b. 表列式.
   c. 圖示式.
4. 材料之分析.

統計方法之性特與限制

1. 統計方法爲處理大量數字材料之唯一方法.
2. 統計技術祗適用於可以化成數量之材料.
3. 統計技術爲客觀者.但其結果難免受主觀解釋之影響.
4. 統計技術,同樣適用於社會科學及自然科學;即一方面適用於經濟學,教育學,社會學及心理學,而另一方面又適用於生物學,

化學及天文學．上述各部門所應用之方法與技術均同．

統計數列

欲分析數字材料，必先爲之依序排列．其方法甚多．就技術上言，此種排列，稱爲分配或數列．每種分配，舉例如下：

材料之分組可依其：	所得數列稱爲：
1．大小	次數分配
2．發現之時間	時間數列
3．地理之位置	空間分配

此外，分配尚有幾種特殊之形式，其中材料可依種類排列或依程度排列．

次數分配

定義

次數分配，爲數字材料，依照大小之排列．

編造

次數分配，可照下列方式編造：

1．以材料之全距（最高數與最低數間之距限）爲準繩，將材料分爲若干大小適宜之組，稱爲組距（參看表 1，縱行 1）*．

2．將各組排在一縱行上，最低組距，位於頂端，其餘各組距，由小而大依次排列．

3．然後將材料記數．每一數字，在其相當一組之旁，作一畫記

* 初步手續，可將初級材 ，依照大小排列．此數列稱爲數序．

(見表1.中之畫記)*.

表 1. 記數張

美國261城市在1927年'眞實'價值之稅率

每千元之稅率（組距）	畫　記	城市總數（次數）
4——7.99	卌	5
8——11.99	卌卌卌	15
12——15.99	卌卌卌卌卌卌卌卌卌 /	46
16——19.99	卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌	68
20——23.99	卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌 ///	58
24——27.99	卌卌卌卌卌卌 //	32
28——31.99	卌卌卌卌 //	23
32——35.99	卌卌	10
36——39.99	//	2
40——43.99	//	2
44——47.99		0
48——51.99		1
		261

材料來源 Unicd States Department of Commerce, *Financial Statistics of Oites*, 1927. 表 29.

數分配之圖示

若兩線垂直繪畫,且依數值爲之分成量表.則已知之材料,可以參照量表爲之表出。橫線稱爲 X 軸而縱線稱爲 Y 軸.若決定某點之數值可知,則此點可在圖上爲之定位.例如圖1上 $x=2, y=3$ 之一

---

1. 材料計數法,一個簡便手續是將第一至第四記數,均用斜短線畫記再用第五記數一線連接之。如是則以五乘所得單位,加上餘數,即爲總數(見表1).此種畫記,可以節省點算次數之時間並可免除可能之錯誤.

點，卽可在圖上定位，以 a 爲記.

若此二軸，依照已知材料之單位，爲之分成量表，則次數分配，可以圖表示.

1. 組距分組之稱爲**自變數**者，位於 X（橫）軸上；稱爲**因變數**者，位於 Y（縱）軸上*.

2. 事項之數（次數），可在每相當組距之中點且與 Y 軸量表所示之適宜高度上指定之+.

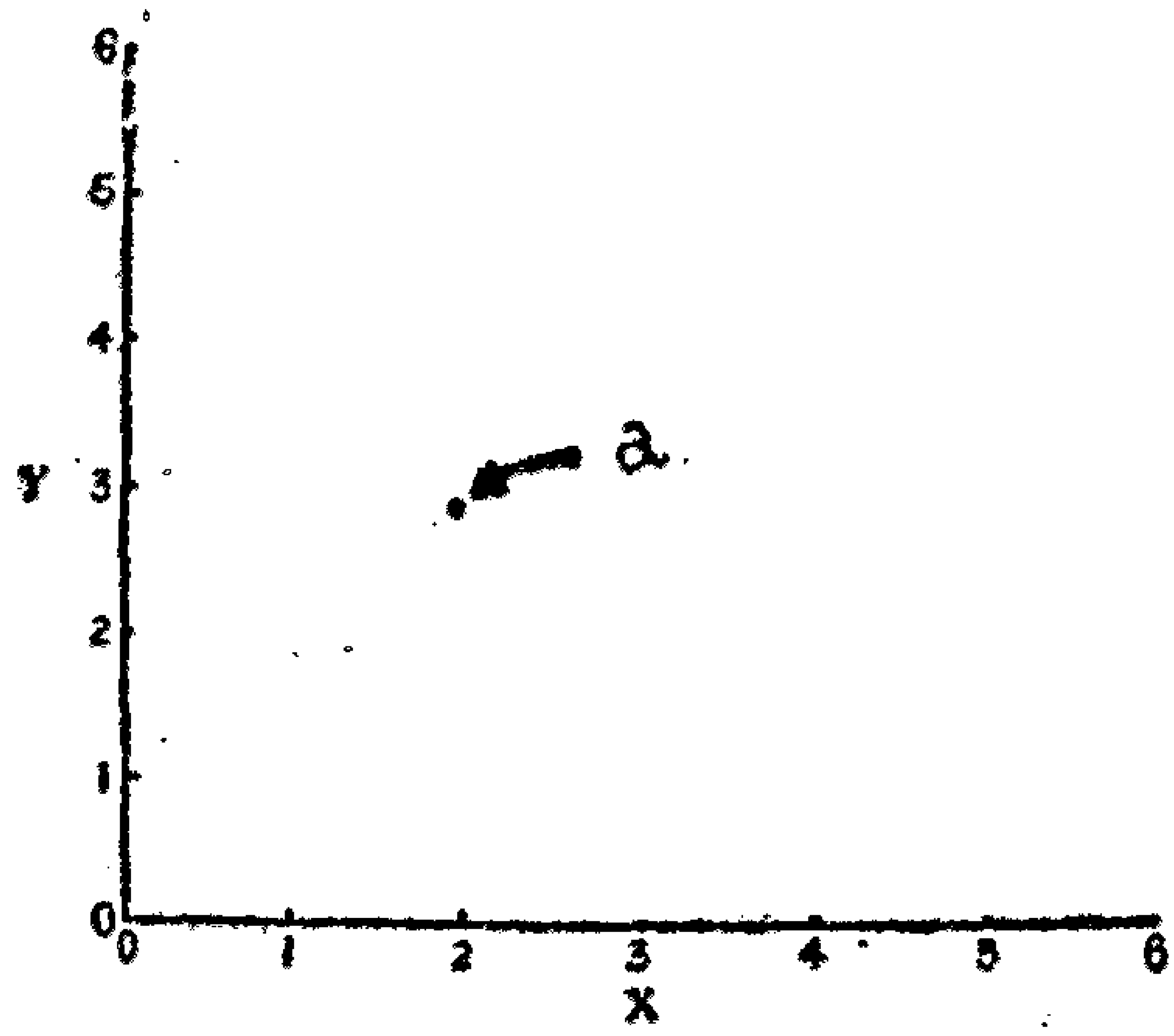


圖 1. $x=2$，$y=3$ 繪點之定位

3. 連接繪點，卽成**次數多邊圖**.

4. 若干長方形可用組距之大小爲闊度及每組距之次數爲高度以繪製之. 此長方形，形成**一直方圖**.

累積次數分配

次數累積之分配，稱爲**累積次數分配**，如表 2a 及 2b 所示.

---

* X 軸上之距離，稱爲橫坐標，Y 軸上之距離稱爲縱坐標.

\+ 用縱橫線之紙，可以便利工作.

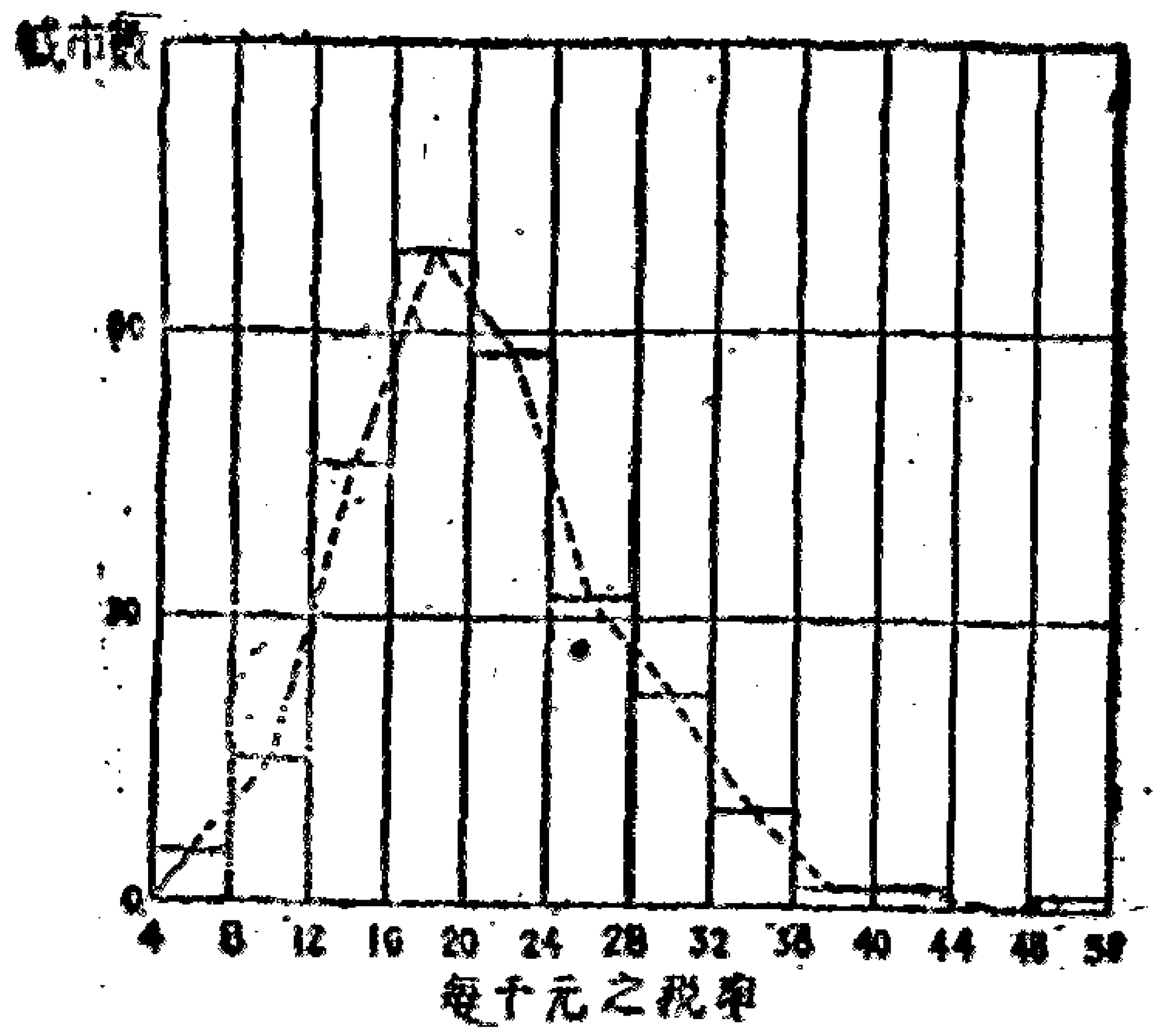


圖 2. 美國261城市在1937年'眞實'價値之稅率

表 2a. '較小'之累積

1930年美國蠆售數量按公司之大小分配

公司之大小（蠆售以千元爲單位）		公司數
較小於	25	14,235
較小於	50	23,5[illegible]8
較小於	100	36,154
較小於	200	49,667
較小於	300	56,[illegible]81
較小於	400	61,7[illegible]1
較小於	500	64,716
較小於	1,000	71,453
較小於	25,000	76,6[illegible]0

資料來源：United States Department of Commerce 1930 年之普查。

上表係用'較小'之累積，此分配可化爲'較多'或'及以上'之累積。卽將事項在'及以上'之上累積之，如表2a。

表 2b.　紐英格蘭農場大小之分配，1930 年

畝　數	農場數
0 及以上	124,925
20 及以上	1 4,948
50 及以上	84 604
100 及以上	54 9 4
175 及以上	24,628
260 及以上	10,494
500 及以上	2,165
1000 及以上	393
5000 及以上	0

材料來源：United States Department of Commerce 1930 年之普查．

分析

大量材料，若非爲之分組，則紛亂不可分析．有一次數分配表，再應用技術，分析始爲可能．但材料之分組，其本身不足作爲分析．

次數分配之種類

次數分配之普通種類，舉例如下．此外尙有特殊種類，例如雙峰曲線，'J' 形與 '反 J' 形曲線等．

1.　**對稱分配**：對稱分配中最通曉之例，爲 '常態' 曲線．

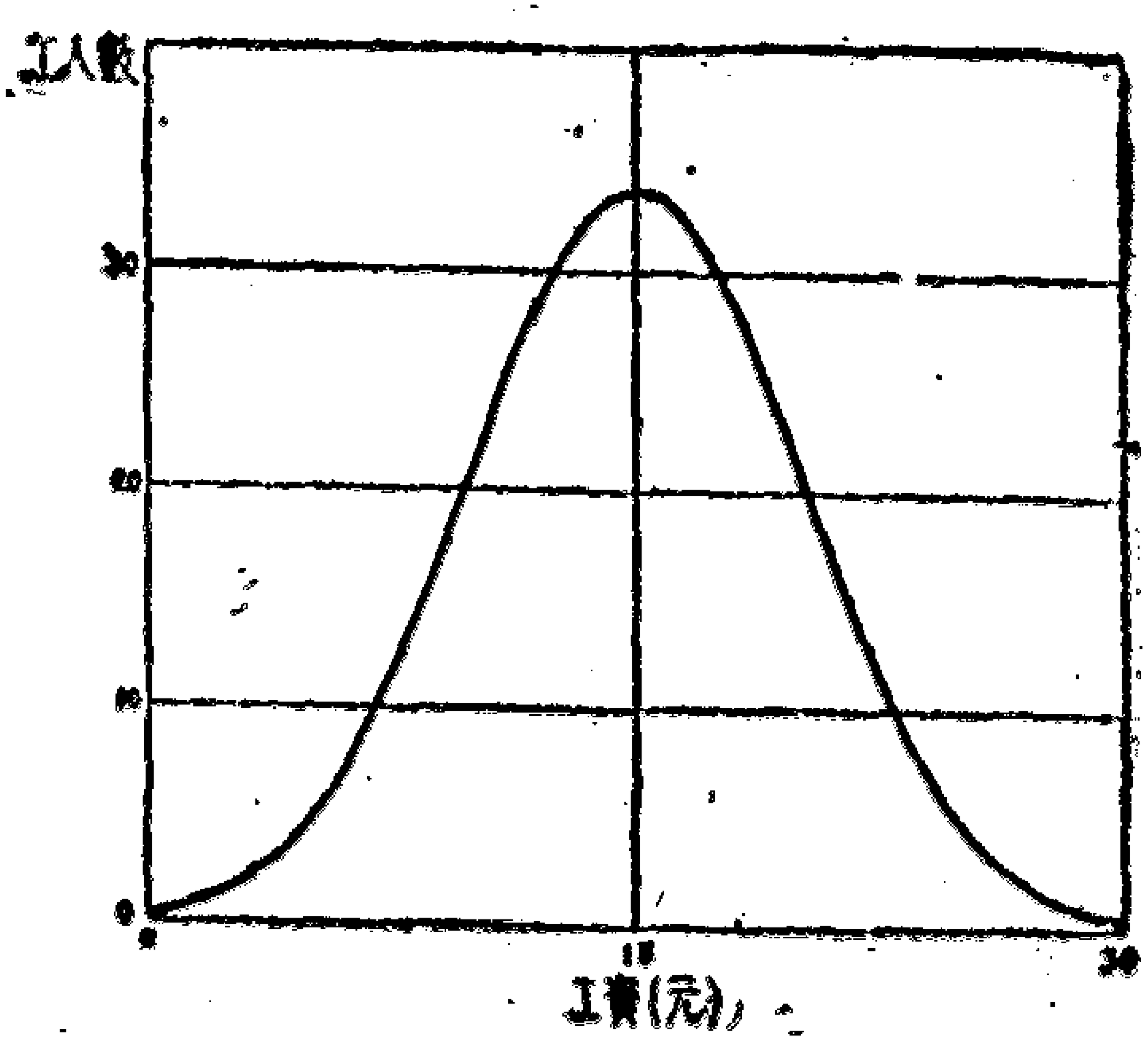


圖 3.　某工廠工資之假定常態分配

2. 偏態分配：大多數次數分配，常向一方面開展較他方面爲多．此種分配稱爲偏態分配．此可由其缺乏對稱而識別之．

a. 右(正)偏態分配，係由高值使曲線右歪所致．

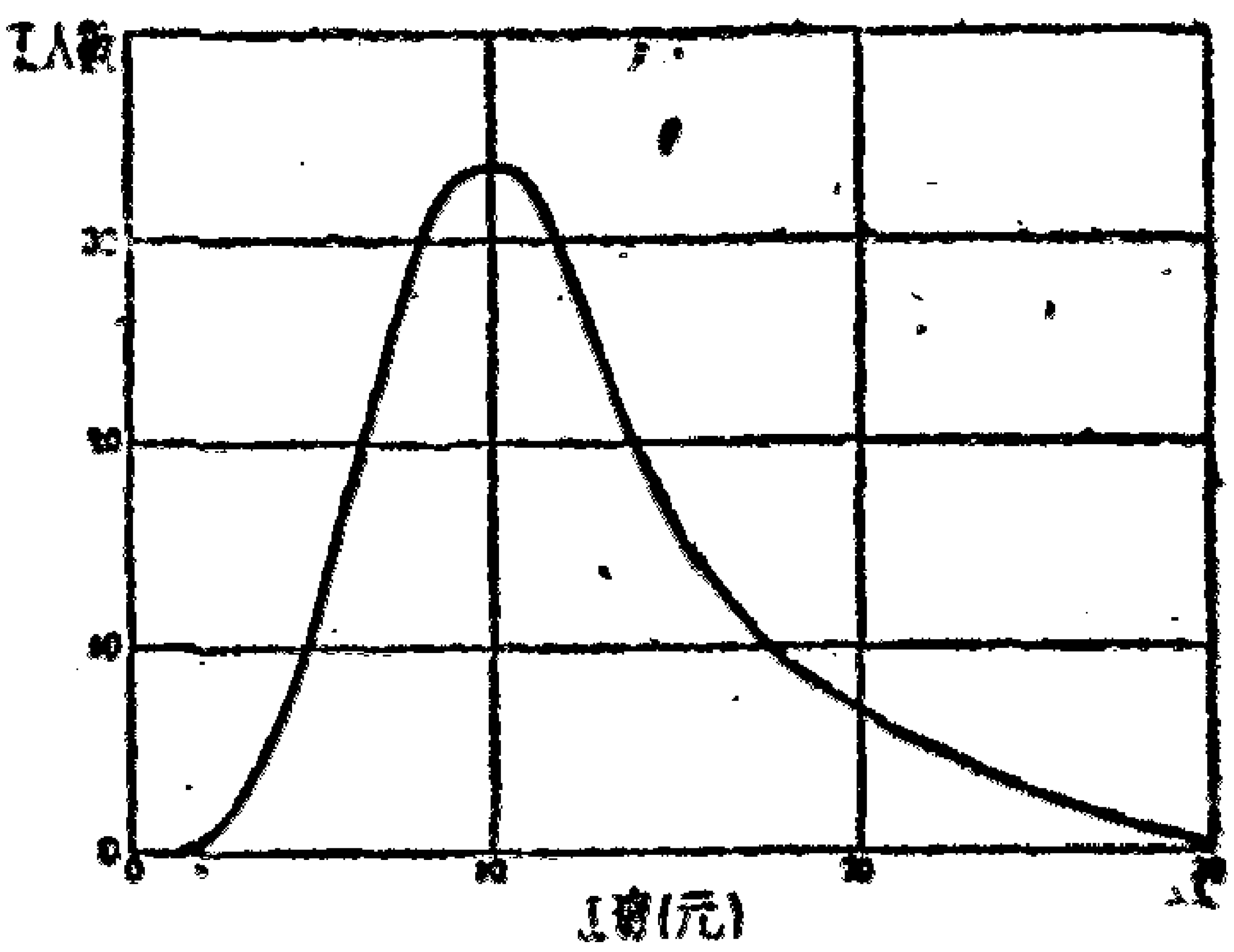


圖 4. 某工廠工資之假定右偏態分配

b. 左(負)偏態分配，較少之一種，係由低值所致，故使曲線左歪．

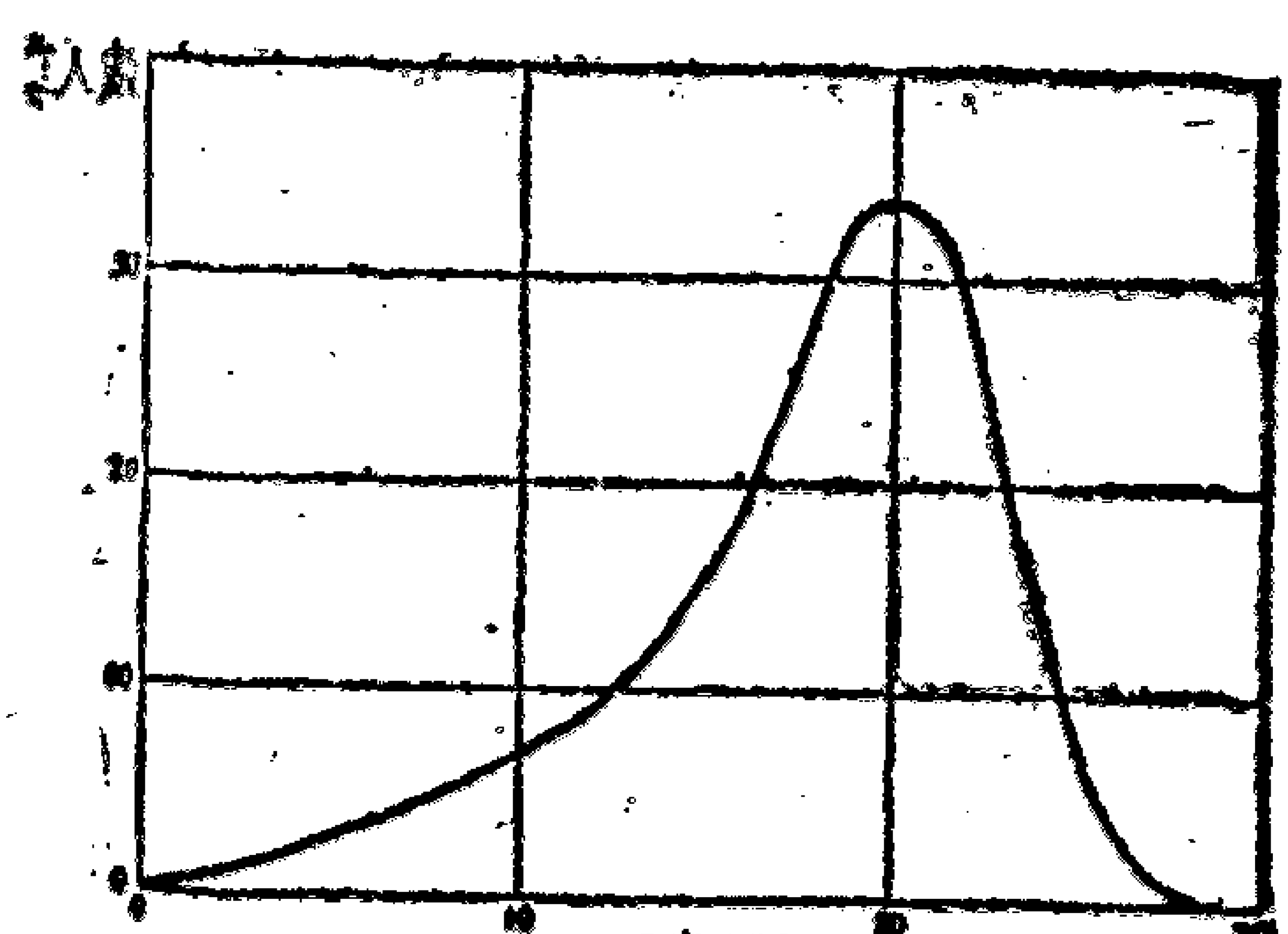


圖 5. 某工廠工資之假定左偏態分配

次數分配之特性*

自然，經濟與社會材料，顯有集中於某一點之趨勢．

---

* 次數分配，普通分爲連續與間斷(非連續)二種．在連續數列內，變值之任何大小，均可包括在內，例如在重量與年齡之分配中，任何大小，均屬可能．在間斷數列中，祇有等級之分，例如美國公立學校學生之分配，不能含有分數也．

此集中之趨勢,在次數分配上形成一峯.此峯之定位,或集中點,爲分配之一特性，而可測量者. 下圖所示之二個分配，性質完全相同,但其在量表上之集中點,則地位不同.

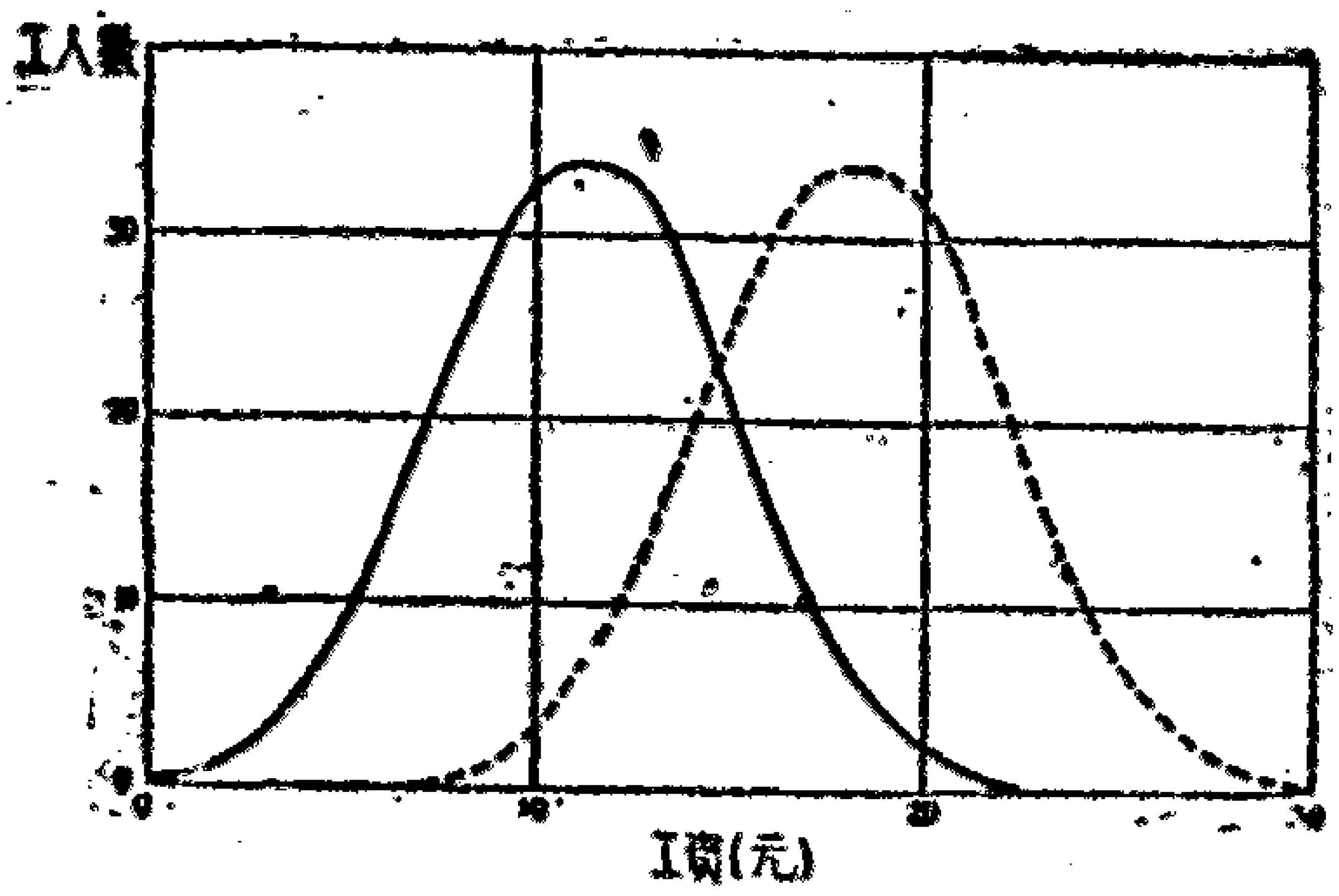


圖 6. 兩家工廠工資之假定分配

一羣數值集中於一點之趨勢,可使吾人得到一個模範數值,用以形容一羣之材料.此集中點或模範數值,稱爲平均數.

離勢

圖7所示之分配，其性質相同.但曲線 a 各項目之值，其變化較曲線 b 爲大.此種差異之程度，曲線與曲線不同，而稱爲離勢. 故離勢之定義爲:數列中各項目大小之離差程度.

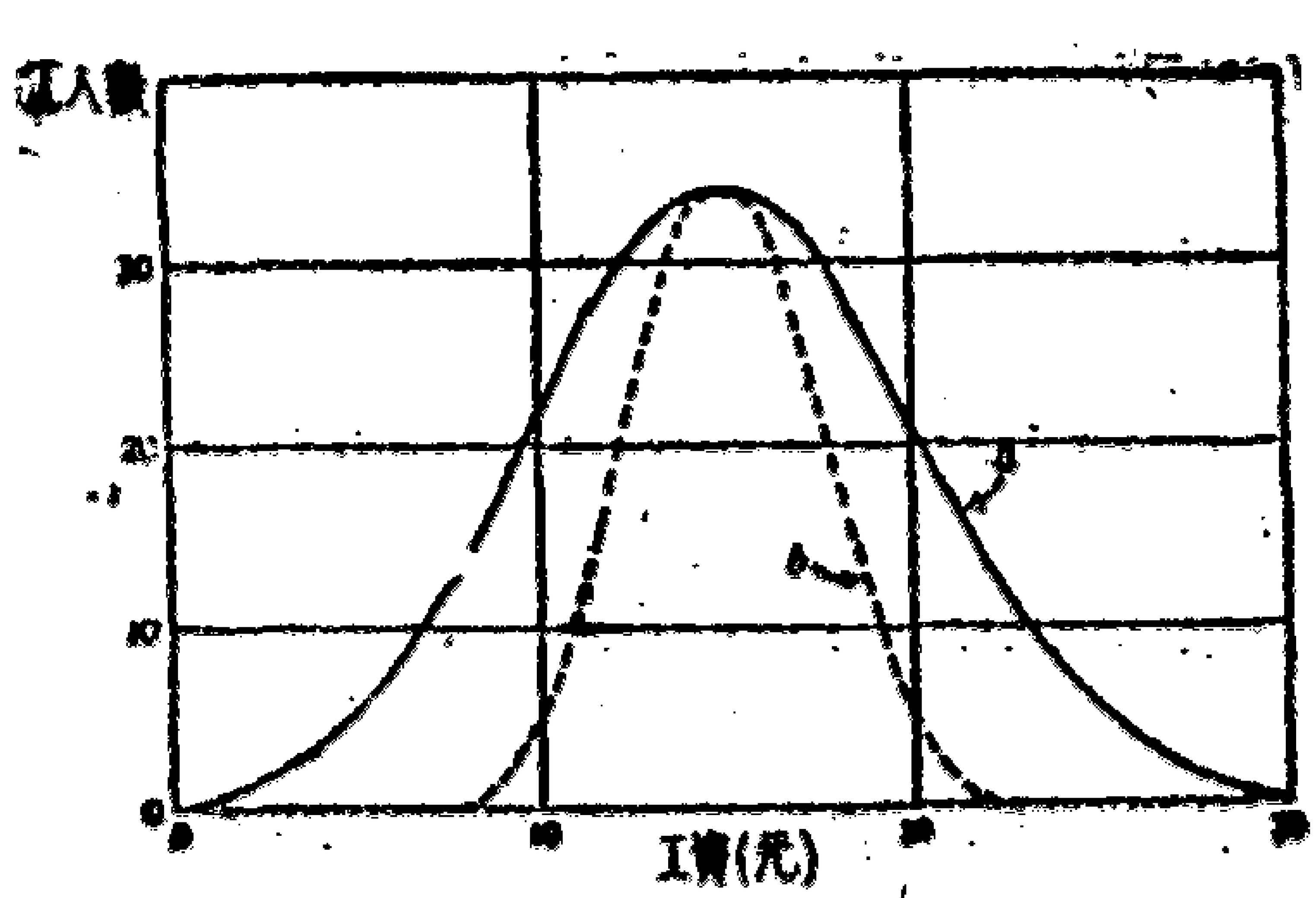


圖 7. 兩家工廠工資之假定分配

偏斜度

圖 8 兩分配不同；曲線 a 爲對稱者，而曲線 b 則非．對稱之缺乏，稱爲偏斜度．

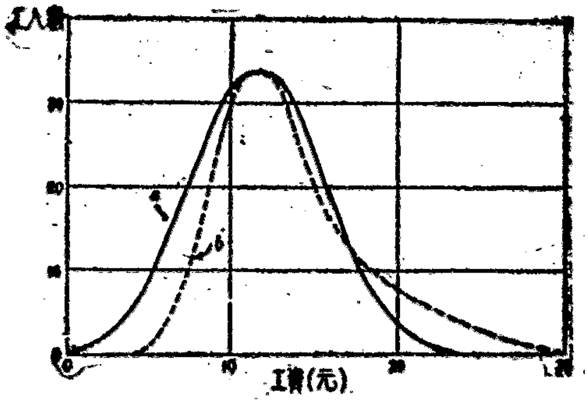


圖 8．兩家工廠工資之假定分配

峰度

圖 9 兩曲線之不同，在其'高峯'，此特性稱爲峰度．

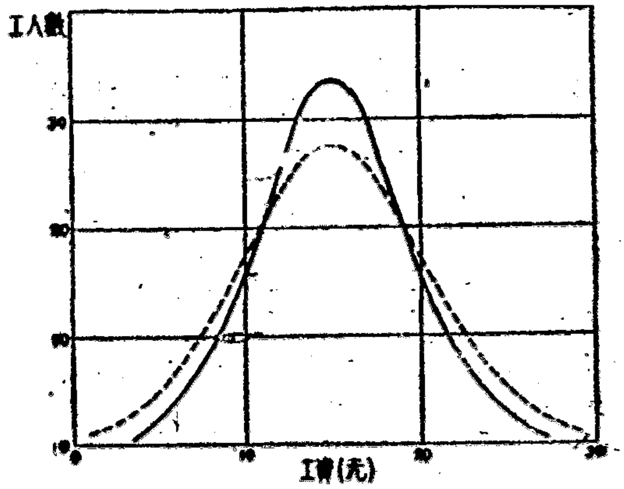


圖 9．兩家工廠工資之假定分配

材料來源：見表 2

參考書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 2–13, P. S. King & Son, London, 1907.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*. pp. 43–80. D. C. Heath & Co., New York, 1925.

Croxton, F. D. & Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 151–153. Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L. & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 3–12. McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R. & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis*, pp. 4–33. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Day. Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 36–47; 118–132, Macmillan Co., New York, 1930.

Fisher, R. A., *Statistical Method for Research Workers*, pp. 1–40, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1932.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 45–64. Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 1–8. Ginn & Co., New York, 1928.

Kelley, Truman L., *Statistical Method*, pp. 1–8. Macmillan Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 61–73; 74–96, Henry Holt, New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, Ch. I. Century Co., New York, 1925.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 14–27, D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Richardson, C. H., *An Introduction to Statistical Analysis*, pp. 15–41, Harcourt, Crace & Co., New York, 1934.

Rietz, H. L. (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 20–23. Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

Riggleman, John R. & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 101–131, McGraw-Hill Book Co., New York, 1932.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 4–26, 74–81, Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

Sutcliffe, William C., *Statistics for the Business Man*, pp. 1–16, Harper & Bros, New York, 1930.

Zizek, Frank, *Statistical Averages*, pp. 7–24. Henry Holt & Co., New York, 1930.

第　二　章

次數分配之分析

集中趨勢——算術平均數

集中趨勢之量數——平均數

平均數爲一模範值，用以總括或形容一羣之材料．同時平均數亦可作爲測量或評定極端或特殊數値之基數．平均數爲確定集中趨勢位置之一量數．

平均數之種類

平均數之最重要種類爲：

1. 算術平均數　　　　（在第二章討論）
2. 中位數　　　　　　（在第三章討論）
3. 衆數　　　　　　　（同　　上）
4. 幾何平均數　6 調和平均　（同　　上）
5. 均方根平均數　　　（同　　上）

算術平均數

算術平均數，計算容易，應用悠久，爲平均數中最通曉與最通用者．

算術平均數之計算方法

未分組之材料

一小羣個別項目之算術平均數，可將各項目相加，以其總次數除之而求得.

算術平均數之計算，可用公式表示如下*：

$$\overline{X}=\frac{\Sigma(X)}{N}$$

在上式

$\overline{X}$＝算術平均數

Σ＝'和'†之符號

X＝各個別項目

N＝N項目之次數

已分組之材料

若項目衆多，則用上述方法計算算術平均數時，工夫極大，且易致錯誤. 若項目再多，則加法問題，雖屬簡單，事實上可變爲不可能之事. 例如欲求四五千種項目之算術平均數，則此大量項目之正確加法，雖借加機之助，亦幾成不可能之事.

一個比較便利而有效之方法，是將材料分組，成爲次數分配，然

* 各教科書關於此公式，應用各種不同之符號如下：

(a) $M=\frac{1}{N}\Sigma(X)$

(b) $M=\frac{\Sigma(m)}{N}$

† 符號 Σ 爲一希臘文大寫字讀 sigma (讀式克馬).

後計算此分配之算術平均數.

表 3 之算術平均數, 係認定一種假說, 以資計算; 即: 每組距上下限所包含之數值, 均匀分配於該組之內*, 因之每組距內各項目之平均值, 與該組距之中點相符合.

完長法

每組之中點, 既然代表該組內各項目之平均值, 則以該組各項目之次數 (見表 3, 縱行 3, 次數行) 乘該組之中點, 即爲該組各項目之總值.

表 3. 應用完長法計算算術平均數

分組之材料

美國 261 城市在 1927 年 '眞實' 價值之稅率

(1) 每千元之稅率 (以元計) 組距	(2) 中點 (M.P.)	(3) 城市數 (次數)	(4) 次數×中點 (f)×(M.P.)
$ 4— 7.99	$ 6	5	30
8—11.99	10	15	150
12—15.99	14	46	644
16—19.99	18	68	1224
20—23.99	22	58	1276
24—27.99	26	32	832
28—31.99	30	22	660
32—35.99	34	10	340
36—39.99	38	2	76
40—43.99	42	2	84
44—47.99	46	0	0
48—51.99	50	1	50
		261	5,366

* 若組距不過大, 項目充足, 則假定與實際之差異必小, 而正確之結果, 可以求得.

故在表 3 之次數分配內，第一組之中點（$6），若以該組之次數(5)乘之，即得該組各項目之總值。各總值（表 3，縱行 4）相加，即得全體次數分配各項目之總值。其和以各項目之總次數除之，即得算術平均數。

上述方法，可用一普徧公式表出之：

$$\overline{X}=\frac{\Sigma(f\times M.P.)}{N}=\frac{5366}{261}=\$20.56$$

上述方法，稱爲冗長法，因次數多中點值大時，計算方法，極其繁冗也。

簡捷法

a. 單位差數法

觀察算術平均數之特性後，可以得到一個較爲簡單之方法。若平均數係由幾個個別項目計算而得（如下例），且每個項目與平均數之差數（距離）亦爲之求得，則此種總數之數和必等於零*

十個學生算術考試之分數

學生（號數）	分數（百分比	對平均數之差數 (x)
1	95%	15%
2	92	12
3	90	10
4	86	6
5	86	6
6	80	0
7	75	−5
8	72	−8
9	64	−16
10	60	−20
	總800%	0

* 英文字母 x 用作各項目對於平均數差異之符號。

$$\text{平均數}\quad \overline{X}=\frac{800\%}{10}=80\%$$

若選擇之點，非為算術平均數，則差數之和，必不等於零．例如在一數列內，90% 亦可選為假定之始點，其在技術上之名稱為**假定平均數**，並用符號 $\overline{Z}$ 以識別之．

學生 (號數)	分數 (百分比)	對假定平均數之差數 (k)
1	95%	+5%
2	92	+2
3	90	0
4	83	−4
5	83	−4
6	80	−10
7	75	−15
8	72	−18
9	64	−26
10	60	−30
	800%	−10 %

若各項目對假定平均數之平均差為之求得：

$$\frac{\Sigma(d)}{N}=\frac{-100\%}{10}=-10\%(\text{平均差})$$

再若將此值加於假定之始點($\overline{Z}$)上，則其結果即為算術平均數 *

$$\overline{X}=\overline{Z}+\frac{\Sigma(d)}{N}=90\%+\frac{(-100\%)}{10}=80\%$$

在上式

$\overline{Z}$＝假定平均數

d＝每個數值對假定平均數之差

N＝項數

* 關於數理證明，見專門附錄 I．

表 4. 算術平均數之計算——簡捷單位差數法

美國 221 家實業公司日常資金與日常負債之比率,1930 年

比率 (組距)	中點 (M.P.)	公司數 (次數)	差數 (d)	次數×差數 (fd)
0— 1.99	1	11	—4	—44
2— 3.99	3	53	—2	—106
4— 5.99	5	47	0	0
6— 7.99	7	37	2	74
8— 9.99	9	21	4	84
10—11.99	11	16	6	96
12—13.99	13	13	8	104
14—15.99	15	8	10	80
16—17.99	17	10	12	120
18—19.99	19	1	14	14
20—21.99	21	2	16	32
22—23.99	23	1	18	18
24—25.99	25	0	20	0
26—27.99	27	1	22	22
		221		494

材料來源: Moody's Investors Service, *Moody's Industrials*, 1931.

此技術可應用於已分組之材料上.關於上述分配(表 4),可以選定一個假定始點.任何數值,均可作爲始點,但爲便利計,以某組之中點爲宜.在上例中,係用5.00(表 4 第三組中點),爲假定平均數.每組各數對於假定平均數之差數,卽爲每組中點與假定平均數之差.每組中點旣爲該組各數値之平均値,則此値(d)自可代表該組各數對於假定平均數之平均差數.欲求每組各數之總差數,勢必以該組之次數(f)乘其差數(d),將各組所乘得之値相加,卽爲各値與假

定平均數之差總數，以 N 除之，即爲各值對於假定平均數之平均差，其結果如下：

$$\frac{\Sigma(fd)}{N}=\frac{494}{221}=2.24.$$

將上値加於假定始點（假定平均數）之上，即得眞正算術平均數*：

$$\overline{X}=\overline{Z}+\frac{\Sigma(fd)}{N}$$

$$\overline{X}=5.00+\frac{494}{221}=7.24$$

在上式

$\overline{Z}$＝假定平均數

f＝每組之次數

d＝每組中點對於假定平均數之差數

N＝項目總數

b. 分組差數法

次數算術平均數之計算，若細考此分配之特性，尙可再予簡化．

若分配具有同樣大小+之組距，則每組中點與其次一組中點之差數不變，且與組距之大小相符合．依照表 4 分配所示，中點與中點之差常爲 2，且此數等於各組之大小，例如 0 至 1.99．

故任何一組與其他組之差數，均可以組距之大小表示之．在下

---

* 關於此公式之數理證明，見專門附錄 I．

\+ 在可能時，此層可爲作編造分配之一般規．

例之分配中(表 5),第三組之中點(5.00)仍選爲假定平均數($\overline{Z}$).第一組中點對於假定平均數之差爲 −4,或 −2 組距.差數縱行(表 5,縱行 4),係以組距表示,而非用材料之原始單位表示.故差數行所得之數值較小,而算法亦較簡.

表 5. 算術平均數之計算——簡捷分組差數法

美國 221 家公司日常資產與日常負債之比率,1930 年

比率 (組距)	中點 ($M.P.$)	公司數 (次數)	差數 (d')	次數×差數 (fd')
0—1.99	1	11	−2	−22
2—3.99	3	53	−1	−53
4—5.99	5	47	0	0
6—7.99	7	37	1	37
8—9.99	9	21	2	42
10—11.99	11	16	3	48
12—13.99	13	13	4	52
14—15.99	15	8	5	40
16—17.99	17	10	6	60
18—19.99	19	1	7	7
20—21.99	21	2	8	16
22—23.99	23	1	9	9
24—25.99	25	0	10	0
26—27.99	27	1	11	11
		221		247

材料來源: Moody's Investors Service, *Moody's Industrials*, 1931.

$$\overline{X}=\overline{Z}+\frac{\Sigma(fd')}{N}C=5+\frac{247}{221}(2)=7.24$$

計算與前法相同,其結果爲各數對於假定平均數之差,$\frac{\Sigma(fd')}{N}$,

而用組距表示者．若爲之還原至原始數值，則此數應以組距之大小乘之．將其結果，加於假定平均數之上，即得算術平均數．

此方法，可用一普徧公式表示之：

$$\bar{X}=\bar{Z}+\frac{\Sigma(fd')}{N}C$$

在上式*

$\bar{Z}$＝假定平均數

f＝次數

d'＝對於假定始點之差數而用組距表示者†

N＝項目總次數

C＝組距之大小

特性

1．算術平均數之值，係從全分配之各個項目而決定．此爲由計算而得之平均數．

2．大受極端數值之影響．

3．對算術平均數之差數，其和爲零．

4．對算術平均數之差數之平方，其和較對任何一點之差數之平方和爲小．

5．其標準誤(見第七章)較中位數爲小．

6．常爲一固定數值．

---

* 此公式在各教科書中，有不同之寫法如下：

$$M=A-\frac{1}{N}\Sigma(f)C,\qquad A=E+\frac{\Sigma f(V-E)}{N}C,\qquad M=M'+C$$

† 此處用 d' 而不用 d；蓋表示用組距計算．

長處

1. 算術平均數爲最通用之平均數.

2. 爲最易了解.

3. 爲最普偏認識之平均數.

4. 其計算比較簡單.

5. 欲計算其值,祇須具有全分配之總值與各項目之總次數.

6. 可用代數法處理之.例如全分配各小組之平均數可以求得,則此平均數,可再予平均,以得到各組合併之平均數.倘各小組之次數不同,則宜求加權平均數*.

短處

1. 其數值常受極端量數之影響,而生極大之增減,因之不能爲一代表之數.

參考書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 82-86; 245-258. P. S. King & Son, London, 1907.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 81-105. Houghton Mifflin Co., New York, 1934.

Croxton, F. E. & Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 153-172. Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

* 加權平均數所用之各值,其重要性各不相同. 就上例言,各值之重要程度,以每組項目之次數爲斷. 關於加權平均數之詳細討論,見第十三章.

Crum, William L. & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp: 55–135; 151–168. McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George E. & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis*, pp. 33–38. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 134–139. Macmillan Co., New York, 1930.

Garrett, Henry E., *Statistics in Psychology and Education*, pp. 1–11, Longmans, Green & Co., New York, 1926.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics* pp. 95–110. Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 78–85. Ginn & Co., New York, 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 109–117. Harper & Bros., New York, 1924.

Kelley, Truman L., *Interpretation of Educational Measurements*, pp. 47–51; 148–151. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1927.

Kelley, Truman L., *Statistical Method*, pp. 44–53. Macmillan Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 97–119. Hemry Holt & Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 64–74. Century Co., New York, 1925.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 32–62, 66–76. D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Otis, Arthur S., *Statistical Method in Educational Measurements*, pp. 6–11; 35–51; 68–76. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois.

Richardson, C. H., *An Introduction to Statistical Analysis*, 43–53. Harcourt Brace & Co., New York, 1934.

Rietz, H. L. (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 23–24. Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

Riggleman, John R. & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 131–137. McGraw-Hill Book Co., New York, 1932.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 81–87; 97–100, 114–126. Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

Sutcliffe, Wiliam G., *Statistics for the Business Man*, pp. 64–69. Harper & Bros., New York, 1930.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 1–17; 67–77. Macmillan Co., New York, 1925.

Trabue, Marion R., *Measuring Results in Education*, pp. 96–126; 197–198; 245–238. American Book Co., New York, 1924.

Yule, G. Udny, *An Introduction to the Theory of Statistics*, pp. 75–105; 106–116. Charles Griffin & Co., Ltd., London, 1929.

Zizek, Frank, *Statistical Averages*, pp. 92–127; 138–193. Henry Holt & Co., New York, 1930.

第　三　章

次數分配——平均數(續)

中位數

定義

項目依其大小排列，其中間一項目之値爲中位數。倘項目之數爲雙數，則居中二項目之算術平均數爲中位數。

中位數爲位置上之平均數，而算術平均數爲由計算而得之平均數。

計算：未分組之材料

中位數可從未分組之材料計算之，其法如下：

1. 將項目依照大小排列，成爲一數序。
2. 將居中項目之値記下，卽爲中位數。若數序中各項目之數爲雙數，則中値有二，其平均數爲中位數。

計算：分組之材料

中位數可從分組之材料，用內推法計算之。項目之數，以$\frac{N}{2}$決定之(N＝項目之數)*。在以下分配中(表6)，中位數所在之項目爲第

* 含有中位數之項目之指定，有用$\frac{N}{2}$，有用$\frac{N+1}{2}$者，議論紛歧。若分配爲連續者，則應採用$\frac{N}{2}$，若分配爲間斷者，則應採用$\frac{N+1}{2}$。大半作者，均採用$\frac{N}{2}$，以求得中位數之地位。

75 位$\left(\frac{150}{2}\right)$.

所得之值，爲中位數所在之項目之位數. 至該項目之值，須用內推法求之.

依照假設各項目之值，均勻分配於組距最高限與最低限之間.

表 6，第三欄，項目 1 與 2 適位於第一組之內. 第二組另有 4 個數值，故項目 3 到 6，必落在該組之內. 用累積加法，繼續點數，直至數到含有中位數之一組爲止.

依表 6 之例，中位數所在之項目（第 75 位），適位於第 10 組 (70－74.9%).

表 6. 中位數之計算

紐約城某中學校簿記學考試之分數

(1) (組距數)	(2) 分數(百分數) (組距)	(3) 學生數 (次數)	(4) 累積次數
1	25—29.9%	2	2
2	30—34.9	4	6
3	35—39.9	5	11
4	40—44.9	9	20
5	45—49.9	8	28
6	50—54.9	7	35
7	55—59.9	8	43
8	60—64.9	4	47
9	65—69.9	14	61
10	70—74.9	18	79
11	75—79.9	24	103
12	80—84.9	21	124
13	85—89.9	14	138
14	90—94.9	7	145
15	95—99.9	5	150
		150	

第 61 項目居該組之最低限，第 79 項目居該組之最高限. 第 75 項目之值或中位數項目之值，可用簡單內推法求得之.

中位數值之內推法

	數 值	項目之數位	
最低限	70%	數位	61
內以求得所對之值.	?	數位	75 其值卽所需要者
最高限*	75%	數位	79

1. 決定次數欄所需距離之一段.

$$\frac{\text{組內所需之項目數}}{\text{組內項目之全數}}=\frac{(14)}{(18)}=\frac{i}{f}$$

2. 將組距欄與次數欄第 61 與 75 項目間相當之值，加於最低限之上. 因之將 $\frac{i}{f}C$ 或 $\left(\frac{14}{18}\right)(5\%)$ 加於含有中位數組之最低限上.

$$\text{中位數}=L_{me}+\frac{i}{f}C=70\%+\left(\frac{14}{18}\right)(5\%)=73.89\%$$

特性

1. 中位數為一排列上之平均數.

2. 中位數受項目之數之影響，不受極端值之大小之影響.

六個學生在三種考試上之理想分數

學生號數	考試 1	考試 2	考試 3
1	50	50	50
2	51	51	51
3	52	52	52
4	54	54	54
5	58	100	58
6	—	—	100
中位數	52	52	53
算術平均數	53	61.4	60.8

* 74.9 之一組之精密寫法，應為 74.9999. 但為實用便利，可寫 75.

考試2第五個分數由58變爲100但不影響中位數之值，而算術平均數之值，則受其影響. 但在考試3上加一分數 則中位數與算術平均數之值，同受影響.

3. 各量數對於中位數相差之和，若不計及符號（一律作爲正號），較對於任何點相差之和爲少.

4. 數列之中間各數值密集時，中位數最爲富有代表性.

5. 任機選一數值，其落在中位數以上與落在中位數以下之機率相同. 故中位數有時稱爲'機率'值.

長處

1. 中位數計算容易.

2. 中位數不爲非常數值所動搖.

3. 中位數以其對於非常數值不受影響，故富有代表性.

4. 分配兩端雖爲'無制限'時（即特殊項目，歸入'及以上'或'較小於'各組內），中位數仍可計算.

短處

1. 中位數不若算術平均數之爲一般人所認識.

2. 欲計算中位數，其項目必須依大小排列.

3. 中位數之標準誤與機誤較算術平均數爲大（見第十三章）.

4. 中位數不能以代數法處理之. 例如，各小組之中位數，不能爲之平均因而求得全體之中位數.

四分位數，十分位數，百分位數

四分位數將分配分爲四部分 十分位數將分配分爲十部分，百

分位數將分配分為百部分，此與中位數將分配分為二部分相同．以上位置平均數，能使分配得到更細微之分析．

因四分位數將分配分為四部分，故共有三個四分位數．第二四分位數將分配分為兩半，故與中位數相同．第一(下)四分位數(Q_1)將分配之第一四分位數畫出．第三(上)四分位數(Q_3)，將第三四分位數與第四四分位數畫開．

百分位數將分配分為100部分，每一部分包含項目百分之一．應用此種精微分法，最好有極多項目，最少應有一千，否則每部分項目太少，不能發生意義．因之，百分位數中祇有幾種，常經應用者，如第五、第十、第二十五、第七十五等．

決定四分位數，十分位數，百分位數之技術，與計算中位數之技術相同．決定四分數時用$\frac{N}{4}$，決定十分位數時用$\frac{N}{10}$，決定百分位數時用$\frac{N}{100}$．欲得到含有第一四分位數之項目處，可用$\frac{1}{4}N$或$\frac{N}{4}$．欲得到含有第三四分位數之項目處，可用$\frac{3}{4}N$或$\frac{3N}{4}$．第一之十分位數用$\frac{N}{10}$．第二之十分位數用$\frac{2}{10}N$或$\frac{2N}{10}$，餘類推．第五之百分位數用$\frac{5}{100}N$．第十之百分位數用$\frac{10}{100}N$或$\frac{10N}{100}$，等．若用以下公式代替，

$$L+\frac{i}{f}C$$

則所得之值相同．在以上公式內，L為含有四分位數，十分位數，百

分位數各組之低限。

表5所載221家公司日常資產與日常負債之比率分配，其第九之十分位數為14.225%，表示祇有10%公司其比率大於14.225%，而90%公司其比率均較此為小。

衆數

定義

衆數為發現最多或最普通之值，但須有充足項目，使能得到一均勻之分配。

倘次數分配能合理想標準或能均勻，則衆數之值，與分配之最高點（或縱線）相當。

計算

衆數之精密與數理計算，為不可能事。但有幾種方法，可用之以求其相當精確之近似數。

衆數組之中點值，不能作為衆數值，因組距之大小一變，此值即隨之而變。

若將組距縮小，則可限制衆數之值，並可使其多多與次數最大組之中點值相符合。但組距縮小，必受分配中項目多少之影響。倘有無限項目，且組距為無限小時，則次數最大組距之中點，即為衆數之值。

實際上此種理想情形並不存在，故祇須求一數值較衆數組之中點為近似者。

每組數值，均勻分配於該組之內，此假設前已論及，但實際上數值實有將重心移於密集點之趨勢。

在表 7 之分配上，衆數組為 .10% 至 .19% 之一組，其次數為 43. 其上一組，.20% 至 .29% 之次數為 32，而下一組，.00% 至 .09% 之次數為 19，則上組項目較下組為大；因之，眞正密集點，有移向上組之趨勢而居於衆數組中點之上.

應用以下公式，可以得到較為近似之衆數值：

$$\text{衆數} = L_{mo} + \frac{f_a}{f_a + f_b} C = .10\% + \frac{32}{32+19}(.10\%) = .163\%$$

在上式：

L_{mo} = 衆數組之低限

f_a = 大於衆數組之一組之次數

f_b = 小於衆數組之一組之次數

C = 組距之大小

表 7. 用動力差法計算衆數

養老金人口之百分比，依州分類，193 年.

(組距) 百分比	州數 (次數)
.0 — .09%	19
.1 — .19	43
.20 — .29	32
.30 — .39	27
.40 — .49	17
.50 — .59	21
.60 — .69	14
.7 — .79	9
.8 — .89	2
.9 — .99	2
1. — 1.09	0
1.1 — 1.19	0
1.2 — 1.29	1
	187

材料來源: United States Bureau of Labor Statistics, *Handbook of Labor Statistics*, Bulletin 451, 19 1. pp. 483—487.

以上方法，有時稱爲動力差法.

經驗法

當分配祇爲略略偏態時，衆數值可從算術平均數 中位數及衆數之關係上求得.

在修勻曲線上(如圖 10 所示)，衆數落在分配之最高點，中位數地位約在衆數之右，傾向於高值之方向並將曲線下之面積分爲兩部分. 算術平均數受極端值之影響最大，故在一理想右偏態分配上，其位置在最近於高值之一方.

根據經驗所得，在一略略偏態分配上，算術平均數與中位數間之距離，占算術平均數與衆數間距離之三分之一.

在一左偏態分配上，同樣關係存在，但方向適相反.

因算術平均數與中位數之值可以精確決定，故衆數之值可從上述關係中約略求得之.

