





布 利 氏

# 新式算學教科書

第 三 編

---

第 一 章

## 函數 含一元之方程

函數 變數 常數

1. 用  $i = prt$  之公式,可計算本金  $p$  以利率  $r$  在  $t$  年後所有之利息  $i$ . 若利率本金常同不變則利息  $i$  依時期  $t$  之多少而不同. 由此可見互相關聯之事中,若有一事變化,則他事亦相因而變. 因此稱時期與利息為變數,利率與本金為常數,而利息則稱為時間之函數.

一量因他量而變,吾人常見之事也. 例如人壽保險費,依於保險者之年齡而變動. 體經過之路程,依於其所經之時間而變. 圓周之長,依於其半徑而變.

有時二變數相依而變之關係,可以方程式表示之. 例如圓周之長,可以  $c = 2\pi r$  之方程式表示之. 且由此可知任與  $r$  一值即可得  $c$  之值. 因此  $c$  常稱為  $r$  之函數. 又  $c$  與  $r$  謂之變數,  $\pi$  謂之常數.

2. 常數 一記號在同一問題中,或同一討論中,始終代表同一數值者,曰常數.

### 習 題

於方程  $A = \pi r^2$ ,  $A = \frac{1}{2}bh$ ,  $d = rt$ ,  $s = \frac{1}{2}gt^2$ ,  $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ \* 中,一文字之值常依他文字或其他幾文字之值而變,試指出諸式中表示常數之記號.

3. 變數 一記號在同一問題中,用以代表各個不同之數者,曰變數.

試指出上列習題中諸方程式之變數.

4. 函數 若  $x$  與  $y$  為兩變數,而與  $x$  以一值即可限定  $y$  之值,則  $y$  稱為  $x$  之函數.

### 習 題

由下列關係,說明其一記號為他一記號或諸記號之函數.

$$1. S = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$2. A = \frac{1}{2}cr$$

$$3. A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$$4. V = \frac{1}{3}bh$$

\*  $r^2$ ,  $\frac{1}{2}bh$ ,  $rt$ ,  $16t^2$ ,  $2x+3$ , 及  $\sqrt{x^2-25}$  等式,當初用於數學時,祇僅認為表示計算之簡寫法,猶如百分法中,祇認  $p=br$  為代表「百分數等於底數乘百分率」之語而已,嗣後凡關於此種代表式,認為(1)表示計算之方略,(2)表示計算之結果,認之為計算之結果時,即可認之為可以施加,減,乘,除之數,此義詳於近世代數學.

5.  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

6.  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

7. 指出 1-6 題中之變數與常數。

5. 函數之記法 有時兩變數間之關係,\*與變數自身之關係,吾人均須注意,例如於等速運動,則行程等於速率乘時間,於墜體運動,則行程等於 16 乘時間之平方,前者可以  $d=rt$  表示之,後者可以  $d=16t^2$  表示之,但此兩式中之  $d$ , 雖同為  $t$  之函數,而非  $t$  之同類函數。

有方程  $f=2n$  表示每里 2 分之總火車費,與里數之關係,而雞蛋每個 2 分,其個數與共價之關係為  $c=2n$ 。

於上兩例,可見  $f$  與  $c$  為  $n$  之同類函數。

$x$  之函數,可以  $f(x)$  表示之,讀作  $x$  之函數,或更簡讀作  $x$  之  $f$ 。欲顯出  $x$  之兩個不同類函數,則可用他字如  $g(x)$  或  $F(x)$  分別表示之,例如在同一討論中,以  $f(x)$  代表  $3x+2$ ,則其他函數如  $\sqrt{16-a^2}$ , 可用  $F(x)$  表示之。

\*關係之意義,為彼此相依不必認為有一定之比。

† 1694 年來本之(Leibnitz)首用“Function”函數名詞於數學,惟其意義與現今所用者不同,同年十月,裴奴利極姆士(James Bernoulli)亦用函數之名詞,且與來本之同其意義,至 1698 年六月,裴奴利約翰(John Bernoulli)致書來本之,提出現今所用函數之意義,同年七月底,得來氏之答覆,深表贊同,1706 年,裴奴利約翰乃首用此名詞於其著作內,裴氏又為解釋函數之第一人,此於 1718 年在法國學院發表

斐奴利約翰及來本之，各用特別之記號表示函數，但皆非現今所用者。尤拉(Euler)在1734—35年間，於其所著之科學書中，創用 $f$ 後附括號，內寫變數，以作函數之記號。同時又有法國數學家克來阿(Clairaut)，以希臘字母代尤拉氏之 $f$ 。

6. 函數之值 若已知 $x$ 之一假定值，而欲求函數 $x^2+5x+3$ 之值，則當以 $x$ 之假定值代入此函數之變數 $x$ 。例如 $x^2+5x+3$ 以 $f(x)$ 表示之，則 $3^2+5 \cdot 3+3$ 可以 $f(3)$ 表示之。由是知 $f(3)$ 即為以3代 $f(x)$ 中 $x$ 之結果，或稱 $f(3)$ 為對於 $f(x)$ 之變數 $x=3$ 時之函數值。

### 習 題

1. 設 $f(x) = x^2 + 3x + 5$ ，求 $f(2)$ ， $f(0)$ ， $f(-1)$ ， $f(a)$ 。

$$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 = 15.$$

$$f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) + 5 = 3.$$

$$f(a) = a^2 + 3a + 5.$$

2. 設 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ，又 $F(x) = 2x^2 - 5$ ，求 $F(6) - f(2)$ 。

$$F(6) = 2 \cdot 6^2 - 5 = 67.$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

$$\therefore F(6) - f(2) = 68.$$

3. 設 $f(y) = y^3 - 3y^2 + 7y - 1$ ，求 $f(1)$ ， $f(-2)$ ， $f(0)$ 。

4. 設 $f(x) = mx^2 + nx + p$ ，求 $f(-3)$ ， $f(\frac{1}{2})$ ， $f(a)$ 。

5. 設  $f(x) = x^2 + 2x + 5$  又  $g(x) = x^2 - 3x + 2$ , 求  $f(2) + g(-1)$ ;

又求  $\frac{f(4)}{g(3)}$ .

## 一 次 函 數

7. 函數  $ax + b$  凡函數之為  $2x + 5$ ,  $\frac{1}{2}x - 7$ ,  $3x + \frac{1}{4}$  之形者, 皆歸於  $ax + b$  一類.

式中之  $a$  及  $b$  為常數,  $x$  為變數.

### 習 題

1. 問下列諸函數何者可歸於  $ax + b$  之形:

$$\frac{9}{5}C + 32; 2x^2 - 4; 30t; \frac{1}{x}; v_0 + gt; \frac{5}{9}(F - 32); 2\pi r;$$

$\cos x; 5^x$ .

2. 試舉  $ax + b$  形之函數數例.

8. 函數  $ax + b$  之圖線\* 變數  $x$  與函數  $ax + b$  之

關係, 可以圖線代表之.

例如某童於某日儲 3 元於銀行, 嗣後每週之末儲 2 元,

問某童經  $x$  週後, 共儲銀若干.

於上例題, 指明週數與儲銀之關係為

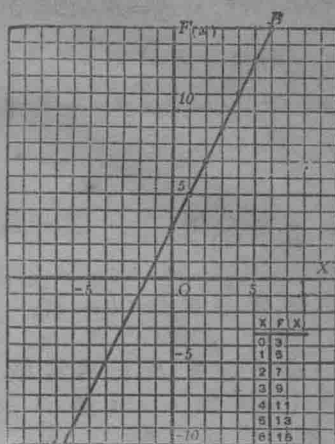
$$F(x) = 2x + 3.$$

\* 圖線解法經 1637 年笛卡兒 (Descartes) 引用, 遂成爲數學中之一種。

求  $F(x)$  及  $x$  之對應值，作成一表，以橫坐標表  $x$  之值，以縱坐標表  $F(x)$  之值，(見第一圖)

依表作點，連諸點，即得直線  $AB$ 。

9. 直線函數 函數  $ax + b$  為  $x$  之一次函數，因其圖線為一直線，故亦稱  $x$  之直線函數。



第一圖

由下述事件，證明在通常平面內之直線，皆可以方程式  $f(x) = mx + b$  代表之。

1. 設  $P$  為直線  $ABC$  上之任一點，且此線不通過原點  $O$  (見第二圖)。

則  $OQ = x$ ，又  $PQ = f(x)$ 。

以  $a$  代表  $AO$  之距，

以  $b$  代表  $BO$  之距。

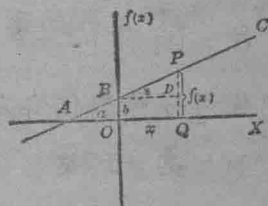
作  $BD \perp PQ$ ，

又以  $s$  代表  $\angle DBP$ ，

指明  $\tan s = \frac{DP}{BD} = \frac{f(x) - b}{x}$ 。

以  $m$  代表  $\tan s$  之值，則  $m = \frac{f(x) - b}{x}$ 。

$\therefore f(x) = mx + b$ 。



第二圖

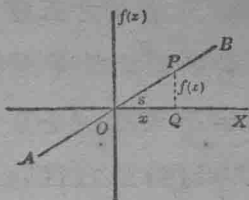


2. 設  $AB$  通過原點  $O$  如第三圖,

$$\text{則 } \tan s = \frac{f(x)}{x},$$

$$\text{或 } m = \frac{f(x)}{x},$$

$$\therefore f(x) = mx.$$



第三圖

3. 若此線平行於  $x$  軸或平行於  $f(x)$  軸則其方程式為  $f(x) = c$  或為  $x = c$ .

10. 截部 第二圖之  $a$  與  $b$  為直線  $AC$  在  $x$  軸與  $f(x)$

軸上所成之截部.

### 習 題

作下列直線函數之圖線.

1. 一圓周之長略近於 3.14 乘其直徑, 即  $c = 3.14d$ .

2. 華氏表度數比攝氏表度數之  $\frac{9}{5}$  多 32 度, 即  $F = \frac{9}{5}C +$

32.

3. 物體由靜止落下, 在  $t$  時間內之速度  $v$ , 為

$$v = gt. [g = 32 \text{ (略近)}]$$

4. 試作下列方程式之圖線:

$$f(x) = 2x + 3.$$

$$f(x) = -4.$$

$$x = 2.$$

### 正 變

11. 正變 於本書第二編, § 200, 知  $y$  依  $x$  而變, 即  $y$

與  $x$  成正比例, 或  $y$  與  $x$  正變, 或可以方程式  $y = cx$  表示之.

如云某人之工值與其工作之日數成正比例；物體等速運動所經之路程，與其所費之時間成正比例；圓周之長，與其半徑正變；可以  $p=ct$ ,  $d=ct$ ,  $l=cr$  諸方程式表示之。而稱常數  $c$  為變數之常數。變數  $p, d, l$  稱為  $t, t$  及  $r$  之一次函數。

### 習 題

試以方程式表示下列事實：

1. 球之面積，與其半徑之平方正變。
2. 圓柱之體積，與其底之半徑正變，設以其高為常數。
3. 等邊三角形之面積，與其任一邊之平方正變。
4. 一物體從真空中落下，其速率與其所經之時間正變。
5. 以力  $f$  引伸彈簧，其伸長之度，與其所施之力  $f$  正變。〔弗克氏定律 (Hooke's Law)〕
6. 鍋爐用煤之量，與鍋底面積之平方呎數正變。
7. 立方體之對角線，與其稜正變。當對角線為 8.5 時，其稜為 5；問稜為 10 時，對角線長若干？

1. 指明  $d = c \cdot e$

2. 決定變數之常數：

$$\text{因 } d = c \cdot e, 8.5 = c \cdot 5, \therefore c = \frac{8.5}{5} = 1.7.$$

3. 由是可決定對角線  $d = 1.7 \times 10 = 17$ 。

8. 用圖線指明立方體之對角線，隨其稜而變。

9. 圓之面積隨其半徑之平方而變。

若半徑為 6 呎，則面積為 113 平方呎。若半徑為  $2\frac{1}{2}$  呎，則圓之面積如何？

10. 振子振動一次所需之時間隨其長之平方而變。

設 100 公分長之振子，一秒時間振動一次，問 49 公分長之振子，振動一次需時若干？

11. 液體之重，與其體積成正比例。若 10 立方呎之水重 625 磅，問 25 立方呎之水重若干？

12. 水柱每平方吋之壓力，與水柱之高之呎數正變。設 2.5 呎高之水柱，施於每平方吋之壓力為 1.08 磅，求施於一平方吋之壓力為 1.84 磅之水柱高。

## 二 次 函 數

12. 二次函數 函數如  $\pi r^2$ ,  $s_0 + \frac{1}{2}gt^2$ ,  $3x^2 - 4x + 2$  等，皆稱為二次函數。指明此等函數，皆歸於  $ax^2 + bx + c$  之形，由是凡合於  $ax^2 + bx + c$  之形之函數，(但  $a \neq 0$ ) 皆稱為二次函數。

### 習 題

指明下列函數皆合於  $ax^2 + bx + c$  之形，又求  $a, b, c$  之值：

1.  $2 + 4x^2 - x$

4.  $x^2 - 2$

2.  $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x - x^2 - 5$

5.  $\frac{x^2}{8}$

3.  $ax^2 - mx + 2x^2 - 12$

6.  $4 \sin^2 x + 3 \sin x - 7$

13. 函數  $ax^2 + bx + c$  之圖線 於 § 9, 已知一次函數  $ax + b$  之圖線為一直線, 由本節可知二次函數  $ax^2 + bx + c$  之圖線為一曲線, 其上不能有三點同在一直線內。

## 習 題

1. 作函數  $f(x) = x^2$  之圖線。

求得  $f(x)$  對應於  $x$  在 3 與

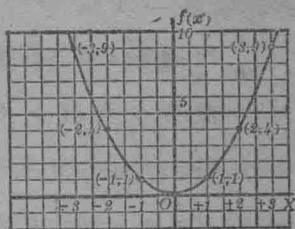
-3 間之值, 作成一表。

依表作點。

以曲線連結諸點, 即得  $f$

$(x) = x^2$  之圖線。此曲線名曰

$x$	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
+1	1
+2	4
+3	9



拋物線。

第四圖

若以極大之負數代  $x$ , 則  $f(x)$  為極大之正數, 例如  $x = -1000$ , 則  $f(x) = +1,000,000$ 。

若  $x$  逐次增大, 但常為負數, 則  $f(x)$  逐漸減少。若  $x$  近於零, 則  $f(x)$  亦漸近於零。若  $x$  逐次增加, 則  $f(x)$  亦逐次增加, 此可列表說明之如次:

$x$	$-\infty^*$	負, 增	0	正, 增	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty^\dagger$	正, 減	0	正, 增	$+\infty$

\*  $-\infty$  表示向負方無限增加。

†  $+\infty$  表示向正方無限增加。

$x=0$  之值, 名曰  $f(x)$  之零, 即對應於  $f(x)$  之值為零時  $x$  之值。

2. 於  $x$  軸上取 2 公分為單位，於  $f(x)$  軸上取  $\frac{1}{2}$  公分為單位，試作曲線  $f(x) = x^2$  之正支。

說明此圖線可用以求數之平方根。

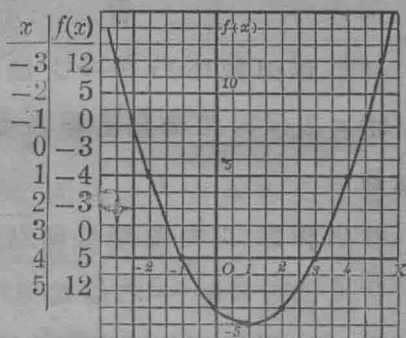
3. 說明  $f(x) = x^2$  之圖線，關於  $f(x)$  軸為對稱。

說明  $f(x)$  軸為曲線上縱坐標相同之任兩點聯線之中點垂線。

4. 作函數  $\pi r^2$  之圖線，設  $\pi = 3.14$ 。

5. 設拋一球直上天空，初速每秒 64 呎，以後速度之公式為  $v^2 = 64^2 - 64h$ ，其  $h$  為某時所達到之高。

說明  $h$  為  $v$  之二次函數，又以 64 至 0 間各種數值代  $v$ ，而作  $h = f(v)$  之圖線。



第五圖

6. 作函數  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  之圖線。

作  $f(x)$  及  $x$  之對應值表，依表作諸點如第五圖，又以曲線連結諸點，問  $x$  為 0 時， $f(x)$  之值為何？

說明此圖線可用以解  $x^2 - 2x - 3 = 0$  之方程。

求函數  $x^2 - 2x - 3$  之對稱軸。

作下列函數之圖線，並作各圖線之對稱軸。

7.  $x^2 - 6x + 5$

9.  $x^2 + 4x$

8.  $3x^2 - 11x - 4$

10.  $-x^2 + 6x - 5$

用圖線解下列各二次方程：

11.  $x^2+4x+2=0$                       13.  $x^2+x-6=0$

12.  $x^2-5x+4=0$                       14.  $4-5x-x^2=0$

## 二次以上之方程之圖線解法

14. 立方函數之圖線 函數如  $x^3-x$ ,  $x^3-6x^2+11x-6$ ,  $2x^3-3x+2$  等, 皆稱爲三次函數, 或稱立方函數。

### 習 題

1. 作函數  $f(x) = x^3 - x$  之圖線。

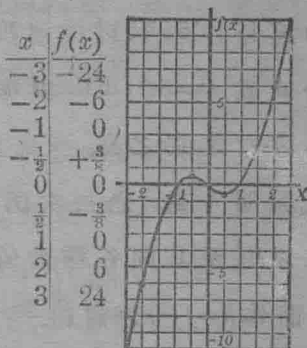
求  $x$  及  $f(x)$  之對應值, 作表如第  
六圖。

按表作點, 以曲線聯結諸點。

當  $x$  爲 0 時,  $x^3 - x$  之值爲何?

證明此圖線可用以解方程

$$x^3 - x = 0.$$



第六圖

2. 作函數  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  之圖線, 且由圖線求方程  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  之根。

3. 球之體積  $v$  爲  $\frac{4}{3}\pi r^3$ 。用圖線說明體積隨其直徑而變。

15. 高次方程之圖線 由 § 14 習題 1 與 2, 已知圖線可用以解三次方程, 然方程之高於三次者, 亦可用圖線解之。

習 題

解下列方程,而計算其根

之近似值至小數一位止.

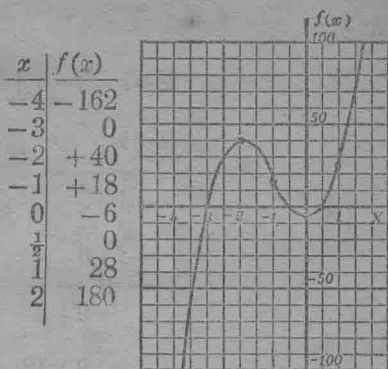
1.  $10x^3 + 29x^2 - 5x - 6 = 0.$

作函數  $f(x) = 10x^3 + 29x^2 -$

$5x - 6$  之圖線如第七圖.

由圖線決定  $x$  之近似值.

2.  $x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0.$



第七圖

綜合除法 餘數定理

16. 由假定  $x$  之種種數值而決定一函數之諸值時,以

應用綜合除法與餘數定理為最便.

17. 綜合除法: 綜合除法,可依下列以說明之.

以  $x-2$  除  $2x^3 - 7x^2 - 3x + 5.$

以常法除之,其演算如次:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 7x^2 - 3x + 5 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{2x^3 - 4x^2} \qquad \qquad 2x^2 - 3x - 9 \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{-3x^2 - 3x} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{-3x^2 + 6x} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{-9x + 5} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{-9x + 18} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{-13}
 \end{array}$$

若省去  $x$  之各次乘冪, 僅記出其係數, 則得較簡之演算如次:

$$\begin{array}{r}
 2-7-3+5 \quad | \quad \underline{1-2} \\
 2-4 \qquad \qquad 2-3-9 \\
 \hline
 -3-3 \\
 -3+6 \\
 \hline
 -9+5 \\
 -9+18 \\
 \hline
 -13
 \end{array}$$

次將各次餘數後再加入之被除數畧去不寫, 則得更簡之演算如下.

$$\begin{array}{r}
 2-7-3+5 \quad | \quad \underline{1-2} \\
 2-4 \qquad \qquad 2-3-9 \\
 \hline
 -3 \\
 -3+6 \\
 \hline
 -9 \\
 -9+18 \\
 \hline
 -13
 \end{array}$$

又因商之各係數, 依次等於被除數及各次餘數之第一係數, 故商之係數可以不記.

同理, 各部分積之第一係數亦可不記.

又因除數之第一係數恆為 1, 故亦可不記.



由是得更簡之演算如下：

$$\begin{array}{r}
 2-7-3+5 \quad | \quad \underline{-2} \\
 -4 \\
 \hline
 -3 \\
 +6 \\
 \hline
 -9 \\
 +18 \\
 \hline
 -13
 \end{array}$$

再由上法觀之，知諸部分積如  $-4, +6$  及  $+18$  皆為減數，若變除數之  $-2$  為  $+2$ ，則諸部分積之符號亦變，而部分積之為減數者，一變而為加數矣，其演算如次：

$$\begin{array}{r}
 2-7-3+5 \quad | \quad \underline{2} \\
 4 \\
 \hline
 -3 \\
 -6 \\
 \hline
 -9 \\
 -18 \\
 \hline
 -13
 \end{array}$$

上之演算，可再縮寫如次：

$$\begin{array}{r}
 2-7-3+5 \quad | \quad \underline{2} \\
 4-6-18 \\
 \hline
 2-3-9-13
 \end{array}$$

末列上聯續之最先三項(即 2-3-9)爲商之係數,其最後之一項(即-13)爲餘數,此種簡捷除法,名曰綜合除法。

18. 綜合除法之規則 若以 $x-a$ 除 $f(x)$ ,則將 $f(x)$ 之各項,依 $x$ 之遞降冪排列,其間有缺項,則命其係數爲0。

寫諸係數於一橫線上,復將第一係數寫於此橫線下。

以 $a$ 乘第一係數,而以其積加於第二係數。

逐次推行此法,至所得之積加於末係數爲止。

最後之和,即爲餘數。

以前諸項,即爲商之 $x$ 係數,而依 $x$ 之遞降冪整列者。

### 習 題

用綜合除法演算下列各題:

1.  $x^4 - 3x^3 + 4x + 2$  除以  $x - 3$ .

2.  $3x^3 - 4x + 7$  除以  $x - 1$ .

3.  $5x^3 + 2x^2 - 3$  除以  $x - 5$ .

4.  $4x^3 + x^2 - 3x - 1$  除以  $x + 2$ .

[變 $x + 2$ 爲 $x - (-2)$ ]

5.  $2x^4 + 6x - 5$  除以  $x + 1$ .

19. 餘數定理 次之習題,說明 $x = a$ 時, $f(x)$ 之值可以 $x - a$ 除 $f(x)$ 而得之。

### 習 題

1. 以 $x - 2$ 除 $f(x) = x^2 - 6x + 3$ .

由綜合除法,可以求得其商與餘數如次:

$$\begin{array}{r} 1-6+3 \mid 2 \\ \underline{2-8} \\ 1-4-5 \end{array}$$

故商爲  $x-4$ , 餘數爲  $-5$ .

2. 設  $x=2$ , 求  $f(x) = x^2 - 6x + 3$  之值.

由代入法, 得  $f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = -5$ .

可見以  $x=2$  代入  $f(x)$  所得之結果, 與以  $x-2$  除  $f(x)$  所得之結果相同.

故設  $f(x)$  爲  $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}$  則由習題 1 與 2 之結果, 可得定理如次:

若以  $x-a$  除  $f(x)$ , 則所得餘數爲  $f(a)$ .

此定理名曰餘數定理.

20. 餘數定理之證明 因被除數  $\equiv$  除數  $\times$  商 +

餘數所以  $f(x) \equiv (x-a)Q(x) + R$ , 其函數  $Q(x)$  爲商, 常數  $R$  爲餘數.

以  $a$  代  $x$ , 則  $f(a) \equiv (a-a)Q(a) + R$ ,

$$\therefore f(a) \equiv 0 \cdot Q(a) + R,$$

$$\therefore f(a) \equiv R. \quad (\text{證論})$$

21.  $f(x)$  之值 依餘數定理, 若命  $x=a$ , 則  $f(x)$  可以

$x-a$  除  $f(x)$  求得之.

### 習 題

以  $-4$  至  $+3$  間諸整數值代  $x$ , 而求下列諸函數之值:

$$1. \quad 10x^3 + 29x^2 - 5x - 6$$

用綜合除法除以  $-4$ ,

$$\begin{array}{r} 10+29-5-6 \mid -4 \\ -40+44-156 \\ \hline 10-11+39 \mid -162 \\ \therefore f(-4) = -162 \end{array}$$

依同法求  $f(-3)$ ,  $f(-2)$  等。

$$2. \quad x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

$$3. \quad 3x^3 - 4x + 7$$

以圖線法解次之方程式：

$$4. \quad x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$6. \quad x^3 + x^2 - 10x - 10 = 0$$

$$5. \quad x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

$$7. \quad x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

### 用劈因數法解二次以上之方程

22. 因數定理 於 § 19, 已知用  $x-a$  除  $f(x)$  所得之餘數為  $f(a)$ , 由是若餘數  $f(a)$  為 0, 則  $f(x)$  可被  $x-a$  恰好除盡, 而  $x-a$  為  $f(x)$  之一因數。若  $f(a) \neq 0$ , 則  $x-a$  為  $f(x)$  之一因數。

此原則稱為因數定理。

#### 習 題

§ 22 所述之原則, 可用以分解下列各多項式之因數。

$$1. \quad x^3 + 2x^2 - 9x - 18$$

若此多項式有因數  $x-a$ , 則  $a$  必能除盡 18。由是可假定  $a$  有下列各值:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 9, \pm 18$ 。

以 1 爲除數施綜合除法以求  $f(1)$ ,

$$\begin{array}{r} 1+2-9-18 \quad | \quad 1 \\ \underline{1+3-6} \\ 1+3-6-24 \end{array}$$

因  $f(1) = -24$ ,  $\therefore x-1$  非  $f(x)$  之因數。 何故?

依此可知  $f(-1) = -8$ ,  $\therefore x+1$  非  $f(x)$  之因數。

$f(2) = -20$ ,  $\therefore x-2$  非  $f(x)$  之因數。

$f(-2) = 0$ ,  $\therefore x+2$  爲  $f(x)$  之因數。 何故?

說明其他因數爲  $x^2-9$ , 且可以視爲兩數平方之較而分解之。

2.  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

因  $x$  無缺冪而各項之符號又爲正負相間, 故  $x$  之負數值不能使  $f(x)$  爲 0。 何故? 故僅可以 1, 2, 3, 6 試之。

3.  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

說明若以正數值代  $x$ , 則  $f(x) \neq 0$ 。

4.  $y^4 - 5y^3 + 5y^2 + 5y - 6$

5.  $x^3 + 3x^2y - 4y^3$

6. 若  $n$  爲整數, 則  $x-y$  爲  $x^n - y^n$  之因數。 試證之。

7. 若  $n$  爲偶整數, 則  $x+y$  爲  $x^n - y^n$  或  $x^3 - y^3$  之因數。

8. 若  $n$  爲奇整數, 則  $x+y$  爲  $x^n + y^n$  或  $x^5 + y^5$  之因數。

9. 若  $n$  為偶數, 則函數  $x^n + y^n$  無  $x+y$  或  $x-y$  形式之因數。試證之。

解下列各方程:

10.  $x^3 - 7x + 6 = 0$

此式之因數為  $(x-1), (x-2), (x+3)$ 。

$$\therefore (x-1)(x-2)(x+3) = 0$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x+3=0 \end{array} \right\} \text{皆能滿足已知方程}$$

$$\text{由是} \left\{ \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=-3 \end{array} \right.$$

11.  $y^3 - 19y - 30 = 0$

16.  $x^3 - 4x - 8x^2 + 32 = 0$

12.  $x^3 - 5x - 2 = 0$

17.  $y^3 - y^2 = 6y$

13.  $t^3 - 3t + 2 = 0$

18.  $x^3 - 1 = 0$

14.  $2y^3 - y^2 - 5y - 2 = 0$

須知此方程之根為

15.  $y^2 + \frac{1}{y^2} + y + \frac{1}{y} = 4$

1 之三個立方根。

23. 用解二次方程之法所能解之高次方程

### 習 題

解次之方程:

† 字母旁註有小記號如  $x_1$  者, 讀作“ $x$  記 1”或“ $x_1$ ”。

$$1. (x+2)^2 + 3(x+2) = 18.$$

由因數分解法,可知  $(x+2+6)(x+2-3) = 0$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$2. y^6 + 2y^3 - 80 = 0.$$

$$3. (5y-4)^2 - 2(5y-4) - 63 = 0.$$

$$4. (x^2-6x)^2 + 5(x^2-6x+20) - 136 = 0.$$

變此方程之形狀爲

$$(x^2-6x)^2 + 5(x^2-6x) + 100 - 136 = 0,$$

$$\text{即 } (x^2-6x)^2 + 5(x^2-6x) - 36 = 0.$$

$$5. 3(y^2+3y+1)^2 - 7(y^2+3y+1) + 4 = 0.$$

$$6. y^2 + y - 2 - \frac{3}{y^2 + y} = 0.$$

$$7. 2(y^2-3) + \frac{8}{y^2-3} + 17 = 0.$$

### 函 數 $\frac{c}{x}$

24. 倒變  $y$  依  $x$  而倒變,及  $y$  與  $x$  成反比例之說,若

以代數式表示之,則爲  $y = \frac{c}{x}$ . 由是,地心吸力依距離之平

方而倒變之說,可以  $f = \frac{c}{d^2}$  表示之.於此方程內,  $c$  爲變數之

常數,  $f$  爲  $d$  之函數.

### 習 題

試以方程式表示下述事項:

1. 擺在一秒間振動之次數，與其長之平方根倒變。
2. 從火爐攝取之熱量，與其相距之程之平方倒變。
3. 圓筒中氣體之容積，與其所受之壓力倒變。
4. 一定量之空器在一定溫度時，施諸容器面壁之壓力與其體積成反比例。(此即波以爾定律 Boyle's Law.)