衆數＝算術平均數—3(算術平均數—中位數)

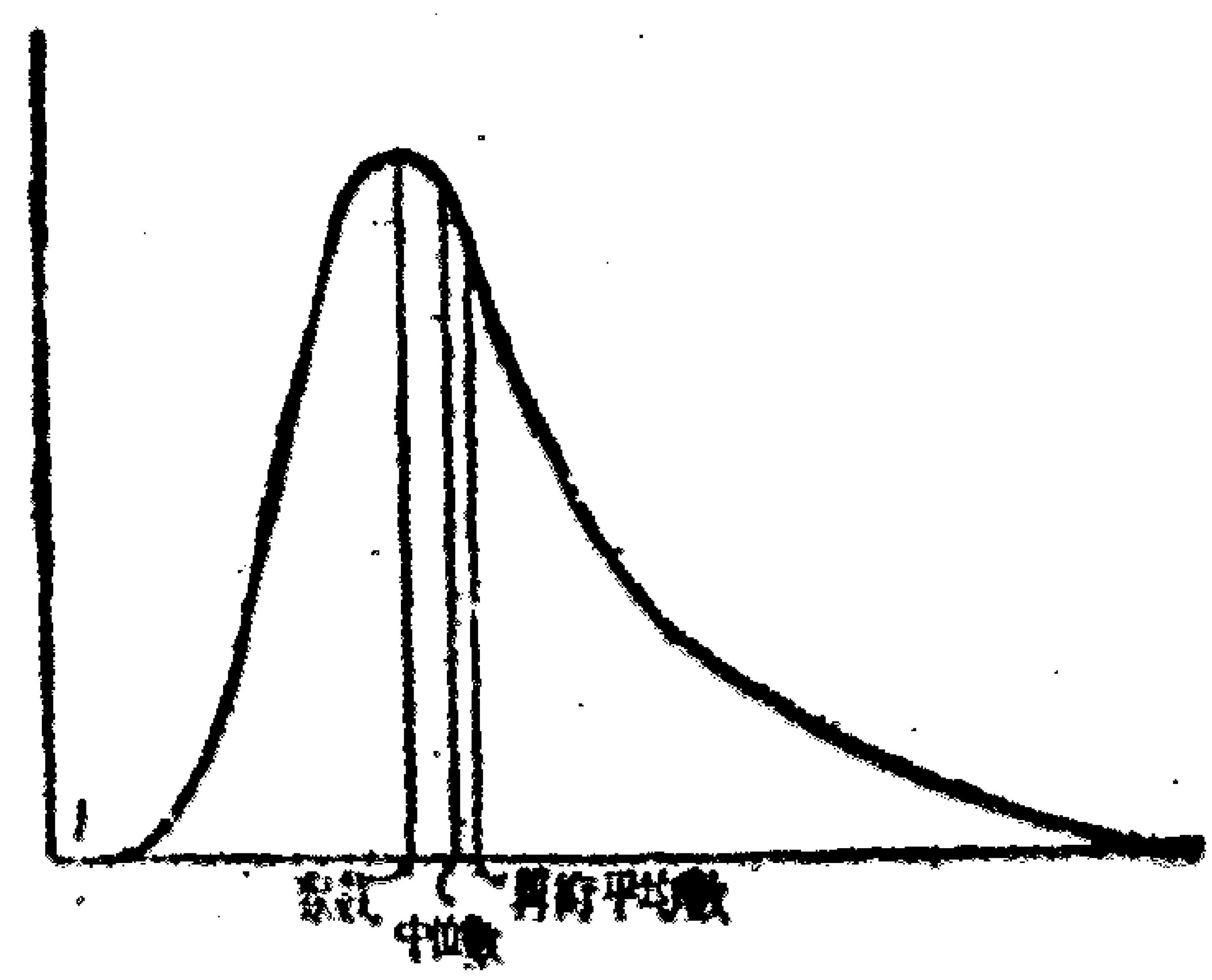


圖 10. 理想右偏態分配，顯示衆數，中位數與算術平均數之理論地位

衆數值之估計可用若干其他方法決定之，如*：

1. 歸納法.
2. 次數分配修勻法.
3. 移動平均數法.
4. 數理曲線法.

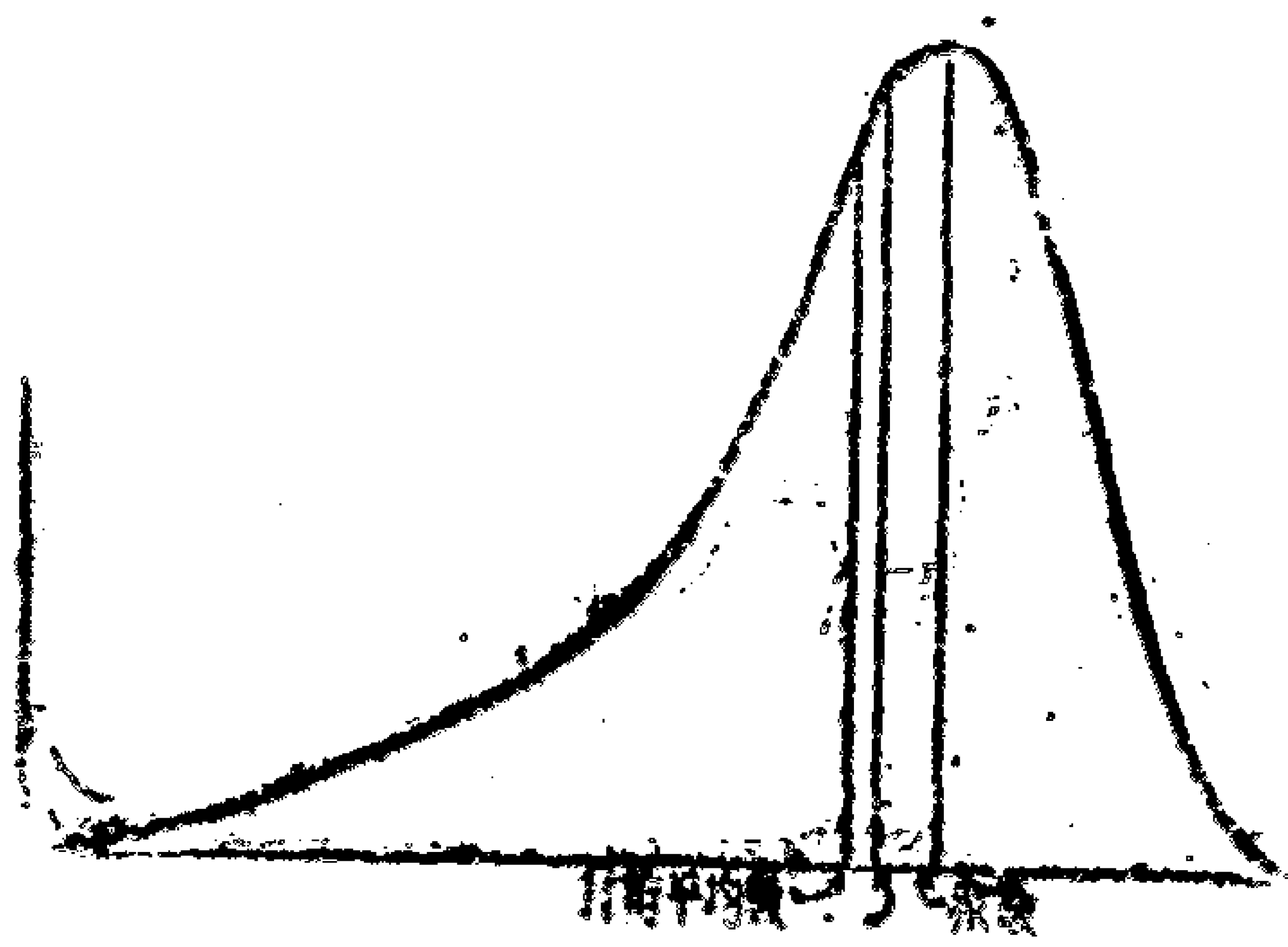


圖 11. 理想左偏態分配，顯示衆數，中位數與算術平均數之理論地位

衆數

特性

1. 依定義衆數爲最多或最足代表之數値. 在某種情形之下，衆數可視爲'常態'之數値.
2. 衆數之數値完全不受極端量數之影響.
3. 衆數爲一位置平均數.

長處

1. 爲一最足代表且爲一最能形容之一平均數.

---

* 決定衆數値之其他較爲高深方法，在第四章詳述之.

2. 項目不多時,可用觀察法簡單估計之.

3. 項目不多時,無序列數值之必要.

短處

1. 祇有少量材料存在時,衆數可約略求得.

2. 若無大量數值,則其意義有限.

3. 項目太少,則衆數或不存在,因其中或無一數值重複者.

幾何平均數

幾何平均數爲 n 數值之乘積之 n 次方根.

公式:

$$G_m=\sqrt[n]{X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot\cdots\cdots X_n}$$

例如 \$1, \$3 與 \$9 之幾何平均數爲

$$G_m=\sqrt[3]{1\times3\times9}$$

$$=\sqrt[3]{27}$$

$$=\$3$$

爲計算便利起見,幾何平均數之公式,可簡化爲對數式.

$$\log G_m=\frac{\log X+\log X_2+\log X_3+\cdots\cdots\log X_n}{N}$$

在上式

G_m=幾何平均數.

故閱以上公式,可知幾何平均數之對數,等於各數項之對數之平均數.

材料歸類時,計算幾何平均數之技術與計算算術平均數之技術相同(見表 3),其不同之處,即組中點值,係用對數,而不用實數.

特性

1. 幾何平均數爲由計算而得之數值，故受數值大小之影響.
2. 其受極端數量之影響，較算術平均數爲小.
3. 在任何數列上，幾何平均數常較算術平均數爲小.

長處

1. 幾何平均數，因少受極端量數之影響，較算術平均數多含代表性.
2. 可用代數法處理之.
3. 計算指數，其效用特大(見第十三章).

短處

1. 幾何平均數，知者極少.
2. 幾何平均數，計算時比較困難.
3. 數列中有負數或項目中有一零數時，幾何平均數不能決定之.

均方根平均數

均方根平均數爲各項目平方之平均之平方根(均方根).

公式:

$$Q_m=\sqrt{\frac{\Sigma(X^2)}{N}}$$

均方根平均數可用以計算標準差(見第四章標準差計算法)

調和平均數

調和平均數爲各數值之倒數之平均數之倒數.

公式:

$$\frac{1}{H_m}=\frac{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}\cdots\cdots+\frac{1}{X_n}}{N}$$

調和平均數用爲求比率之平均.

參考書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 86–109. P. S. King & Son, London, 1907.

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 36–42. D. C. Heath & Co., New York, 1931.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 107–148. Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E. & Cowden D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 176–202. Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L. & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 169–181. McGraw-Hill Co., New York, 1925.

Davies, George R. & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis*, pp. 38–57. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 140–162. Macmillan Co., New York, 1930.

Garrett, Henry E., *Statistics in Psychology and Education*, pp. 11–16. Longmans, Green & Co., New York, 1930.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 112–121. Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 85–96. Ginn & Co., New York, 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 117–135. Harper & Bros., New York, 1924.

Kelley, Truman L., *Interpretation of Educational Measurements*, pp. 185–188. World Book Co. Yonkers, New York, & Chicago, Illinois.

Kelley, Truman L., *Statistical Method*, pp. 54–68. Macmillan Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 119–146. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 75–114. Century Co., New Hork, 1925.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 77–114. D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Otis, Arthur S., *Statistical Method in Educational Measurements*, pp. 11–19. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois.

Richardson, S. H., *An Introduction to Statistical Analysis*, pp. 53–71. Harcourt, Brace & Co., New York, 1934.

Rietz, H. L. (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 25–27. Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

Riggleman, John R. & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 137–149. McGraw-Hill Book Co., New York, 1932.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 100–114; 126–147. Houghton Mifflin Co., New York, 1927.

Sutcliffe, William G., *Statistics for the Business Man*, pp. 69–76. Harper & Bros., New York, 1930.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 76–85. Macmillan Co., New York, 1925.

Trabue, Marion R., *Measuring Results in Education*, pp. 201–209; 216–225. American Book Co., New York, 1924.

Yule, G. Udny, *An Introduction to the Theory of Statistics*, pp. 116–129. Charles Griffin & Co., Ltd., London, 1929.

Zizek, Frank, *Statistical Averages*, pp. 194–247. Henry Holt & Co., New York, 1930.

第 四 章

次數分配——離勢與偏斜度

離勢

平均數或模範數之二端離勢程度若不明瞭，則其效用甚小．

若集中趨勢數值二端之離勢爲極大，則此數值頗乏代表性．故平均數四周之離勢，應有一定數量表示之．

全距

全距，即離勢數量之最簡單者，爲數列中最小與最大項目之差．故有時即以最小數值與最大數值之差，爲表示全距之方式．

此二數值之差，固足略示數列中離勢之程度，但其結果，常致誤會．

以下數列 A 與 B，其全距同爲 30%，但其離勢情形，則不相同．

十個學生之假設考試分數

	百分比分數	
學生學號	考試 A	考試 B
1	60%	60%
2	60	65
3	61	70
4	63	72
5	65	75
6	65	78
7	66	80
8	67	85
9	68	85
10	90	90

特性

1. 全距簡單而易明瞭.

2. 易於計算.

3. 其數值祇由於二個項目而定，即最高數值與最低數值.

4. 欲求全距之數值，二極端以外之數值，非爲必要.

5. 全距既由二極端數值而定，則此二數值，苟有忽大或突小者，全距必大受影響.

平均差

全距值既由二極端數值而定，則欲得一適當之離勢數量，應使數列中每個數量之地位，均能發生影響.

欲決定數列各數值對於某點之離勢(卽靶子中各射點之離勢)，必求各數項對於某點之平均距離(若以靶子爲例，此點卽爲其正鵠)．各數值對於此點之平均距離愈小，則各值之離勢愈小．在一次數分布上，各數值對於集中趨勢，如算術平均數之數量，卽可用爲離勢數值.

但算術平均數二端差數之和爲零，欲得其平均數，則不能計及符號.

此離勢之數量，稱爲**平均差**．卽各數項對其平均或中位數之差數之平均.

平均差

特性

1. 平均差之數值係由數列中各個項目之值而定.

2. 平均差可從算術平均數或從中位數計算而得.

表 8. 紐約某百貨商店第 148 號夥計在 1932 年六月之推銷紀錄

日期		推銷件數 (X)	對於按 平均數之差 (x)
六月	1	15	11.85
	2	7	.15
	3	31	4.15
	4	27	.15
	6	23	3.85
	7	23	3.85
	8	25	1.85
	9	31	4.15
	10	29	2.15
	11	41	15.15
	13	17	9.85
	14	30	3.15
	15	45	18.15
	16	24	2.85
	17	26	.85
	18	26	.85
	20	23	3.85
	21	15	11.85
	22	37	10.15
	23	27	.15
	24	18	8.85
	25	39	12.15
	27	19	7.85
	28	18	8.85
	29	21	5.85
	30	41	13.15
總數		[illegible]	165.70
平均		26.85	6.37

3. 從中位數計算而得之平均差其值爲最小。

平均差之計算法——未分組之材料

公式:

$$MD=\frac{\Sigma|x|}{N}\text{或}\frac{\Sigma|d|}{N}$$

在上式

MD 爲平均差

$\Sigma|x|$ =各數值對於算術平均數之差之和，而不計及符號.

$\Sigma|d|$ =各數值對於另一集中趨勢量數之差之和，而不計符號.

平均差可從算數平均數或中位數計算而得. 從中位數計算而得者，其數值較從算術平均數或任何數值計算而得者爲小.

計算法——已分組之材料

次數分配之材料已經分組後，平均差之值可從下法決定之:

1. 求每組中點與中位數（或算數平均數）之差數.

2. 以各組之次數乘其相當之差數.

3. 以總次數除所得之總值.

更簡單之方法（從算術上言）爲:

1. 選擇一個假定始點.

2. 求得各組中點與此簡便數值之差數. 假定始點之地位，即爲含有中位數（或算數平均數）之組之中點. 求各組中點與此始點之差（見表9之d'），而以各該組之組次數乘之（第三欄）.

在舉例之分配中，組中點(73)用作假定始點，而中位數(73.052月)位於此始點之上; 故適當於此點及在此點以下之各差數，均屬

表 9. 平均差之計算

紐約城小學一年級上學期學生之年齡

(1) 年齡(以月計) 組 距	(2) 組中點 ($M.P.$)	(3) 學生數 (F)	(4) 對 $\bar{Z}$ 之差(d') (以組距計)	(5) 次數×差數 (fd')
68—69.9	69	12	2	24
70—71.9	71	33	1	33
72—73.9	73	57	0	0
74—75.9	75	25	1	25
76—77.9	77	9	2	18
78—79.9	79	4	3	12
80—81.9	81	6	4	24
82—83.9	83	2	5	10
84—85.9	85	0	6	0
86—87.9	87	0	7	0
88—89.9	89	2	8	16
		150		162

太小，其所小之值為 73 與 73.052 二數之差，即 .052 月(以單位計)或 .026（以組距計）. 此種較小之差數為 102(12+33+57) 個，故其較小總值，為 102 乘 .026（組距）之差數.

同樣假定平均點以上之各數值均屬太大，而其所大之值為上述之差數乘各數值之數，即 .026（組距）乘 48.

假定始點以下之 102 太小之數值，其中有 48 個數值適與太大之 48 個數值相抵銷，故剩下祇有 54 個數值，其差數均屬太小. 故以項目之總數除 54×.026 即為差數太小之平均值. 若以此校正數（平均值）加於假定始點上之平均差上，其結果即為平均差（以組距計）.

公式*:

$$MD'=\frac{\Sigma|fd'|}{N}+\frac{(N_S-N_L)c}{N}=\frac{162}{150}+\frac{(102-48).026}{150}=1.0894$$

在上式

MD'=平均差(以組距計).

N_S=較小各項目之次數.

N_L=較大各項目之次數.

c=假定原始點(中位數組或算術平均數組之中點值)與中位數或算術平均數之差數. 用組距表示之平均差,若以組距之單位數乘之,卽得用單位表示之平均差.

$MD=MD'\times c$,　　其中 c=組距之單位數,

---

* (a)此公式可簡寫如下:

$$M.D.=\frac{\Sigma(fd')+(N_S-N_L)c}{N}C$$

(b)此計算法係假定各值均集中於中位數組或算術平均數組之中點. 若假定各值均勻分配於該組之上,則可得較精確之數值. 下列公式可以採用(見 *Handbook of Mathematical Statistics*, H. L. Rietz, Editor, pp.29—31).

$$MD'=\frac{\Sigma fd}{N}+\frac{(N_a+N_b)c+fm(.25+c^2)}{N}$$

在上式

N_a=中位數組或算術平均數組以上或較大各項目之次數.

N_b=中位數組或算術平均數組以下或較小各項目之次數.

fm=中位數組或算術平均數組各數項之次數.

c=假定始點與中位數或算術平均數之差數.

MD 之眞正數值可用 c 乘 ML' 而求得之.

$MD=1.0894\times 2=2.1788$ 月

標準差

標準差爲從算術平均數而求得之平均差之特殊一種.其計算方法係求各數項對於算術平均之差數之均方根平均數(見第三章之均方根平均數).

故標準差爲對算術平均數之差數之均方根.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{N}}$$

在上式

σ =標準差.*

x =對於算術平均數之差數.

N=各項目之總次數,$\Sigma(f)$

計算方法——未分組之材料+

1. 求每個數值與算術平均數之差數.
2. 求差數之平方.
3. 取差數平方之總數之平均根.

計算方法——已分組之材料

若數列中之項目繁多,則應將材料依照次數分配分組,然後計算標差較爲便捷.

---

* 符號 σ 爲希臘文字母 Σ(sigma)之小寫.

+ 材料之未歸組者,可用一較便之之公式,即從普通標準差公式以代數法演繹之如下:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X^2}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

(見專門附錄 III)

表 10. 標準差之計算法——未分組之材料——十二家聯合股分地產銀行債券在 1934 年四月十八日之喝價

銀行	率(百分比)	喝價(X)	對於算術平均(70.5)之差數 $(X-\bar{X})$ x	x^2
Atlanta	5%	71	0.5	.25
Burlington	5	65	−5.5	30.25
Chicago	5	41	−29.5	870.25
Dallas	5	80	9.5	90.25
Denver	5	73	2.5	6.25
Des Moines	5	78	7.5	56.25
Fort Wayne	5	71	.5	.25
First Carolinas	5	69	−1.5	2.25
First Texas	5	71	.5	.25
Lincoln	5	79	8.5	72.25
Louisville	5	75	4.5	20.25
New York	5	73	2.5	6.25
總計		846	0	1155.00
算術平均數		70.5		96.25

材料來源: *Wall Street Journal*.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{N}}=\sqrt{96.25}=9.81$$

1. 每組中點對於算術平均數之差數，用為該組各項目對於平均數之平均差數.

2. 將每組之平均差平方之，以作差數之平方.

3. 以每組之次數乘平均差以求該組差數平方之總數.

4. 將各總數相加，即得全分配之總數.

5. 此總數用 N 除之，再開平方根即為標準差.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(x^2)}{N}}$$

表 11. 標準差之計算法——已分組之材料——完長法

美國 50,000 以上人口之 151 城市之逃稅百分比，1933 年

(1) 逃稅百分比(組距)	(2) 組中點 ($M.P.$)	(3) 城市數 (f)	(4) 於算術平均數(28.26)之差數 (x)	(5) (x^2)	(6) $f(x^2)$
0—4.99	2.5	1	25.76	663.5776	663.5776
5—9.99	7.5	12	20.76	430.9776	5171.7312
10—14.99	12.5	19	15.76	248.3776	4719.1744
15—19.99	17.5	24	10.76	115.7776	2778.6624
20—24.99	22.5	19	5.76	33.1776	630.3744
25—29.99	27.5	19	.76	.5776	10.9744
30—34.99	32.5	16	4.24	17.9776	287.6416
35—39.99	37.5	15	9.24	85.3776	1280.6640
40—44.99	42.5	12	14.24	202.7776	2433.3312
45—49.99	47.5	8	19.24	370.1776	2961.4208
50—54.99	52.5	2	24.24	587.5776	1175.1552
55—59.99	57.5	0	29.24	854.9776	0
60—64.99	62.5	2	34.24	1172.3776	2344.7552
65—69.99	67.5	2	39.24	1539.7776	3079.5552
		151			27587.0176

材料來源：Dun & Bradstreet's Municipal Review.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(x^2)}{N}}=\sqrt{\frac{27537.0176}{151}}=13.50\%$$

簡捷法

標準差之計算法，可簡化如下：

1. 不用算術平均數，而用任何一點爲計算標準差之始點，故任何一組之中點均可用之，因從算術平均數而得之差數之均方根平均數較從任何一點而得之差數之均方根平均數爲小，故所得之數値

比眞正標準差爲小.

2. 以所得之數值減去一校正數,即得所需之結果. 校正數之數值可根據公式 $\sqrt{\frac{\Sigma f(x^2)}{N}}$ (見專門附錄 II)以代數法演繹求得之.

所得之公式爲

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(d^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

在上式

σ＝標準差

d＝每組中點對於假定組中點之差數.

若各組距之大小相等,則計算時可以組距代之,以求簡化,然後以組距之單位數乘所得之結果.

其公式可寫之如下:

$$\sigma=C\sqrt{\frac{\Sigma f(d')^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}$$

在上式

σ＝標準差

d'＝每組中點對於假定組中點之差而以組距表示之.

f＝每組之次數.

C＝組距之大小.

表 12 所載美國 249 家日報登載全國廣告每行最少價格之標準差可應用以上公式計算之.

表 12. 標準差之計算法——簡捷分組差數計算法

美國25,000至50,000人口之各城市計249家日報登載全國廣告每行最少之價格，1933年

(1) 每行價格(元)	(2) 日報家數 (f)	(3) 對$\overline{Z}$之差數 (以組距計) (d')	fd'	fd'^2
\$.01—.019	2	−5	−10	50
.02—.029	4	−4	−16	64
.03—.039	23	−3	−69	207
.04—.049	30	−2	−60	120
.05—.059	40	−1	−40	40
.06—.069	45	0	0	0
.07—.079	35	1	35	35
.08—.089	25	2	50	100
.09—.099	12	3	36	108
.10—.109	9	4	36	144
.11—.119	6	5	30	150
.12—.129	10	6	60	360
.13—.139	3	7	21	147
.14—.149	1	8	8	64
.15—.159	1	9	9	81
.16—.169	3	10	30	300
	249		120	1970

材料來源: Editor and Publisher, *International Year Book for* 1933.

$$\sigma = C\sqrt{\frac{\Sigma f(d'^2)}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}$$

$$= \$.01\sqrt{\frac{1970}{249} - \left(\frac{120}{249}\right)^2} \qquad = \$.01\sqrt{7.9116 - .2332}$$

$$= \$.01\sqrt{(7.6794)} \qquad = (2.7711)\$.01 = \$.0277$$

分組之校正數

用分組法所得之數值，受一種假定之限制，卽一切數值均集中於組距之中點，因而不免以組距之大少爲轉移。在下列二種情形時，其錯誤爲一常數：

1. 分配爲連續者（見第一章'次數分配之特性'附註 1）。
2. 分配向兩端逐漸縮小。

在此種情形時，標準差爲

$$\sigma^2=(\sigma'^2-\frac{1}{12})C^2$$

在上式：

σ' = 標準差以單位計算

C = 組距之大小。

計算法之覆檢——薛立愛氏覆檢法

計算標準差，在未用數字代入公式以前，可用一簡單查檢法以決定計算之精確。

若　$\Sigma f(d'+1)^2=\Sigma f(d'^2+2d'+1)$

$$=\Sigma f(d'^2)+2\Sigma(fd')+\Sigma(f)$$

但因　$\Sigma f=N$

$$\therefore\ \Sigma f(d'+1)^2=\Sigma fd'^2+2\Sigma(fd')+N$$

以上爲計算標準差時所需之數值。若公式兩方相等，則數值可視爲無誤。若將查校法適用於表 12 之問題上，則其結果爲：

表 12a. 薛立愛氏覆檢法——適用於表 12 之材料

(1) 每行價格 (元)	(2) 日報家數 (f)	(3) (從表 12) d'	(4) $d'+1$	(5) $(d'+1)^2$	(6) $f(d+1)^2$
\$.01—.019	2	−5	−4	16	32
.02—.029	4	−4	−3	9	36
.03—.039	23	−3	−2	4	92
.04—.049	30	−2	−1	1	30
.05—.059	40	−1	0	0	0
.06—.069	45	0	1	1	45
.07—.079	35	1	2	4	140
.08—.089	25	2	3	9	225
.09—.099	12	3	4	16	192
.10—.109	9	4	5	25	225
.11—.119	6	5	6	36	216
.12—.129	10	6	7	49	490
.13—.139	3	7	8	64	192
.14—.149	1	8	9	81	81
.15—.159	1	9	10	100	100
.16—.169	3	10	11	121	363
	249				2459

$$\Sigma f(d'+1)^2 = 2459 = \Sigma f d'^2 + 2\Sigma f d' + N$$

$$= 1970 + 2(120) + 249$$

特性

1. 標準差受每個數值之影響。

2. 極端量數之置重較平均差爲大，因計算標準差時，各數值均須平方之。

3. 在一常態或鐘形分配上，平均差爲 .7979 σ. 在一略略偏態分配上，此關係亦大致不差。

4. (a) 在一常態分配上，若從 X 軸算術平均數之一點，兩邊各量至一個標準差距離之處，則在以上指定限度之內，包括總數值之

68.26%.

(b) 若兩邊各量至二個標準差處，則所包括之數值爲 95.46%.

(c) 若兩邊各量至三個標準差處，則可包括之數值爲 99.73%.

以上百分比祇於分配爲常態時始能精確．若分配爲略路偏態，則百分比爲近似數值．因之，在此種情形時，若標準若爲一，則百分比之指示爲 68%左右；爲二，則爲 95%左右；爲三，則幾乎爲全體數值(99.7%).

從 X 軸算術平均數之一點，向一方面展開測量；則無論多少標準差所包括全體數值之百分比數，均載於表31中.

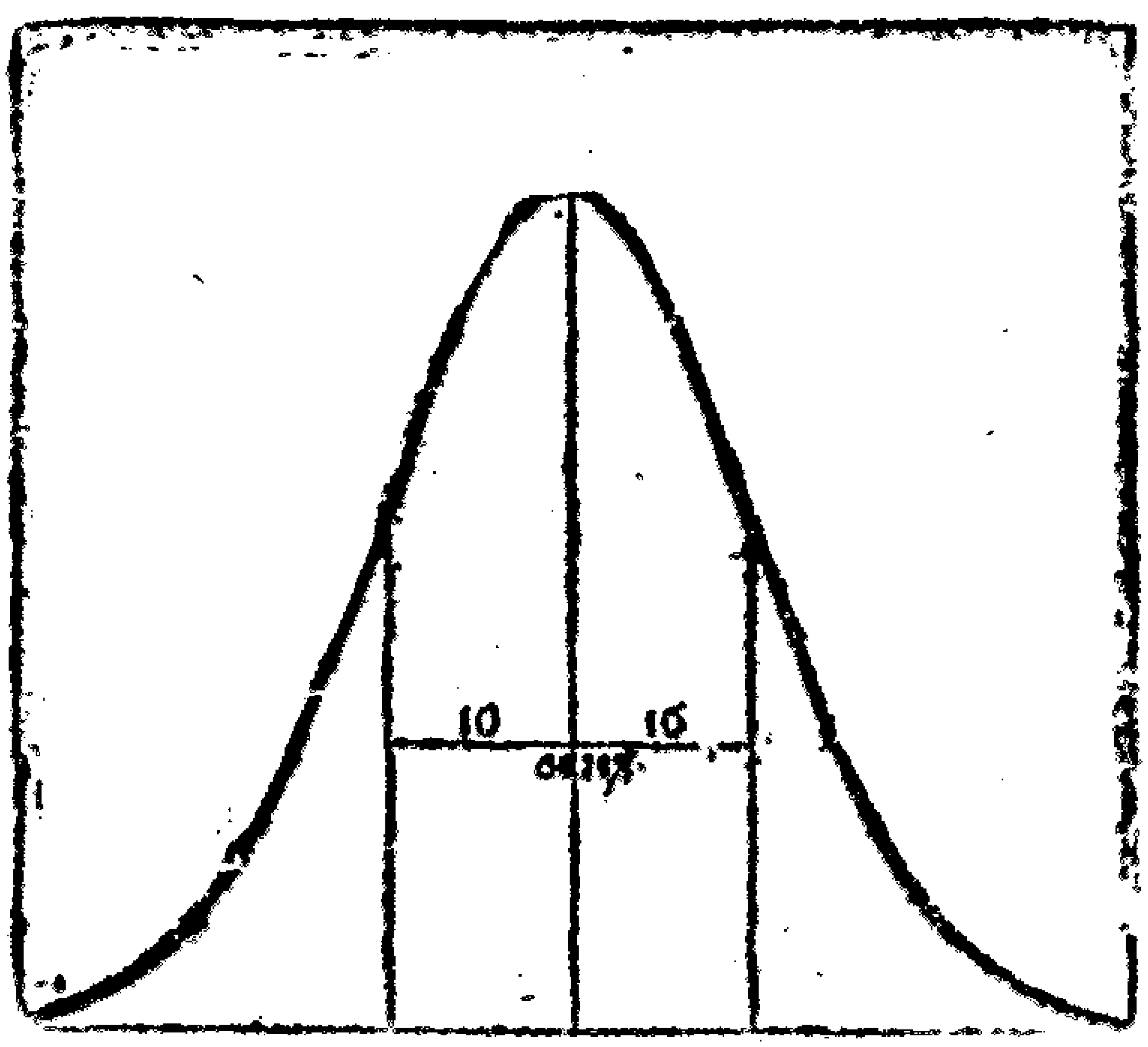


圖 12. 常態分配顯示算術平均數上下正負各一標準差內所包括全體面積之百分比數

5. 在一常態或略略偏態分配上，算術平均數兩邊各三個標準差，既然包括全體面積之 99.7%，則一個標準差約均爲全距之 1/6.

四分位差

當次數分配之離勢差增加時，四分位數間之距離隨之加大．因

所增加之離勢係用四分位數間之較大距離表示，則此距離卽可用作離勢之測量依據。

倘分配為完全對稱，則中間之二個四分位數各與中位數之距離為相等。

此兩個四分位數間距離之一半，卽代表任何一個四分位數之距離。此數值卽作為離勢之量數。

$$QD=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

在上式

QD＝四分位差

Q_3＝第三四分位數

Q_1＝第一四分位數

倘從第一與第三四分位數之中間一數，向任何一方面量一距離與 QD 相等，則在此限度內，含有全體數值之 50%此中間一點，以 K 表示之，祇分配為常態時，K 與中位數相符合。

10－90 百分位距

同樣，當分配之離勢增大時，各百分位數間之距離亦隨之增大。故任何二個百分位數間之距離，可用為離勢之量數。因之，第十與第九十兩個百分位數間之距離，常用之以達此目的。此量數卽稱為 10－90 百分位距。

$$10-90\text{百分位距}=P_{90}-P_{10}$$

此種離勢量數，常優於四分位數，以其所包括者為全體數量之 90%，而四分位差祇包括全體數量之 50%，且兩端 10%之特殊數

量，可爲之排出。

離勢之相對量數

以上所論列者，均爲離勢之絕對量數，因之所得數值常不能作有意義之比較．紐約某學校某班學生以月計之年齡標準差，不能與同班學生以百分計之智力商數標準差相比較，以其所用單位，各不相同。

再者離勢之量數，係以平均數爲根據而求得，故與其平均數之大小，亦應作一比較．例如某債劵之每股平均價格爲 10 元，其差數爲五元，而另一債劵之每股平均價格爲百元，其差數亦爲 5 元，此二差數之值自不相同。

欲求得離勢量數與平均數之關係，且化之爲百分式，標準差可以平均數除之．所得結果，係用百分數表示，故單位不同之困難，可以解決。皮爾生氏所演繹之公式，稱爲離勢係數(V)。

$$V_\sigma=\frac{\sigma}{\bar{X}}100$$

若用其他離勢量數時，則他種離勢係數，亦可計算。

$$V_{AD}=\frac{AD}{\text{中位數(或算術平均數)}}$$

$$V_Q=\frac{\frac{Q_3-Q_1}{2}}{\frac{Q_3+Q_1}{2}}=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$$

偏斜度

偏斜度爲解釋次數分配上離開對稱之程度之一名詞。

分配完全對稱，則算術平均數，中位數與衆數同在一點．分配不對稱或成爲偏態，則各種平均數數值，彼此差離．算術平均數，以其受極端量數之影響爲最大，故離開衆數最遠．衆數則不受特殊數值之影響；故偏斜之程度愈大，則算術平均數與衆數相隔愈遠．

因之，算術平均數與衆數間之距離可用作偏斜度之量數，蓋對稱之欠缺愈大，則此二數間之差離亦愈大．但偏斜之量數大都祗作爲比較之用，故單位不同之困難，再形發生．又各平均數間之距離，在一離勢較大之分配上爲較大，而在一離勢較小之分配上爲較小，此爲第二困難．此二種困難，均可以離勢量數除偏斜量數而祛除之．

$$S_K=\frac{\text{算術平均數}-\text{衆數}}{\sigma}$$

在略略偏態分配上，算術平均數與衆數間之距離爲算術平均數與中位數間之距離之三倍（見第三章衆數下經驗方法），因之在上述分配上，其公式可作以下寫法：

$$S_K=\frac{3(\text{算術平均數}-\text{中位數})}{\sigma}$$

分配常態時，算術平均數與衆數相符合．在此種情形下，偏斜係數則爲零．

若曲線爲右偏態，則極大數值，增高算術平均數值．其結果使算術平均數之數值大於衆數之數值，以後者不受極端數量之影響也．所得之偏斜係數爲一正數值．若分配向左偏斜，則極端數量必減小算術平均數之數值．此可使算術平均數數值小於衆數數值，而其結果爲一負數之偏斜係數．

又一偏斜度之量數係以四分位數之地位爲依據.在一對稱分配上,中間二個四分位數與中位數之距離相等.在一偏態分配上,則中間二個四分位數與中位數之距離不等.

對稱之欠缺愈大,則中間二個四分位數與中位數之距離,彼此相差愈大.此差數若以四分位差(以四分位數爲依據之離勢量數)除之,其結果爲偏斜係數.

公式:

$$S_K=\frac{(Q_3-\text{中位數})-(\text{中位數}-Q_1)}{QD}$$

上式所示之距離,在一對稱分配上相等,故 S_K 爲零.若分配爲右偏態,則右四分位數 Q_3 與中位數之距離較左四分位數(Q_1)與中位數之距離爲大.若分配爲左偏態,則其情形適相反.所得偏斜係數爲負數.

峰度

次數分配之'峯性'或峯度爲又一可以測量之特性.此特性之測量方法,在第五章簡述之.

參考書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 110–116, P. S. King & Son, London, 1907.

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementargy Statistics*, pp. 44–46, D. C. Heath & Co., New York, 1931.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 150–173. Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E. & Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 204–219. Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William, & Patton, Alston, *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 182–195. McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R. and Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 65–85, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 193–179. Macmillan Co., New York, 1930.

Garrett, Henry E., *Statistics in Psychology and Education*, pp. 16–53; 86–89. Longmans Green & Co., New York, 1926.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 128–152. Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 101–139. Ginn & Co., New York, 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 146–164. Harper & Bros, New York, 1924.

Kelley, Truman L., *Interpretation of Educational Measurements*, pp. 51–54; 151–155. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois 1927.

Kelley, Truman L, *Statistical Method*, pp. 70–82. Macmillan

Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 147–168. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 117–145; 281–285. Century Co., New York, 1925.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 115–141. D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Otis, Arthur S., *Statistical Method in Educational Measurements*, pp. 85–94. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1926.

Richardson, C. H. *An Introduction to Statistical Analysis*, pp. 77–95. Harcourt, Brace & Co., New York, 1924.

Rietz, H. L., (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 27–33. Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

Riggleman, John R. & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 175–187. McGraw-Hill Book Co., New York, 1926.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 149–178. Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 86–123. Macmillan Co., New York, 1925.

Trabue, Marion R., *Measuring Results in Education*, pp. 252–273. American Book Co., New York, 1924.

Yule, G. Udny, *An Introduction to The Theory of Statistics*, pp. 133-153, Charles Griffin & Co., Ltd., London 1929.

Zizek, Frank, *Statistical Averages*, pp. 251-338, Henry Holt & Co., New York, 1930.

第　五　章

時間數列分析 — 趨勢

定義

時間數列爲統計材料依照其發現之時間之排列.

變動之分類

時間數列之分析,爲統計材料在一定時間內,其各種變動之形容與測量.此種變動可分爲:

1. 長期趨勢,或材料在長期內所發生之增長或減退.時間之起訖,最少應包括十年之期.

2. 季節變動,或十二個月時間內多少有規律之變動.此變動年年發現,係爲常在變動之季節所致.

3. 循環變動,或一種由隆盛經減退而至沈降,再由復元而至隆盛之來復變動.此變動之時間,長度與強度各有變化.

4. 剩餘,意外,或隨藏變動,包括非常擾動,如戰爭、禍難、罷工、時尙或其他一時發生而不再見之因素.

趨勢之測量

測量趨勢,普通共有四種方法:

1. 隨手繪法.

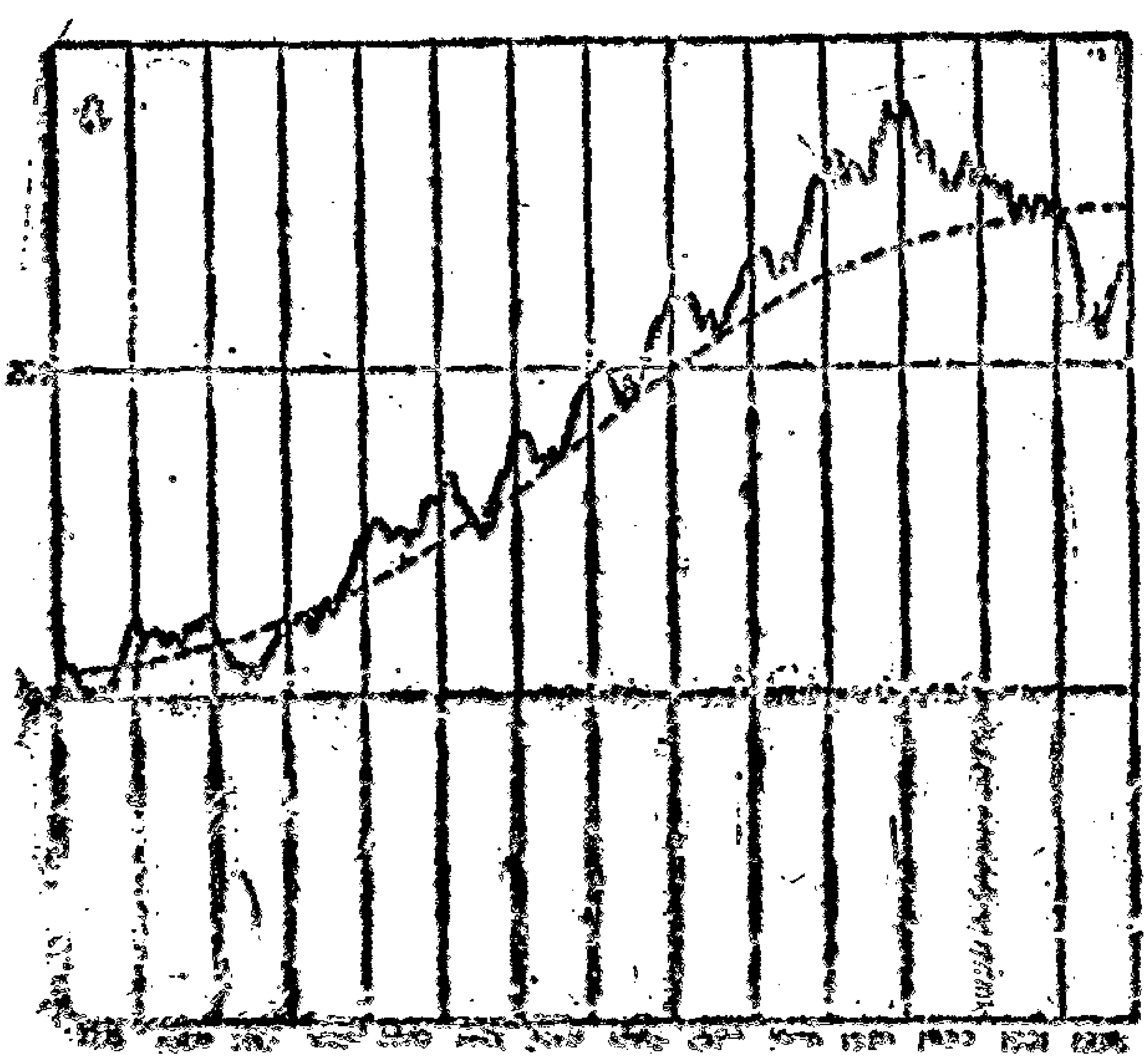
2. 半平均數法.

3. 移動平均數法.

4. '最小二乘法'(見第六章).

方法

1. **隨手繪法.** 用隨手繪法配合趨勢,須經過曲線畫一直線,使一視而知爲長期移動之方向,圖 13 卽示此種趨勢線之繪法.繪畫此線時不必嚴格用隨手繪法,而可用透明直邊或曲線板以助之.



材料來源: U. S. Geological Survey.

圖 13.美國 1910——1932 年每日平均發電量用隨手繪法指示趨勢

長處

1. 方法簡單.

2. 數理公式或反不足以形容趨勢,而此方法可用以替代,以補其不足.

3. 倘繪畫精密,此法所得之趨勢線,與用數理配合之趨勢線

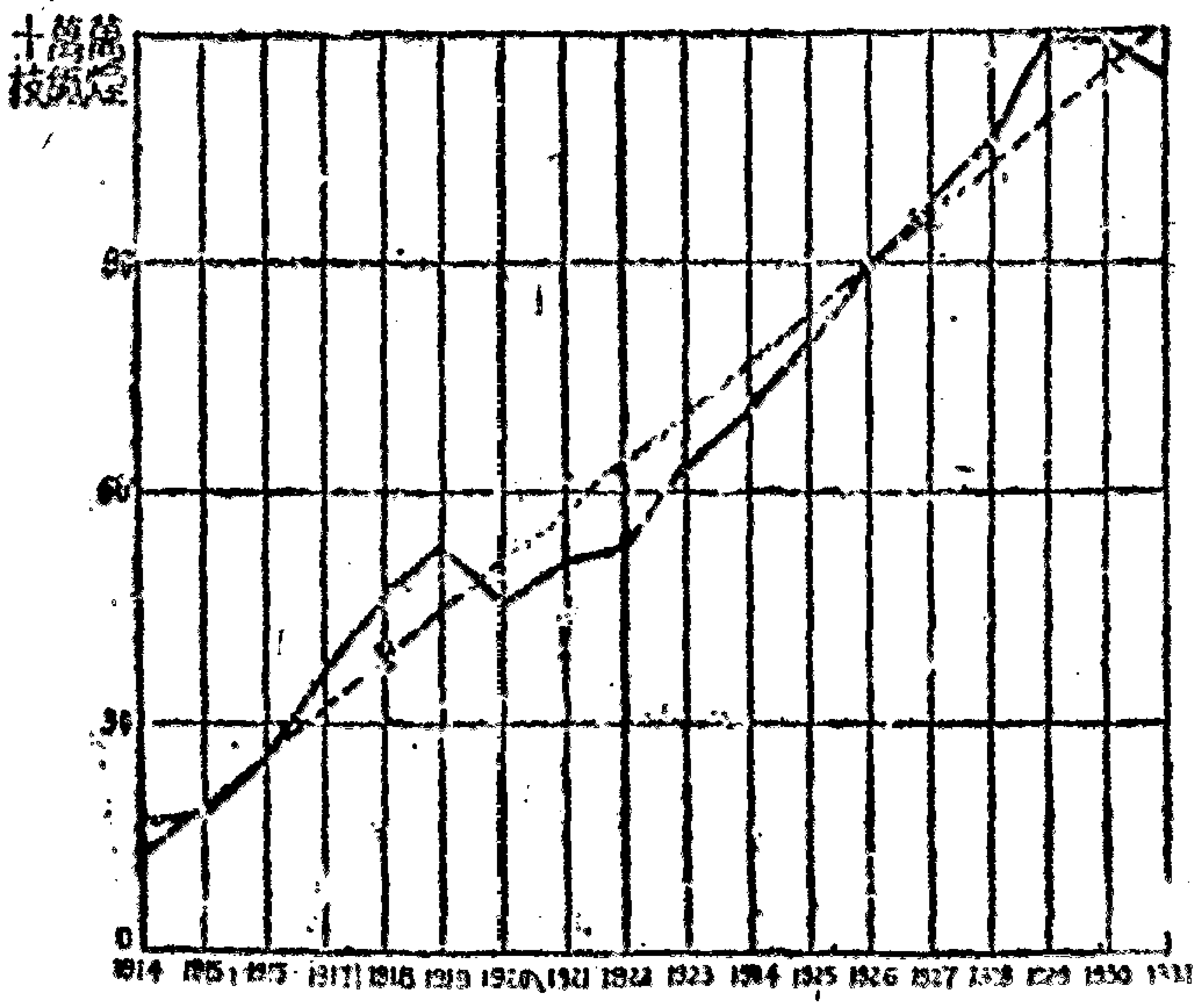
甚相近似.

短處

1. 所得結果因個別之估計而各不相同.

2. 欲得精良配合需要相當練習.

2. **半平均數方法**用此方法須將材料分爲二相等部分,然後將一半之數字相加平均之.所得平均數須各在相當期間之中點繪畫之.(見圖 14),然後經過二點作一直線.



材料來源: United States Department of Commerce.

圖 14——美國紙煙之消費,1914——1931年.用半平均數方法指示趨勢

在下示之例(表 13),材料平分爲二部分(1914—1922年及1923—1931年).從每一半部分數字所得之二數值(第一半部分爲 38.25,第二半部分爲 95.45),各畫在其相當時期之中點(第一組爲 1918年之中點,第二組爲 1927年之中點).用一畫尺,經過二點作一直線.

表 13. 趨勢之計算——半平均數方法

美國 1914——1931 年紙煙之消費

年分	消費 (十萬萬支紙煙)	總數	算術平均數
1914	16.81		
1915	17.93		
1916	25.29		
1917	35.33		
1918	46.66	344.28+9=	38.25
1919	53.12		
1920	44.62		
1921	50.87		
1922	53.57		
1923	64.45		
1924	70.01		
1925	79.96		
1926	89.45		
1927	97.18	8[illegible]9.8+9=	95.45
1928	105.92		
1929	119.04		
1930	119.62		
1931	113.45		

長處

1. 方法簡單,

2. 結果全爲客觀 卽不受個別估計之影響。

短處

1. 半平均數方法須應用算術平均數,而此平均數則大受極端

量數之影響．因之，半平均數趨勢線常爲特殊事變如罷工等所牽動，而越出其眞正地位．

2． 此方法原爲配合直線趨勢之用．

3． **移動平均數法．** 移動平均數法所討論者，爲用移動平均數修勻材料之變動以形容其趨勢．

移動平均數爲從一列項目中而求得之一列連續平均數，其求法將每組項目平均之後，將第一個項目捨去，而將該數列中之遞下一個項目加入再爲平均，而求得第二平均數．如下例所示，欲求三個項目之平均數，將前三個數字（3，5及7）相加（總數列入第二欄，與三個數字之中間一個數字相對）．然後數字（3）用該欄之遞下一數字代之（在本例爲10），如此類推，以至全數列每個數字，均經加入．每個總數均用3除之，再將結果列如第三欄．

(1) 數值	(2) 三個項目移動總數	(3) 三個項目移動平均
3		
5	15	5.00
7	22	7.33
10	29	9.67
12	36	12.00
14	41	13.67
15	46	15.33
17		

經濟上時間數列中因商業循環所致之變動，可以爲之除去或局部減少，卽在移動平均數中採入若干項目（年分），使之與材料所示之循環長度相等．如是則循環變動可以消除，而較好之趨勢量數可以得到．

表 14 顯示此種移動平均數在美國紙煙消費上之應用。此表說明配合移動平均之二種方法，一則項目爲奇數，一則項目爲偶數。奇數時期之移動平均法爲求得連續之總數(在本例爲 7 個項目)，而逐步捨去第一項目而加入數列中之次項目。本例(表 14)首先第七項目之總數爲239.84。此總和列入第三欄與該組之中間一數(1917年)相對。第三欄之第二數字 (273.85) 係由捨去 1914 年之數字而加入 1921 年之數字所得。繼續此法，直至第二欄之數字悉爲之包括在內爲止。第三欄之各數字，一一以 7 除之，以求七年平均數，然後列入

表 14. 趨勢之計算——移動平均法

美國 1914——1932 年紙煙消費量

(1) 年分	(2) 消費 (十億萬枝紙煙)	(3) 七年移動總數	(4) 七年移平均 (以 7 除第三欄)
1914	16.86		
1915	17.93		
1916	26.20		
1917	35.[illegible]3	239.84	34.26
1918	46.66	273.85	39.12
1919	53.12	309.46	44.21
1920	44.62	348.62	49.80
1921	5[illegible].87	38[illegible].30	54.76
1922	58.57	416.60	59.51
1923	64.45	452.93	64.70
1924	70.01	505.49	72.21
1925	79.93	5[illegible]0.04	8[illegible].05
1926	89.45	626.01	89.43
1927	97.[illegible]8	681.18	97.31
1928	105.92	7[illegible]4.[illegible]2	1[illegible]8.52
1929	119.04	7[illegible]8.21	106.89
1930	119.62		
1931	11[illegible].45		
1932	108.58		

材料來源: United States Department of Commerce.

第四欄.

若移動平均數包括偶數項目(如表 15 之用六年者),則每組之中點在二年之間.因之有調整或移置(稱爲置中)此種平均數之必要,而使之與年分相合.第三欄與第四欄(六年移動總數與六年移動平均)之求法,與上述奇數時期平均相同.欲置中數値,可從偶數移動平均,求兩數之移動平均.

現從六年平均求兩年之移動平均.所得平均,可得在兩個六年平均之中間,故與年分相合.最後結果(六年移動平均之兩年移動平

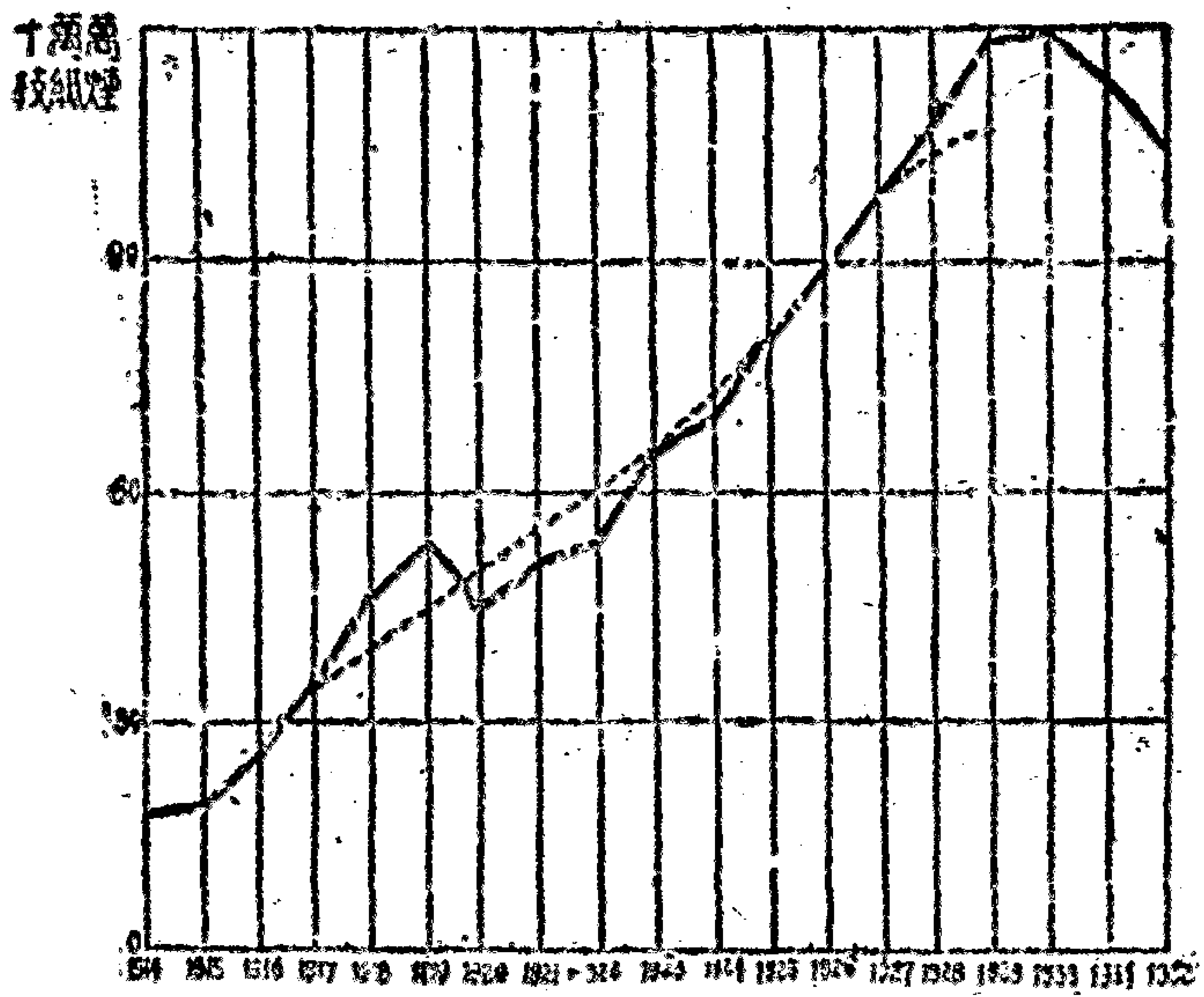
表 15. 趨勢之計算——移動平均法(偶數年期)

美國 1914——1932 年紙煙消費量

(1) 年分	(2) 消費(十萬萬枝紙煙)	(3) 六年移動總數	(4) 六年移動平均	(5) 第四欄之二年移動總數	(6) 已置中之六年移動平均
1914	16.83				
1915	17.93				
1916	25.19				
1917	35.33	195.22	32.54		
1918	46.66	224.28	37.16	69.70	34.85
1919	53.12	255.89	42.65	79.81	39.91
1920	44.62	284.17	47.36	90.01	45.06
1921	50.87	313.29	52.22	99.58	49.79
1922	53.67	333.64	56.11	108.33	54.17
1923	64.45	393.48	60.58	116.69	58.35
1924	70.01	408.31	68.05	128.63	64.32
1925	79.69	454.62	75.77	143.82	71.01
1926	89.45	506.97	84.50	160.22	80.11
1927	97.18	551.54	93.59	178.09	89.05
1928	105.93	611.17	101.86	195.45	97.72
1929	119.04	644.59	107.44	209.30	104.65
1930	119.62	658.79	109.80	217.24	108.62
1931	113.45				
1932	103.58				

均稱爲'已置中'之六年移動平均.

圖 15——美國 1914——193 年紙煙消費量六年移動平均數所指示之趨勢



材料來源: United States Department of Commerce.

長處

1. 祇需要簡單計算.

2. 可以替代複雜數理曲線之配合.

短處

1. 不能提及最近材料. 趨勢之最後一點,發現於事實終了以前數年,其確實年數以所採用每組應包括之年數爲限. 五年移動平均之終了一點在事實終了三年以前,七年移動平均之終了一點在事實終了四年以前.

2. 趨勢應有均勻增減或衰退之觀念,但移動平均之形狀爲不規則.

$\frac{5+1}{2}$

3. 在一移動平均之配合曲線上，凹形(上行)部分上各點均較真正趨勢爲高，而凸形部分各點，均較爲低.

4. 移動平均係用算術平均計算. 此種平均，大受極端量數之影響. 因之移動平均常受特殊事變如罷工，禍亂等之影響，而越出趨勢線.

5. 最均勻曲線之項目等於材料中商業循環平均長度之年數. 因此平均長度須由統計家各自估計，其估計必人與人異，而此方法因之亦不能爲純粹客觀.

參考書

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 102–103, D. C. Heath & Co., New York, 1931.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 306–320, Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 262–282, Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L. & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 302–307, McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R., & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 138–139, 153–156, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 231-257, Macmillan Co., New York, 1930.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 162-168, Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 317-325, Ginn & Co., New York, 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 224-228, Harper & Bros., New York, 1924.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 252-272, Henry Holt & Co., New York, 1924.

Riggleman, John R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 188-212, McGraw-Hill Book Co. New York, 1932.

Sutcliffe, William G., *Statistics for the Business Man*, pp. 196-200, Harper & Bros., New York, 1930.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 18-28, Macmillan Co., New York, 1925.