解答下列問題：

5. 凡物所受之光度，與其光源相距之程之平方倒變。設一隔屏，由距燈光 15 呎之地，移近至距燈光 5 呎，問其光度增加若干？

6. 39.1 吋長之擺，一秒鐘振動一次，問一秒鐘振動四次之擺長若干？(用習題 1 解之。)

7. 壓力 5 磅時，圓筒內氣體之容積為 1 立方呎，問壓力增至 20 磅時，其體積若干？(應用習題 4 解之。)

25.  $\frac{c}{x}$  之圖線 第八圖左邊之表，為  $c=1$  時  $x$  與

$f(x)$  之對應值。

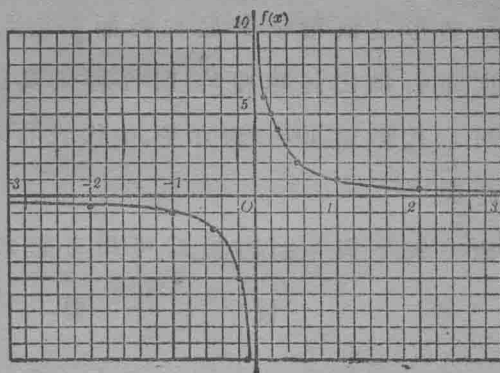
依表作點，又以曲線連結諸點如第八圖，即成兩個分支，各與兩軸不相接觸，但此兩分支皆從同一方程  $f(x) = \frac{1}{x}$  求得，故兩支謂之互成同式之曲線，此種曲線，名曰雙曲線。

指明若  $x$  之值增加，則  $\frac{1}{x}$  之值減少。

若  $x$  之值儘量增加，則  $\frac{1}{x}$  之值可小於無論何數。



$x$	$f(x)$
4	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{2}$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{3}$	5
$\frac{1}{6}$	6
...	...
$-\frac{1}{6}$	-6
$-\frac{1}{5}$	-5
$-\frac{1}{4}$	-4
$-\frac{1}{3}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
-4	$-\frac{1}{4}$



第 八 圖

若  $x$  之正數值漸減，則  $\frac{1}{x}$  漸增。若  $x$  之值儘量減小，則  $\frac{1}{x}$  可使大於任何大數，此種事實，常以  $\frac{1}{0} = \infty$  表示之。但此式並非表示以 0 除 1 有此  $\infty$  之值，乃表示當  $x$  逐漸減小至漸近於 0，以 0 為極限時， $\frac{1}{x}$  增加至於無限也。

## 習 題

1. 作函數  $f(x) = \frac{12}{x}$  之圖線。
2. 作函數  $f(x) = \frac{8}{x}$  之圖線。
3. 用函數  $\frac{c}{x}$  之圖線，求  $\frac{c}{0}$  之意義。
4. 設  $x$  從  $-\infty$  變至  $+\infty$ ，試討論  $\frac{c}{x}$  之變化。

26. 聯變 三角形之面積，依其底與高之乘積而變，因稱三角形之面積依其底與高而聯變。

若火車行動之速率平均，則行程依其速率與時間而聯變。此可以代數式  $d=rt$  表示之。 $d$  代表行程， $r$  代表速率， $t$  代表時間。

如云  $y$  依  $x$  與  $z$  而聯變，則可用方程式  $y=cxz$  表示之。

### 習 題

下述諸事項，試各以方程式表示之：

1. 火車所經過之行程，依其速率與時間而聯變。
2. 水施於其容器之底之壓力，依底之面積與水之深度而聯變。
3. 風施於牆之壓力，依牆之面積與風之速率之平方而聯變。
4. 圓柱之體積，依其底面積與高而聯變。兩圓柱之高之比為 1:2，試比較其體積。

27. 正變與倒變 若  $y = \frac{cx}{z}$ ，則  $y$  與  $x$  正變，而與  $z$  倒變。

### 習 題

下述諸事項，試各以方程式表示之：

1. 一木柵之支柱之值，與木柵之長正變，而與支柱中間之距離倒變。

2. 電流之阻力與電線之長正變,而與線之橫截面倒變。

3. 凡各電池所運電流恆與其動電力成正比例,而與其輪道之阻力成反比例。(歐姆氏定律 Ohm's Law.)

解下列諸題:

4. 設  $y$  與  $x$  正變,而與  $z$  倒變.又若  $x=7, z=1$ , 則  $y=14$ . 若  $x=84, z=6$  則  $y$  爲若干?

5. 利息依本金與利率而聯變.設有本金 \$2000, 年利百分 5, 於若干年數內生利息 \$400. 若有本金 \$2500, 年利百分  $5\frac{1}{2}$ . 問於同年數內可生利息若干?

## 提 要

28. 下列習題乃集合本章所授之名詞,記號,及各種定則而成者也:

1. 試述下列各名詞之意義.

函數	截部
變數	正變
常數	倒變
函數之值	聯變
直線函數,二次函數	正變與倒變
立方函數	拋物線
函數之零	雙曲線
橫坐標,縱坐標	綜合除法

2. 解釋下列符號之意義。

$$f(x), F(x), -\infty, +\infty.$$

3. 說明作  $f(x)$  圖線之法，設  $f(x)$  爲一次函數，二次函數，立方函數。

4. 說明綜合除法對於求函數值之用法。

5. 說明含一個未知量之二次方程及高次方程之解法。

I. 用圖線法。

II. 用劈因數法。

6. 說明凡直線皆可用方程式  $f(x) = mx + b$  表示之。

7. 試述餘數定理，又證明之。

8. 試述因數定理。

9. 試作  $y = x^2 - 2x$  之圖線 (威斯康新大學)\*

10. 地面上一點所受之吸力，依該點與地心距之平方而倒變，設地面上某物體所受之吸力爲 9 磅，若昇高此物體至某處則所受吸力減爲 4 磅，求此時物體距地面之高。

(取地球之半徑爲 4000 哩) (哈佛大學)

11. 取光度相等之三燈，置於正方形室之三隅，說明其第四隅所受之光度爲中心之  $\frac{5}{12}$ ，設已知某點所受之光度恆依該點與燈光相距之程之平方而倒變。(哈佛大學)

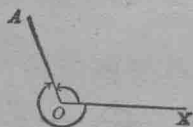
\* (威斯康新大學) 表明此題取之於該大學之試驗題中也。其他準此。

## 第二章

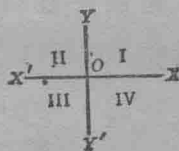
## 三角函數

29. 一般之角 本書第二編已授銳角之正弦、餘弦、正切等函數之意義，且此等函數於該編 § 257 曾用以解直角三角形，但任意三角形中，時有鈍角，故欲討論任意三角形之解法，必須研究大於  $90^\circ$  角之角函數。

30. 角者迴轉量也 角  $XOA$  (第九圖) 可視為某直線從  $OX$  之位置轉至  $OA$  之位置， $OX$  線名曰角之首線， $OA$  線名曰角之終線。若此線從  $OX$  之位置作反時鐘向迴轉至  $OA$ ，則  $XOA$  為正角。若  $OX$  作時鐘向迴轉至  $OA$ ，則所成之角  $XOA$  為負角。



第九圖

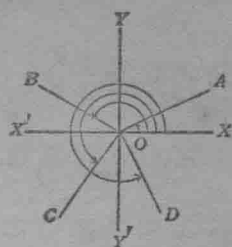


第十圖

31. 象限 若兩直線垂直相交如第十圖，則交點  $O$  周圍之平面，分為四分，每分稱曰一象限。各象限之名稱如次： $XOY$  為第一象限； $YOX'$  為第二象限； $X'OY'$  為第三象限； $Y'OX$  為第四象限。

一角之在第一、第二、第三、第四象限，依其終線之在第一、第二、第三、第四象限而定，但其首線必在  $OX$  之上。

故  $0^\circ$  至  $90^\circ$  間諸角在第一象限,  $90^\circ$  至  $180^\circ$  間諸角, 在第二象限,  $180^\circ$  至  $270^\circ$  間諸角, 在第三象限,  $270^\circ$  至  $360^\circ$  間諸角, 在第四象限(第十一圖)。



## 習 題

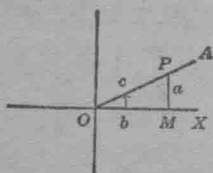
第十一圖

1. 第十一圖之  $\angle XO A$  在第幾象限, 又  $\angle XO B$ ,  $\angle XO C$ ,  $\angle XO D$  在第幾象限。

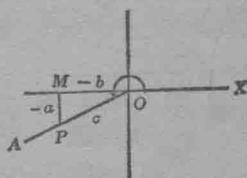
2. 作下列諸角, 且指明其所在之象限:

$20^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $315^\circ$ ,  $545^\circ$ ,  $-40^\circ$ ,  $-220^\circ$ 。

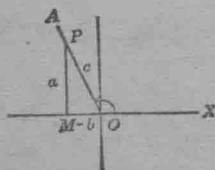
32. 三角函數 設  $XO A$  (第十二圖至十五圖) 爲已知角, 從終線  $O A$  上任一點  $P$ , 作  $PM$  垂直於首線  $O X$  (或  $O X$  之延長線), 則成一直角三角形  $M O P$ 。



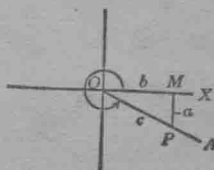
第十二圖



第十四圖



第十三圖



第十五圖

$\angle XOA$  之正弦，即直角三角形  $MOP$  內對頂角  $O$  之邊與弦之比，即  $\frac{MP}{OP}$ 。

$\angle XOA$  之餘弦，即直角三角形  $MOP$  內頂角  $O$  之隣邊與弦之比，即  $\frac{OM}{OP}$ 。

$\angle XOA$  之正切，即頂角  $O$  之對邊與隣邊之比，即  $\frac{MP}{OM}$ 。

$\angle XOA$  之餘切，即頂角  $O$  之隣邊與對邊之比，即  $\frac{OM}{MP}$ 。

$\angle XOA$  之正割，即弦與頂角  $O$  之隣邊之比，即  $\frac{OP}{OM}$ 。

$\angle XOA$  之餘割，即弦與頂角  $O$  之對邊之比，即  $\frac{OP}{MP}$ 。

此稱爲三角函數之比之定義。

學者試說明此等比何以稱爲函數。

### 33. 各象限內角函數之符號 角之對邊在首

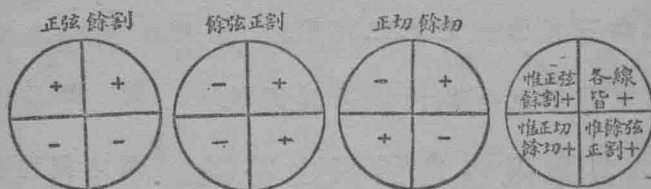
線  $OX$  之上者，命之爲正，在首線  $OX$  之下者，命之爲負。

角之隣邊向  $O$  之右者爲正，向  $O$  之左者爲負，弦則常視爲正。

以希臘字母  $\alpha$  (挨爾發 *alpha*) 表示  $\angle XOA$  之角度，又以  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , 表示  $\triangle MOP$  三邊之長，則 § 32 所述者，可以下表統括之：

函 數 \ 象 限	I	II	III	IV
正 弦 $\text{Sin } a \dots\dots\dots$	$+\frac{a}{c}$	$+\frac{a}{c}$	$-\frac{a}{c}$	$-\frac{a}{c}$
餘 弦 $\text{Cos } a \dots\dots\dots$	$+\frac{b}{c}$	$-\frac{b}{c}$	$-\frac{b}{c}$	$+\frac{b}{c}$
正 切 $\text{Tan } a \dots\dots\dots$	$+\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$	$+\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$
餘 切 $\text{Cot } a \dots\dots\dots$	$+\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$+\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$
正 割 $\text{Sec } a \dots\dots\dots$	$+\frac{c}{b}$	$-\frac{c}{b}$	$-\frac{c}{b}$	$+\frac{c}{b}$
餘 割 $\text{Cosec } a \dots\dots\dots$	$+\frac{c}{a}$	$+\frac{c}{a}$	$-\frac{c}{a}$	$-\frac{c}{a}$

各象限內諸函數之符號，必須完全記憶，下列各圖形，可用以記憶諸函數之正當代數符號。



第 十 六 圖

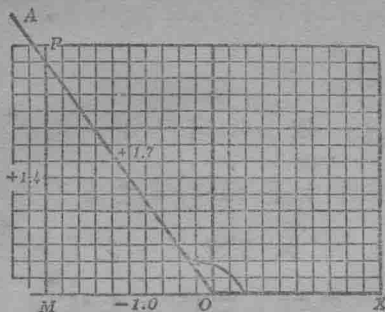
### 34. 用圖線求三角函數之值 於方格紙上作

已知角並作三角形  $MOP$  如第十七圖，量三角形之諸邊，而決定已知角之函數之代數符號及數值。

### 習 題

1. 求  $\sin 125^\circ$  之值(第十七圖)。





第七圖

2. 求下列諸角之函數值：

$140^\circ, 220^\circ, 245^\circ, 315^\circ$ .

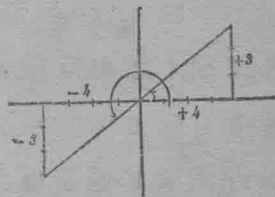
35. 函數名稱之簡寫法  $a$  角之正弦,  $a$  角之餘弦, 及  $a$  角之正切等語, 常簡寫作  $\sin a, \cos a, \tan a, \cot a, \sec a, \operatorname{cosec} a$ .

36. 已知一角之任一函數值, 求作其角

## 習題

1. 已知  $\tan a = \frac{3}{4}$ , 求作  $a$  角.

指明正切為  $\frac{3}{4}$  之角有二, 一在第一象限, 一在第三象限(第十八圖). 試求作此兩角, 並用分度器量之.



第十八圖

2. 已知  $\cos A = \frac{2}{3}, \tan x = -3, \cot a = \sqrt{3}$ , 求作  $A, x$ , 及  $a$  諸角.

3. 已知  $\tan x = \frac{3}{4}, \cos y = \frac{1}{5}$ , 求作  $x$  與  $y$  兩角.

4. 已知  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ ,  $\sin \alpha = +\frac{1}{3}$ ,  $\tan \alpha = 3$ ,  $\tan \alpha = -3$ ,  $\cot \alpha = 4$ , 求作  $\alpha$  角.

37. 反函數 依 § 36, 若已知一角之任一三角函數值, 則此角即可求作. 由是,  $\sin x = \frac{1}{2}$  之方程式, 可以決定  $x$  乃正弦為  $\frac{1}{2}$  之角或弧.\* 又“正弦為  $y$  之角  $x$ ”之語, 可以簡寫作  $x = \sin^{-1}y$  或  $x = \text{弧} \sin y$  讀作“反正弦”與“弧正弦”.

試述下式之意義:

$$x = \tan^{-1}3, \quad y = \text{弧} \cos(-\frac{1}{2}), \quad A = \text{弧} \sin \frac{3}{4}.$$

38. 已知一角之任一函數值, 求其他諸函數之值

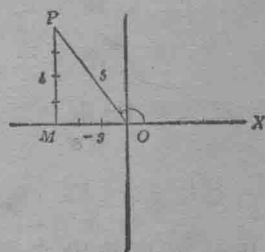
### 習 題

1. 已知  $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ , 又  $\alpha$  在第二象限內, 試求  $\alpha$  之他函數.

作  $\triangle MOP$  如第十九圖, 使  $OM = -3$ ,  $MP = 4$ . 計算  $OP$ .

2. 設  $\cot x = \frac{3}{4}$ , 而  $x$  在第三象限內, 試求  $x$  之他函數.

3. 已知  $\tan x = \frac{3}{4}$ , 又  $x$  在第三象限內, 試求其他函數之值.



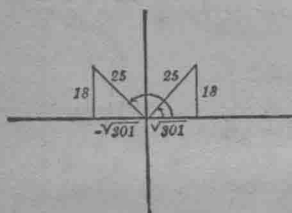
第十九圖

\* 因圓心角之度數與其兩邊所截弧之度數相同, 故三角函數, 亦可視為弧函數.

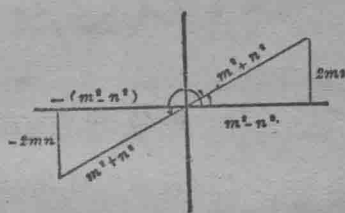
4. 設  $\sin a = \frac{18}{25}$ , 試求  $\cot a$  (第二十圖).

5. 設  $\angle A$  在第三象限內, 而  $\tan A = \frac{13}{6}$ , 試求  $\sec A$ , 及  $\sin A$ .

6. 設  $\sec x = \frac{3}{2}$ , 試求  $x$  之諸函數值.



第二十圖



第二十一圖

7. 設  $\tan x = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$  (見第二十一圖), 試求  $\cos x$ .

8. 設  $\sin a = \frac{2a}{1+a^2}$ , 試求  $\cos a$ .

9. 設  $\tan a = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ , 試求  $\sin a$ .

10. 設  $x = \text{弧} \sin y$ , 試求  $\tan x$ , 而以  $y$  項表示之.

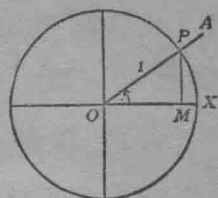
### 由 $0^\circ$ 至 $360^\circ$ 間諸角函數之變化

39. 以線代表三角函數 三角函數為兩邊之

比, 故可用線段之圖線法表示之. 由此法, 可見函數依於其

角而變化

40. 以線代表正弦函數及餘弦函數 設  $\angle XO A$  (第二十二圖) 爲任意角, 以半徑等於 1, 以  $O$  爲圓心, 作一圓如第二十二圖。



第二十二圖

半徑爲 1 之圓, 名曰單位圓。

從  $OA$  線與單位圓周之交點  $P$ , 作  $PM \perp OX$ 。

以  $\alpha$  代  $\angle XO A$ , 則得  $\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{1} = MP$ , 即  $MP$  之量度同於  $\sin \alpha$ , 故線段  $MP$ , 可用以代表  $\sin \alpha$ 。

依此,  $\cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM$ , 即  $OM$  之量度同於  $\cos \alpha$ , 故  $OM$  可用以代表  $\cos \alpha$ 。

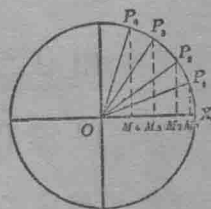
### 習 題

作第一、第二、第三、第四象限內之角, 而以線段表示其正弦與餘弦之值。

41. 正弦餘弦函數之變化 於第二十三圖,  $M_1 P_1, M_2 P_2$ , 等表示  $\sin \alpha$ , 又  $OM_1, OM_2$ , 等表示  $\cos \alpha$ 。

若  $\alpha$  減小, 則  $\sin \alpha$  減小, 而  $\cos \alpha$  增大。當  $OP$  與  $OX$  密合時,  $\alpha = 0$ ,  $\sin 0^\circ = 0$ ,  $\cos 0^\circ = 1$ 。

若  $\alpha$  從  $0^\circ$  增至  $90^\circ$ , 則  $\sin \alpha$  增加, 而  $\cos \alpha$  減小, 但皆爲正。

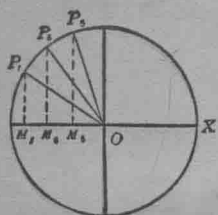


第二十三圖

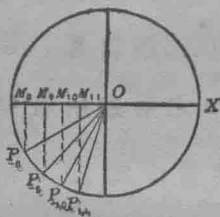
當  $\alpha = 90^\circ$  時,  $MP$  與  $OP$  密合, 故  $\sin 90^\circ = +1$ , 而  $\cos 90^\circ = 0$ .

若  $\alpha$  從  $90^\circ$  增至  $180^\circ$ , 則  $\sin \alpha$  從 1 減至 0, 又  $\cos \alpha$  從 0 減至  $-1$  (第二十四圖).

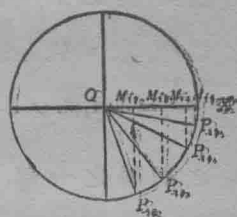
若  $\alpha$  從  $180^\circ$  增至  $270^\circ$ , 則  $\sin \alpha$  從 0 減至  $-1$ , 又  $\cos \alpha$  從  $-1$  增至 0 (第二十五圖).



第二十四圖



第二十五圖



第二十六圖

若  $\alpha$  從  $270^\circ$  增至  $360^\circ$  則  $\sin \alpha$  從  $-1$  增至 0, 又  $\cos \alpha$  從 0 增至 1 (第二十六圖).

下列之表, 指示當  $\alpha$  為特別值時,  $\sin \alpha$  與  $\cos \alpha$  之值. 但  $\alpha$  小於  $360^\circ$ , 或最大僅能等於  $360^\circ$ :

函數 \ 角	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
正弦 Sin.....	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
餘弦 Cos.....	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

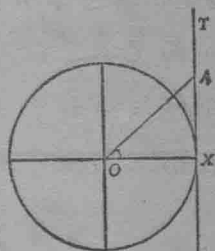
正弦函數與餘弦函數, 不能大於  $+1$ , 亦不能小於  $-1$ .

### 習 題

1. 設  $x$  從  $0^\circ$  增至  $360^\circ$ , 試述  $\sin x$  之變化, 以圖形說明之.

2. 設  $x$  從  $0^\circ$  增至  $360^\circ$ , 試述  $\cos x$  之變化, 以圖形說明之。

42. 以線代表正切函數及正割函數 設第二十七圖之  $\angle XO A$  為任意角, 以半徑等於 1, 以  $O$  為圓心, 作一圓如第二十七圖, 從  $X$  作  $XT$  為  $O$  圓之切線, 以  $\alpha$  代  $\angle XO A$ , 則得  $\tan \alpha = \frac{XA}{OX} = \frac{XA}{1} = XA$ , 即  $\angle XO A$  之兩邊所截得過  $X$  之切線之一部, 其量度與  $\tan \alpha$  相同, 故  $XA$  可以代表  $\tan \alpha$ .



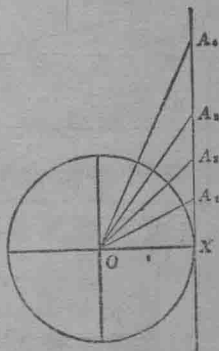
第二十七圖

依此,  $\sec \alpha = \frac{OA}{OX} = \frac{OA}{1} = OA$ , 即  $OA$  之量度與  $\sec \alpha$  同, 故  $OA$  可用以代表  $\sec \alpha$ .

43. 正切函數與正割函數之變化 若  $\alpha$  減小, 則  $XA$  亦減小. (見第二十八圖). 若  $\alpha = 0^\circ$ , 則  $XA = 0$ , 即  $\tan \alpha = 0$ .

若  $\alpha$  從  $0^\circ$  漸增至  $90^\circ$  則  $\tan \alpha$  亦漸增.

若  $\alpha$  漸漸接近於  $90^\circ$ , 則  $XA$  增加無極限. 由是, 當  $\alpha = 90^\circ$  時,  $\tan \alpha$  之值為無窮大. 此常以  $\tan 90^\circ = +\infty$  表示之. 但此式並非表示  $90^\circ$  有一正切, 乃表示當  $\alpha$  漸漸接近於  $90^\circ$ , 以  $90^\circ$  為極限時,  $\tan \alpha$  仍為正, 而增加至無窮大也.

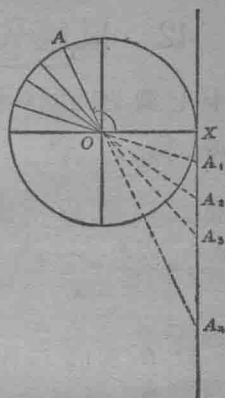


第二十八圖

指明若  $\alpha$  從  $0^\circ$  增至  $90^\circ$ , 則  $\sec \alpha$  從 1 增至  $+\infty$ .

指明第二十八圖  $\sec \alpha$  之符號與  $\cos \alpha$  之符號相同.

若  $\alpha$  在第二象限如第二十九圖, 則  $\tan \alpha$  可以  $\angle AOX$  之首線  $OX$  及其終線  $AO$  之延長線所截得切於  $X$  之切線之一部表示之. 設  $XA_1, XA_2, XA_3, \dots$  在  $OX$  之下, 可知第二象限內之  $\tan \alpha$  為負. 若  $\alpha$  在第二象限內逐漸減小至近於  $90^\circ$ , 則  $\tan \alpha$  逐漸增加至無極限, 而常為負. 此可以  $\tan 90^\circ = -\infty$  表示之. 若  $\alpha$  漸近於  $180^\circ$ , 則  $\tan \alpha$  漸近於 0.



第二十九圖

### 習 題

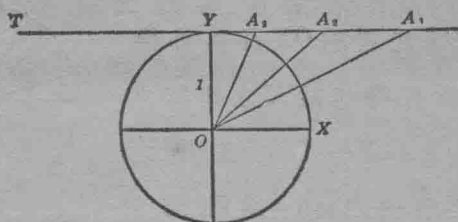
1. 說明若  $\alpha$  從  $90^\circ$  變至  $180^\circ$ , 則  $\sec \alpha$  從  $-\infty$  變至  $-1$ .
2. 說明若  $\alpha$  從  $180^\circ$  變至  $270^\circ$ , 則  $\tan \alpha$  從 0 變至  $+\infty$  又  $\sec \alpha$  從  $-1$  變至  $-\infty$ .
3. 若  $\alpha$  從  $270^\circ$  變至  $360^\circ$ , 則  $\tan \alpha$  從  $-\infty$  變至 0; 又  $\sec \alpha$  從  $+\infty$  變至  $+1$ .

下表指示當  $\alpha$  從  $0^\circ$  變至  $360^\circ$  時,  $\tan \alpha$  及  $\sec \alpha$  之變化.

函 數 \ 角	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
正切 Tan	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
正割 Sec	+1	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$	+1

## 44. 以線代表餘切函數及餘割函數 設

$\angle XO A$  (第三十圖) 爲任意角。



第三十圖

以  $O$  爲圓心，作一單位圓，過圓周上一點  $Y$ ，作  $O$  圓之切線  $YT$ 。

指明  $\angle XO A = \angle Y A O$ 。

以  $\alpha$  表示  $\angle XO A$ 。

指明  $\cot \alpha = \frac{YA}{OY} = \frac{YA}{1} = YA$ ，即  $OY$  與  $OA$  所截得過  $Y$  之切

線之一部，與  $\cot \alpha$  有相同之量度數值。

依此指明  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OA}{OY} = \frac{OA}{1} = OA$ 。

故  $OA$  與  $\operatorname{cosec} \alpha$  有相同之量度數值，而  $OA$  可用以代表  $\operatorname{cosec} \alpha$ 。

若  $\alpha$  爲鈍角，則  $A$  點在  $Y$  之左，故  $YA$  爲負。

設  $\alpha$  在第三象限內，試說明  $YA$  爲正。

設  $\alpha$  在第四象限內，試說明  $YA$  爲負。



## 習題

說  $\alpha$  從  $0^\circ$  增至  $360^\circ$ , 試述  $\cot \alpha$ , 與  $\operatorname{cosec} \alpha$  之變化, 以圖形說明之。

45. 從  $0^\circ$  至  $360^\circ$  間諸角函數之變化表

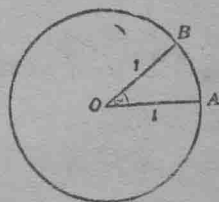
角 \ 函數	$0^\circ$ 至 $90^\circ$	$90^\circ$ 至 $180^\circ$	$180^\circ$ 至 $270^\circ$	$270^\circ$ 至 $360^\circ$
正弦 $\sin \dots$	0 至 +1	+1 至 0	0 至 -1	-1 至 0
餘割 $\operatorname{cosec} \dots$	$+\infty$ 至 +1	+1 至 $+\infty$	$-\infty$ 至 -1	-1 至 $-\infty$
餘弦 $\cos \dots$	+1 至 0	0 至 -1	-1 至 0	0 至 +1
正割 $\sec \dots$	+1 至 $+\infty$	$-\infty$ 至 -1	-1 至 $-\infty$	$+\infty$ 至 +1
正切 $\tan \dots$	0 至 $+\infty$	$-\infty$ 至 0	0 至 $+\infty$	$-\infty$ 至 0
餘切 $\cot \dots$	$+\infty$ 至 0	0 至 $-\infty$	$+\infty$ 至 0	0 至 $-\infty$

## 三角函數之圖線

46. 徑度法 測角法有二：一為度分秒法；一為徑度法。度分秒法即用  $\frac{1}{360}$  周角為單位角，學者已久知之，今當專論徑度法。

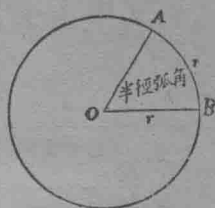
設  $\alpha$  為  $\angle AOB$  之角度 (第三十一圖), 以其角頂  $O$  為中心, 作一單位圓。

因  $\alpha$  可以其兩邊所截之弧量之, 故  $\widehat{AB}$  之長, 可用以代表  $\alpha$  之值, 此處測角之單位, 為長等於 1 之弧, 或為長等於圓半徑之弧所對之圓心角, 此種測角法, 名曰徑度法, 或曰弧度法。



第三十一圖

47. 半徑弧角 徑度法測角之單位，名曰半徑弧角，即長等於半徑之弧所對之角也（見第三十二圖）。凡量角之單位未標明者，其單位必為半徑弧角，如云  $\angle ABC = \frac{1}{2}$ ，即謂  $\angle ABC$  為半徑弧角之  $\frac{1}{2}$ 。



第三十二圖

48. 徑度法與度分秒法之關係 設第三十二圖之  $\angle BOA$  為半徑弧角。

因半圓之長為  $\pi r$ ，又  $\widehat{AB} = r$ ，

所以  $\pi$  半徑弧角 =  $180^\circ$ ，

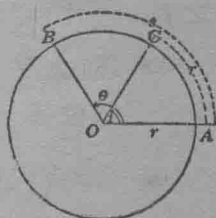
$$\pi = 3.14159 \text{ (略近值)}.$$

$$\therefore \text{一半徑弧角} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57.3 \text{ (略近值)}.$$

指明  $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)$  半徑弧角。

49. 角、弧、圓半徑之關係 設以希臘字母  $\theta$  (賽搭 theta) 代表已知角之半徑弧角數 (第三十三圖)。

則  $\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r}$ ，或  $\theta = \frac{s}{r}$ ，即一角所含之半徑弧角之數，等於此角所對之弧除以圓半徑。



第三十三圖

指明  $s = r\theta$ 。

又以語言表示方程式  $s = r\theta$ 。

$\widehat{AB}$  代表  $AB$  弧。

## 習 題

1. 化  $10^{\circ}15'$  爲徑度.

$$10^{\circ}15' = (10\frac{1}{4})^{\circ} = (10\frac{1}{4}) \left( \frac{\pi}{180} \right) \text{ 半徑弧角} = .19 \text{ 略近值.}$$

2. 化下列諸角爲半徑弧角:  $10^{\circ}$ ,  $8^{\circ}30'$ ,  $-50^{\circ}$ ,  $58^{\circ}$ .

3. 一角之徑度爲  $\frac{4}{3}$ , 試求其角度.

$$\frac{4}{3} \text{ 半徑弧角} = \frac{4}{3} \left( \frac{180}{\pi} \right)^{\circ} = 76^{\circ}.39 \text{ (略近值).}$$

4. 化下列諸角爲度數:  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{1}{3}$ , .752, 3.14.