第　六　章

時間數列分析——趨勢

最小二乘法——直線

直線公式

統計圖上若畫一線，則此線之公式可用觀　法讀出之。

圖 16 上 d 線公式之決定，可從該線所示之 X 與 Y 值而得到。

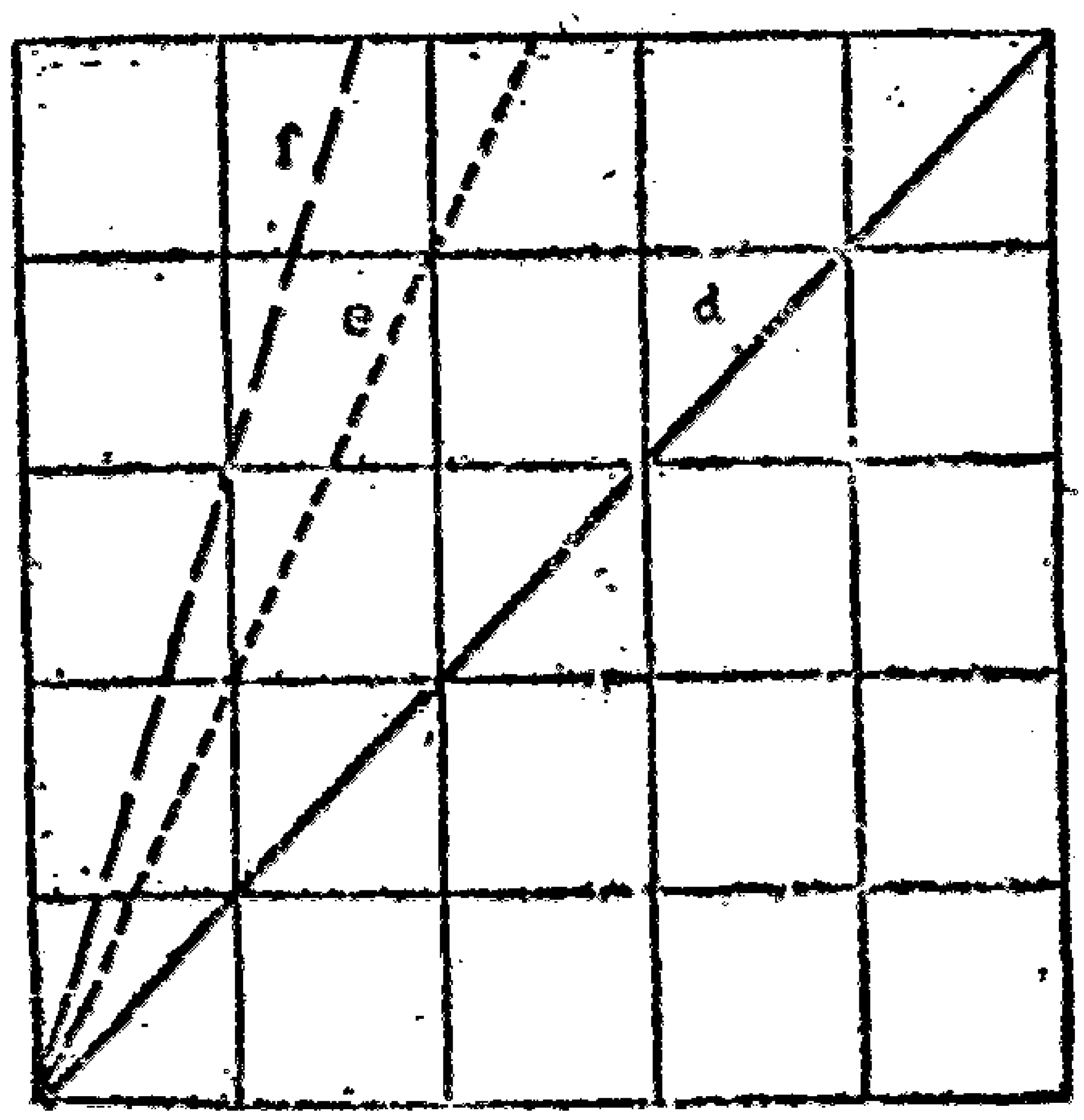


圖 16

關於 d 線

當 X 等於	則 Y 等於
0	0
1	1
2	2
3	3

故 d 線之公式爲,

$$Y=X$$

e 線與 f 線之公式,同法求到如下:

e 線　　$Y=2X$

f 線　　$Y=3X$

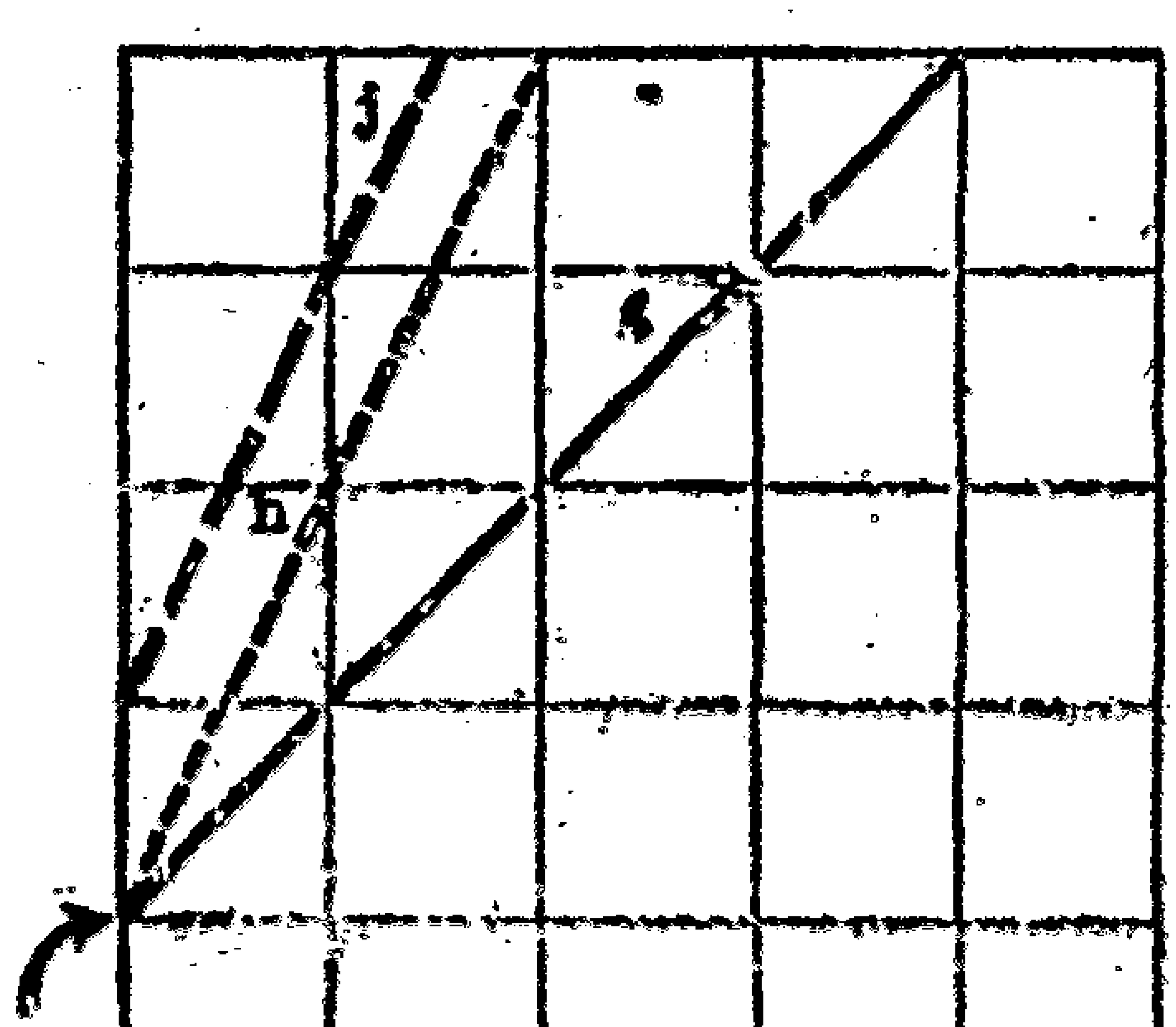
X 係數之值(卽公式內 X 前之常數,如 $Y=3X$ 之 3)指示每 X 單位增加時,Y 值應加之單位數.爲參考目的起見,此常數可用英文字母 b 表示之.現此公式可寫之如下:

$$Y=bX$$

常數 b 之值愈大,則直線之升高愈速.故 b 之值爲直線傾斜度之量數.若趨勢線向下傾斜,指示當每 X 有單位增加時,Y 值反而退減,則 b 值爲負數.

g 線:

若將圖 17 上 g 線之 X 與 Y 值求出,其結果爲:



當 X 等於	則 Y 等於
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5

X 值每增加一單位,Y 值亦增加一單位.故 b 值為 1. 但 Y 值常較 X 值大一單位,故此趨勢線公式應為:

$$Y=1+1X$$

h 線之公式為:

$$Y=1+2X$$

此因,除 $X=0$ 時,Y 為 1 外,每當 X 增加一單位時 Y 有二單位之增加.

當 $X=0$ 時,新常數之值等於 Y 之值,或等於傾斜線截斷縱軸之點.此點在圖 17 上為 g 與 h 二線,均用箭頭指出.

j 線:

當 X 等於	則 Y 等於
0	2
1	4
2	6

當 X 每增加一個單位,Y 之增加復為二個單位. 故傾度常數 b 為 2. 但傾斜線截斷 Y 軸(當 X 等於零時)於 2 處,因之,a 常數等於 2. 其公式如下:

$$Y=2+2X$$

常數 a 有時稱為 Y 截數 因其數值由傾斜線截斷 Y 軸之一點

（當 X 等於零）而決定，但 b 則指示傾斜線之傾斜度。

任何直線之公式均可用下式表示之。

$$Y=a+bX$$

最小二乘法

倘假定趨勢屬於直線性，則趨勢線必有下型之公式：

$$Y=a+bX$$

在此公式內，a 與 b 之值，須為之決定。但公式 $Y=a+bX$，可以形容無數線中之任何一線。故任何最能形容材料之性質實有決定之必要。最小二乘之原則，足資決定最能形容材料趨勢之一線。此原則可敘述如下：若有一線，其兩旁各差數（即各實際數字與此線之離差）之平方和為最小者，則此線即為對於許多數值之最適合線。但合於此條件者祇有一線。

最小二乘線

一數列中之最小二乘線可用若干'常態'方程式求得之。此種'常態'方程式由數理之導源而得（見專門附錄IV），但為計算便利計，在本例* 上，可用未知數（a 及 b）之係數乘'常型'方程式而得之。第一未知數(a)之係數為1。以1乘'常型'方程式，則得

$$Y=a+bX$$

此公式須應用於所有各點而為之相加。其總和為

$$(1)\Sigma(Y)=\Sigma a+b\Sigma(X)$$

但 a 之總和等於總次數乘常數；即

$$\Sigma a=Na$$

* 此處所述之方法非為導源，而為求得必需之'常態'方程式之一簡捷法。

因常數之總和等於常數用總次數(N)乘之。其結果可寫為:

$$\text{(I)}\quad \Sigma(Y)=N_a+b\Sigma(X)$$

第二未知數(b)之係數為 X。以 X 乘常型方程式($Y=a+bX$)，則得:

$$XY=aX+bX^2$$

其總和為:

$$\text{(II)}\quad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)$$

應用此方程式，則二未知數之値可以決定，而趨勢線可以配合。

最小二乘法之應用

表16所示美國產鋁之趨勢，可應用最小二乘法決定之。假定趨勢線為一直線，則此方程式必如下式:

$$Y=a+bX$$

從此方程式可以得到二種'常態'方程式。

$$\begin{cases}\text{(I)}\ \Sigma(Y)=N_a+b\Sigma(X)\\ \text{(II)}\ \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)\end{cases}$$

欲解答 a 與 b，則以下數值必須求得:

$$\Sigma(X);\Sigma(Y);\Sigma(XY);\Sigma(X^2);N$$

時間應排在 X(橫)軸上，因之時間為 X 變量，而產量則為 Y(縱軸)變量。

X 之總和或 $\Sigma(X)$，可從各年之數字相加而得；$\Sigma(Y)$ 可從各年產量之數字相加而得。

各年之數字(如1919年，1920年等)計算不便，且用年分命數制，僅為武斷者，故通常係用較為簡單而且連續之數字替代之。欲求

此兩二數列之彼此相當，必有一原始年而以零爲起點．故假定以 0 表示之年，即爲原始年．上述新命數制在表 16 第二欄內表出之．

表 16．趨勢之計算——最小二乘法

美國每年產鋁量，1916——1930年

(1) 年分	(2) X	(3) 鋁產量(百萬磅) Y	(4) XY	(5) X^2
1916	0	110.2	0	0
1917	1	143.3	143.3	1
1918	2	143.3	286.6	4
1919	3	134.5	403.5	9
1920	4	138.0	552.0	16
1921	5	55.0	275.0	25
1922	6	74.0	444.0	36
1923	7	129.0	903.0	49
1924	8	150.0	1200.0	64
1925	9	140.0	1260.0	81
1926	10	145.0	1450.0	100
1927	11	160.0	1760.0	121
1928	12	210.0	2520.0	144
1929	13	225.0	2925.0	169
1930	14	229.0	3206.0	196
	$\Sigma(X)=105$	$\Sigma(Y)=2183.3$	$\Sigma(XY)=17328.4$	$\Sigma(X^2)=1015$

N＝年分之數(在上例爲 15)或其他項目．

以數字代入以下二常態方程式：

$$\text{I} \quad \Sigma(Y)=N_a+b\Sigma(X)$$

$$\text{II} \quad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)$$

$$\text{I}\quad 2186.3 = 15a + 105b$$

$$\text{II}\quad 17328.4 = 105a + 1015b$$

將未知數之一(a 或 b)之係數求得相等值後，即可聯解以上二方程式.

若方程式(a)用 7 乘之:

$$\text{I}\quad 15304.1 = 105a + 735b$$

$$\text{II}\quad 17328.4 = 105a + 1015b$$

第二方程式減去第一方程式，即得

$$2024.3 = 280b$$

$$\therefore\quad b = \frac{2024.3}{280} = 7.23$$

在原來方程式(I)以 7.23 代入 b，則得

$$2186.3 = 15a + 105(7.23)$$

$$2186.3 = 15a + 759.15$$

$$1427.15 = 15a$$

$$a = 95.14$$

a 與 b 之值旣已求得，則常態方程式可用數字之係數寫出，而趨勢線之公式可寫為:

$$Y = 95.14 + 7.23X$$

解釋此方程式時，須說明原始年及計算原值之單位.

此方程式之最後敍述如下:

美國 1916—1930 年每年鋁產量之趨勢

$$Y = 95.14 + 7.23X$$

原始年爲1916年

單位:一百萬磅

趨勢之圖示法

欲求 Y 之各趨勢數値(使可在圖上繪畫趨勢線),須將表上每年之 X 値代入方程式. 1918 年之 X 値,如表所示者,爲 2. 原方程式之 X 値即用數此代入.

$$Y=95.14+(7.23)(2)$$

$$Y=95.14+14.46$$

$$Y=109.60 \text{(1918 年之 } Y \text{ 値)}$$

續演此法,直至每年之趨勢値均爲求得. 因二點可以決定一直線,故事實上祇需要兩個不同年之數値以繪畫一線.

計算趨勢之簡捷法——奇數年數

若用奇數年數計算趨勢,則手續尙可簡化. 中間一年可以作爲原始年,其相當之 X 値可使等於零. 原始年以前各年分普通均予以負數號,以後各年分則予以正數號.

以此方法適用於上述之問題,將見(見表 17 第二欄) X 値之和必等於零,因其中有二種同樣之算術級數,其數量相等,但其符號則相反. 因之'常態'方程式變化如下:

$$\text{I} \quad \Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)$$

$$\text{II} \quad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)$$

因 $\Sigma(X)=0$

$$a\Sigma(X)=0 \qquad \text{而} \qquad b\Sigma(X)=0$$

因之常態方程式簡化爲:

$$\text{I} \quad \Sigma(Y) \quad = Na$$

$$\text{II} \quad \Sigma(XY) = b\Sigma(X^2)$$

而聯解之必要,可以免除.

表 17——趨勢之計算——最小二乘直線——奇數年數——簡捷法

美國 1916——1930 年鋁之每年產量

(1) 年分	(7) X	(3) 鋁產量、百萬磅) Y	(4) XY	(5) X^2
1916	−7	110.2	−771.4	49
1917	−6	143.3	−859.8	36
1818	−5	143.3	−716.5	25
1919	−4	134.5	−538.0	16
1920	−3	1[illegible]8.0	− 14.0	9
1921	−2	55.0	−110.0	4
1922	−1	74.0	− 74.0	1
1923	0	120.0	.0	0
1924	1	15[illegible].0	150.0	1
1925	2	140.0	280.0	4
1926	3	145.0	435.0	9
1927	4	160.0	640.0	13
1928	5	210.0	1050.0	25
1929	6	225.0	1350.0	36
1930	7	229.0	1603.0	40
	$\Sigma(X)=0$	$\Sigma(Y)=2183.3$	$\Sigma(XY)=2024.3$	$\Sigma(X^2)=280$

材料來源: United States Bureau of Mines.

以表17數字代入以下兩常態方程式:

$$\text{I}\quad \Sigma(X)=Na$$

$$\text{II}\quad \Sigma(XY)=b\Sigma(X^2)$$

其結果爲:

$$\text{I}\quad 2186.3=15a$$

$$\therefore\quad a=145.75$$

$$\text{II}\quad 2034.3=280b$$

$$\therefore\quad b=7.23$$

所得方程式可寫之如下:

美國1916——1930年每年鋁產量之趨勢

$$Y=145.75+7.23X$$

原始年: 1923年

單　位: 百萬磅

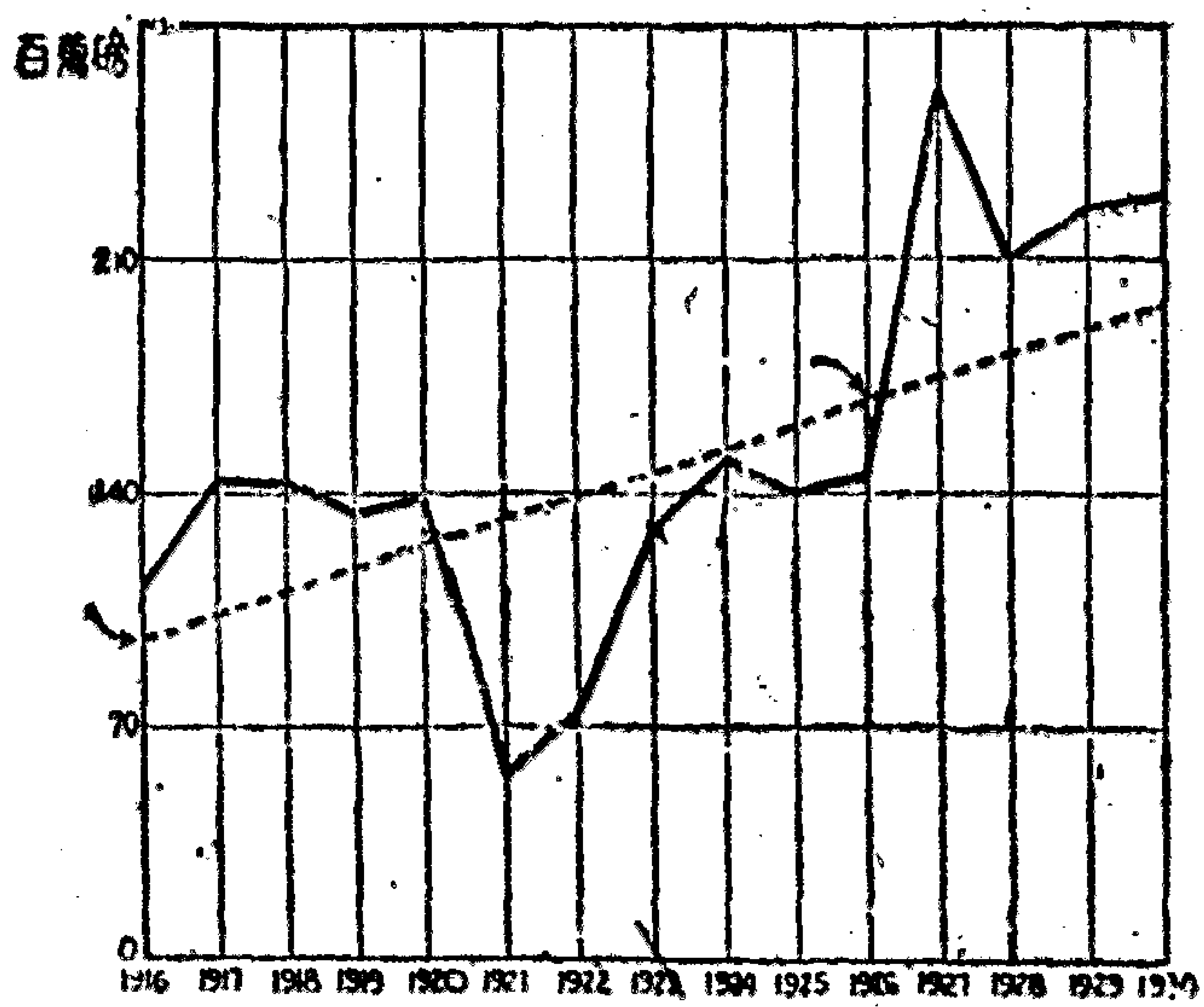
因a代表X等於零時之Y值,今X旣用另一零點,則a值自亦變更.例如此二趨勢方程式內a值之不同(即用完長法與用簡捷法各所得者),實由二原始點之互異.在簡捷法內,原始年爲1923,在完長法內則爲1916年.用簡捷法時,X之零在1923年,用完長法時X之零在1916年.

在兩種公式上,任相當X值於任何一年,所得結果均相同.

倘需要1923年之產量趨勢數時,使$X=7$,從表16,將1923年之X值代入所得之公式.

$$Y=95.14+7.23X\quad \text{原始年 1916年}$$

(百萬磅)



材料來源: United States Bureau of mines.

圖 18——美國每年產鋁量,1916——1930,用最小二乘直線所示之趨勢

其結果為(1923年):

$$Y=95.14+7.23(7)$$

$$Y=145.75$$

從表 17,計算 1923 年時,可使 $X=0$,然後將此零代入所得之公式並用簡捷法計算.

$$Y=145.75+7.23 \quad \text{原始年 1923年}$$

(百萬磅)

其結果為(1923 年):

$$Y=145.75+7.23(0)$$

$$Y=145.75$$

因之此二趨勢線相等.

改換原始點

原始點之改換，係趨勢數字起算點之改換。

b 值（傾斜度之量數）不受原始點改換之影響，因開始之點不論在何處，趨勢線常持不變之傾斜度。在上節所述之二方程式中，原始點雖不同（1916 及 1923 年），而 b 值均為 7.23。

a 值為 X 等於零時之 Y 值。以下方法可用以改換第一方程式之原始點（自 1916 年改至 1923 年）：

$$Y=95.14+7.23X \quad \text{原始點 1916年}$$
（百萬磅）

在新方程式內，原始點移至第一原始點 7 年以後。以 7 代入 X，則 Y 等於 145.75。

以傾斜度不受原始點改換之影響，故 $b=7\cdot23$。

代入常態方程式：

$$Y=a+bX$$

$$145.75=a+7.23X$$

但因 X 在 1923年 $=0$

$$\therefore \quad a=145.75$$

改換原始點步驟之總括

1: 應用原來方程式	$Y=95.14+7.23X$（原始點 1916）
2: 代入 X 之新原始年值	$X=7$ 因所需者為 1923 年趨勢值。
3: 求 Y（趨勢）值	$Y=145.75$
4: 以新值代入原來 a 值	$Y=145.75+7.23X$（原始點1923）

簡捷法——偶數年數

適用簡捷法於偶數年數時，缺乏中間一年，此實爲一種困難。但數列之中點可以應用，卽在中間之二年間假定一點（如 1924 年一月）*．原始點之兩邊第一年，與原始點相距爲半年，故其數字可指定爲 +.5 或 −.5，此可視其在前或在後而定。其兩邊之第二年則爲 +1.5 及 −1.5．命數制悉載在表 18 第三欄。

有小數點時計算不便，故用半年計算而删去小數點以求趨勢方程式，較爲簡捷（見第四欄）。

現將各値代入兩種簡化常態方程式內：

$$(\mathrm{I})\quad \Sigma(Y)=Na$$

$$(\mathrm{II})\quad \Sigma(XY)=b\Sigma(X^2)$$

其結果爲：

$$(\mathrm{I})\quad 21922=16a$$

$$a=1370.13$$

此方程式之寫法如下：

Woolworth 連鎖商店 1916 —— 1931 年之趨勢

$$Y=1370.13+34.27X'$$

原始點：1924 年一月

單　位：商店數目

X'　係以半年計

現型之方程式不易處理，因之，必須爲之改至標準格式，而以每年之七月一日爲其原始點。

---

* 若時個數列合某年之數字，則此數字代表該年中間，或七月一號之數字。

欲將原始點改至1924年之中點（七月一日），必須得到新原始點之趨勢數值(Y)，而用作a之值，

較遲半年之趨勢數值之求得，卽在方程式內，+1代X'（因X'係以半年計算）.

表18. 趨勢之計算——最小二乘直線之簡捷法——偶數年期

F.W. Woolworth Co. 1916——1931年之發展趨勢

(1) 年分	(2) Y 平均商店數	(3) X （以年計）	(4) X' （以半年計）	(5) $X'Y$	(6) X'^2
1916	920	−7.5	−15	−13800	225
1917	1000	−6.5	−13	−13000	169
1918	1039	−5.5	−11	−11429	121
1919	1081	−4.5	−9	−9729	81
1920	1111	−3.5	−7	−7777	49
1921	1137	−2.5	−5	−5685	25
1922	1176	−1.5	−3	−3528	9
1923	1261	−.5	−1	−1261	1
1924	1331	.5	1	1331	1
1925	1420	1.5	3	4260	9
1926	1481	2.5	5	7420	25
1927	1588	3.5	7	11116	49
1928	1727	4.5	9	15543	81
1929	1828	5.5	11	20108	121
1930	1890	6.5	13	24570	169
1931	1906	7.5	15	28590	225
	$\Sigma Y=21922$	$\Sigma X=0$	0	$\Sigma X'Y=45612$	$\Sigma X'^2=1360$

材料來源：United States Department of Commerce; *Survey of Current Business*.

$$Y=1370.13+34.27\times 1$$
$$Y=1404.40$$

Y 可用爲新 a 之值，而方程式可寫之如下：

$$Y=1404.40+34.27X'$$

原始點：1924年（七月）

X'：以半年計。

最後，X'（以半年計）須改爲 X（以一年計）以資調整。

符號 b 用爲 X 之係數，乃代表每半年之增加（在本例爲 34.27 商店）。欲求每年之增加，將 b 加倍（68.54）。現此方程式寫爲：

Woolworth 連銷商店 1916——1931 年之趨勢

$$Y=1404.40+68.54X$$

原始點：1924年

單　位：商店數目

最小二乘法

長處

1. 此法用數理公式表示趨勢，解釋容易。

2. 用此方法所得結果，既屬固定，又不受統計家主觀估計之影響。

3. 最後方程式，便於應用外推方法（推測將來或追溯既往）。

短處

1. 所用技術屬於數理。

2. 此方法係根據一種假設，即材料所循之趨勢，可用數理方程式表示之。

參 考 書

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 104–111. D. C. Heath & Co., New York. 1931.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 320–334. Houghton, Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden, D. J. *Practical Business Statistics*, pp. 313–325. Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *Introduction to Economic Statistics*, pp. 308–323. McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R., & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 133–137. John Wiley & Sons, Inc., 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 258–263. Macmillan Co., New York, 1930.

Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*, pp. 120–123. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1932.

Garrett, Henry, E., *Statistics in Psychology and Education*, pp. 173–182. Longmans, Green & Co. New York, 1926.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 168–178. Macmillan Co., New York, 1930.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 228–233. Harper & Bros., New York, 1924.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 273-280. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 189-199. Century Co., New York, 1924.

Richardson, C. H., *An Introduction to Statistical Analysis*, pp. 113-133. Harcourt, Brace & Co. New York, 1924.

Riggleman, John R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 212-215. McGraw-Hill Book Co., New York, 1926.

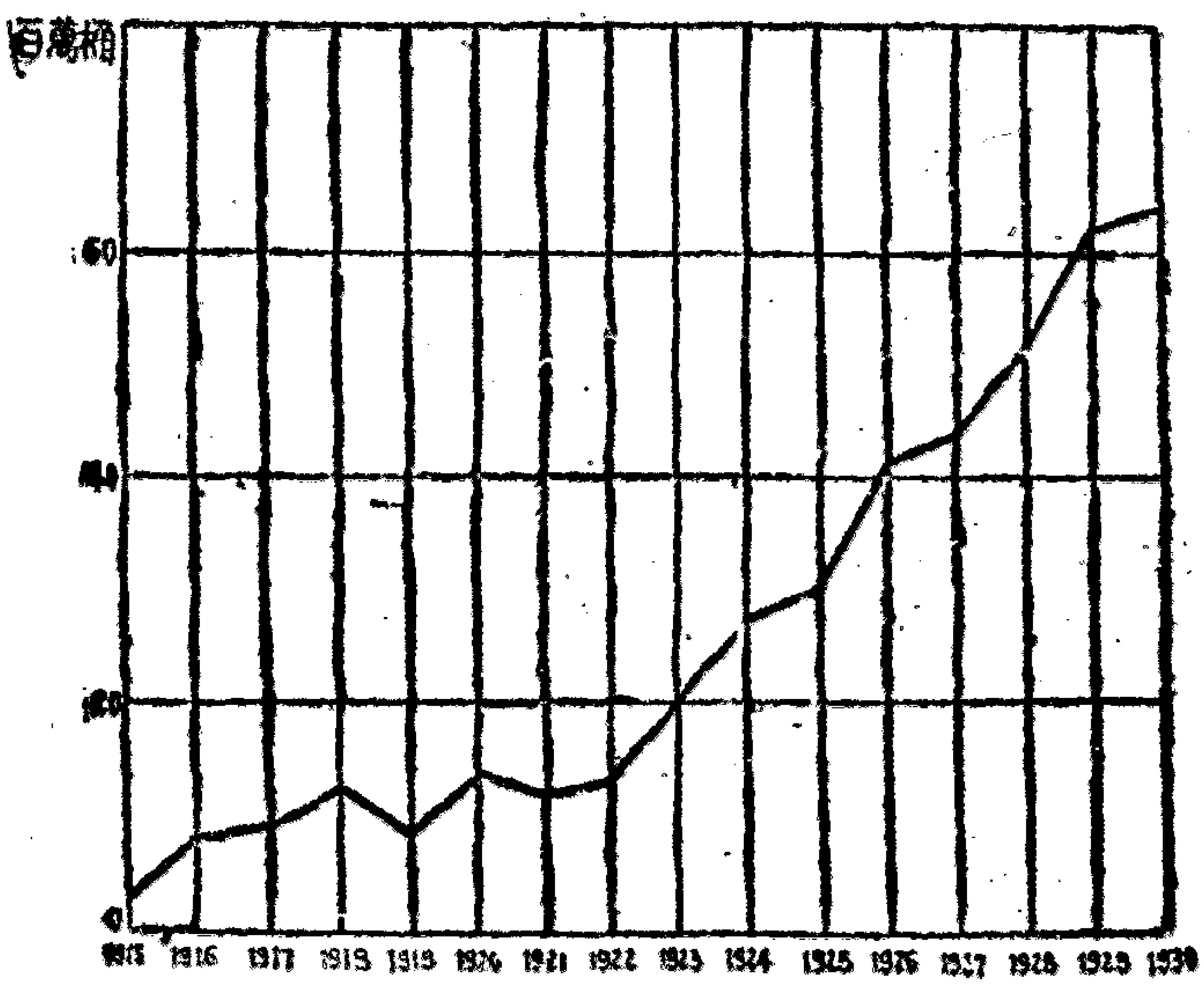
Sutcliffe, William G., *Statistics for the Business Man*, pp. 201-216. Harper & Bros., New York, 1930.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 51-64. Macmillan Co., New York, 1925.

第　七　章

時間數列分析——趨勢——非直線趨勢

直線趨勢不能充分形容含有變化發長率之材料趨勢。例如下列所示，祇有曲線始能精確形容其材料之趨勢，有如圖 19 所示。



材料來源: United States Bureau of Mines.

圖 19．美國汽油輸出量，1915——1930 年

配合非直線趨勢之方法

a．定羃級數．　拋物線爲形容材料趨勢之最簡單曲線式　最簡單拋物線之公式爲：

$$Y = a + bX + cX^2$$

此種曲線之配合方法，可緊接上章配合直線方程式之方法而述之.

但此處有三個未知數（'a'，'b'，'c'）在方程式中，而需要三種常態方程式以解答 * 之.

1. 將'常型'方程式寫下:

$$Y=a+bX+cX^2$$

2. 以每個未知數之係數乘方程式之每項，然後相加:

a: 關於第一'常態'方程式

以'a'之係數（卽 1）乘常型方程式，然後相加

方程式(I) $\Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)+c\Sigma(X^2)$

b: 關於第二'常態'方程式

以'b'之係數（卽 X）乘常型方程式，然後相加

方程式(II) $\Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)+c\Sigma(X^3)$

c: 關於第三'常態'方程式

以'c'之係數（卽 X^2）乘常型方程式，然後相加

方程式(III) $\Sigma(X^2Y)=a\Sigma(X^2)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^4)$

結果其常態方程式爲

方程式 (I) $\Sigma(Y)=Na+b\Sigma X+c\Sigma(X^2)$

方程式 (II) $\Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)+c\Sigma(X^3)$

方程式(III) $\Sigma(X^2Y)=a\Sigma(X^2)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^4)$

從 X 與 Y 之數値:

$\Sigma(X)$，$\Sigma(Y)$，$\Sigma(XY)$，$\Sigma(X^2)$，$\Sigma(Y^2)$，$\Sigma(X^2Y)$，及 N 可以決定

* 欲解答一個方程式中某個未知數，須有同個數目之方程式其中含有此種未知數.

（如上章所述）而以其值代入以上常態方程式中，用聯解法，可以得到未知常數＊所需要之數值。

其配合程序，如表 19 所示。

表 19. 趨勢之計算——最小二乘法——第二級拋物線

美國汽油輸出量，1915——1930 年

(1) 年份	(2) X	(3) 輸量(百萬桶) Y	(4) XY	(5) X^2	(6) X^2Y	(7) X^3	(8) X^4
1915	0	2.7	0	0	0	0	0
1916	1	8.5	8.5	1	8.5	1	1
1917	2	9.9	19.8	4	39.6	8	16
1918	3	13.3	39.9	9	119.7	27	81
1919	4	8.9	35.6	16	142.4	64	256
1920	5	15.3	76.5	25	382.5	125	625
1921	6	12.7	76.2	36	457.2	216	1296
1922	7	13.8	93.6	49	676.2	343	2401
1923	8	20.1	160.8	64	1286.4	512	4096
1924	9	28.3	254.7	81	2292.3	729	6561
1925	10	30.6	306.0	100	3060.0	1000	1000
1926	11	42.5	467.5	121	5142.5	1331	14641
1927	12	44.3	531.6	144	6379.2	1728	20736
1928	13	52.9	687.7	169	8940.1	2197	28561
1929	14	62.1	869.4	196	12171.6	2744	38116
1930	15	65.6	984.0	225	14760.0	3375	50625
	120	431.6	4614.8	1240	558 8.2	14400	178312

材料來源：United States Bureau of Mines.

＊ 欲温習含有二個以上未知數之聯解法，可參閱任何初級代數之教科書 如 Harding, A.M. & Mullins, G.W., *College Algebra*.

(I) $\Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)+c\Sigma(X^2)$

$431.5=16a+120b+1240c$

(II) $\Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)+c\Sigma(X^3)$

$4614.8=120a+1240b+14400c$

(III) $\Sigma(X^2Y)=a\Sigma(X^2)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^4)$

$55858.2=1240a+14400b+178312c$

解方程式(I)及(II)，將'a'消去

(II) $4614.8=120a+1240b+14400c$ (方程式II)

(I) $\underline{3236.25=120a+\ \ 900b+\ \ 9300c}$ (方程式I乘7.5)

(IV) $1378.55=340b+5100c$ 相減

(III) $55858.2=1240a+144000b+178312c$ (方程式III)

(I) $33441.25=1240a+\ \ 9300b+\ \ 96100c$ (方程式I乘77.5)

(V) $22416.95=5100b=82212c$

(IV) $\underline{20678.25=5100b+76500c}$ (方程式IV乘15)

$1738.70=\qquad 5712c$

$c=.3044$

方程式IV內以c之值代入

$1378.55=340b+5100(.3044)$

$1378.55=340b+1552.44$

$\therefore\ b=.5114$

方程式I內以b及c之值代入

$4614.8=120a+1240(-.5114)+14400(.3044)$

$120a=865.576$

$a=7.2131$

最後趨勢方程式讀之如下:

美國1915——1930年汽油輸出量趨勢

$$Y=7.2131-.5114X+.3044X^2$$

原始年: 1915

單　位: 百萬桶

各年分之趨勢值可以X之相當值(如表19第二欄所示)代入而求得之.故1925年可以10代X.

$$Y=7.2131-.5114(10)+.3044(10)^2$$

$$Y=7.2131-5.114+30.44$$

$$Y=32.5391 \text{ 百萬桶}$$

若材料爲奇數所組成,此方法可以簡化. 中間一年可選作原始年.故$\Sigma(X)$及$\Sigma(X^2)$等於零.常態方程式爲:

方程式 (I) $\Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)+c\Sigma(X^2)$

方程式 (II) $\Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^b)$

方程式(III) $\Sigma(X^2Y)=a\Sigma(X^2)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^4)$

但因$\Sigma(X)$及$\Sigma(X^2$均等於0,故常態方程式簡化爲:

方程式 (I) $\Sigma(Y)=Na+c\Sigma(X^2)$

方程式 (II) $\Sigma(XY)=b\Sigma(X^2)$

方程式(III) $\Sigma(X^2Y)=a\Sigma(X^2)+c\Sigma(X^4)$

a及c之值可照常法求得,而b則可直接求得.

較第二級拋物線更有彈性之曲線,可應用更較高級之拋物線*而求得之.

---

* 一個方程式之級數相當於其最大之冪數.

第三級拋物線之公式爲

$$Y=a+bX+cX^2+dX^3$$

此種曲線之普通公式爲

$$Y=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4\cdots\text{等}$$

方程式愈精密，則愈能與材料相逼近，但若數字非屬於循環或季節變動者，用時須特別注意。

高級拋物線（dX^3 eX^4 等）之解開，可依照上法同樣得到。較爲複雜公式之常態方程式，仍可如前法從常態方程式求得，至於各未知數之係數值 a,b,c,d，等，亦可從前述之法求得之。

b：變羃級數。有時直線或拋物線均不足以充分形容一種特殊數列之趨勢。如幾何性之趨勢發現時，即爲其例。形容幾何型趨勢之一種曲線，其公式爲：

$$Y=ab^x$$

此種趨勢發現時，爲 Y 値有形成幾何級數*（如 1,2,4,8,16 等之級數）之趨勢，而 X 値則排成算術級數，如 2,3,4 等之級數。若繪在單對數紙（對數格線畫在 Y 軸）上，則必形成一直線型之趨勢，而所得之曲線，稱爲單對數曲線（見第十七章）。

若當'X'値依幾何級數排列時，幾何級數由'Y'値而形成，則其公式爲：

$$Y=aX^b$$

此種曲線在對數紙上爲直線（'X' 及 'Y' 軸上均爲對數格線）。

變羃式之公式如上所述者，可化之爲對數式而直接配合之。

* 幾何級數爲一種數列，其中之數值依不變之比率遞加。

公式

$$Y = ab^x$$

化為對數式,則讀之如下:

$$\log Y = \log a + X \log b$$

常態方程式可照上式求得.

重要趨勢之特種變冪級數曲線頗有幾種. 其較為重要者,稱為龔柏茲曲線. 其公式為

$$Y = abc^x$$

參 考 書

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 112-128, D. C. Heath & Co., New York, 1931.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 335-339, Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 326-338, Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 324-331, McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R., & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 139-153; 156-178, John Wiley & Sons, New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 263-280. Macmillan Co., Now York, 1930.

Fisher R. A., *Statistical Methods for Research Workers*, pp. 133-150. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1932.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 178-187. Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 324-337. Ginn & Co., New York, 1928.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 280-313. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Richardson, C. H., *An Introduction to Statistical Analysis*, pp. 169-200. Harcourt, Brace & Co., New York, 1924.

Riggleman, John R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 215-223. McGraw-Hill Book Co., New Yerk, 1932.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 29-37. Macmillan Co., New York, 1925.

第　八　章

時間數列分析 — 季節與循環分析

季節變動

季節變動為一專門名詞，用以形容逐年按期之有規則變動。

每月對於每年之其他時期，均有一代表之位置。季節變動之問題，為決定每月之代表或平均位置。

測量季節變動之方法

測量時間數列內所發現季節變動之最通用方法，為：

1. 簡單平均法
2. 環比法
3. 對移動平均之比率法
4. 對趨勢之比率法

簡單平均法

1. 求各年之每月平均值（見表 20）。其結果為十二個月之各月代表值。

2. 調整趨勢。求得之每月平均值，將受材料長期趨勢之影響而變動。若趨勢向上偏，則十二月分與趨勢比較時變為較高，以其在趨勢線上發現較遲。

每月因趨勢所致之增高可以如此決定：在每年各月平均上配合

表20. 美國貨車每週平均之裝載量，1919——1933年

年分	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	平均
	(單位: 1000貨車)												
1919……	728	687	697	715	759	809	858	892	960	967	807	758	838.8
1920……	820	776	843	791	832	860	901	958	969	1005	981	723	832.2
1921……	705	683	692	706	757	765	751	810	841	9 9	761	683	736.9
1922……	703	765	826	723	787	842	8 5	877	935	992	914	833	828.0
1923……	815	842	917	941	975	1011	983	1041	1037	1078	978	223	958.4
1924……	8 8	908	916	875	895	908	891	974	1037	1091	975	847	9 1.3
1925……	921	905	924	941	968	987	983	1080	1074	1107	1024	888	983.9
1926……	923	919	939	958	1057	1028	0.9	1104	1148	1205	1068	904	1026.0
1927……	946	956	1002	975	1024	9 9	979	1062	1097	1115	956	834	995.4
1928……	852	897	951	935	1002	985	986	10 8	1117	1175	1061	883	992.7
1929……	893	942	962	996	1051	1053	1038	1117	1185	1169	978	835	1014.0
1930……	837	876	833	912	914	950	895	938	931	950	798	680	876.7
1931……	719	709	735	752	740	748	738	747	757	759	655	555	716.2
1932……	567	561	565	557	522	491	483	525	577	634	549	485	543.0
1933……	478	489	407	503	527	595	617	634	634	651	572	518	557.3
總數……	1183	119 5	12354	12220	128 0	13013	12983	13827	14229	1 827	12010	11257	………
平均……	788.9	794.3	823.6	814.7	85 .7	867.5	865.7	921.8	949.3	9 8.5	837.3	750.5	………

一'最小二乘線'並用12除b值(傾斜度).所得之值代表每月平均因受趨勢之影響與上月比較,有不同之處.

故欲將二月平均化至前一月(一月分)之水平線,應以趨勢增量從上述每月平均減去.欲將三月分平均化至一月分之水平線,應以二倍趨勢增量從上述每月平均減去,四月分則三倍之,餘類推(見表21,第三欄).

3. 所得之一切校正平均數,均以所占全期平均(845.76)之百

表21. 季節變動指數之計算——簡單平均方法

美國之貨車裝載數,1919——1933年.

(1) 月分	(2) 月平均(從表)	(3) 趨勢校正數	(4) 校正平均數	(5) 季節指數
一月………	783.9	−2.05	785.93	.93
二月………	794.3	−4.09	792.25	.94
三月………	823.6	−6.14	819.51	.97
四月………	814.7	−8.18	808.56	.93
五月………	854.7	−10.23	846.52	1.00
六月………	857.5	−12.27	857.27	1.01
七月………	835.7	−14.32	853.43	1.01
八月………	921.8	−16.36	907.48	1.07
九月………	948.6	−18.41	932.24	1.10
十月………	988.5	−20.45	970.09	1.15
十一月………	867.3	−22.50	845.85	1.00
十二月………	750.5		728.00	.83
總數………			10,149.13	
平均數………			845.76	

分比表出之。例如一月分之93%，表示一月分之數字在全年平均之下7%。

環比法

環比法之第一步，爲表出每月數值占上一月之百分數。以美國1914——1929烟煤產量之1914年一月分數字(40.19)除二月分數字(35.47)，以二月分數字(35.47)除三月分數字(45.46)等。其所得百分數字如二月分者爲88.26%，三月分者爲128.16%，稱爲環比(見表22)。

各月之環比(所有一月分等)爲之平均。每月與上月相關之代表位置因而求得。例如六月分爲五月分之101.6%。因月分平均之算術平均，必受特殊月分數值之影響而變異，故平均方法可用中位數，蓋其受極端量數之影響爲少也。

環比中位數(或代表數)表示每月與其上月之關係，但非與其他各月之關係，故各環比間應使成立聯繫，並將各環比變爲一列鏈比。其法可任意斷定一月分之值爲100%。二月分之環比中位數爲87.5%，此數適足表示二月分爲一月分之代表值，即100%之87.5%。三月分之環比中位數，其鏈比爲二月分鏈比(87.5%)之102.6，或89.8%。每月之環比中位數各以該月上一月之鏈比乘之，依此推算。十二個月完成後，並計算第二個一月分之環比中位數，此即爲第一個一月分所示之值(如表23，第三欄所示)。

第一個一月分與第二個一月分之鏈比間有一差別存在。此差別係由趨勢之增量所致，致使每下一年之一月分較上一年之一月分爲高或低。

表 22. 環比——美國煙煤產量, 1914——1929 年

年 分	一 月	二 月	三 月	四 月	五 月	六 月	七 月	八 月	九 月	十 月	十一月	十二月
1914……		88.36	128.16	51.94	120.93	110.02	109.[illegible]3	110.03	103.56	95.50	88.59	113.39
1915……	99.29	78.00	108.46	94.25	103.24	109.76	104.74	107.78	107.34	107.91	91.22	102.59
1916……	101.70	97.00	95.99	76.73	115.87	97.27	100.98	112.04	98.59	106.44	100.27	98.15
1917……	108.78	86.20	115.77	87.42	112.52	99.43	98.87	102.33	95.23	107.13	98.66	92.35
1918……	95.89	103.67	109.89	95.70	109.[illegible]7	101.39	107.49	100.25	92.87	10[illegible].19	8[illegible].94	91.53
1919……	105.00	76.68	106.82	95.[illegible]9	116.75	98.69	115.23	100.41	110.55	118.65	9[illegible].33	105.90
1920……	133.59	82.53	116.54	81.00	102.79	115.71	99.76	108.65	100.54	106.05	98.[illegible]9	101.29
1921……	77.27	76.60	68.51	90.66	120.99	101.70	89.64	113.66	101.64	124.59	82.37	85.98
1922……	123.00	108.6	122.41	81.46	1[illegible]8.58	69.95	76.[illegible]9	152.05	158.67	110.06	100.56	102.64
1923……	108.01	84.04	111.00	70.94	107.26	98.72	99.21	108.29	94.58	105.42	87.27	92.82
1924……	127.30	90.68	87.29	73.70	106.08	97.46	106.01	107.71	117.98	114.23	87.97	109.90
1925……	111.61	75.68	93.52	89.55	105.28	104.76	103.49	113.59	104.32	113.64	95.45	104.00
1926……	101.31	86.79	99.05	85.88	97.46	107.51	103.51	103.64	105.66	111.47	109.38	93.57
1927……	99.69	93.01	113.68	57.65	102.37	102.88	92.11	123.96	100.53	104.96	92.33	101.66
1928……	107.46	93.53	106.31	73.22	113.76	98.20	100.89	113.31	100.46	121.94	91.42	91.22
1929……	120.19	91.87	83.24	93.75	108.91	94.77	106.74	108.01	101.42	115.10	89.16	101.12

故此二値之差（18.9）代表趨勢之增量.因受趨勢之影響，各鏈比有調整之必要，故對於每鏈比差別之十二分之一之遞加乘數——從二月分起爲 1/12，三月分爲 2/12，等，——應爲減去.如是各鏈比可化爲與一月分*相同之水平線上（見表 23，第三欄）.

最後結果爲以一月分作基點之季節變動指數.

表 23. 季節變動之計算(環比法)

月　　分	(1) 環比中位數	(2) 鏈　比	(3) 調整鏈比
一　月……………	107.5	100.0	100.0
二　月……………	87.5	87.5	85.9
三　月……………	102.6	89.8	86.6
四　月……………	87.2	87.3	83.6
五　月……………	109.2	95.3	89.0
六　月……………	101.6	96.8	88.9
七　月……………	102.3	99.1	89.6
八　月……………	108.5	107.5	96.4
九　月……………	101.5	109.1	96.5
十　月……………	109.0	118.9	104.7
十一月……………	91.9	109.3	93.5
十二月……………	101.2	110.6	93.2
一　月……………	107.5	118.9	100.0

對移動平均之比率法

1. 材料之季節變動用十二個月移動平均爲之修勻.實際數値與移動平均之差是由於季節之變動.

* 趨勢差別可以分配於其他各基點之上（見 Mills.F.C., *Statistical Methods*, p.320）.

2. 每月各數值對於其相當移動平均值之比，可以求到。

3. 各年每月之比爲之平均，算術平均數或中位數，均可採用。

4. 所得平均爲季節變動之指數。

對趨勢之比率法

'對趨勢之比率法'所測量者爲季節變動，此外尚有合併之循環與剩餘變動。

方法

每月實際數值所占相當趨勢數值之百分比而用'最小二乘法'*算得者爲之表出。

因各值之趨勢，均爲 100%。若用圖顯示，則所得之線係爲原來材料用百分表示而將趨勢去除者。

每月對各年全期之比率$\left(\frac{\text{實際}}{\text{趨勢}}\right)$爲之平均。若用算術平均數平均之，則所得之值將爲極端量數所影響而變異，故此種數在平均†前，爲之除外。

極端或特殊數值可用多項次數表而定位。多項次數表爲一多欄次數分配，其比率爲$\left(\frac{A}{T}\right)$，每月一欄（如圖 20 所示）。

平均數求得後，特殊數值（在多項次數表上用圈表出）不在平均數之內。

---

* 各月趨勢數值之求法，係以'最小二乘'線配合於各年平均並以 12 除'b'值。因年分之方程式其原始點爲每年之中點（七月一日），故必須將此點向前移 $1/2$ 月，使之置中於該月之上。其方法即將'b'之 $1/2$ 值加於'a'之上。

† 若平均時採用中位數，則當各組均時項目較少，此中位數未必有代表值。

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
2.50-2.74				/	/							
2.25-2.49				/	/							
2.00-2.24				/								
1.75-1.99			/	////	///	////	//	/				
1.50-1.74			/	/	卌	/	/	///	/			
1.25-1.49			//	//	/	//	卌/	///	//			
1.00-1.24	/		卌	///	///	卌/	/	///	////	///		
.75-.99	/	////	//	/	/		//	//	////	////	////	卌/
.50-.74	卌/	卌/	//			/	/	//	////	卌	卌/	卌//
.25-.49	卌	///	/				/	/		/	////	//
.00-.24	//	//	/	/	/	/	/			/	/	

圖 20.　多項次數表，示1919——1933 年建築合同核准數與每月趨勢值之比

所得實際數値與趨勢之平均比率，表示每日對於趨勢之代表關係，即季節指數(見表 25)．例如三月分 102% 之值，表示該月適在趨勢(同月)之上 2%．

若每月之季節指數，各從其'實際對趨勢比率'減去，則季節變動將從數列中消除；留下之唯一變動，爲合併之循環與剩餘變動．

對趨勢之比率法——總結

1．　在材料上配合一趨勢線．

2．　計算每實際數値與其相當趨勢之比率$\left(\frac{A}{T}\right)$．

3．　用算術平均數法，平均每月之比率．但第一須將在多項次數表上所指定之極端數値除去．

4．　在每月比率上，減去其相當季節變動之指數．所得數列代表在數列上所發現之循環與剩餘變動．

表 24. 季節及循環變動——對趨勢之比率法

美國三合土公路及街道建築合同核准數，1919——1933年

(祇示兩年數字)

(1) 年分與月分	(2) 合同數 (百萬方碼)	(3) 趨　勢	(4)	(5) 季節指數	(6) 循環與季節
	A	T	A/T	$1+S$	$C+R$
1919					
一　月	.27	5.17	.05	.51	—.46
二　月	.78	5.20	.15	.57	—.42
三　月	2.57	5.23	.45	1.02	—.57
四　月	5.01	5.26	.95	1.64	—.69
五　月	9.43	5.29	1.78	1.50	.28
六　月	6.61	5.33	1.24	1.37	—.13
七　月	5.75	5.36	1.07	1.18	—.11
八　月	8.15	5.39	1.51	1.16	.35
九　月	3.84	5.42	.71	.99	—.28
十　月	2.79	5.45	.51	.80	—.29
十一月	2.01	5.48	.37	.59	—.22
十二月	3.11	5.52	.56	.67	—.11
1920					
一　月	1.93	5.55	.35	.51	—.16
二　月	4.23	5.58	.76	.57	.19
三　月	6.25	5.61	1.11	1.02	.09
四　月	5.79	5.64	1.03	1.64	—.61
五　月	5.61	5.68	.99	1.50	—.51
六　月	2.94	5.71	.51	1.37	—.86
七　月	2.63	5.74	.46	1.18	—.72
八　月	2.04	5.77	.35	1.16	—.81
九　月	2.95	5.80	.51	.99	—.48
十　月	1.45	5.83	.25	.80	—.55
十一月	1.32	5.87	.22	.59	—.37
十二月	2.01	5.90	.34	.67	—.33

材料來源: Portland Cement Association.

表 25. 季節指數之計算——對趨勢之比率法

月分	月總數* (1919——1933)	所用月分數*	月平均
一月	7.65	15	.51
二月	8.54	15	.57
三月	15.40	15	1.02
四月	23.02	14	1.64
五月	18.11	12	1.50
六月	19.29	14	1.37
七月	17.78	15	1.18
八月	17.39	15	1.16
九月	14.86	15	0.99
十月	12.68	15	.85
十一月	8.87	15	.59
十二月	10.04	15	.67

* 不包括'極端'或特殊月分，見多項次數表.

參考書

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 339-366, Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 286-310, Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum William L., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 332-363, McGraw-Hill Book Co., New York 1925.

Davies, George R., & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 189–219, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 281–312, Macmillan Co., New York, 1930.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 235–255, Harper & Bros., New York, 1924.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 315–342, Henry Holt & Co., New York, 1924.

Riggleman, John R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 226–267, McGraw-Hill Book Co., New York, 1932.

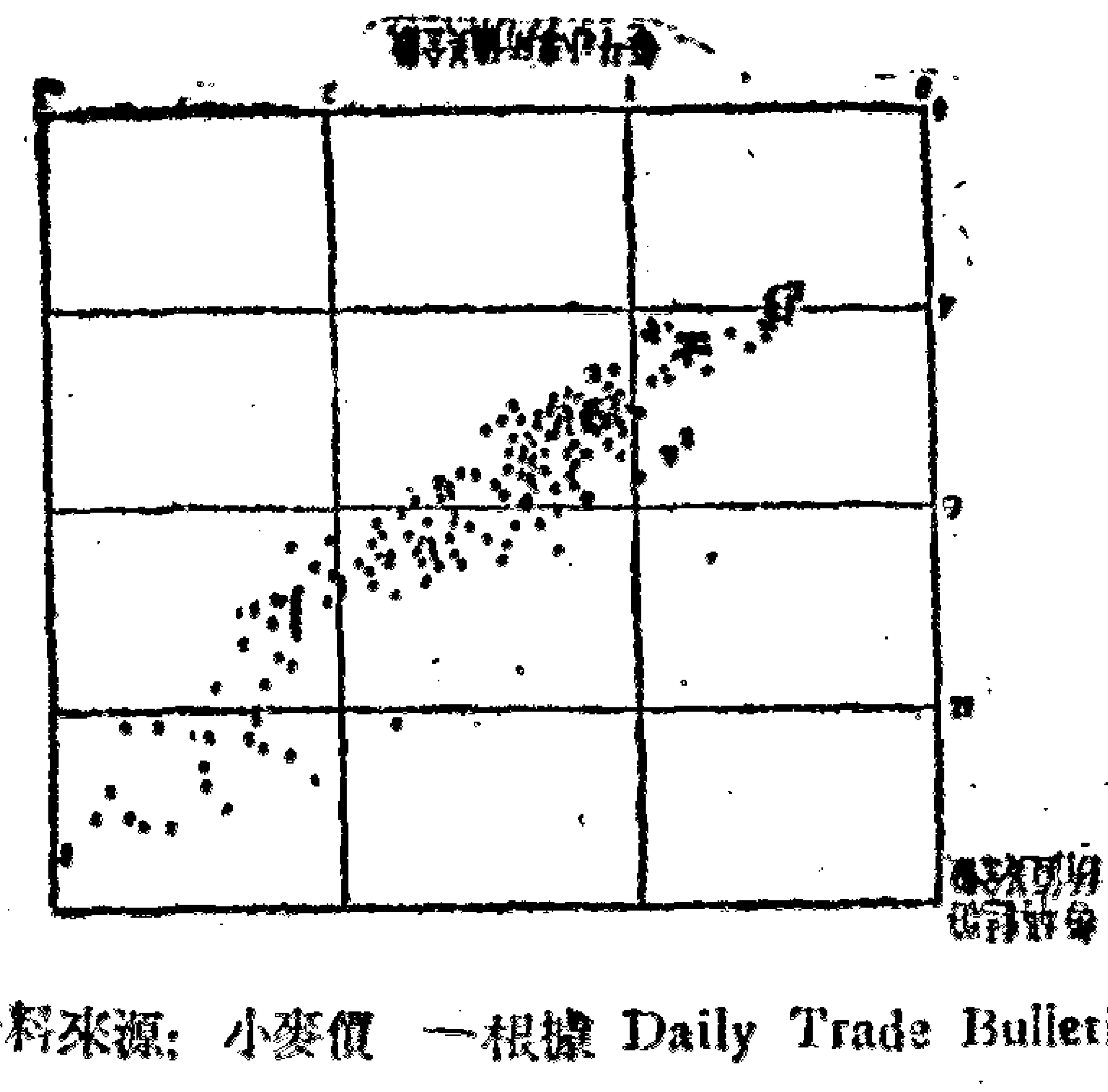
Sutcliffe, William G., *Statistics for the Business Man*, pp. 172–195; 217–237, Harper & Bros., New York 1925.

第　九　章

直　線　相　關

二種或二種以上數列之間,常發生關係,此種關係有考察與測量之必要.例如生活費用之變更與工資之變更;學生考試分數與其智慧商數;電流經過溶液之量與受電化反動而沈澱物質之量;經過時間之長度與留存記憶上學識資料之量等;其間有無關係,均有明瞭之必要.

此種數列間之關係或相聯,可以使之成立,並可用相關技術測量之.



材料來源:小麥價　—根據 Daily Trade Bulletin.
　　　　　麵粉價　—根據 Northwestern Miller.