5. 化下列諸角爲半徑弧角:  $0^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$ ,  $90^{\circ}$ ,  $180^{\circ}$ ,  $270^{\circ}$ ,  $360^{\circ}$ .

6. 以度數表示下列諸角:  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $2\pi$ ,  $\pi$ ,  $\frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{\pi}{15}$ .

7. 求下列函數之值:  $\sin \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \frac{3\pi}{2}$ ,  $\cos \pi$ ,  $\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}$ .

8. 圓之半徑爲 3 呎, 其圓心角爲  $1\frac{1}{2}$ , 求此角所對之弧之長.

9. 圓之半徑爲 10 呎, 圓心角爲  $80^{\circ}$ , 求此角所對之弧之長.

10. 某角所對之弧爲圓半徑之  $\frac{2}{3}$ , 求此角之徑度.

11. 證明圓之扇形之面積爲  $\frac{r^2\theta}{2}$ , 設  $r$  爲圓之半徑,  $\theta$  爲

圓心角之徑度.

12. 證明圓之弓形之面積爲  $\frac{r^2\theta}{2} - \frac{r^2\sin\theta}{2}$ .

13. 圓之半徑為10呎,求其2呎之弧所對之圓心角,而以度數表示之,又以半徑弧角表示之。

50. 三角函數之圖線 欲作三角函數之圖線,須先求角與其函數之對應值,作成一表,然後按表作點,聯點作曲線,其法與以前作函數之圖線同,下列諸圖,乃以簡捷方法所作三角函數之圖線。

51. 正弦曲線 於橫線  $OX$  上(第三十四圖)取合宜之距離作點,以代表  $\alpha = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \dots, \frac{\pi}{2}, \dots, \pi$ , 等,但  $\pi = 3.14$ 。又於所得之諸點作縱線,以代表  $\sin \alpha$  之對應距離。逐次聯結各縱線之頂點作曲線,即為正弦曲線。



第 三 十 四 圖

習 題

根據第三十四圖以解決下列問題:

1. 當  $\alpha$  從  $0^\circ$  變至  $360^\circ$ ,  $\sin \alpha$  之變化如何?
2. 正弦之變化在何地為最快,在何處為最慢?
3. 此曲線如何能表示  $\sin \alpha$  之值經過  $2\pi$  或  $360^\circ$  必循環?
4. 正弦之最大值為何?最小值為何?

52. 週期函數 當變數值逐次增大而函數之值經過某定期再重複發現者,此函數名曰週期函數。

## 習 題

1. 於第三十四圖,試說明正弦函數之週期為 $2\pi$ ,即說明  $\sin(a+2\pi) = \sin a$ .
2. 說明  $\sin(-a) = -\sin a$ .
3. 說明  $\sin(\pi-a) = \sin a$ .

此等習題,提示關於正弦函數之某項事實,其證明在 §§ 58-63.

53. 餘弦曲線 第三十五圖所示之曲線為餘弦曲線,欲作此曲線,須仿照作正弦曲線之方法 (§ 51),更宜注意者,餘弦曲線與正弦曲線形狀相同,方向不同。

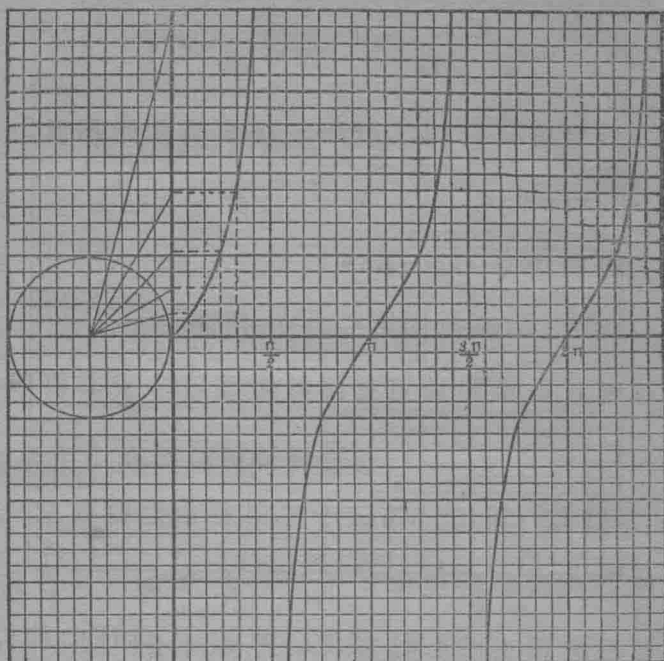


第 三 十 五 圖

## 習 題

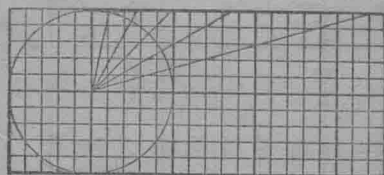
仿照 §§ 51, 52 中討論正弦曲線之法,作餘弦曲線之討論。

54. 正切曲線 作正切曲線,如第三十六圖,仿§51之方法而討論之。

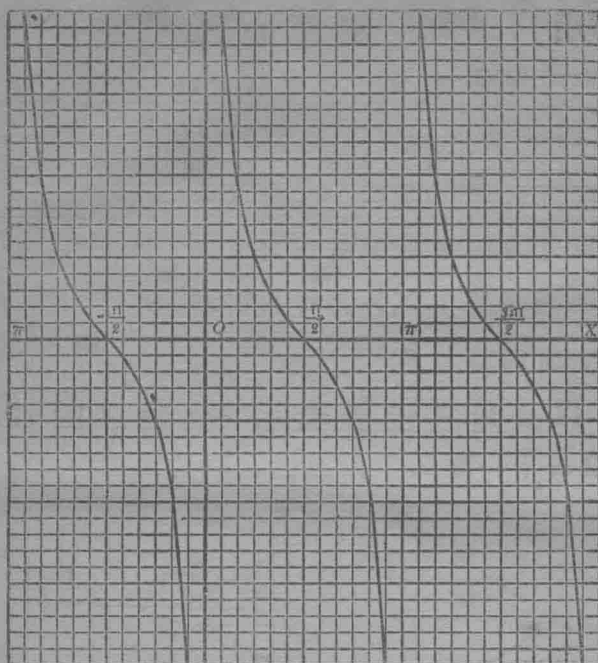


第三十六圖

55. 餘切曲線 用第三十七圖之方法,作餘切曲線,如第三十八圖,又仿討論正弦曲線,餘弦曲線,正切曲線之方法而討論之。

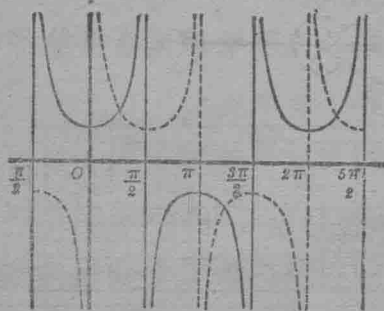


第三十七圖



第三十八圖

56. 正割曲線與餘割曲線 此種曲線詳示於第三十九圖，其作法與 §§ 54 與 55 之方法略同。圖中實線表示正割曲線，虛線表示餘割曲線。

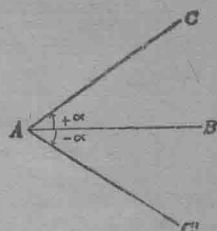


第三十九圖

### 負角之三角函數

#### 57. 正角及負角 轉第四十圖

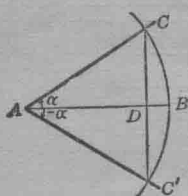
之  $AB$  線繞  $A$  而行，成  $BAC$  角，若轉  $AB$  向反對之方向而行，則成  $BAC'$  角。常法，凡線繞行之方向與時鐘針行之方向逆者，所成之角為正角，若與時鐘針行之方向順者，則為負角。



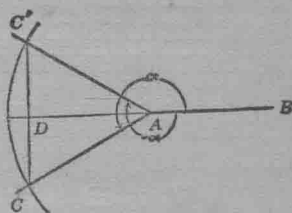
第四十圖

#### 58. 以 $\alpha$ 角之函數表示 $-\alpha$ 角之函數 設以

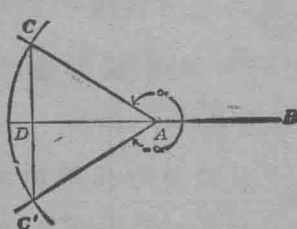
$\alpha$  表示第四十一至四十四圖之  $\angle BAC$ ，則  $\angle BAC' = -\alpha$ 。



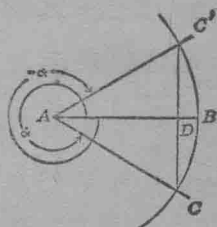
第四十一圖



第四十三圖



第四十二圖



第四十四圖

以  $A$  為中心，以半徑等於 1，作  $\widehat{CC'}$

作弦  $CC'$  交  $AB$  於  $D$ ，則  $AD$  為  $\widehat{CC'}$  之中點垂線。

\*  $\widehat{CC'}$  代表  $CC'$  弦，或線段  $CC'$ 。



說明第四十一至四十四圖之  $DAC$  與  $DAC'$  爲兩相合三角形。

$$\therefore \triangle DAC \cong \triangle DAC'$$

$$\sin a = DC$$

$$\sin(-a) = DC' = -DC = -\sin a$$

依此,  $\cos(-a) = AD = \cos a$

$$\therefore \frac{\sin(-a)}{\cos(-a)} = \frac{-\sin a}{\cos a}$$

$$\therefore \tan(-a) = -\tan a \quad \text{何故?}$$

### 習 題

1. 說明
  1.  $\cot(-a) = -\cot a$
  2.  $\sec(-a) = \sec a$
  3.  $\operatorname{cosec}(-a) = -\operatorname{cosec} a$

2. 下列諸角之函數,試各以正角之函數表示之:

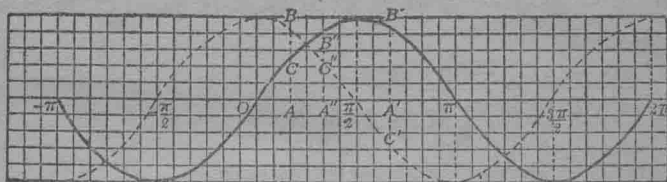
$$-30^\circ, -45^\circ, -60^\circ.$$

由 § 58 之習題,可見  $-a$  之三角函數,其數值與  $a$  之三角函數同,但除餘弦及正割外,其符號均相反。

59. 由 § 34,可見任意角之函數值,可作圖線求之,然小於  $90^\circ$  角之函數值,即不作圖線,亦可從函數表中求得之,設欲用表求大於  $90^\circ$  角之函數值,則必須先求小於  $90^\circ$  角之函數值與大於  $90^\circ$  角之函數值之關係,使大於  $90^\circ$  之角可用小於  $90^\circ$  之角表示之,此種關係,今當依次述之。

以  $a$  角之函數表示  $(\frac{\pi}{2} \pm a)$  諸角之函數

60. 從函數之圖線導出之關係 設以同一之尺度作正弦曲線與餘弦曲線, 命  $OA = a$ ,  $OA' = 90^\circ + a = \frac{\pi}{2} + a$ , 但  $a$  小於  $90^\circ$ , 若將任一曲線移過  $\frac{\pi}{2}$  之距離, 則可使兩曲線彼此密合, 即  $AB$  與  $A'B'$  密合。



第四十五圖

故  $\sin(90^\circ + a) = \cos a \dots\dots\dots (1)$

依此, 若正弦曲線向右移過  $\frac{\pi}{2}$  之距離, 更依  $Ox$  為軸而迴轉  $180^\circ$ , 則可與餘弦曲線密合。

由是  $AC$  與  $A'C'$  密合。

故  $\cos(90^\circ + a) = -\sin a \dots\dots\dots (2)$

$\therefore \tan(90^\circ + a) = -\cot a$  何故?  $\dots\dots\dots (3)$

且  $\cot(90^\circ + a) = -\tan a$  何故?  $\dots\dots\dots (4)$

說明  $\sec(90^\circ + a) = -\operatorname{cosec} a \dots\dots\dots (5)$

又  $\operatorname{cosec}(90^\circ + a) = \sec a \dots\dots\dots (6)$

因  $A'B' = A''B''$ ,

故  $\sin(90^\circ - a) = \sin(90^\circ + a) = \cos a \dots\dots\dots (7)$

因  $A''C'' = A'C'$ ,

$$\text{故 } \cos(90^\circ - a) = -\cos(90^\circ + a) = +\sin a \dots\dots\dots (8)$$

$$\therefore \tan(90^\circ - a) = \cot a \quad \text{何故?} \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{又 } \cot(90^\circ - a) = \tan a \quad \text{何故?} \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{說明 } \sec(90^\circ - a) = \operatorname{cosec} a \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{又 } \operatorname{cosec}(90^\circ - a) = \sec a \dots\dots\dots (12)$$

試作正切函數，餘切函數之圖線，而證明(3)(4)兩式之關係。

(1)至(12)之關係，可概括之如次。

$(90^\circ - a)$ 角之函數等於  $a$  角之餘函數。

$(90^\circ + a)$ 角之函數，其數值與  $a$  角之餘函數之數值同，但

除正弦與餘割外，其符號皆相反。

61. § 60 所述諸關係，可證明之於次。

於第四十六圖，以  $a$  表示  $\angle XAB$ ，則  $\angle ABC = \frac{\pi}{2} - a$

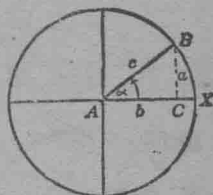
$$\therefore \frac{a}{c} = \sin a = \cos \left( \frac{\pi}{2} - a \right)$$

$$\frac{b}{c} = \cos a = \sin \left( \frac{\pi}{2} - a \right)$$

$$\frac{a}{b} = \tan a = \cot \left( \frac{\pi}{2} - a \right)$$

$$\frac{b}{a} = \cot a = \tan \left( \frac{\pi}{2} - a \right)$$

$$\frac{c}{b} = \sec a = \operatorname{cosec} \left( \frac{\pi}{2} - a \right)$$



第四十六圖

$$\frac{c}{a} = \operatorname{cosec} a = \sec\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

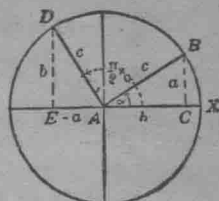
於第四十七圖，設  $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ，則

$$\angle XAD = \left(\frac{\pi}{2} + a\right).$$

證明  $\triangle CAB \cong \triangle EDA$ .

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{b}{c} = +\cos a.$$

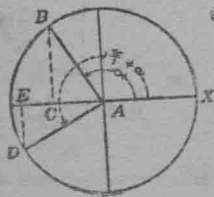
$$\text{又 } \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{-a}{c} = -\frac{a}{c} = -\sin a.$$



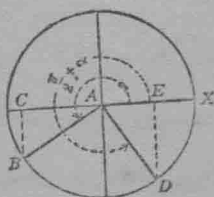
第四十七圖

### 習 題

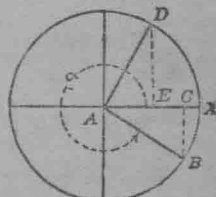
1. 證明 § 60 中(3)至(6)之關係。
2. 求下列諸角之函數值。  
120°, 135°, 150°.
3. 證明  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$ ，又  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$ ，設
  1.  $a$  在第二象限。(第四十八圖)
  2.  $a$  在第三象限。(第四十九圖)
  3.  $a$  在第四象限。(第五十圖)



第四十八圖



第四十九圖



第五十圖

以  $a$  角之函數表示  $(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm a)$  諸角之函數

62. 下列諸習題,乃表明依 §§ 60 與 61 之原理,可將  $(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm a)$  角之任一函數,以  $a$  角之函數表示之,由是所得之結果,對於造三角表極為重要,因大於  $45^\circ$  之角,皆可變為  $(n \cdot 90^\circ \pm a)$  之式,但  $a$  為小於  $45^\circ$  之角,故任一角之函數值,皆可以小於  $45^\circ$  之正角之函數值表示之,而任一角之函數值,可由  $0^\circ$  至  $45^\circ$  之函數表中求得。

## 習 題

試說明下列諸式之理由:

1. 1.  $\sin(180^\circ - a) = \sin[90^\circ + (90^\circ - a)] = \cos(90^\circ - a) = \sin a$
2.  $\cos(180^\circ - a) = \cos[90^\circ + (90^\circ - a)] = -\sin(90^\circ - a) = -\cos a$
3.  $\tan(180^\circ - a) = -\tan a$       5.  $\sec(180^\circ - a) = -\sec a$
4.  $\cot(180^\circ - a) = -\cot a$       6.  $\operatorname{cosec}(180^\circ - a) = \operatorname{cosec} a$
2. 1.  $\sin(180^\circ + a) = -\sin a$       4.  $\cot(180^\circ + a) = \cot a$
2.  $\cos(180^\circ + a) = -\cos a$       5.  $\sec(180^\circ + a) = -\sec a$
3.  $\tan(180^\circ + a) = \tan a$       6.  $\operatorname{cosec}(180^\circ + a) = -\operatorname{cosec} a$
3. 1.  $\sin(270^\circ - a) = \sin[90^\circ + (180^\circ - a)] = \cos(180^\circ - a) = -\cos a$
2.  $\cos(270^\circ - a) = -\sin a$       5.  $\sec(270^\circ - a) = -\operatorname{cosec} a$
3.  $\tan(270^\circ - a) = \cot a$       6.  $\operatorname{cosec}(270^\circ - a) = -\sec a$
4.  $\cot(270^\circ - a) = \tan a$

4. 1.  $\sin(270^\circ + a) = -\cos a$       4.  $\cot(270^\circ + a) = -\tan a$   
 2.  $\cos(270^\circ + a) = \sin a$       5.  $\sec(270^\circ + a) = \operatorname{cosec} a$   
 3.  $\tan(270^\circ + a) = -\cot a$       6.  $\operatorname{cosec}(270^\circ + a) = -\sec a$
5. 1.  $\sin(360^\circ - a) = -\sin a$       4.  $\cot(360^\circ - a) = -\cot a$   
 2.  $\cos(360^\circ - a) = \cos a$       5.  $\sec(360^\circ - a) = \sec a$   
 3.  $\tan(360^\circ - a) = -\tan a$       6.  $\operatorname{cosec}(360^\circ - a) = -\operatorname{cosec} a$
6. 1.  $\sin(360^\circ + a) = \sin a$       4.  $\cot(360^\circ + a) = \cot a$   
 2.  $\cos(360^\circ + a) = \cos a$       5.  $\sec(360^\circ + a) = \sec a$   
 3.  $\tan(360^\circ + a) = \tan a$       6.  $\operatorname{cosec}(360^\circ + a) = \operatorname{cosec} a$

63. 由上列諸習題得次之結果：

- 1.\*  $[90^\circ\text{-之偶數倍} \pm a]$  之函數，其數值等於  $a$  角之同函數之數值。
2.  $[90^\circ\text{-之奇數倍} \pm a]$  之函數，其數值等於  $a$  角之對應餘函數之數值。
3. 所得結果之符號，等於  $(n \cdot 90^\circ \pm a)$  所在象限內之原函數之符號。

### 習 題

以正銳角之函數表示下列各函數：

1.  $\sin 580^\circ$

$$\sin 580^\circ = \sin(6 \cdot 90^\circ + 40^\circ) = -\sin 40^\circ$$

---

\* 當  $a$  不為銳角時，此諸原則亦屬正確。若  $a$  大於  $90^\circ$ ，則符號之正負，視  $a$  為銳角時， $(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm a)$  角所在之象限而定。

2.  $\cos 315^\circ$                       6.  $\sin 240^\circ$   
 3.  $\sin(-196^\circ)$                     7.  $\tan(-410^\circ)$   
 4.  $\tan(2\frac{7}{12}\pi)$                     8.  $\cos 120^\circ$   
 5.  $\cos 120^\circ$                         9.  $\sin 300^\circ$

以小於  $45^\circ$  之正角函數, 表示下列各函數:

10.  $\cos(-428^\circ)$                     13.  $\tan(-65^\circ)$   
 11.  $\sin(-84^\circ)$                     14.  $\sin 1,420^\circ$   
 12.  $\operatorname{cosec} 834^\circ$                     15.  $\cot 1,330^\circ$

求下列各式之值:

16.  $\cos 180^\circ - \sec^2 45^\circ - 4 \sin 30^\circ + \sqrt{2} \sin 45^\circ + \cos 180^\circ \operatorname{cosec} 90^\circ$   
 17.  $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3}$   
 18.  $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{5\pi}{3}$   
 19. 簡約  $\tan(\pi - x)$ ;  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ ;  $\sin(270^\circ - x)$ ;  
 $-\cot(90^\circ + x)$ ;  $\cos(-1,230^\circ)$

## 提 要

64. 學者必須明瞭下列各名詞之意義:

首線	正弦	正割 餘割
終線	餘弦	反三角函數
象限	正切	徑度法
三角函數	餘切	半徑弧角

65. 下列習題,乃供學者溫習本章所授之重要事件者:

1. 試述四象限內各角函數之符號.
2. 說明用圖線求已知角之三角函數之法.
3. 說明由已知之三角函數值,求作此角之法.
4. 解明由一角之一函數值求其他函數值之法.
5. 一角由  $0^\circ$  變至  $360^\circ$ , 試用直線表示法, 討論此角函數之變化.
6. 求下列各角之正弦, 餘弦值:  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ, 360^\circ$ .
7. 證明度分秒法與徑度法之關係.
8. 證明求圓弧之長之方程式為  $s=r\theta$ ,  $\theta$  為圓心角所含半徑弧角之數.
9. 作諸三角函數之圖線, 而說明各圖線所指示之事項.
10. 以  $a$  之函數表示  $(-a)$  之函數.
11. 以  $a$  之函數表示  $\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right)$  之函數.
12. 說明以小於  $45^\circ$  之正角之函數, 表示任意角之函數之法.



## 第 三 章

### 一 次 方 程

#### 含一個未知量之一次方程

66. 準式 由 § 7, 可見凡含  $x$  之一次函數, 皆可寫為  $ax+b$  之式, 依此, 凡含一個未知量之一次方程, 皆可化為  $ax+b=0$  之形, 此種形狀, 稱為含一個未知量之一次方程之準式.

#### 習 題

化下方程成準式  $ax+b=0$  之形:

$$1. \quad \frac{7x+9}{4} - \left(x - \frac{2x-1}{9}\right) = 7.$$

施減法,  $\frac{7x+9}{4} - x + \frac{2x-1}{9} = 7.$

以 36 乘各項,  $(3x+81-36x+8x-4)=252.$

簡約之, 即得準式  $35x-175=0.$

$$2. \quad \frac{1}{5}\left(3y - \frac{1}{4}\right) + \frac{y}{3} - 6\left(\frac{1}{4} - y\right) = 1.$$

$$3. \quad y - \{3y - [4y - (3y - 1)]\} = 1.$$

$$4. \quad (2-y)(3-y) = (1-y)(5-y).$$

$$\dagger 5. \quad (2+y)(2y+1) + (2-y)(2y+1) - 7y = 0^*.$$

$$6. \quad (8y+3)^2 - 3y(13y+9) - (5y+2)^2 = 0.$$

\* 凡問題與習題前作有 † 之記號者, 可從略.

$$7. \quad \frac{13}{z-5} + \frac{3}{4} = \frac{65}{2z-10}.$$

$$10. \quad \frac{a}{x-b} - \frac{b}{x-a} = 0.$$

$$8. \quad ax + b^2 = bx + a^2.$$

$$\dagger 11. \quad (a+b)y = 2a - (a-b)y.$$

$$12. \quad (x-a)^2 - (x-b)^2 = c^2.$$

$$19. \quad \frac{y}{y+1} - \frac{3y}{y+2} + 2 = 0.$$

$$13. \quad (x-a)(x-b) = (x-c)(x-d).$$

67. 一次方程之解法 從方程  $ax+b=0$  之兩端各

減去  $b$  而以  $a$  除之, 則得

$$x = \frac{-b}{a}.$$

此可以語言述之如次:

一次方程之準式之根, 可以未知數之係數除常數之負值而求得之。

### 習 題

解下列各方程:

$$1. \quad 51\left(\frac{y}{5} - 3\right) + .17(y-2) = 3.4y.$$

$$2. \quad 9.9 + \frac{7.2y - 5.5}{5} = 3.3y - .1y.$$

$$3. \quad 2\left(\frac{2a^2 - b^2}{a}\right) + b = 2y - \frac{b}{a}(3y - 4b).$$

$$14. \quad \frac{9}{x-7} - \frac{9}{x-2} = \frac{5}{x-8} - \frac{5}{x+1}.$$

$$5. \quad \frac{5}{y+2} - \frac{2}{4-y^2} = \frac{2}{y-2}.$$

$$\text{變} - \frac{2}{4-y^2} \text{ 爲 } + \frac{2}{y^2-4}.$$

$$6. \frac{2x-2m}{m-n} - 2\frac{(m-n)x-m^2}{m^2-n^2} + \frac{m}{m-x} = 0.$$

$$\dagger 7. \frac{3}{z+1} - \frac{z+1}{z-1} = \frac{z^2}{1-z^2}.$$

$$8. \frac{2(y-7)}{y^2+3y-28} + \frac{2-y}{4-y} = \frac{y+3}{y+7}.$$

$$\dagger 9. \frac{3z+2}{z^2+z} + \frac{2(z-5)}{1-z^2} = \frac{z-3}{z^2-z}.$$

$$10. \frac{2y+7}{6y+4} - \frac{15}{8-18y^2} = \frac{3y-5}{9y-6}.$$

$$\dagger 11. \frac{2y-1}{2y+1} - \frac{8}{1-4y^2} = \frac{2y+1}{2y-1}.$$

$$12. \frac{5a-3y}{a-3b} - 4 = \frac{y-7a}{3a-b}.$$

$$\dagger 13. \frac{m+n}{x} + \frac{1}{m+n} = \frac{m-n}{x} + \frac{1}{m-n}.$$

$$\dagger 14. \frac{n^2}{my} - \frac{3n-3m}{y} - \frac{1}{m} = \frac{m^2}{ny} - \frac{1}{n}.$$

### 歸於一個未知量之一次方程之問題

68. 解次之問題：

1. 分 60 為兩部，以小部除大部，得商為 2，餘數為 3。求兩部各為若干。

2. 於分數  $\frac{7}{18}$  之分子分母各減何數，始得  $\frac{1}{3}$ ？

3. 兩數之比為  $a/b$ ，若前者增  $m$ ，後者減  $n$ ，則其結果之比為  $3/2$ 。求兩數。

4. 於 7, 15, 12, 24 各加何數，則四數成等比例？

5. 某工程  $A$  作之, 4 日成,  $B$  作之, 5 日成. 問  $A$  與  $B$  合作幾日成?

6. 某工程  $A$  作之, 16 日成;  $B$  作之, 18 日成;  $C$  作之, 15 日成. 問三人合作, 幾日可成?

7. 某工程  $A$  作之, 50 日成;  $B$  作之, 30 日成,  $A$  與  $B$  合作 6 日後,  $A$  一人完成其工, 問  $A$  一人作若干日?

8. 某工程  $A, B, C$  三人合作, 30 日成工; 但  $B$  所作之工為  $A$  所作之  $\frac{2}{3}$ , 及  $C$  所作之又  $\frac{2}{3}$ , 問此工程一人獨作, 各需若干日?

9. 一水池裝甲乙兩水管, 甲管能於兩小時內注滿此池; 乙管能於三小時內注滿此池. 問甲乙二管同開, 須幾小時注滿此池?

10. 甲車每小時行 30 哩. 甲車開行 21 分鐘後, 乙車以每小時 36 哩之速率追之. 問二車何時相遇? 又二車何時始相隔 4 哩?

11. 某人遊歷至某地, 去時每點鐘行 18 哩, 歸途比去路近  $6\frac{1}{2}$  哩, 每點鐘行 17 哩, 而較去時尚少費 20 分鐘, 求兩路之長.

12. 某人在靜水中划船, 每小時可行 8 哩. 今在流水中順流划行 5 哩, 又逆流而返, 回時適為去時之二倍, 求水流行之速.

13. 流水之速為每時  $4\frac{1}{2}$  哩, 某人在靜水中划船之速為

每時 $8\frac{2}{3}$ 哩。若此人於26小時內往復於某段河流中，求逆流時船行之速。

14. 某人工作若干日，得工資90元，若每日少得工資75仙，則須多作工10日方能得90元，求作工之日數。

15. 某童以銀一元購鉛筆若干枝，若鉛筆每打漲價5仙，而復以一銀元購之，則少得12枝，求每打之原價。

16. 甲乙丙三人，共分某款，甲較乙多得\$20，丙較乙少得\$20，而全數較丙所得之4倍多\$25，問三人各得若干。

17. 分\$5330為甲乙兩部，甲部生百分之五之利息為乙部生百分之四利息之二倍，求甲乙二部各若干。

18. 一車前輪周9尺，後輪周12尺，問前輪較後輪多轉5次時，車行幾尺？

19. 某人十年後之年齡為十年前之年齡之二倍，問現年若干？

20. 有橘一箱，買價為每打銀15仙，取去5打後，餘者每個售銀5仙，共獲利30仙，問箱中原有橘若干？

21. 某主人與雇工訂20日之工約，條件如下：作工一日，給工資2元，休工一日，罰銀1元，20日後工人得工資34元，求休工之日數。

22. 二位數字之和為8，原數較單位數之17倍多2，求此數。

23. 二位數字之十位數為6，若將兩數字之次序顛倒，則較原數多27，求原數。

24. 圓周之長為  $2\pi r$  ( $r$  為半徑,  $\pi$  之近似值為 3.14), 設兩圓周之比為 3:4, 而一半徑較他半徑長 3, 求兩圓之半徑。

25. 某三角形三內角之比為 2:3:4, 求各角之度數。

26. 兩小兒用 8 呎長之竿擡重 56 磅之籃, 籃懸於距竿之中點 1 呎之處, 兩兒所負重量之比為 5:3, 求兩兒所負之重。(施於槓杆諸力之代數和為 0, 則槓杆平均。)

27. 長 24 呎, 重 966 磅之鋼條, 置於以兩輪所支之軸上而移動, 又用人力支其一端, 若輪軸距鋼條之中點 2 呎, 求一端所支之重。

鋼條之重可認為 966 磅重之貨懸於鋼條之中點。

28. 有水與酒精之混合液 12 加倫 (Gallon), 其中酒精佔百分之二十五, 問欲造成含酒精百分之十之混合液, 須加水若干?

29. 水與安母尼亞之混合液一夸 (Quart), 其中安母尼亞佔百分之二十, 問欲造成含安母尼亞百分之十之混合液須加水若干?

30. 求三點四點鐘間時針分針相合之時。

31. 求八點九點鐘間時針分針相反對之時。

32. 求五點六點鐘間時針分針成直角之時。

33. 若圓之半徑增加三吋, 則其面積增加 60 平方呎, 求原半徑之長。

34. 若正方形之各邊增加 2 吋, 則其面積增加 16 平方吋, 求正方形之邊長.