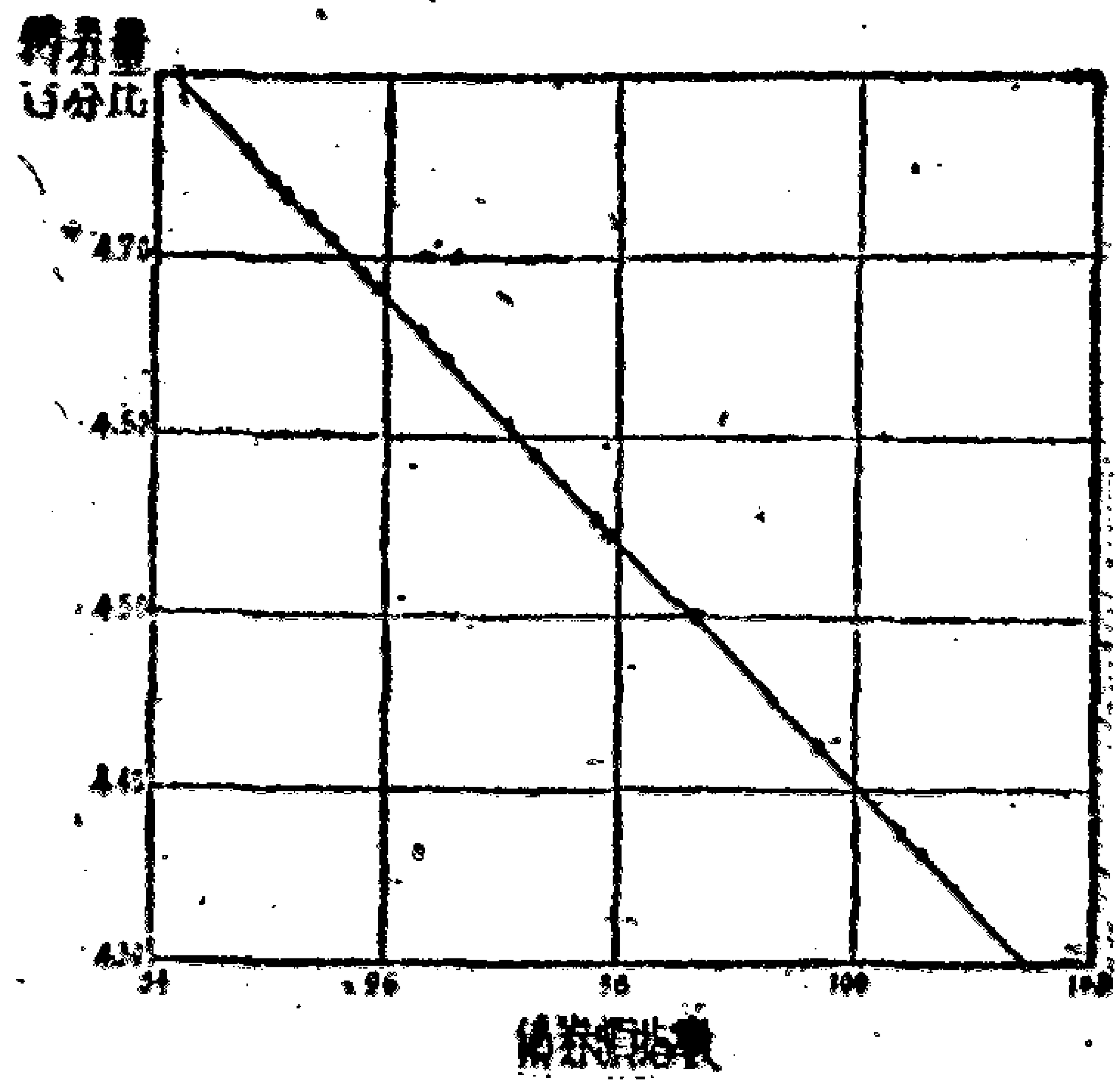
圖 21. 小麥價與麵粉價相關之分布圖,1911——1933,按月價格

散布圖

若相聯二數列爲之圖示，其一變數繪在 X 軸上而他一變數繪在 Y 軸上，所得結果爲一散布圖*. 若相聯變數繪在圖上有一定關係，則各點必循一固定移動線，或'途徑'，如圖 21 所示。

若關係爲完全則 X 軸上之每一值，在 Y 軸上必有一某值指出。在此種情形時，各點必與一曲線或直線相符合，而不致散布全面，在圖 22 上，債券量指數與債券額指數彼此交繪。因其中有一數列係由他一數列算出，故其關係自屬完全。

若數列之相聯不能完全，則選定 X 之某數值時，Y 亦有一固定之數值。因不完全之關係可多可少，故各點離開所示之直線或曲線



材料來源：Standard Trade and Securities Serv.ce, Standard Stat'st'cs Corporation.

圖 22. 債券量標準統計指數與債券額之指數之關係散布圖

---

* 自變數繪在 X 軸上，倚變數繪在 Y 軸上。

可遠可近，而成一種散布。若相聯之程度爲高，則散布必限於一狹窄徑上。二種材料之關係愈不完全，則離開指線愈遠。此種離散情形，稱爲'散布'。

迴歸線 改作回归线

移動之趨向可用'最小二乘'直線或曲線 * 加以界說（見第六章）。所得曲線稱爲迴歸線。若材料之趨勢爲迴歸線性（非直線性之迴歸在第十章討論之），所得方程式係屬下式：

$$Y=a+bX$$

上式 $a+b$ 之值可從'常態'方程式得到：

$$\text{(I)}\quad \Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)$$

$$\text{(II)}\quad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)$$

此與直線趨勢之情形相同（見第六章'最小二乘法之應用'）

估計之標準誤

此方程式用以估計相當於 X 某值之 Y 理論值。若關係不能完全，則實際值不能與理論相符合，因各值均散布於線之兩旁。若散布爲之，精確測量，則差異可爲之酌補而得一各值所在之距度。

此種量數，估計之標準誤，類似標準差。標準差係測量算術平均數兩旁之差離或散布，而估計之標準誤爲迴歸線兩旁差離或散布之量數。

標準差爲算術平均數兩旁差數之均方根平均數，而估計之標準誤爲迴歸線兩旁差數之均方根平均數。

---

* 他種配合曲線方法亦可應用，但其結果之効甚用少（比較隨手繪法）。

$$S_y = \sqrt{\frac{(d^2)}{N}}.$$

在上式

S_y＝估計之標準誤

d＝實際數(Y)對理論(Y_c)之差數，或($Y-Y_c$)

估計之標準誤其用途與標準差相同．算術平均數兩旁各量開一正及一負標準差包含全數之68%；迴歸線*兩旁各量開一正及一負估計之標準誤包含全數之68%．

標準誤之數目	包含全數之百分比
$\pm$ .6745S_y	50%
$\pm$1.0000	68%
$\pm$2.0000	95%
$\pm$3.0000	99.7%

表26材料中'最小二乘'迴歸線及估計標準誤之求法列舉如下：

(I)　$\Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)$

(II)　$\Sigma(XY)=a\Sigma(X)=b\Sigma(X^2)$

(I)　$1252=30a+6468b$

(II)　$322227=6468a+1,725,088.0b$

(I)　$269931=6468a+1,394,500.8b$ (方程式I乘215.6)

相減　$52296=\qquad 330,587b$

$b=.1582$

---

* 迴歸線兩旁各值，假定有常態或近於常態之分配．關於包含百分比之較詳討論，見第十一章．

表 26. 相關係數之計算——未分組材料

新英格蘭 1933 年 30 家報紙每日銷路與全國廣告之每行最少價格

(1) 報紙	(2) 銷路 (每千) (X)	(3) 每行價格 (每分錢) (Y)	(4) (XY)	(5) X^2	(6) Y^2	(7) 理論迴歸值 Y_c	(8) ($Y-Y_c$) d	(9) d^2
1	166	33	5478	27556	1089	34	−1	1
2	192	42	8064	36864	1764	38	+4	16
3	301	57	17157	90601	3249	55	+2	4
4	149	30	4470	22201	900	31	−1	1
5	111	25	2875	13225	625	25	+0	0
6	108	23	2484	11664	529	25	−2	4
7	446	75	33450	198916	5625	78	−3	9
8	381	65	24765	145161	4225	68	−3	9
9	399	70	27930	159201	4900	71	−1	1
10	158	32	5056	204934	1024	33	−1	1
11	451	9	35629	203401	6241	79	+0	0
12	133	27	3591	17689	729	29	−2	4
13	108	22	2376	11664	484	25	−3	9
14	154	30	4620	23716	900	32	−2	4
15	331	47	10857	53351	2209	44	+3	9
16	150	32	4800	22500	1024	31	+1	1
17	403	70	28210	192409	4900	71	−1	1
18	149	32	4768	22201	1024	31	+1	1
19	343	65	22295	117649	4225	62	+3	9
20	247	50	12350	61009	2500	47	+3	9
21	117	25	2925	13689	625	26	−1	1
22	231	47	10857	53331	2209	44	+3	9
23	217	43	9331	47089	1849	42	+1	1
24	196	42	8232	38416	1764	39	+3	9
25	166	33	5478	27556	1089	34	−1	1
26	124	25	3100	15376	625	27	−2	4
27	182	35	6370	33124	1225	36	−1	1
28	166	33	5478	27556	1089	34	−1	1
29	112	28	3136	12544	784	26	+2	4
30	177	35	6195	31329	1225	36	−1	1
	6463	1252	322227	1725088	60650			125

材料來源: Editor and Publisher, *International Yearbook for* 1933.

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y^2)}{N} - \left(\frac{\Sigma Y}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{60650}{30} - \left(\frac{1252}{30}\right)^2} = 16.74\text{分}$$

以 b 代入方程式 I

$$1252=30a+6468(.1582)$$

$$30a=228.7624$$

$$a=7.6254$$

迴歸線

$$Y_c=7.6254+.1582X$$

在上式

Y_c=每行最少價格(以分計)

X=銷路(分千計)

標準誤之計算法爲：從以上方程式(表 26，第 7 欄)求理論迴歸值，再求此值與實際值之差(表 26，第 8 欄)。

例如報紙 #3 之銷路(X)爲 301，其迴歸值可從下法求得*：

$$Y_c=7.6254+.1582(301)$$

$$Y_c=55\text{ 分}$$

估計之標準誤可從下式計算之：

$$S_Y=\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{N}}=\sqrt{\frac{125}{30}}$$

$$=\sqrt{4.17}=2.04\text{ 分}$$

基於以上方程式：

$$Y=7.625+.1582X$$

且其估計之標準誤既爲 2.04 分，則銷路達至 400.000 之報紙，其全國廣告每行最少價格可望其在 65 分到 77 分之間(三個標準誤——

* 符號 Y_c 用以區別理論迴歸值與實際值不同之處.

100之99.7%). 100中之95報紙(二個估計標準誤)屬於同樣銷路者,必有67分到75分間之每行最少價格.

以銷路值代入X,可得各值之距度:

$$Y_c=7.6268+.1582(400)..$$

其結果爲每行估計價格之理論值爲71分.若此值之上下各量開3個標準誤,則報紙之99.7%必在此限度之內;若此值之上下各量開2個標準誤,則報紙之95%必在此限度之內.

相關係數

估計標準誤之大小爲數列間相聯程度之測量.估計標準誤之值愈大,則迴歸線兩旁之散布愈大,因之兩數列之關係愈少.

但標準誤不能常作直接比較,因標準誤係用Y變值之原來單位表示,而各單位常常不同,智慧商數與考試分數之相聯及智慧商數與單字誤拼之相聯可以爲例.

兩種數列,其中常有一種有較小之距限.拼字測驗祇有二十個單字而以拼對者爲分數,算術測驗分數,自0至100%;前者迴歸線兩旁之離勢與後者相比,其限度自較狹小.今若以標準差(屬於Y值者)除估計之標準誤,所得結果爲百分比.兩種量數單位相同,離勢因數變爲常數,如此則不同離勢與不同單位所發生之困難,均可解除.

$$\frac{S_y}{\sigma_y}$$

若關係完全則對迴歸線必無離勢.S_y爲零,而其結果之比率亦爲零.若關係爲小,則標準誤必較大,而其最大値限爲標準値.因之

其比率可達1，或1 0%.

完全關係之表示爲比率等於零，不完全關係之表示，其值可爲100%. 此與通常關於此題之觀念相反，故較易明瞭之數值爲以一減去此比率：

$$1-\frac{S_y}{\sigma_y}$$

新量數之結果，最完全關係其值爲100%，最不完全關係其值爲零. 類似之量數稱爲相關係數，用作相聯之比較量數. 相關係數之公式爲

$$r=\sqrt{1-\frac{S_y{}^2}{\sigma_y{}^2}}$$

相關係數之值限與上述者相同，卽0至100%. 表26問題之 r 值爲

$$r=\sqrt{1-\frac{(2.04)^2}{(16.74)^2}}=99.25\%$$

關係雖高甚至完全但仍可相反；易言之，X 值增加可使其相當 Y 值減少. 在此種情形時，迴歸線向下傾斜. 本方程式之 b 值，卽傾斜係數（又稱迴歸係數），則爲負.

傾斜（或迴歸）係數之符號與 r 連用，以示其爲正或爲負.

相聯測量之問題，可分爲三部分：

1. 關係形式之決定——迴歸線.
2. 對於關係形之離勢之測量——估計之標準誤.
3. 關係測量化爲相對基數——相關係數.

積法差——未分組材料

從以下相關係數之根本公式；加以代數上之處理（見專門附錄），可以得到計算 r, S_y 及迴歸線*之較簡方法：

$$r=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

其較簡方法之公式爲†：

$$r=\frac{p}{\sigma_x\sigma_y}$$

若材料爲未分組者，則以上公式中

$$p=\frac{\Sigma(XY)}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)\left(\frac{\Sigma Y}{N}\right)$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma(X^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(Y^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma Y}{N}\right)^2}$$

從以下求 r 之原公式，爲之移項，可求得 S_y：

$$r=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

在上式中 r 及 σ_y^2 可從計算而知

$$r^2=1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

$$S_y^2=\sigma_y^2(1-r^2)$$

$$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

---

* 迴歸線假定爲直線者．

† 關於公式之導源，見專門附錄 V．

差方程式之始點在平均數，則迴歸線可從以下公式[*]決定之，

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

因 y 與 x 係各以對平均數之差數表示，因迴歸線必經過各平均數[†]之一點，故以該點爲始點時，a(y 截數)值必爲零．現既以各平均數之一點爲始點，則通常方程式(用對平均數之差數表示)，可解爲

$$y=a+bx$$

其中　$a=0$

而　$b=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

故　$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$

以零爲始點(或用實際數值表示)之通常方程式，可爲之變化決定，因

$$y=Y-\overline{Y}$$

$$x=X-\overline{X}$$

$$Y-\overline{Y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$$

關於上述問題(見表 26)：

$$p=\frac{\Sigma(XY)}{N}-\frac{\Sigma(X)}{N}\frac{\Sigma(Y)}{N}$$

$$=\frac{322,227}{30}-\left(\frac{6468}{30}\right)\left(\frac{1252}{30}\right)=1743.92$$

---

[*] 欲得數理證明，見專門附錄 II.

[†] 證明見專門附錄 II.

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma(X^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{1,725,088}{30}-\left(\frac{6468}{30}\right)^2}=104.97$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(Y^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{60,650}{30}-\left(\frac{1252}{30}\right)^2}=16.74$$

$$r=\frac{p}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{1743.92}{(104.97)(16.74)}=99.25\%$$

$$=\sigma_y\sqrt{1-r^2}=16.74\sqrt{1-(.9925)^2}=2.04$$

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_n}x$$

$$y=.9925\frac{16.74}{104.97}x$$

$$y=.1582x$$

$$Y-\overline{Y}=b(X-\overline{X})$$

$$Y-41.73=.1582(X-215.6)$$

$$Y=7.63+.1582X$$

積差法——分組材料

相關表

若分析數列以求相聯時,數項太多,則上述手續,殊不適宜.用之,不特計算困難,且計算愈繁,錯誤愈多.

處理多組材料之有效辦法,爲將材料歸入雙重次數分配表,或相關表.今將麥與麵粉價值之相聯求法,載在表27.

各數項可爲列入各方格內,依照 X 與 Y 值應歸入之組距而定之.因之,若有一數項其 X 值爲 .$.80 而其 Y 值爲 $.65,則其所應

表 27. 相關表——小麥及麵粉之按月價格, 1914——1933 年

X = 小麥每斗價格以美元計

Y = 麵粉每桶價格以美元計

組距	中點	差數d	次數f	fd	fd^2	.40-.59	.60-.79	.80-.99	1.00-1.19	1.20-1.39	1.40-1.59	1.60-1.79	1.80-1.99	2.00-2.19	2.20-2.39	2.40-2.59	2.60-2.79	2.80-2.99	共計	$f(d_x d_y)$
	中點					5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29		
		差數d				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
			次數f			20	6	25	37	52	24	15	15	13	18	6	5	4	240	
				fd		0	6	50	111	208	120	90	105	104	162	60	55	48	1110	
					fd^2	0	6	100	333	832	600	540	735	832	1458	600	605	576	7217	
1500-1599	15.5	12	1	12	144													$_{144}1^{144}$		144
1400-1499	14.5	11	5	55	605											$_{110}1^{110}$	$_{121}2^{242}$	$_{132}2^{264}$		616
1300-1399	13.5	10	5	50	500										$_{90}1^{90}$	$_{100}2^{200}$	$_{110}1^{110}$	$_{120}1^{120}$		520
1200-1299	12.5	9	10	90	810										$_{81}6^{486}$	$_{90}2^{180}$	$_{99}2^{198}$			864
1100-1199	11.5	8	5	40	320									$_{64}1^{64}$	$_{72}3^{216}$	$_{80}1^{80}$				360
1000-1099	10.5	7	14	98	686									$_{56}6^{336}$	$_{63}8^{504}$					840
900-999	9.5	6	17	102	612						$_{30}1^{30}$	$_{36}1^{36}$	$_{42}10^{420}$	$_{48}5^{240}$						721
800-899	8.5	5	28	140	700					$_{20}4^{80}$	$_{25}8^{200}$	$_{30}11^{330}$	$_{35}4^{140}$	$_{40}1^{40}$						790
700-799	7.5	4	46	184	736			$_{8}2^{16}$	$_{12}7^{84}$	$_{16}22^{352}$	$_{20}12^{240}$	$_{24}3^{72}$								764
600-699	6.5	3	54	162	486			$_{6}5^{30}$	$_{9}20^{180}$	$_{12}25^{300}$	$_{15}3^{45}$		$_{21}1^{21}$							576
500-599	5.5	2	16	32	64		$_{2}1^{2}$	$_{4}4^{16}$	$_{6}10^{60}$	$_{8}1^{8}$										86
400-499	4.5	1	34	34	34	$_{0}15^{0}$	$_{1}5^{5}$	$_{2}14^{28}$												33
300-399	3.5	0	5	0	0	$_{0}5^{0}$														0
共計			240	999	5697															6334

列入之方格，爲 .80——.89 之 X 組及 \$.60——.69 之 Y 組.

若不用組中點以代實際數值，而假定 X 及 Y 值之始點，則計算可大較簡捷.

對假定始點之差數應以組距測量之，此與計算算術平均數及標準差之簡捷法相同.

如是，用'積差法'以決定 r 之各必需數值，可立刻求到.

$$r=\frac{p}{\sigma_x\sigma_y}$$

在上式內

$$p=\frac{\Sigma[f(d_xd_y)]}{N}-\frac{\Sigma(fd_x)}{N}\cdot\frac{\Sigma(fd_y)}{N}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma(fd_x^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma fd_x}{N}\right)^2}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(fd_y^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma fd_y}{N}\right)^2}$$

fd_xd_y 總和之決定法如下:

1. 求每方格內 d_x 與 d_y 值之乘積(載在每方格之左下角上).

2. 所得之乘積以方格中間所載之次數乘之(所得結果載在方格之右上角上).

3. 將方格右上角所載之乘積每橫行作一總和而書於 $f(d_xd_y)$ 欄下之相當格內.

關於 r 之一切計算，均爲組距而非實數. 此應注意者. 表 27 方法之應用詳示如下.

$$p=\frac{\Sigma[f(d_xd_y)]}{N}-\frac{\Sigma(fd_x)}{N}\cdot\frac{\Sigma(fd_y)}{N}=\frac{6335}{240}-\left(\frac{1119}{240}\right)\left(\frac{999}{240}\right)$$

$$=26.3958-(4.6625)(4.1615)=6.9881$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma f(d_x{}^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma fd_x}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{7217}{240}-\left(\frac{1119}{240}\right)^2}$$

$$=\sqrt{30.0708-21.7389}=2.8865$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma f(d_y{}^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma fd_y}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{7217}{240}-\left(\frac{1119}{240}\right)}$$

$$=\sqrt{23.7375-17.3264}=2.5320$$

$$r=\frac{p}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{6.9881}{(2.8865)(2.5320)}=95.61\%$$

估計之標準誤可從下式計算之

$$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

先將 σ_y 化至原來單位，即以 Y 之組距大小乘之。

$$S_y=2.5320\sqrt{1-(.9561)^2}=.7419$$

迴歸線現可求到，用 x 及 y 之原來値，而非其組距値：

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

$$y=.9561\left(\frac{2.5320}{2.8865}\right)=.8387x$$

但因

$$y=Y-\overline{Y}$$

$$x=X-\overline{X}$$

$Y-7.6625=.8387(X-1.4325)$，而 $Y=6.4611+.8387X$

定限與餘相關係數

若因變數(Y)與自變數(X)因果相關而兩數列之因素離勢相等，r^2 測量 Y 之二次動差＊而可用 X 說明者†，量數(r^2)因之稱爲**定限係數**(若相關爲曲線時則此名詞稱爲定限指數)。

餘相關係數爲相聯之缺乏之一比較量數，猶相關係數爲相聯之程度之一比較量數。

$$\text{餘相關係數}=\sqrt{\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

餘相關係數平方之解釋與相關係數平方之解釋類似而稱之爲**不定限係數**。

$$1=r^2+k^2$$

$$k=\sqrt{1-r^2}$$

數項之校正

數項太少時，相關係數值常有過大而必須調整之處，而標準誤亦以其過小必須調整。

校正之公式爲：

$$\overline{S}_y^2=S_y^2\frac{(N-1)}{(N-2)}$$

$$\overline{r}^2=1-(1-r^2)\frac{(N-1)}{(N-2)}$$

＊ 二次動差爲標準差平方之一專門名詞。

† 見 Ezekiel, M., *Methods of Correlation Analysis*, 735 頁，注 4.

在上式 $\overline{S}$ 及 $\overline{r}$ 爲校正值*

他種相關法

等級相關

測量各項目等級相關之方法，在教育與心理上效用特著，用此方法時，材料係依次排列，如表 28 所示。

以下公式（司畢門†公式）可以適用。

$$\rho=1-\frac{6\Sigma(D^2)}{N(N^2-1)}$$

表 28.　示測量相聯之等級方法

十五個學生在兩種測驗上之假設分數

學生號數	測驗 1		驗測 2		等級差 (D)	(D^2)
	分數	等數	分級	等級		
# 1	100%	1	90%	3	2	4
2	98	2	95	1	1	1
3	95	3	89	4	1	1
4	91	4	87	5	1	1
5	90	5	93	2	3	9
6	85	6	86	6	0	0
7	83	7	80	7	0	0
8	82	8	79	8	0	0
9	81	9	76	10	1	1
10	80	10	77	9	1	1
11	70	11	72	11	0	0
12	65	12	60	14	2	4
13	63	13	62	13	0	0
14	60	14	50	15	1	1
15	50	15	63	12	3	9
						32

* $\overline{S_y}$ 及 $\overline{r}$ 公式之較詳分析，見 Ezekiel, M., *Methods of Correlation Analysis*, p. 121.

† 此公式之導源，見 Kelley, T.L., *Statistical Method*, 191—194 頁.

在上式

ρ＝相關量數*

D＝每人之二個等級之差數

N＝人數

關於以上問題

$$\rho=1-\frac{6(32)}{15(325=1)}=.953$$

若數人有相同分數因而有相同等級時，則爲之決定其適當等級共有二法。第一爲跨計法，卽同分數者得同一等級；但再下一人所得之等級爲其以上各人均得遞次等級時，依次所應得之等級。

第二爲中位級法，卽將同分數之數人依次應得之各等級平均而取其平均之等級，給予各人。

學生	分數	跨計法	中位級法
A……………………	100%	1	1
B……………………	95	2	3
C……………………	95	2	3
D……………………	95	2	3
E……………………	94	5	4
F……………………	92	6	5.5
G……………………	92	6	5.5
H……………………	90	8	6

假定原來材料組成常態分配，則以下關係可以存在於 r（相關係數）與 ρ 之間。

* 符號 ρ 爲希臘文小字母 rho。

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$$

若所需之等級相關祇為近似估值，則司皋門簡捷公式可以採用：

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}$$

在上式 G 代表等級間之正差。

相關與時間數列

求二種數列相關時，則第一數列末端之高數項目必與第二數列之高數項目相聯，以受趨勢之影響，相關不免過大。在任何一種情形之時長期相關有遮蔽短期移動之趨勢，但此短期趨勢，實為應注意之點。

欲克服此種困難，以下方法可以採用：

1. 對趨勢之差數，可求其相關。

2. 初級差數（數列中每項目與其前一項目之差），可求其相關。

3. 調整二數列而求其趨勢。

相關之種類

1. 簡單相關：

二變數；一為自變數，一為因變數。

A. 直線相關：一種變數之變與他種變數之變成不變比率。

1. 正：一種變數之增加，伴以他種變數之增加。

2. 負：一種變數之增加，伴以他種變數之減少。

B. 非線直（曲線）相關：一種變數之變與他種變數之變，成一正

或反比率，但無一定不變之比率。

II. 複相關:

含有二種以上之變數。一種變數爲因變數，而他種變數爲自變數。複相關可分爲:

A. 直線:若干變數其相聯爲正，而他種變數其相聯爲負。

B. 非直線

C. 連合:各種自變數與各個因變數之相關，隨另一自變數之變而變。

III. 分析相關:

分析相關測量一種自變數與一種因變數之相聯。凡其他指定自變數之變異，均爲酌量加減。

參考書

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 129–172; 289–290, L. C. Heath & Co., New York, 1931.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 248–290, Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F.E., & Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 405–425, Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *An Introduccion to Economic Statistics*, pp. 218–224; 364–371. McGraw-Gill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R., & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 226–250. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 180–200; 206–210; 313–327. Macmillan Co. New York, 1930.

Garrett, Henry E., *Statistics in Psychology and Education*, pp. 149–168. Longmans, Green & Co. New York, 1926.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics* pp. 189–193; 195–220; 248–256. Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Statistics In Education*, pp. 141–173. Ginn & Co., New York, 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 263–287. Harper & Bros., New York, 1924.

Kelley, Truman L., *Interpretation of Educational Measurements*, pp. 163–171. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1927.

Kelley, Truman L., *Statistical Method*, pp. 151–185. Macmillan Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 363–430. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 147–179. Century Co., New York, 1925.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 143–208;

237–249. D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Otis, Arthur S., *Statical Method in Educational Measurements*, pp. 175–205. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1926.

Richardson, C. H., *An Introduction to Statistical Analysis*, pp. 135–162. Harcourt, Brace & Co., New York, 1934.

Rietz, H. L. (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 120–129; 150–165. Houghton Mifflin Co., New York, 1926.

Riggleman, John R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 272–295. McGraw-Hill Book Co., New York, 1932.

Ruch, G. M., & Stoddard, George R., *Tests and Measurements in High School Instruction*, pp. 355–363. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1927.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 232–270; 294–296. Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 187–223. Macmillan Co., New York, 1925.

Trabue, Marion R., *Measuring Results in Education*, pp. 389–411. American Book Co., New York 1924.

Yule, G. Udny, *An Introduction to the Theory of Statistics*, pp. 157–207. Charles Griffin & Co., Ltd., London, 1929.

第　十　章

相關——非直線，複，分析

迴歸直線形容變量間之相聯，有時未能完善．僅一直線常不能形容複雜之關係，而有應用曲線之必要．

例如就降雨量與收穫量之相聯爲之細察，卽發現超過某點，降雨量加倍，收穫量未必加倍．反之，超過某點收穫量卽遞減以至消滅．

迴歸曲線之種類

各種能用之曲線，與趨勢一章（第七章）所敍述者類似．

最重要二種曲線爲：

1．定冪曲線之如下式者

$$Y=a+bX+cX^2+\cdots\cdots$$

2．變冪曲線之如下式者

$$Y=ab^x$$

用對數表示變冪曲線又可分爲

a．對數式

$$\log Y=a+b\log X$$

$$\log Y=a+b\log X+c\log X^2$$

b．單對數式

$$\log Y = a + bX$$

$$\log Y = a + bX + cX^2$$

或

$$Y = a + b \log X$$

$$Y = a + b \log X + c(\log X)^2$$

圖 23 例示此類曲線之幾種形式。

以下各種曲線之常態方程式，均可用前述關於趨勢曲線（第六章）之方法導來之。

關於定冪類第二級拋物線之方程式

$$Y = a + bX + cX^2$$

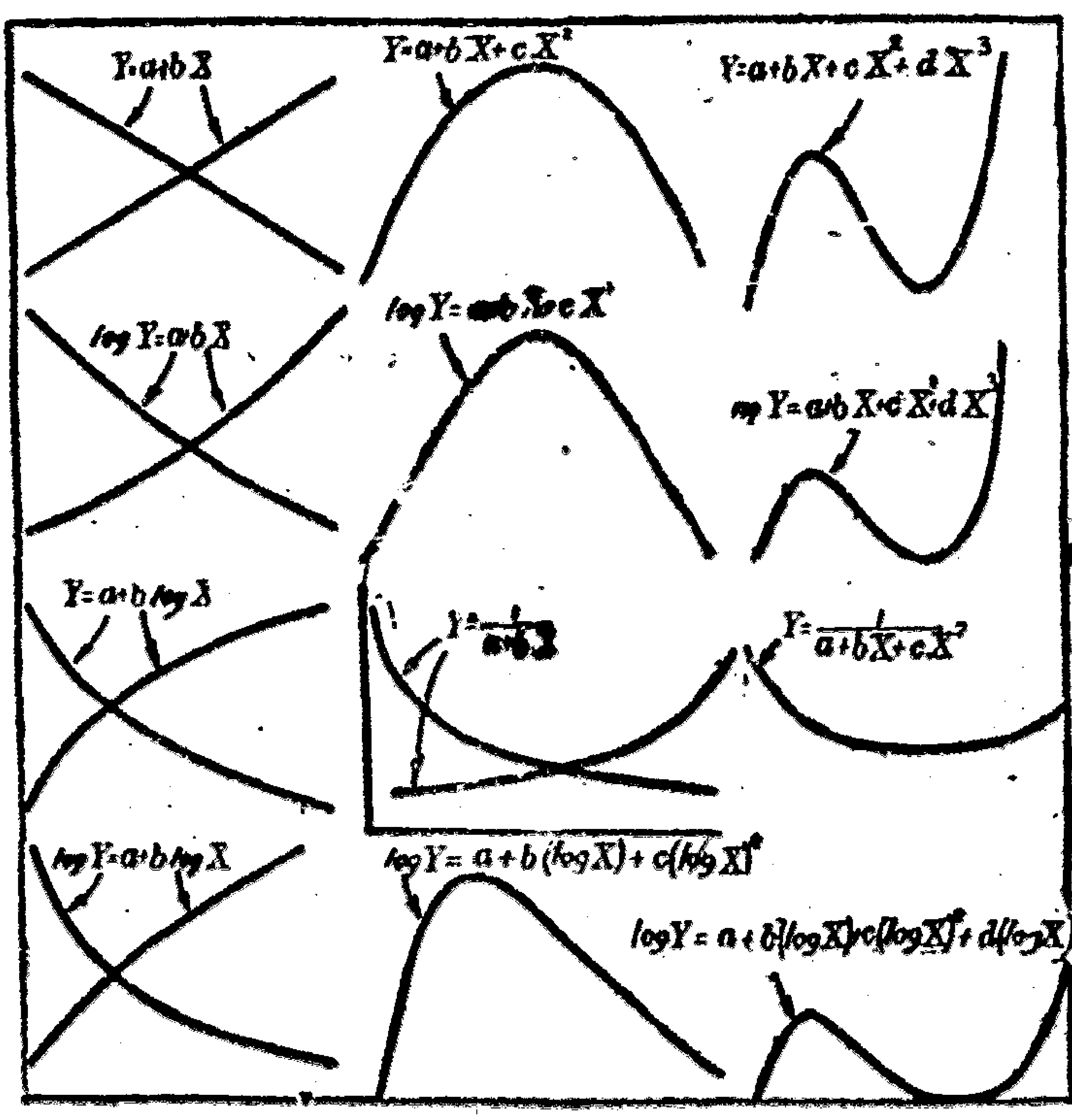


圖 23.　數種含有數理函數之曲線

其'常態'方程式爲

$$(I)\quad \Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)+c\Sigma(X^2)$$

$$(II)\quad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)+c\Sigma(X^3)$$

$$(III)\quad \Sigma(X^2Y)=a\Sigma(X^2)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^4)$$

關於單對數式方程式

$$\log Y=a+bX+cX^2$$

其'常態'方程式爲

$$(I)\quad \Sigma(\log Y)=Na+b\Sigma(X)+c\Sigma(X^2)$$

$$(II)\quad \Sigma(X\log Y)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)+c\Sigma(X^3)$$

$$(III)\quad \Sigma(X^2\log Y)=a\Sigma(X^2)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^4)$$

在配合以下方程式之前

$$Y=\frac{1}{a+bX}$$

此方程式須先變爲

$$\frac{1}{Y}=a+bX$$

$$\text{或}\quad Y'=a+bX$$

在上式 Y' 爲 Y 之倒數.

現曲線之配合,可從求得常態之方程式而照常進行

$$(I)\quad \Sigma(Y')=Na+b\Sigma(X)$$

$$(II)\quad \Sigma(XY')=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)$$

非直線之估計標準誤

曲線之估計標準誤可從以下公式求得直線而決定之.(見第九章之估計標準誤).

$$S_y=\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{N}}$$

或從*

$$S_y^2=\frac{\Sigma(Y^2)-a\Sigma(Y)-b\Sigma(XY)-c\Sigma(X^2Y)-d\Sigma(X^3Y)-\cdots}{N}$$

定冪數列以外各種曲線亦可採用此公式,祇須應用 X 或 Y 之對數或其例數,依方程式之需要而定.故下式之曲線

$$\log Y=a+bX+cX^2$$

其公式可讀爲

$$S_y^2=\frac{\Sigma(\log Y)^2-a\Sigma(\log Y)-b\Sigma(X\log Y)-c\Sigma(X\log X)}{N}$$

相關指數——roh(ρ)

相關之比較量數若從曲線上計算而得,則稱爲相關指數.此量數指定用希臘文字母'rho'或 ρ 爲符號.

$$\rho=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

若迴歸確爲直線性,則量數 ρ 等於相關係數,r.若迴歸爲非直線性,則曲線較爲適合於材料之性質.因之,曲線上之差數與直線上之差數相較,有較小之趨勢.標準誤亦相較爲小,其結果 rho 之値相較爲大.*Rho* 常較 r 爲大或與之相等.Rho 可從以下公式計算而得:

$$\rho^2=\frac{a\Sigma(Y)+b\Sigma(XY)+c\Sigma(X^2Y)+\cdots\cdots-Nc_y^2}{\Sigma(Y^2)-Nc_y^2}$$

相離指數,定限指數,及不定限指數在直線相關上,其計算法與

---

* 此公式之導源與載在專門附錄 V 之直線標準誤公式之導源大略相同.

意義均相同（見第九章定限與相關係數）.

若迴歸之曲線相同，相關指數(rho)之各值可與另一相聯之值比較，此可注意者.

充其量，曲線迴歸須謹慎應用，因此線愈複雜，則相關指數愈高．若一曲線極度複雜而能經過一切所用之點，則 100% 之最高值可以達到．結果，此指數極少意義.

相關比

相關比，應用甚少．求此比時，若散布圖分為行列，則迴歸曲線必經過各行之平均數.

此迴歸線並無任何方程式為之界說.

因其材料必須分組，相關比可從以下公式計算而得：*

$$\eta=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{ay}}{\sigma_y^2}}$$

在上式 σ_{ay} 為各行平均數兩旁各數值之標準差.

η 之值以相關表上各行列之數目為轉移，而非以項目之多寡為準．若相關表上有充分行列，使每行祇有一項目；則用相關比法而求得之相關可達完全．欲使分組達到十分精細，可用下式以校正之：

$$\text{已校正之}\ \eta^2=\frac{\eta^2-\frac{(\kappa-3)}{N}}{1-\frac{(\kappa-3)}{N}}$$

在上式中 κ** 為關表行列之數目.

---

* 符號 η 為希臘小字母 eta.

** 符號 κ 為希臘小字母 kappa.

因經過各行平均數之曲線最能形容材料，故此曲線上之差數爲最小．因之，相關比或較相關指數或相關係數爲大或與其相等．若相關大致爲直線者，則各平均數與一直線相符合而 eta 與 r 相等．

因若迴歸確爲直線者，rho 將等於 r，故：

$$\eta=\rho=r$$

但若爲非直線者：

$$\eta>\rho>r$$

因之，若迴歸根本上爲非直線者，η 必大於 rho．迴歸直線性之測驗，係基於以下之根據．

$$\zeta=\eta^2-r^2$$

在上式中 ζ(zeta)* 爲直線性之測驗．

若 $\zeta=0$，則迴歸爲直線．若 $\zeta\neq0$，則迴歸爲非直線．

接續消除法

科學實驗中，常可控制各種變數，而祇使在研究中之因素存在並觀察其變化；但在若干範圍尤其在社會科學及商業中，此種控制勢不可能，因其中有極多不可控制之因素同時變化．研究此多種因素與在研究中某因變數之關係而將其他變數除出，可用接續消除者．

廣告之效力，若以定限廣告之所得之答復即顧客剪下廣告購物度量之，端賴於所登報紙之銷路及廣告之篇幅†．若須研究廣告篇幅大小之效力，而酌量加減或最好排除所登各種報紙不同銷路之影

---

* 符號 ζ 爲希臘小字母 eta．

† 假定各報之廣告樣片皆同．

爾,則銷路與答復間之關係可用直線或非直線相關研究之.迴歸綫係由通常方法決定之.因銷路之變數非爲決定答復數目之唯一因素,故此變數之各點(實際數值)必散布於迴歸線上而不能與之符合.

其因各種不同銷路而生之相當理論數值可從迴歸線決定,而實際答復數與理論值之差別亦可由迴歸線求得.

此理論數值稱爲剩餘數(z')*.

$$z' = Y - Yc$$

此剩餘數可與廣告篇幅之大小求相關.此迴歸表示各種報紙銷路不變時,其報答之差異如何.

另一有效方法爲應用迴歸線以調整材料,使報答似由一種有固定銷路(如100,000分)之報紙得到.應用迴歸線,可對銷路較少之報紙予以加權,對銷路較多之報紙予以酌減.b值(迴歸線上)表示銷路每一單位所得答復之增加,而用之以達此目的.

複相關

一種數列之變動,極少祇依賴於一種簡單之因素或原因.此種數列與使之發生變動或與之相聯之他種變數之間之相關測量,稱爲複相關.

複相關包含一種因變數與二種或以上自變數之間關係或相聯之測量.其程序與簡單相關同,其不同者爲迴歸方程中加上其他變數.若祇有二種自變數,則直線迴歸方程式如下:

$$X_1 = a + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

在此式中,X_1爲因變數或估計變數(替代前用之符號Y),而X_2

---

*其中數值有爲負數者,顯示特種銷路之報紙有平均以下之答復.

及 X_3 爲自變數.

迴歸係數或傾斜度, $b_{12.3}$, 表示在 X_2 之一單位變更時, 因變數應得之單位變更, 而 $b_{13.2}$ 表示在 X_3 一單位變更時, X_1 應得之變更. 但計算此種迴歸係數時, 每種自變數與因變數相關須考慮及之. 故其係數係表示此因變數與一種自變數之'淨關係', 而他種因素或變數在方程式中考慮及者, 則予以斟酌加減. 圓點以下之小字(如 $b_{12.3}$)表示其他變數除外. 故 $b_{12.345}$ 即表示變數 X_2 與 X_1 之關係, 而 X_3, X_4, X_5 均予酌量加減, 或均予除外. 最後所述係數, 稱爲淨迴歸係數.

係數值可照通常方法得到, 即利用前述(見第六章最小二乘線及最小二乘法之應用)求得'常態'方程式之方法. 若有三種自變數, 且爲直線相關, 則:

$$X_1 = a + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$$

其常態方程式爲

$$\text{(I)}\quad \Sigma(X_1) = Na + b_{12.34}\Sigma(X_2) + b_{13.24}\Sigma(X_3) + b_{14.23}\Sigma(X_4)$$

$$\text{(II)}\quad \Sigma(X_1X_2) = a\Sigma(X_2) + b_{12.34}\Sigma(X_2^2) + b_{13.24}\Sigma(X_2X_3) + b_{14.23}\Sigma(X_2X_4)$$

$$\text{(III)}\quad \Sigma(X_1X_3) = a\Sigma(X_3) + b_{12.34}\Sigma(X_2X_3) + b_{13.24}\Sigma(X_3^2) + b_{14.23}\Sigma(X_3X_4)$$

$$\text{(IV)}\quad \Sigma(X_1X_4) = a\Sigma(X_4) + b_{12.34}\Sigma(X_2X_4) + b_{13.24}\Sigma(X_3X_4) + b_{14.23}\Sigma(X_4^2)$$

假定方程式之中點在各平均數之一點, 則此方程式簡化爲 *:

---

* 參考專刊附錄 VII——'a'可從第一'常態'方程式求得:

$$\Sigma(X_1) = Na + b_{12.34}\Sigma(X_2) + b_{13.24}\Sigma(X_3) + b_{14.23}\Sigma(X_4)$$

$$(\text{I})\quad p_{12}=b_{12.34}\sigma_2^2+b_{13.24}p_{23}+b_{14.23}p_{24}$$

$$(\text{II})\quad p_{13}=b_{12.34}p_{24}+b_{13.24}\sigma^2_3+b_{14.23}p_{34}$$

$$(\text{III})\quad p_{14}=b_{12.34}p_{24}+b_{13.24}p_{34}+b_{14.23}\sigma^2_4$$

以上方程式可以同時解答,以求得到 $b_{12.34}$, $b_{13.24}$ 及 $b_{14.23}$ 各必需之值.

估計之標準誤可從下式計算而得

$$S_{1.234}=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$ 或從下式* 更爲簡捷

$$S^2_{1.234}=\sigma_1^2-b_{12.34}p_{12}-b_{13.24}p_{13}-b_{14.23}p_{14}$$

而複相關之係數可從下式得到

$$R_{1.234}=\sqrt{1-\frac{S^2_{1.234}}{\sigma^2_1}}$$

或

$$R^2_{1.234}=\frac{b_{12.34}p_{12}+b_{13.24}p_{13}+b_{14.23}p_{14}}{\sigma^2_1}$$

複相離,定限及不定限之係數可以簡單相關求得之:

$$X_1=a+f(X_2)+f(X_3)+f(X_4)+\cdots$$

上式'$f(X_2)$'表示 X_2 之任何函數,如拋物線等.當函數逐漸增加時,計算之工作隨之增加,以至使此技術礙難進行. +

淨相關

淨相關係數

---

* 見專門附錄 VIII.

+ 一個較爲省力之求曲綫性複相關法,載在 Ezekiel,M., *Methods of Correlation Analysis.* 書中.

若欲計算每種自變數之個別或淨純影響，可用淨相關之技術。

淨相關係數為因變數與一自變數間相聯之比較量數，排出其他自變數之影響。

有數種公式，可用以計算淨相關。

$$1.\quad r_{13.24}=\sqrt{b_{13.24}\cdot b_{31.24}}$$

$$2.\quad r_{12.3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\sqrt{1-r^2_{23}}}$$

$$3.\quad r_{14.23}=1-\frac{(1-R^2_{1.234})}{(1-R^2_{1.23})}$$

部分相關之係數

一個性質類似而計算較易之係數稱為部分相關係數($_{12}r_{34}$)。

淨相關與部分相關之區別，可以顯示，即將淨相關係數與以下相關係數比較*：

$$(X_2-b_{23.4}X_3-b_{24.3}X_4)\text{ 與 }(X_1-b_{13.4}X_3-b_{14.3}X_4)$$

及將部分相關係數與以下二項之相關比較：

$$X_2\text{ 與 }(X_1-b_{13.24}X_3-b_{14.23}X_4)$$

部分相關係數可從下式計算而得：

$$_{12}r^2_{34}=\frac{b^2_{12.34}\sigma^2_2}{b^2_{12.34}\sigma^2_2+\sigma^2_1(1-R^2_{1.234})}$$

小字母左旁之小數目字，表示應予除去之變量。

* Ezekiel 在其 *Methods of Correlation Analysis*，書中 183 頁提及。

參 考 書

Bowley, Arhur L., *Elements of Sta:is:ics*, pp. 350-408. P. S. King & Son, London, 1937.

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 290-310; 315-343. Heath & Co., New York, 1931.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 290-304. Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden, D. J., *Practical Business Statis ics*, pp. 431-435. Preneice-Hall Inc., New Ycrk 1934.

Crum, WilliamL., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic S atis ics*, pp. 247-266. McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R., & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 250-280. John Wiley & Sons, Inc., New Ycrk, 1930.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 201-206. Macmillan Co., New York, 1930.

Fisher, R. A. *Statistical Methods for Resea ch Workers*, pp. 252-223. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1932.

Garrett, Henry E., *S a:istics in Psycho!ogy and Education*, pp. 203-213; 221-261. Longmans, Green & Co., New Yerk, 1926.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 193–195; 221–234; 237–246; 256–276. Macmillan Co., NewYork, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 177–186; 256–315. Ginn & Co., NewYork, 1924.

Jerome Harry, *Statistical Method*, pp. 286. Harper Bras., New York, 1924.

Kelley, Truman L., *Interpretation of Educational Measurements*, pp. 186. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1927.

Kelléy, Truman L., *Statistical Method*, pp. 185–310. Macmillan Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 432–452; 453–514. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 200–213; 245–279. Century Co., New York, 1925.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 250–308. D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Otis, Arthur S., *Statistical Method in Educational Measurements*, pp. 206–245. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1926.

Richardson, C. H., *An Introduction to Statistical Analysis*, pp. 201–203. Harcourt, Brace & Co., New York, 1934.

Rietz, H. L., (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 129-149. Houghton Miffin Co., Nerk, 1924.

Riggleman, John R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 294, McGraw-Hill Book Co., New, York, 1932.

Rugg, Garold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 276-306, Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

Sutcliffe, William G., *Statistics for The Business Man*, pp. 224-228, H rper & Bros., New York, 1930.

Yule, G. Udny, *An Introduction to the Theory of Statistics*, pp. 210-252; 317-332, Charles Griffin & Co., Ltd. London, 1929.

第十一章

品質相關

前二章所討論者爲某事項之二種可量特性之相聯．易言之，某事項之二種可量數値爲之決定，再進而計算各對偶數量之相關係數．因之，若一羣人之身高與體重測量後，卽可計算其相關之係數．此係數可顯示較高之身與較重之體互相關聯．

各種特性之測量，有時爲不可能．例如許多特性祇有品質而無變數，如光明與黑暗，優與劣等．卽如身高與體重之相聯，亦可將個人分爲體輕與體重，身高與身矮．故每人身高與體重之相聯，可在下列四項表上交互分類，其中之 a, b, c, d 代表每人之二種對偶特性．

	矮	高	總計
輕……	a	b	
重……	c	d	
總計……			N

若相聯爲完整——卽身高者皆體重，身矮者皆體輕——各項目可歸納爲二格之內——在本例爲 a 與 d．若絕對無相聯——卽一人之身高或身矮與其體重毫不相涉——則各項目必任機分配於四格之內．因每一項目可在任何一格內發現，故各格之數目有相等之趨勢．

同理,品質之特性若有二種以上之變數,亦可在一表列出.下表即爲其例.

	A	B	C	D	總計
A′	A A′				n_{r1}
B′		n_{rc} B B′			n_{r2}
C′			C C′		n_{r3}
D′				D D′	n_{r4}
總計	n_{c1}	n_{c2}	n_{c3}	n_{c4}	N

表中 $ABCD$ 及 A',B',C',D',爲二套品質之分類*.

在此項表上若相聯爲完整,則表之頂欄與左欄品質數目相等時,各項目必歸入對角線格內,因變數 A 必與品質 A' 相伴,變數 B 必與品質 B' 相伴,等等.若毫無相聯則各項目有均勻分配於各格內之趨勢.

基於上述事實,可以計算相聯係數,以作相關係數之用.

列聯係數

相聯之係數(均方列聯之係數)係基於某格內實際發現之項目與其格內由於機遇而發現之項目之比較,或係基於實際分配與缺乏相聯時所發現之分配之比較.

若 n_r 爲某橫行之項目,n_c 爲某縱行之項目,而 n_{rc} 爲某格內之項目,則

$$n_{rc}=\frac{n_r n_c}{N}$$

爲實際項目與因機遇而發現之項目之差.但此數值之平方與理

*. 品質之分類,若多於二項,如劣、平、佳、優,應依次排列.

論項目之比率爲χ^2（配合度之測驗）+ 或

$$\chi^2=\left[\frac{\left(n_{rc}-\frac{n_r n_c}{N}\right)^2}{\frac{n_r n_c}{N}}\right]$$

皮而生氏之均方列聯，ϕ^2 * 可以 N 除此值而求得之：

$$\phi^2=\frac{\chi^2}{N}$$

而均方列聯係數爲

$$CC=\sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}}=\sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}$$

猶爾氏將此公式簡化如下：

$$C=\sqrt{\frac{S-N}{S}}$$

在上式

$$S=\Sigma\left(\frac{n^2{}_{rc}}{\frac{n_r n_c}{N}}\right)$$

或

$$S=N\Sigma\left(\frac{n_{rc}}{n_r n_c}\right)$$

計算之步驟

1. 將每格內之數值($n_{rc}{}^2$)平方之.

+ 見本章配合度節。

* ϕ 爲希臘字母 phi。

2. 在每格內，以該縱行數目(n_c)乘該橫行之數目.

3. 將每格內之平方值$(n_{rc})^2$以其相當之$n_r n_c$除之.

4. 將各橫行相加而以N除之.所得之值爲S.

5. 代入下式†:

$$C=\sqrt{\frac{S-N}{S}}$$

四元表 (2×2 分類)

二種變量分爲兩不相容之類，A 與非 A，B 與非 B.

1. 猶爾氏之相聯係數及綜合係數×.

相聯係數爲

$$Q=\frac{ad-bc}{ad+bc}$$

綜合係數 *爲

$$\omega=\frac{\sqrt{ad}-\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}$$

其中 a, b, c, d 代表各格內之次數如下:

a	b
c	d

若相關爲完整，各項目必集中於其中二格，非 ad 卽 bc，故 Q 及 ω 必

† 表中分類之項目影響 C 之最大可能值. 若表之分類爲 2×2，C 不能超過 .707; 若分類爲 4×4，則最高值爲 .866; 若分類爲 5×5，則最高值爲 .894; 若分類爲 10×10，則最高值爲 .949.

× 對於此二公式之應用頗有提出異議者.

* ω 爲希臘文字母 omega.

等於1.00或−1.00。若無相關存在，則各項目之分配相等 $(a=b=c=d)$，故 Q 與 ω 必等於零。

2. 皮而生氏餘弦方法。

四元表餘弦方法之相關係數為

$$r=\cos\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}\pi$$

此係數之變化，可自 $r=0$ 至 $r=1.00$。若係數為完整，則祇有二格內含次數(a 及 d 或 b 及 c)，故 $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}$ 必等於零而 r 必等於1.00。若各項目之分配相等，$a=b=c=d$，則其分數必等於 .50 而 $r=.00$。

二數列相關係數

若表為 $2\times N$ 之分類，即一種品質祇有二類之可能而其他一種品質則有多類時，吾人可以計算二數列相關之係數。此類分類極為普通，因二數列分類如性別等，常常發現品質分配之假定為常態。

其公式為

$$\text{二數列}\ r=\frac{(\overline{X}_p-\overline{X}_q)pq}{\sigma_X .3989h}$$

在上式

$\overline{X}_p=p$ 類* 之平均值。

$\overline{X}_q=q$ 類之平均值。

$p=p$ 類之百分比項目。

$q=q$ 類之百分比項目。

---

* 變數之各種分類，若非為數量者，可予以數量之值，如1,2,3等。

σ＝合併類(p 與 q)之標準差.

h＝常態曲線之高度其與平均點相差之距,係包括曲線面積之$\frac{p-q}{2}$.

h值之計算法,係先決定包括常態曲線全面積之$\frac{p-q}{2}$時之標準差數(參看常態曲線面積表,即表31),再應用該標準差數,在常態曲線之縱線表上,以決定曲線在該點之高度(占最高縱線之百分數).

參 考 書

Camp, Burton H. *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 302–314. D. C. Heath, & Co., New York, 1931.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 256–278, Ginn and Co., New York, 1928.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 309–324, D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Rietz, H. L., (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 292–309, Houghton Mifflin Co., Inc., New York, 1927.

第十二章

常態曲線

若事件發生必居二種途徑之一，且同時有若干事件，則此事件可分爲二組；第一包括如意之發生，第二包括不如意之發生．如意之結果，可用經驗之方法爲之計數與紀錄而決定之．

用指彈一硬幣，則'陽面'發現之機遇見半．此語爲之詳細分釋，可以得到機率性質與抽樣理論之明晰了解．因所發現者祗有'陽面或'陰面'，故如意陽面發現之成功機率爲一半．

$$p=\frac{1}{2}$$

$$p=\frac{a}{N}$$

在上式：

a＝如意結果發現之可能方式．

N＝可能事件之總數．

p＝成功之機率．

普通言之，倘一事件在 a 種方式發現而不在 b 種方式發現，則其發現之機率爲

$$p=\frac{a}{a+b}=\frac{a}{N}$$

在上式:

$$a+b=N$$

故其失敗之機率爲

$$q=\frac{b}{N}$$

在上式:

b=不如意結果之可能數.

q=失敗之機率.

若一硬幣共擲百次以求其'陽面'或'陰面',則在每擲中,任何一種結果之機率爲$\frac{1}{2}$.以全體表示之,則此機率之比爲$\frac{1}{2}(100)$.

一列事件中之一種或他種之發現機率,可從其個別發現之所有機率相加而求得之.欲求一列事件中之全數之發現機率,可將各機率相乘.故若從一組紙牌抽出一張及擲一硬幣,則抽到么牌或擲到'陽面'之機率爲

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

此二種事件發現之機率爲

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}.$$

每種事件發現或不發現之機率爲確定之事,其值爲1.

投擲一枚硬幣,陽面或陰面發現之機率爲確定之事.

$$\left(\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}t\right)=1$$

在上式

h = 陽面；　　　　　　t = 陰面.

同理，投擲二枚硬幣，陽面及陰面發現之機率可從下式決定：

$$\left(\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}t\right)^2$$

或

$$\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{2}ht+\frac{1}{4}t^2$$

或　　所有'陽面'之機率 $=\frac{1}{4}$

所有'陰面'之機率 $=\frac{1}{4}$

一個'陽面'或一個'陰面'之機率 $=\frac{1}{2}$

就普通言，一種事件在 n 次試驗時，其發現之機率，用下式表示：

$$(p+q)^n$$

圖 24 示十枚硬幣投擲時，陽面數目在理論上發現次數之分配.當 n 增加時，則投擲之各點增加，而曲線可逐漸變爲平勻直至逼近

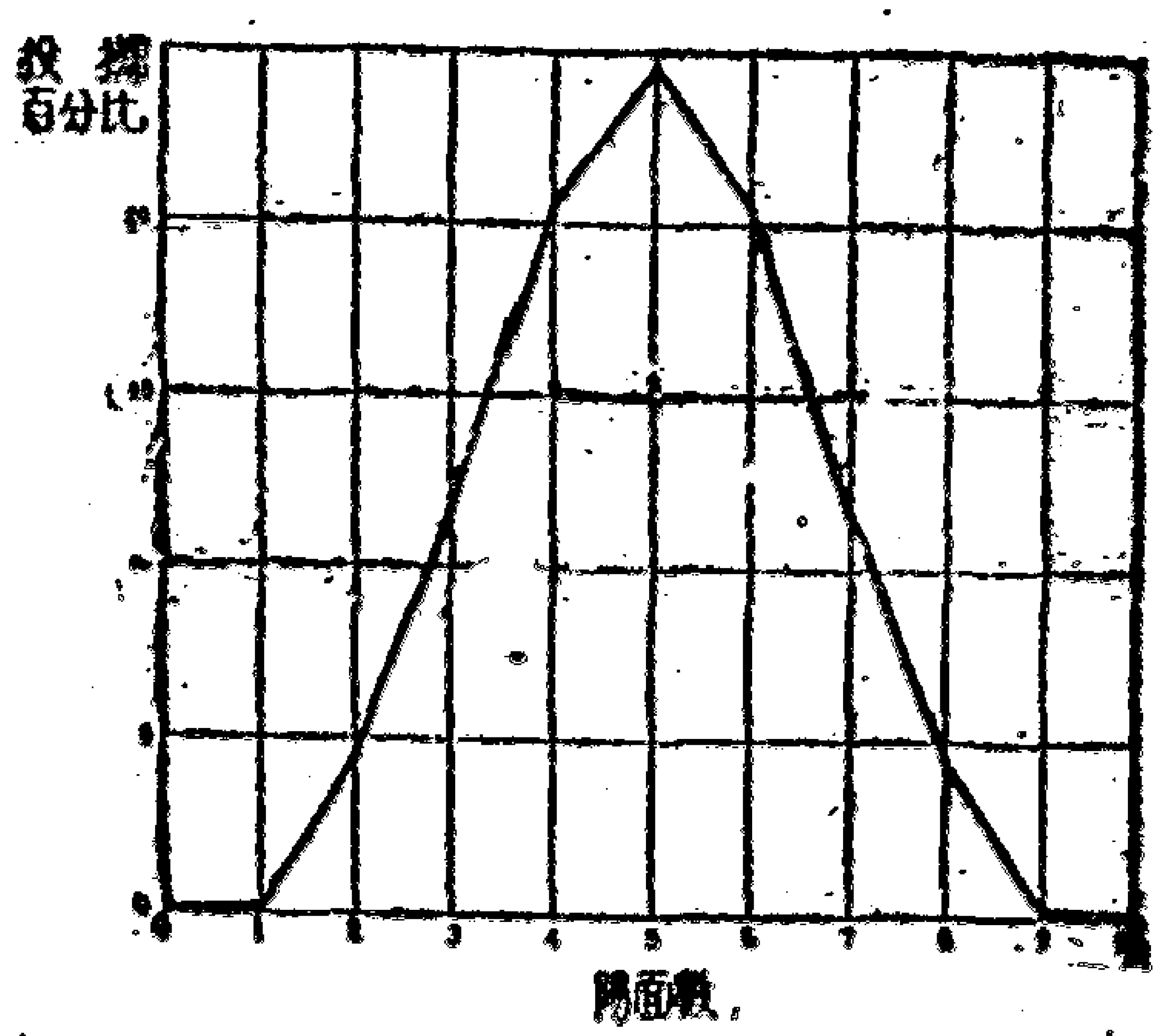


圖 24. 投擲十枚硬幣時陽面數發現之理論分配

常態或蓋氏*分配，如圖25所示。

當材料表示機遇變化時，此種曲線，常常為其結果。

此種分配之平均數，可如下法求得：

$$\overline{X}=Np$$

在上式

N＝試驗之次數

p＝成功之機率

標準差為：

$$\sigma=\sqrt{Npq}$$

在上式：

q＝失敗之機率

其分配為上面所述之常態或蓋氏分配，此處所示之標準差對於全分配之關係，與圖12所示者相同。

標準差數（從平均數正負兩面展量）	包括全體之百分比數
.6745 σ	50%
1.0000 σ	68.26%
2.0000 σ	95.46%
3.0000 σ	99.73%

曲線之概論

若祇有限定項目可以得到，則從而編製之次數，其形狀大概殊

* 蓋氏分配之公式為：

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

不規則．若項目突然增加，則分配必示不規則之趨勢之消除及曲線之平勻．

樣本常用以概括根基材料（專門名詞爲全體或全域），故從樣本所得之材料，有修勻不規則曲線之必要．修勻後，樣本之曲線，可使之合於基層材料之普通形式，即'理想'分配．理想分配代表無限數項發現時之分配，而非僅爲樣本之分配．

若基層材料能用常態曲線* 形容，則常態曲線之縱線及面積之特殊表+（表 31 及 32）可援用之以修勻曲線之材料．

用面積法配合常態曲線

在一常態分配上，平均數兩旁之各標準差內所包括之項目百分比（曲線下之面積），可從關於常態曲線面積之特用表計算而得．

若從平均數兩旁各展量一個標準差之距離，所包括之項目爲 68.26%，二個標準差爲 95.46% 等．同理，任何標準差距離所包括之項目，若從平均數之一旁展量者，爲上述百分比之一半．

常態分配之平均數，位於分配之中點．若在橫軸上從平均數展量任何距離以標準差爲單位，則在距離內所包括之面積，可參看表 31 決定之．例如在圖 25 上，從平均數 \$50，量至 b 點 \$62 處，爲 \$12．本

---

* 決定基層曲線之方法見第十四章．

\+ 各種曲綫均可用之以修勻次數分配．兩種常用之曲綫爲皮而生氏制曲綫及 Gram Charlier 之曲線．

配合曲線之技術不在此書範圍之內，讀者可參看 Elderton, W. P., *Frequency Curves and Correlation* 以明皮而生氏曲綫，及 Camp, B. W., *Mathematical Part of Elementary Statistics* 以明 Gram Charlier 制．

分配之標準差爲 \$8. 故以標準差計算，從平均數至該點爲 1.5 標準差 (\$12÷8). 參看圖 25, 卽見項目之 43.32%包括在平均數與 \$62 之間. 再在 X 橫軸上選一點，假定爲 \$64, 將見此點爲平均數任何一邊之外 1.75 標準差$\left(\frac{\$64-\$50}{8}\right)$,故在此限度內之項目爲 45.99%.