35. 金 19 磅, 銀 10 磅, 稱於水中, 各減輕 1 磅, 今有一金銀混合塊稱於空氣中重 80 磅, 稱於水中重  $72\frac{1}{2}$  磅, 問其中含有金銀各若干?

36. 某工程 A 作之  $a$  日成, B 作之  $b$  日成, 問 A, B 合作幾日可成? 用此結果以解問題 5.

37. 若圓之半徑增加  $a$  呎, 則其面積增加  $b$  平方呎, 求原半徑之長. 用所得之結果以解問題 33.

38.  $a, b, c, d$  四數, 須各加若何相同之數, 方可配成比例? 用所得之結果以解問題 4.

39. 解方程  $F = \frac{9}{5}C + 32$  以求  $C$ .

40. 解方程  $s = \frac{n}{2}(a+l)$  以求  $l$ .

41. 解方程  $s = \frac{lr-a}{r-1}$  以求  $a$ .

42. 解方程  $l(W+w') = l'W'$  以求  $w'$ .

43. 解方程  $PV = pv(1 + \frac{t}{273})$  以求  $t$ .

44. 解方程  $\frac{V+v}{V} = \frac{b}{b-p}$  以求  $V$ .

45. 解方程  $C = \frac{mE}{R+mr}$  以求  $r$ .

46. 解方程  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$  以求  $f_2$ .

69. 史略 含一個未知量之一次方程之理論，發源最早，紀元前 1700 年，希臘古籍有名為亞米斯算書者，內有一章問題之解法，稱為集合計算 (Hau-computation)，其中有兩例題如次：

I. 集合某數之  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  及某數，成 33。

II. 某數加其  $\frac{2}{3}$ ，減去其和之  $\frac{1}{3}$ ，餘 10。

問題 I 之意義為——

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + x = 33.$$

問題 II 之意義為——

$$(x + \frac{2}{3}x) - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10.$$

紀元前 1700 年或 3400 年，埃及人已能解決此種問題，然其方法實較現今所用者為笨。古代數學由埃及傳至希臘，此種未知量之計算法，是否包括在內，不得而知。然含有未知量之一次方程之問題，經歷若干年代，許多研究，始有今日。而第柯番佗士 (Diophantus) (三世紀至四世紀間) 實居其功。然稽諸古籍，知第氏之法，亦非出自創造。不過使法則趨於完備而已，今將第氏之法則概述如下：

一式之兩端，含有同一未知量之同乘羈，而係數不同，必由同類項中減去同類之項，使成兩項而相等。

若式之一端或兩端有某項為負，則必於兩端同加某項 (演算一)，使兩端所含之項皆為正。於是由同類項減同類項 (演算二) 至每端僅存一項為止。



今以例說明其方法如下：

$$8x - 11 - 2x + 5 = x - 4 + 3x + 10$$

$$\text{演算一} \begin{cases} 8x + 5 + 4 = x + 3x + 10 + 11 + 2x \\ 8x + 9 = 6x + 21 \end{cases}$$

$$\text{演算二} \begin{cases} 8x - 6x = 21 - 9 \\ 2x = 12 \end{cases}$$

此書問題計算多歸於  $ax^m = b$  之形(但  $m=1$ )。印度人引用負數之觀念，實起於第氏之先。以故第氏之演算一，印人已不復用。印人用減去相似項一語與第氏用同類項相減一語相同。以考古家之眼光觀察之。可知印度曾受希臘文化之影響也。

阿拉伯人繼起研究方程之理論，其受希臘數學之影響極大。惟墨守第氏之演算一及演算二之方法，不能澈底了解。阿拉伯人名演算一為 *Aldschebr*，演算二為 *Mukâbala*。吾人總稱之為移動與聯合。(Transposing and combining)。代數學(Algebra)之名，即由此出。可知阿拉伯亦近代學術之策源地也。

### 含兩個未知量之一次方程

70. 含兩個未知量之一次方程之圖線 含兩個未知數之方程如  $2x + 4y = 1$  中，一未知數可視為他一未知數之函數。

$$\text{由是, } y = \frac{1-2x}{4}, \quad x = \frac{1-4y}{2}.$$

若  $ax+by=c$ , 則  $y=\frac{c-ax}{b}$ ,  $x=\frac{c-by}{a}$ .

指明  $y$  爲  $x$  之一次函數, 又  $x$  爲  $y$  之一次函數.

由 § 8, 知一次函數之圖線爲一直線, 故表示  $y=\frac{c-ax}{b}$  之

直線, 亦可稱爲  $ax+by=c$  之圖線.

### 習 題

作下列方程之圖線:

1.  $2x+y=5$ .

令  $x=0$ , 則  $y=5$ ; 令  $y=0$ , 則  $x=2.5$ .

依上列數值作點, 過諸點作一直線.

2.  $3x+7y=42$ .

4.  $5x=27-2y$ .

3.  $x-18=-3y$ .

5.  $4-3x-y=0$ .

71. 方程系之圖線解法 能同時滿足兩個方程之未知數之一組數值, 卽爲方程系之解答. 因含兩未知數之一次方程之圖線爲一直線, 而兩直線僅有一個公共點, 否則兩線相重, 故兩個一次方程系祇能有一個解答, 而兩直線之交點之坐標, 卽爲兩方程之解答.

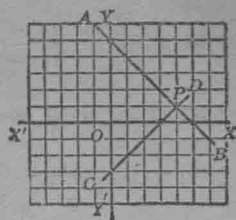
### 習 題

用圖線解方程系:

1. 
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$$

於  $x+y=5$  之式, 若  $x=0$ , 則  $y=5$ ; 若  $y=0$  則  $x=5$ .

$x$  及  $y$  之兩對值,可決定兩點.通過此兩點之直線  $AB$ , (第五十一圖) 即代表方程  $x+y=5$ . 依同法作  $x-y=3$  之直線  $CD$ . 兩線之交點  $P$  之坐標  $(4,1)$  即為欲求之解答.



第五十一圖

即方程系  $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$  之解答為  $(x, y) = (4, 1)$ .

2.  $\begin{cases} x+y=4 \\ y-x=2 \end{cases}$

4.  $\begin{cases} 3x+y=9 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} 3y+x=14 \\ 2y-5x=-19 \end{cases}$

5.  $\begin{cases} 6x-5y=14 \\ 7x+2y=32 \end{cases}$

72. 用行列式解一次方程系 於含兩個未知數之一次方程系,其含未知數之諸項,可以移至方程式之一端,而不含未知數之諸項,可以移至他端.集合同類項,即得準式如次:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

欲消去  $y$ , 則以  $b_1$  乘第一式, 又以  $b$  乘第二式. 由是得方程

$$\begin{cases} ab_1x+bb_1y=cb_1 \\ a_1bx+b_1by=c_1b \end{cases}$$

由第一式減第二式, 以  $x$  之係數除兩端, 則

$$x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$$

$$\text{依此得 } y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$$

此兩式可視為解兩個方程系之公式。

$cb_1 - c_1b$ ,  $ab_1 - a_1b$  及  $ac_1 - a_1c$ , 各為表示兩積之差之式, 此等式, 名曰行列式\*。

行列式  $cb_1 - c_1b$  可以記號代之如次:

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

即從  $cb_1$  之積減去  $bc_1$  之積。

\* 1693年四月二十八日, 來本之教羅畢德爾(L'Hôpital)書中, 即發表以行列式解方程之要點。其法雖與今稍異, 然其為用行列式之第一人, 則可斷言也。來氏又注意於由序列及組合定理, 決定因子及積之符號諸理論。此外則無他深造, 即其同時之人亦然。除1700年數學雜誌中發現其一種解釋以外, 更不見其有他著作。迄1750年於葛蘭茂(Cramer)所著之曲線分析論附錄中, 其說明含  $n$  個未知量之  $n$  個方程系之解法。且說明序列與組合對於此解法之應用, 其能力乃為人所信服。

裴紹脫(Bézout)(1730年—83年)與文覃蒙(Vandermonde)(1735年—96年)二人, 皆嘗盡力於行列式。辣潑來斯(Laplace)發明此式之應用法。拉果蘭諾(Lagrange)(1736年—1813年)用之以解解析幾何題。哥斯(Gauss)於1801年, 大加研究, 遂得改良其式。行列式之名, 則始於可西(Cauchy)(1789年—1857年), 又有喬可別者, (Jacobi)(1804年—51年)證完其理。至於論此術之課本, 則有白粟阿司切(Brioschi)(1854年), 鮑而爾(Baltzer)(1857年)施蘭德(Scott)(1880年)及謬爾(Muir)(1882年)所著各書云。

同樣  $ab_1 - a_1b$ ,  $ac_1 - a_1c$  可記爲

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \text{ 及 } \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

故方程系

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

之解答爲

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}.$$

由上式可見——

1. 兩分母相同,且第一行之數爲  $x$  之係數,第二行之數爲  $y$  之係數,故兩分母容易記憶。
2. 代表  $x$  之分數之分子,即以常數項  $c$  與  $c_1$  替換分母之  $x$  係數而得。
3. 代表  $y$  之分數之分子,即以常數項  $c$  與  $c_1$  替換分母中之  $y$  係數而得。

### 習 題

解下列方程系:

$$1. \begin{cases} 4x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = 7 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}{4 \cdot 9 - 6 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 9 - 6 \cdot 7}{36 - 12} = \frac{81 - 42}{24} = \frac{39}{24} = \frac{13}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 7 \\ 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}{24} = \frac{4 \cdot 7 - 9 \cdot 2}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\text{故 } (x, y) = \left(\frac{13}{8}, \frac{5}{12}\right)$$

$$2. \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x + y = 9 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x = 53 + y \\ 19x - 17y = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} ax - by = c \\ dx - ey = f \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} ax - by = 0 \\ x - y = c \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} kx + ly + n = 0 \\ 3x - 4y = 4n \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{5y}{6} = 1 \\ \frac{5x}{6} - \frac{3y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x + 4my = 8mn \\ \frac{x}{7m} - 7y + 3n = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} ax + \frac{b}{y} = 2ab \\ bx + \frac{a}{y} = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 4ab \\ (a-b)x - (a+b)y = 2a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} a(x+y) + b(x-y) = a \\ (a+b)x - (a-b)y = b \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 2ac \\ (a+c)x - (a-c)y = 2ab \end{cases}$$

### 73. 矛盾方程及同值方程 含兩未知量之兩

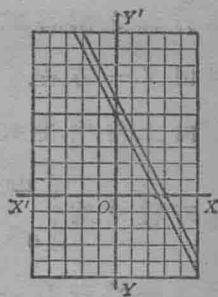
個一次方程之圖線為兩直線，而此兩線交點之坐標即為兩方程之解答，學者當已知之。然兩線未必一定相交，因兩線有互相平行者，有彼此密合者，今分別論之於下：

1. 如作方程系  $\begin{cases} 2x+y = 5 \\ 6x+3y = 18 \end{cases}$  之圖線，則得兩平行線，如

第五十二圖。故知此兩方程無公共解答。此種無公共解答之方程系名曰矛盾方程。

若以行列式解上列之矛盾方程，則得

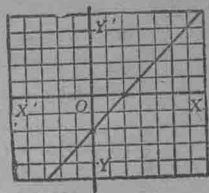
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 18 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{0}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6}{0}.$$



第五十二圖

因以 0 除 -3 或 6 為不合理，可知此方程系確無解答。

2. 如作方程系  $\begin{cases} x-y=2 \\ 5x-5y=10 \end{cases}$  之圖線,



則知此二式之圖線為同一直線,如五十三圖,故此兩方程之任一方程之解答,即為其他方程之解答,此種方程,名曰同值方程。

第五十三圖

凡同值方程必有解答多個。

若以行列式解上列之同值方程,則得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-10+10}{-5+5} = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{0} = \frac{0}{0}.$$

因以 0 乘任何數,結果仍為 0,故  $\frac{0}{0}$  可以代表任何數,而此方程之解答為不定,可知若將一方程乘以一常數,即可導出又一方程。

由上兩例,得次之結果:

方程系為  $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$  之形者,若行列式  $ab_1-a_1b$  不等於

零,則解答祇有一個,且僅有此一個,故此法可用以決定一方程系之解答是否祇有一個,且僅有此一個。

### 習 題

於下列方程系中,指出矛盾方程及同值方程:



$$1. \begin{cases} 3x + \frac{y}{4} = 6 \\ 4x + \frac{y}{3} = 8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x - 2y = 14 \\ 9x - 6y = 36 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + \frac{2}{7}y = 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{7}y = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 2y - 7 - x = 12 - 3y \\ 2x + 5y = 20 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 7x - 8 = 4y - 2x \\ 18x - 8y = 16 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 6x + 8y = 14 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$$

### 含三個或多於三個未知量之一次方程

74. 消去法 含三個或多於三個未知數之方程系，

其解法與解含兩個未知數者同。常法為消去第三未知數而得含兩個未知數之兩方程，再合此兩方程解之。

### 習 題

解次之方程系：

$$1. \begin{cases} 4x - y + z = 1 \dots\dots\dots (1) \\ x + 2y + 7z = 7 \dots\dots\dots (2) \\ 3x - y - 5z = 5 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

由(1)式減(3)式得

$$x + 6z = -4$$

以 2 乘(3)式，以其結果與(2)式相加得

$$7x - 3z = 17$$

解方程系

$$\begin{cases} x+6z=-4 \\ 7x-3z=17 \end{cases}$$

即得  $(x, z) = (2, -1)$

將求得  $x, z$  之值代入 (1) 式, 則得  $y=6$ .

故此方程系之解答為  $(x, y, z) = (2, 6, -1)$ .

$$2. \begin{cases} 2a-b+c=1 \\ a-7b-8c=1 \\ 7a+14b+2c=7 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x+2y-z=2 \\ 3x-2y+2z=0 \\ 5x-4y+3z=1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+2y-4z=11 \\ 2x=3y \\ y-4z=0 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 5x-7y-z=16 \\ 3x-2y+2z=10 \\ 2x+y+3z=6 \end{cases}$$

## 75. 三次行列式

$$\text{記號} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

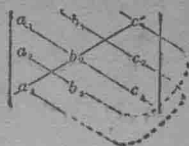
稱為三次行列式, 其式表示下列之和:

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3a_2b_1.$$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3,$  等九數, 稱為行列式之元素. 在橫線上之數, 稱為行列式之列, 在縱線上之數, 稱為行列式之行. 其展開式之各項, 各為不同行不同列之三元數之積.

三次行列式, 可展開之如下:

作通過第一元素  $a_1$  之對角線如第五十四圖,而過  $a_2, a_3$  各作直線與對角線平行.由是得  $a_1b_2c_3, a_2b_3c_1$  及  $a_3c_2b_1$  諸項.



第五十四圖

作通過  $c_1$  之對角線,而過  $c_2, c_3$ , 各作直線與之平行,又變最後三個相乘積之符號,由是得  $-c_1b_2a_3, -c_2b_3a_1$ , 及  $-c_3a_2b_1$  諸項.

習 題

求下列行列式之值:

$$\begin{aligned}
 1. \begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 5 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-6) + 2 \cdot 7 \cdot 2 \\
 &\quad - (-6) \cdot 4 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 2 \\
 &= 20 - 18 + 28 + 48 - 105 - 2 \\
 &= -29
 \end{aligned}$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

76. 用行列式解方程法

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \dots\dots\dots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \dots\dots\dots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

由(1)(2)兩方程消去  $z$ , 則有

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x + (b_2c_1 - b_1c_2)y = d_1b_2 - d_2b_1 \dots\dots\dots (I)$$

由(1)(3)兩方程消去  $z$ , 則有

$$(a_3b_1 - a_1b_3)x + (c_3b_1 - b_3c_1)y = d_3b_1 - d_1b_3 \dots\dots\dots (II)$$

解(I), (II)式, 則得

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3c_2b_1 - c_1b_2d_3 - c_2b_3d_1 - c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3c_2b_1 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3a_2b_1}$$

依 § 75, 此可寫作

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

可見分母即以  $x, y, z$  之係數為元素之行列式, 分子即以常數替換分母中  $x$  之係數。

同樣得

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

### 習 題

用行列式解下列方程系:

$$1. \begin{cases} 2x+3y+4z=16 \\ 5x-8y+2z=1 \\ 3x-y-2z=5 \end{cases}$$

$$x = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 5 & -8 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore (x, y, z) = (3, 2, 1)$$

$$2. \begin{cases} 5x+2y-4z=-3 \\ 4x+5y+2z=20 \\ 3x-3y+5z=12 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} a+3b+9c=23 \\ a+2b+4c=15 \\ a+b+c=9 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x-y+2z=9 \\ x-2y+3z=2 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} a+b+c=2 \\ a+3b=4 \\ b-2c=6 \end{cases}$$

問 題 與 習 題

77. 解下列方程:

$$1. \begin{cases} \frac{7x+8}{5} - \frac{7y-1}{4} = -2 \\ \frac{2x-4}{2} + \frac{y-1}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2y - \frac{4x-2y}{23-y} = 2y-19 \\ 3x + \frac{3x-9}{y-18} = 3x-17 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{2+x}{3} + \frac{2-y}{2} = \frac{3(y-4x)}{4} \\ \frac{x-3}{2} - 5 = \frac{y+5}{3} - 3(y-x) \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{7}{y} = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 12 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 14 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 6y + 5z = 7 \\ 3x + 10z = 1 \end{cases}$$

視  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{y}$  爲未知數。

$$8. \begin{cases} x + 2y + z = -17 \\ 2x + y - z = -1 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 15 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{5}{x+y} = 17 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{3}{4x-y} - \frac{5}{2x-y} = 2 \\ \frac{3}{y-2x} + \frac{4}{y-4x} = \frac{23}{5} \end{cases}$$

10. 酒精與水之混合液，共 10 加倫，若加入水若干，則酒精爲混合液總量百分之 30，若加水爲前者之二倍，則酒精爲混合液總量之百分之 20，問原有酒精若干？

11. 146 佛郎之值，等於 117 先令，1 元與 4 佛郎之總值，比 6 先令多 32 仙，問一佛郎與一先令各值幾仙？

12. 某照相者配定影液兩瓶，甲瓶內定影液沾百分之 10，其餘爲水，乙瓶內定影液與水參半，今欲在丙瓶內配合 8 噸之混合液，令定影液沾百分之 25，問甲乙二瓶中應各取出混合液若干？

13. 2,500 元之本金,在某定期內以單利計算之,本利和爲 2,800 元,若利率增加百分之一,定期延長兩年,則本利和爲 3,200 元,求原時期與利率。

14. 以銀一元購螺旋釘若干個,若每打之價減銀半仙,則能多得釘 10 個,求每打之原價。

15. 某人乘汽車,於  $3\frac{1}{4}$  小時內行 50 英里,其經過鄉間之速率爲每小時 20 英里,其經過城市之速率爲每小時 8 英里,問此人經過鄉間若干英里?(耶魯大學)

16. 某公司欲定製汽車 252 具,若由兩工場合造,則 12 日可造成,若兩工場分開獨造,則一工場比他工場多需 7 日,求各工場獨造所需之日數。(雪費爾大學)

17. 某工程甲乙合作,12 日成,若甲作 5 日後,乙繼續作之,經 26 日成,問甲乙獨作各需幾日?(雪費爾大學)

18. 甲乙兩快船競漕於 48 哩之河中,因兩船大小不同,第一次甲船讓乙船先行半哩,而甲船比乙船先到 6 分鐘,第二次甲船讓乙船先行一哩半,而甲船比乙船先到 2 分鐘,問二船每分鐘之速率各爲若干呎?(芝加高大學)

19. 某人投賞共 1,050 元,分爲甲乙兩股,甲股單利率百分之四,乙股單利率百分之五,甲股六年之利息與乙股 12 年之利息同,問每股本銀若干?

20. 某人有二子,長子大於次子六歲,兩年之後,父年爲二子年歲和之二倍,六年以前,父年爲二子年歲和之四倍,求父子三人今各幾歲。(普連士頓大學)

21.  $A, B$  二人購煤,  $A$  每 18 元中比  $B$  多得煤 1 噸,  $A$  每 6 噸煤中比  $B$  少付 9 元, 若  $A, B$  二人各購煤一噸, 問各付銀若干?

22. 甲乙兩種期票, 共計 175 元, 一商人代兌現, 對於甲種取利百分之十, 對於乙種取利百分之五, 共兌得現銀 166 元, 問兩期票各為若干元? (芝加高大學)

23.  $A, B$  二火車之軌道, 互相正交, 當  $B$  在交點時,  $A$  尚距交點 675 呎, 5 秒鐘後, 二車距交點等遠, 再過 40 秒鐘, 二車又距交點等遠, 求二車每秒鐘所行之呎數, 用圖說明之。

24. 某商人有咖啡兩種, 一種每磅值銀 30 仙, 一種每磅值銀 40 仙, 今欲將兩種咖啡混合成 70 磅, 每磅售銀 36 仙, 問每種應取若干磅?

25. 有人買蛋若干個, 若能多取 88 個, 則每個低價一仙, 若少取 56 個, 則每個較前貴一仙, 求此人所買之蛋數及每蛋之價。(耶魯大學)

26. 某人以單利率投資 6 年, 共得本利和 4,960 元, 若利增百分之一, 則 5 年後可得本利和 5,000 元, 求本金及利率。

27. 三位數字之和為 16, 第一數字與第三數字之和等於第二數字, 若單位數字與十位數字交換位置, 則得數較原數少 27, 求原數。

28. 某人雇司機開車者, 約定於一定時內旅行 105 哩, 行 63 哩, 遇事阻住 24 分鐘, 繼每小時增速  $3\frac{1}{2}$  哩, 恰合約定時期, 求遇事以前之速率。



## 提 要

78. 本章所授之下列各名詞,試各說明其意義。

一次方程之準式。

二次及三次行列式。

一次方程之圖線。

矛盾方程。

方程系之解答。

等值方程。

79. 試述含兩個未知量之一次方程之解法。

(1)圖線法。

(2)消去法。

(3)行列式。

80. 試述含三個未知數之一次方程之解法。

(1)消去法。

(2)行列式。

## 第 四 章

### 含一元之二次方程

#### 二次方程之解法

81. 二次方程 方程如  $x^2-5x=6$ ,  $\frac{1}{2}+5x^2=x$ ,

$mx^2-nx=7-3x$ ,  $x^2+ax-abc+a(b+cx+2x^2)=0$ , 皆稱爲二

次方程。

將方程式之各項移於左端，並按代未知量之文字之降  
露整列，則上列諸方程，可變爲下列之形。

$$x^2-5x+6=0; \quad 5x^2-x+\frac{1}{2}=0; \quad mx^2-(n-3)x-7=0;$$

$$(1+2a)x^2+(a+ac)x+(ab-abc)=0.$$

總之，凡含一個未知量之二次方程，皆可化爲準式如

$$ax^2+bx+c=0.$$

式中  $a$  表示  $x^2$  之係數， $b$  表示  $x$  之係數， $c$  爲不含  $x$  之諸  
項和，即常數項。

於上述諸方程中，試指出  $a$ ,  $b$ ,  $c$  之值。

82. 二次方程之解法 於 §§ 13 及 23, 已說明二次  
方程可用圖線法及劈因數法解之。

劈因數法甚為簡單，若二次方程既化為準式，而其左端容易劈為因數者，則用此法解之，最為合宜。

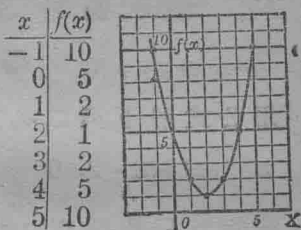
圖線法不能用以解任意之二次方程，例如下，

用圖線法解二次方程  $x^2 - 4x + 5 = 0$ 。

令  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ 。

假定  $x$  為  $-1$  與  $+5$  間之各整數，以作  $f(x)$  與  $x$  之對應值表，依表作圖線如第五十五圖，可見  $f(x)$  之圖線與  $x$  軸無交點，故不能得方程  $x^2 - 4x + 5 = 0$  之根。

然任何二次方程，皆可用配方法或用公式法解之，此兩法為用最廣，今特述之於下：



第五十五圖

### 83. 用配方法\*或用公式法以解二次方程

任何二次方程，皆可寫成準式如  $ax^2 + bx + c = 0$  之形，故欲求二次方程之解法，宜先討論方程  $ax^2 + bx + c = 0$  之解法。由討論此方程之解法，即得解二次方程之公式。

由方程  $ax^2 + bx + c = 0$  之兩端，各減去  $c$  且以  $a$  除其各項，即得  $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ 。

\*此法原始於印度，阿耶倍泰(Aryabhatta)(生於紀元後476年)為首用此方法之人，然與現今所用者稍異，勃喇買哈泰(Brahmagupta)(生於紀元後598年)常用此法，人竟稱此法為勃喇買哈泰法。至後葛利得哈喇(Oridhara)畧加修改，遂成今式云。

兩端各加  $\frac{b^2}{4a^2}$  以完成左端之平方,即得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

求兩端之平方根,即得

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\text{故 } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### 習 題

用公式解下列二次方程:

1.  $3x^2 + 5x - 2 = 0$

將此方程與準式  $ax^2 + bx + c = 0$  比較,可見  $a=3$ ,  $b=5$ ,  
 $c=-2$ .

將此諸值代入公式,

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \frac{1}{3}, \text{ 或 } -2.$$

2.  $2x^2 + 5x + 2 = 0$       解答求至有效數字兩位止.

3.  $2r^2 - r - 6 = 0$       10.  $r^2 - 3.50r + 2.80 = 0$

4.  $1.4x^2 + 5x = 2.4$       解答求至有效數字三位止.

5.  $6p^2 - 13p = 10p - 21$     11.  $t^2 = .100 - .200t$

16.  $my^2 + ny + p = 0$       12.  $16.08t^2 + 20t = 1,000$

7.  $ax^2 + (b-a)x - b = 0$     13.  $(m-n)y^2 - m^2y + m^2n = 0$

8.  $a - y^2 = (1-a)y$       14.  $(2y-1)(y-3) = 2$

9.  $y^2 - 1.6y + 0.3 = 0$       15.  $(x-1)^2(x+3) = x(x+5)(x-2)$

$$16. \quad y^2 - 6mry + m^2(9r^2 - 4n^2) = 0$$

$$17. \quad m^2y^2 - (m^2 + mn)y = 2m^2 - 5mn + 2n^2$$

由公式可知

$$\begin{aligned} y &= \frac{m^2 + mn \pm \sqrt{m^4 + 2m^3n + m^2n^2 + 8m^4 - 20m^3n + 8m^2n^2}}{2m^2} \\ &= \frac{m^2 + mn \pm \sqrt{9m^4 - 18m^3n + 9m^2n^2}}{2m^2} \\ &= \frac{m^2 + mn \pm (3m^2 - 3mn)}{2m^2}, \dots\dots \text{等.} \end{aligned}$$

解 17 題，必須求出  $9m^4 - 18m^3n + 9m^2n^2$  之平方根，但此容易由視察知之。

多項式之平方根，不能常用視察法求得，故習二次方程之普通解法以前，須先知求多項式之平方根。

### 多項式之平方根

84. 欲開多項式之平方，須先觀察下列之等式。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \end{aligned}$$

(1) 多項式之第一項  $a^2$ ，為平方根之第一項之平方，若多項式按文字之次數排列，則根之第一項，即為多項式第一項之平方根。

(2) 多項式之第二項  $2ab$ ，為根之第一項與第二項之積之二倍，故以根之第一項之二倍除多項式之第二項，即所得之商，即為根之第二項。

(3) 加根之第二項  $b$  於其第一項之二倍  $2a$ , 再以根之第二項  $b$  乘之, 則得  $2ab + b^2$ . 從第一次餘數  $2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$  減去  $2ab + b^2$ , 則得第二次餘數  $2ac + 2bc + c^2$ .

(4) 以  $2a$  除第二次餘數之第一項  $2ac$ , 則得根之第三項  $c$ . 更繼續照(3)之法則行之, 若最後無餘數, 則此多項式爲一平方式.

## 習 題

求下列各多項式之平方根:

$$1. \quad 4 - 19n^2 + 12n - 42n^3 + 49n^4$$

依  $n$  之次數整列,

$$7n^2 - 3n - 2 = \text{平方根}$$

由是: 多項式 =	$49n^4 - 42n^3 - 19n^2 + 12n + 4$
平方根之第一項爲	
$\sqrt{49n^4} = 7n^2$	
從多項式之第一項	
減 $7n^2$ 之平方, $(7n^2)^2 =$	$49n^4$
得餘數	$-42n^3 - 19n^2 + 12n + 4$
以 $2 \cdot 7n^2$ 除餘數之第一項,	
得 $-3n$ , 即爲根之第二項.	
加 $-3n$ 於 $2 \cdot 7n^2$ , 得 $14n^2 - 3n$ , 即	
以 $-3n$ 乘之, 得	$(14n^2 - 3n)(-3n) = -42n^3 + 9n^2$
從第一餘數減去上列之積, 則得	$-28n^2 + 12n + 4$
以 $2 \cdot 7n^2$ 除最後餘數之第一項, 得	
$-2$ , 即爲根之第三項.	
加 $-2$ 於根之首兩項和之二倍	
即得 $14n^2 - 6n - 2$ , 再以 $-2$ 乘之,	$(14n^2 - 6n - 2)(-2) = -28n^2 + 12n - 4$

從上所餘之數減去此積，再無餘數。

故此多項式為完全平方式，而其平方根已經求出。

$$2. \quad 10x^2 + 12x^3 + 1 + 4x + 9x^4$$

$$3. \quad 16x^6 + 10x - 8x^3 + 1 - 40x^4 + 25x^1$$

$$4. \quad 9x^2 - 3xy^2 - 30xy + 5y^3 + 25y^2 + \frac{y^4}{4}$$

$$5. \quad x^2 + 9z^2 + 4y^2 - 4xy - 12yz + 6xz$$

$$6. \quad x^4 + 25 + 6x^3 - 30x - x^2$$

$$7. \quad 16x^6 + 25x^4 - 24x^5 + 10x^2 - 20x^3 - 4x + 1$$

$$8. \quad 12a - 23a^4 + 8a^5 + 5a^2 + 4 - 22a^3 + 16a^6$$

$$9. \quad \frac{m^2}{a^2} + 11 + \frac{6m}{a} + \frac{6a}{m} + \frac{a^2}{m^2}$$

10. 求  $1+x$  之平方根至第五項止

解下列方程：

$$11. \quad y^2 - 4my + ny + 3m^2 - 5mn - 2n^2 = 0, \text{ 求 } y$$

$$12. \quad y^2 - 3ay - 3by + 3a = y - 9ab, \text{ 求 } y$$

$$13. \quad t^2 - 3at - 2 = t - 2a^2 - 3a, \text{ 求 } t$$

$$14. \quad x^2 - 3x - 5x^2 - 2mx^2 = 3 + mx + 4m, \text{ 求 } x$$

## 分 數 方 程

85. 解次之方程：

$$1. \quad \frac{x+5.4}{x-3.2} + \frac{x-6.3}{x+7.5} = 0 \text{ (耶魯大學)}$$

$$2. \quad \frac{x+a}{x+b} + \frac{x+b}{x+a} = \frac{5}{2}, \text{ 求 } x \text{ (哈佛大學)}$$

3.  $\frac{4a^2}{x+2} - \frac{b^2}{x-2} = \frac{4a^2-b^2}{x(4-x^2)}$ , 求  $x$  (雪費爾大學)
4.  $\frac{x+3}{x} - \frac{3-x}{2(x+1)} = \frac{7}{3}$  (普連士頓大學)
5.  $\frac{3x}{x-2} - \frac{2}{x+3} + \frac{2}{2-x} = 0$  (教育部)
6.  $\frac{3}{2(x^2-1)} - \frac{1}{4(x+1)} = \frac{1}{8}$  (普連士頓大學)
7.  $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-9} = 0$  (哈佛大學)
8.  $\frac{s-3}{2s} + \frac{2s+3}{3} - \frac{5s-3}{6} = \frac{3s-1}{2} - 3$
9.  $x+1 + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{x+1} - \frac{5x-4}{1-x^2}$
10.  $\frac{1}{3(t^2-1)} - \frac{2}{t-1} + \frac{1}{3(t+1)} = \frac{2}{3}$  (芝加高大學)
11.  $\frac{9a^8}{x^2} + 1 - \frac{6\sqrt{a}}{x} = \left(\frac{3a-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^2$ , 求  $x$
12.  $\frac{(a+2b)x}{a-2b} + \frac{4b^2}{x} = \frac{a^2}{a-2b}$ , 求  $x$

## 歸於二次方程之問題

86. 解下列問題：

1. 有一長方形之箱，其容積為 1,500 立方吋，其長較寬大 5 吋，其深為 5 吋，求其三度。(雪費爾大學)

2. 矩形之一邊較他邊長 20 公分，其對角線比其長邊大 7 公分，求矩形之面積。(哈佛大學)



13. 設有一邊爲  $s$  之正十角形, 內接於以  $a$  爲半徑之圓. 由平面幾何學, 知  $s$  可用公式  $\frac{a-s}{s} = \frac{s}{a}$  求之. 由此方程, 試以  $a$  表示  $s$  之值.