在平均數與 \$64 之間爲項目之 45.99%，而在平均數與 \$62 之間爲項目之 43.32%，則在 \$64 與 \$ 62 之間，必包括項目之 2.67% (45.99% − 43.32%). 因項目全數爲 4000，故在 \$62 與 \$64 之間，爲全數之 106.8.

同理，任何組距內之項目百分比。亦可決定，而其實際數目或理論次數，亦可從比例求得. 若將理論次數繪成曲線圖，其結果爲常態曲線.

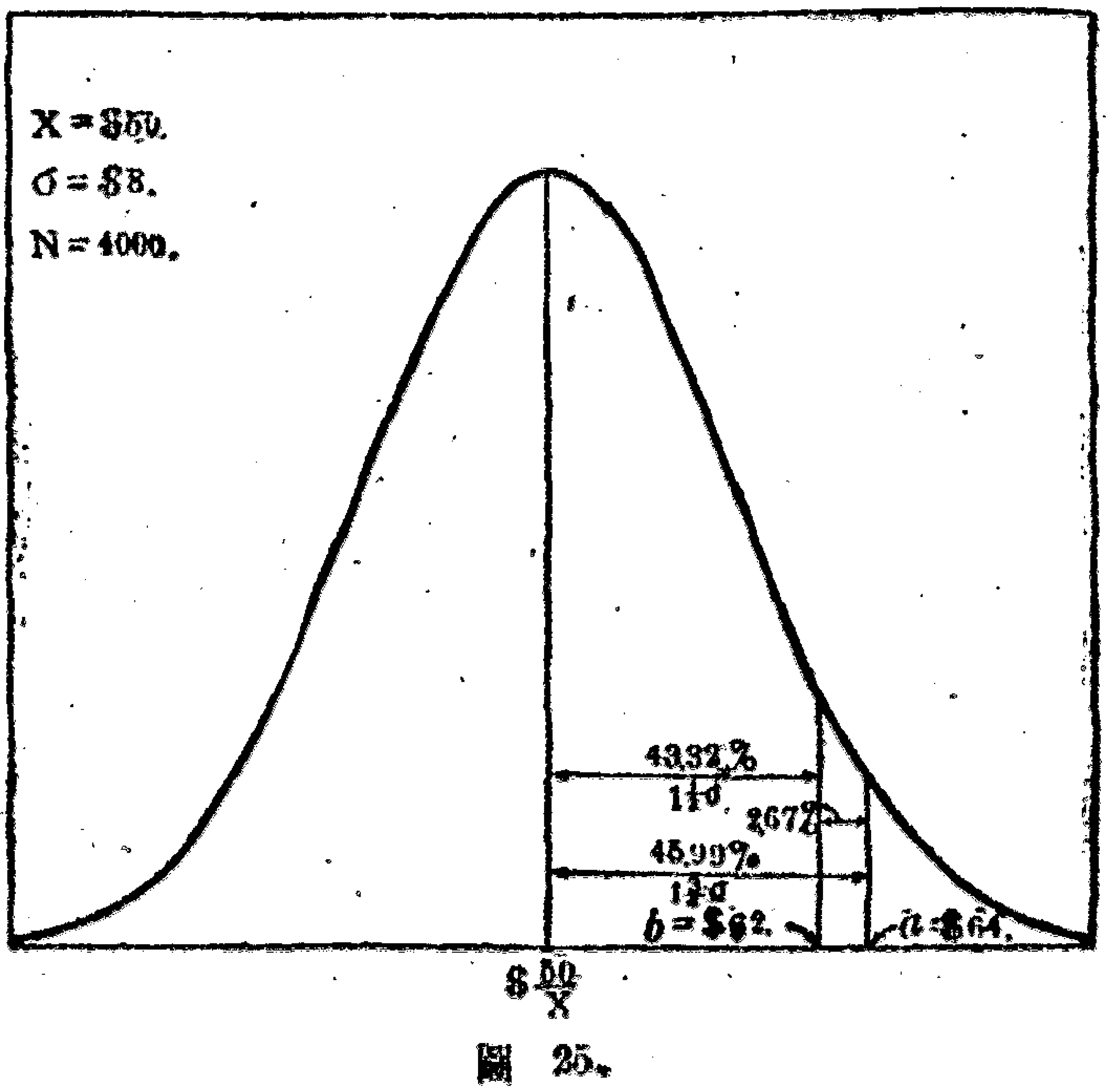


圖 25.

理論次數之決定（用一個組距爲例），可用下表所示 ABC 公司所製造 300 具黃銅洗滌器厚度離勢之分配以爲例．用曲線配合法，可以決定此項大量數目之洗滌器之異差。

以下量數係從其樣本中計算而得：

$$\bar{X} = .0202 \text{ 吋}$$

表 29. 常態曲線之配合——面積法

ABC 公司所製造 600 具黃銅洗滌器之厚度之離勢

（假定材料）*

(1) 厚度 (單位尺)	(2) 組中點	(3) 洗滌器數 (f)	(4) 組限度與平均數之差數 (x)	(5) 欄(4)組距計算 $\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	(6) 組限度與平均數間面積之百分比	(7) 面積百分比以組距爲單位	(8) 理論次數 (f)
.0180—.01839	.0182	6	—.0022	—2.61	49.55%	1.21%	7.3
.0184—.01879	.0186	30	—.0018	—2.13	48.34	3.19	19.1
.0188—.01919	.0190	42	—.0014	—1.66	45.15	7.05	42.3
.0192—.01959	.0194	66	—.0010	—1.18	38.10	11.98	71.9
.0196—.01999	.0198	94	—.0006	.71	26.12	16.64	99.8
.0200—.02039	.0202	120	—.0002 .0002	.24 .24	9.48 9.48	18.96	113.8
.0204—.02079	.0206	102	.0006	.71	26.12	16.64	99.8
.0208—.02119	.0210	60	.0010	—1.18	38.10	11.98	71.9
.0212—.02159	.0214	54	.0014	—1.66	45.15	7.05	42.3
.0216—.02199	.0218	14	.0018	2.13	48.34	3.19	19.1
.0220—.02259	.0222	12	.0022	2.61	49.55	1.21	7.3
		600					

* 根據較小分配之假定材料，仿 W. A. Shewhart. *Economic Control of Quality of Manufactured Product.*

$\sigma = .00085$ 时

$N=600$

第三組之低限爲 .0188 而其高限爲 .01919. 低限與平均數間之距離爲 .0014(.0202－.0188). 因標準差爲 .00085 时, 故以標準差計算, 其距離爲 1.66 標準差. 參看面積表, 在此距離內之項目爲 45.15%.

在第二個之低限與平均數之間 (.0202－.0192－.0010), 其距離爲 1.18 組距. 面積表指示項目之 38.10% 包括在此距離之內. 在 .0188 與 .01919 之間或在第三組高限與低限之間, 共有項目之 7.05%. 因總項數爲 600, 故此組之理論次數爲 (600 之 7.05%). 將此次數繪在組之中點. 其他各組, 同法推算, 如表 29 所示.

用縱線法配合常態曲線

常態曲線亦可參照機率曲線之縱線表 (表 32) 爲之配合. 此表所載者爲平均數兩邊各距離 (以標準差爲單位) 上所建縱線占最高縱線之百分比. 最高縱線位於分配之中心.

常態曲線之公式爲

$$Y = Y_0 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

在上式 *

$$Y_0,\ \text{最高縱線} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{N}{2.506628\sigma}$$

分配上最高縱線値之計算, 其法如下 *:

* 應用此公式時, 標準差應爲組距而非原來單位.

$$\sigma\,(\text{組距})=2.109$$

$$Y_0=\frac{N}{2.506628\sigma}=\frac{600}{2.109(2.506628)}=113.5$$

第一組之中點與平均數相距為 2.37 標準差，此點上所建之縱線為最高縱線之 6.03%或 6.84。其他各組上可應用同法，如表 30 所示。

配合適度之測驗——χ^2 測驗

實際材料是否配合於理論分配上而得適度，皮而生氏有一測驗決定之。

表 30. 常態曲線之配合——縱線法

ABC 公司所製造 600 具旋轉洗濯器之厚度之趨勢

(1) 厚度 (單位尺)	(2) 組中點	(3) 洗濯器數 (f_0)	(4) 組限度與平均數之差數 (x)	第四欄以標準差為單位 $\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	估最高縱線之百分比（照縱綫表）	理論次數 (f)
.0180—.01839	.0182	6	.0020	237	6.03%	6.84
.0184—.01879	.0183	20	.0016	190	16.45	18.67
.0188—.01919	.0190	42	.0012	142	36.49	41.42
.0192—.01959	.0194	66	.0068	95	63.68	72.28
.0196—.01999	.0193	94	.0004	47	89.54	101.62
.0200—.02039	.0202	120	.0000	00	100.00	113.50
.0204—.02079	.0206	102	.0004	47	89.54	101.628
.0208—.02119	.0210	60	.0008	95	63.68	72.28
.0212—.02159	.0214	54	.0012	142	36.49	41.42
.0216—.02199	.0218	14	.0016	190	16.45	18.67
.0220—.02259	.0222	12	.0020	257	6.03	6.84
		600				

表31. 常態曲線面積表

$\frac{x}{\sigma}$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3718	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4083	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4714	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4758	.4762	.4767
2.0	.4773	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4984	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990
3.1	.49903	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993

此測驗包涵 χ^2 (chi 平方) * 之計算

$$\chi^2 = \left(\frac{(f_0 - f)^2}{f}\right)$$

在上式

f_0 = 觀察或實際次數

f = 理論次數

關於上述問題，其 χ^2 之計算，如表 29a 所示.

表 29a. 配合適度之 χ^2 測驗——表 29 之材料

(1) 厚度 (吋)	(2) 洗滌器數 (f_0)	(3) 理論次數 (f)	(4) (f_0-f)	(5) $(f_0-f)^2$	(6) $\frac{(f_0-f)^2}{f}$
.0180—.01839	6	7.3	9.6	92.16	3.491
.0184—.01879	30	19.1			
.0188—.01919	42	42.3	.3	.09	.007
.0192—.01959	66	71.9	−5.9	34.81	.484
.0196—.01999	94	99.8	−5.8	33.61	.337
.0200—.02039	120	113.8	6.2	38.44	.338
.0204—.02079	102	99.8	2.4	5.76	.058
.0208—.02119	60	71.9	−11.9	141.61	1.970
.0212—.02159	54	42.3	12.3	151.29	3.628
.0216—.02199	14	19.1	−.4	.16	.001
.0220—.02239	12	7.3			
					χ^2=10.314

* 符號 χ 爲希臘文小字母 chi.

表 32. 常態曲線之縱線

(為最高縱線之小數)

$\frac{x}{\sigma}$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0,0	1,00000	.99995	.99980	.99955	.99920	.99875	.99820	.99755	.99685	.99596
0,1	.99501	.99396	.99283	.99158	.99025	.98881	.98728	.98565	.98393	.98211
0,2	.98020	.97819	.97609	.97390	.97161	.96923	.96676	.96420	.96156	.95882
0,3	.95600	.95309	.95010	.94702	.94387	.94055	.93723	.93382	.93024	.92677
0,4	.92312	.91399	.91558	.91169	.90774	.90371	.89961	.89543	.89119	.88688
0,5	.88250	.87805	.87353	.86896	.86432	.85962	.85488	.85006	.84519	.84060
0,6	.83527	.83023	.82514	.82010	.81418	.80957	.80429	.79896	.79459	.78817
0,7	.78270	.77721	77167	.76610	.76048	.75484	.74916	.74342	.73769	.73193
0,8	.72615	.72033	.71448	.70861	.70272	.69681	.69087	.68493	.67896	67298
0,9	.66689	.66097	.65494	.64891	.64287	.63683	.63077	.62472	.61865	.61259
1,0	.60653	.60047	.59440	.58834	.58228	.57623	.57017	.56414	.55810	.55209
1,1	.54607	.54007	.53409	.52812	.52214	.51620	.51027	50437	.49849	.49260
1,2	.48675	.48092	.47511	.46933	.46357	.45793	45212	.44644	44078	.43516
1,3	.42956	.42399	.41845	.41294	.40747	.40202	.39661	.39123	.38569	.38058
1,4	.37531	.37007	.36487	.35971	.35459	.34950	.34445	.33944	.33447	.32954
1,5	.32465	.31980	.31500	.31023	.30550	.30082	.29618	.29158	.28702	.28251
1,6	.27804	.27361	.26923	.26489	.26059	.25634	.25213	.24797	.24385	.23978
1,7	.23575	.23176	.22782	.22392	.22008	.21627	.21251	.20879	.20511	.20148
1,8	.19790	.19436	19086	.18741	.18400	.18064	.17732	.17404	.17081	.16762
1,9	.16448	16137	.15831	.15530	.15232	.14939	.14650	.14364	.14083	.13806
2,0	.13534	.13265	.13000	12740	.12483	.12230	.11981	.11737	.11496	.11259
2,1	.11025	.10795	.10570	.10347	.10129	.09914	.09702	.09495	.09290	.09090
2,2	.08892	.08698	.08507	.08320	.08136	.07956	.07778	.07604	.07433	.07265
2,3	.07100	.06939	.06780	.06624	.06471	.06321	.06174	.06029	.05888	.05750
2,4	.05614	.05481	.05350	.05222	.05096	.04973	.04852	04737	04618	.04505
2,5	.04394	.04285	.04179	.04074	.03972	.03873	.03775	.03680	.03586	.03494
2,6	.03405	.03317	.03232	.03148	.03066	.02986	.02908	.02831	.02757	.02684
2,7	.02612	.02542	.02474	.02408	.02343	.02280	.02218	.02157	.02098	.02040
2,8	.01984	.01929	.01876	.01823	.01772	.01723	.01674	.01627	.01581	.01536
2,9	.01492	.01449	.01408	.01367	.01328	.01288	.01252	.01215	.01179	.01145
3,0	.01111	.00819	00598	.00432	.00309	.00219	.00153	.00106	.00073	.00050
4,0	.00034	.00022	.00015	.00010	.00006	.00004	.00003	.00002	.00001	00001

參看 χ^2 表*，χ^2 可以計值.

* 較為擴大之一套表，見 Pearsons' *Tables for Statisticians and Biometricians*.

在 X^2 表上，N 等於組距數．在表(P)所示之值爲求得配合之機率，此機率，比較所實得者，或同樣不良，或更不良．倘機率爲小，則配合度稱爲不良。

在以上問題中，當 $N=9$ 組距時，X^2 之值表示 P 值較 30 爲多．易言之，所得之配合與所示者相較，或同樣不良或更不良時，其機遇爲 100 中之 30．在樣本中所發現對於常態之離勢或分離與實際發現者同樣不良或更不良時，其機率爲 100 中之 30，此係由於機遇之變化而對於常態實際上並無分離之處，因其機率既大，則此配合可稱適度。

參考書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 259-311. P. S. King & Son, London, 1901.

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 59-72; 183-199. Houghton Mifflin Co., NewYork, 1931.

Chaddock, Robrt E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 207-228. Houghton Mifflin Co., NewYork, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden D.J., *Practical Business Statistics*, pp. 241- 57. Prentice-Hall Inc., NewYork, 1934.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 196-200. McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R., & Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 292–306. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*, pp. 43–53; 64–70.

Oliver & Boyd, Edinburgh, 1932.

Carrett, Henry E., *Statistics in Psychology and Education*, pp. 74–84. Longmans, Green & Co., New York, 1926.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 154–156. Macmillan Co., New York, 19:8.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 190–229. Ginn & Co., New York, 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 165–181. Harper & Bros., New York, 1924.

Kelley, Trumen L., *Statistical Method*, pp. 94–106; 109–150. Macmillan Co., New York, 1925.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 516–527. Henry Holt & Co., 1924.

Odell, C. W. *Educational Statistics*, pp. 305–315. Century Co., New Yoek, 1925.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 53–64; 378–369. D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Richardson, C.H., *An Introduction to Statistical Analysis*, pp.

207–249, Harcourt, Brace & Co., New York, 1934.

Rietz, H. L., (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics* pp. 82–91; 92–119, Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 191–227, Houghton Mifflin Co., New Yark, 1917.

Thurstone, L. L., *Fundamsntals of Statistics*, pp. 126–148, Macmillan Co., New York, 1925.

Yule, G. Udny, *An Introduction to the Theory of Statistics*, pp. 291–313, Charles Griffin & Co., Ltd., London, 19[illegible]9.

第十三章

抽樣之理論

樣本

統計技術，應用於某種材料之上，可資分析之用．但材料過於冗繁不易處理時，則材料之樣本，以同樣之技術處理之，亦可對於全部材料作一概論．

若結果祇限於所研究之個案中，亦可作爲形容之用．有若干問題，在其結果未能作一概論及未能應用於其他較多數事件以前，有亟待解決之必要．

大量統計材料之精詳分析，需要極多之時間、精力與財力．研究部分材料之動機，因之以起．其手續稱爲抽樣．抽樣結果之確度，端賴於樣本之公正及研究樣本之技術．

以下數列，足以指示抽樣之方法．

在自然科學中，採集太多材料，常爲不可能事，因之，抽樣方法，實爲必要．例如舉行實驗，在某次之外，常不可能．又在科學實驗中，重複十次，所得結果之概論，可與無量數次之結果相同．

欲求小學三年生之平均智力商數，若不用抽樣方法，勢必蒐集無窮之材料，而所費之精力與財力，亦將無限．

再者設欲求得紐約城之麵包平均價格，則調查全城之千萬麵包

店與食品店，其費用之大與時間之久，顯然幾使此舉不易措施.

在上述之例，若價格由一大公司之各分店求得，其樣本不免偏倚. 若欲得到代表材料，勢必從各種公司中得到樣本價格；卽須從全體*中得到價格. 有代表性之樣本，必須具有下列條件：

1. 樣本之選擇，須無偏倚.

1. 樣本內之成分，須彼此完全獨立，而無聯繫.

3. 樣本所由來之地域，須無根本之差別.

4. 組織樣本之各項目，須具有同樣之情形.

受限制之樣本，乃用以概論其所自來之較大之全體材料.

從樣本計算而得之量數，旣用以概論全體之特性，則此樣本之可靠性應爲之估計，易言之，此概論難免之錯誤，應爲之明瞭.

可靠性之量數與其顯著性——標準誤

關於上述麵包價格問題，設有一千個調查員派出，每人向 1,000

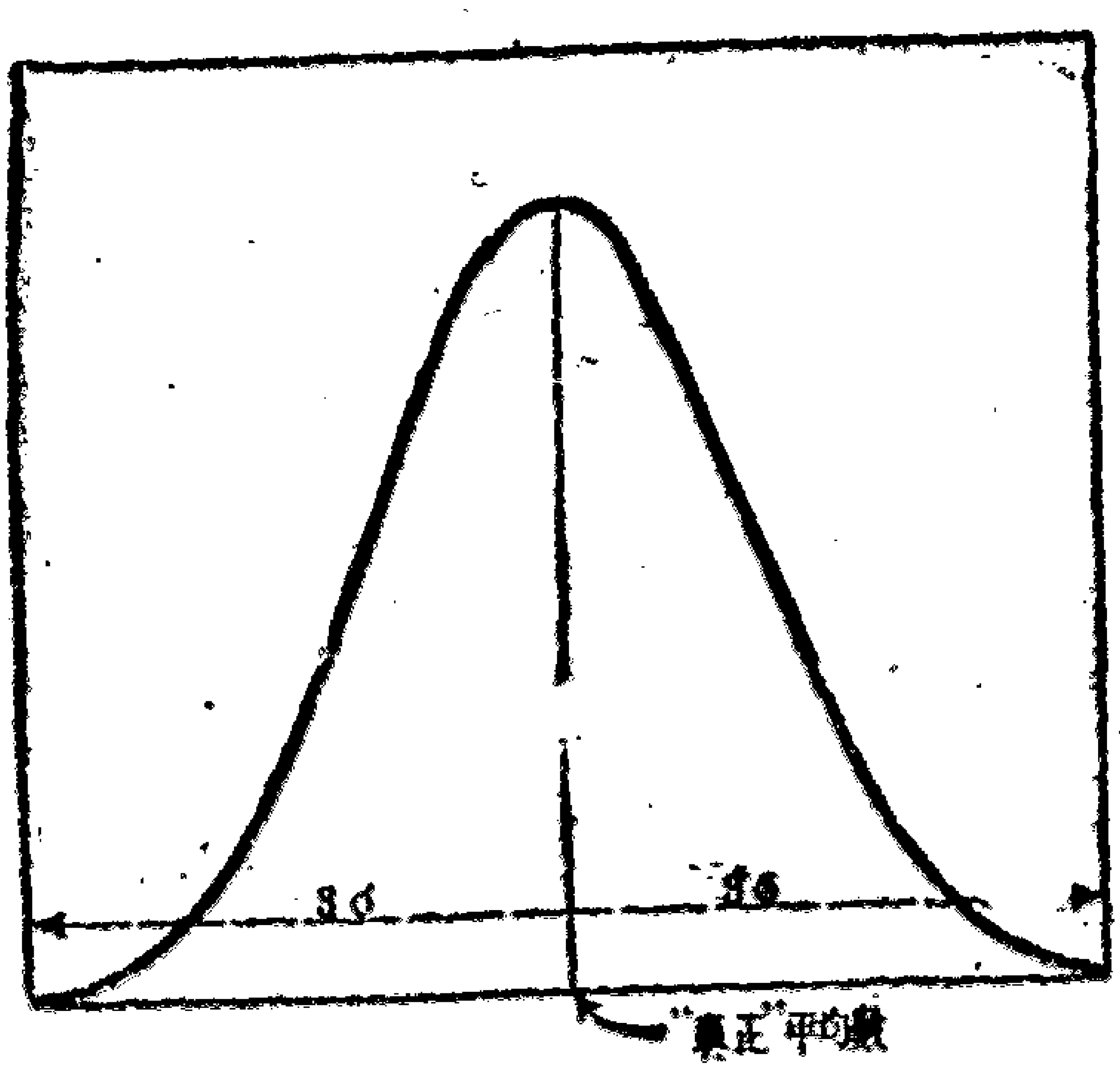


圖 26. '全體'中任機抽出大量樣本各平均數之理論分配

* Population 可界說爲全體，而樣本乃從此假定得到之全體中抽出一之部分.

家麵包店詢查同類麵包之各種樣本價格. 倘各樣本之平均價格使之依照次數分配排列，其形狀必有傾向'常態'分配之趨勢.

1,000 種樣本，每種有 1,000 價格，並有一平均數，此平均數之平均數必與根基材料之真正平均數相同或相近. 若曲線為之理想化，使無窮數目均為之顧及，則紐約城之麵包價格之'真正'平均數，即為本分配之平均數.

從上示之假設分配，可知有若干樣本之平均數與全體之'真正'平均數相距甚遠. 若與平均數最遠之距離可以得到，則最大之錯誤可得而知. 如上所述，平均數兩邊各展開三標準差，包括全數之 99.7%. 若各樣本之平均數分配之標準差值可以求得，則在 100 之 99.7 機遇中，樣本平均數與'真正'平均數之差必不較三個標準差之值為大.

由樣本計算而得之平均數分配之標準差或其他統計量數之標準差，稱為平均數標準誤 ($\sigma_{\bar{x}}$) 或其他統計量數之標準誤.

若錯誤祇限於 50% 以內之項目者，則稱為 機誤 †. 其值等於標準差之 .6745.

機誤之應用甚廣，而美國統計家用之尤多，致使其價值近於濫梯，與標準誤 × 相較，不逮其真值甚遠.

† 機誤之應用甚廣，但其價值素渺. 其涵義可詮釋如下: 若同數之樣本再為抽出一次，則樣本平均數與真正平均數之差，不能超過機誤值者，其機遇為一半.

× R. A. Fisher 指出'吾人推崇機誤之唯一理由，即為其普遍之應用 …. 若為嚴格測驗，則機誤仍須換算為標準誤*. 抑更有進者，歐洲統計學家，大都採用標準誤，而不用機誤.

* Fishers, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*, 1928, p. 46.

顯然，樣本內所包括之項目愈多，則所希冀之錯誤愈小．故樣本平均數(或其他量數)理論分配之標準誤，自較機誤爲小，依次，標準誤與樣本之項目數成反比例．

若全體或原始材料之差限爲大，如 \$1 到\$1,000,000，則從樣本所得之量數，其'錯誤'必大於差限較小之全體，如 \$1 到 \$10 然．標準差爲全數材料之離散程度之一量數．樣本之標準差，普通用爲全體標準差之估計．故從樣本而得之任何量數之標準誤，與樣本所自來之全體之標準差成比例．

平均數之標準誤（樣本各平均數分配之標準差）之公式，爲

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

在上式

σ＝樣本之標準差

故平均數之機誤爲

$$P.E._{\bar{X}}=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

若 1,000 家麵包價格之平均數可以計算而得，則可靠性可予以估計．若從樣本中得到以下結果，則

$$\bar{X}=\$.10$$

$$\sigma=\$.01$$

平均數之標準誤，必爲

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\$.01}{\sqrt{1,000}}=\$.00032$$

如上所述，在 100 之 99.7 機遇中，由 1,000 項目之隨機抽樣而計得之平均數與眞正平均數之差，不超出三個平均數之標準誤之外．現可假定，由上計得之平均數 $.10 與'眞正'平均數相差，必不超出 $.00096 之外（100 之 99.7 機遇）.

錯誤等於或大於指定之標準誤其發現之可能性，及錯誤等於或大於指定之標準誤其發現之不可能性，已爲潑爾氏 * 算出，今在表 33 列入.

同理，其他統計上量數之標準誤可以算出．以下所列，爲各種標準誤之公式之一斑.

此表所列，僅代表此項標準誤公式之一小部分．其較詳備之表見此書之後部及 Dunlap, J. W. and Kurtz, A. K., *Handbook of Statistical Nomographs, Tables and Formulae* 一書.

兩平均數差數之顯著性

二個樣本之平均數應予一種測驗，以觀其間有無顯著之差，或觀其差是否由於機遇.

在科學實驗時，常用一種'控制'方法．但此種控制，祇用作比較之根據．控制組所得結果與實驗組之結果，有無顯著之差，實有決定之必要.

茲舉一例以明之．若欲測驗某種拼字方法之新技術之良否，必須有二組學生．第一組及第二組所採用之技術，專爲控制之用．測驗此二組之考試分數，以決定其二平均數之差是否顯著.

---

* Pearl, Raymond, *Medical Biometry and Statistics*, W. B. Saunders, Philadelphia, 193 .

表 33. 各種大小之統計上離差，與標準誤比照時，其發現之可能性

標準誤數	離差等於或大於指定之標準誤，其發現之可能性	離差等於或大於指定之標準誤，其發現不可能性
0.67449	50.00%	1.00 對 1
0.7	48.39	1.07 對 1
0.8	42.37	1.36 對 1
0.9	36.81	1.72 對 1
1.0	31.73	2.15 對 1
1.1	27.13	2.69 對 1
1.2	23.01	3.3[illegible] 對 1
1.3	19.36	4.17 對 1
1.4	16.15	5.19 對 1
1.5	13.36	6.48 對 1
1.6	10.96	8.12 對 1
1.7	8.91	10.22 對 1
1.8	7.19	12.92 對 1
1.9	5.74	16.47 對 1
2.0	4.55	20.98 對 1
2.1	3.57	26.99 對 1
2.2	2.78	34.[illegible]6 對 1
2.3	2.14	45.62 對 1
2.4	1.64	60.00 對 1
2.5	1.24	79.[illegible]2 對 1
2.6	.932	106.3 對 1
2.7	.693	143.2 對 1
2.8	.511	194.7 對 1
2.9	.373	267.[illegible] 對 1
3.0	.270	369.4 對 1
3.1	.194	515.7 對 1
3.2	.137	726.7 對 1
3.3	.0967	1,033 對 1
3.4	.0674	1,483 對 1
3.5	.0465	2,149 對 1
3.6	.0318	3,142 對 1
3.7	.0216	4,657 對 1
3.8	.0145	6,915 對 1
3.9	.00962	10,390 對 1
4.0	.00634	15,770 對 1
5.0	.0000573	1,744,000 對 1
6.0	.00000020	500,000,000 對 1
7.0	.0000000026	400,000,000,000 對 1

量數	標準誤公式	機誤公式
平均數($\overline{X}$)	$\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	$\text{P.E.}_{\overline{X}}=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
中位數	$\sigma_{mdn}=1.2533\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	$\text{P.E.}_{md^n}=.84535\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
標準差(σ)	$\sigma_{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$	$\text{P.E.}_{\sigma}=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$
平均差	$\sigma_{M.D.}=.6028\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	$\text{P.E.}_{M.D.}=.4066\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
離勢係數(V)	$\sigma_{v}=\frac{V}{\sqrt{2N}}\sqrt{1+2(V)^2}$	$\text{P.E.}_{v}=.6745\frac{V}{\sqrt{N}}\sqrt{1+2(V)^2}$
相關係數(r)	$\sigma_{r}=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$	$\text{P.E.}_{r}=.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$
等級相關係數 ρ(司畢門氏方法)	$\sigma_{\rho}=\frac{1-\rho^2}{\sqrt{N}}(1+.083\rho^2+.013\rho^4+.002\rho^6)$	$\text{P.E.}_{\rho}=.6745\frac{1-\rho^3}{N}(1+.083\rho^2+.013\rho^4+.002\rho^6)$
複相關係數($R_{1.23\cdots\cdots n}$)	$\sigma_{R1.23\cdots\cdots n}=\frac{1-R^2{}_{1.23\cdots\cdots n}}{\sqrt{N}}$	$\text{P.E.}_{R1.234\cdots n}=.6745\frac{1-R^2{}_{1.23\cdots n}}{\sqrt{N}}$
淨相關係數	$\sigma_{r12.34\cdots\cdots n}=\frac{1-r^2{}_{12.34\cdots\cdots n}}{\sqrt{N}}$	$\text{P.E.}_{r12.34\cdots n}=.6745\frac{1-r^2{}_{12.34\cdots n}}{\sqrt{N}}$

倘從全數中抽出二樣本，則其二平均數必有因項目上之選擇而得到機遇變化之差.

倘從全數中，抽出大多數之對偶樣本，並將二樣本之各平均數之差，列爲次數分配，則其分配必爲常態. 其眞正差數實爲零，因各對偶樣本係從相同全體抽出；且各樣本間祇有機遇或偶然之差發生. 若將無窮對偶樣本之差爲之平均（計算正負號），則其結果必爲眞正差數(零).

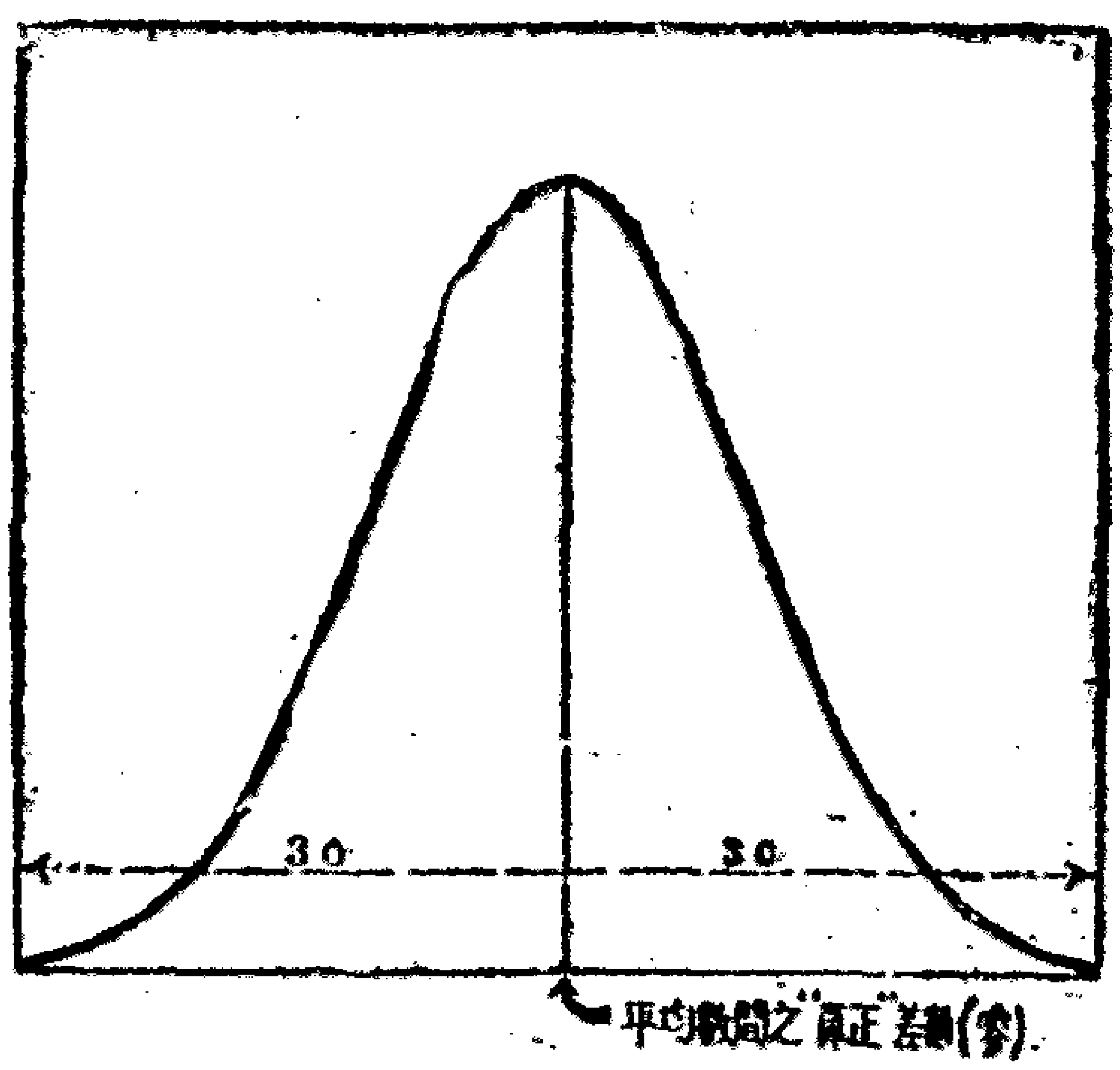


圖 27. 從一全體隨機抽出大量對偶樣本平均數之差數之理論分配

其情形可用一常態表示，代表無窮對偶樣本平均數之差之分配. 此分配之平均必爲零，卽眞正差數，向兩旁必有因機遇而發生之正負差數.

且從以上關於常態曲線之敍述，在 100 之 99.7 機遇中，無有差數能大於此差數分配之標準差之三倍（二個平均數之差之標準誤之三倍）.

因之，若實際差數大於平均數之差之標準誤之三倍（易言之 若

因機遇而生之此種差之機率甚小)，則其差爲有顯著性，而非由於機遇，可斷言也.

二個平均數之差之標準誤(即樣本平均數之差之理論分配之標準差)可從下列公式*求得:

$$\sigma_D=\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1}+\sigma^2_{\bar{X}_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{N_1}+\frac{\sigma^2_2}{N_2}}$$

在上式

σ_1 =第一樣本之標準差

σ_2 =第二樣本之樣準差

N_1=第一樣本之項目

N_2=第二樣本之項目

關於工廠之某種動作，可引用上法，以爲時間之研究. 若某種動作，採用舊法，則經五十次試驗所需之平均時間爲 17.5 秒鐘，其標準差爲 1.5 秒. 學熟新法之後，再予工人以五十次之試驗，對於某種動作所需之時間爲 15 秒，其標準差爲 1.2 秒. 現在若應用上述技術，可以決定二種平均時間之差，2.5 秒，是否含有顯著性，或僅由於機遇.

$$\sigma_D=\sqrt{\frac{(1.5)^2}{50}+\frac{(1.2)^2}{50}}=.27 \text{ 秒}$$

差數大至 .81 秒鐘時(二個平均數之差之標準誤三倍)，在 100 之 99.7 機遇中，可由於機遇而生. 但其實際差數 (2.5 秒)，則遠超

---

* 此處有一假定，即平均數所由而計得之二種樣本，彼此毫不相關.

過此數(.81 秒),故不得謂此差由於機遇.

由二樣本而計得之任何二種統計量數之差之意義,可從下式得到:

A. 若二樣本彼此相關

$$\sigma_D=\sqrt{\sigma^2_{\theta_1}+\sigma^2_{\theta_2}-2r_{12}\sigma_{\theta_1}\sigma_{\theta_2}}$$

在上式

σ_{θ_1}=從樣本 #1 而計得之任何統計 θ 之標準差

σ_{θ_2}=從樣本 #2 而計得之任何統計 θ 之標準差

B. 若二樣本彼此毫不相關

$$\sigma_D=\sqrt{\sigma^2_{\theta_1}+\sigma^2_{\theta_2}}$$

各比例間之差之顯著性

若從隨機而抽出之二樣本中,指示某種特性占某種比例,則此二比例間之差,可予以測驗而決定此差是否含有顯著性,抑由於抽樣之變動性而生,其公式如下:

$$\sigma_{D\%}=\sqrt{pq\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right)}$$

在上式

p=發現之總百分比

$q=1-p$

N_1=第一樣本之項目

N_2=第二樣本之項目

在研究口號之效力時,發現被詢之男子中,75.7%認識某種口號,而被詢之女子中,66.3%認識某種口號.以上公式可以用而決定兩性間認識力百分比之差有無顯著性.

表 32b: 施行於 374 個大學生之巴黎襪帶口號'金屬不觸汝身'之認識測驗結果

性 別	認識之人數	認識之百分比	被詢之人數
男·············	209	75.7%	276
女·············	65	66.3%	98
總 計·······	274	73.3%	374

仿: Glick, S., *Commercial Slogans*, Thesis, College of City of New York, 1935.

$$p=73.3\%$$

$$q=26.7\%$$

$$\sigma_{D\%}=\sqrt{pq\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right)}=\sqrt{(.733)(.267)\left(\frac{1}{276}+\frac{1}{98}\right)}$$

$$=.052=5.2\%$$

因二比例之實際差($75.7\%-66.3\%=9.4\%$)爲差數標準誤之 1.81 倍,則在 100 之 7 機遇中,此差是由因抽樣而發生之機遇所致.

測量之標準誤

舉行物質之測量時,必有某種程度之離勢.若測量距離幾次,或測量重量幾次,其結果必示某種離勢.

若幾次測量之平均數,用作眞正量數,須知此平均數係由樣本取得.故此平均數不免有抽樣之誤,此誤可由計算而求得之.若一種測量重複十次,則其樣本爲十個測量,而均由無窮測量之全域中抽出.

如上所述,此種平均數之誤,可以應用平均數之標準誤或平均

數之機誤求得之、

在大樣本時（$N>30$）

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\text{P.E.}_{\bar{X}}=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

在小樣本時（$N<30$）（見本章下節'小樣本'）

$$S_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{N}}$$

但有時常有合併各測量而求得面積，容積等之必要．此時其結果總值之標準誤必須求得．

1. 若個別測量，係用加法合併，則其結果總值之標準誤可從下式求得*：

$$\sigma^2_{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\bar{X}_3\cdots\cdots+\bar{X}_n}=\sigma_{\bar{X}_1}{}^2+\sigma_{\bar{X}_2}{}^2+\sigma_{\bar{X}_3}{}^2+\cdots\cdots+\sigma_{\bar{X}_n}{}^2$$

求二點之距離時，此距離係從二部分測量，以下列結果，作爲測量之平均．

距離 #1＝500 碼

距離 #2＝600 碼

第一距離之測量標準誤$\left(\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$爲 2 碼，第二距離之測量標準誤爲 2.5 碼．全距離 500 碼＋600 碼之標準誤爲

---

* 祇在項目彼此不相關時，此種關係始能存在，否則其關係爲：

$$\sigma_{\bar{X}_1+\bar{X}_2}=\sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}{}^2+\sigma_{\bar{X}_2}{}^2+2r_{12}\sigma_{\bar{X}_1}\sigma_{\bar{X}_2}}$$

$$\sigma_{\bar{X}^2_1+\bar{X}_2}=4+6.25=10.25$$

$$\sigma_{\bar{X}_1+\bar{X}_2}=3.20\text{碼}$$

2. 若測驗提高爲任何方數(n),則所得之值之標準誤可從下式得到:

$$\frac{\sigma_{\bar{X}^n}}{\bar{X}^n}=N\left(\frac{\sigma_{\bar{X}}}{\bar{X}}\right)$$

正方一邊之測量,其結果爲10尺之平均長,其標準誤爲.05尺.面積之標準誤,可從下式求得:

$$\text{面積}=L^2=10^2=100\text{方尺}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{X}^n}}{100}=2\left(\frac{.05}{10}\right)=.1\text{方尺}$$

3. 若干平均數之積之標準誤,倘其平均數之標準誤爲已知,可從下式求得:

$$\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_1\cdot\bar{X}\cdot\cdots\cdot\bar{X}_n}}{\bar{X}\cdot\bar{X}\cdot\cdots\cdot\bar{X}_n}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{X}}}{\bar{X}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_2}}{\bar{X}_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_n}}{\bar{X}_n}\right)^2$$

4. 商數之標準誤,可從下式求得:

$$\left(\frac{\sigma_{\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2}}}{\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{X}}}{\bar{X}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_2}}{\bar{X}}\right)^2$$

圓筒容積之標準誤,倘其容積從其半徑及高度之各測量求得,可照例求下之:

$$\text{半徑}=10\text{尺}\ (r)$$

$$\text{高度}=20\text{尺}\ (h)$$

$$V=\pi r^2h=3.14159(10)^2(20)=6283.18$$

而
$$\sigma_r = .1 \text{尺}$$
$$\sigma_h = .2 \text{尺}$$

r^2 之標準誤，可從下式求得：

$$\frac{\sigma_{\overline{X}^n}}{\overline{X}^n} = N\frac{\sigma_{\overline{X}}}{\overline{X}} = \frac{\sigma_{r^2}}{r^2} = 2\frac{\sigma_r}{r} = \left(2\frac{.1}{10}\right)$$

而容積之標準誤，可從下式求得：

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2}}{\overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{X}_1}}{\overline{X}_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{X}_2}}{\overline{X}_2}\right)^2$$

或 $V = \pi r^2 h$ 時，則

$$\left(\frac{\sigma_v}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{r^2h}}{r^2h}\right) = \left(2\frac{\sigma_r^2}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sigma_v}{6283.18}\right)^2 = \left(2\frac{.1}{10}\right)^2 + \left(\frac{.2}{20}\right)^2$$

$$\sigma_v = 140.5 \text{立方尺}$$

相關係數之顯著性

相關係數算出後，必有決定所示之相關是否為二數列間眞實存在之相關，抑此相關係由樣本之偶然選擇而生。

二數列之樣本，雖無眞實之相關存在，但從全域中抽出之樣本，仍可求得 r 之若定値。上面已經述及，若從同一全域中抽出二種樣本 可以發現二種不同平均數。同理，r 之値，亦可由於樣本之變動而不同。

若從許多對偶樣本而計算相關係數，則所得之係數，可成一常態之次數分配（若其眞正相關為零）。經應用標準差後（相關係數之標準誤），可以預占大於標準誤三倍之 r 値決不致由機遇而生（在 100

之 99.7 機遇中）. 因之,若所算得之 r 大於 σ_r 之三倍,則在 100 之 99.7 中,此係數必含有顯著性.

欲決定此錯誤之生,是否由於機遇,可以採用相關係數之標準誤,其理與採用平均數之標準誤同.

在 100 之 50 機遇中,實得 r 與真正 r 之差,不能大於 $.6745\sigma_r$（r 之機遇）,在 100 之 99.7 機遇中,其差不能大於 $3\sigma_r$.

相關係數之標準誤公式爲:

$$\sigma_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

但若基層全體之相關係數接近 100% 時,則樣本分配,不能合於常態或對稱,因一個方向極端量數之可能性爲 100% 之 r 之最高可能值所限,而另一方向之 r 可能值,其距限仍大. 此處 r 之值可以化爲較爲有用之 z 值,以觀其可靠性與顯著性.

$$Z=\frac{1}{2}\left[\left(\log_e(1+r)-\log_e(1-r)\right)\right]$$

此值之樣本分配,接近常態;且爲對稱.

其標準誤爲 *

$$\sigma_z=\frac{1}{\sqrt{N-3}}$$

小樣本——平均數之標準誤

若樣本較小（少於 30）致使此技術發生重大錯誤時,上敍之標準誤不能應用.

---

* 關於 z 標準誤之較詳討論,見 Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*.

若樣本較小，則一種新標準誤可從以下公式計算之：

$$S^2=\frac{\Sigma(x^2)}{N-1}=\frac{N\sigma^2}{N-1}$$

$$S_{\overline{x}}=\frac{S}{\sqrt{N}}$$

樣本較小時，以前所述標準誤之倍數包括全數百分之幾一節，此處不能應用。

差數發現機率之百分比，所用之倍數不能大於某種大小者，表示如下。（表上之 N'，代表平均數之標準誤者，爲 $N-1$）

N'	50%	95%	99%
1	1.000	12.706	63.657
2	.816	4.303	9.925
3	.765	3.182	5.841
4	.741	2.776	4.604
5	.727	2.571	4.032
6	.718	2.447	3.707
7	.711	2.365	3.499
8	.706	2.306	3.355
9	.703	2.262	3.250
10	.700	2.228	3.169
11	.697	2.201	3.103
12	.695	2.179	3.055
13	.694	2.160	3.012
14	.692	2.145	2.977
15	.691	2.131	2.947
16	.690	2.120	2.921
17	.689	2.110	2.898
18	.688	2.101	2.878
19	.688	2.093	2.861
20	.687	2.086	2.845
21	.686	2.080	2.831
22	.686	2.074	2.819
23	.685	2.069	2.807
24	.685	2.064	2.797
25	.684	2.060	2.787
26	.684	2.056	2.779
27	.684	2.052	2.771
28	.683	2.048	2.763
29	.683	2.045	2.756
30	.683	2.042	2.750

小樣本之他種標準誤

其他各種統計量數,其標準誤之由小樣本計算而得者,舉示於下.由以下公式所得之結果,其應用與大樣本之標準誤相同(見本章前半段),惟須應用由上表所得之標準誤之適當倍數.

量 數	標準誤* (用於小樣本)	N'之值 (倍數表上之 N' 值)
二平均數之差+	$S^2=\frac{\Sigma(x_1^2)+\Sigma(x_2^2)}{(N_1-1)+(N_2-1)}$	$N'=N_1+N_2$
	$S_D=\frac{S}{\sqrt{\frac{N_1N_2}{N_1+N_2}}}$	
相關係數×	$S_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N-2}}$	$N'=N-2$
相關係數用'z'表示者	$\sigma_z=\frac{1}{\sqrt{N-3}}$	可用大樣本倍數

參 考 書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 178-195, 312-342, P. S. King & Son, London, 1907.

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 240-273, D. C. Heath & Co., New York, 1931.

---

* Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*.

\+ x_1 爲各實得值對各 X_1 值之平均數之差數.

× r 變爲 z 所用之方法,大概較此處所示之方法爲佳.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 228–246. Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowder, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 222–237. Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 204–210. McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R., and Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 298–300. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933.

Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*, pp. 53–64; 70–78; 106–119; 123–133. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1932.

Garrett, Henry E., *Statistics in Psychalogy and Education*, pp. 84–85; 118–146; 170–172; 184–192. Longmans, Green & Co., New York, 19 6.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 10–13, 156–161; 220–221. Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 231–245; 245–254. Ginn & Co., New York, 19 8.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 171–177. Harper & Bros., New York, 1924.

Kelley, Truman L., *Interpretation of Educational Measurements*, pp. 54–61; 156–158; 171–178; 188. World Book Co., Yonkers, New York & Chicago, Illinois, 1927.

Kelley, Truman L., *Statistical Method*, pp. 82–92. Macmillan Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 548–561. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 221–241. Century Co., New York, 1925.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 326–376. D. Appleton–Century Company, New York, 1935.

Otis, Arthur S., *Statistical Method in Educational Measurements*, pp. 247–266. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1929.

Richardson, C. H., *An Introduction to Statistical Analysis*, pp. 251–271. Harcourt, Brace & Co., New York, 1934.

Rietz, H. L. (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 71–77. Houghton Mifflin Co., New York, 19 4.

Ruch, G. M., & Stoddard, George R., *Tests and Measu ements in High School Instruction*, pp. 363–374. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1927.

Rugg, Harold O., *Statistica Methods Applied to Education*, pp. 227–231; 370–274. Houghton Mifflin Co., New York 1917.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 162–186. Macmillan Co., New York, 1925.

Trabue, Marion R., *Measuring Results in Education*, pp. 456–465. American Book Co., New York, 1924.

Yule, G. Udny, *An Introduction to the Theory of Statistics*, pp. 254–272; 335–353. Charles Griffin & Co., Ltd., London, 1929.

第十四章

指數

定義

指數爲一統計方法，用以測量各羣材料之變化。

此種方法，可以應用於各種普通情況之上，如雇用、物價、團體健康，學業分數等。此種普通情況之材料，變動極大；但此類材料仍可顯示固定與可量之普通趨勢。

材料之大量項目旣繼續變更，今欲測量之，勢必採用一種比較量數*，以作量尺。指數卽爲此種方法。

指數所測量之變化，爲時間上之距限，地理位置之組差等。故某種物品在各區域內之比較銷售；一般大學生學業成績與他班大學生學業成績之比較；一個工廠之信用地位，與同一種工業內其他工廠之比較；均可求得指數。

爲說明便利起見，下所論列，大都以物價指數爲限。

指數之編製問題

1. 指數應用之目的，有關於材料之選擇，方法之採取等。

2. 各種事項之數目與種類之審愼選擇實爲必要，如是則指數

---

* 指之數形式，不必限於比較式(百分比)，有時指數係用絕對(實系)數値表示。

之變化，足以眞正代表數列之變化.

3. 搜集材料之正當方法，旣經決定，則所需材料之可能來源應爲求得，然後實際搜集材料.

4. 選擇基期與最善計算方法，亦爲應行解決之問題.

5. 每種組成項目，對於指數目的之重要程度，必爲決定. 每種項目相對重要性之指定，稱爲加權.

物品之數目與種類

指數係由物價之樣本或其有限部分編製而成；故應有幾條規則以作選擇物品之遵循.

1. 樣本應有代表性(見第十三章). 項目之選擇，應根據其代表性，而非由於求得標價之容易.

2. 應採取相當充分項目. 費暄博士指出物價指數欲求其有價值，'須有 20 種以上之物品，最好 50 種以上之物品'. 博士顯示'在 50 種以上，由物品增加而求得之良果甚爲微渺，若增加物品至 200 以上，是否值得格外之精力與費用，頗爲疑問' *.

基期

基期值指定爲100%，蓋假定其爲參照期. 指數係對此基期而計算之比例.

選擇基期須注意下列各點:

1. 基期不應爲過於已往之期；如是，物價平準與基期之比較，得爲固定之現在值或可比較值.

2. 用以比較之期，應爲一'平常'時期；故基期不應趨於極端.

---

* Fisher, Irving——*The Making of Index Numbers*, p. 340.

基期之移動

為比較之目的，指數數列之基期，常從一時期而移至他時期．移動基期之法，係用新基年之指數除數列中之每一項目，再以 100 乘之*．

在下例中，指數數列之基期，由 1926 移至 1928，其法卽以 1928 之指數值(150.0)除每個指數，而以 100 乘之．

1926	1927	1928	1929
100.0	110.1	150.0	125.3
66.7	73.4	100.0	83.5

計算方法之選擇

費暄氏發表指數編製之公式，計有 150 多種．但此許多公式，皆為幾種巨型公式之變化．

編製指數之幾類主要方法，分類如下：

1. 不加權(簡單)方法：

   a. 實價 總合．

   b. 比價之平均．

2. 加權方法：

   a. 實價之加權之總合．

   b. 比價之加權平均．

實價之簡單總合

用簡單總合法而編製之指數，為各物品價格之和與基期時同樣

* 各式之指數，非均能依照此法移動其基期(可用此法處理之各式之討論見下)．欲用一新基期，某種格式須重新編製．

物品價格之和之比較*.

$$\frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o}$$　(指數公式一)

在上式

Σp_n＝計算期物品價格之和.

Σp_o＝基期物品價格之和.

表33.　躉售金屬物價指數之計算,用不加權實價之總合法

基年: 1926年

金屬	單位	價格(元)		
		1926	1928	1930
生鐵……	噸	$20.4200	$17.6800	$17.1700
銅……	磅	.1393	.1468	.1311
鋁……	磅	.2690	.2590	.2359
鉛……	磅	.0825	.0614	.0558
鋅……	磅	.0737	.0603	.0456
錫……	磅	.6536	.5050	.3163
銀……	兩	.6211	.5818	.3815
總數……		$22.2601	$19.2732	$18.3322
指數……		100.0%	83.6%	82.4%

但因簡單總合法而計得之指數,有一極大之缺點,即標價過大之物品,有支配指數之力.例如生鐵之價格降低10%,而其他物品之價格漲高10%,固顯示物價平準之增加;但生鐵標價之過大影響,足使指數降下.

* 指數亦可用錢數而不用比數或百分數表示,如勃洛斯認里之1931年一月份躉售物價指數為$0.51.

	物品數目	1926	19—	
生鐵	1	$20.42	$18.378	降低10%
其他物品	6	1.8401	2.0241	漲高10%
總數	7	$22.2601	$20.4021	
指數		100%	91.7%	

若將物品化爲同一單位，如磅——如勃洛斯祝里指數所爲者，則以上指出之困難，不能免除．此種方法，徒使發生新異之不平處．如適用於表33上，則生鐵必爲$.0102一磅，而錫必爲$.6536一磅(1926)．

比價之平均

一個免除上述價格不等之方法，爲將價格變爲比數．一個價比，乃物品價格占基期價格之百分比．用公式表示：

$$\frac{p_n}{p_0}$$

在上式

p_n＝計算期之物價

p_0＝基期之物價

基期每種物品之比數爲100%．在研究中時期之比數，爲之平均以求得指數．算術平均數，中位數或幾何平均數，均可用爲平均之用．

以下公式闡明應用比價之平均(用算數平均數)計算指數之方法．

公式：

$$\frac{\Sigma\left(\frac{p_n}{p_0}\right)}{N} \qquad \text{(指數公式2)}$$

表 34. 薶售金屬物價指數之計算，用不加權比數之算術平均法

基期：1926 年

金屬	單位	1926 物價（元）	1926 比價	1928 物價（元）	1928 比價	1930 物價（元）	1930 比價
生鐵	噸	$20.4200	100%	$17.6830	86.6%	$17.1700	84.1%
銅	磅	.1393	100	.1468	105.4	.1311	94.1
鋁	磅	.2699	100	.2390	88.6	.2339	86.7
	磅	.0825	100	.0614	74.4	.0538	65.2
鋅	磅	.0737	100	.0603	81.8	.0456	61.9
錫	磅	.6536	100	.5039	77.1	.3163	48.4
銀	兩	.6211	100	.5818	93.7	.3815	61.4
總數			700%		607.6%		501.8%
指數			100%		86.8%		71.7%

指數編製時各種平均數之長處與短處

算術平均數

長處

1. 此平均數比較容易計算.

2. 因其悠久與普徧之應用，故此平均數易於了解.

3. 若採取加權平均，各分組之平均數，可為之平均以求得各值之平均.（若各組有不同之項目，則加權平均實為必要）.

短處

1. 算術平均數受極端量數之影響（見第二章，算術平均數之短處）.

2. 增加之重量，大於減少之重量. 例：若物品 A 由 $1 增至 $2，則其增加為 100%；若物品 B 由 $2 減至 $1，則其減少為 50%；若用比數之算術平均，則此二物品價準之指數表示增加之價準而非不變之價準.

	1926		1928	
物品	物價	比數	物價	比數
A	$1	100%	$2	200%
B	$2	100%	$1	50%
總數		200%		250%
指數		100%		125%

3. 指數之基，由比數之平均法計算而得者，不能用簡捷法移動之.

中位數

長處

1. 中位數不予價格之增加以過度之加重，此與算術平均數不同.

2. 中位數所受極端量數之影響，不若算術平均之大（見第三章，中位數之長處）.

3. 容易計算.比數依大小排列，而中間一數即選爲中位數.

短處

1. 中位數不能用代數法處理之；即分組之中位數不能爲之平均以求得全部材料之中位數.

2. 項目太少時，中位數之值有奇僻之弊.

3. 用此法編製之指數，不能用簡捷法移至新基.

幾何平均數*

長處

* 關於幾何平均數之較詳說明，見第三章幾何平均數.

1. 幾何平均數對於增加量，不予以過度之加重；而對於相等變率予以相等重要.

上段所述問題，闡明算術平均數之短處時，其校正指數，可應用幾何平均數為之求得.

	1926		1928	
物品	物價	比數	物價	比數
A	$1	100%	$2	200%
B	$2	100	$1	50%
幾何平均數		100%		100%

2. 用此技術所編製指數之基，可用簡捷方法，為之移動.

短處

1. 幾何平均數之計算完繁.

2. 此為一不普徧之平均數.

指數之加權

組成指數之各項目，常有予以各級重要之必要. 若不採取此種辦法，則每種物品，將各依其價格之大小，或他種偶然因素，而得到一種重量，而非依其本身之重要而得到相當之加權.

編製指數之實價不加權總合法，其弊端可用一種加權之審愼制度，為之袪除.

欲測量組成物價指數中各項目之重量或重要性，可用每種物品之數量.