設  $a=100$ , 試求  $s$  之值至有效數字三位. (哈佛大學)

4. 設於正方形  $ABCD$  之一邊  $AB$  上, 距  $A$  點 10 吋之處取一點  $E$ , 則梯形  $EBCD$  之面積較正方形面積之四分之三少  $22\frac{3}{4}$  平方吋. 求正方形一邊之長. (哈佛大學)

5. 某人賣出一物得值 21 元, 其受損失之百分數, 等於原價之元數. 問原價若干元? (耶魯大學)

6. 有一 30 吋長之箱, 其底上可依對角線之位置放一長 36 吋之傘, 今欲依前法置一較傘長 4 吋之槍, 問箱之長應爲若干? (芝加高大學)

7. 一矩形之錫片, 長大於寬 4 吋. 於其四角各割去每邊 6 吋之正方形, 則可合成一容積爲 840 立方吋無蓋之箱. 求此箱之三度. (芝加高大學)

13. 於正方形之厚紙之每角, 割去每邊 4 吋之正方形, 則可合成一無蓋之箱, 其容積爲 256 立方吋. 求此正方形之厚紙之面積. (芝加高大學)

9. 兩車速率之差爲每時 5 哩, 快者行 280 哩, 比慢者少需一時, 求兩車之速率.

10. 某物體由靜止落下,  $t$  秒後, 其行程  $s$  爲  $s=16t^2$ . 某人投石於井, 3 秒後聞水聲, 若空氣中聲行之速率爲每秒 1,086 呎, 求井之深.
11. 直角三角形夾直角之兩邊, 一小於斜邊 10 吋, 一小於斜邊 20 吋, 求直角三角形之三邊.
12. 於 800 呎長, 600 呎寬之長方地面, 築互相正交而等寬之兩街道, 分此地面爲四個相等之矩形, 若街道面積共佔 77,500 平方呎, 求街道之寬.
13. 有 170 個對角線之多角形, 求其邊數.
14. 某工程甲與乙共作, 6 時 40 分成; 乙獨作, 比甲獨作少費 3 時, 問乙須獨作若干時?
15. 二位數字之和爲 5, 原數與其顛倒數相乘積爲 736, 求原數.

### 歸於二次形狀之方程

87. 解下列方程:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $y^4 - 26y^2 + 25 = 0$                | 14. $6t^4 + 6 = 13t^2$                   |
| 2. $x^5 - 8 = 7x^3$                      | 5. $(z^2 - 2z)^2 - 7(z^2 - 2z) + 12 = 0$ |
| 3. $4y^2 + \frac{4}{y^2} = \frac{97}{9}$ | 16. $(4x+5)^2 + 2(4x+5) - 15 = 0$        |

### 三角方程

88. 含有未知角之三角函數之條件之方程曰三角方程, 例如  $2 \sin x = \tan x$ ,  $5 \sin^2 x + \cos^2 x = 2$  等是也.

許多三角方程,容易用劈因數法解之。

若方程中含有多個  $x$  之三角函數,則宜先變方程之式,令祇含  $x$  之一個三角函數,欲將多個  $x$  之三角函數化爲一個  $x$  之三角函數,須應用下列之恆等式。

1.  $\sin x \operatorname{cosec} x \equiv 1.$

5.  $\cot x \equiv \frac{\cos x}{\sin x}.$

2.  $\cos x \sec x \equiv 1.$

6.  $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1.$

3.  $\tan x \cot x \equiv 1.$

7.  $\tan^2 x + 1 \equiv \sec^2 x.$

4.  $\tan x \equiv \frac{\sin x}{\cos x}.$

8.  $\cot^2 x + 1 \equiv \operatorname{cosec}^2 x.$

## 習 題

求在  $0^\circ$  至  $360^\circ$  間且能適合於下列方程之正角。

1.  $\cot x = 2 \cos x$

$$\text{因 } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\text{故 } \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cos x$$

$$\text{故 } \frac{\cos x}{\sin x} - 2 \cos x = 0$$

$$\text{即 } \cos x \left( \frac{1}{\sin x} - 2 \right) = 0$$

$$\text{故 } \cos x = 0, \text{ 或 } \frac{1}{\sin x} - 2 = 0 \text{ 能滿足此方程}$$

若  $\cos x = 0$ , 則  $x$  爲  $90^\circ$  或  $270^\circ$

$$\text{若 } \frac{1}{\sin x} - 2 = 0, \text{ 則 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$\therefore x = 30^\circ$ , 或  $150^\circ$  (見第五十六圖)

$\therefore x = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ , 及  $270^\circ$  皆為  $x$  之正值而小於  $360^\circ$  且能滿

足已知方程。

$$2. \quad 5 \sin^2 x + \cos^2 x = 2$$

$$\text{因 } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\text{故 } 5(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = 2$$

$$5 - 5 \cos^2 x + \cos^2 x = 2$$

$$\therefore 4 \cos^2 x = 3, \text{ 即 } \cos x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

若  $\cos x = +\frac{1}{2} \sqrt{3}$ , 則  $x = 30^\circ$  或  $330^\circ$

若  $\cos x = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$ , 則  $x = 150^\circ$  或  $210^\circ$

$\therefore x = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$  皆為  $x$  之正值而小於  $360^\circ$  且能滿

足已知方程。

$$3. \quad \tan x \sec x = \sqrt{2}$$

$$\text{令 } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{指明 } \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin x = \sqrt{2} - \sqrt{2} \sin^2 x$$

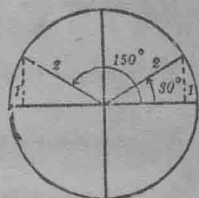
解此方程, 以求  $x$  之值。

$$4. \quad 2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$$

$$6. \quad 4 \cos^2 x = \cot x$$

$$5. \quad 3 \sec^2 x - 7 \tan^2 x = \tan x$$

$$7. \quad \tan x = \cos x$$



第五十六圖

$$\dagger 8. \quad \sin^2\theta - \cos\theta + 1 = 0 \qquad 11. \quad \tan\theta + \cot\theta = 2$$

$$9. \quad 2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$$

$$\dagger 10. \quad \cos^2\theta - \sin\theta = \frac{1}{4} \qquad \dagger 12. \quad \sin^2\theta - 2\cos\theta = \frac{1}{4}$$

## 二次方程之根之性質

89. 複數 於 § 82, 已見二次方程如  $x^2 - 4x + 5 = 0$ , 不能用圖線法解之, 然由二次公式, 可得

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

此方程之根含有負數之平方根, 但實數之平方恆為正, 故負數之平方根或偶次方根, 不能求得, 由是,  $\sqrt{-4}$  不能等於  $+2$  或  $-2$ , 因  $(+2)^2 = (-2)^2 = +4$  也,

負數之偶次根, 稱為虛數,

又如  $a$  為實數,  $b$  為正實數, 則  $a + \sqrt{-b}$  名曰複數,\* 故  $1 + \sqrt{-2}$ ,  $\sqrt{+3} - \sqrt{-8}$ , 皆複數也,

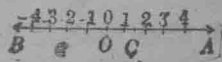
90. 數之類別 學者初讀數學時, 即已知正整數與分數, 其後則知負數, 合正負整數分數及零, 則組成有理數系統, 例如  $4$ ,  $-8$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $-1.75$ , 等皆有理數也, 凡有理數, 常能以兩整數之商恰合表示之, 因整數可視為以  $1$  為分母之分數也,

\* 複數亦有稱為虛數者, 但不可從, 因複數未必皆為虛數也。

然數之如  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $3\sqrt{7}$  等者, 不能以兩整數之商恰合表示之, 因而稱此種數曰無理數, 合有理數與無理數, 則成實數之系統, 例如  $\pi$  爲實數, 而非有理數, 因  $\pi$  之值, 不能以兩整數之商恰合表示之也。

91. 實數之圖線表示 正整數可以直線上之等距離點表示之如第五十七圖。

即由定點  $O$  起, 作距離相等之諸點。



每一點代表一正數, 負數可以在  $OA$  之反對方向之直線  $OB$  上作等距離點代表之。

原點  $O$  表示零。

分數可以在兩點間之點代表之, 例如  $O$  點表示分數  $\frac{3}{2}$  是也, 依此, 凡有理數, 皆可用此線上一點代表之。

兩個有理數無論如何接近, 其中間必可插入其他之有理數, 無理數亦可於直線上作點代表之, 例如  $\sqrt{2}$  爲每邊爲 1 之正方形之對角線之長, 故於  $OA$  上取等於此對角線長之距離, 即可得代表此無理數  $\sqrt{2}$  之定點, 由此可知任意無理數, 亦可於  $OA$  上作相當之點代表之。

由是, 任意實數可以一直線上之一點代表之, 而稱此線爲實數之軸。

92. 二次方程之根之性質  $ax^2+bx+c=0$  之根之性質, 依於  $b^2-4ac$  之數而定, 故函數  $b^2-4ac$  爲  $ax^2+bx+c=0$  之判別式。

下述之討論,乃假定係數  $a, b, c$  爲有理數者。

1. 若  $b^2 - 4ac = 0$ , 則  $x$  之兩值相等, 故二次方程之根爲實數, 爲有理數, 且爲相等數。

例如方程  $x^2 - 6x + 9 = 0$ , 其  $b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$ 。

故不須解此方程, 可知其兩根爲實數, 爲有理數, 且爲相等數。

2. 若  $b^2 - 4ac > 0$ , 則其兩根爲實數, 但非相等數。

(1) 若  $b^2 - 4ac$  爲平方數, 則其根爲有理數。

(2) 若  $b^2 - 4ac$  非平方數, 則其根爲無理數。

例如  $x^2 - 9x + 14 = 0$ , 其  $b^2 - 4ac = 81 - 56 = 25$ 。

故其兩根爲實數, 爲有理數, 但非相等數。

又  $x^2 + 5x + 1 = 0$ , 其  $b^2 - 4ac = 25 - 4 = 21$ 。

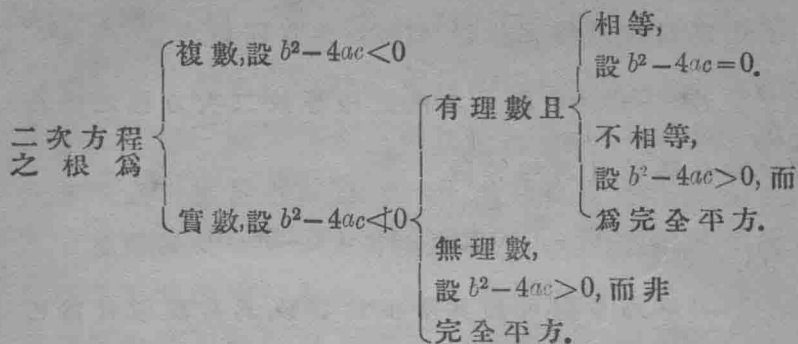
故其兩根爲無理數。

3. 若  $b^2 - 4ac < 0$ , 則  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  爲虛數, 而方程之兩根皆爲複數。

例如方程  $2x^2 + x + 1 = 0$ , 其  $b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7$ ,

故其兩根皆爲複數。

上之討論, 可以表說明之如次:



## 習 題

不許解方程, 試決定下列方程之根之性質:

1.  $3x^2 - 8x + 5 = 0$

$$b^2 - 4ac = 64 - 4(3)(5) = 64 - 60 = 4$$

∴ 其兩根爲實數爲有理數, 但不相等.

2.  $x^2 - 4x + 8 = 0$

6.  $9x^2 + 12x + 4 = 0$

3.  $a^2 + 3a - 1 = 0$

7.  $7y^2 + 3y = 0$

4.  $5x^2 - 3x = 2$

8.  $5x^2 + 7x + 3 = 0$

5.  $3x^2 = 7x + 6$

9.  $x^2 - 6x + 4 = 0$

下列方程之根皆相等, 求  $d$  之值:

10.  $9x^2 + (1+d)x + 4 = 0$

$$b^2 - 4ac = 1 + 2d + d^2 - 144$$

因其兩根相等, 故  $d^2 + 2d - 143 = 0$

∴  $d = 11$ , 或  $d = -13$ .



11.  $y^2 + y + d = 0$

‡14.  $y^2 + 3dy + d + 7 = 0$

12.  $2x^2 + (1+d)x + 2 = 0$

15.  $(d+1)x^2 + dx + d + 1 = 0$

13.  $x^2 - 4dx + 4 = 0$

‡16.  $2dx^2 + (5d+2)x + (4d+1) = 0$

## 二次方程之根與係數之關係

93. 方程  $ax^2 + bx + c = 0$  之根以

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ 表示之,}$$

兩根相加, 則得

$$r_1 + r_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

兩根相乘, 則得

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{2a \cdot 2a} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

故兩根之和為  $-\frac{b}{a}$ ,兩根之積為  $\frac{c}{a}$ .

## 習 題

求習題 1—5 之方程根之和及積:

1.  $2x^2 - 9x + 8 = 0$

因  $a = 2, \quad b = -9, \quad c = 8$

故  $r_1 + r_2 = -\frac{-9}{2} = \frac{9}{2}$ ,

$$r_1 r_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

2.  $2x^2 - 9x - 5 = 0$

4.  $x^2 + 2x + 2 = 0$

3.  $x^2 - 12x - 13 = 0$

5.  $4 - y - 6y^2 = 0$

6. 方程  $x^2 - kx + 21 = 0$  之一根為 7, 求  $k$  之值.

$$\text{今有} \begin{cases} r_1 + r_2 = k \\ r_1 \cdot r_2 = 21 \\ r_1 = 7 \end{cases}$$

$$\therefore r_2 = 3 \text{ 而 } k = 10.$$

7. 方程  $3x^2 - kx + 10 = 0$  之一根為 5, 求  $k$  及其他根.8. 求方程  $x^2 + px + q = 0$  之  $p$  及  $q$  之值,

1. 設其根為 6 與 -4

2. 設其根為  $3 - \sqrt{6}$  與  $3 + \sqrt{6}$ 

9. 已知方程之根為 2 及 -3, 求作此方程.

因  $2 + (-3) = -\frac{b}{a}$  又  $2(-3) = \frac{c}{a}$ , 故可將此兩值代入方

程  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ , 即得  $x^2 + x - 6 = 0$ .

10. 求作二次方程, 設其根為:

1. -3, 10

5.  $2 \pm \sqrt{3}$

2. -8, -3

6.  $a, -b$

3.  $6, -\frac{1}{5}$

7.  $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

4.  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

8.  $-m+n, -m-n$

## 劈 因 數 法

94. 二次方程之解法,可用以求二次式之三項式  $ax^2 + bx + c$  之因數.

$$\begin{aligned} \text{因 } ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a [x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2] \end{aligned}$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

## 習 題

決定習題 1—7 之二次函數之因數:

1.  $5x^2 + 3x - 20$

設  $5x^2 + 3x - 20 = 0$

$$\text{則 } r_1 = \frac{-3 + \sqrt{409}}{10}, \quad r_2 = \frac{-3 - \sqrt{409}}{10}$$

$$\begin{aligned} \therefore 5x^2 + 3x - 20 &= 5 \left[ x - \frac{-3 + \sqrt{409}}{10} \right] \left[ x - \frac{-3 - \sqrt{409}}{10} \right] \\ &= \frac{1}{5} (10x + 3 - \sqrt{409})(10x + 3 + \sqrt{409}) \end{aligned}$$

2.  $2x^2 + 5x - 7$

5.  $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$

3.  $2x^2 + 5x + 2$

†6.  $x^2 + 4abx - (a^2 - b^2)^2$

4.  $6y^2 + y - 1$

†7.  $abx^2 + (a + b)x + 1$

簡約下列分數:

8.  $\frac{2y^2 + 7y - 4}{3y^2 + 11y - 4}$

9.  $\frac{2t^2 + 8t - 90}{3t^2 - 36t + 105}$

$$\dagger 10. \frac{ax^2 - 2bx + x + a - 1}{ax^2 - 3ax + x + 2a - 2}$$

$$\dagger 11. \frac{20x^2y^2 + 20xyz - 21z^2}{10x^2y^2 + 24xyz - 18z^2}$$

## 提 要

95. 本章所授之重要名詞如下：

二次方程.	實數.
二次方程式之準式.	有理數, 無理數.
虛數.	判別式.
複數.	二次方程之根之性質.

96. 本章已研究之問題, 摘述如下：

1. 含一個未知數之二次方程, 可用下列各法解之：
  - (1) 劈因數
  - (2) 公式
  - (3) 配方
  - (4) 圖線
2. 求多項式之平方根.
3. 求解歸於二次方程解法之分數方程
4. 求解歸於二次方程解法之高次方程
5. 求解三角方程.
6. 求解歸於二次方程解法之問題.
7. 以圖線表示實數.

8. 決定二次方程之根之性質.
9. 已知根與係數之關係,求解二次方程.
10. 用二次方程公式,求二次式之三項式之因數.

## 第 五 章

### 劈 因 數 法      分 數

97. 本章之目的 在初等數學範圍以內之劈因數法，已於 §§ 22 及 94 中盡授之，劈一切多項式之因數，無一定之方法，但學者當已知化某式成某種特殊形狀而用特殊之方法分解其因數之法，本章之目的，為綜合各種劈因數法而熟練之，且用之於代數分數之計算。

#### 98. 兩平方之較

劈下列各式之因數：

1.  $x^2 - 4y^2$

7.  $16a^2 - (2m - 3n)^2$

$x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y)$

8.  $(x^2 - y^2)^2 - x^6$

2.  $9a^2 - 25$

9.  $9c^2 - (3a - 2c)^2$

3.  $1 - r^4$

10.  $36(a + b)^2 - 25(c - d)^2$

4.  $9a^2x^6 - 4b^2y^2$

11.  $(a + b)^2 - (a - b)^2$

5.  $a^6 - b^6, a^8 - b^8$

12.  $(4a + 5)^2 - (2x - 3)^2$

6.  $a^4 - b^4, a^{12} - b^{12}$

13.  $(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2$

化下式為最簡之式：

14.  $\frac{m(x^2 - y^2)}{(a + b)(x - y)}$

16.  $\frac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$

15.  $\frac{(x + a)(x - b)}{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}$

17.  $\frac{(4a - d)^2 - (2b - 3c)^2}{(4a - 2b)^2 - (3c - d)^2}$

求次之結果：

$$18. \frac{x}{2x-3} - \frac{x}{2x+3} + \frac{2x-6}{9-4x^2} \quad 20. \frac{(a+8)^2}{(a-4)^2} \cdot \frac{a^2-16}{a-64}$$

$$19. 3x + \frac{2}{x-3} - \frac{3x^2}{x+3} + \frac{4}{x^2-9} \quad 21. \frac{x^2-9}{x-4} \div \frac{(x+3)^2}{(x-4)^2}$$

### 99. 相似冪之和或較

劈下式之因數：

1.  $64a^3+27b^3$

$$64a^3+27b^3 = (4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2)$$

2.  $8x^3+125y^3$

7.  $8v^{18}+27w^{18}$

3.  $27x^3-8y^3$

8.  $(a+b)^3-c^3$

4.  $343+x^3$

9.  $(w+3)^3+a^3$

5.  $p^3-\frac{1}{8}$

10.  $x^3-(m+n)^3$

6.  $512^3+27d^3$

11.  $(5m-n)^3+c^3$

化下式爲簡單之形：

12.  $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

13.  $\frac{64a^6b^6+1}{4a^2b^2+1}$

求次之結果：

14.  $\frac{x^4-y^4}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^6-y^6}{x^2+y^2} \quad 16. \frac{a^2+a}{a^3-1} - \frac{1}{a-1}$

15.  $\frac{x^2-9}{x^3-27} \cdot \frac{x^2+3x+9}{x+3} \quad 17. \frac{3}{a} - \frac{5}{a-1} - \frac{2a-3}{a-1}$

求  $x$  :

$$18. \frac{2x-3}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x}{x+1}$$

求下式之因數：

$$19. a^6 + b^6; a^9 - b^9; a^9 + b^9; a^{12} + b^{12}$$

## 100. 三項式

求次之因數：

$$1. 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$7. x^4 - 3x^2y^2 + y^4$$

$$2. x^4y^2 + 2x^2yz + z^2$$

$$8. a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$$

$$3. 5x^2 - 38x + 21$$

$$9. 6x^2 - 17x + 5$$

$$4. 6b^2 - 29b + 35$$

$$10. 3x^2 + 8x - 7$$

$$5. 1 - 6xy + 5x^2y^2$$

$$11. (u+v)^2 + 4t(u+v) + 4t^2$$

$$6. 2x^2 + 11x + 12$$

$$12. 9k^2 + 6k(r+s) + (r+s)^2$$

化下分數式爲最低項：

$$13. \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$15. \frac{2a^2 + 17a + 21}{3a^2 + 26a + 35}$$

$$14. \frac{2x^2 + 5x + 3}{3x^2 + 7x + 4}$$

$$16. \frac{2m^2 + 5m + 2}{2m^2 + 7m + 3}$$

求次之結果：

$$17. \frac{b^2 + b - 6}{2b^2 + 5b - 3} - \frac{b^2 + 8b + 15}{2b^2 + 7b - 15}$$

$$18. \frac{10bx + 3b^2 + 3a^2}{10bx - 3b^2 - 3a^2} \div \frac{(3b+x)x}{(x-3b)b}$$

$$19. \frac{4a^3 - 9a}{a - 7} \cdot \frac{a^2 - 2a - 35}{2a^3 - 3a^2}$$



解下列方程：

$$20. \quad \frac{2}{3+2x} - \frac{3-4x}{9-4x^2} - \frac{3}{9-12x+4x^2} = 0$$

$$21. \quad \frac{2}{x+4} + \frac{2-x}{x^2-16} - \frac{2+x}{x^2-8x+16} = 0$$

## 101. 多項式

求次式之因數：

$$1. \quad 16a^2b^2 + 48a^2b - 16ab + 8a$$

$$4. \quad a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$$

$$2. \quad 6ax^2y + 8ax^3 - 3ay^2 - 4axy$$

$$5. \quad a^2 - b^2 + a + b$$

$$3. \quad x^4 + x^3 - x - 1$$

$$6. \quad x^4 + 4x^3 - 8x - 32$$

$$7. \quad m^2 + 6m - x^2 + 9 - 4xy - 4y^2$$

$$8. \quad 12y^3 + 3y^2 - 8y - 2$$

$$9. \quad a^3 + b^3 + a + b$$

$$12. \quad 3x^3 - 2x^2 + 5x - 6$$

$$10. \quad x^2y + y^2z + xz^2 - x^2z - xy^2 - yz^2$$

$$13. \quad x^3 + 9x^2 + 10x + 2$$

$$11. \quad 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

$$14. \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

化下式爲最低項：

$$15. \quad \frac{x^2 + ax + bx + ab}{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}$$

$$17. \quad \frac{2ax - 6x - 2ay + 6y}{3akx - 9kx - 3aky + 9ky}$$

$$16. \quad \frac{x^2 + ax + bx + ab}{x^2 + 3ax + 2a^2}$$

$$18. \quad \frac{2ax + 3bx + 4a + 6b}{x^2 + x(b+2) + 2b}$$

求次之結果：

$$19. \quad \frac{x^2 + y^2 + 2xy - z^2}{z^2 - x^2 - y^2 + 2xy} \cdot \frac{x+y+z}{y+z-x}$$

$$20. \quad \frac{3a-3b}{5c-5d} \cdot \frac{cx-dx+cy-dy}{am-bm+an-bn}$$

$$2i. \frac{1}{ab+ac-bk-ck} + \frac{1}{bm+cm+bk+ck}$$

### 劈 因 數 雜 題

102. 劈下式之因數:

1.  $x^5 - 1$

10.  $(x^2 - 5x)^2 - 2(x^2 - 5x) - 24$

2.  $16x^2 + 25y^2 + 40xy$

11.  $x(x+1)(4x-5) - 6(x+1)$

3.  $6x^2 + 11x - 10$

12.  $4x^4 + y^4 - 5x^2y^2$

4.  $x^4 + x^2y^2 + y^4$

13.  $a^4 - 14a^2b^2 + b^4$

5.  $x^4 + x^3y - xy^3 - y^4$

14.  $64x^{6a} - y^{12a}$

6.  $x^3 - 7x + 6$

15.  $a^2 + l^2 + 2ab + 8a + 8b - 9$

7.  $a^3c^3 + b^3$

16.  $a^4 + 4$

8.  $32a^2 - 29ab + 5b^2$

17.  $a^4 - a^2b^2 + b^2 - 1$

9.  $\frac{x^2}{y^2} - 3\frac{y^2}{x^2} + 2$

18.  $(a+b)^2 - (a^2 - b^2) - 6(a-b)$

### 分 數 之 雜 題

103. 解次列諸式:

1. 簡單

$$\left\{ \left( \frac{a^3}{c^3} - \frac{c^3}{a^3} \right) \div \left( \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \right\} \times \left\{ c^2 - \frac{c^4}{c^2 - a^2} \right\} \text{ (雪費爾大學)}$$

2. 簡單

$$\left\{ \frac{a^6 + c^6}{a^3c^3} - \left[ \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right] \right\} \div \left\{ \frac{a^2}{c^2} - \frac{c^2}{a^2} \right\}$$

以  $a=2, c=1$  代入原式及結果驗之。(雪費爾大學)

## 3. 簡單

$$\frac{m^2 + mn}{m^2 + n^2} \times \frac{m^3 - mn^2 - m^2 + n^2}{m^3n - n^4} \times \frac{m^2n^2 + mn^3 + n^4}{m^4 - 2m^3 + m^2}$$

$$\div \frac{m^3n + 2m^2n^2 + mn^3}{m^4 - n^4} \text{ (芝加高大學)}$$

## 4. 求次式之結果:

$$\frac{r+s}{(r-t)(s-t)} - \frac{s+t}{(r-s)(t-r)} - \frac{r+t}{(t-s)(s-r)} \text{ (芝加高大學)}$$

## 5. 化下列諸式爲簡單之形:

$$\frac{a^2 - 4ax - 21x^2}{a^2 - 49x^2} \quad \frac{ax + 2by + 2bx + ay}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

$$\frac{5am + 10an}{2m^2 + 5mn + 2n^2}, \quad \frac{1}{xy + y^2} - \frac{1}{x^2 + xy}$$

$$\frac{(a^2 - c^2)x^2 + 2ax + 1}{ax - cx + 1} \quad \frac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{a^2 - 1}$$

$$\frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)} \text{ (芝加高大學)}$$

## 6. 簡單

$$\frac{\frac{3}{x} - \left[ \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{x-1}{x+1} - \frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)} \right) \right]}{\quad} \text{ (普連士頓大學)}$$

## 7. 簡單

$$\left( \frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x} \right) \div \left( \frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x} \right) \text{ (哈佛大學)}$$

## 8. 化下列各式爲簡單之形:

$$\left( a^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2} \right) (a^2 + b^2) \div \left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right) \text{ (雪費爾大學)}$$

9.  $\frac{1-2x}{1-x^3} \cdot \frac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$  (雪費爾大學)
10.  $\frac{1+n-n^3-n^4}{1-a^2} \div \frac{n^2-1}{a^2-1}$  (雪費爾大學)
11.  $\left(5 - \frac{a^2-19a^2}{a^2-4a^2}\right) \div \left(3 - \frac{a-5x}{a-2x}\right)$  (耶魯大學)
12.  $1 - \left\{ \frac{c^3+y^3}{(c-y)^2} \div \left[ \frac{c^4+c^2y^2+y^4}{c^3-y^3} \times \frac{(c+y)^2}{c^2-y^2} \right] \right\}$  (教育部)
13.  $\frac{8c^3-1}{9c^2-12c+4} \cdot \left(1 - \frac{4}{3c+2}\right) \div \left(\frac{2c-1}{9c^2-4}\right)$  (教育部)
14.  $\left\{ \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} + \frac{4y^2}{y^2-x^2} \right\} \div \left(\frac{x-y}{x+y} - 1\right)$  (教育部)
15. 求次列二式之最高公因數及最低公倍數：  
 $x^3-3x^2+x-3$   
 $x^3-3x^2-x+3$  (哥倫比亞大學)

### 複分數之雜題

#### 104. 解次列諸式

1. 簡單下式：

$$\frac{\frac{a}{x-a} - \frac{x-a}{a}}{\frac{1}{x+a} + \frac{2a}{x^2-a^2}} \quad (\text{哈佛大學})$$

2.  $\frac{a}{b^2} - \frac{a}{b^2 + \frac{b}{a - \frac{c}{b}}}$  (哈佛大學)

## 3. 解次之方程.

$$\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x\right) = \frac{\left(x-3 + \frac{5x}{2x-6}\right) \frac{3}{2}x}{2x-1 + \frac{15}{x-3}} \quad (\text{耶魯大學})$$

化下列諸式爲最簡之形:

$$4. \frac{\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{2a}{a^2-x^2}}{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a-x} - \frac{2a}{a^2-x^2}} \quad (\text{芝加高大學})$$

$$5. \frac{\frac{a^2}{x^2} - 1}{\frac{a^2-2ax}{x^2} + 1} \quad (\text{芝加高大學})$$

$$6. \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{2}{1-x^4}}; \frac{2+ac + \frac{1}{ac}}{a^2c^2-1} \quad (\text{芝加高大學})$$

$$7. \frac{x^4+x^3-x-1}{1-y^2} \cdot \frac{y^2-1}{x^2-x} \left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) \quad (\text{普連士頓大學})$$

$$8. \frac{6a^3+7ab^2+12b^3}{3a^2-5ab-4b^2} - \frac{1}{\frac{3}{19b} - \frac{5r+4b}{19a^2}} \quad (\text{哈佛大學})$$

解下列各方程:

$$9. \frac{x - \frac{5}{3}}{\frac{5}{3}(x-1)} + \frac{\frac{7}{3} - x}{\frac{7}{3}(1+x)} = \frac{1}{35\left(1 - \frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{7}$$

$$10. \quad 1 + \frac{1}{a+x} = \frac{a}{x+2a+\frac{a^2}{x}} \quad (\text{哈佛大學})$$

$$11. \quad \text{求 } z: \quad \frac{c + \frac{z}{c-d}}{c - \frac{z}{c+d}} = \frac{2c}{1+d} \quad (\text{芝加高大學})$$

$$12. \quad \text{指明方程 } \frac{2ax}{x+2a^2+6a} = \frac{1}{\frac{x}{a^2+x^2-9} + \frac{a+3}{x}}$$

可化爲  $x^2(x^2-2ax+a^2-9)=0$  之形。(哈佛大學)

化下列諸式爲最簡之形：

$$13. \quad \frac{\frac{2y}{x+2y} - \frac{x}{2y-x} + \frac{8y^2}{x^2-4y^2}}{\frac{4y-x}{(2y-x)^2}}$$

$$1 - \frac{\left(1 - \frac{c^4}{9}\right) - \left(1 - \frac{c^4}{16}\right)}{1 - \frac{7c^4}{144}} \quad (\text{耶魯大學})$$

$$14. \quad \frac{\frac{a+b^2}{b} - a}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^3+b^3} \cdot \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)$$

$$15. \quad \frac{x^2}{a + \frac{x^2}{a + \frac{x^2}{a}}} \quad 16. \quad \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \quad (\text{可耐爾大學})$$

## 提 要

105. 分解多項式爲因數之法，依其所含之項數而不同。

## I. 二項式

1. 兩平方之較:

$$(1) x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(2) (a+b)^2 - (s+t)^2$$

$$= (a+b+s+t)(a+b-s-t).$$

2. 兩立方之較:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

3. 兩立方之和:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

4. 高於四次之相似冪之和與較:

$$x^5 - y^5; x^5 + y^5; x^7 - y^7; x^7 + y^7; \text{等}.$$

1. 三項式之爲  $ax^2 + bx + c$  之形者.

(1) 可用試驗法劈因數:

$$10x^2 - 17x + 3 = (2x-3)(5x-1)$$

(2) 可用公式劈因數:

$$ax^2 + bx + c = a(x-r_1)(x-r_2), r_1 \text{ 及 } r_2 \text{ 爲}$$

方程  $ax^2 + bx + c = 0$  之兩根.

## II. 三項式

2. 三項式之平方:

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

3. 不爲完全平方之三項式.

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$$

$$= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

III. 不爲 I  
及 II 中所  
有之形之  
多項式

1. 多項式之含有公共獨項因數者：

$$ax+ay+az=a(x+y+z)$$

2. 二項式之完全立方：

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

3. 多項式之項可集合而變爲上列諸  
式之形者：

$$(1) x^2 + 2xy + y^2 - k^2 = (x+y)^2 - k^2$$

$$(2) x^2 + 2xy + y^2 - a^2 + 2ab - b^2 \\ = (x+y)^2 - (a-b)^2$$

$$(3) x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 6 \\ = (x+y)^2 - 5(x+y) + 6$$

4. 多項式之含有二項式因數如  $x \pm a$   
之形者：

$$3x^3 - x^2 - 4x + 2 = (x-1)(3x^2 + 2x - 2)$$



## 第 六 章

## 指 數 根 數 無 理 方 程

## 正 整 指 數 之 基 礎 定 則

106. 底 指 數 乘 冪 記 號  $a^3$ , 表 示  $a \cdot a \cdot a$ . 又

$a^n$  表 示  $a \cdot a \cdot a \cdots$  (至  $n$  個 因 數).  $a$  為  $a^n$  之 底,  $n$  為  $a^n$  之 指 數,  $a^n$  稱 為  $a$  之  $n$  次 冪, 或 云  $a^n$  為 乘 冪.

故  $n$  為 一 個 正 整 數 時, 則  $a^n$  之 意 義 如 是.

107. 有 同 底 之 兩 乘 冪 之 積 有 同 底 之 兩 乘 冪

之 積, 可 以 簡 約 之 如 次:

$$1. \quad 5^3 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^7.$$

$$2. \quad (-2)^2(-2)^3 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = (-2)^5.$$

$$3. \quad a^m \cdot a^n = [a \cdot a \cdot a \cdots \text{至 } m \text{ 個 因 數}][a \cdot a \cdot a \cdots \text{至 } n \text{ 個$$

因 數]

$$= [a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots (m+n) \text{ 個 因 數}]$$

$$= a^{m+n}.$$

$$\therefore a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

上 之 定 律 試 以 文 言 表 示 之.

## 習 題

化 下 式 為 最 簡 單 之 形.

1.  $a^0 \cdot a$

8.  $(2a)^3 \cdot 3a^2$

2.  $(-a)^0 \cdot (-a)$

9.  $(-b)^3 - (-b)^5$

3.  $b^{2a} \cdot b^a$

10.  $(-2)^3 + (-5)^2 - (-1)^4$

4.  $a^{n+1} \cdot a^2$

11.  $2(x+y)^2 \cdot 3(x+y)^3$

5.  $x^{3r} \cdot x^r$

12.  $(a-b)^n \cdot (a-b)^{2n+3}$

6.  $a^x b^x \cdot a^{2x} b^{3x}$

13.  $3a^{2n+3} b^{n-4} \cdot 4a^{n-6} b^{3n-2} \cdot a^8 b^{4n}$

7.  $2a^3 \cdot 3a^2$

14.  $a^2(a+b)^5(a-b)^{r-1} \cdot a^r(a+b)^{r+1}$

設  $x = -2$ , 求下式之值:

15.  $3x^3 - 2x^2 + 5x - 4$

16.  $x^4 + 2x^5 - 7x^2 - 3x + 2$

求下列多項式之因數:

17.  $x^{4m} - 5x^{2m} + 6$

18.  $x^{m+4} + 2x^{m+2} + 10x^m$

108. 有同底之兩乘冪之商 下例乃表明求有同底兩乘冪之商之方法.

1.  $\frac{a^5}{a^3} = \frac{\underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdot a \cdot a}{\underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}}} = a^2.$

2.  $\frac{(-3)^6}{(-3)^4} = \frac{(-\underset{3}{\cancel{3}})(-\underset{3}{\cancel{3}})(-\underset{3}{\cancel{3}})(-\underset{3}{\cancel{3}})(-3)(-3)}{(-\underset{3}{\cancel{3}})(-\underset{3}{\cancel{3}})(-\underset{3}{\cancel{3}})(-\underset{3}{\cancel{3}})} = (-3)^2.$

3.  $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdots (m \text{ 個因數})}{\underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdot \underset{a}{\cancel{a}} \cdots (n \text{ 個因數})} = a \cdot a \cdots [(m-n) \text{ 個因數}]$   
 $= a^{m-n}$

$$\therefore \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ (設 } m > n \text{)}.$$

上述之定律試以文言表示之.

## 習 題

化下式爲最簡單之形：

1.  $x^{10} \div x$

7.  $\frac{a^2 \cdot a^{2n-1}}{a^n}$

2.  $\frac{m^{12}}{m^3}$

8.  $\frac{(a^2 - b^2)(x^3 + y^3)^2}{(x+y)^2(a+b)^2}$

3.  $(-a)^6 \div (-a)^2$

9.  $\frac{x^2 y^2 (x-y)^4}{(x^2 - y^2)(x-y)^3}$

4.  $\frac{a^{x+4}}{a^3}$

10.  $\frac{9a^6 b^3 c^4}{4x^4 y^2 z} \div \frac{3a^2 b c^3}{8x^5 y^2 z^3}$

5.  $\frac{(a+b)^{3x+y}}{(a+b)^{x+y}}$

11.  $\frac{x^4 y^7 z^2 + x^3 y^5 z}{xyz}$

6.  $\frac{a^{2n}}{a^2}$

109. 積之乘冪 下例乃說明求積之乘冪之方法：

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab$$

$$= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$$

$$= a^3 b^3.$$

依此指明  $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 5^3$  ;  $(3 \cdot a)^4 = 3^4 a^4$ .

指明  $(ab)^m = a^m b^m$  或  $a^m b^m = (ab)^m$

上之定律，試以文言表示之。

## 習 題

化下式爲乘冪之積：

1.  $(2ab)^4$

3.  $(3xyz)^4$

5.  $(abxy)^{2a}$

2.  $(xy)^3$

4.  $(-2ab)^2$

6.  $(2mn \cdot 3p)^{-a}$

求下列各式之值：

7.  $2^3 \cdot 3^3$

8.  $2^2 \cdot 5^2$

10.  $20^2 \cdot 5^2$

$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$

9.  $4^3 \cdot 25^3$

11.  $3^4 \cdot 2^4$

$= 6^3 = 216$

116. 商之乘冪 下例乃說明求商之乘冪之方法：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

依此指明

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}; \quad \left(\frac{2x}{3y}\right)^4 = \frac{(2x)^4}{(3y)^4}$$

指明  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ; 或  $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

上之定律,試以文言表示之

### 習 題

試以乘冪之商表示下式：

1.  $\left(\frac{xy}{2ab}\right)^4$

3.  $\left(\frac{10ab}{9ac}\right)^3$

5.  $\left(\frac{-2mt}{-5pq}\right)^4$

$$\left(\frac{xy}{2ab}\right)^4 = \frac{(xy)^4}{(2ab)^4} = \frac{x^4 y^4}{16a^4 b^4}$$

2.  $\left(\frac{3bc}{5x}\right)^2$

4.  $\left(-\frac{3xy}{4bz}\right)^4$

6.  $\left(\frac{(2x)(3y)}{(4a)(-b)}\right)^3$

求下列各式之值：

7.  $\frac{42^3}{7^3}$

8.  $\frac{6^5}{3^5}$

10.  $\frac{81^2}{9^2}$

$\frac{42^3}{7^3} = \left(\frac{42}{7}\right)^3 = 6^3$

9.  $\frac{8^4}{4^4}$

11.  $\frac{90^2}{15^2}$

111. 乘冪之乘冪 下例乃說明求乘冪之乘冪之方法:

$$(a^5)^3 = a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 = a^{15}.$$

依此指明  $(2^4)^3 = 2^{12}$ ;  $(a^3)^2 = a^6$ .

指明  $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ .

試用文言表示此定律.

### 習 題

簡約下式:

1.  $[(-2)^2]^3$

4.  $(a^4)^3$

7.  $(x^{a-b})^{a+b}$

2.  $(-2^2)^3$

5.  $(b^2)^3$

8.  $(a^{x-4})^{x-1}$

3.  $(x^5)^2$

6.  $(a^{n+1})^2$

9.  $(a^{2x})^{x-2}$

### 雜 題

112. 化下列諸式爲最簡單之形:

1.  $\left(\frac{2a^2b^3}{4x^2y}\right)^3$

6.  $\left[\left(-\frac{mn^2y^3}{pq^2z}\right)^3\right]^2$

2.  $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3 \cdot \left(\frac{3b^2}{4a}\right)^2$

7.  $\left(\frac{a^3b^4c^n}{ab^3c^2}\right)^n$

3.  $\frac{(x^2b^3)^5}{(xb^2)^3}$

8.  $(a^2 - b^2)^2$

4.  $\left(-\frac{2b^3x}{5a^2y}\right)^{2n}$

9.  $\left(\frac{a^3 + b^3}{a + b}\right)^2$

5.  $\left(\frac{3xy}{4z}\right)^8 \div \left(\frac{9x}{8z^2}\right)^4$

## 零指數 分數指數 負數指數

113.  $a^m$  爲  $a \cdot a \cdot a \cdots$  (至第  $m$  次) 之縮寫式, 故  $m$  必爲正整數。今當更進求零指數, 負數指數, 分數指數之意義。

114. 零指數  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  之定律, 乃假定  $m$  及  $n$  各爲正整數, 而  $m$  大於  $n$  者也。

$$\text{若假定 } m=n, \text{ 則 } \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0. \quad \frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0.$$

若將分子與分母各以公共因數  $a$  除之, 則

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1; \quad \frac{a^3}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1.$$

由此可知  $a^0$  爲一乘冪之自除, 而可認定其值爲 1。

總之, 若假定  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  之式可有  $m=n$ , 則

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

由化  $\frac{a^m}{a^m}$  爲最簡之形, 即得  $\frac{a^m}{a^m} = 1$ 。

故可認定  $a^0$  之值爲 1, 即

$$a^0 = 1.$$

於此須知  $a$  必不能爲 0, 因  $a$  爲 0, 則  $0^m$  亦必爲 0, 而

$$\frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0} \text{ 爲無意義也。}$$

## 習 題

決定下列各式之值:

$$10^0; x^0(-15)^0; (x+y)^0; (a-b+c)^0.$$

115. 負數指數 若認定  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  之式, 可有  $m < n$ , 則假定  $m=3, n=5$  而有

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}.$$

由化 
$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{\underset{\cdot}{a} \cdot \underset{\cdot}{a} \cdot \underset{\cdot}{a}}{\underset{\cdot}{a} \cdot \underset{\cdot}{a} \cdot \underset{\cdot}{a} \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}.$$

即可認定  $a^{-2}$  之意義為  $\frac{1}{a^2}$ .

依此,  $a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{-3} = \frac{1}{a^3}, a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

故 
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

### 習 題

求下列各式之值:

- |                       |                                    |                                    |
|-----------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $2^5 \cdot 2^0$    | 4. $8 \cdot 2^{-4}$                | 7. $3^{-1}$                        |
| 2. $6(a-b)^0$         | 5. $5^3 \cdot 5^{-2}$              | 8. $.125^{-1}$                     |
| 3. $\frac{1}{3^{-4}}$ | 6. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ | 9. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ |

試除去下列各恆等式之負指數而簡化之:

- |                            |  |
|----------------------------|--|
| 10. $a^8 \cdot a^{-2}$     | 14. $\frac{2a^{-2}b}{3a^3b^{-4}}$                |
| 11. $(-2x^{-4})(-3x^{-1})$ | 15. $\left(\frac{4x^2y^2}{3zx^{-2}}\right)^{-1}$ |
| 12. $-4a \div a^{-8}$      | 16. $\frac{(x^2y^{-1})^{-2}}{(a^2b^{-2})^{-2}}$  |
| 13. $(2a)^{-2}b^2$         | 17. $(a+a^{-1})(a-a^{-1})$                       |

18.  $(x+x^{-1})^2$

設  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$  求下列各式中  $x$  之值:

19.  $a^{x-2} = a^5$

21.  $(a^{x-2})^{x-1} = (a^{4-x})^{1-x}$

20.  $a^{2x+5} = a^{7-x}$

22.  $4^{x+1} = 8 \cdot 2^{x+2}$

116. 分數指數 若認定  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  之定律對於

分數指數為真,則有

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a; \quad a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a;$$

$$a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{4}} = a, \text{ 等.}$$

又因  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a; \quad \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} = a;$

$$\sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a} = a, \text{ 等.}$$

可知  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$

故  $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}.$

說明  $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdots$  至  $m$  個因數

$$= a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdots} \text{ 至 } m \text{ 項}$$

$$= a^{\frac{m}{n}}.$$

說明  $(a^m)^{\frac{1}{n}} = [a \cdot a \cdot a \cdots (\text{至第 } m \text{ 個因數})]^{\frac{1}{n}}$

$$= a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdots (\text{至第 } m \text{ 個因數})$$

$$= a^{\frac{m}{n}}$$

$$\therefore (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}.$$



$$\text{或 } \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

可見分數指數表明一乘冪之根,或表明一根之乘冪,其分子指冪次,其分母指根次.

## 習 題

求下列各式之值:

- |                         |  |   |
|-------------------------|--|---|
| 1. $4^{\frac{1}{2}}$    | 5. $(-125)^{\frac{1}{3}}$                      | 8. $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ |
| 2. $27^{\frac{1}{3}}$   | 6. $49^{-\frac{1}{2}}$                         | 9. $(25)^{\frac{1}{2}}$                       |
| 3. $(-8)^{\frac{1}{3}}$ | 7. $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$ | 10. $(32x^{-5}b^{10})^{\frac{1}{5}}$          |
| 4. $(64)^{\frac{1}{3}}$ |  |   |

117. 指數定則提要,及分數,負數,零指數之意義.

§§ 107, 116 所述之定則與意義,概括於次:

- |  |   |
|--|---|
| I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$                       | VI. $a^0 = 1, a \neq 0$                                 |
| II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$                    | VII. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$                           |
| III. $(a \cdot b \cdot c)^m = a^m b^m c^m$         | VIII. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$                   |
| IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ | IX. $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ |
| V. $(a^m)^n = a^{mn}$                              |   |

此等定律,對於  $m$  及  $n$  爲任何有理數,皆可適用,然由乘冪觀念之擴張,更可明瞭無理指數乘冪 (§ 146) 及虛數乘冪之意義.

## 雜 題

118. 改變下列各式爲恆等式而除去其負指數與零

指數：

1.  $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

10.  $(\sqrt[4]{x})^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{x^4})^{\frac{1}{2}}$

2.  $(x^{-\frac{1}{n}})^{-\frac{1}{m}}$

11.  $\left(\frac{4x}{9y}\right)^{\frac{1}{2}} \div \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{12y^{\frac{1}{2}}}$

3.  $(\sqrt[m]{a})^{2m}$

12.  $\frac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}$

4.  $(x^{\frac{m+n}{p}})^{\frac{p}{m-n}}$

13.  $a^{-8} + b^{-3}$

5.  $(ab^{-2}c^3)^{\frac{1}{2}}$

14.  $\frac{a^4}{a^{-4}+a^{-6}}$

6.  $\frac{b^{\frac{n-1}{n}}}{b}$

15.  $x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3}$

7.  $\frac{x^3y^2z^{-5}}{x^{-1}y^2z^2}$

16.  $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}y^{-2}}$

8.  $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$

17.  $\left(\frac{a^{-1}b}{a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}}\right) \div \left(\frac{a^{-3}}{b^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

9.  $\left(\frac{a^{-1}b^{-3}c^0}{a^2b^2}\right)^2$

18.  $\left(\frac{a^3b^{-4}}{a^{-2}b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-3}b^2}{xb^{-1}}\right)^5$

求次之結果：

19.  $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})$

22.  $(x^{-2} + x^{-1}y^{-1} + y^{-2})(x^{-1} - y^{-1})$

20.  $(x^{-4} + x^{-2} + x)(x - 2)$

23.  $(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$

21.  $(x^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}})^3$

24.  $(mx^{-2} + ny^{-1} + p)^2$

25.  $(a^{\frac{1}{2}} + a^2 + a^{\frac{3}{2}} + a + a^{\frac{1}{2}} + 1) \div (a + a^{\frac{1}{2}})$

$$26. (3y^{\frac{1}{2}} + 6x + 9x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}y) \div (y + 3x^{\frac{1}{2}})$$

求下列二式之平方根：

$$27. 4a^2 - 4ab^{\frac{1}{2}} + 4ac^{-\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}} + c^{-1}$$

$$28. x^{\frac{1}{2}}y^{-1} + 4xy^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 9y$$

簡單下列分數式：

$$29. \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}; \frac{x+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$$

### 各大學入學試驗算題彙集

†119. 簡單下列各式：

$$1. (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}) \div 54^{-\frac{1}{2}} \text{ (雪費爾大學)}$$

$$2. xy^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 \div (x^{\frac{1}{2}}y^{-3})^{-1}$$

$$3. 2(8)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}(12)^{\frac{1}{2}} - 2(3)^0 + (a^{\frac{1}{2}}b^{-1})^{8b^3} - \frac{1}{a^{-1}+b^{-1}}$$

$$4. (axy^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot (bxy^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot (y^2a^{-2}b^{-2})^{\frac{1}{2}} \text{ (普連士頓大學)}$$

$$5. \frac{(4p^4q)^3}{(9p^2q^2)^4} \div \frac{(p^2q^5)^2}{2q^5} \text{ (耶魯大學)}$$

$$6. \frac{x^{-1}y^0z^{-3}}{x^{-2}y^3z^2}; \frac{a^0x^{-3}y^{\frac{1}{2}}}{a^2x^{-2}y^{-\frac{1}{2}}} \text{ (耶魯大學)}$$

$$7. (a^4 + x^4)(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$8. \frac{ax(a^{-1}x - ax^{-1})}{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}$$

$$9. [x^{-4a} + x^{-2a}y^{2b} + y^{4b}] \div \left[ \frac{1}{x^{2a}} - \frac{x^{-a}}{y^{-b}} + y^{2b} \right] \text{ (芝加高大學)}$$

10.  $\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r} \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p} \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q}$ . (M. I. T.)

11. 求  $x$ :  $(x+1+x^{-1})(x-1+x^{-1})=5\frac{1}{4}$

12. 以  $x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}$  乘  $x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$

13. 求  $a^{-2}+9b^{\frac{2}{3}}+16c^{-\frac{1}{2}}+6a^{-1}b^{\frac{2}{3}}-8a^{-1}c^{-\frac{1}{2}}-24b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{2}}$  之平方根.

14. 設  $x=2$ , 求  $\frac{1+8^{-\frac{x}{3}}}{(8x)^{\frac{1}{3}}+10^{x-2}}$  之值.

15. 以  $u$  及  $v$  表示  $x^2+y^2$  之值, 設

$$x=u+v \frac{v^{-\frac{1}{3}}}{u^{-\frac{1}{3}}}, \quad y=v+u \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{v^{-\frac{1}{3}}}.$$

又化答數爲最簡單之形.

## 根 數

### 120. 根數 被開方數 根指數 次數

顯明一數之方根之式如  $\sqrt{5}$   $\sqrt[3]{64}$   $\sqrt[4]{a+1}$  等, 名曰根數. 方根符號內之數曰被開方數.

指出下列各根數之被開方數:  $\sqrt{3}$ ,  $2\sqrt[4]{x+2}$ ,  $\sqrt[3]{a}$ . 表示所求方根之次數之數曰根指數.

指出下列根數之根指數:  $\sqrt[4]{26}$ ,  $\sqrt[3]{xy}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[n]{a}$ .

根指數, 乃指明根數之次數者也.

## 習 題

1. 由一數之平方根之意義, 反推之而求  $\sqrt{2} \sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3} \sqrt{3}$ ;  $\sqrt{a} \sqrt{a}$ ;  $(\sqrt{a})^2$  之值.

2. 求  $\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{3}$ ;  $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{4}$ ;  $\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a}$ ;  
 $(\sqrt[3]{a})^3$  之值.

3.  $\sqrt{a}$  之意義為何?

4. 試由  $\sqrt[n]{a} \equiv a^{\frac{1}{n}}$ , 說明  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ;  $\sqrt[n]{a^n} = a$ .

5. 說明  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  或  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ .

6. 以文言述習題 4 與 5 所表示之原則.

7. 求  $\sqrt{9}$ ;  $\sqrt[3]{64}$ ;  $\sqrt[4]{81}$ ;  $\sqrt[5]{32}$  之值.

8. 以  $(a - \sqrt{b})$  乘  $(a + \sqrt{b})$ ;

以  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$  乘  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ .

9. 簡化  $\frac{a}{\sqrt{a}}$ ;  $\frac{x+y}{\sqrt{x+y}}$ ;  $\frac{m-n}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$ .

10. 求  $\sqrt{3} \sqrt{27}$ ;  $\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{3}$ ;  $\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{a}$  之值.

11. 求  $\sqrt{100-36}$ ;  $\sqrt{16+9}$ ;  $(4+3\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})$  之值.

## 根數化法

121. 取去方根內之因數 下例指明取去方根內之因數法.

$$1. \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2. \sqrt[3]{16x^5y^2} = \sqrt[3]{8 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^2y^2} = \sqrt[3]{8 \cdot x^3} \sqrt[3]{2x^2y^2} \\ = 2x \sqrt[3]{2x^2y^2}$$

$$3. \sqrt[3]{(a+b)^2(a^2-b^2)} = \sqrt[3]{(a+b)^2(a+b)(a-b)} = (a+b)\sqrt[3]{a-b}$$

若方根內因數之冪數等於或大於根數之根指數，則此根數可化為簡單。

## 習 題

化下列根數為最簡單之形：

1.  $\sqrt{75}$

9.  $\sqrt[3]{216a^3b^6c^9}$

2.  $\sqrt{45}$

10.  $\sqrt{a^2b^2+a^3b^4}$

3.  $\sqrt{98}$

11.  $\sqrt{9ab^2-9b^3}$

4.  $3\sqrt[3]{40}$

12.  $\sqrt{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

5.  $\sqrt[4]{1250}$

13.  $\sqrt[4]{81m^5n^4}$

6.  $\sqrt[4]{512}$

14.  $\sqrt{3x^3+18x^2+27x}$

7.  $\sqrt[3]{8(a+b)^6}$

15.  $\sqrt{(x^2-5x+6)(x^2-3x+2)}$

8.  $5\sqrt[3]{24x^6y^5z^4}$

16.  $\sqrt{a^2x^4+2abx^4+b^2x^4}$

122. 化分數式之被開方數為整數式之被

開方數 下例乃指示化分數式之被開方數為整數式

之被開方數之法：

1. 
$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

2. 
$$\sqrt{\frac{2}{3x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3x}{3x \cdot 3x}} = \frac{1}{3x} \sqrt{6x}$$

3. 
$$\sqrt[3]{\frac{81}{4x^4}} = \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 3}{4x^3 \cdot x}} = \frac{3}{x} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2x^2}{4x \cdot 2x^2}} = \frac{3}{2x^2} \sqrt[3]{6x^2}$$

故化分數式之被開方數爲整數式之被開方數，須先化被開方數爲最簡之式，然後以一數乘被開方數之分子分母，令分母之乘幕之指數與根式之根指數相同。

## 習 題

化下式爲最簡單之形：

1.  $\sqrt[3]{\frac{8x^4y}{27z^4}}$

4.  $\sqrt[3]{\frac{27a}{5b^2}}$

7.  $\sqrt[5]{\frac{4}{125a^3}}$

2.  $\sqrt[3]{\frac{3a}{25x^2}}$

5.  $\sqrt[4]{\frac{5a^3}{9b^3}}$

8.  $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{ac}}$

3.  $\sqrt[3]{\frac{120}{15}}$

6.  $\sqrt{\frac{5x^3}{3a^2y}}$

9.  $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

## 123. 根數次數之變化

下例乃說明化根數次數之方法：

1.  $\sqrt[6]{8} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

3.  $\sqrt[9]{64} = (2^6)^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$

2.  $\sqrt[6]{x^4} = x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{6}} = \sqrt[3]{x^2}$

## 習 題

化下式爲最低次：

1.  $\sqrt[4]{25}$

4.  $\sqrt[12]{64}$

7.  $\sqrt[3]{9}$

2.  $\sqrt[9]{27}$

5.  $\sqrt[10]{32}$

8.  $\sqrt[9]{125a^3b^3}$

3.  $\sqrt[3]{a^2b^4}$

6.  $\sqrt[2]{49}$

9.  $\sqrt[2]{27x^6y^3}$

## 根數之加減法

124. 同類根數 若兩根數已化爲最簡之式, 而其根數相同, 又其被開方數亦同, 則此兩根數謂之同類根數。

試說明  $3\sqrt{6}$  及  $5\sqrt{6}$  爲同類根數; 又  $\sqrt{x^3y}$  及  $3\sqrt{xy}$  亦爲同類根數。

凡加減根數, 必須先將各根數化爲最簡之式, 然後集合其同類根數。

$$\text{例如 } \sqrt{2} + \sqrt{8} + 3\sqrt{50} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 18\sqrt{2}.$$

$$3\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{24} + \sqrt{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{\frac{6}{16}} - \sqrt{4 \cdot 6} + \sqrt{\frac{6}{9}}$$

$$= \left(\frac{3}{4} - 2 + \frac{1}{3}\right)\sqrt{6} = \frac{11}{12}\sqrt{6}.$$

$$\sqrt{4x+4y} - \sqrt{16x^3+16x^2y} = 2\sqrt{x+y} - 4x\sqrt{x+y}$$

$$= (2-4x)\sqrt{x+y}.$$

## 習 題

簡單下式, 且集合其同類項:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $4\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$                      | 5. $\sqrt{\frac{3a}{b}} + \sqrt{\frac{3b}{a}} - \sqrt{\frac{ab}{3}}$ |
| 2. $3\sqrt{98} - 7\sqrt{80} - 3\sqrt{18}$                              | 6. $3\sqrt{98} - 25\sqrt{3} + \sqrt{108}$                            |
| 3. $10\sqrt{\frac{6}{5}} - \sqrt{\frac{3}{10}} + 4\sqrt{\frac{15}{2}}$ | 7. $281 + \sqrt{63} + \sqrt{112}$                                    |
| 4. $\sqrt{\frac{4}{7}} + 5\sqrt[3]{9} + \sqrt{175}$                    | 8. $\sqrt[2]{9} + 2\sqrt[2]{27} - 2\sqrt[3]{-24}$                    |



$$9. \sqrt[4]{32a^5} + \sqrt[4]{512a} + \sqrt[4]{2a} \quad 10. \sqrt{28} - \sqrt{7} + 3\sqrt{175}$$

$$11. 4\sqrt{1+a^2} - \sqrt{9+9a^2} - 2\sqrt{b^2+a^2b^2}$$

## 根 數 之 乘 法

125. 同次根數之乘法 施乘法之先必化根數之各項為最簡之式。

$$\text{說明 } \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{6 \cdot 7} = \sqrt{42}$$

$$\begin{aligned} \text{及 } 3\sqrt[3]{xy^4c} \cdot 5\sqrt[3]{cd^5} &= 3y\sqrt[3]{xyc} \cdot 5d\sqrt[3]{cd^2} \\ &= 15dy\sqrt[3]{xy^3d^2} \end{aligned}$$