加權平均

加權平均數（算術平均數）可依下法求得：

1. 每種項目以其相當權數乘之。

2. 求所得結果之總和。

3. 以權數之總和除之。

$$加權平均=\frac{\Sigma(項目\times權數)}{\Sigma(權數)}$$

因之，若某地麵包，有二種標價，在銷售 10,000 個麵包之聯號其價格爲 6 分，在銷售 1000 個麵包之單獨麵包店其價格爲 8 分。此二種價格之加權平均，可如下法求得：

	物價	銷售數量	物價乘數量
聯號	$ .06	10,000	600
麵包店	.08	1,000	80
		11,000	680

680 ÷ 11,000 = $ .062

實價之加權總合

計算實價之加權總合*，可用每種物品之數量爲權數。某定期（如基年）所產生之數量，可用作權數。指數卽爲計算年之加權總合與基年者比較。

$$\frac{\Sigma(p_r q_o)}{\Sigma(p_o q_o)} \qquad (指數公式 3a)$$

在上式

---

* 加權平均（算術平均數）之求法，爲以權數之和除各項目乘其相當權數之和。加權總合之求法，爲求各項目乘其相當權數之和，而不以權數之和除之。

p_n＝計算年之物價

p_0＝基年之物價

q_0＝基年之數量

q_n＝計算年之數量

關於 1928 年

$$\frac{\Sigma(p_1q_0)}{\Sigma(p_0q_0)}=\frac{\$1,272,012.51}{\$1,446,076.73}=88.0\%$$

關於 1930 年，

$$\frac{\Sigma(p_2q_0)}{\Sigma(p_0q_0)}=\frac{\$1,149\ 875.80}{\$1,446,076.73}=79.5\%$$

但因情形變更，故任何時期所產生物品之數量，不足爲其他各期相對重要之量數．欲解決此困難可採用逐年變更之各權數．因之，欲編製其指定年之指數，則某年所產之數量可用爲權數．公式如下：

$$\frac{\Sigma(p_nq_n)}{\Sigma(p_0q_n)} \qquad \text{（指數公式 3b）}$$

關於 1938 年，

$$\frac{\Sigma(p_1q_1)}{\Sigma(p_0q_1)}=\frac{\$1,268,414.03}{\$1,438,339.20}=88.19\%$$

關於 1930 年，

$$\frac{\Sigma(p_2q_2)}{\Sigma(p_0q_2)}=\frac{\$\ 962,308.20}{\$1,220,635.05}=78.84\%$$

表 35. 美國金屬礦售物價指數之計算，用實價加權總合法，並用基年之權數

（基年：1926）

金屬	單位	1926 物價（元）p_0	1926 產量（千）q_0	1926 物價乘產量 p_0q_0	1928 物價（元）p_1	1928 物價乘產量 p_1q_0	1930 物價（元）p_2	1930 物價乘產量 p_2q_2
生鐵……	噸	$20.4200	39,373	$803,996.66	$17.6800	$696,114.64	$17.1700	$676,034.41
銅……	磅	.1393	1,744,830	243,059.00	.1468	256,145.45	.1311	228,751.15
鋁……	磅	.2699	145,000	39,135.50	.2390	34,655.00	.2339	33,915.50
鉛……	磅	.0825	1,416,280	116,843.10	.0614	86,959.59	.0538	76,195.83
鋅……	磅	.0737	1,236,800	91,152.16	.0603	74,579.04	.0456	56,393.08
錫*……	磅	.6536	172,790	112,935.54	.5039	87,068.88	.3163	54,653.48
銀……	兩	.6211	62,719	38,954.77	.5818	36,489.91	.3815	23,927.30
總數…				$1,446,076.73		$1,272,012.51		$1,149,875.78

* 進口貨

表36. 美國金屬躉售物價指數之計算,

(基年:

金屬	單位	1926 物價(元) p_0	物價(元) q_1	產量(千) q_1	19 p_1q_1
生鐵	噸	$20.4200	$17.6800	38,156	$674,598.08
銅	磅	.1593	.1468	1,818,280	266,923.50
鋁	磅	.2699	.2590	210,000	50,190.00
鉛	磅	.0825	.0614	1,302,280	79,959.99
鋅	磅	.0737	.0603	1,259,180	74,722.55
錫*	磅	.6526	.5039	174,650	88,006.14
銀**	兩	.6211	.5818	58,463	34,013.77
總數					$1,268 414.03

* 進口貨　　** 祇爲美國產量

表37. 美國金屬躉售物價指數之計算,

(基年:

金屬	單位	1926 物價(元) p_0	價比 $\frac{p_0}{p_0}$	19 物價(元) p_1	價比 $\frac{p_1}{p_0}$	產量(千) q_1
生鐵	噸	$20.4200	100%	$17.6880	86.6%	38,156
銅	磅	.1593	100	.1468	105.4	1,818,280
鋁	磅	.2909	100	.2590	88.6	210,000
鉛	磅	.0825	100	.0614	74.4	1,203,280
鋅	磅	.0737	100	.0603	81.8	1,259,180
錫	磅	.6526	100	.5039	77.1	174,650
銀	兩	.6211	100	.5818	93.7	58,463
總數						

用實價加權綜合法，並用計算年之權數

1926)

2　8	1　9　3　0			
p_0q_1	物價(元) q_2	產量(千) p_2	p_2q_2	p_0q_2
$779,145.52	$17.1700	31,599	$559,120.83	$641,167.58
253,286.40	.1311	1,380,950	181,043.85	192,367.73
56,679.00	.2339	229,000	53,563.10	61,857.10
167,458.10	.0588	1,230,220	66,185.84	101,493.15
91,527.57	.0456	1,068,640	45,993.98	74,336.77
114,151.24	.3163	108,940	57,231.32	118,262.58
36,311.57	.2815	50,234	19,164.27	31,200.34
$1,458,339.20			$952,303.20	$1,220,635.05

用比數加權平均法，並用計算年之權數

1926)

2　8		1　9　3　0				
p_1q_1	比數乘權數 $\frac{p_1}{p_0}\times p_1q_1$	物價(元) p_2	價比 $\frac{p_2}{p_0}$	產量(千) q_2	p_2q_2	比數乘權數 $\frac{p_2}{p_0}\times p_2q_2$
674,598.08	584,201.94	$17.1700	84.1%	31,399	559,120.8	453,400.62
266,923.50	281,337.37	.1311	94.1	1,380,930	181,04[illegible].8	170,362.27
50,190.00	44,408.34	.2399	83.7	229,000	54,957.10	47,630.47
79,059.99	59,490.23	.0588	55.2	1,230,220	66,185.81	43,153.17
74,722.55	61,123.05	.0456	61.9	1,008,640	45,993.98	28,470.27
88,006.14	67,852.73	.3162	48.4	180,940	57,231.32	27,699.93
49,722.57	46,[illegible]89.8[illegible]	.2815	51.4	50,234	19,164.27	11,766.83
1,281,122.63	1,145,663.52				933,677.2	782,183.62

比價之加權平均

編製指數，可用某時期比價之加權平均．但產量之數量不能用爲權數，因每種數量係用各種單位表示（如噸、磅、兩、斗等），一行數字，用此種權數乘價比而得者，其單位不同，不能加總．故有應用普通單位所表示之權數之必要．所用權數，應爲金錢價值而非產量之數量．

若用基期權數及加權平均，則公式爲：

$$\frac{\Sigma\left[\frac{p_n}{p_o}\times(p_oq_o)\right]}{\Sigma(p_oq_o)} \quad \text{（指數公式 4a）}$$

因 p_oq_o 等於基期之產量值（價格乘數量）．

相消後，以上公式化爲：

$$\frac{\Sigma(p_nq_o)}{\Sigma(p_oq_o)}$$

此與應用基年權數之加權總合相同（公式 3a）

若用計算年權數，則可演出一新公式如下：

$$\frac{\Sigma\left[\frac{p_n}{p_o}\times(p_nq_n)\right]}{\Sigma(p_nq_n)} \quad \text{（指數公式 4b）}$$

關於 1928 年

$$\frac{\Sigma\left[\frac{p_1}{p_o}\times p_1q_1\right]}{\Sigma(p_1q_1)}=\frac{\$1,145,063.52}{\$1,284,122.63}=89.17\%$$

關於 1930 年

$$\frac{\Sigma\left[\frac{p_2}{p_o}\times p_2q_2\right]}{\Sigma(p_2q_2)}=\frac{\$782,483.62}{\$963,677.20}=81.20\%$$

理想指數

費喧氏演繹一種公式,適合於指數測驗(見下節)之條件. 此公式爲二公式之'交义'或二公式之幾何平均,但受對向之錯誤. 其公式卽爲實數之總合用基年量作權數及實數之總合用計算年作權數之幾何平均. 公式如下:

$$\sqrt{公式\ 3a \times 公式\ 3b}$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma(p_n q_o)}{\Sigma(p_o q_o)} \times \frac{\Sigma(p_n q_n)}{\Sigma(p_o q_n)}} \quad (指數公式\ 5)$$

指數測驗

時間互換測驗法

若用計算期爲基期以計算指數,則用另一時期爲基期時,所得結果,應能趨於一致. 例:若用 1926 年(1926=100)爲基期,則 1928 年之指數爲 2.00. 而用 1928 年爲基期重新編製之,則 1926 年之指數應爲 .50, 卽 2.00 之倒數.

	1926	1928
指數 A	1.00	2.00
B	.50	1.00

將指數交义相乘,如箭頭所示,所得之值應爲 1.00, 因此二數彼此互爲倒數*.

因子互換測驗

物價之變更乘數量之變更,應等於物品之值之變更.

物價指數,可用任何一種方法求得;例:實價依基年或固定年之

* 一個數字之倒數,是該數除 1.

表 38.

指數名稱	時期	基期	物品數
躉售			
Bureau of Labor Statistics 物價總指數	每月	1926=100	784
Bradstreet's 物價指數	每月	……………………	96
Dun's 物價指數	每月	……………………	300
Dun and Bradstreet 物價指數	每月	……………………	15組
世界物價指數	每半月	1923—28=100	9
零售			
Bureau of Labor Statistics 飲食類物價指數	每半月	1913=100	48
Fairchild's 零售物價指數	每月	1913年12月=100	5組
生活費			
National Industrial Conference Board 生活費指數	每月	1913=100	5組
美國勞動局生活費指數	每半月	1913=100	6組
農村物價			
農民所得物價指數	每月	1909年八月至1914年七月=100	8組
購買所用物品物價指數	每月	1910—1914=100	5組
貨幣購買力			
根據			
躉售物價	每月	1923—25=100	784
零售物價	每月	1923—25=100	4組
農村物價	每月	1923—25=100	8組
生活費	每月	1923—25=100	5組

物價指數

地　域	編　製　機　關	出　版　處
美　國	U.S. Bureau of Labor Statistics	Survey of Current Business
美　國	Dun and Bradstreet, Inc.	Survey of Current Business
美　國	Dun and Bradstreet, Inc.	Dun and Bradstreet Monthly Review
美　國	Dun and Bradstreet, Inc.	Dun and Bradstreet Monthly Review
世　界	U. S. Department of Commerce	Survey of Current Business
美國及夏威夷	U.S. Bureau of Labor Statistics	Survey of Current Business
美　國	Fairchild Publications	Survey of Current Business
美　國	National Industrial Conference Board	Survey of Current Business
美　國	U. S. Bureau of Labor	Survey of Current Business
美　國	U.S. Department of Agriculture	Crops and Markets
美　國	U.S. Department of Agriculture	Crops and Markets
美　國	U.S. Department of Labor	Survey of Current Business
美　國	U.S. Department of Labor	Survey of Current Business
美　國	Department of Agriculture	Survey of Current Business
美　國	National Industrial Conference Board	Survey of Current Business

權數，求其總合之法，卽可採用(公式 3a)。

$$\frac{\Sigma(p_n q_o)}{\Sigma(p_o q_o)}$$

產量指數之求法，卽將物價數字(p)之位置與數量數字(q)之位置調換。

$$\frac{\Sigma(q_n p_o)}{\Sigma(q_o p_o)}$$

產量値之指數之求法，卽爲比較計算年產量之値(V_n)與基年產量之値(V_o)。

故：

$$\frac{\Sigma(p_n q_o)}{\Sigma(p_o q_o)} \times \frac{\Sigma(q_n p_o)}{\Sigma(q_o p_o)} \text{應等於} \frac{V_n}{V_o}$$

在上式

V_n. 計算年產量之値之求法，卽爲計算期之物價用其產量乘之或 $\Sigma(p_n q_n)$，而基期者則爲 $\Sigma(p_o q_o)$。

其測驗法如下：

$$\frac{\Sigma(p_n q_o)}{\Sigma(p_o q_o)} \times \frac{\Sigma(q_n p_o)}{\Sigma(q_o p_o)} \text{應等於} \frac{\Sigma(p_n q_n)}{\Sigma(p_o q_o)}$$

表 38 臚列各種重要物價指數。

數量之指數

指數技術，可適用於數量之變更，猶可適用於物價之變更。此類數量變更之指數，乃用以測量變更關於商業活動，工業生產及物品儲藏等。

數量指數之編製方法，與物價指數之編製方法相同．最簡單之格式，爲總合法，

$$\frac{\Sigma q_n}{\Sigma q_o}$$

在上式 Σq_n 爲計算期數量之和

Σq_o 爲基期數量之和

因此種指數包括數列各數之和，故數量必有同一單位（噸、斗等）使可加總．

若各項目之單位不同，且所需要者爲不加權指數，則可用比數之平均．

若用算術平均爲平均數時，其公式爲

$$\frac{\Sigma\left(\frac{q_n}{q_o}\right)}{N}$$

但最良方法即予指數以加權，如是則組成指數之各項目，可切實分別指定其重要性．物品之價格或假定權數，均可應用之，以達此目的．

測量數量變更所用之加權總合爲

$$\frac{\Sigma(q_n p_o)}{\Sigma(q_o p_o)} \quad \text{用基年權數}$$

或

$$\frac{\Sigma(q_n p_n)}{\Sigma(q_o p_n)} \quad \text{用計算年權數}$$

若各項目之單位不同時，祇有物價可用作權數；若用假定權數，則加總爲不可能．

單位不同時，可用比數之平均，如是則可用假定權數．

$$\frac{\Sigma\left(\frac{q_n}{q_o}\times wt\right)}{\Sigma(wt)}$$

在上式　　　　　　　　$wt=$重量

'理想指數'可化爲數量式

$$\sqrt{\frac{\Sigma(q_np_o)}{\Sigma(q_op_o)}\times\frac{\Sigma(q_np_n)}{\Sigma(q_op_n)}}$$

表 39 所載爲幾種比較著名之數量指數及其加權制度．關於組成指數之各種項目，均在表上歸成大類，以利比較．

表 39．商業活動與工業生產上所選定幾種指數之組織

組織別	權數			
	工業生產指數		商業活動指數	
	Standard Trade and Securities	Federal Reserve Board	New York Times Annalist	Business Week
鐵與鋼生產	25	20.5	25	10
紡織生產	18	17.5	13	
木材生產	10	8.5	7	7
農業與食料生產	9	9.5		
汽車與車胎生產	8	5.2	10	
非鐵之金屬生產	6	5.2	5	
紙與印刷品生產	4	9.6		
皮革與皮鞋生產	4	3.9	2	
水泥生產	4	1.1	3	
煤生產	3	6.9		9
鐵路設備生產	2	0.6		
電力生產	2		15	12
化學生產	1	3.2		
機器生產	1			
石，黏土及玻璃生產		2.2		
橡皮		1.5		
車輛裝載			20	17
個別負債				20
房屋建築				20
商業借款				4
流通貨幣				4

參 考 書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statist cs*, pp. 96–213, P. S. King & Son, London, 1901.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 175–205, Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowd n D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 3 2–397, Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 267–310, McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Davies, George R., and Crowder, Walter F., *Methods of Statistical Analysis in the Social Sciences*, pp. 91–123, John Wiley & Sons, nc., New York, 1933.

Day, Edmund E., *Statistical Analysis*, pp. 328–367, Macmillan Co., New York, 1930.

Fisher, Irving, *The Making of Index Numbers*, Houghton, Mifflin Company, Boston, 1927.

Harper, F., *Elements of Practical Statistics*, pp. 278–283, Macmillan Co., New York, 1930.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 183–223, Harper & Bros., New York, 1924.

Kelley, Truman L., *Statistical Method*, pp. 331–347, Macmillan

Co., New York, 1923.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 169–251; 344–362. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Mitchell, Wesley C., *Index Numbers of Wholesale Prices in the United States and Foreign Countries*. United States Bureau of Labor Statistics, Bulletin No. 173. Washington, D. C., 1931.

Rietz, H. L. (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 181–194. Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

Riggleman, John R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 151–174. McGraw-Hill Book Co., NewYork, 1932.

第十五章

次數分配之進一步分析

動差

若次數分配之常數或'動差'爲之算出,則其分析更可精密.動差係用以計算足以形容分配之量數,並用以決定適當曲線,以作分配之數理修勻.

I. 從假定始點計算而得之次數分配第一動差爲*:

$$\nu_1=\frac{\Sigma(fd)}{N}$$

II. 第二動差(從假定始點計算)爲:

$$\nu_2=\frac{\Sigma f(d^2)}{N}$$

III. 第三動差(從假定始點計算)爲:

$$\nu_3=\frac{\Sigma f(d^3)}{N}$$

IV. 第四動差(從假定始點計算)爲:

$$\nu_4=\frac{\Sigma f(d^4)}{N}$$

---

* 符號 ν 爲希臘文小字母 Nu.

最重要動差係從算術平均數始點計算而得*

$$\mu_1=\frac{\Sigma f(x)}{N}$$

$$\mu_2=\frac{\Sigma f(x^2)}{N}$$

$$\mu_3=\frac{\Sigma f(x^3)}{N}$$

$$\mu_4=\frac{\Sigma f(x^4)}{N}$$

在上式 x 代表實際數值對於平均數之差數.

由平均數計算之差之和爲零,故第一動差等於零.其餘各動差,可從下式求得:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4$$

材料分組時之薛伯氏校正數+

計算次數分配之動差時,含有一種假定,即各數値均假定位於組距之中點.此種假定,不免有一種錯誤,應用下列校正數校正之.

I. 已校正之第一動差

$$\mu'_1=0$$

II. 已校正之第二動差

$$\mu'_2=\mu_2-\frac{1}{12}$$

---

* 符號 μ 爲希臘文小字母 Mu.

+ 該正數祇適用於以下情形,(a)分配爲連續性者 (b)分配逐漸向兩端削小.

III. 已校正之第三動差

$$\mu_3' = \mu_3$$

IV. 已校正之第四動差

$$\mu_4' = \mu_4 - \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{7}{240}$$

爲便利起見，上述之動差，係用組距計算，而非用單位計算．將此動差換算至單位時，應採用下列之關係：

$$\mu_2'(\text{原來單位}) = C^2\mu_2'(\text{組距})$$
$$\mu_3'(\text{原來單位}) = C^3\mu_3'(\text{組距})$$
$$\mu_4'(\text{原來單位}) = C^4\mu_4'(\text{組距})$$

在上式，C＝分組時組距之大小．

動差之計算載表 40．

表 40．動差之計算

ABC 公司所製造 600 具黃銅洗濯器之厚度之離勢

（假定材料*）

度厚（吋）	洗濯器數 (f)	與假定原始之差（用組距計）d'	$f(d')$	(5) $f(d'^2)$	(6) $f(d'^3)$	(7) $f(d'^4)$
.0180—.0183	6	−5	−30	150	−750	3750
.0184—.01879	30	−4	−120	480	−1920	7680
.0188—.01919	42	−3	−126	378	−1134	3402
.0192—.01959	66	−2	−232	264	−528	1056
.0196—.01999	94	−1	−94	94	−94	94
.0200—.02039	120	0	0	0	0	0
.0204—.02079	102	1	102	102	102	102
.0208—.02119	60	2	120	240	480	960
.0212—.02159	54	3	162	486	1458	4370
.0216—.02199	14	4	56	224	896	3584
.0220—.02239	12	5	60	300	1500	7500
	600		−2	2718	10	32502

* 根據較小分配之假定材料，仿 W. A. Shewhart, *Economic Control of Quality of Manufactured Product.*

$$\nu_1=\frac{\Sigma(fd')}{N}=\frac{-2}{600}=-.0330$$

$$\nu_2=\frac{\Sigma f(d'^2)}{N}=\frac{2718}{600}=4.5300$$

$$\nu_3=\frac{\Sigma f(d'^3)}{N}=\frac{10}{600}=.0167$$

$$\nu_4=\frac{\Sigma f(d'^4)}{N}=\frac{32502}{600}=54.1700$$

$\mu_1=0$

$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=4.5300-(.0033)^2=4.52999$

$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3=.0167-3(.0033)(4.5300)$

$+2(.0033)^3=-.43177$

$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4=54.1790-4(.0033)$

$(.0167)+6(.0033)^2(4.5300)-3(.033)^4=54.170076$

$\mu'_1=0$

$\mu'_2=\mu_2-\frac{1}{12}=4.52999-.08333=4.44666$

$\mu'_3=\mu_3=-.43177$

$\mu'_4=\mu_4-\frac{1}{2}\mu_2+\frac{7}{240}=54.170076-2.264995$

$+.029167=51.94429$

曲線之準則

能最形容分配之曲線型，可基於動差之值上，計算一種準則以鑑別之．

準則之計算如下*．

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\kappa=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(4\beta_2-3\beta_1)(2\beta-3\beta_1-6)}$$

用此準則後，皮而生曲線型之最足能形容分配者，可以鑑別之(見 Elderton, W. P., *Frequency Curves and Correlation*)．+

峰度

峯度為次數分配之頂端形狀．

若曲線峯度之程度，較常態曲線為高 ($\beta<3$)，則曲線稱為屬於尖狹者．若 β 較 3 為小，則曲線之頂端較常態曲線為平，因而稱為屬於平闊者．

峯度之量數，有時用下式表示**：

$$\beta_2-3$$

其結果：

1．若為零，則曲線為常態．

2．若為正號值，則曲線為尖狹者．

3．若為負號值，則曲線為平闊者．

---

* 符號 β 為希臘文小字母 beta 而 κ 為希臘文小字母 kappa．

\+ 見第十二章，曲綫之擴意．

** 其他教科書中有用下式者：$\frac{\beta_2-3}{2}$．

表38分配中β_2值之計算，例示如下：

$$\beta_2=\frac{51.94499}{(4.44666)^2}=2.63$$

偏態之其他量數

偏態之較精確決定，可用下式計算之*：

$$\alpha_3=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\sqrt{\beta_1}$$

在常態曲線上，α_3之值為零。

偏態之又一公式為+

$$\chi=\frac{\beta_1(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

此χ**值（偏態之量數）用為指定衆數之位置時較前述之方法為精確。

$$\text{衆數}=\overline{X}-(\chi)(\sigma)$$

參考書

Camp, Burton H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*, pp. 18-30. D. C. Heath & Co., New York, 1931.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 211-217. McGraw-Hill Book Co., 1925.

---

* 乃皮爾生氏所提出．χ不可與χ^2相混，χ^2係用為測驗曲綫配合之適度．

+ 符號α為希臘文小字母alpha．

** 符號χ為希臘文小字母chi．

Elderton, W. P., *Frequency Curves and Correlation*, C. and E. Layton, London, 1929.

Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*, pp. 80–105; 228–262, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1932.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 338–344, Ginn & Co., New York, 1928.

Kelley, Truman L., *Interpretation of Educational Measurements*, pp. 77, World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 19 7.

Mills, Frederick C., *Statistical Methods*, pp. 527–532, 545–546, Henry Holt & Co., New Yerk, 1924.

Rietz, H. L. (Editor), *Handbook of Mathematical Statistics*, pp. 97–111, Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

第十六章

材料之搜集

材料之彙總與搜集

材料可從初級之來源得到，即用會談方法、訪問表格或通函方法；或可從次級來源得到，即用他人或他機關所編之材料。

初級來源

會談方法

長處:

1. 從來源直接到得之材料，可以獲得較高之精確性。
2. 不能從訪問表格中得到之材料，可以得到。
3. 可以親自檢查所得到之消息。

短處:

1. 祇可搜集小數樣本。
2. 會談方法不易祛除主觀之因素。
3. 此方法之效力甚少，且所包含之時種與財力，使其範圍不能擴大。

訪問表格

特性:

1. 問句易於明瞭.

2. 在可能範圍,問句應有論理之次序.

3. 答案應爲是或否,應用記號或空白,或在可能時,應用數字.

4. 訪問表格,應簡明易曉.

5. 應使格式便利於答案之填寫.

6. 其編製應便利於材料之表列.

長處:

1. 若擴大調查之範圍,則輕而易舉.

2. 彙總材料,比較經濟.

短處:

1. 問句非用附加說明,常常不能答覆.

2. 在許多實例中,結果常不可靠.

次級來源

長處:

1. 材料已經編訂,可以節省時間與費用.

2. 精確之責任,可以轉移,不必自己擔負.

短處:

1. 由初級調查所得之材料,無從證實.

2. 所用統計之技術無從探得,故結果之精確無從證明.

3. 主觀之編製與解釋,或影響所示之結果.

4. 研究之目的或使材料之選擇與技術之採取,發生偏見之虞.

5. 有代表性之樣本不能得到.

參考書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 14-51. P.S. King & Son, London, 1901.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp. 371-395. Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 22-37. Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp. 15-38. McGraw-Hill Book Co., New York, 1925.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 6-29. Ginn & Co., New York, 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 290-326. Harper & Bros., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 3-33. Century Co., New York, 1925.

Odell C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 14-31., D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Riggleman, John R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 11-31. McGraw-Hill Book Co., New York, 1932.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 28-73; 310-360. Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

第十七章
統　計　表

定義

統計表爲數字材料有系統之排列,分成縱橫行以作比較之用.

統計表若照功用分類約有二種,即通用表(初級表)與特用表(導來表或主文之附表).

通用表

功用

1. 通用表之基本功用,爲顯示原始材料,以作參考之目的.
2. 爲消息之來源,而於需要原始事實時用之.
3. 在編製特用表之時用之.

特性

1. 通用表在同一題目上,顯示各種不同之消息.
2. 包含絕對數字而非百分比數字,其理由已在其功用用上述之.
3. 消息之顯示,以便於容易參考爲主.
4. 包含之數,應爲實數而非整數.

特用表

功用

1. 特用表之基本功用，爲顯示彼此有特殊相關之材料.

2. 用以置重於通用表內普通消息中之特殊方面.

3. 使選出之材料得到一簡單之顯示.

特性

1. 有時可用數字之整數.

2. 特用表中之特選材料，可列入狹小地位，以便解釋.

製表之規則

製表之法，慣例不同，下所列者，爲普通公認之規則*:

1. 問題——標題本身，能闡明其意義，且其內容應依照下列之次序爲之指出.

a. 材料之性質.

b. 包括之地域.

c. 包括之時期.

標題位於表之上方，標題之字體應較任何部分爲大而顯著.

2. 材料來源——若材料爲非原始者，材料來源，應在表上指出，因材料來源係用以:

a. 指出材料之權威.

b. 作爲參證之用.

c. 作爲尋求更多材料之參考.

3. 材料附註——附註係用以詳細說明表中之數字等. 其位置係在表之下，來源之上. 附註應用 * #, 等符號或字母表示，但切不可用數字，因數字或將被解釋爲表之一部分.

* 普通公認製表方法之外，尙有列外之方法，可因特用表之特殊目的而適用之.

表 41.

表題 → 美國生鐵之產量與價格　← 縱標目

表頭 →　　← 單位

年　分	產　量 （千噸）	價　格* （每噸之元數）
1919	31,015	$28.97
1920	36,926	42.76
1921	16,688	22.58
1922	27,200	24.03
1923	40,361	26.30
1924	31,403	20.90
1925	36,700	20.58
1926	39,378	20.42
1927	36,566	18.55
1928	38,156	17.68
1929	42,614	18.43
1930	31,399	17.17

橫標目 →

* 芝加哥及勃明享城鎔爐爐之基本生鐵每週平均價格.　← 附註

來源 → 材料來源: *Iron Age.*

4.　**材料之排列**——表中項目，若謹愼排列，可以便利表之閱讀，材料之分析與比較，且可對於材料之選擇部分，予以重置．項目可依照以下各法排列：

a.　**字母次序**——依照項目之字母次序．通用表多採用此種排列．

b.　**時間次序**——依照項目在一長期內每次發現之時間．時期之自最早以至最近，應在橫標目上自頂至底排列，或在橫標目上自左至右排列*.

c.　**地理次序**——依照地位之習慣分類，如：國、省、州等，或

* 若最近數字須引起注意時，則此規則發生一例外．此時最近數字反排在其他數字之前，並用雙線或粗線區別．

美恩省、牛享省、佛芒省等. 此種排列普通限於參考表(通用表).

d. **大小次序**——依照數字之大小次序. 最大數字位於縱行之頂, 其餘依次類推. 橫標目與其値相當. 若橫標目爲數字, 如次數分配之組距, 則依照大小排列. 最小數字排在頂端, 最大者排在底端; 以縱行論則最小數字排在左端, 最大者排在右端.

e. **習慣次序**——有多種材料, 應依照習慣排列而不依照數列排列. 例如男、女、童之分類, 鮮有列爲, 女、童、男者.

5. **縱行**——若表中有若干縱行, 可用數字或字母標出, 以便參考.

6. **縱標目**——每縱行之頭, 稱爲縱標目. 縱標目應簡明. 雜項欄或其他欄, 應置於表之右端.

7. **橫標目**——每橫行之頭, 稱爲橫行標目. 表內橫行表頭之一部分, 稱爲橫標目. 橫標目內項目, 可爲歸類, 如月以季歸類, 以便利材料之解釋.

8. **總計**——縱行之總計, 應置於縱行之底而橫行之總計, 則置於極右端*.

9. **測量之單位**——單位應載在表頭內縱標目下.

10. **格線**——格線應如下法畫之:

a. 標題之下與表身之上應有一橫線.

b. 各縱行用單線區分. 打字機打成之縱行, 則不需縱線.

c. 橫標目與表頭對於數字, 應各用雙線或重線分開, 尤其

---

* 美國普查局將總計置於縱行之頂端及橫行之左端, 其辦法之理由, 根據該局說明, 爲引起讀者對於總計之注意(見前頁附註*).

在未付印之表上.

d. 縱行內之總計與其他數字，應用一單線分開.

11. 置重——雙線，粗線，意大利字，細畫字，粗畫字，皆用以表示表內置重之意.

參 考 書

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 52–81; 117–124. P.S.King & Son, London, 1901.

Chaddock, Robert E., *Principles and Methods of Statistics*, pp.397–417. Houghton Mifflin Co. New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden, D. J. *Practical Business Statistics*, pp.39–58. Prentice-Hall' Inc., New York, 1934.

Crum, William L., & Patton, Alston C., *An Introduction to Economic Statistics*, pp.39–88. McGraw-Hill Book Co. New York, 1925.

Harper, F., *Practical Statistics*, pp. 31–35. Macmillan Co., New York, 1930.

Holzinger, Karl J., *Statistical Methods for Students in Education*, pp. 31–34; 36–45. Ginn & Co., New York 1928.

Jerome, Harry, *Statistical Method*, pp. 21–49. Harper & Bros., New York, 1924.

Mills, Frededrick C., *Statistical Methods* pp.73–74. Henry Holt

& Co., New York, 1924.

Riggleman, Jorn R., & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 31–48. McGraw-Hill Book Co., New York, 1932.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*. pp. 87–94; 310–360. Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

第 十 八 章

圖　　示

定義

圖示法爲顯示統計材料以便閱覽之方法.

圖示種類

圖示種類甚多,每一特種圖示之採用,由材料內容及製圖之目的而定.

圖示可分爲以下種類:

I. 線或曲線圖

a. 算術格線

b. 單對數或對數格線

c. 其他特殊格線

線圖之特殊種類

a. 陰影盈虧圖

b. 帶形圖

c. 高下圖

d. 直方圖

II. 條形圖

III. 面積圖

IV. 立體圖

V. 統計地圖

製圖之規則 *

1. 每圖應有一簡明題目，位於圖之上部中間 †. 依照規則，圖之題目，應包含：

a. 材料之性質

b. 地理之位置

c. 包括之時期

以上圖題之要素，照例應如上述次序顯出.

2. 坐標線應減至極少限度，而曲線應爲置重使之在底面上顯出.

3. 材料來源應在圖下左邊指出.

4. 附註採用時，應位於圖下右邊.

5. 若欲使圖易於了解，則曲線、分段、及其他細點，愈少愈好.

6. 每一量表應有一量表縱標目，指出單位.

a. X 軸量表標目，應集中於 X 軸之下.

b. Y 軸量表標目，應位於 Y 軸之頂端.

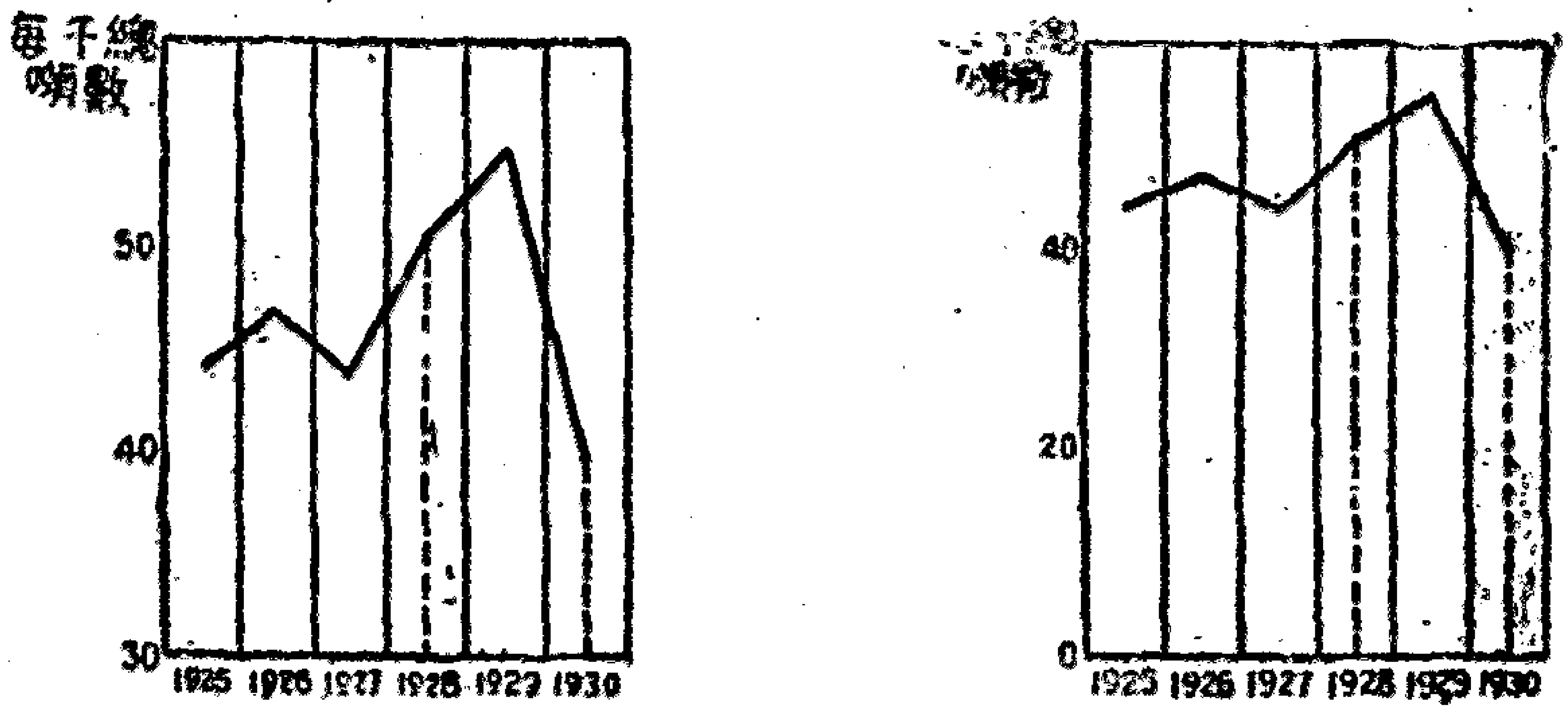
7. 零點應在量表上(Y軸)指出，否則比較易生誤解. 指出零點

---

* 欲求圖示技術之詳細討論，讀者可參看 Arkin, H., and Colton R., *Graphs*, Harper & Bros., 1935.

† 印成之圖，其圖題普通位於圖之下面，參看本書之圖.

之必要,可從以下二圖,圖 28*,a 與 b 二峯之比較見之。



材料來源: American Iron & Steel Institute,

圖(1)
(零點未指出)

圖(2)
(零點已指出)

圖 28. 美國 1926——1931 年鋼塊之產量

圖 2 包括零點 (Y 軸),故其 1928 與 1930 二點之高度之比 (5 與 4),與圖 1 令人誤解之比 (2 與 1) 大不相同.

倘缺乏地位而不便應用零點,則應插入量表之間斷以示删略.

8. 數值量表應沿 X 與 Y 軸放置,以略示圖上數量大小之變化.

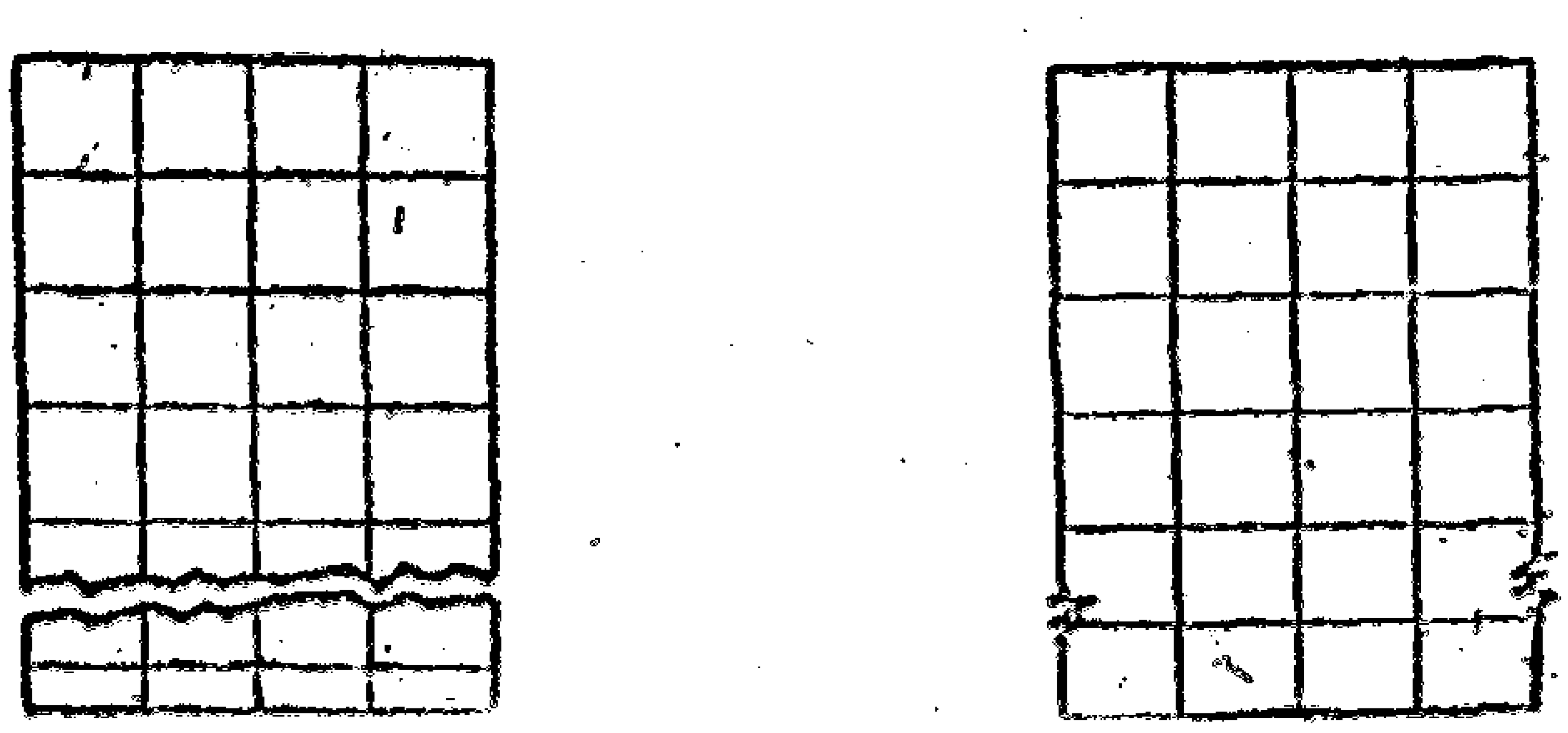


圖 29. 量表間斷之種類

* 若圖爲百分比式,則此規則發生例外.在此情形時,100%線應予以置重.

（數值量表上不必指示明細區畫，因實際數值，原不欲從圖上讀出，實際數值可從伴圖之原始材料表上得到）.

9. 倘 X 軸之空位用以指示時距，則用以代表每時值之點，可繪在該時期之中點．但認為必要時，時期可使之與縱橫線交點相符，而代表之點即繪在交點之上.

10. 在 Y 軸上，數值量表應從零點（或以最小值）圖之底端開始，而至最高值在圖之頂端．在 X 軸上，數值應以最小者自左邊起，而至右邊之最高值.

構成一圖之各種元素，有如圖 30 所示.

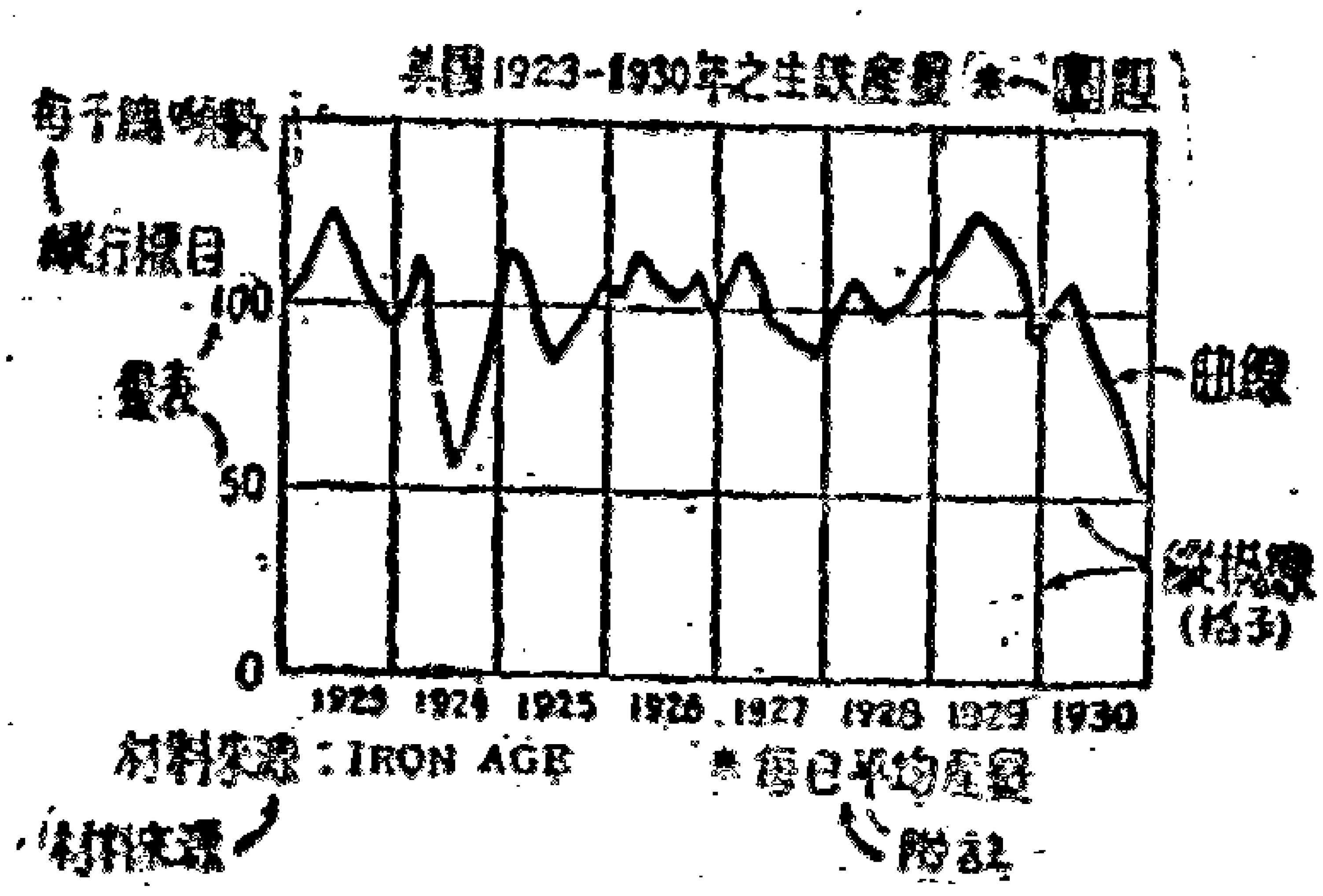


圖 30. 圖之元素

直線或曲線圖

直線圖或曲線圖之區別，即視材料之變化係用直線或曲線指示（見圖 30）.

此種圖之繪製，係將各值在 X 及 Y 量表上用點表示，各點用直線連接之.

線圖可依照量表格線之種類為之分類:

a. 算術格線

b. 對數格線

c. 其他格線*

算術格線

在算術格線紙上，縱橫線各為相等之距離。相等值用相等距離表示。故在格線上，1 與 3 距離和 8 與 10 之距離相同。

算術等差級數之繪製，在算術紙上為一直線。因在此種數列上各連續值具有相等之差數。

因相等量用相等距離表示，故相等變化表示同樣絕對差。

直線或曲線型之圖，作為圖示用，最為普通。

對數及單對數格線+

倘所比較者為百分比而非絕對變化，則需用較為不同之格線。

若兩對數字有一不變之百分比變化，則數字之對數之差數相

數字	對數	
2	0.30103	
4	0.60206	
差數	0.30103	100%增加

數字	對數	
5	0.69897	
10	1.00000	100%增加
差數	0.30103	

---

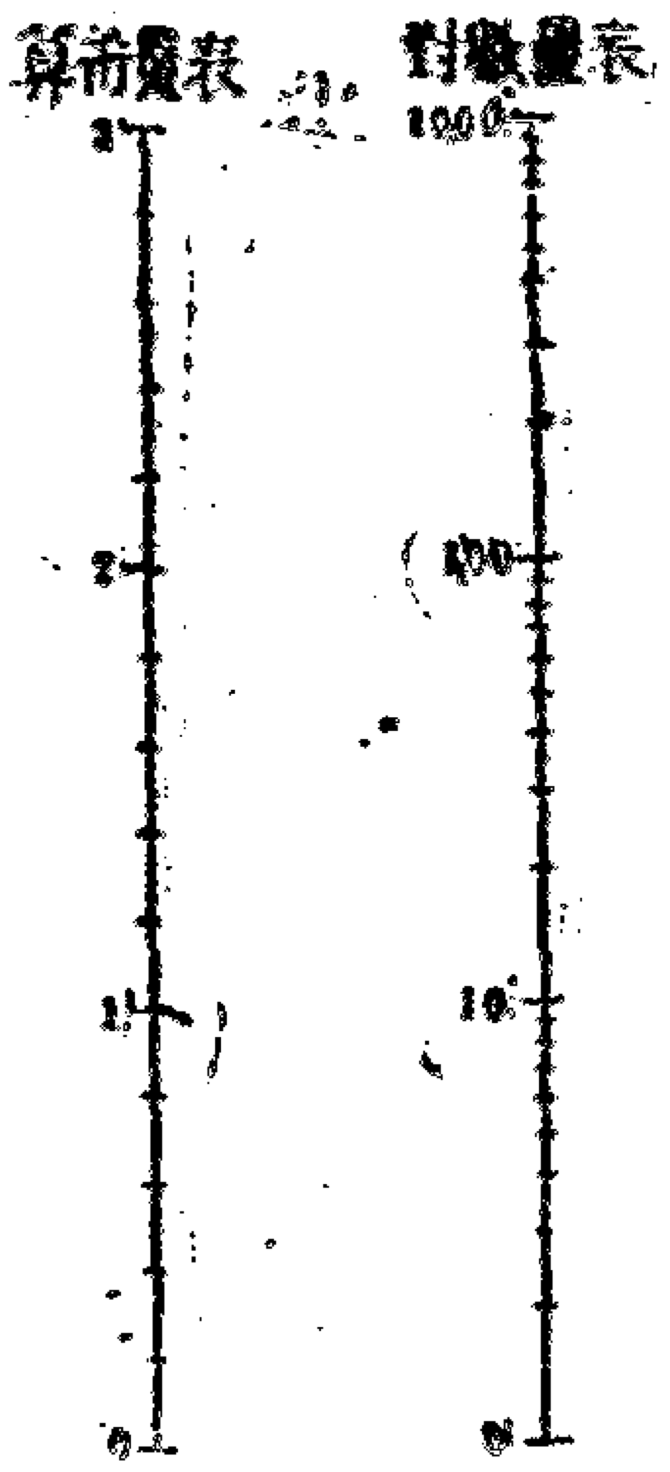
* 其他各種格線均可得到，但不在本討論範圍之內。

\+ 單對數格線又稱比例紙。

等，此點可以明示之*.

若用數值之對數，而不用其原數，爲之繪出，則不變之差（升或降）必等於不變之百分變化.

但欲將原始材料變爲對數，則需時與力甚多，故用一便利方法排列量表，使對數可直接參用特殊量表爲之繪出.



用較長方法而得之對數，可在算術量表上照常繪出. 故欲繪出數值 2 可決定其對數 (0.30103) 而將此值繪出. 但若量表先爲備就，並在 0.30103 處標以數 2，則此材料，不先爲之決定其值之對數，亦可繪出.

簡單算術量表與用以繪畫對數之相當量表，其二者之關係如下:

若對數格線用於 X 及 Y 軸上，則所用之紙稱爲對數紙，若祇用一軸，則稱爲單對數紙.

---

* 參看任何初等數學教科書.

因時間普通排在 X 軸上，故在單對數紙上，此軸爲算術格線，而 Y 軸上用對數格線.

對數圖之特性

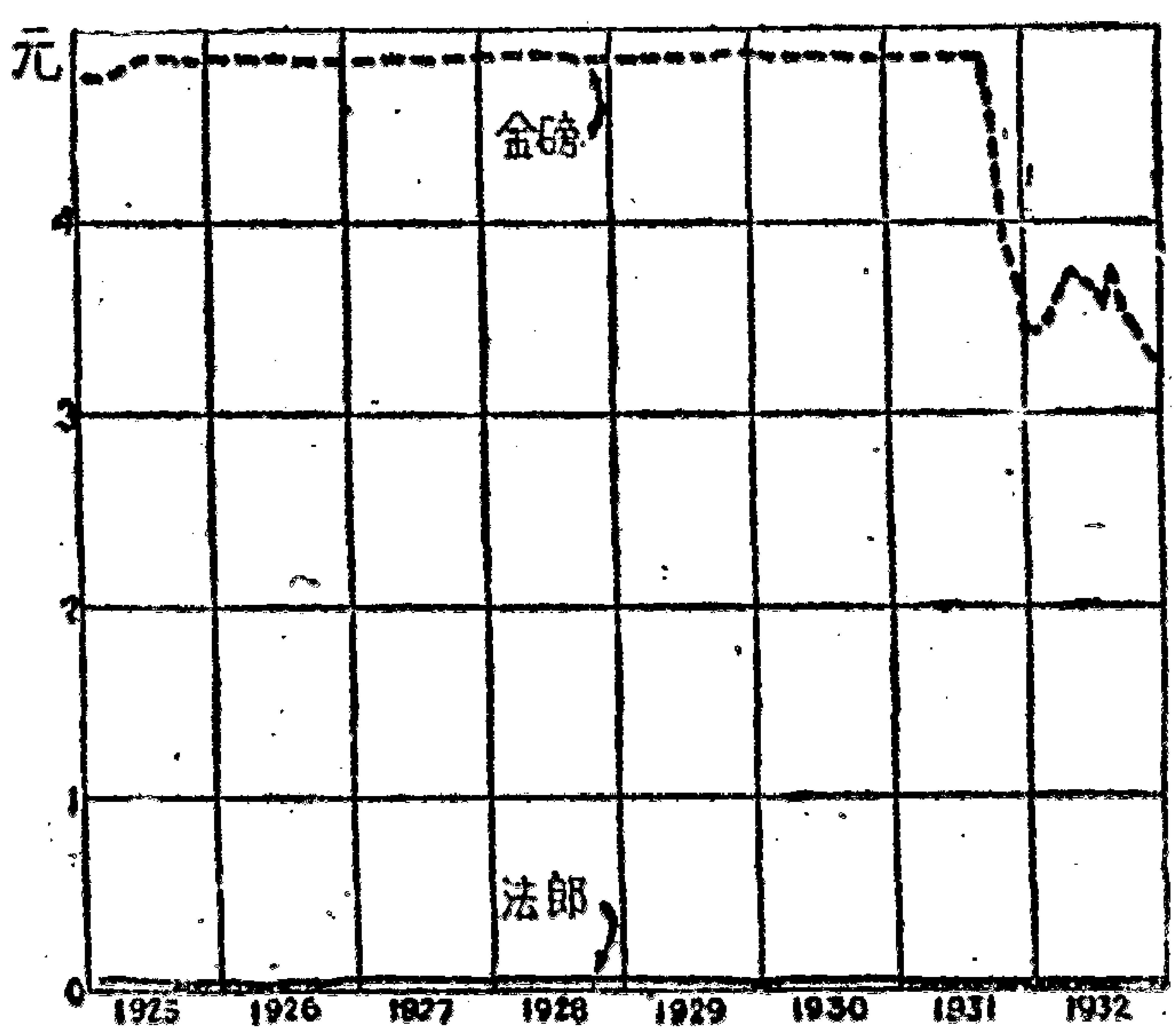
1. 對數圖無零線或底線.

2. 單對數圖在橫軸上，爲算術量表. 對數圖則在二軸上均用對數格線.

3. 幾何級數，繪在對數紙上，形成一直線，因幾何級數之對數形成一算術級數.

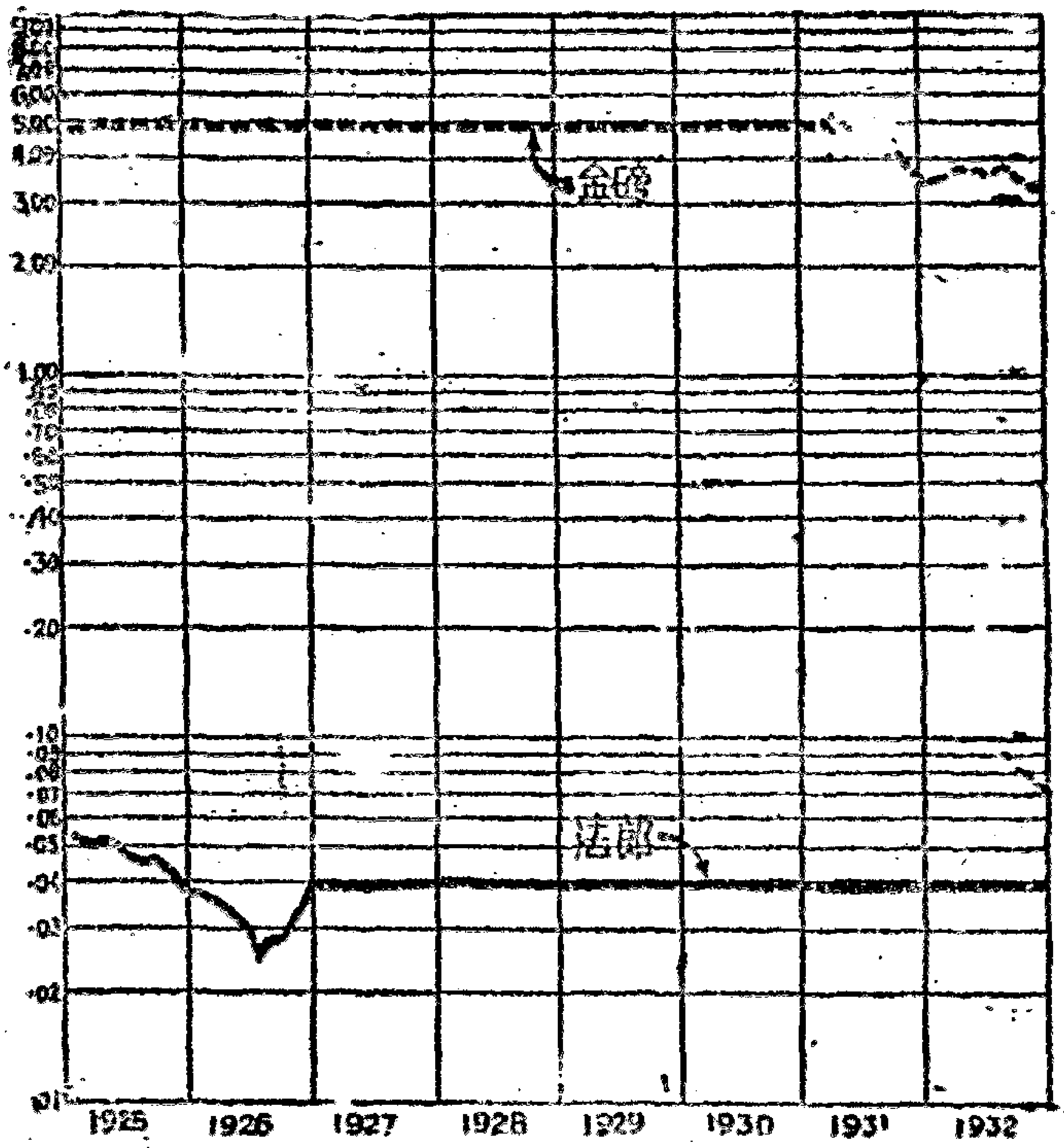
4. 相等上升或下降，表示相等百分變化.

5. 對數圖上之相等傾斜度表示相等變化率.



材料來源：Federal Reserve Board, *Federal Reserve Bulletin*.

圖 31b——法郎與金磅之兌換率，1925 —1932.（繪在算術紙上）



材料來 : Federal Reserve Board, *Federal Reserve Bulletin*.

圖 31b. 法郎與金磅之兌換率, 1925——1932.(繪在單對數紙上)

對數圖係用以

1. 比較變化之比率.

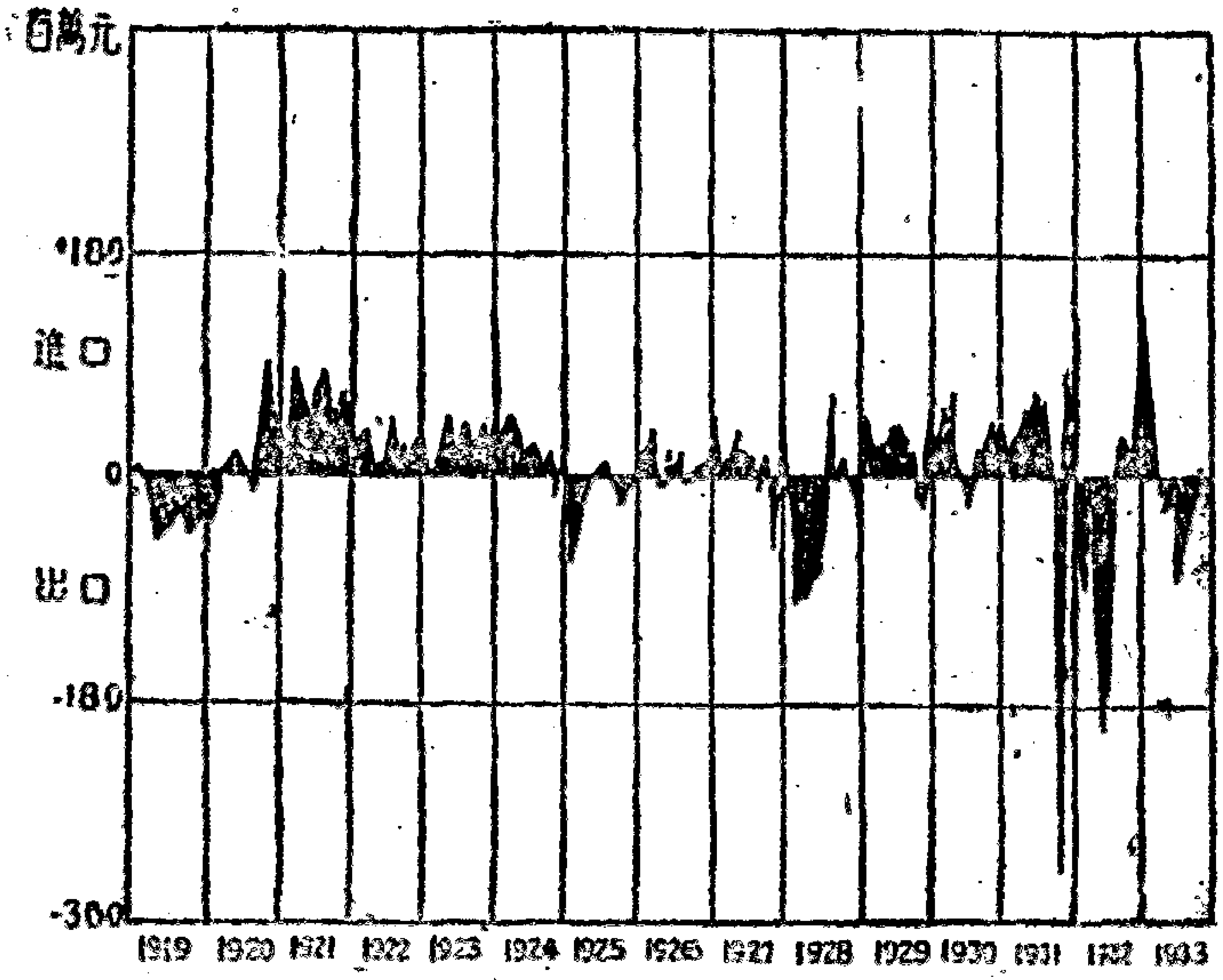
2. 表示兩種或多種相差極大數列間之關係.

a. 算術紙與單對數紙相較其不適用處, 可從圖 31 見之.

線圖之特型

1. 陰影盈虧圖爲一種線圖. 顯示對於零線或底線之正負差, 而將零線或底線與曲線間之地位塡滿 (見圖 32).

陰影盈虧圖之繪製, 先將對於底線之實際差數用點表出. 連接



材料來源: Standard Trade and Securities Service, *Statistical Base Book*.

圖 32. 美金之移動,1919——1933.(孤斷圖)

各點並將底線與曲線間之面積填滿.

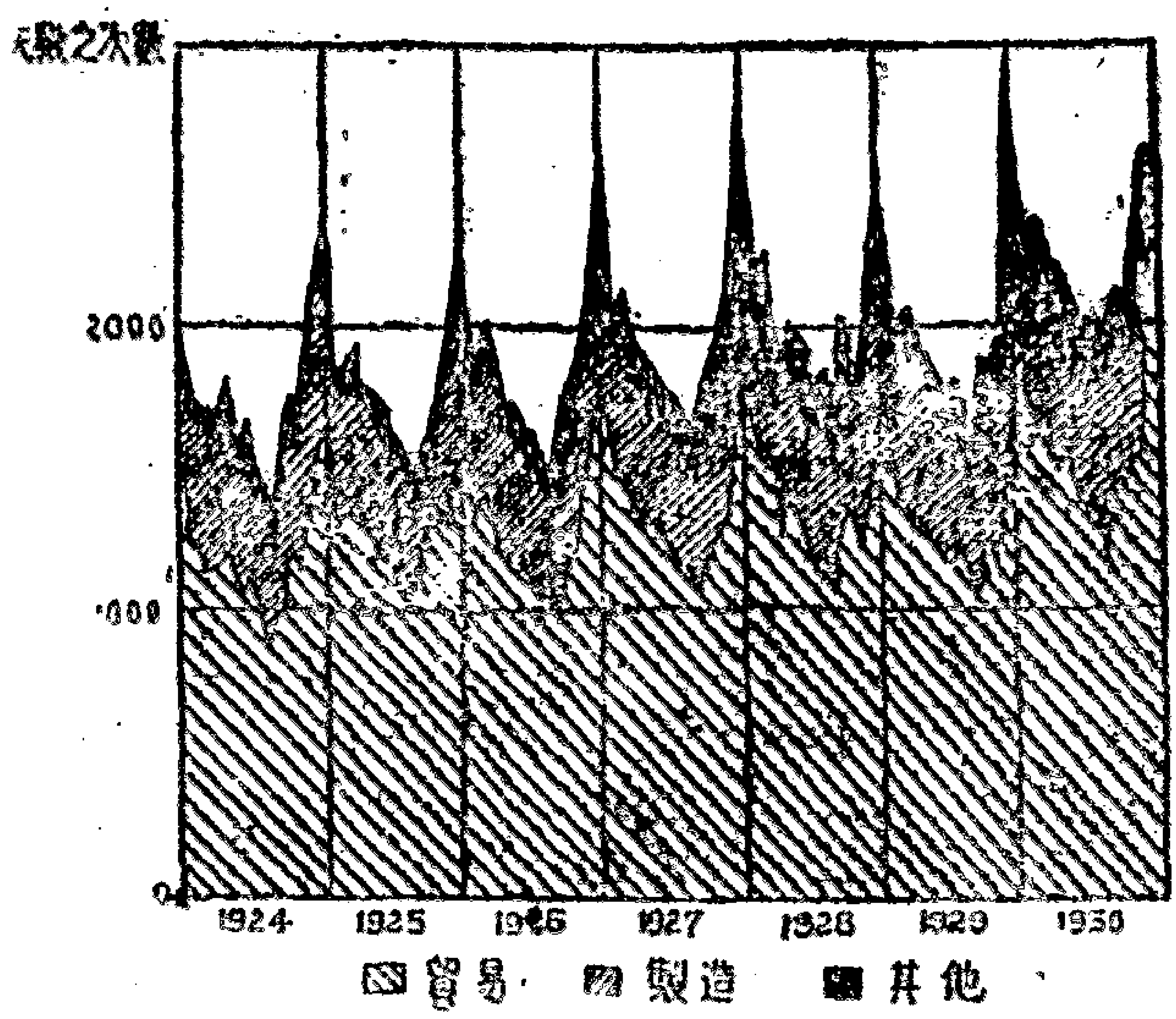
2. 帶形區爲線圖之一種,顯示全部與局部之變化. 局部可以填黑或用線交叉. 第一局部分繪成後,再將第二局部加上,連續此累積法,直至各局部均已包括在內. 頂端曲線之變化,表示全部之變化,而任何局部之各厚度,表示該局部之各種變化. 圖 33 闡明此型之圖.

3. 高下區爲線圖之一種,不僅顯示長期間所發現之變化,且顯示長期內之各短期(如日、週、月、等)所發現之變化,指出其高下之値.

繪製高下圖時,先繪畫一時期之最低値,再繪同時期之最高値. 連續此法,直至本圖所包括之時期終了爲止. 每一時期之低値與高

值用重線連接之.此種線彼此距離接近,故其形宛若不規則之帶.

4. 直方圖又稱長方次數多邊圖,係根據次數分配繪製,其法如下.法用組距之大小為底闊及每組之次數為高度,建立長方形.見圖2.



材料來源: Standard Trade and Securities Service *Statistical Base Book*.

圖 33. 美國商業失敗之類別,1924——1930.(帶形圖)

條圖

條圖係用同闊而不同長之直條,以比較不同之量.

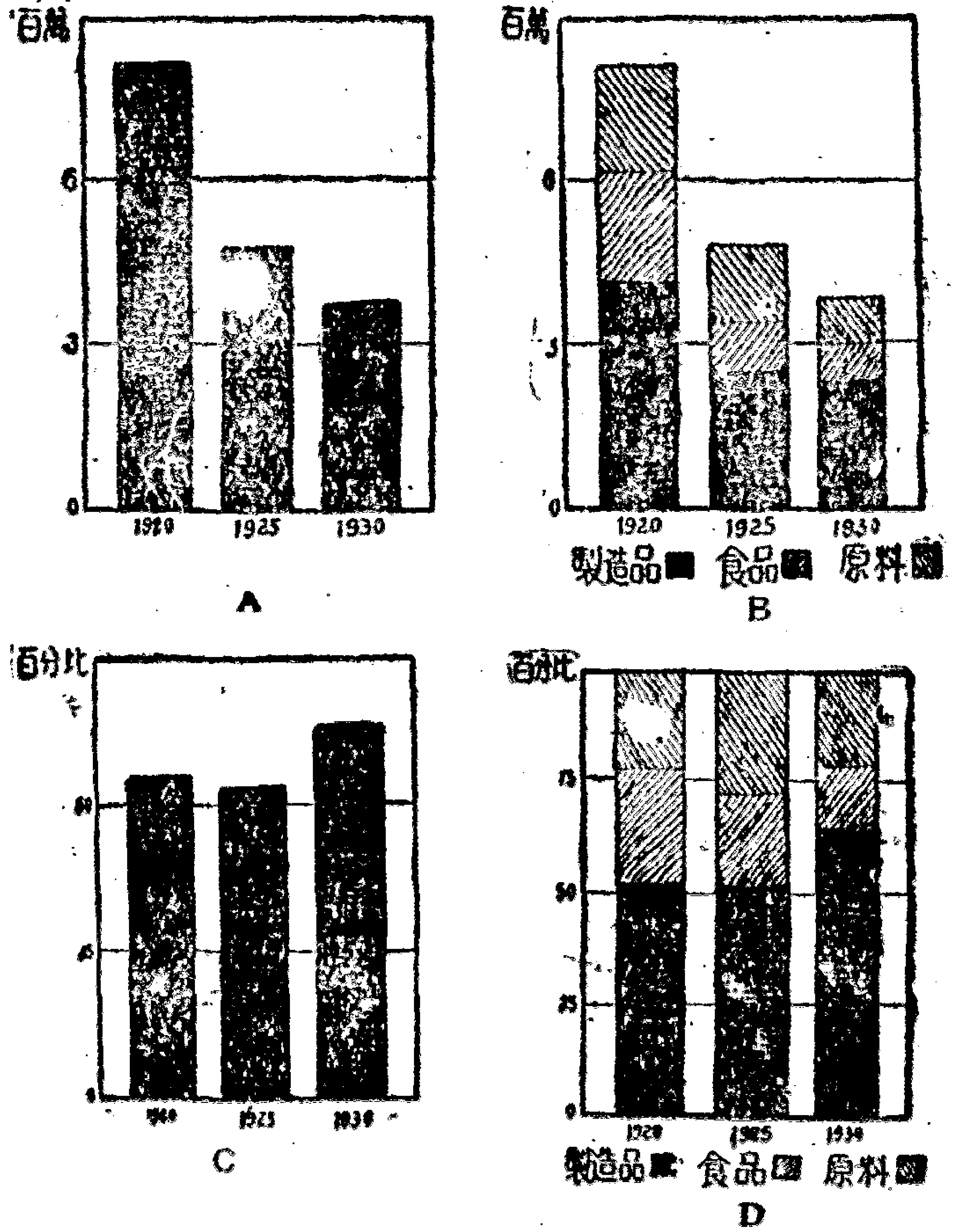
條圖可細分為四種,即

1. 絕對
   a. 簡單
   b. 分段
2. 百分比
   a. 簡單

b. 分段

簡單絕對條圖

用同闊之底在同一底線上,建立直方條,其高度以絕對或實際之數字為準.條形可以橫放或縱排;但量表涉及時間,則用縱條圖.見圖 34,A.



材料來源: United States Depattment of Commerce.

圖 34. 英國之輸出品,1920,1925,1930.用各種條形圖式樣顯示.

(圖C為製造品占輸出品總數之百分比.)

分段絕對條圖

條圖可依照條之組成部分爲之分段。每條之組成部分依材料之秩序排列，最大部分置在底面。有時數字相差極大，致最大一段不能得到其所占之地位，但雖然如此，其次序仍不能變更。分段條圖應爲累積，卽繪製時每一分段，加於各分段總數之上（見圖 34，B）。

簡單百分條圖

此類條圖之繪製方法與簡單絕對條圖同，其不同者，卽條之長度，代表百分值（見圖 34，C）。

分段百分條圖

用長方條建於同一底線上，條之廣度與長度相等。長度代表一百分，100。每條分爲小段，每段之長短，卽爲其所占總數之百分比*。

每條之分段，依材料之次序排列，以最大之百分置在底線上（見圖 34，D）。

分段百分條圖之特別一種，係利用單條圖。若注意集中於一個總數之組成部分，則應用單條圖。條之全長代表 100 分，每分段由小而大，自左而右排列。

像形條圖

條圖可用畫式繪製之。高度不同之圖，可作爲比較之用。因之，欲代表美國國庫各時期之存金，可繪成堆積之大量硬幣，其高度與實值相當者以代表之。

盈虧條圖

此種圖之繪製，係用直條從零線展長。若條圖係橫行繪製，則代

---

* 在分段條圖上，分段之數目，應愈少愈好。

表虧方之直條向左展長，代表盈方之値條向右展長．若條圖係縱行繪製，則零線以上代表盈方，零線以下，代表虧方．

面積圖

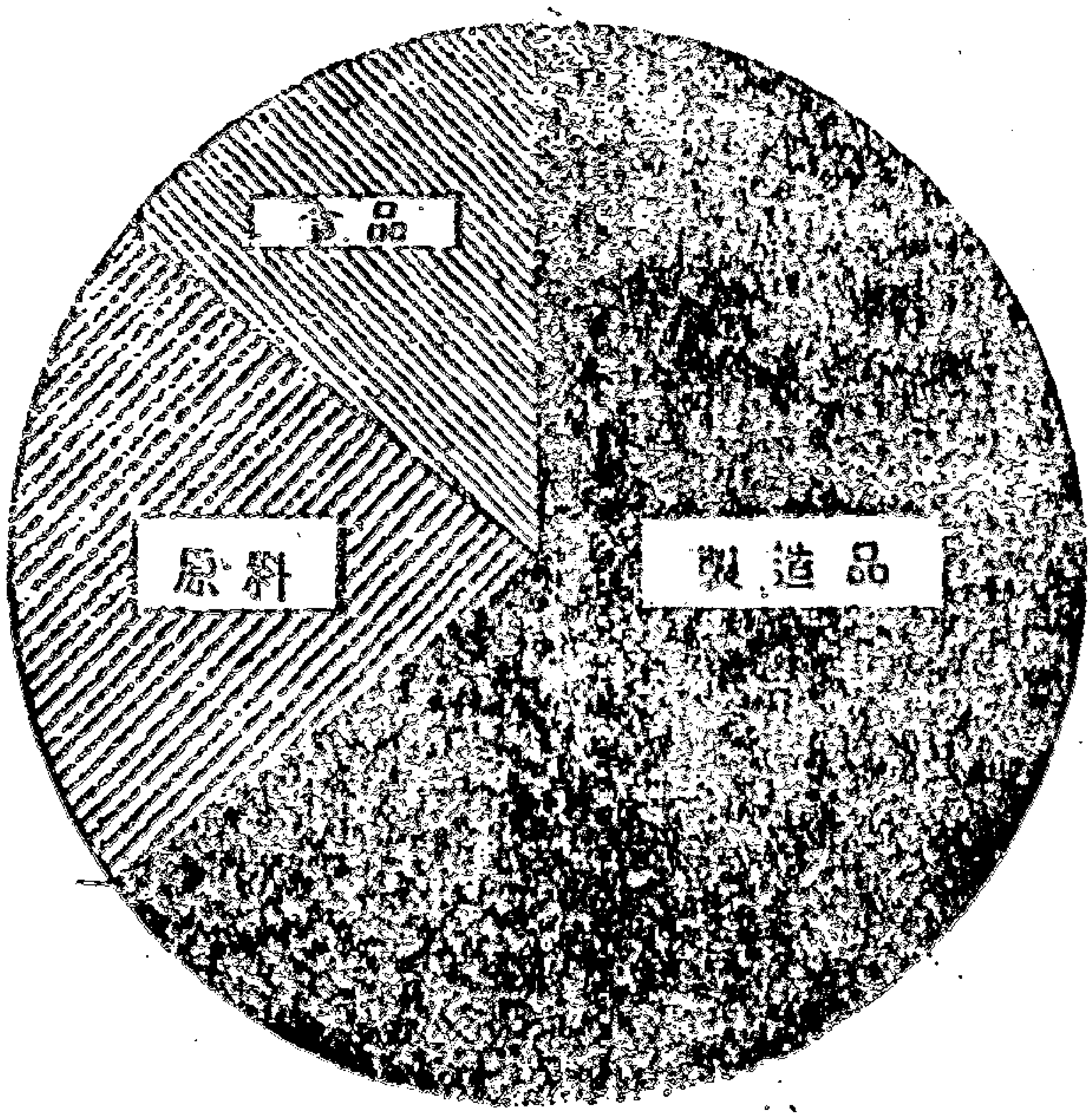
面積圖係用大小不同之面積以比較數字．面積圖之種類甚多，最簡單者利用幾何圖形(如圓形與方形)．面積圖有二種．在第一種上，各面積之大小，係依照各數字之大小而繪製．在第二種上，一個面積，分段以作比較．

面積圖之最通行者爲圓瓣圖(見圖 35)．

圓瓣圖

定義

圓瓣圖爲一圓形之圖 分成各段．每段之大小，指示每一局部對



材料來源: United States Department of Commerce.

圖 35．美國之輸出品，依經濟分類，1930．

於全部之比.

繪法

1. 使全圖等於百分之100.

2. 圓周分爲360°.

3. ∴ 百分比之一$=\frac{360^\circ}{100}$或3.6°.

特性

1. 各瓣形大小之排列,普通由大而小,依照時針所走之方向.

2. 若比較數種圓瓣圖,則各瓣形的排列次序,各圖須求一致.

3. 在可能時,文字與百分比,應橫列於瓣形之內.

4. 若加塡暗色,或交平線等,以代文字,則其意義採用圖解以說明之.

5. 圓瓣圖之効力,可因利用塡黑,塡色或加線而增加.

6. 圓瓣圖內之瓣形,愈少愈好.

7. 圓瓣圖不易繪製精確.

8. 百分比數字若不指出,圓瓣圖內各瓣形之大小比例,不易一閱而得到精確之程度.

立體圖

立體圖包括幾何圖形(立方體、圓球、圓筒、等)或其他不規則之立體,繪成圖形,以其容量而比較大小(見圖36). 惟立體圖之所比較者爲其容量而非高度或長度.

立體圖不易作精確之比較,因之,若有應用他種方法之可能時,以不用爲妥.

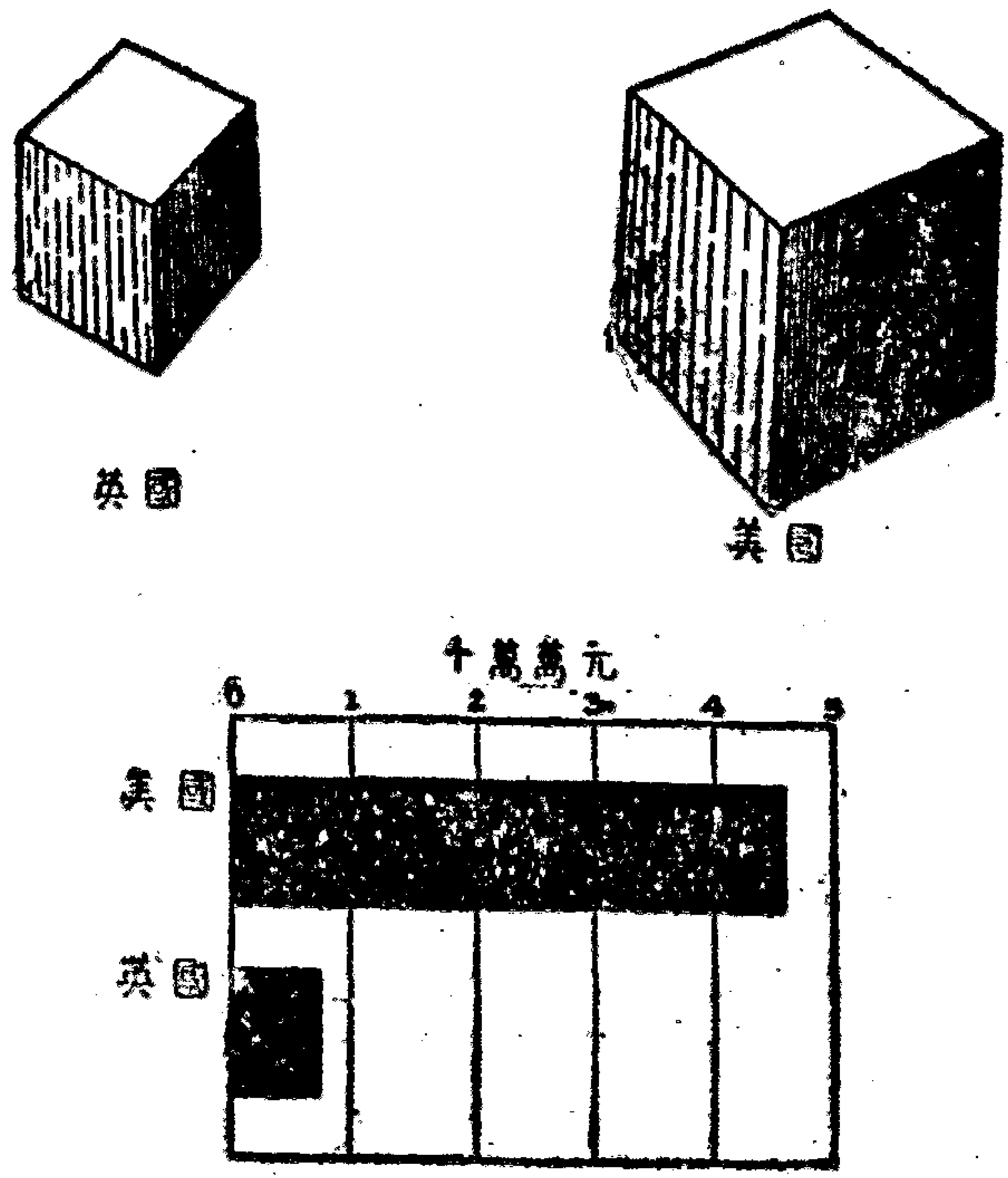


圖 36. 美國與英國之存金，1930 年，十二月三十一日，用立體圖及條形圖顯示.

統計地圖

功用: 統計地圖係用像形方式，代表地理分配之事實 *.

繪法: 統計地圖有五大種:

1. 暗色
2. 交平線
3. 加點
4. 填色
5. 插針

---

* 地理分配又稱'空間'分配.

a. 針

b. 釘

c. 旗

暗色地圖

面積各部之分量比例，可用自全黑以至全白程度不同之各級暗色顯示之。

交叉圖

交叉間黑白地位之多少，可用以顯示分量之多寡。

加點地圖

圖上之點（圓面積）有兩種用法：

a. **大小相同之點**，置於地圖上，係用點之多寡，以顯示一區域內之密度。

b. **大小比例之點**，置於地圖上，以顯示一區域之總數。

c. **大小固定之點**，其每種點各有指定之値，計點即顯示每區域內之各種分量。

各點之相對大小，須爲謹愼表出，因欲作比較，須知點之不同面積。

顏色地圖之繪製，係用：

a. 各種顏色以顯示各種大小等。

但比較之數値，不應採用各種顏色以區別之；因對於閱者，一種顏色未必較他種顏色有較大之値。

b. 同顏色之各種程度，以闡明各面積之比較地位。祇用單純顏色之困難，即爲一種顏色不能分出極多暗色。

地圖插針法

地圖插針插旗等,可作多方面之用;以顯示比較之大小,及地理區域之密度.

針頭可用各種顏色,大小,及形狀,以示大小,位置,路線等.

參 考 書

Arkin, Herbert & Colton, Raymond R., *Graphs*, Harper and Bros., 1935.

Bowley, Arthur L., *Elements of Statistics*, pp. 125-72. P. S. King & Son, London, 1901.

Chaddock, Robert E., *Prin iples and Methods of Statistics*, pp. 418-445. Houghton Mifflin Co., New York, 1925.

Croxton, F. E., & Cowden, D. J. *Practical Business Statistics*, pp. 65-129. Prentice-Hall Inc., New York, 1934.

Crum, Wil iam Leonard & Patton, Alston Currie, *An Introduction to Economic Statisti s*, pp. 96-134, McGraw-Hill Co., New York, 1925, 1925.

Day, Edmund E., *Statistilal Analysis*, pp. 48-113; 211-230. Macmillan Co., New York, 1930.

Garrett, Henry E., *Statistics in Psychology and Education*, pp. 59-74. Longmans, Green & Co., New York, 1930.

Jerome, Harry, *Statisti al Method*, pp. 59-105. Harper & Bros., New York, 19 4.

Kelley, Truman L., *Statistical Method*. pp. 9–43. Macmillan Co., New York. 1923.

Mills, Frederick C., *Statisti al Methods*, pp. 11–60. Henry Holt & Co., New York, 1924.

Odell, C. W., *Educational Statistics*, pp. 36–61. Century Co., New York, 195.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*, pp. 416–434. D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

Otis, Arthur S., *St tistical Method in Educational Measurements*, pp. 30–35; 53–67. World Book Co., Yonkers, New York, & Chicago, Illinois, 1926.

Riggleman, John R. & Frisbee, Ira N., *Business Statistics*, pp. 48–101. McGraw-Hill Book Co., New York, 1932.

Rugg, Harold O., *Statistical Methods Applied to Education*, pp. 310–360. Houghton Mifflin Co., New York, 1917.

Sutcliffe, William G., *Statistics for the Business Man*, pp. 18–62. Harper & Bros., New York, 1930.

Thurstone, L. L., *Fundamentals of Statistics*, pp. 47–49. Macmillan Co., New York, 1925.

第十九章

教育學，心理學與生物學上應用之特殊統計技術

教育學與心理學上應用之特殊統計技術

標準分數*

對於若干學生施行二種或二種以上測驗而欲比較其結果，則測驗應有同等之難度．若難度不等，則每一試驗，平均分數相差必大，而各分數間之差離亦必大．比較分數之困難，可從以下二種考試分數之分配察知：

	考	試
學生號數	第一種	第二種
1	100	100
2	99	85
3	99	70
4	98	68
5	97	65
6	93	60
7	90	60
8	90	60
9	87	50
10	80	45

* 參看 Kelley, T. L., *Statistical Method*.

爲容納不同之平均數及各分數間之差離，可將分數標準化，即求每一分數與其平均數之差而以其標準差除之。

$$z=\frac{x}{\sigma}$$

在上式

$z=$標準分數

$x=$每一分數對於平均數之差

$\sigma=$原來分數之標準差

二種試驗分數之平均，必有相同之值——零（因 $\Sigma(x)=0$）——且因每一分數可爲標準差 * 之比數，則二種測驗之標準分數必有相同之離勢。

倘一學生在二種測驗（如讀與算術）上之程式不變，則其標準分數必相等：

$$z_1=z_2$$

若此種標準分數間有極大之差異，則表示某學生有確實無疑之怪癖性。

可靠性之係數

欲測量任何測驗之可靠性，可用同樣測驗施行數次，而觀其所得結果是否相同。倘測驗或其他測驗工具爲完全者，則施行二次，必可得到完全相同之結果（但機遇變化應予容納），或二種結果之相關數必爲 100。

---

* 倘欲使每種測驗各有固定平均數 50，可用以下公式：

$$z=50+\frac{x}{\sigma}10.$$

但同一試驗，或同式試驗，事實上不能舉行二次（故一妥善辦法即將問題分爲二部分而求其分數之相關係數．因之，奇數問題（如1,3,5,7等）可成爲一套，偶數問題（如2,4,6,8等）又成爲一套．欲達到此目的，二套問題應隨機遇之分配；最少，二套問題應具同等之難度．

若將測驗加長或複行多次，其可靠性可以增加．下列Spearman-Brown公式，即可用以計算此增加之程度．

$$r_n=\frac{nr_{1I}}{1+(n-1)r_{1I}}$$

在上式

r_n 爲測驗加長 n 次或複行 n 次時所得之增加可靠性係數．

r_{1I} 爲原來測驗之可靠性係數．

智力商數

每一個人所得到之各項智力分數，與其年齡俱增．故用智力測驗分數所表示之'心理年齡'應與'實際年齡'求得比例．

$$I.Q.=\frac{MA}{CA}$$

在上式

$I.Q.$＝智力商數

MA＝心理年齡

CA＝實際年齡

爲統計便利計，任何年齡之'常態'智力商數爲100．

爲統計智力商數之值，實際年齡可以增加，直達最高時而止．

Otis * 以爲最高年齡應爲 13 歲而非 16 歲.

學科商數與比率

每學生在一學科之成就,依其實際年齡而變化. 欲求一學生在某一學科之眞正相對能力,須求'學科年齡'與實際年齡之比.

$$\text{算術商數}=\frac{\text{算數年齡}}{\text{實際年齡}}$$

$$\text{閱讀商數}=\frac{\text{閱讀年齡}}{\text{實際年齡}}$$

$$\text{任何學科商數}=\frac{\text{任何學科年齡}}{\text{實際年齡}}$$

每學生之各學科商數平均稱爲教育商數.

若在以上商數公式中,用心理年齡代入,則其結果爲學課比率.

$$\text{學科比率}=\frac{\text{學科年齡}}{\text{心理年齡}}$$

成業比率卽就各學科比率之平均而求得之.

生物學上應用之特殊統計技術

離型指數

量數對平均數或常型之離勢,若不與材料之慣常離勢度求得比例,殊乏意義. 對某年齡成人之平均身高之二吋離勢,若不與此年齡成人身高之離勢度求得比例,亦殊乏意義. 同理,對某年齡松鼠平均身長之一吋離勢,亦乏意義.

若欲顧及材料之離勢度,則對平均之離勢,可與材料之標準差+

---

* Otis, Arthur S., *Statistical Method in Educational Measurement*, 1926, p. 159.

+ 在教育學 ,稱爲標準分數.

求得比例.

$$\frac{x}{\sigma}$$

常態分配之離型指數表示每一數值對平均數相距之準差數，故每一指數達到等數值時可用前述之常態曲線理論以解釋之（見第十一章）.

前已述及，對平均數之離勢(任何方向，或正或負)，大於 3 個標準差時，其發現在 1,000 次中祇有 2 次. 因據已知事實，在 3 個標準差內，所占全面積之百分比爲 49.87%(卽在平均數之任何一方向)，故離型指數等於 3 個標準差時，祇有 .15% 項目之値，較此指數爲大. 依據常態曲線面積表，任何離型指數之値，均可得一解釋.

遺傳係數

若用相關係數，以測量父母及其後嗣在某特質上之相聯，則此方法稱爲遺傳係數.

父與後嗣之遺傳係數用符號 r_1 表示，母與後嗣之遺傳係數，用符號 r_2 表示.

配偶係數

若用相關係數，以測量父與母在某特質上之相聯，則此方法稱爲配偶係數. 此係數之符號用 r_3 表示.

後嗣之離勢

一羣後嗣對於父母之離勢(如標準差)，可用以下公式決定之.

$$\sigma_{3,1}=\sigma_3\sqrt{1-\frac{2r^2_1}{1+r_3}}$$

在上式

$\sigma_{3.12}$=任何一列後嗣之標準差。

σ_3=一般後嗣之標準差.

r_1=後嗣與父母之遺傳係數,但假定父與母有同等遺傳力($r_1=r_2$).

r_3=配偶係數。

後嗣之離型

一羣後嗣對於具有某種特質之父母之平均離型,可從以下公式計算之:

$$h_3=\frac{r_1\sigma_3}{(1-r_3)\sigma_1}\left(h_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}h_2\right)$$

在上式

h_3=某羣後嗣在某特質上之平均數,對所有後嗣在某特質之平均數之差數.

h_1=父之離勢(離型)。

h_2=母之離勢.

σ_1=一般父親之特質標準差.

σ_2=一般母親之特質標準差.

σ_3=一般後嗣之特質標準差

r_1=遺傳係數(假定 $r_1=r_2$)。

r_2=配偶係數.

生命統計

有關死亡出生及疾病之材料,須與人口之多寡與種類相提並

論，始有意義. 故某城某年有 2,000 死亡登記之事實，若該城之人口不知,則無意義. 若占有 7,400,000 人口之紐約城有 2,000 死亡之登記，其意義與占有 25,000 人口之另一城有 2,000 死亡之登記，完全不同.

率爲表示某種事項在全體中發現之次數對於該全體中發現總次數之比之一名詞. 此可由公式表示之:

$$率=\frac{a}{a+b}$$

在上式

a=全體中某事項發現之次數

b=全體中某事項不發現之次數

所得之值爲小數，但普通用 100, 1,000, 100,000, 或 1,000,000 乘之，使其結果爲百分，千分，十萬分，一百萬分之幾.

比爲表示某種事項（或材料）發現與他種事項發現之比之一名詞. 用公式表示，則爲

$$比=\frac{a}{c}$$

在上式

a=一事項發現之次數

c=他事項發現之次數

生命統計應用,死亡,及疾病之率. 此種率在醫學及人壽保險上，均屬重要. 出生，死亡及疾病率，可依照下式分類*:

A—死亡率

---

* 此分類係採自 Pearl, Raymond, in *Medical Biometry and Statistics*.

1. 由觀察而得

a. 總死亡率

b. 分死亡率

2. 理論死亡率

a. 標準死亡率

b. 校正死亡率

B—出生率

1. 由觀察而得

a. 總出生率

b. 分出生率

2. 理論出生率

a. 標準出生率

b. 校正出生率

C—疾病率

a. 總疾病率

b. 分疾病率

總死亡、出生、與疾病率

總死亡、出生、或疾病率、純為死亡、出生、疾病之總數用總人口數除之.

$$總死亡率=\frac{D}{P}$$

$$總出生率=\frac{B}{P}$$

$$總疾病率=\frac{M}{P}$$

在上式

D＝死亡人數

B＝出生人數

M＝疾病人數

上述各率，雖有固定之時間與空間，但無年齡與性別之指定，故屬於總率。待年齡與性別指定後，則此種率稱為分死亡，出生或疾病率。

$$\text{分死亡，出生、或疾病率}=\frac{D'\ \text{或}\ B'\ \text{或}\ M'}{P'}$$

在上式

D'＝人口分組之死亡

B'＝人口分組之出生

M'＝人口分組之疾病

P'＝分組之總人數

各年齡之分死亡率相差甚大。

假定100,000人在一剎那間出生，則一假想表可以製成，顯示生存與死亡之人數，死亡率，每年齡組不動之人口，此種表稱為生命表*。

從生命表可以製成一固定生命表，顯示每百萬人在每年齡組所占之人數。表42即為其例。

---

* 見 Glover, J. W., United States Life Tables, 1890, 1901, and 1901—1910. Bureau of Census, Washington, 1921.

表 42. 固定生命表之人口,計 1,000,000 人

每年齡組生存之人數

年齡組	百萬人中在各年齡組之人數	年齡組	百萬人中在各年齡組之人數	年齡組	百萬人中在各年齡組之人數
0- 1	17,841	35-36	14,146	70- 71	6,373
1- 2	16,916	36-37	14,031	71- 72	5,979
2- 3	16,612	37-38	13,912	72- 73	5,597
3- 4	16,448	78-39	13,791	73- 74	5,178
4- 5	16,338	39-40	13,667	74- 75	4,776
5- 6	16,255	40-41	13,540	75- 76	4,375
6- 7	16,185	41-42	13,411	76- 77	3,978
7- 8	16,127	42-43	13,278	77- 78	3,589
8- 9	16,078	43-44	13,141	78- 79	3,210
9-10	16,036	44-45	13,000	79- 80	2,843
10-11	15,998	45-46	12,854	80- 81	2,490
11-12	15,962	46-47	12,702	81- 82	2,152
12-13	15,927	47-48	12,545	82- 83	1,835
13-14	15,899	48-49	12,383	83- 84	1,548
14-15	15,851	49-50	12,216	84- 85	1,287
15-16	15,808	50-51	12,045	85- 86	1,058
16-17	15,781	51-52	11,857	86- 87	859
17-18	15,708	52-53	11,683	87- 88	687
18-19	15,850	53-54	11,489	88- 89	541
19-20	15,586	54-55	11,281	89- 90	418
20-21	15,516	55-56	11,067	90- 91	318
21-22	15,441	56-77	10,836	91- 92	295
22-23	15,363	87-58	10,592	92- 93	172
23-24	15,282	58-59	10,336	93- 94	123
24-25	15,200	59-60	10,069	94- 95	86
25-26	15,117	60-61	9,791	95- 96	59
26-27	15,032	61-62	9,501	96- 97	39
27-28	14,946	62-63	9,199	97- 98	26
28-29	14,857	63-64	8,884	98- 99	17
29-30	14,765	64-65	8,556	99-100	10
30-31	14,671	65-66	8,217	100-101	6
31-32	14,573	66-67	7,858	101-102	4
32-33	14,472	67-68	7,508	102-103	2
33-34	14 367	68-69	7,139	103-104	1
34-35	14,259	69-70	6,760	104-105	1

來源: Pearl, Raymond, *Medical Biometry and Statistics*, page 259.

標準死亡率

一個地方之實際年齡分配,因受移民及社會情形等因素之影響,常與另一地方不同,故二個地方各年齡之總死亡率,亦可作直接之比較.差異之處,應予斟酌修改.標準死亡率及校正死亡率,可用之以達此目的.

標準死亡率之求法,即將從普通人口中或生命表所得之分死亡率,適用於某人口之實際年齡分配上.若理想分死亡率存在於實際年齡之分配時,則所得之率,即為應有之率.

$$標準死亡率=\frac{\Sigma(pq)}{\Sigma(q)}.$$

在上式

p=每年齡之實際人口

q=生命表中之分死亡率

若將此率與生命表中之標準人口死亡率比較,即可得到校正數.

$$校正數=\frac{R}{R'}$$

在上式

R =生命表中之死亡率

R'=標準死亡率

以此校正數乘總死亡率,即可得到各年齡之校正數.

校正死亡率

校正死亡率之求得,係利用分死亡率及生命表中之理想年齡分配,故就年齡之分配而言,此種計算,實建於嚴格可比較之基礎上.

$$\text{校正死亡率}=\frac{\Sigma(p'q')}{\Sigma(p')}$$

在上式

p'＝生命表中各年齡組之人口

q'＝實際分死亡率

因之，各年齡分配，均可得到校正數．同樣，其他差異，如性別、種族等，亦可得到校正數．同樣，死亡率以外之其他各率，亦可得到校正數．

成果

素質之控制

某種成果素質，爲對於所定標準或明細計畫之符合．工業成果，無論其製造程序如何謹慎，但因多種機遇之因素，顯示對於明細計畫，有多少之差異．苟此種不可控制之因素常爲差異之原因，則此素質即爲不可控制，但苟使可控制之因素，發生變化，則控制旣無，成果不與標準符合矣．

故素質控制之問題，從經濟觀點來看，根本上爲決定機遇以外其他因素之加入．Dr. Shewhart * 提出以下準則，以斷定工業成果特性變化之表現，是否由於機遇或可控制之因素；易言之，是否由於'控制' + 之存在與不存在．

---

* W. A. Shewhart, *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, D. Van Nostrand, New York, 1931.

+ 此題之討論，本處祇求簡略．欲得詳實之討論，以資明瞭該者，可參閱 Dr. Shewhart 之書．

準則 I

1. 將材料分爲 m 事件（如星期、日、工廠等組），每件有 n 項。
2. 斷定全體之統計標數如 $\bar{X}$ 或 σ。
3. 將此數在圖上用一橫線代表之。
4. 計算此統計標數之標準差。

$$\sigma_p = \sqrt{Npq}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \text{等}$$

若 n 爲小，則用小樣本之理論（見第十三章）。

5. 在橫線之任何一邊，展量 3 個標準誤之區域。所得之圖，即爲控制圖。

6. 每組之統計標數（$\bar{X}$, p, σ 等）現可在控制圖上指定。任何一點落在控制區域之外，表示有差異因素之存在而需研究者。

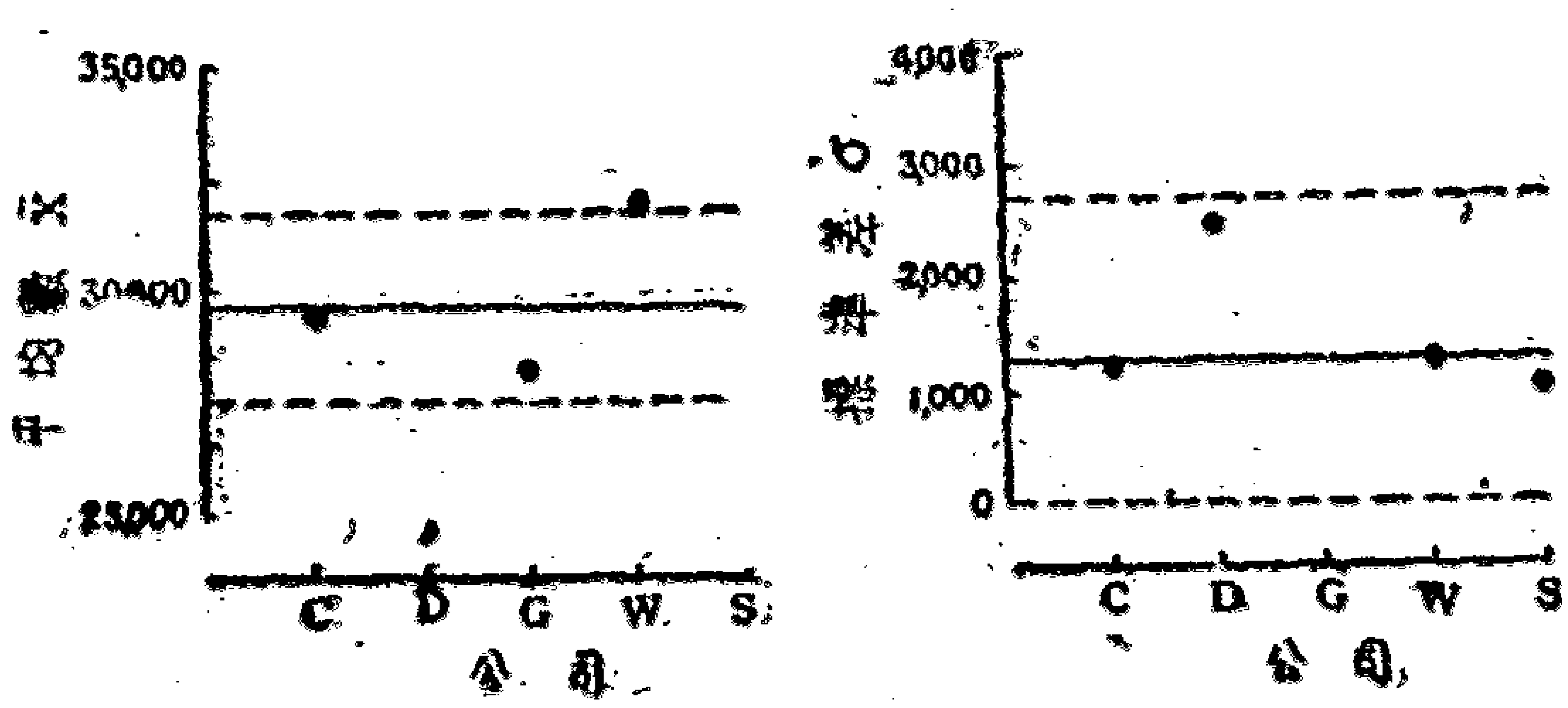


圖 37. 小樣本之控制圖顯示控制之不存在

準則 II

1. 將材料分爲 m 件，每件有 n 項.

2. 計算 d.

$$d=\frac{n}{n-1}\overline{\sigma}^2=\frac{m}{m-1}n\sigma^2_{\overline{X}}$$

在上式

$\overline{\sigma}^2$＝各組之平均 σ^2

$\sigma^2_{\overline{X}}$＝各組平均數之變異(標準差之平方)

關於 Bernoulli 分配——此爲一種求因之常法——d 等於零. 但由於抽樣之變動，可有 $3\sigma_d$ 之值發生，其機率爲在下式情形時，100 機遇中有 99.7 之機遇，無有數値較上述數値爲大者:

$$\sigma_d=\left[\sqrt{\frac{2(mn-1)}{m(m-1)(n-1)}}\left(\frac{n}{n-1}\overline{\sigma}^2\right)\right]$$

倘所得到 d 之値大於 $3d$，表示樣本非由於 Bernoulli 方式取得，或表示各種原因未經控制. 此爲缺乏控制之表示.

準則 III

1. 斷定一可疑之因素，此或爲變異之唯一之指定原因；再斷定二種變量，此或爲此可疑之因素所致. 其中一變量，應予以控制.

2. 求得此二變異之相關係數(r).

3. 倘 r 大於 $3\sigma_r$，表示顯著相關之存在，此可疑之因素，可謂唯一之指定原因.

準則 IV

1. 求得 n 個觀察，然後計算統計標數(如 $\overline{X}$ 或 σ).

2. 選擇某因素,此或爲變異之指定原因或非爲其原因,然後再選擇 n 次之觀察,且使此觀察不受此因素之影響.

3. 應用所得二個統計標數之差之標準誤,以斷定有無顯著之差.若統計標數之差,大於此差數之標準誤之三倍,則可疑之原因,卽爲所指定之原因,因爲

$$\left|\bar{X}_1-\bar{X}_2\right|>3\sqrt{\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$

$$\left|\sigma_1-\sigma_2\right|>3\sqrt{\frac{1}{2n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$

準則 V

1. 計算 $\bar{X}$, σ, 及偏斜度 k, 並用以下公式後,在分組材料上,配合一相當次數曲線

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[1-\frac{k}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{\sigma^3}\right)\right]e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

2. 用 χ^2 方法,測驗理論分配之配合適度.倘適度不良,(P 少於 .001),表示缺乏控制.

參　考　書

關於教育與心理統計技術之專門書籍:

Foster, S., *Experiments in Psychology*, Henry Holt & Co., New York, 1923.

Garrett, H. E., *Statsitics In Psycho'gy and Education*, Longmans, Green & Co., New York, 1926.

Hines, H. C., *A Guide to Educational Measurements*. Houghton Mifflin Co., Boston, 1923.

Camp, B. H., *Mathematical Part of Elementary Statistics*. D. C. Heath & Co., New York, 1931.

Kelley, T. L., *Interpretation of Educational Measurements*. World Book Co., Yonkers, New York, 1927.

McCall, W. A., *How to Experiment In Education*. Macmillan Co., New York, 1923.

Otis, A. S., *Statistical Method in Educational Measurements*, World Book Co., Yonkers, New York, 1926.

Odell, C. W., *Statistical Method in Education*. D. Appleton-Century Company, New York, 1935.

關於生物學統計技術之專門書籍:

Davenport, C. B., *Statistical Method with Special Reference to Biological Variations*. 3rd Revised Edition, John Wiley & Sons, New York, 1904.

Davenport, E., *Principles of Breeding*. Ginn & Co., Boston, 1907

於生命統計技術之專門書籍:

Glover, J. W., *United States Life Tables*, 1890, 1901, 1910, *and* 1901-1910, Bureau of Census, Washington, 1921.

Pearl, Raymond, *Medical Biometry and Statistics*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1930.

關於製作控制統計技術之專門書籍：

Croxton, F. E., & Cewden, D. J., *Practical Business Statistics*, pp. 233-239. Prentice-Hall Inc. New York, 1934.

Shewhart, W. A., *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, D. Van Nostrand Co, New York, 1931.

附　　錄

公 式 表

次數分配之分析

下列參考表，包括本書所有與其他較詳教本論及之一切公式，公式右面姓名爲討論該公式之作者，但該公式則本書未加討論．至於作者及其書名，見本附錄之末．

算術平均數

未分組之材料

$$\overline{X}=\frac{\Sigma(X)}{N}$$

已分組之材料

A．冗長方法

$$\overline{X}=\frac{\Sigma(f\times M.P.)}{N}$$

B．簡捷(單位差數)法

$$\overline{X}=Z+\frac{\Sigma(fd)}{N}$$

C．簡捷(分組差數)法

$$\overline{X}=\overline{Z}+\frac{\Sigma(fd')}{N}C$$

中位數

已分組之材料

$$中位數=L+\frac{i}{f}C$$

衆數

已分組之材料

A. 動力差法

$$衆數=L_{mo}+\frac{f_a}{f_a+f_b}C$$

B. 經驗法

衆數＝算術平均數－3(算術平均數－中位數)

C. 其他方法

$$衆數=X-(\chi)(\sigma)$$

幾何平均數

未分組之材料

$$G_m=\sqrt[n]{X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot X_n}$$

$$\log G_m=\frac{\log X+\log X_2+\log X_3+\ \cdots\cdots\ \log X_n}{N}$$

已分組之材料

$$\log G_m=\frac{\Sigma(f\log M.P.)}{N}$$

均方根平均數

$$Q_m=\sqrt{\frac{\Sigma(X^2)}{N}}$$

調和平均數

$$\frac{H_m}{1}=\frac{\frac{1}{X}+\frac{1}{X}+\frac{1}{X_{..}}\cdots\cdots+\frac{1}{X_N}}{N}$$

離勢數量

平均差

未分組之材料

$$MD=\frac{\Sigma|x|}{N}\text{或}\frac{\Sigma|d|}{N}$$

已分組之材料

$$MD'=\frac{\Sigma(fd')}{N}+\frac{(N_S-N_L)c}{N}\qquad MD=MD'\times C$$

$$M.D.=\frac{\Sigma(fd)+(N_S-N_L)c}{N}C$$

$$MD'=\frac{\Sigma(fd)}{N}+\frac{(N_a+N_b)c+fm(.25+c^2)}{N}\qquad \text{Rietz}$$

標準差

未分組材料

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{N}}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X)}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

已分組材料

冗長法

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(x^2)}{N}}$$

簡捷(單位差數)法

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(d)^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

簡捷(分組差數)法

$$\sigma=C\sqrt{\frac{\Sigma f(d')^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}$$

標準差之分組校正數

$$\sigma^2=\left(\sigma'^2-\frac{1}{12}\right)C^2$$

計算標準差之薛立愛覆驗法

$$\Sigma f(d'+1)^2=\Sigma fd'^2+2\Sigma(fd')+N$$

四分位差

$$QD=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

離勢係數

$$V=\frac{\sigma}{\bar{X}}100$$

$$V_{AD}=\frac{AD}{\text{中位數(或算術平均數)}}$$

$$V_Q=\frac{\frac{Q_3-Q_1}{2}}{\frac{Q_3+Q_1}{2}}=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$$

偏斜度量數

偏斜度係數

$$S_K=\frac{\text{算術平均數}-\text{衆數}}{\sigma}$$

$$S_K=\frac{3(\text{算術平均數}-\text{中位數})}{\sigma}$$

$$S_K=\frac{(Q_3-\text{中位數})-(\text{中位數}-Q_1)}{QD}$$

偏斜度之其他量數

$$\alpha=\frac{\mu_3}{\sigma_3}=\sqrt{\beta_1}$$

$$\chi=\frac{\beta_1(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

次數分配之進一步分析

峯度

$$\beta_2-3$$

$$\frac{\beta_2-3}{2}$$

動差

從假定原點計算

第一動差

$$\nu_1=\frac{\Sigma(fd)}{N}$$

II. 第二動差

$$\nu_2=\frac{\Sigma(fd^2)}{N}$$

III. 第三動差

$$\nu_3=\frac{\Sigma(fd^3)}{N}$$

IV 第四動差

$$\nu_4=\frac{\Sigma(fd^4)}{N}$$

從算術平均數原點計算

$$\mu_1=\frac{\Sigma f(x)}{N}=0$$

$$\mu_2=\frac{\Sigma f(x^2)}{N}$$

$$\mu_3=\frac{\Sigma f\ x^3)}{N}$$

$$\mu^4=\frac{\Sigma f(x^4)}{N}$$

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4$$

材料分組時薛伯氏之校正數

I. 已校正之第一動差(組距)

$$\mu_1'=0$$

II. 已校正之第二動差(組距)

$$\mu_2'=\mu_2-\frac{1}{12}$$

III. 已校正之第三動差 組距)

$$\mu_3'=\mu_3$$

IV. 已校正之第四動差(組距)

$$\mu_4'=\mu_4-\frac{1}{2}\mu_2+\frac{7}{240}$$

$$\mu'_2(\text{原來單位})=C^2\mu'_2(\text{組距})$$

$$\mu'_3(\text{原來單位})=C^3\mu'_3(\text{組距})$$

$$\mu'_4(\text{原來單位})=C^4\mu'_4(\text{組距})$$

曲線之準則(偏斜度之量數)

$$\beta_1=\frac{\mu_3^{\ 2}}{\mu_2^{\ 3}}$$

曲線之準則(峯度之量數)

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^{\ 2}}=\frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

曲線之準則

$$\kappa=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(4\beta_2-3\beta_1)(2\beta_2-3\beta_1-6)}$$

時間數列之分析

直線公式

$$Y=a+bX$$

直線之'常態'方程式

$$\text{(I)}\quad \Sigma Y\qquad =Na+b\Sigma(X)$$

$$\text{(II)}\quad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)$$

簡化之直線'常態'方程式

(材料之中點爲原點)

$$\text{I.}\quad \Sigma Y\qquad =Na$$

$$\text{II.}\quad \Sigma(XY)=b\Sigma(X^2)$$

定羃方程式

$$Y=a+bX+cX^2$$（第二級拋物線）

$$Y=a+bX+cX^2+dX^3$$（第三級拋物線）

$$Y=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4$$（第四級拋物線）

$$Y=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4\cdots\cdots$$等.