### 習 題

實施乘法：

$$1. \sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a}$$

$$4. (\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{5}$$

$$2. \sqrt[3]{x^5}\sqrt[3]{a^2}$$

$$5. (2\sqrt{5} - 5)(3 - \sqrt{5})$$

$$3. 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot 7\sqrt{35}$$

$$6. (\sqrt{6} + \sqrt{10})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

126. 不同次根數之乘法 不同次之根數相乘，必先化不同次根數為同次根數，然後方可實施乘法。

$$\text{例如 } \sqrt[3]{4} \sqrt{5} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{2}{6}} \cdot 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{4^2} \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{2000}$$

$$\begin{aligned} \text{依此, } 4\sqrt{xy} \cdot 3\sqrt[3]{x^2y} &= 4\sqrt[6]{x^3y^3} \cdot 3\sqrt[6]{x^4y^2} = 12\sqrt[6]{x^7y^5} \\ &= 12x\sqrt[6]{xy^5} \end{aligned}$$

### 習 題

實施乘法：

1.  $\sqrt[4]{x^8} \sqrt{x}$       3.  $\sqrt{2x} \sqrt[3]{3x^2}$       5.  $\sqrt[3]{2} \sqrt[5]{4}$   
 2.  $\sqrt[3]{x^2} \sqrt{x^3}$       4.  $\sqrt[3]{x^2} \sqrt{x}$       6.  $\sqrt[3]{9x^2} \cdot \sqrt{15x}$

## 根數之除法

### 127. 單項根數之除法 單項根數相乘,亦須先

化根數為同次根數,然後實施除法。

$$\text{例如 } \sqrt[5]{x^3} \div \sqrt{x^5} = \sqrt[5]{x^3} \div x^2 \sqrt{x} = \sqrt[10]{x^6} \div x^2 \sqrt[10]{x^5} = \frac{1}{x^2} \sqrt[10]{x}$$

### 習 題

實施除法:

1.  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$       3.  $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}}$       5.  $\frac{6\sqrt{x}}{2\sqrt[3]{x}}$   
 2.  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$       4.  $\frac{2\sqrt[3]{54}}{\sqrt{2}}$       6.  $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{9}}$

### 習 題

### 128. 簡單下式:

1.  $\sqrt{\frac{36a^3}{3^4b} \cdot \frac{3^2c^{-2}}{24a} \cdot \frac{9b}{8c^4}}$   
 2.  $\left(\frac{x^3}{y^{\frac{1}{2}}z}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(\frac{\sqrt{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}}{x^2z^{-1}}\right)^{-2}$  (普連士頓大學)  
 3.  $\sqrt[7]{x^2y^{12}} \left(\frac{1}{xy}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y^2}{x^3}\right)^{-\frac{1}{7}}$  (雪費爾大學)  
 4.  $\sqrt[3]{2x} \div \sqrt{8x^3}; (1-x) \div (1-\sqrt[3]{x});$   
 $2^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}; (a+b) \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}$

5.  $\left(\frac{\sqrt[5]{3}}{3^{\frac{1}{4}}}\right)^8 - \sqrt{3 \cdot 27^{-1}} + (-243)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\sqrt{3^{-1}}}{2^{-1}}\right)^2$  (芝加高大學)
6.  $-x^2(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{9-x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$  (雪費爾大學)
7.  $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} - \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \frac{2x}{x^2-y^2} \sqrt{x^2-y^2}$  (雪費爾大學)
8.  $\sqrt{a^3-a^2b} - \sqrt{ab^2-b^3} - \sqrt{(a+b)(a^2-b^2)}$  (芝加高大學)
9.  $3\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{40} + \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}}$  (雪費爾大學)
10.  $3\sqrt{\frac{2}{5}} + 2\sqrt{\frac{1}{10}} - 4\sqrt{\frac{1}{40}}$  (雪費爾大學)
11.  $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}; 2\sqrt{20} - \sqrt[4]{80} + \sqrt{\frac{4}{5}}$  (雪費爾大學)
12.  $\sqrt{\frac{1}{7}} + \sqrt{63} + 5\sqrt{7}; (4\sqrt[5]{7} - 8\sqrt[5]{21} + 6\sqrt[5]{42}) \div 2\sqrt[5]{7}$
13.  $\sqrt[4]{\frac{9}{625}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{12}; a\sqrt{\frac{x}{a}} + x\sqrt{\frac{a}{x}}$
14. 不用開方法而決定下列諸式之大小:  
 $\sqrt[3]{10}, \sqrt{6}, \sqrt[4]{17},$

### 有理化分母法

129. 有理化分母 變分數之無理分母為有理分母，而不變分數之值曰有理化分母。由此方法，可免實施除法時分母為小數之弊。

例如求  $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$  之值，必以 3 之平方根之近似值與 2 之和除 1。

若分子分母同以  $2-\sqrt{3}$  乘之，則得

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

由是，從 2 減去  $\sqrt{3}$ ，即得  $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$  之值，計算甚易。

又由有理化分母法，於求分數之值時，可減少求平方根之數。

$$\text{例如 } \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}$$

由此可見求此已知分數之值，本為以兩個平方根之和除兩個平方根之較之小數除法，自化分母為有理數，則分子僅留一個平方根，而分母化為有理數，計算較易。

化分母為有理數之乘數，稱為分母之有理因數。

根數之成  $a+\sqrt{b}$ ， $a-\sqrt{b}$  或  $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ， $\sqrt{x}-\sqrt{y}$  之形者，稱為共軛根數。

### 習 題

變下列分數式為有理分母之等值分數式：

1.  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

2.  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

3.  $\frac{3+\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$

4.  $\frac{a}{\sqrt{a+b}}$

9.  $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{5}}$

5.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

10.  $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

6.  $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

11.  $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-6\sqrt{2}}$

7.  $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

12.  $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

8.  $\frac{3\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}+3}$

13.  $\frac{2-\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

14. 求第 6 題至第 10 題之值至有效數字三位。

### 雜 題

1130. 解下列各題：

1.  $\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}} = \frac{x}{2a}$  求  $x$ 。

2. 簡單  $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$

3. 簡單  $\sqrt{\frac{\sqrt{20}+\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$

4.  $\frac{1}{x} \left[ \frac{1}{\frac{1}{x}+1} - \frac{1}{\frac{1}{x}-1} \right] + \frac{1+x\sqrt{2}}{1-x\sqrt{3}} = \frac{3x^2-2x-3}{1-x^2}$  (耶魯大學)

5. 求  $\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \div \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-2}$  之近似值至小數三位：

(M. I. T.)

6. 化  $\frac{1}{2+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$  之分母爲有理數且計其值至小數兩位。(耶魯大學)
7. 簡單  $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{12}}$  且計算其值至小數兩位。
8. 於方程  $5x=\sqrt{3}(1+2x)$ , 求  $a$ , 而以有理分母之分數表示之。
9. 簡單  $2x^2\sqrt{9x^2+81}+27\sqrt{4x^2+36}$ .

### 根數式之平方根

131. 二項式  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$  之平方, 等於  $a+b+2\sqrt{ab}$ . 故  $\sqrt{a}+\sqrt{b}$  爲二項式  $(a+b)+2\sqrt{ab}$  之平方根。

故求二項式  $x+a\sqrt{y}$  之平方根時, 若能變  $x+a\sqrt{y}$  爲  $(a+b)+2\sqrt{ab}$  之形, 則其平方根可以求得。

以例說明如次:

1. 求  $8+\sqrt{48}$  之平方根

$$\begin{aligned} 8+\sqrt{48} &= 8+2\sqrt{12} \\ &= 8+2\sqrt{6 \cdot 2} \\ &= 6+2+2\sqrt{6 \cdot 2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{8+\sqrt{48}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

2. 求  $38+3\sqrt{32}$  之平方根。

$$\begin{aligned} 38+3\sqrt{32} &= 38+\sqrt{9 \cdot 32} \\ &= 38+\sqrt{9 \cdot 8 \cdot 4} \end{aligned}$$

$$=38+2\sqrt{72}$$

$$=38+2\sqrt{36 \cdot 2}$$

$$=36+2+2\sqrt{72}$$

$$\therefore \sqrt{38+3\sqrt{32}}=6+\sqrt{2}$$

## 習 題

求習題 1—9 之平方根：

1.  $3-2\sqrt{2}$

4.  $7+4\sqrt{3}$

7.  $3-\sqrt{5}$

2.  $6-2\sqrt{8}$

5.  $11-3\sqrt{8}$

8.  $7+\sqrt{48}$

3.  $11-4\sqrt{7}$

6.  $14+6\sqrt{5}$

9.  $11-6\sqrt{2}$

10. 用兩個不同之方法求  $\sin 15^\circ$ , 所得之結果, 一為  $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ , 一為  $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ , 試證此兩結果之值相等。

## 無 理 方 程

132. 二次式之無理方程 無理方程有時能變之為二次方程之形而以二次方程之解法解之。

例如方程  $7x^2-5x+1-8\sqrt{7x^2-5x+1}=-15$ ,

若命  $a=\sqrt{7x^2-5x+1}$

則可變之為  $a^2-8a+15=0$ ,

指明  $a_1=5$ ,  $a_2=3$

$$\therefore \sqrt{7x^2-5x+1}=5, \quad \sqrt{7x^2-5x+1}=3.$$

平方此兩方程之兩端得二次方程, 即可求得  $x$  之值。

## 習 題

解次之方程：

$$1. \quad x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x - 2} = 10$$

從方程之兩端各減去 2.

$$2. \quad 6y^2 - 3y - 2 = \sqrt{2y^2 - y}$$

注意  $6y^2 - 3y = 3(2y^2 - y)$

$$3. \quad x^2 - 3x + 4 + \sqrt{x^2 - 3x + 15} = 19$$

$$4. \quad y^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{8}y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

$$5. \quad 4x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

$$6. \quad x^{-\frac{2}{3}} - 5x^{-\frac{1}{3}} + 4 = 0$$

$$7. \quad 3y^{-\frac{1}{2}} + 20y^{-\frac{3}{2}} - 32 = 0$$

$$8. \quad (a+2)^{\frac{1}{2}} - (a+2)^{-\frac{1}{2}} - 2 = 0$$

$$9. \quad \sqrt[3]{7a-6} + 4 = 4\sqrt[2]{7a-6}$$

133. 化無理方程爲有理方程以解無理方程之法 次例乃說明化無理方程爲有理方程而解之之法。

$$1. \quad \text{解} \quad \sqrt{x+13} - \sqrt{x+6} = 1, \text{且覆驗之.}$$

$$\text{兩端各加} \quad \sqrt{x+6}, \quad \sqrt{x+13} = 1 + \sqrt{x+6}.$$

$$\text{平方兩端,} \quad x+13 = 1 + 2\sqrt{x+6} + x+6$$

$$\therefore 3 = \sqrt{x+6}$$



再平方兩端,得  $9 = x + 6$

$$\therefore x = 3$$

2. 解  $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} - \sqrt{5x+5} = 0$

移項,  $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{5x+5}$

平方兩端,  $x + 2\sqrt{2x^2+x} + 2x+1 = 5x+5$

$$2\sqrt{2x^2+x} = 2x+4$$

以 2 除兩端  $\sqrt{2x^2+x} = x+2$

平方兩端,  $2x^2+x = x^2+4x+4$

$$\therefore x_1 = 4, \quad x_2 = -1$$

$x = -1$ , 與原式不合, 僅能合於第三式. 因知此值為平方第二式時所混入也. 由是  $x = -1$  稱為原式之增根.

由例 2, 可知解無理方程所得之根, 未必皆為合於此方程之根. 故所得之結果, 必驗之於原方程式:

### 習 題

解下之方程式並驗其結果:

1.  $y + 2\sqrt{y-1} - 4 = 0$  (雪費爾大學)

2.  $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} = 6$  (雪費爾大學)

3.  $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x+10} = 1$

4.  $\sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3$

5.  $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$  (普連士頓大學)

6.  $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} = \sqrt{2a+2b}$

$$7. \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = \sqrt{7x+21} \quad (\text{普連士頓大學})$$

$$8. \sqrt{7x-5} + \sqrt{4x-1} = \sqrt{7x-4} + \sqrt{4x-2} \quad (\text{哈佛大學})$$

$$9. \frac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{5x-4} - \sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}$$

應用加減法。

$$10. \sqrt{8x-7} - \frac{2x-2}{\sqrt{2x+3}} = \sqrt{2x+3}$$

除去分數。

$$11. \sqrt{3+x} + \sqrt{x} = \frac{6}{\sqrt{3+x}}$$

$$12. \frac{2y-3}{\sqrt{y-2}} = 2\sqrt{y-2} - 1$$

$$13. \frac{ax-1}{\sqrt{ax+1}} - 4 = \frac{\sqrt{ax-1}}{2}$$

化第一分數爲最簡之式。

$$\dagger 14. \frac{x-b}{\sqrt{x} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{3} + 2\sqrt{b}$$

$$\dagger 15. \frac{a-x}{\sqrt{a-x}} + \frac{x-b}{\sqrt{x-b}} = \sqrt{a-b}$$

16. 化  $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$  爲不帶根數之方程且簡單之。

†17. 簡單下列方程式：

$$\sqrt{x^3 + ax^2 - a^2x - a^3} - \sqrt{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3} - a\sqrt{4x-4a}$$

假定  $(x-a)(x+a)$  皆爲正。 (哈佛大學)

## 三角方程

134. 三角方程有歸於無理方程之解法者。

例如  $\tan \theta + \sec \theta = 3$ . 求  $\theta$ .

因  $\sec \theta = 3 - \tan \theta$

而  $\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$

故  $\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = 3 - \tan \theta$

平方兩端,得

$$1 + \tan^2 \theta = 9 - 6 \tan \theta + \tan^2 \theta$$

$$\therefore 6 \tan \theta = 8$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{4}{3}$$

由是,  $\theta$  之值, 可從正切表中求得之.

### 習 題

解次之方程:

1.  $2 \sin \theta = 1 + \cos \theta$

2.  $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

### 提 要

135. 本章已授下列各名詞之意義:

底數.	根指數.
指數.	根數之次數.
乘幕.	數之有理化.
根數.	無理方程.
同類根數.	零指數.
共軛根式.	分數指數.

負數指數。

被開方數。

136. 下列諸問題，乃本章所認為最緊要者：

1. 述下列各式之意義：

I.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

VI.  $a^0 = 1$

II.  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

VII.  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

III.  $(a \cdot b \cdot c)^m = a^m b^m c^m$

VIII.  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

IV.  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

IX.  $a^{\frac{m}{n}} = \left\{ \sqrt[n]{a^m} \right\}$

V.  $(a^m)^n = a^{mn}$

2. 說明解決下列問題之方法：

1. 化含有負指數或零指數之式為不含負指數或零指數之式。

2. 從被開方數內取出因數。

3. 化分數式之被開方數為整數之形。

4. 化根數之次數。

5. 根數之加減。

6. 同次數與不同次數之根數乘法。

7. 有理化分母。

8. 求  $x+a\sqrt{y}$  形狀之二項式之平方根。

9. 解無理方程。

10. 解歸於無理方程解法之三角方程。

# 第 七 章

## 對 數 計 算 尺

### 省 略 計 算

137. 測度之精密度 以已知吋數或公分數之線段與一線段比較,名爲測度此線段。

如欲測度 $AB$ (第五十八圖),則可於方格紙上作等於 $AB$ 長之線如 $A'B'$ 。

$A$  —————  $B$

用 2 公分爲單位,則可量得 $A'B'$ 之測度爲 1.76。此 6 爲近似之估計,非謂 $AB$ 線之長恰爲 1.76 也。更用較精密之說法,則此線之長在 1.755



第五十八圖

與 1.765 之間,故知此 1.76 即表示求至有效數字三位之結果。測度之精密否,視數位之多少而定。普通之器具,可用以求測度至有效數字三位,測量時,常用四位數,若用極精密之器具,則可求測度至有效數字五位。

138. 省略乘法 由測度法所得兩數之加,減,乘,除之結果,不必精密的合於實際,故宜略去積或商無關緊要之數字,以免演算之煩。

下例乃說明兩個近似數值之簡略乘法:

例. 求以 7.8043 乘 2.4301 之結果,至第五位有效數字。

布式如下：

$$\begin{array}{r}
 2.4301 \times 7.8043 \\
 \hline
 72903 \\
 97204 \\
 194408 \\
 170107 \\
 \hline
 1896522943
 \end{array}$$

由上兩數之乘法，發現下列事項：

因於 7.8043 內，3 為不確定之數，故 72903 為不確定之積，故於各數字底下作橫線記之。

依此第二部分積 97204 內之 4 亦為不定，知其最後之結果 18.96522943 僅精密至有效數字五位，其第五位數字 5 為不定數，故直線右側之諸數字皆可略去。

更簡單之法，可將各部分積依其逆次序而寫之，即以 7 乘 2.4301，又以 8 乘 2.430，又以 4 乘 2.4，又以 3 乘 2，其算式如次：

$$\begin{array}{r}
 2.4301 \times 7.8043 \\
 \hline
 17.010 \quad \underline{7} \\
 1.944 \quad 0 \\
 \quad 9 \quad 6 \\
 \quad \quad 6 \\
 \hline
 18.964 \quad \underline{9}
 \end{array}$$

習 題

1. 以省略乘法求次之積:

$$12.13 \times 119.4; \quad 14.625 \times .32814;$$

$$.1342 \times 2.16$$

2. 一立方公分之水銀重約 13.596 格蘭姆, 問 7.43 立方公分之水銀重若干?

3. 設一公尺約等於 39.37 吋, 問一平方公尺含若干平方吋?

139. 省略除法 此法則可以例說明之如次:

以 1.231 除 6.384

$$\begin{array}{r}
 6.384 \quad | \quad 1.231 = 5.189 \\
 \hline
 6.155 \\
 \hline
 229 \\
 \hline
 123 \\
 \hline
 106 \\
 \hline
 96 \\
 \hline
 10 \\
 \hline
 9 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

置除數於被除數之右, 而於不定數字之下記一直線, 可知 6384 含 1231 之 5 倍, 其除數為 229, 舍去除數之第末數字, 又求得 229 含 123 之 7 倍, 其餘數為 106, 舍去除數之法, 繼續進行, 直至除數之數字舍盡為止, 於是得商數為 5.189, 而 9 為不定數。

習 題

1. 求次之商:

$$63.4 \div 26.8; \quad 86.423 \div 18.25$$

2. 太陰月有 29.531 日，問一年 365.24 日有若干太陰月。

140. 對數之功用 由對數之功用，可以加減運算代乘除運算，省略乘除法如 §§ 138 及 139，所述可施之於簡單之乘除運算；若一題內含有多次之乘除運算，則宜用對數為便。

對數之意義，與其計算之理論，當於本章之 §§ 145 至 160 中詳言之。

141. 計算尺之功用 數之積，商，冪，根，可用計算尺求之，欲明對數之原理，必須先明計算尺之結構，計算尺之原理，與其用法之討論，詳於 §§ 163 至 166 中。

142. 表之功用 方乘方根表為學者所常用，因其可節省時間，且免除許多不應用之演算也，今再述數學上應用之表。

## 對 數

143. 指數表 下圖之表，乃歷舉 2 之 25 次乘冪。

$2 = 2^1$	$1,024 = 2^{10}$	$262,144 = 2^{18}$
$4 = 2^2$	$2,048 = 2^{11}$	$524,288 = 2^{19}$
$8 = 2^3$	$4,096 = 2^{12}$	$1,048,576 = 2^{20}$
$16 = 2^4$	$8,192 = 2^{13}$	$2,097,152 = 2^{21}$
$32 = 2^5$	$16,384 = 2^{14}$	$4,194,304 = 2^{22}$
$64 = 2^6$	$32,768 = 2^{15}$	$8,388,608 = 2^{23}$
$128 = 2^7$	$65,536 = 2^{16}$	$16,777,216 = 2^{24}$
$256 = 2^8$	$131,072 = 2^{17}$	$33,554,432 = 2^{25}$
$512 = 2^9$		



用此表可化乘除計算爲加減計算,其所根據之定理爲

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ 及 } a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

例如 求  $512 \times 16,384$  之積。

$$\begin{aligned} \text{由表可知 } 512 \times 16,384 &= 2^9 \times 2^{14} \\ &= 2^{23} \\ &= 8,388,608. \end{aligned}$$

由是若將指數 9 與 14 相加,即得欲求之積。

依此,求  $524,288 \div 8,192$  之商。

$$\text{由表可知 } 524,288 \div 8,192 = 2^{19} \div 2^{13} = 2^6 = 64.$$

### 習 題

求下列各式之值:

- |   |                              |
|---|------------------------------|
| 1. $16 \times 512.$   | 4. $4,194,304 \div 131,072.$ |
| 2. $2,048 \times 128.$  | 5. $8,192 \div 256.$         |
| 3. $65,536 \times 256.$   | 6. $131,072 \div 16,384.$    |
| 7. $\frac{128 \times 16 \times 16,384}{256 \times 32 \times 1,024}$ |                              |

由此可見最完備之指數表,對於乘除之運算非常便利。

下列諸例,乃顯明此表對於求乘冪與開方之功用。

1. 求 2,048 之平方。

$$\text{由表知 } 2,048 = 2^{11}.$$

$$\text{故 } (2,048)^2 = (2^{11})^2 = 2^{22} = 4,194,304.$$

2. 求 1,048,576 之平方根。

由表知  $1,048,576 = 2^{20}$ .

故  $\sqrt{1,048,576} = \sqrt{2^{20}} = (2^{20})^{\frac{1}{2}} = 2^{10} = 1,024$ .

第五十九圖之表中指數，稱為其等式左端之對數，如云以 2 為底，則 128 之對數為 7。用記號與方程式表示之，即

$$\log_2 128 = 7,$$

讀 128 以 2 為底之對數為 7。

### 習 題

以 2 為底用方程式表示下列諸數之對數：

$$256; \quad 2,048; \quad 16,384.$$

144. 若以 3 為底，則得下列之指數表。

$3 = 3^1$	$243 = 3^5$	$19,683 = 3^9$
$9 = 3^2$	$729 = 3^6$	$59,049 = 3^{10}$
$27 = 3^3$	$2,187 = 3^7$	$177,147 = 3^{11}$
$81 = 3^4$	$6,561 = 3^8$	$531,441 = 3^{12}$

### 習 題

以 3 為底，用方程式表示下列諸數之對數：

$$243; \quad 2,187; \quad 19,683.$$

145. 對數\* 若  $a$  之某次乘幂等於  $N$ ，則表示此乘幂

\* 對數表為蘇格蘭男爵訥白爾 (John Napier) 所發明，於 1614 年初次付刊，1617 年，褒傑 (Jost Bürgi, 1552 至 1632 年) 詳為計算，並擴張其應用，至 1620 年，遂印刷成書。

蒲里格斯 (Henry Briggs, 1561 至 1631 年) 提倡以 10 為底，1629 開澄樓 (Kepler) 傳至德國，1624 年，賈法利 (Cavalieri) 傳至意大利，1626 年，溫蓋脫 (Edmund Wingate) 傳至法國。由是對數之計算途遍及於全歐。現今算術中通行之長除法，亦為蒲里格斯所發明云。

之指數，即為  $N$  以  $a$  為底之對數。

如  $a^x = N$ ，則  $\log_a N = x$ ，此兩等式之意義全同。

### 習 題

1. 用 10 為底，求 10, 100, 1,000, 10,000 之對數，並以方程表示各結果。
2. 以 1, 2, 3, ...,  $a$  為底，求 1 之對數，並各以方程式表示之。
3. 以 2 為底，求  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$  之對數。
4. 以某數為底，求其同數之對數。

### 常 用 對 數

146. 常用對數 以 10 為底之對數，曰常用對數，或稱蒲里格斯氏對數，其底數 10，常略而不記，如  $\log x$ ，即指  $\log_{10} x$ 。

§ 150 之指數表，僅含有 10 之整數冪，故此等數之對數值，容易求出，若一數之對數非恰為 10 之若干乘冪，則須記出其小數。

例如 56.23 之對數至小數 5 位，為 1.74997，因  $56.23 = 10^{1.74997}$  之近似值也。

147. 指標，假數 對數中之整數部分曰指標，其分數或小數部分曰假數。

148. 對數函數之圖線 指數方程  $10^y = x$  可用以求適合於等式  $y = \log x$  之  $x$  及  $y$  之對應值，下表含有此種數值：

$y$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
$x$	1	$\sqrt{10} = 3.16$	$\sqrt[4]{10} = \sqrt{3.16} = 1.78$	$1.78^3 = 5.62$	1.33

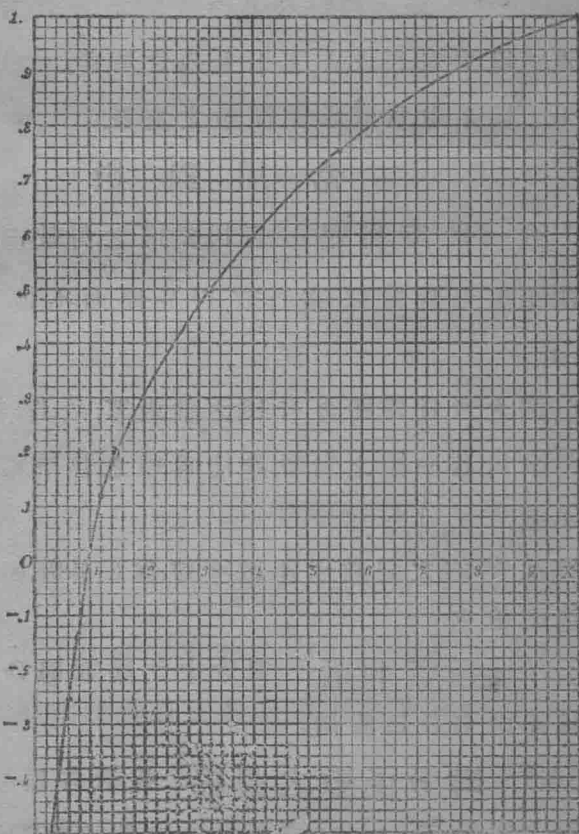
$y$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$
$x$	10	$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3.16} = .316$	$\frac{1}{1.78} = .562$	.749	.178

按表作點，  
逐次連結諸  
點，即得方程  
 $y = \log x$  之曲  
線如第六十  
圖。

用此圖線  
可求得一已  
知數之對數  
之近似值。

試從圖線  
(第六十圖)  
求下列各數  
之對數： $\frac{1}{2}$ ，  
1.5, 4, 5, 7.4,

8.8.

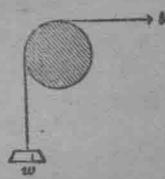


第 六 十 圖

由圖線可知下列事項：

1. 若  $x < 1$ , 則  $\log x$  爲負, 又若  $x$  漸近於 0, 則  $\log x$  之數值增加無限。
2. 若  $x$  增加無限, 則  $\log x$  亦增加無限。
3. 負數無對數。

物理學上或他種科學上之定律, 常有以對數方程或指數方程表示之者, 第六十一圖表示一繩轉於一木輪軸上, 繩之一端懸重量  $w$ , 他端以張力  $t$  支持之,  $w$  與  $t$  之關係, 爲  $w = te^{mx}$ 。式中  $m$  爲依於輪軸與繩間之磨擦之常數,  $x$  爲繩纏於輪上之周數,  $e$  爲 2.718 之近似值。



第六十一圖

### 習 題

1. 作方程  $y = \log_2 x$  之圖線, 並討論函數  $\log_2 x$  之性質。
2. 1 與 0 不能用以作對數之底, 試言其故。

149. 對數表 一數之對數, 或已知對數之對應數, 皆可從對數表求得之, 但對數表僅含對數之假數, 其指標須依 § 150 之法測定之。若計算某量至有效數字三位, 則宜用四行對數表; 欲計算某量至有效數字四位, 則宜用五行對數表, 餘類推。

若測角度至分數爲止, 則四行對數表已合應用; 若須測至秒數, 則宜用五行對數表。

## 150. 指標\*之決定法 定一數之對數之指標之規

則,可由次之討論中求之:

$$\text{因 } 10^5 = 100,000, \quad \text{故 } \log 100,000 = 5$$

$$\text{因 } 10^4 = 10,000, \quad \text{故 } \log 10,000 = 4$$

$$\text{因 } 10^3 = 1,000, \quad \text{故 } \log 1,000 = 3$$

$$\text{因 } 10^2 = 100, \quad \text{故 } \log 100 = 2$$

$$\text{因 } 10^1 = 10, \quad \text{故 } \log 10 = 1$$

$$\text{因 } 10^0 = 1, \quad \text{故 } \log 1 = 0$$

$$\text{因 } 10^{-1} = .1, \quad \text{故 } \log .1 = -1$$

$$\text{因 } 10^{-2} = .01, \quad \text{故 } \log .01 = -2$$

$$\text{因 } 10^{-3} = .001, \quad \text{故 } \log .001 = -3$$

其他類推。

故 10,000 與 100,000 間之數,其對數之指標為 4, 又 1,000 與 10,000 間之數,其對數之指標為 3, 在 100 與 1,000 間之數,其對數之指標為 2, 在 10 與 100 間之數,其對數之指標為 1, 在 0 與 10 間之數,其對數之指標為 0, 在 1 與 0 間之數,其對數之指標為 -1, 其餘類推。

\* 對數(Logarithm)之名,創自訥白爾,英國開橋之可次(Cotes)(1652至1716年)首創對數系(System of Logarithm)之說,1624年蒲里格斯創假數(Mantissa)之名,當尤拉(Euler)之時代,(1707至1783年)對數系之底(Base of a system of Logarithms)一語,已經盛行,又三角法中三角函數之對數表於偉熱他(Vieta 1540至1603年)之時代亦已出現。

故由上表得結果如下。

大於 1 之數，其對數之指標較小數點左端所有之位數少 1。

小於 1 之數，其對數之指標為負，且較小數點與第一有效數字間之 0 數多 1。

### 習 題

求下列各數之對數之指標：

$$32; 8; 2,468; .8; .0021.$$

151. 由對數表可知

$$\log 7124 = 3.85272$$

$$\text{故 } 7124 = 10^{3.85272}$$

繼續以 10 除上式之兩端，即得下列諸等式：

$$712.4 = 10^{2.85272} \quad \therefore \log 712.4 = 2.85272$$

$$71.24 = 10^{1.85272} \quad \therefore \log 71.24 = 1.85272$$

$$7.124 = 10^{.85272} \quad \therefore \log 7.124 = 0.85272$$

$$.7124 = 10^{.85272-1} \quad \therefore \log .7124 = 0.85272 - 1$$

$$.07124 = 10^{.85272-2} \quad \therefore \log .07124 = 0.85272 - 2$$

其他由此類推。

由上表可見一數之小數點之位置變，則其指標隨之而變，惟其假數不變。故凡數之有同序的同有效數字者其對數之假數相同。負指標 -1, -2, -3, 等，尋常皆以 9-10, 8-10, 7-10 等代表之。

例如  $\log.7124 = -1 + 0.85272$  記爲  $9.85272 - 10$ ,

又  $\log.07124 = -2 + 0.85272$  記爲  $8.85272 - 10$ .