二級拋物線之'常態'方程式

$$\text{(I)}\quad \Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)+c\Sigma(X^2)$$

$$\text{(II)}\quad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)+c\Sigma(X^3)$$

$$\text{(III)}\quad \Sigma(X^2Y)=a\Sigma(X^2)+b\Sigma(X^3)+c\Sigma(X^4)$$

變冪方程式

$$Y=ab^x$$

$$\log Y=\log a+X\log b$$

$$Y=aX^b$$

$$\log Y=\log a+b\log X$$

其他曲線

雙曲線

$$Y=\frac{1}{a+bX}$$

craftsman龔柏玆(Gompertz)曲線

$$Y=abc^x$$

$$\log Y=\log a+C^x\log b$$

普爾—利德(Pearl–Reed)曲線

$$Y=\frac{k}{1+e^{a+bX}}$$ Pearl

相關

相關係數

$$r=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

積差法

$$r=\frac{P}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$p=\frac{\Sigma(XY)}{N}-\left(\frac{\Sigma(X)}{N}\right)\left(\frac{\Sigma(Y)}{N}\right)$$

估計之標準誤

$$S_y=\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{N}}$$

$$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

迴歸線

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

$$Y-\overline{Y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$$

定限係數

$$=r^2$$

餘相關係數

$$=\sqrt{\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

不定限係數

$$k=\sqrt{1-r^2}$$

S_y 及 r 數項之校正數

$$\overline{S}_y^2 = S_y^2 \frac{(N-1)}{(N-2)}$$

$$\overline{r}^2 = 1-(1-r^2)\frac{(N-1)}{(N-2)}$$

司畢門 (Spearman) 等級相關

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma(D^2)}{N(N^2-1)}$$

積差相關與等級相關之關係

$$r = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$$

司畢門'簡捷法'

$$R = 1 - \frac{6\Sigma G}{N^2-1}$$

相關指數

$$\rho = 1 - \sqrt{\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

$$\rho^2 = \frac{a\Sigma(Y)+b\Sigma(XY)+c\Sigma(X^2Y)+\cdot\cdot\cdot Nc_y^2}{\Sigma(Y^2)-Nc_y^2}$$

相關比

$$\eta = \sqrt{1-\frac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}}$$

分組時相關比之校正數

$$\eta'^2 = \frac{\eta^2 - \dfrac{(\kappa-3)}{N}}{1-\dfrac{(\kappa-3)}{N}}$$

迴歸直線性之測驗

$$\zeta=\eta^2-r^2$$

複相關係數

$$R_{1.234}=\sqrt{1-\frac{S^2_{1.234}}{\sigma_1^2}}$$

$$R^2_{1.234}=\frac{b_{12.34}p_{12}+b_{13.24}p_{13}+b_{14.23}p_{14}}{\sigma_1^2}$$

複相關直線迴歸

$$X_1=a+b_{12.34}X_2+b_{13.24}X_3+b_{14.23}X_4$$

複相關迴歸之'常態'方程式

$$\text{(I)}\quad \Sigma(X_1)=Na+b_{12.34}\Sigma(X_2)+b_{13.24}\Sigma(X_3)+b_{14.23}\Sigma(X_4)$$

$$\text{(II)}\quad \Sigma(X_1X_2)=a\Sigma(X_2)+b_{12.34}\Sigma(X_2^2)+b_{13.24}\Sigma(X_2X_3)+b_{14.23}\Sigma(X_2X_4)$$

$$\text{(III)}\quad \Sigma(X_1X_3)=a\Sigma(X_3)+b_{12.34}\Sigma(X_2X_3)+{}_{13.24}\Sigma(X_3^2)+b_{14.23}\Sigma(X_3X_4)$$

$$\text{(IV)}\quad \Sigma(X_1X_4)=a\Sigma(X_4)+b_{12.34}\Sigma(X_2X_4)+b_{13.24}\Sigma(X_3X_4)+b_{14.23}\Sigma(X_4^2)$$

$$\text{(I)}\quad p_{12}=b_{12.34}\sigma^2{}_2+b_{13.24}p_{23}+b_{14.23}p_{24}$$

$$\text{(II)}\quad p_{13}=b_{12.34}p_{23}+b_{13.24}\sigma^2{}_3+b_{14.23}p_{34}$$

$$\text{(III)}\quad p_{14}=b_{13.34}d_{24}+b_{13.24}p_{34}+b_{14.23}\sigma^2{}_4$$

'a'可從第一'常態'方程式求得：

$$\Sigma(X)=Na+b_{12.34}\Sigma(X_2)+b_{13.24}\Sigma(X_3)+b_{14.33}\Sigma(X_4)$$

複相關之估計標準誤

$$S_{1.234}=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$

$$S^2{}_{1.234}=\sigma^2{}_1-b_{12.34}p_{12}-b_{13.24}p_{13}-b_{14.23}p_{14}$$

非直線複相關迴歸

$$X_1=a+f(X_2)+f(X_3)+f(X_4)+\cdot\cdot\cdot\cdot$$

淨相關係數

$$r_{1.324}=\sqrt{b_{13.24}\cdot b_{31.24}}$$

$$r_{12.3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$$r_{14.23}=1-\frac{(1-R^2{}_{1.234})}{(1-R^2{}_{1.23})}$$

部分相關係數

$${}_{12}r^2_{34}=\frac{b^2{}_{12.34}\sigma_2{}^2}{b^2{}_{12.34}\sigma_2{}^2+\sigma_1{}^2(1-R^2{}_{1.234})}$$

Bera **係數**

$$\beta_{12.34}=b_{12.34}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$\beta_{13.24}=b_{13.24}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$$ Ezekiel

$$\beta_{14.23}=b_{14.23}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

均方列聯

$$\phi^2=\frac{\chi^2}{N}$$

列聯係數

$$CC=\sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}$$

$$CC=\sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}}$$

機率

成功之機率

$$p=\frac{a}{N}$$

失敗之機率

$$q=\frac{b}{N}$$

勃納利(Bernoulli)分配之算術平均數

$$\bar{X}=Np$$

勃納利分配之標準差

$$\sigma_B=\sqrt{Npq}$$

其比較式

$$\sigma_B\%=\sqrt{\frac{pq}{N}}$$

浦華桑(Poisson)分配之標準差

$$\sigma_P{}^2=npq-\Sigma(p_n-p)^2 \qquad \text{Rietz}$$

萊克西斯(Lexis)分配之標準差

$$\sigma_L{}^2=npq+(n^2-n)\sigma_{pn}{}^2 \qquad \text{Rietz}$$

在上式

σ_{pn}=機率 $p_1, p_2, p_3, \cdot\cdot\cdot\cdot, p_n$ 之標準差

萊克西斯之比率

$$L=\frac{\sigma}{\sigma_B}\qquad\text{Rietz}$$

薛立愛氏之變動係數

$$100\rho=100\frac{\sqrt{\sigma^2-\sigma_B{}^2}}{np}\qquad\text{Rietz}$$

常態曲線

$$Y=Y_\circ e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

常態曲線之最高縱線

$$Y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{N}{2.506628\sigma}$$

χ^2（chi 平方）之配合適度測驗

$$\chi^2=\Sigma\left(\frac{(f_0-f)^2}{f}\right)$$

算術平均數之標準誤

$$\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

算術平均數之機誤

$$\text{P.E.}_{\overline{X}}=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

中位數之標準誤

$$\sigma_{mdn}=1.2533\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

中位數之機誤

$$\text{P.E.}_{mdn}=.84535\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

標準差之標準誤與機誤

$$\sigma_{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$$

$$\text{P.E.}_{\sigma}=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$$

平均差之標準誤與機誤

$$\sigma_{M.D.}=.6028\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\text{P.E.}_{M.D.}=.4066\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

離勢係數之標準誤與機誤

$$\sigma_{v}=\frac{V}{\sqrt{2N}}\sqrt{1+2(V)^2}$$

$$\text{P.E.}_{v}=.6745\frac{V}{\sqrt{2N}}\sqrt{1+2(V)^2}$$

相關係數之標準誤與機誤

$$\sigma_{r}=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

$$\text{P.E.}_{r}=.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

等級相關(司畢門)係數之標準誤

$$\sigma\rho=\frac{1-\rho^2}{\sqrt{N}}(1+.086\rho^2+.013\rho^4+.002\rho^5)$$

$$\text{P.E.}\rho=.6745\frac{1-\rho^2}{\sqrt{N}}(1+.086\rho^2+.013\rho^4+.002\rho^6)$$

複相關係數之標準誤與機誤

$$\sigma_{R1.23\cdots\cdots n}=\frac{1-R^2{}_{1.23\cdots\cdots n}}{\sqrt{N}}$$

$$\text{P.E.}_{R1.23\cdots\cdots n}=.6745\frac{1-R^2{}_{1.23\cdots\cdots n}}{\sqrt{N}}$$

淨相關係數之標準誤與機誤

$$\sigma r_{12.34\cdots\cdots n}=\frac{1-r^2{}_{12.34\cdots\cdots n}}{\sqrt{N}}$$

$$\text{P.E.}r_{12.34\cdots\cdots n}=.6745\frac{1-r^2{}_{12.34\cdots\cdots n}}{\sqrt{N}}$$

二平均數之差之標準誤

$$\sigma_D=\sqrt{\sigma^2\bar{X}_1+\sigma^2\bar{X}_2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sigma^2{}_1}{N_1}+\frac{\sigma^2{}_2}{N_2}}$$

相關係數顯著性測驗

$$z=\frac{1}{2}\left[\log_e(1+r)-\log_e(1-r)\right]$$

$$\sigma_z=\frac{1}{\sqrt{N-3}}$$

對平均數之第二動差之標準誤

$$\sigma\mu_2=\sqrt{\frac{\mu_4-\mu^2{}_2}{N}}$$

$$\sigma\mu_2=\sigma^2\sqrt{\frac{2}{N}}$$

對平均數之第三動差之標準誤

$$\sigma_{\mu_3}=\sqrt{\frac{\mu_6-\mu^2_3}{N}}$$

$$\sigma_{\mu_3}=\sigma_3\sqrt{\frac{6}{N}}$$

對平均數之第四動差之標準誤

$$\sigma_{\mu_4}=\sqrt{\frac{\mu_8-\mu^2_4}{N}}$$

$$\sigma_{\mu_4}=\sigma^4\sqrt{\frac{96}{N}}$$

β 之標準誤

$$\sigma_{\beta_2}=\sqrt{\frac{24}{N}}$$

偏斜度(從$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}$計算)係數之標準誤

$$\sigma_{SK}=\sqrt{\frac{3}{2N}}$$

四分位差之標準誤

$$\sigma_Q=.7867\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

二標準差*之差之標準誤

$$\sigma_{\sigma_1-\sigma_2}=\sqrt{\sigma^2_{\sigma_1}+\sigma^2_{\sigma_2}}$$

二相關係數*之差之標準誤

$$\sigma_{r_{12}-r_{34}}=\sqrt{\sigma^2_{r_{12}}-\sigma^2_{r_{34}}}$$

* 彼此自變.

迴歸係數之標準誤

$$\sigma b_{xy}=\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1-r^2_{xy}}{N}}$$

相關比之標準誤

$$\sigma\eta=\frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}}$$

小樣本中算術平均數之標準誤

$$S_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$S^2=\frac{\Sigma(x^2)}{N-1}=\frac{N\sigma^2}{N-1}$$

小樣本中二算術平均數之差之標準誤

$$S_D=\frac{S}{\sqrt{\frac{N_1N_2}{N_1+N_2}}}$$

$$S^2=\frac{\Sigma(x^2{}_1)+\Sigma(x_2{}^2)}{N_1+N_2-2}$$

二比例之差之標準誤

$$\sigma_D\%=\sqrt{pq\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right)}$$

平均數之和之標準誤(平均數各有其標準誤，且各樣本均彼此自變)

$$\sigma^2{}_{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\cdots\cdots\bar{X}_n}=\sigma_{\bar{X}_1}{}^2+\sigma_{\bar{X}_2}{}^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \sigma_{\bar{X}_n}{}^2$$

合羃之平均數之標準誤

$$\frac{\sigma_{\bar{X}^n}}{\bar{X}^n}=N\frac{\sigma_{\bar{X}}}{\bar{X}}$$

平均數(彼此自變)之乘積之標準誤

$$\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_1\cdot\bar{X}_2\cdots\cdots\bar{X}_n}}{\bar{X}_1\cdot\bar{X}_2\cdots\cdots\bar{X}_n}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\bar{X}_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_2}}{\bar{X}_2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_3}}{\bar{X}_3}\right)^2\cdots\cdots\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_n}}{\bar{X}_n}\right)^2$$

二平均數(彼此自變)之商之標準誤

$$\left(\frac{\frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\bar{X}_2}}{\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\bar{X}_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{X}_2}}{\bar{X}_2}\right)^2$$

和數(非彼此自變)之標準誤

$$\sigma_{A+B}=\sqrt{\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2+2r_{AB}\sigma_A\sigma_B}$$

差數(非彼此自變)之標準誤

$$\sigma_{A-B}=\sqrt{\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2-2r_{AB}\sigma_A\sigma_B}$$

指　　數

實價簡單總合

$$\frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_0}$$

比價之平均(算術平均)

$$\frac{\Sigma\left(\frac{p_n}{p_0}\right)}{N}$$

實價之加權總合

a. 基年加權

$$\frac{\Sigma(p_nq_0)}{\Sigma(p_0q_0)}$$

b.　計算年加權

$$\frac{\Sigma(p_n q_n)}{\Sigma(p_0 q_n)}$$

比價之加權平均

a.　算術平均數(基年加權)

$$\frac{\Sigma\left[\frac{p_n}{p_0}\times(p_0 q_0)\right]}{\Sigma(p_0 q_0)}$$

計算年加權

$$\frac{\Sigma\left[\frac{p_n}{p_0}\times(p_n q_n)\right]}{\Sigma(p_n q_n)}$$

b.　幾何平均數(對數式——計算年加權)

$$\text{對數指數}=\frac{\log\left[\frac{p'_n}{p'_0}(p'_n q_n)\right]+\log\left[\frac{p_n''}{p_0''}(p_n q_n)\right]+\text{等}}{\Sigma(p_n q_n)}$$

理想指數公式

$$\sqrt{\frac{\Sigma(p_n q_0)}{\Sigma(p_0 q_0)}\times\frac{\Sigma(p_n q_n)}{\Sigma(p_0 q_n)}}$$

加權平均

算術平均

$$\frac{\Sigma(\text{項目}\times\text{權數})}{\Sigma(\text{權數})}=\frac{\Sigma(I\times W)}{\Sigma(W)}$$

幾何平均

$$\sqrt[\Sigma w]{I_1^w\cdot I_2^w\cdot I_3^w\cdot\cdots\cdot I_n^w}$$

加權幾何平均之對數

$$\log \text{加權}\ G_m = \frac{\Sigma(w \log I)}{\Sigma(w)}$$

教育與心理

標準分數

$$z = \frac{x}{\sigma}$$

標準分數(平均分數爲 50)之換算

$$Z = 50 + \frac{x}{\sigma}10$$

標準分數之相關係數

$$r_{12} = \frac{\Sigma(z_1 z_2)}{N} \qquad \text{Kelley}$$

試行 n 次之測驗之可靠性係數

$$r_n = \frac{n r_{1I}}{1 + (n-1) r_{1I}}$$

智力商數

$$\text{I.Q.} = \frac{\text{M.A.}}{\text{C.A.}}$$

學科商數

算術商數

$$\frac{\text{算術年齡}}{\text{實際年齡}}$$

閱讀商數

$$\frac{\text{閱讀年齡}}{\text{實際年齡}}$$

任何學科商數

$$\frac{\text{任何學科年齡}}{\text{實際年齡}}$$

學科比率

$$\frac{\text{學科年齡}}{\text{心理年齡}}$$

生物學

離型指數

$$\frac{x}{\sigma}$$

後嗣之離勢

$$\sigma_{3.12}=\sigma_3\sqrt{1-\frac{2r^2{}_1}{1+r_3}}$$

假定　$r_1=r_2$

後嗣之離型

$$h_3=\frac{r_1\sigma_3}{(1+r_3)\sigma_1}\left(h_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}h_2\right)$$

假定　$r_1=r_2$

其他公式

第一 n 自然數之平方之和

$$\Sigma(n^2)=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$ Camp

n 事項之組合每次取 r 數

$$_nC_r=\frac{n(n-)(n-2)\cdot\cdot\cdot(n-r+1)}{r(r-)(r-2)\cdot\cdot\cdot1}=\frac{_nP_r}{r!}$$ Camp

n 事項之錯列每次取 r 數

$$_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$ Camp

參考書

Camp, B. H., *The Mathema ical Part of Elementary Statistics*. D. C. Heath and Company, Boston, 1931.

Kelley, Trumen L., *Statisti al Method*. MacMillan Co., New Yok, 1925.

Pearl, Raymond, *Medi al Biometry and Statistics*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1930.

Rietz H. L., (Editor), *H ndbook of Mathematical Statistics*. Houghton Mifflin Co., New York, 1924.

符號表

a ——Y 截數

a ——良好結果可以發現之各種方式

b ——傾斜度係數

b ——不良結果之可能數

$b_{12.34}$ ——X_3 與 X_4 除外後，X_2 對 X_1 之淨迴歸係數

C ——組距之大小

CA ——實際年齡

CC ——列聯係數

c ——假定原始點與算術平均數或中位數之差

c ——趨勢或迴歸方程之常數

D ——等級差

d ——數值或組中點與假定算術平均數（或任何平均數）之差

d ——與趨勢線之差$(Y-Y_c)$

d ——趨勢或迴歸方程之常數

d' ——以組距爲單位之 d

e ——常數$=2.71828$

f ——次數

f_a ——大於衆數組各組距之次數

f_b ——小於衆數組各組距之次數

G ——等級之正號差

G_m ——幾何平均數

H_m ——調和平均數

h_1 ——父之離型

h_2 ——母之離型

h_3 ——後嗣之某特性平均與所有後嗣之某特性平均之差

I ——項目

I.Q. ——智力商數

k ——不定限係數

L_{me} ——含有中位數之組之低限

L_{mo} ——衆數組之低限

$M.A.$ ——心理年齡

MD ——平均差

MD' ——組距之平均差

$M.P.$ ——組中點

N 或 n ——項數

N_L ——過大各項目之次數

N_S ——過小各項目之次數

$P.E._x$ ——平均數之機誤

$P.E._\theta$ ——任何統計量數(θ),如 $P.E._{mdn}$ $P.E._r$,等之機誤

p ——積差

p	——成功之機率
p_n	——n 期之物品價格
p_o	——基期之物品價格
p_o'	——第一種物品之基期價格
p_o''	——第二種物品之基期價格
p_1	——第一期之物品價格
p_2	——第二期之物品價格
Q_1	——第一四分位數
Q_3	——第三四分位數
QD	——四分位差
Q_m	——均方根平均差
q	——失敗之機率
q	——在 n 期生產或消耗之物品量
q_o	——在基期生產或消耗之物品量
q_o'	——在基期生產或消耗之第一種物品量
q_o''	——在基期生產或消耗之第二種物品量
q_1	——在第一期生產或消耗之物品量
q_2	——在第二期生產或消耗之物品量
R	——司聶門簡捷法計算之相關係數
$R_{1.234}$	——X_1, X_2, X_3 與 X_4 間之多項相關係數
r 或 r_{12} 或 r_{xy}	——相關係數
$\bar{r}$	——某項目之校正相關係數
r_1	——遺傳係數(父親與後嗣)

r_2 ——遺傳係數(母親與後嗣)

r_3 ——配偶係數(父親與母親)

r_{11} ——可靠性係數

$r_{12.3}$ ——X_3除外後，X_1與X_2之分析相關係數

${}_{12}r_{34}$ ——X_3與X除外後，X_1與X_2之分析相關係數

$S_{1.234}$ ——從迴歸而$X_1=f(X_2)+f(X_3)=f(X_4)$測量而得之估計標準誤

S_y ——估計之標準誤

$\overline{S}_y$ ——某項目之校正估計標準誤

W或W_t ——權

X ——單獨數值

$\overline{X}$ ——算術平均數

x ——單獨數值對算術平均數之差

Y ——單獨數值

$\overline{Y}$ ——Y值之算術平均數

Y_c ——從趨勢線或迴歸線而決定之Y計算值

y ——單獨Y值對算術平均數之差

$\overline{Z}$ ——假定平均數

z ——標準分數

z' ——實際數值與理論直線迴歸值之剩餘差

z_1 ——第一測驗之標準分數

z_2 ——第二測驗之標準分數

α_3 ——偏斜度之量數

β_1 ——曲線準則

β_2 ——曲線準則(峯度之測量)

$\beta_{12.3}$, $\beta_{12.34}$

$\beta_{13.24}$, $\beta_{24.23}$ ——其他係數

ζ ——迴歸直線性之測驗

η ——相關比率

θ ——任何統計量數

κ ——曲線準則

κ ——相關表內之行數

$\mu'_1\mu'_2\mu'_3\mu'_4$ ——分組校正後(薛伯氏校正法)對算術平均數之動差

$\mu_2\mu_3\mu_4$ ——對算術平均數之動差

$\nu_1\nu_2\nu_3$ ——對假定平均數之動差

π ——常數＝3.141593

ρ ——等級相關係數

ρ ——相關指數(根據迴歸曲線測量)

Σ ——和

σ ——標準差

σ' ——分組錯誤校正後之標準差

σ_{xy} ——相關表內各行數值對其平均數之標準差

$\sigma_{\bar{X}}$ ——算術平均數之標準差,其他統計量數可仿照寫法.如 σ_{mdn}, σ_r, σ_σ 等.

$\sigma_{3.12}$ ——後屬行列之標準差

σ_3 ——一般後嗣之標準差

ϕ ——均方列聯

χ ——偏斜度之量數

χ^2 ——用以測驗配合適度之數

對　　數　　表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	.00000	.00432	.00860	.01284	.01703	.02119	.02531	.02938	.03342	.03743
11	.04139	.04532	.04922	.05308	.05690	.06070	.06446	.06819	.07188	.07555
12	.07918	.08279	.08636	.08991	.09342	.09691	.10037	.10380	.10721	.11059
13	.11394	.11727	.12057	.12385	.12710	.13033	.13354	.13672	.13988	.14301
14	.14613	.14922	.15229	.15534	.15836	.16137	.16435	.16732	.17026	.17319
15	.17609	.17898	.18184	.18469	.18752	.19033	.19312	.19590	.19866	.20140
16	.20412	.20683	.20952	.21219	.21484	.21748	.22011	.22272	.22531	.22789
17	.23045	.23300	.23553	.23805	.24055	.24304	.24551	.24797	.25042	.25285
18	.25527	.25768	.26007	.26245	.26482	.26717	.26951	.27184	.27416	.27646
19	.27875	.28103	.28330	.28556	.28780	.29003	.29226	.20447	.29667	.29885
20	.30103	.30320	.30535	.30750	.30963	.31175	.31387	.31597	.31806	.32015
21	.32222	.32428	.32634	.32838	.33041	.33244	.33445	.33646	.33846	.34044
22	.34242	.34439	.34635	.34830	.35025	.35218	.35411	.35603	.35793	.35984
23	.36173	.36361	.36549	.36736	.36922	.37107	.37291	.37475	.37658	.37840
24	.38021	.38202	.38382	.38561	.38739	.38917	.39094	.39270	.39445	.39520
25	.39794	.39967	.40140	.40312	.40483	.40654	.40824	.40993	.41162	.41330
26	.41497	.41664	.41830	.41996	.42160	.42325	.42488	.42651	.42813	.42975
27	.43136	.43297	.43457	.43616	.43775	.43933	.44091	.44248	.44404	.44560
28	.44716	.44871	.45025	.45179	.45332	.45484	.45637	.45788	.45939	.46090
29	.46240	.46389	.46538	.46687	.46835	.46982	.47129	.47276	.47422	.47567
30	.47712	.47857	.48001	.48144	.48287	.48430	.48572	.48714	.48855	.45996
31	.49136	.49276	.49415	.49554	.49693	.49831	.49969	.50106	.50243	.50379
42	.50515	.50651	.50786	.50920	.51055	.51188	.51322	.51455	.51587	.51720
33	.51851	.5198	.52114	.52244	.53275	.52504	.52634	.51759	.52892	.53020
34	.53148	.53275	.53403	.53529	.53656	.53782	.53908	.64033	.54158	.54283
35	.54407	.54531	.54654	.54777	.54900	.55023	.55145	.55267	.55388	.55509
36	.55630	.55751	.55871	.55991	.56110	.56229	.56348	.56467	.66585	.56703
37	.56820	.56937	.57054	.57171	.57287	.57403	.57519	.57634	.57749	.57864
38	.57978	.58092	.58206	.58320	.58433	.58546	.58659	.58771	.58883	.58995
39	.59106	.59218	.59329	.59439	.59550	.59660	.59770	.59879	.59988	.60097

對數表(續)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	.6 206	.60314	.6042	.60531	.606[illegible]8	.6074[illegible]	.608 [illegible]	.60959	.61066	.61172
41	.61278	.61384	.6149[illegible]	.61595	.6170[illegible]	.618 [illegible]	619[illegible]9	.62014	.62118	.62221
42	.62325	.62428	625 1	.62534	.62737	.62[illegible]	62941	.6304[illegible]	.63144	.63246
43	.63347	.63448	.63548	.63649	.63749	.6[illegible]8 9	.63949	.640[illegible]8	.64147	.64246
44	.64345	.64444	.64542	.64640	.64738	.6483[illegible]	. 493[illegible]	.65031	.65128	.65225
45	.65321	.65418	.65514	.65610	.65706	.65801	.65896	.65992	.[illegible]6087	.66181
46	.66276	.66370	.66464	.66558	.66652	.66745	.66839	.66932	.6702[illegible]	.6/117
47	.67210	.67 02	.87394	.67485	.67578	.676[illegible]	.67761	.67852	.679[illegible]	.68034
48	.68124	.6821[illegible]	.68305	.[illegible]8395	.6848	.[illegible]857[illegible]	.686 4	.6875[illegible]	.68842	.6893[illegible]
49	.6902[illegible]	.69108	.69197	.69285	.69373	.69161	.69548	.6963[illegible]	.6972[illegible]	.69810
50	.69897	.6998	7007[illegible]	.70157	.70243	.70[illegible]8[illegible]	.70415	.70501	.70[illegible]8[illegible]	.70672
51	.70757	.7084	.70927	.71012	.7109[illegible]	.71181	7123[illegible]	.71349	.714 3	.71517
52	.71600	7168	.71767	.7185[illegible]	.7193[illegible]	.7201[illegible]	.72099	.72181	.7226[illegible]	.72346
53	.72428	.72[illegible]	.7259[illegible]	.72673	.7279[illegible]	.728 [illegible]	.72916	.72997	.730 8	.73159
54	.73239	.7332	.7340[illegible]	.73 8[illegible]	.7[illegible]560	.7 640	73719	.73799	.73878	.73957
55	.74036	.7411[illegible]	.7419	742[illegible]	.74351	.74429	.74507	.7[illegible]586	.7466	.74741
56	.74819	.7489	.7497	.75051	.751 8	.7520[illegible]	.75282	.75358	75435	.75511
57	.7 587	.7566[illegible]	.7574[illegible]	7581[illegible]	.7[illegible]891	.75937	.760 2	.76118	.46193	.76268
58	.76343	46418	.7649[illegible]	76567	.76641	.7571[illegible]	.76790	.76834	.76938	77012
59	.77085	.7715[illegible]	77 2[illegible]	77 05	.77379	.77452	.77525	.78597	.77670	.77743
60	.77815	.77887	.7798[illegible]	.72032	.78104	.7817[illegible]	.78247	.78319	.78390	78462
61	.78533	.7830[illegible]	.7887[illegible]	.78740	78817	.78888	7895	.79029	.79099	.79169
62	.79239	.7930[illegible]	.79379	.79149	.79518	.79 88	.79357	.79727	79796	79865
63	.7993	8000[illegible]	.80072	.80140	.8020[illegible]	.8[illegible]27[illegible]	.80[illegible]46	.80414	.8048[illegible]	.80550
64	.80618	.8[illegible]68[illegible]	8079	.8[illegible]821	.8088[illegible]	.8795[illegible]	.81023	.8109[illegible]	.81158	.81224
65	.81291	.81358	.81425	.81491	.81558	.8162	.81690	.81757	.8182[illegible]	.81889
66	.8195[illegible]	.8202[illegible]	.82088	.82151	.82217	.8228	.82347	.8241[illegible]	.82478	82543
67	.82607	.92672	.82737	.82802	.8286[illegible]	.829[illegible]	8299	.83059	.8312[illegible]	83187
68	.83251	8331[illegible]	.83378	.83442	.8350[illegible]	8356[illegible]	.8 632	13 9[illegible]	.837[illegible]	88[illegible]2
69	.8388	.83948	.84011	.8107[illegible]	.841[illegible]	84198	. 4261	.8432[illegible]	.84[illegible]8	.8[illegible]448

對 數 表 (續)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	.84 10	.84572	.846 4	.84690	.84757	.84819	.84880	.84942	.85003	.85065
71	.85126	.85187	.85248	.85309	.85370	.85431	.85491	.85552	.85612	.85673
72	.85733	.85794	.85854	.85914	.85974	.86034	.86094	.86153	.86213	.86273
73	.86332	.86392	.86451	86510	.86570	.86629	.86688	.86747	86806	.86864
74	.86923	.86982	.87040	.87099	.87157	.87216	87274	.87332	.87390	.87448
75	.87506	87564	.87622	.87679	87737	.87795	.87852	.87910	.87967	.88024
76	.88081	.88138	.8819	.88252	88309	.88366	.88423	.88480	.88536	.88593
77	.88649	.88705	.8 76	.88818	.88874	88930	.88986	.89042	.89098	.89154
78	.89209	.89265	.89320	.89376	.89432	.89487	.89542	.89597	.89653	89708
79	.89 63	. 9818	.89 73	.89927	.89982	.90037	.90091	.90146	.90200	.90255
80	.90309	.90363	.90417	.90472	.90526	.90587	.90634	.90687	.90741	.90795
81	.90849	.90902	.90956	.910 9	.91062	.91116	.91169	.91222	.91275	.91358
82	.91381	.91434	.91487	.91540	91593	.9164	.91698	.91751	.91803	.91855
83	.91908	.91960	.92012	.95063	92117	92169	.92221	.92273	.92324	.92376
84	.92428	.924 0	.92531	92583	92634	.9268	.92737	.92788	.92840	92891
85	.92942	.92993	.93044	.90395	.93146	.93197	.03247	.93298	.93349	.93399
86	.93450	.93500	.9 551	.92601	.93651	.93702	.93752	.93802	.93852	.93902
87	.93952	.94002	.94052	.94101	.94151	.94201	.94250	.94300	.94349	.94399
88	.94448	94498	.94547	.94596	.94645	.94694	.94743	.94792	.94841	.94890
89	.94939	.9498	.9503	.950 5	.95134	.95182	.95231	.95279	.95328	.95373
90	.95424	.95472	.95521	.95569	95617	.95665	.95713	.95761	.9 809	.95856
91	.95904	.95952	.95999	.93047	.96095	.93142	.93190	.93137	.93284	.96332
92	96379	.93426	.93473	.93520	.93567	.96614	.96661	.93708	.96755	.96802
93	.96 48	.96895	.93942	.939	97035	.97081	.97128	.67174	.97220	.97267
94	.97313	.97359	.97405	.97451	97497	.97543	.97589	.67635	.9768	.97727
95	.97772	.97818	.97834	.97909	.97955	.98000	.98046	98091	.98137	.98182
96	.9 227	.98272	.98318	.98363	.98408	.98453	.98498	.98543	.98588	.98332
97	.98 77	.98722	.98767	.98811	.98856	.9890	.98946	.98989	.99034	.99078
98	.99123	.99167	.99211	.99255	.99300	.99344	.99 88	.99432	.99475	99520
99	.99564	.9960	.99561	.99695	.99739	99782	.99836	99870	.99913	.99957

專門附錄 I

算術平均數簡捷法之導源 *

未分組材料

設每數值(X)等於

$$X=\overline{Z}+d$$

或假定始點加此數值對於始點之差數。

各數值之總和必為

$$\Sigma X=\Sigma\overline{Z}+\Sigma d$$

但因 $\overline{Z}$ 為一常數，故上式可寫為

$$\Sigma X=N\overline{Z}+\Sigma d$$

以 N 除總和以求算術平均數，其結果為

$$\frac{\Sigma X}{N}=\overline{Z}+\frac{\Sigma d}{N}.$$

$$\overline{X}=\overline{Z}+\frac{\Sigma d}{N}$$

已分組材料

每組中之作為該點對於假定平均數之差數。

$$M.P.=\overline{Z}+d$$

---

* 此導源係採自鄧爾.

欲求每組各數之總值，可將該組之中點用該組之次數乘之

$$f\times MP=f\overline{Z}+fd$$

各組相加

$$\Sigma(f\times MP)=\Sigma(f\overline{Z})+\Sigma(fd)$$

或因 $\overline{Z}$ 爲一常數

$$\Sigma(f\times MP)=\overline{Z}\Sigma(f)+\Sigma(fd)$$

又因 $\Sigma(f)=N$

$$\Sigma(f\times MP)=N\overline{Z}+\Sigma(fd)$$

用 N 除之以求得算術平均數

$$\frac{\Sigma(f\times MP)}{N}=\overline{Z}+\frac{\Sigma(fd)}{N}$$

$$\overline{X}=\overline{Z}+\frac{\Sigma(fd)}{N}$$

專門附錄 II

標準差簡捷公式之導源

若 d 爲某點對於假定始點$(\overline{Z})$之差數

$$d=X-\overline{Z}$$

又，倘平均數與此始點之差爲 c，

$$c=\overline{X}-\overline{Z}$$

則

$$\begin{aligned}d-c&=(X-\overline{Z})-(\overline{X}-\overline{Z})\\&=X-\overline{Z}-\overline{X}+\overline{Z}\\&=X-\overline{X}\text{ 或 }x\end{aligned}$$

在上式，x 爲一數值對於算術平均數，之差數，但

$$\overline{X}=\overline{Z}+\frac{\Sigma(fd)}{N}$$

$$\therefore\quad \overline{X}-\overline{Z}=\frac{\Sigma(fd)}{N}=c$$

因

$$d-c=x$$

$$d=x+c$$

$$\therefore\quad d^2=x^2+2cx+c^2$$

又

$$f(d^2)=f(x^2)+2cfx+fc^2$$

又

$$\Sigma f(d^2)=\Sigma f(x^2)+2c\Sigma(fx)+c^2\Sigma f$$
$$=\Sigma f(x^2)+2c\Sigma(fx)+Nc^2$$

因 $\Sigma f=N$

但對於算術平均數之差之和爲零

$$\therefore\quad \Sigma(fx)=0$$

因之，此公式簡化爲

$$\Sigma f(d^2)=\Sigma f(x^2)+Nc^2$$

或

$$\Sigma f(x^2)=\Sigma f(d^2)-Nc^2$$

又

$$\frac{\Sigma f(x^2)}{N}=\frac{\Sigma f(d^2)}{N}-c$$

但 $\sigma=\sqrt{\dfrac{\Sigma f(x^2)}{N}}$ （見第四章標準差）

$$\therefore\quad \sigma^2=\sqrt{\frac{\Sigma f(d^2)}{N}-c^2}$$

但如上式

$$c=\frac{\Sigma(fd)}{N}$$

又

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(d^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

專門附錄 III

標準差簡捷公式之導源——未分組材料

關於未分組之材料，選零點爲假定始點者，標準差之較簡公式可如下法導來

$$d=X-\overline{Z}$$

但因

$$\overline{Z}=0$$

$$d=X$$

又

$$c=\overline{X}-\overline{Z}$$

$$\therefore\quad c=\overline{X}$$

因

$$d^2=x^2+2cx+c^2\qquad \text{(見專門附錄 II)}$$

又

$$d=X$$

$$\therefore\quad X^2=x^2+2cx+c^2$$

又

$$\Sigma(X^2)=\Sigma(x^2)+2c\Sigma(x)+Nc^2$$

但

$$\Sigma(x)=0,\qquad 而\quad c=\overline{X}$$

$$\therefore\quad \Sigma(x^2)=\Sigma(x^2)-N\overline{X}^2$$

又

$$\Sigma(x^2)=\Sigma(X^2)-N\overline{X}^2$$

$$\frac{\Sigma(x^2)}{N}=\frac{\Sigma(X^2)}{N}-(X^2)=\frac{\Sigma(X^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2$$

因

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{N}}$$

$$\therefore\quad \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X^2)}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

專門附錄 IV

最小二乘直線所需'常態'方程式之導源

任何直線之公式，如本書第六章所述，爲

$$Y_c=a+bX$$

在上式 Y_c 代表 Y 之計算或理論值，用相當數值代入公式，卽可求得．

其問題卽爲決定一線，足以滿足最小二乘法原則之條件；卽實際與理論值之差之方之和爲最小．

字母 d 可用以代表實際值與理論值之差．其目的爲求得一線，如是，則

$$\Sigma(d^2)=\text{最小}$$

$$\text{但}\quad d=Y-Y_c$$

$\therefore$ $\Sigma(Y-Y_c)^2$ 必等於最小．如是關於 a 與 b 之部分導來數可以得到而使之等於零以求其最小數．

$$\Sigma\frac{\delta(Y-Y_c)^2}{\delta a}=2Na-2\Sigma(Y)+2b\Sigma(X)$$

又

$$\Sigma\frac{\delta(Y-Y_c)^2}{\delta b}=2b\Sigma(X^2)-2\Sigma(YX)+2a\Sigma(X)$$

使之等於零:

$$\text{I}\quad 2Na-2\Sigma(Y)+2b\Sigma(X)=0$$

$$\text{II}\quad 2b\Sigma(X^2)-2\Sigma(XY)+2a\Sigma(X)=0$$

或

$$\text{I}\quad \Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)$$

$$\text{II}\quad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)$$

專門附錄 V

相關係數之積差公式之導源

r 之原來公式為

$$r=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

在上式

$$S_y=\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{N}} \tag{1}$$

$$S_y^2=\frac{\Sigma(d^2)}{N} \tag{2}$$

假定其迴歸為一直線

$$Y_c=a+bX \tag{3}$$

Y_c 係代表從此公式所得到之理論值，但

$$d=Y-\ _c \tag{4}$$

$$\therefore \quad d = Y - (a + bX) \tag{5}$$

$$d = Y - a - bX \tag{6}$$

用 d 乘之

$$d^2 = dY - ad - bdX \tag{7}$$

因每一值均有一 d，故各點之和爲

$$\Sigma(d^2) = \Sigma(dY) - a\Sigma(d) - b\Sigma(dX) \tag{8}$$

因迴歸線係用最小二乘法配合

$$\Sigma(d) = 0$$

$$\Sigma(dX) = 0$$

$$\therefore \quad \Sigma(d^2) = \Sigma(dY) \tag{9}$$

$$d = Y - a - bX$$

用 Y 乘之並爲之加總，則

$$\Sigma(dY) = \Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY) \tag{10}$$

但因

$$\Sigma(d^2) = \Sigma(dY)$$

$$\therefore \quad \Sigma(d^2) = \Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY) \tag{11}$$

又

$$\frac{\Sigma(d^2)}{N} = \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY)}{N} \tag{12}$$

但

$$S_y^2 = \frac{\Sigma d^2}{N}$$

$$\therefore \quad S_y^2 = \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY)}{N} \tag{13}$$

又

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(Y^2)}{N}-c_y^2} \tag{14}$$

而

$$\sigma_y^2=\frac{\Sigma(Y^2)}{N}-c_y^2 \tag{15}$$

代入

$$r^2=1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

$$r^2=1-\frac{\dfrac{\Sigma(Y^2)-a\Sigma(Y)-b\Sigma(XY)}{N}}{\dfrac{\Sigma(Y^2)}{N}-c_y^2} \tag{16}$$

用 N 乘分子與分母

$$r^2=1-\frac{\Sigma(Y^2)-a\Sigma(Y)-b\Sigma(XY)}{\Sigma(Y^2)-Nc_y^2} \tag{17}$$

此公式可簡化為*

$$r^2=\frac{a\Sigma(Y)+b\Sigma(XY)-Nc_y^2}{\Sigma(Y^2)-Nc_y^2} \tag{18}$$

迴歸線之二常態方程式為

$$\text{I}\qquad \Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X) \tag{19}$$

$$\text{II}\qquad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2) \tag{20}$$

若平均點(X 與 Y)用為原始點，則各值可化為與其相當平均數之差(x 與 y)。

* 此公式稱為相關係數之'[illegible]乘'公式。

如是

$$x = X - \overline{X}$$

$$y = Y - \overline{Y}$$

則方程式可讀之如下

$$\text{I} \qquad \Sigma(y) = Na + b\Sigma(x) \tag{21}$$

$$\text{II} \qquad \Sigma(xy) = a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2) \tag{22}$$

但因各對於平均數之差數之和等於零

$$\therefore \quad \Sigma(x) = 0$$

$$\Sigma(y) = 0$$

而常態方程式則化為

$$\text{I} \qquad Na = 0 \tag{23}$$

$$\therefore \quad a = 0$$

$$\text{II} \qquad \Sigma(xy) = b\Sigma(x^2)$$

$$\therefore \quad b = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)} \tag{24}$$

將方程式(17)各項，用對於平均數* 之差表示，則簡化為

$$r^2 = \frac{a\Sigma(y) + b\Sigma(xy) - Nc_y^2}{\Sigma(y^2) - Nc_y^2} \tag{25}$$

但

$$\Sigma(y) = 0$$

$$a\Sigma(y) = 0$$

$$\text{且}\ c_y = 0$$

* 因'a'(Y截數)等於零，此線必經過始點或各平均數之點。

此公式簡化爲

$$r^2=\frac{b\Sigma(xy)}{\Sigma(y^2)} \tag{26}$$

但從(24)

$$b=\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)}$$

$$\therefore \quad r^2=\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)}\cdot\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(y^2)} \tag{27}$$

$$r^2=\frac{[\Sigma(xy)]^2}{\Sigma(x^2)\cdot\Sigma(y^2)} \tag{28}$$

用 N^2 除分子與分母

$$r^2=\frac{\left(\frac{\Sigma(xy)}{N}\right)^2}{\frac{\Sigma(x^2)}{N}\cdot\frac{\Sigma(y^2)}{N}} \tag{29}$$

但

$$\sigma_x{}^2=\frac{\Sigma(x^2)}{N} \quad (見第四章)$$

$$\sigma_y{}^2=\frac{\Sigma(y^2)}{N} \quad (見第四章)$$

$$\therefore \quad r=\frac{p}{\sigma_y\sigma_y} \tag{30}$$

在上式

$$p=\frac{\Sigma(xy)}{N} \tag{31}$$

用 X 與 Y 值爲對於假定始點（若材料爲未分組，則用零，如是用原數值）之差，p 可從下式計算而得

$$p=\frac{\Sigma(xy)}{N}-c_xc_y \qquad (32)$$

在上式 x' 與 y' 為對於假定點之差，因

$$x'=x+c_x$$

在上式 c_x 為真正平均數與假定始點之差（在已分組材料其始點為 $\frac{\Sigma(fd)}{N}$；在未分組材料，其始點為 $\frac{\Sigma(X)}{N}$，該處選用零為始點）.

$$y'=y+c_y$$

$$x'y'=xy+c_xy+c_yx+c_xc_y \qquad (33)$$

將各點相加

$$\Sigma(x'y')=\Sigma(xy)+c_x\Sigma(y)+c_y\Sigma(x)+Nc_xc_y \qquad (34)$$

但因對各平均數之差之和為零

$$\Sigma(y)=0$$

$$\Sigma(x)=0$$

且方程式 34 簡化為

$$\Sigma(x'y')=\Sigma(xy)+Nc_xc_y$$

以 N 除之

$$\frac{\Sigma(x'y')}{N}=\frac{\Sigma(xy)}{N}+c_xc_y$$

$$\therefore \quad \frac{\Sigma(xy)}{N}=\frac{\Sigma(x'y')}{N}-c_xc_y=p$$

若假定始點為零

$$x'=X$$

$$y'=Y$$

又

$$p=\frac{\Sigma(xy)}{N}=\frac{\Sigma(XY)}{N}-c_xc_y$$

專門附錄 VI

迴歸線公式之導源

因迴歸線假定爲一直線，其公式爲下列之一種

$$Y=a+bX$$

其二'常態'方程式*爲

$$\text{(I)}\qquad \Sigma(Y)=Na+b\Sigma(X)$$

$$\text{(II)}\qquad \Sigma(XY)=a\Sigma(X)+b\Sigma(X^2)$$

倘此線之始點，假定在平均數上之一點，則常態方程式可讀之如下：

$$\text{(I)}\qquad \Sigma(y)=Na+b\Sigma(x)$$

$$\text{(II)}\qquad \Sigma(xy)=\Sigma(x)=b\Sigma(x^2)$$

但

$$\Sigma(y)=0$$

$$\Sigma(x)=0$$

$$\therefore\ \text{(I)}\qquad Na=0\qquad 而\ a=0$$

$$\text{(II)}\quad \Sigma(xy)=b\Sigma(x^3)\qquad 而\ b=\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)}$$

方程式(1)可簡化爲

$$y=bx$$

而

$$b=\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)}$$

用 N 除分子與分母

$$y=\frac{\Sigma(xy)}{N\frac{\Sigma(x^2)}{N}}x$$

---

* 見第六章

但

$$\frac{\Sigma(x^2)}{N}=\sigma^2_x$$

$$\therefore\quad y=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma^2_x}x$$

但

$$\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma^2_x}=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y}\text{(積差公式)}$$

$$\therefore\quad y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

專門附錄 VII

多項相關迴歸

若有三種自變數，其直線相關之常型公式爲

$$X_1=a+b_{12.34}X_2+b_{13.24}X_3+b_{14.23}X_4$$

則常態方程式爲

$$\text{(I)}\quad \Sigma(X_1)=Na+b_{12.34}\Sigma(X_2)+b_{13.24}\Sigma(X_3)$$
$$+b_{14.23}\Sigma(X_4)$$

$$\text{(II)}\quad \Sigma(X_1X_2)=a\Sigma(X_2)+b_{12.34}\Sigma(X_2^2)+b_{13.24}\Sigma(X_2X_3)$$
$$+b_{14.23}\Sigma(X_2X_4)$$

$$\text{(III)}\quad \Sigma(X_1X_3)=a\Sigma(X_3)+b_{12.34}\Sigma(X_2X_3)+b_{13.24}\Sigma(X_3^2)$$
$$+b_{14.23}\Sigma(X_3X_4)$$

$$\text{(IV)}\quad \Sigma(X_1X_4)=a\Sigma(X_4)+b_{12.34}\Sigma(X_2X_4)+b_{13.24}\Sigma(X_3X_4)$$
$$+b_{14.23}\Sigma(X_4^2)$$

若假定始點爲各平均數上之一點並以 N 除方程式之兩邊，則以上方程式可簡化如下：

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{\Sigma(x_1)}{N}=a+b_{12.34}\frac{\Sigma(x_2)}{N}+b_{13.24}\frac{\Sigma(x_3)}{N}+b_{14.23}\frac{\Sigma(x_4)}{N}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{\Sigma(x_1x_2)}{N}=\frac{a\Sigma(x_2)}{N}+b_{12.34}\frac{\Sigma(x_2^2)}{N}+b_{13.14}\frac{\Sigma(x_2x_3)}{N}+b_{14.23}\frac{\Sigma(x_2x_4)}{N}$$

$$(\mathrm{III})\qquad \frac{\Sigma(x_1x_3)}{N}=\frac{a\Sigma(x_3)}{N}+b_{12.34}\frac{\Sigma(x_2x_3)}{N}+b_{13.24}\frac{\Sigma(x_3^2)}{N}+b_{14.23}\frac{\Sigma(x_3x_4)}{N}$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \frac{\Sigma(x_1x_4)}{N}=\frac{a\Sigma(x_4)}{N}+b_{12.34}\frac{\Sigma(x_2x_4)}{N}+b_{13.24}\frac{\Sigma(x_3x_4)}{N}+b_{14.23}\frac{\Sigma(x_4^2)}{N}$$

在上式 x_1, x_2, x_3, x_4 代表對於 $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$ 及 $\overline{X}_4$ 各平均數之差數，但因對算術平均數之差之和爲零，故

$$\frac{\Sigma(x_1)}{N}=0,\quad \frac{\Sigma(x_2)}{N}=0,\quad \frac{\Sigma(x_3)}{N}=0,\quad \frac{\Sigma(x_4)}{N}=0$$

又*

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{\Sigma(x_2^2)}{N}},\quad \sigma_3=\sqrt{\frac{\Sigma(x_3^2)}{N}},\quad \sigma_4=\sqrt{\frac{\Sigma(x_4^2)}{N}}$$

或

$$\sigma_2^2=\frac{\Sigma(x_2^2)}{N},\quad \sigma_3^2=\frac{\Sigma(x_3^2)}{N},\quad \sigma_4^2=\frac{\Sigma(x_4^2)}{N}.$$

---

* 見第四章標準差．

而
$$\frac{\Sigma(x_1x_2)}{N}=p_{12}\text{(積差)*}$$

$$\frac{\Sigma(x_1x_3)}{N}=p_{13}\text{等}$$

其積差之值可由下式計算

$$p_{12}=\frac{\Sigma(X_1X_2)}{N}-\frac{\Sigma(X_1)}{N}\cdot\frac{\Sigma(X_2)}{N}$$

現'常態'方程式可謂之如下:

$$p_{12}=b_{12\cdot34}\sigma_2^2+b_{13\cdot24}p_{23}+b_{14\cdot23}p_{24}$$
$$p_{13}=b_{12\cdot34}p_{23}+b_{13\cdot24}\sigma_3^2+b_{14\cdot23}p_{34}$$
$$p_{14}=b_{12\cdot34}p_{24}+b_{13\cdot24}p_{34}+b_{14\cdot23}\sigma_4^2$$

專門附錄 VIII

估計之標準誤——多項相關

複相關之標準誤公式,其導來方法與簡單相關之'最小二乘'公式相同:

$$S^2_{1\cdot23}=\frac{\Sigma(X_1^2)-b_{12\cdot34}\Sigma(X_1X_2)-b_{13\cdot24}\Sigma(X_1X_3)-b_{14\cdot23}\Sigma(X_1X_4)}{N}$$

若簡化爲從各平均數求差數,則此公式之讀法如下:

$$S^2_{1\cdot23}=\frac{\Sigma(x_1^2)}{N}-b_{12\cdot34}\frac{\Sigma(x_1x_2)}{N}-b_{13\cdot24}\frac{\Sigma(x_1x_3)}{N}-b_{14\cdot23}\frac{\Sigma(x_1x_4)}{N}$$

或

$$S^2_{1\cdot23}=\sigma_1^2-b_{12\cdot34}p_{12}-b_{13\cdot24}p_{13}-b_{14\cdot23}p_{14}$$

* 見第九章相關係數.

專門附錄 IX

算術平均數之標準誤之導源 *

n 項目之 N 隨機樣本爲之一一求得，且各個值均以對全域之眞正平均數表示之，其寫法如下：

項目數	樣本 #1	樣本 #2	樣本 #3	樣本 #4
1	x'	x'	x'	x'
2	x''	x''	x''	x''
3	x'''	x'''	x'''	x'''
……	……	……	……	……
……	……	……	……	……
n	x_n	x_n	x_n	x_n
	Σx_1	Σx_2	Σx_3	Σx_4

若每樣本之項目 #1 與 #2 爲之相加，則

$$x_{1+2}=x'+x''$$

但標準差等於

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{N}}$$

或在本例中

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x^2_{1+2})}{N}}$$

或

$$\sigma^2_{1+2}=\sqrt{\frac{\Sigma(x^2_{1+2})}{N}}$$

---

* 此導源係依 Ezekial's *Methods of Correlation Analysis*.

但

$$x\chi^2_{1+2}=(x'+x'')^2$$

$$=(x')^2+2(x'x'')+(x'')^2$$

又

$$\Sigma(\chi^2_{1+2})=\Sigma(x'^2)+2\Sigma(x'x'')+(x''^2)$$

因樣本之逐項係由隨機取得,故各不相關 ($r=0$) 而 $\Sigma(x'x'')=0$

$$\therefore\quad \Sigma(x^2_{1+2})=\Sigma(x'^2)+\Sigma(x''^2)$$

或用 N 除之

$$\sigma^2_{1+2}=\sigma_{x'}^2+\sigma_{x''}^2$$

但以各樣本之數 (N) 逐漸增加,$\sigma_{x'}$ 有逼近全域之標準差之趨勢,因各樣本係由此全域取得,而 $\sigma_{x''}$ 亦然.

或 $\sigma_{x'}=\sigma_x$

又 $\sigma_{x''}=\sigma_x$ 當 N 爲極大時

$\therefore\ \sigma^2_{1+2}=2\sigma_x^2$

關於前三項之和

$$\sigma^2_{1+2+3}=\sigma_{x'}^2+\sigma_{x''}^2=\sigma_{x'''}^2=3\sigma_x^2 \quad 當 N 爲大時$$

又關於 n 項之和

$$\sigma^2_{1+2+3\cdots n}=\sigma_{x'}^2+\sigma_{x''}^2+\cdots\cdots+\sigma_{xn}^2$$

$$=n\sigma_x^2 \qquad 當 N 爲大時$$

用 N 除各項目及各總和

$$\left(\frac{x'}{N}\right)^2=\frac{(x^{2\prime})}{N}$$

又

$$\sigma^2_{\frac{x'}{n}}=\frac{\sigma_{x'}^2}{n^2}$$

又因 $\sigma_{x'}$ 有等於 σ_x 之趨勢

$$\sigma^2_{\frac{x'}{n}}=\frac{\sigma_x{}^2}{n^2}\qquad \text{當} N \text{爲大時}$$

又關於 x' 及 x''

$$\sigma^2_{\frac{x'}{n}+\frac{x''}{n}}=\frac{\sigma_x{}^2}{n^2}+\frac{\sigma_x{}^2}{n^2}=2\frac{\sigma_x{}^2}{n^2}=$$

或關於 n 項目之總和

$$\sigma^2_{\frac{x'}{n}+\frac{x''}{n}+\cdots+\frac{n^n}{x}}=\frac{\sigma_x{}^2}{n^2}+\frac{\sigma_x{}^2}{n^2}+\cdots+\frac{\sigma_x{}^2}{n^2}=\frac{n\sigma_x{}^2}{n}=\frac{\sigma_x{}^2}{n}$$

但因每樣本之 $\Sigma\left(\frac{x}{n}\right)=\overline{X}$

$$\sigma_{\overline{x}}{}^2=\frac{\sigma_x{}^2}{N}$$

$$\sigma^2_{\overline{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

在上式

σ_x 爲全域之標準差而非爲樣本之標準差.但因缺乏全域之標準差值,故樣本之標準差(σ)用爲此值之一種估計.

本書統計名詞英漢對照表

Abscissa 橫坐標
Abmodality 離型
Abmodality of Offspring 後嗣之離型
Accidental Movement 意外變動
Alienation 餘相關
Area Diagram 面積圖
Arithmetic Graph 算術圖
Arithmetic Mean 算術平均數
Association 相聯
Average 平均數

Band Chart 帶形圖
Bar Chart 條圖
Base Period 基期
Bimodal Curve 雙峯曲綫
Biserial Coefficient of Correlation 二數列相關係數
Boxhead 表頭

Central Tendency 集中趨勢
Charlier Check 薛立愛氏覆驗法
Chi Sguare Test χ^2 測驗
Class Interval 組距
Coefficient of Alienation 餘相關係數
Coefficient of Association 相聯係數
Cefficient of Assortative Mating 配偶係數
Coefficient of Colligation 綜合係數
Coefficient of Contingency 列聯係數
Cefficient of Correlation 相關係數
Coefficient of Determination 定限係數
Coefficient of Dispersion 離勢係數
Coefficient of Heredity 遺傳係數
Coefficient of Multiple Correlation 複相關係數
Coefficient of Net Regression 淨迴歸係數
Coefficient of Non-Determinatien 不定限係數
Coefficient of Part Correlation 部分相關係數
Coefficient of Partial Correlation 淨相關係數
Coefficient of Rank Correlation 等級相關係數
Coefficient of Reliability 可靠性係數
Coefficient of Skewness 偏斜度係數
Coefficient of Variation 離勢係數
Collection of Data 材料之搜集
Corrected Birth Rate 校正出生率
Corrected Death Rate 校正死亡率
Contingency 列聯
Continuous Series 連續數列
Control of Quality 素質之控制
Coordinate Lines 坐標綫
Correlation 相關
Covrelation of Attributes 品質相關
Correlation Coefficient 相關係數
Correlation Ratio 相關比
Correlation Table 相關表

* 本表統計名詞譯名，凡有經國立編譯館訂定者，悉採用之。

Cross Hatched Map 交叉圖
Crude Birth Rate 總出生率
Crude Death Rate 總死亡率
Crude Morbidity Rate 總疾病率
Cumulative Frequency Distribution
累積次數分配
Curve Type Criteria 曲線型準則
Curvilinear Correlation 曲線相關
Cyclical Movement 循環變化

Death Rate 死亡率
Decile 十分位數
Dependent Variable 因變數
Determination 定限
Direct Correlation 直接相關
Discrete Series 間斷數列
Dispersion 離勢
Distribution 分配
Dot Map 加點圖

Exponential Series 變羃級數

Factor Reversal Test 因子互換測驗
Fourfold Table 四元表
Free Hand Trend Lines 隨手趨勢線
Frequency Distribution 次數分配
Frequency Polygon 次數多邊圖

Gaussion Distribution 高斯分配
General Purpose Table 通用表
Geometric Mean 幾何平均數
Gompertz Curve 龔柏茲曲線
Goodness of Fit 配合適度
Graph 圖
Graphic Presentation 圖示
Guessed Mean 假定平均數

Harmonic Mean 調和平均數
Histogram 直方圖

Ideal Index Number 理想指數
Independent Variable 自變數
Index Number 指數
Index Number of Quantity 數量之指數
Inverse Correlation 反相關
Inverted J Curve 反J形曲線

J Curve J形曲線
Joint Correlation 連合相關

Kurtosis 峯度

Least Squares Method 最小二乘法
Leptokurtic 高狹峯
Life Table 生命表
Line Graph 線圖
Line of Regression 迴歸線
Linear Correlation 直線相關
Link Relative Method 環比法
Logarithmic Curve 對數曲線
Logarithmic Graph 對數圖

Map Graph 統計地圖
Map Tack System 地圖插針法
Mean 平均數；算術平均數
Mean Deviation 平均差
Mean-Square Contingency 均方列聯
Median 中位數
Mental Age 心理年齡
Mesokurtic 常態峯
Mode 衆數
Moment 動差
Morbidity Rate 疾病率
Mortality Rate 死亡率

Moving Average 移動平均數
Multiple Correlation 複相關
Multiple Frequency Table 複次數表

Natality Rate 出生率
Non-Determination 不定限
Non-Linear Correlation 非直線相關
Non-Linear Standard Error of Estimate 非直線估計標準誤
Non-Linear Trend 非直線趨勢
Normal Curve 常態曲線
Normal Equation 標準方程式

Ogive 扇形曲線
Open-Ended Distribution 空端分配
Ordinate 縱坐標
Origin year 原始年

Parabola 拋物線
Part Porrelation 部分相關
Partial Correlation 淨相關
Percentile 百分位數
Platykurtic 低闊峯
Pictorial Bar Chart 像形條圖
Pie Diagram 圓瓣圖
Population 人口；全體
Potential Curve 定冪曲線
Price Relative 價比
Primary Source 初級來源
Probability 機率
Probable Error 機誤
Product Moment Method 積乘方法

Quadratic Mean 均方根平均數
Quartile 四分位數
Quartile Deviation 四分位差
Questionnaire 訪問表格

Random Movement 隨機變動
Range 全距
Rank Correlation 等級相關
Rate 率
Ratio 比；比率；比例
Ratio Chart 比例圖
Ratio to Moving Average 對移動平均數之比率
Ratio to Trend Method 對趨勢之比率法
Reference Table 參照表
Regression 迴歸
Regression Curve 迴歸曲線
Relative Measure of Dispersion 離勢對量數
Reliability 可靠性
Residual Movement 剩餘變動

Sample 樣本
Sampling 抽樣
Scale Break 量表之間斷
Scale Caption 量表標目
Scatter Diagram 散佈圖
Score Sheet 記數張
Seasonal Variation 季節變動
Second Degree Parabola 二級拋物線
Secondary Source 次級來源
Secular Trend 長期趨勢
Semi-Average Trend Line 半平均趨勢線
Semi-Interquartile Range 四分位差
Semi-Logarithmic Curve 半對數曲線
Semi-Logarithmic Graph 半對數圖
Series 數列
Shaded map 暗色地圖
Sheppard's Correction 薛伯氏校正數
Shifting the Base Period 改換基期
Shifting the Origin 改換原始點

Significance 顯著性
Silhouette Chart 陰影盈虧圖
Simple Correlation 簡單相關
Skewed Distribution 偏斜分配
Skewness 偏斜度
Small Sample 小樣本
Solid Diagram 立體圖
Source 來源
Spatial Distribution 空間分配
Spearman's Foot Rule 司畢門簡捷法
Special Purpose Table 專用表
Specific Death Rate 分死亡率
Specific Morbidity Rate 分疾病率
Standard Deviation 標準差
Standard Error of Estimate 估計標準誤
Standard Error 標準誤
Straight Line Trend 直線趨勢
Standard Score 標準分數
Standardized Birth Rate 標準出生率
Statistic 標數
Statistical Method 統計方法
Stub 橫標目

Subject Quotient 學科商數
Subject Ratio 學科比率
Successive Eliminatson 接續消除
Symmetrical Distribution 對稱分配
Theoretic Birth Rate 理論出生率
Theoretic Death Rate 理論死亡率
Time Revelsar Test 時間互換測驗
Time Sesies 時間數列
Time Series Analysis 時間數列分析
Title 標題
Trend 趨勢

Universe 全域

Variability 離勢
Vital Statistics 生命統計

Weighted Average 加權平均數
Weighting of Index Numbers 指數之加權

Y Intercept Y截數

統計·經濟·社會問題

統計學名詞	國立編譯館
統計方法大綱	朱君毅
生命統計方法	張世文
調查方法	史可京
統計應用數學	李銳夫
中國租佃制度之統計分析	國民政府統計局
中國土地問題之統計分析	
中國人口問題之統計分析	
經濟學	趙蘭坪
經濟學名詞	國立編譯館
經濟思想發展史	金天錫
資本節制論	趙蘭坪等
國民所得概論	巫寶山
民生經濟建設與合作	彭蓮棠
行業組合論	劉文島
中國田制史	萬國鼎
歷代屯墾研究（兩册）	唐啟宇
田賦會要 地稅理論	財政部田賦管理委員會編
田賦史（兩册）	
國民政府田賦實況（兩册）	
田賦法令	
鐵路經營學綱要	汪桂馨
商情循環概論	陳炳權
國際貿易論	沈光沛
保護貿易下之英國	陸元誠
貨幣學	趙蘭坪
貨幣新論	薛茂桐
銀行學	劉全忠
人壽保險計算學	周紹濂
地方財政學	朱博能
縣財政問題	朱博能
自治財政論	劉善述
田賦徵實制度	陳友三
中國所得稅論	張保福
社會學	毛起鵕
社會學名詞	國立編譯館
鄉村社會學綱要	童潤之
婚姻法與婚姻問題	李宜琛

社會行政叢書

社會部主編

同鄉組織之研究	竇季良
農會會務與業務	喬啟明
各國工會制度	余長河
國際勞工組織	程海峯
美蘇少年組織	龍冠海
中國家族社會之演變	高達觀
勞力供給與國防	張永懋
我國工會法研究	史太璞
人力復員問題	任扶善
社會救濟	林良桐
社會保險	柯象峯
嬰兒教保機關管理法	汪明瑀

中華民國三十三年八月渝初版
中華民國三十六年三月滬三版

An Cutline of Statistioal Methods

統計方法大綱

全一冊　定價國幣七元六角
(外埠酌加運費匯費)

著者	Arkin and Colton	
譯述者	朱君毅	
發行人	吳秉常	
印刷所	正中書局	
發行所	正中書局	

(1844)

本(本)(興)　2/2—0.15