## 對 數 表

152. 對數表之組成 對數表之尋常排列法,可由下列之表之一部分觀察而知之。

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
909	856	861	866	871	875	880	885	890	895	899	
910	904	909	914	918	923	928	933	938	942	947	
911	952	957	961	966	971	976	980	985	990	995	5 4
912	999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042	1   0.5 0.4
913	96047	052	057	061	066	071	076	080	085	089	2   1.0 0.8
914	095	099	104	109	114	118	123	128	133	137	3   1.5 1.2
915	142	147	152	156	161	166	171	175	180	185	4   2.0 1.6
											5   2.5 2.0
											6   3.0 2.4
											7   3.5 2.8
											8   4.0 3.2
											9   4.5 3.6

第 六 十 二 圖

於第一行N,可見真數\*之首先三位數字,其第四位數字在表之第一列。假數之第一第二兩位數字,見於第二行。其末尾之三位數字在真數之第四位數字之行內。假數前所附之星標(\*)即表明此假數之第一第二兩位數字在星標以下之一列。若真數僅有三位數字,或更少於三位,則其假數須於0之一行內檢之。若真數多於四位數字,則其假數宜用插尾法或由表末之比例部分求之。

\*此處之真數即爲欲求對數之數。



153. 求一數之對數 今以例說明用對數表求對數之法。

1. 求 912.3 之對數。

指標為 2. 何故?

於  $N$  行內檢出首先三位數字 912.

於同列上及首格為 3 之一行內,檢得假數 96014,

其星標即表明假數之首兩位為 96 也。

$$\therefore \log 912.3 = 2.96014.$$

2. 求 9126.3 之對數。

指標為 3. 何故?

於  $N$  行內檢得首先三位數字 912.

於同列上及首格為 6 之一行內,檢得假數 96028.

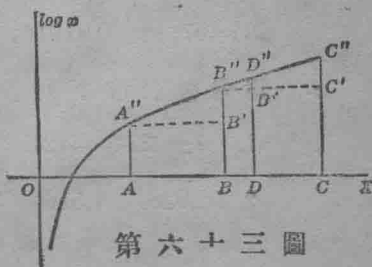
$$\log 9126.0 = 3.96028$$

依此,  $\log 9127.0 = 3.96033$

可見若真數增加 1, 則假數增加 .00005, 即小數第五位增加 5 也。故真數之增加大約與其假數之增加相應, 因對於稍大之數, 其誤差殊少, 可以不計也。

其假說以圖線表明之如次。

設以  $OA, OB, OD$  等 (第六十三圖) 表示  $x$  之值, 以  $AA'', BB'', DD''$  等表示  $\log x$  之對應值, 故可假定若  $AB = BC$ , 則  $B'B'' = C'C''$  之近似值。



第六十三圖

又依據  $BD = \frac{3}{10}BC$ , 故可假定  $D'D'' = \frac{3}{10}C'C''$ . 因 9126.3 爲 9126 與 9127 之差之  $\frac{3}{10}$ . 故可加  $\log 9126$  與  $\log 9127$  之差之  $\frac{3}{10}$  於  $\log 9126$ , 即得欲求之對數.

$$\begin{aligned} \therefore \log 9126.3 &= \log 9126 + \frac{3}{10}(\log 9127 - \log 9126) \\ &= 3.96028 + \frac{3}{10}(.00005) \\ &= 3.96028 + .000015 \\ &= 3.960295. \end{aligned}$$

因本書所用之對數表爲五位小數, 故第六位小數之 5 當捨去之.

$$\therefore \log 9126.3 = 3.96029.$$

此表之比例部分——即首格標有 *P.P.* 者——對於上述之計算有極便利處. 由是若聯續兩數對數之差爲第五位小數 5, 則可於表之比例部分 5 行之下之第三列檢得 5 之  $\frac{3}{10}$  爲 1.5.

### 習 題

1. 用第 150 面之表求下列各數之對數.

$$91.457; \quad 0.91014; \quad 0.0009152.$$

2. 用對數表求下列各數之對數.

$$1. \quad 9; \quad 27; \quad 342; \quad 875; \quad 964.$$

$$2. \quad 2,028; \quad 4,516; \quad 9,237.$$

$$3. \quad 75,823; \quad 64,003; \quad 0.85992; \quad 0.0011357.$$

## 154. 求對於已知對數之真數

已知  $\log N = 8.96120 - 10$ , 求  $N$

$N$  之假數在對應於 9145 及 9146 之假數 96118 及 96123 之間。

由是  $\log 9145$  之假數 = 96118

$\log N$  之假數 = 96120

$\log 9146$  之假數 = 96123

故知假數增 5 則真數增 1。

由“真數之增加大約與其假數之增加相應”之假定，可知假數增 2，則真數增 1 之  $\frac{2}{3}$  或 .4 故知  $N$  之數字為 91454 而  $N = 0.091454$ 。

又  $N$  之第五位數字可以由表之比例部分求之如下：

a. 由表計算  $\log N$  前後兩假數之差，而得其結果為 5。

b. 由表計算  $\log N$  之已知假數與略小於此假數之差，而得其結果為 2。

c. 由比例部分表之第二行，即上標有 5 字者，求近於 2 之數，則在同列之第一行之數，即為欲求之第五位數。

## 習 題

求對應於下列對數之數：

0.35021;      1.43276;      7.58142 - 10.

## 對 數 之 性 質

155. 對數之用法與其簡單計算，根據於下列諸定理。

156. 積之對數 設  $M$  與  $N$  為兩正整數，試求其積。

$$\text{設 } \log_a M = m, \log_a N = n,$$

$$\text{則 } M = a^m, \quad N = a^n. \quad \text{何故?}$$

$$\therefore MN = a^{m+n}. \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \log_a(MN) = m + n. \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \quad \text{何故?}$$

此式所表示之定理為積之對數等於兩因數之對數和。

例如  $\log(15 \times 27) = \log 15 + \log 27$ 。

### 習 題

1. 證明  $\log(MNR) = \log M + \log N + \log R$ 。

2. 已知  $\log 5 = .6990$ ，又  $\log 7 = .8451$ ，求  $\log 35$ 。

157. 商之對數 求商  $\frac{M}{N}$  之對數。

$$\text{設 } \log_a M = m, \log_a N = n$$

$$\text{則 } M = a^m, \quad N = a^n$$

$$\therefore \frac{M}{N} = a^{m-n} \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = m - n \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N.$$

故兩數商之對數，等於被除數之對數減去除數之對數。

例如  $\log \frac{8}{3} = \log 8 - \log 3$ 。

## 習 題

求  $\log \frac{7}{5}$ ;  $\log \frac{9}{2}$ ;  $\log \frac{2812}{47}$ .

158. 冪之對數 欲求冪  $M^p$  之對數.

設  $\log_a M = m$ ,

則  $M = a^m$ .

$\therefore M^p = (a^m)^p = a^{mp}$ , 何故?

$\therefore \log_a (M^p) = p \log_a M$ .

故 冪之對數等於指數乘底之對數.

## 習 題

指明  $\log(7^4) = 4 \log 7$ .

159. 根之對數 設  $p = \frac{1}{n}$ , 指明方程式  $\log_a (M^p) =$

$p \log_a M$  之形爲

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M.$$

即 某數  $M$  之  $N$  次根之對數, 等於  $M$  之對數除以  $n$ .

160. 底之變化 設  $\log_a N = p$ ,  $\log_b N = q$

則  $N = a^p$ ,  $N = b^q$

$$\therefore q = \log_b N = \log_b (a^p) = p \log_b a$$

$$\therefore \log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$$

$$\therefore \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

故由以  $b$  爲底  $N$  之對數, 求以  $a$  爲底  $N$  之對數, 卽以

$\log_b a$  除  $\log_b N$ ,

### 習 題

1. 求  $\log_3 10$ ;  $\log_3 10$ .
2. 求  $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} - \log \sqrt{.10}$  之值.
3. 求  $\log_2 3 + \log_3 2$  之值.

### 雜 題

161. 求下列各式之值:

第 1, 2, 3 三題之略解爲以下諸題演算之例.

1.  $254 \times 12.26$

$$\log 254 =$$

$$\log 12.26 =$$

相加,  $\log N =$

$$\therefore N =$$

2. 
$$\frac{12,483 \times .0452}{8,423}$$

$$\log 12,483 =$$

$$\log .0452 =$$

相加  $=$

$$\log 8,423 =$$

相減  $\log N = *$

$$N =$$

\*若從較小之對數減去較大之對數, 須加減 10 於被減數, 例如對數 2.34778 則變爲 12.34778-10.

$$3. \sqrt[3]{\frac{49\sqrt{352}}{86,420}}$$

$$\log N = \frac{\log 49 + \frac{1}{2}\log 352 - \log 86,420}{3}$$

$$\log 49 =$$

$$\frac{1}{2}\log 352 =$$

相加,

=

$$\log 86,420 =$$

相減,

=

以 3 除,

$$\log N =$$

$$N =$$

$$4. \frac{23.40 \times .8625}{.00459 \times 6.3804}$$

$$8. \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'$$

$$5. \sqrt[3]{92}; \sqrt{183}$$

$$9. \sqrt[5]{\frac{0.6712}{5.327}}$$

$$6. \sqrt[11]{\left(\frac{25.7}{286}\right)^2}$$

$$10. \frac{(-2582)^2 \times (.05805)}{2587 \times (-316)}$$

$$7. \sqrt[3]{\frac{0.0436}{3.187}}$$

以對數求其數值,後再附上正當之符號。

$$11. \log_2 64 - \log_3 9 + \log_2 1 \text{ (耶魯大學)}$$

$$12. \left(\frac{3.1416 \times 0.0321^2}{0.0241}\right)^{-0.32}$$

$$13. \frac{(\sqrt{278.2} \times 2.578)^3}{\sqrt[3]{.00231} \times \sqrt{76.19}}$$

$$14. \frac{3.416 \times \sqrt{25.9} \sqrt[3]{-0.046}}{2\sqrt[3]{\frac{4}{3}}}$$

†15. 某數  $N$ , 其小數點之左有有效數字 17 位. 問  $\log N$  之指標爲何? 又  $\log(\log N)$  之指標爲何? 問用此方法能求連續對數至若干次? (哈佛大學)

†16. 用對數求  $2^{61}-1$  之首三位數字. (哈佛大學)

17. 已知  $\log 2=0.30103$ ,  $\log 3=0.47712$ . 求  $\log 12$ ;  $\log \frac{1}{3}$ ;  $\log \frac{2}{3}$ ;  $\log \sqrt{6}$ .

## 指 數 方 程

162. 指數方程 方程之未知數含於指數者, 曰指數方程.

下例乃說明用對數解指數方程之方法.

解方程  $5^x=354$ .

取兩端之對數

$$\log 5^x = \log 354$$

$$\text{即 } x \log 5 = \log 354$$

$$x = \frac{\log 354}{\log 5} = \frac{2.5490}{0.6990} \dots\dots$$

### 習 題

解次之方程:

1.  $3^y=226$

4.  $(3.142)^w=2.718$

2.  $2^t=437$

5.  $3^{12-2x}=243$

3.  $10^v=2.71828$

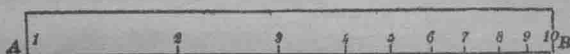
6.  $7^{s+3}=5$



## 計 算 尺

163. 計算尺之說明 計算尺者依據算學之原則，構成之器具，可用以求數之積，商，冪，根者也。其器為兩片尺度所組成，且可互相滑動。（見第六十五圖）

於尺上取  $A—B$  之長為單位如第六十四圖，而從一端至他端連續截諸部，代表由 1 至 10，或由 10 至 1,000，或由 100 至 1,000 間諸數之對數。



第 六 十 四 圖

由是，

$$A1 = \log 1 = 0.$$

$$A6 = \log 6 = .78$$

$$A2 = \log 2 = .30$$

$$A7 = \log 7 = .85$$

$$A3 = \log 3 = .48$$

$$A8 = \log 8 = .90$$

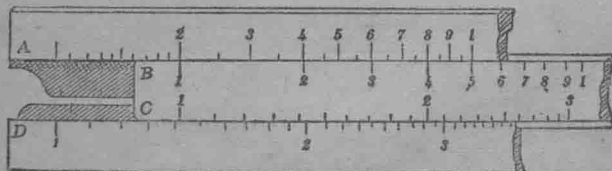
$$A4 = \log 4 = .60$$

$$A9 = \log 9 = .95$$

$$A5 = \log 5 = .70$$

$$A10 = \log 10 = 1.00$$

總之，某一數之對數，即為由  $A$  至該數之距離。



第 六 十 五 圖

用計算尺求兩對數之和或較，比用對數表尤為敏捷便利。

例如 欲求  $\log 2 + \log 3$ ，可移動  $B$  尺使  $B$  尺之 1 落於  $A$  尺之 2 之下。由是  $B$  尺之 3 落於  $A$  尺之 6 之上，而  $A6$  之距離或  $\log 6$  即為  $\log 2 + \log 3$ 。

上述之法，與用對數表求  $2 \times 3$  之積，結果相同。

如設  $N = 2 \times 3$ ，求  $N$ 。

檢對數表，  $\log 2 = 0.3010$

又  $\log 3 = 0.4771$

相加，  $\log N = 0.7781$

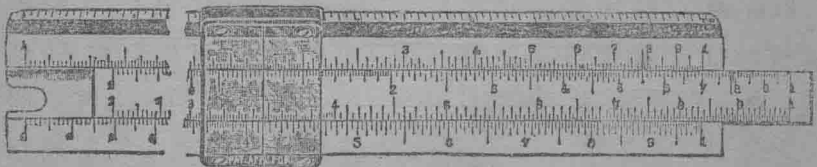
檢表，  $N = 6$

求兩對數之差如  $\log 6 - \log 3$ ，再移動  $B$  尺，使  $B$  尺上之 3 落於  $A$  尺 6 之下，於是  $B$  尺上之 1 落於  $A$  尺 2 之下，故  $A2$  之距離或  $\log 2$  等於  $\log 6 - \log 3$ ，

學者試用對數表求  $\frac{6}{3}$  之商而比較之。

以上兩例乃說明用  $A$  尺  $B$  尺可以施乘法除法之計算。

164. 曼亨尼姆計算尺 曼亨尼姆計算尺 (第六十五、六十六圖) 係  $A, B, C, D$  四尺所組合而成。

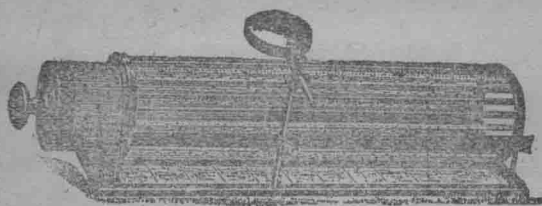


第六十六圖

$C$ 尺與 $D$ 尺所表之數爲 $A$ 尺,與 $B$ 尺所表之數之二倍。故在 $C$ 尺與 $D$ 尺上所檢得表某數之對數,等於在 $A$ 尺與 $B$ 尺上表同數之對數之二倍。

例如 $D$ 尺上之 $\log 2 = A$ 尺上之 $2 \log 2 = \log 4$ , $D$ 尺上之 $\log 3 = A$ 尺上之 $\log 9$ ,即 $A$ 尺上之數爲其直對於 $D$ 尺上之數之平方,而 $D$ 尺上之數爲其直對於 $A$ 尺上之數之平方根。故 $A$ 尺與 $D$ 尺可用以求數之平方及平方根。

曼亨尼姆計算尺,可以計算至有效數字第三位而得適當之精密。



第六十七圖

若須更精密之計算,則宜用第六十七圖所示之塔寇氏 Thacher 之計算器。因用此器可以求得有效數字四位或五位之結果也。

在曼亨尼姆尺之 $C$ 尺及 $D$ 尺上,從1至2之距離分爲10部,每部又再分作10小部,藉此種分割,可以讀出在1與2中間之二位數,三位數,四位數,如1.2, 1.34, 1.526,最後之數字6乃由目力估計者。凡含同序的同數字之數,其假數相同,故首數可隨意命之爲10, 100,或1,000。若首數爲100,則1與2間之數爲101, 102, 103...110, 111,...120...199, 2與3間之數爲200, 210, 220...等。以此分割法施於 $D$ 與 $C$ 尺,則用以乘除時,其結果較用 $A$ 與 $B$ 尺更爲精密。

## 165. 計算尺之應用 下例乃說明計算尺之應用：

(1) 乘法. 求  $4 \times 3$  之積.

其計算之手續如第六十八圖所示. 置  $C$  尺之 1 於  $D$  尺之一因數上, 則  $D$  尺上與  $C$  尺上之他一因數相對之數, 即為欲求之積.

$C$	置 1 於	於 3 之下
$D$	4 之上	求得 $12 = 4 \times 3$

第六十八圖

(2) 除法. 以 3 除 18.

於  $C$  上取除數對準  $D$  上之被除數, 則  $D$  尺上與  $C$  尺之 1 相對之數, 即為欲求之商. (見第六十九圖)

$C$	置 3 於	於 1 之下
$D$	18 之上	求得 $6 = 18 \div 3$

第六十九圖

(3) 數個因數之相乘積. 求數個因數之積, 須用遊尺  $r$ . 如求  $8 \times 6 \times 5 \times 2$  之積, 其手續如第七十圖所示.

$C$	置 1 於	$r$ 至 6	1 至 $r$	$r$ 至 5	1 至 $r$	於 2 之下
$D$	8 之上					求得 $480 = 8 \times 6 \times 5 \times 2$

第七十圖

(4) 分數計算. 求  $\frac{26 \times 168 \times 35 \times 18}{42 \times 15 \times 91 \times 1.2}$

其計算程序如第七十一圖所示.

$C$	置 42 於	$r$ 至 168	15 至 $r$	$r$ 至 35	91 至 $r$	$r$ 至 1	12 至 $r$	於 18 之下
$D$	26 之上							求得 4 = 結果

第七十一圖

(5) 平方. 求  $12^2$  之值.

欲求某數之平方,置遊尺於 $D$ 尺 之某數上如第七十二圖,則平方數 可於 $A$ 尺上求得之.	$A$   $D$	求得 $144 = 12^2$ 置 $r$ 於 $12$ 上 第七十二圖
--	--------------	--

(6) 平方根. 求一數之平方根,須用下法:

置遊尺於在  $A$  之已知數上,則平方根可於  $D$  尺之對準點上求得之.

166. 三角法之計算 計算尺之反面有三種尺度,第一種  $S$  與  $T$ , 尺上顯有角之度數,第二種  $A$  與  $D$ , 用  $A$  可求  $S$  尺上所表示諸角之正弦,用  $D$  可求  $T$  尺上所表示諸角之正切,第三種尺度即用以求  $D$  尺上所表諸數之對數. 用此種尺度可以求三角函數  $a \sin x$  或  $a \tan x$  之積.

前述諸例,不過顯明計算尺應用之廣大,至於計算尺之造法及用法,另有專書,茲不贅述.

## 提 要

167. 本章所授之重要名詞如下:

- |         |        |
|---------|--------|
| 測度之精密度. | 對數表.   |
| 省略乘法.   | 常用對數.  |
| 省略除法.   | 指標.    |
| 對數      | 假數.    |
| 計算尺.    | 指數方程式. |

168. 下列問題,復習本章所授之重要事項。

1. 說明省略乘法及除法。
2. 討論對數及計算尺之功用。
3. 討論對數函數之圖線。
4. 試述決定對數指標之方法。
5. 解明(1)用對數表檢對數之方法。(2)求對應於已知對數之真數方法。
6. 試述關於對數之性質及用以求積商冪根之諸原則,且證明之。
7. 試述解指數方程時對數之功用。

## 第八章

## 三角形之解法 對數

## 對數函數表之用

169. 三角函數之對數 於第七章,已述對數對於求積,商,冪,根,之用法,用對數求含有三角函數之式之值,須先由三角函數表求函數之值,然後由對數表內求函數值之對數由 $0^\circ$ 至 $90^\circ$ 間諸角之正弦,餘弦,正切,餘切諸函數之對數,備有專表可查,正割餘割之對數,可由餘弦,正弦之對數求得之,因其用途稀少,故不錄。

170. 表之組織 因由 $0^\circ$ 至 $45^\circ$ 間諸角之正弦餘弦正切之值,及由 $45^\circ$ 至 $90^\circ$ 間諸角之餘切之值皆小於1,故其指標為負,如欲除去負指標,宜以 $9-10, 8-10, 7-10, \dots$ 等代 $-1, -2, -3, \dots$ 等,然表中將 $-10$ 省而不計,故欲得對數之真值,必由其整數部分減去10。

小於 $45^\circ$ 之角,其度數標於書頁之上方,其分數記於左邊第一行,大於 $45^\circ$ 而小於 $90^\circ$ 之角,其度數記於書頁之下方,其分數記於右邊第一行。

## 171. 求一已知角函數之對數值

求  $\log \tan 52^\circ 50' 12''$  之值。

$$\log \tan 52^\circ 50' \text{之假數} = 1.2026$$

$$\log \tan 52^\circ 51' \text{之假數} = 1.2052.$$

$$\therefore (\text{角差}) 60'' = \quad \quad \quad 26 (\text{數差})$$

$$\therefore (\text{角差}) 12'' = \frac{12}{60} \times 26 = 5.2 (\text{數差})$$

此種數差，可從表中之比例部分求得之如次：

變  $12''$  爲分數，則  $12'' = \left(\frac{12}{60}\right)' = .2$  而所需之數在表中 26 下方之第二列。

$$\begin{aligned} \therefore \log \tan 52^\circ 50' 12'' &= 0.12026 + 5.2 \\ &= 0.12031. \end{aligned}$$

求  $\cot 48^\circ 25' 38''$  之值。

$$\log \cot 48^\circ 25' = 9.94808 - 10$$

$$\log \cot 48^\circ 26' = 9.94783 - 10$$

因此兩假數之差爲 25，而  $38'' = \left(\frac{38}{60}\right)' = .63'$ ，故檢比例部分 25 之下方第六列得 15.0，即 25 之 .6 爲 15.0 也，依此求得 25 之 .03 爲 .75，故得 25 之 .63 爲 15.7 或第五位小數 16 單位（即 .00016）。

因一角增大時，其餘函數減少，故由  $48^\circ 25'$  之對數減法 16 即得  $48^\circ 25' 38''$  之對數。

$$\begin{aligned} \therefore \log \cot 48^\circ 25' 38'' &= 9.94808 - 10 - 16 \\ &= 9.94792 - 10. \end{aligned}$$

### 習 題

求下列各對數之值：



- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\log \sin 71^\circ 23' 41''$ | 5. $\log \tan 27^\circ 25' 10''$ |
| 2. $\log \cos 41^\circ 15' 35''$ | 6. $\log \sin 41^\circ 57' 36''$ |
| 3. $\log \tan 39^\circ 47' 36''$ | 7. $\log \tan 37^\circ 36'.5$    |
| 4. $\log \sin 65^\circ 58' 24''$ | 8. $\log \tan 23^\circ 13'.3$    |

172. 求對於一已知對數之角 其例如下:

已知  $\log \sin A = 9.98357 - 10$ , 求  $A$ .

已知對數之假數, 在  $\log \sin 74^\circ 20'$  與  $\log \sin 74^\circ 21'$  之假數之間, 其表差為 3, 又已知對數之假數與  $\log \sin 74^\circ 20'$  之假數之差為 1.

檢表之比例部分 3 之下方, 得近似於 1 之值 .9, 由是可記  $1 = .9 + .1$  於第一行而與 .9 同列, 檢得數字 3 (即 .3). 同樣在比例部分表檢得近似於 .1 之數為 .09, 又在第一行之對應數為 .03.

$$\therefore A = 74^\circ 20'.33 = 74^\circ 20' 21''$$

已知  $\log \cos A = 9.85981 - 10$ . 求  $A$ .

由表可見此假數在  $\log \cos 43^\circ 36'$ ,  $\log \cos 43^\circ 37'$  之間, 表差為 12.

已知對數之假數與  $\log \cos 43^\circ 36'$  之假數之差為 3.

檢表之比例部分第二行, 12 之下方, 得近似於 3 之數為 2.4 或 3.6.

$$\text{設 } 3 = 2.4 + .6$$

則在第一行內與其對應之數為 2 與 .05

$$\therefore A = 43^{\circ}36'.25 = 43^{\circ}36'15''$$

### 習 題

於下列諸式中各求  $A$  之值：

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\log \sin A = 9.97527 - 10$ | 4. $\log \tan A = 0.25936$      |
| 2. $\log \sin A = 8.73997 - 10$ | 5. $\log \cos A = 9.94749 - 10$ |
| 3. $\log \cot A = 9.40146 - 10$ | 6. $\log \sin A = 9.42443 - 10$ |

## 直角三角形用對數之解法

173. 三角形之解法 由三角形之已知邊與已知角而求其他之未知邊與未知角之值，謂之解三角形。

第二卷之解直角三角形，乃應用三角函數之自然數，而今之解直角三角形，乃應用對數以乘除題內之數。

174. 公式 直角三角形邊角間之關係(第七十三圖)

可以公式表示之如下：

$$a = c \sin A \qquad b = c \sin B$$

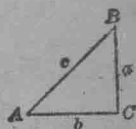
$$a = c \cos B \qquad b = c \cos A$$

$$a = b \tan A \qquad b = a \tan B$$

$$a = b \cot B \qquad b = a \cot A$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$c^2 = a^2 + b^2$  之式常寫作  $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$  之形。



第七十三圖

直角三角形之面積公式爲

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{ab}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{(c+b)(c-b)} \\
 &= \frac{b^2}{2 \tan B} \\
 &= \frac{c^2}{2} \sin B \cos B.
 \end{aligned}$$

上述公式,用對數計算時,常用之。

如於公式之兩端各取其對數,則

$$\log a = \log c + \log \sin A;$$

$$\log b = \log c + \log \sin B, \text{等.}$$

欲決定一角,宜用正切與餘切,因此兩函數之變化較正弦,餘弦函數之變化爲速也。

欲決定一邊,則宜用已知角之正弦或餘弦函數。

### 175. 解直角三角形之程序

下乃用對數解直角三角形之例。

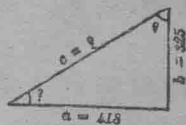
第 I 類. 已知所夾直角之兩邊,求其斜邊及兩銳角。

設  $a=418$ ,  $b=325$ . (見第七十四圖)

(a) 作圖表出已知部分與欲求部分:

(b) 解此題應用之公式爲

$$\tan B = \frac{b}{a}; \quad c = \frac{b}{\sin B};$$



第七十四圖

$A=90^\circ - B$ . 而用方程  $a = \sqrt{(c+b)(c-b)}$  以覆算結果。

(c) 寫出計算之次序之大要如下：

$\log b =$	$\log b =$	覆算： $\log(c+b) =$
$\log a =$	$\log \sin B =$	$\log(c-b) =$
$\log \tan B =$	$\log c =$	$\log a^2 = 2 \log a =$
$B =$	$c =$	$\log a =$
$A = 90^\circ - B =$		將此與前所求得 之 $\log a$ 比較。

(d) 按  $c$  之計劃實行計算。

第II類。已知斜邊  $c$ ，及一邊  $b$ 。

解此題應用之公式爲：

$$\sin B = \cos A = \frac{b}{c}; \quad a = \frac{b}{\tan B}; \quad a = \sqrt{(c+b)(c-b)}.$$

第III類。已知一角  $B$  及一邊  $b$ 。

應用之公式爲： $A = 90^\circ - B; a = \frac{b}{\tan B};$

$$c = \frac{b}{\sin B}; \quad a = \sqrt{(c+b)(c-b)}.$$

第IV類。已知一角  $B$  及斜邊  $c$ 。

應用之公式爲： $A = 90^\circ - B; b = c \sin B;$

$$a = c \cos B, \quad a = \sqrt{(c+b)(c-b)}.$$

### 習 題

用對數解下列直角三角形：

- |                                    |                             |
|------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $c=25, a=22$                    | 4. $B=23^\circ 9', b=75.48$ |
| 2. $c=35.145, A=25^\circ 24' 30''$ | 5. $c=369.27, a=235.64$     |
| 3. $a=316.5, c=521.2$              | 6. $a=194.5, b=233.5$       |

7.  $b=547.5, B=32^{\circ}15'24''$  9.  $a=3.414, b=2875$

8.  $c=672.4, B=35^{\circ}16'25''$  10.  $a=617.57, c=729.59,$

解下列問題：

11. 一人欲測河之寬，先於河之一岸相隔 100 呎取  $A$  與  $B$  兩點。一樹  $C$  立於對岸。已知  $\angle ABC=63^{\circ}40'$ ，又  $\angle BAC=55^{\circ}35'$ ，求河之寬。（耶魯大學）

12. 三角形之底邊為 3,248 呎，其底角為  $46^{\circ}15'$  ( $=46^{\circ}.25$ ) 及  $100^{\circ}37'$  ( $=100^{\circ}.62$ )，求其高。

先依比例作簡略圖形，而驗算其結果是否合理。（哈佛大學）

13.  $A$  與  $B$  為某河兩岸之兩點，相隔 1000 呎。 $P$  為與  $A, B$  同在一直線上之船之桅頂上一點。從  $A$  向  $P$  之仰角為  $14^{\circ}.33$  ( $14^{\circ}20'$ )，由  $B$  向  $P$  之仰角為  $8^{\circ}.17$  ( $8^{\circ}10'$ )，求船桅之高。

14. 太陽高度為  $30^{\circ}$  之際，在塔底同平面上測得之塔影，比太陽高度為  $45^{\circ}$  時所測得之塔影長 100 呎，求塔之高。（不許用三角函數表及對數表，但用根數表示其結果。）

15. 由一點  $A$  至半徑為 5 之圓，從  $A$  點作兩切線  $AM, AN$ ， $\angle MAN=20^{\circ}$ ，求由  $M$  至  $AN$  之垂直距離。（哈佛大學）

16. 刻有分度之圓周，其外緣上最小之距離為  $30'$  ( $=0^{\circ}.50'$ )，而各小部分之距離，以弦量之，為 .02 吋，求此圓之半徑。

17.  $A, B$  二船，相距 415 碼，由各船測得懸崖及他船之地平角為  $48^{\circ}17'$  與  $90^{\circ}$ ，又由  $A$  船測懸崖之仰角為  $15^{\circ}24'$ ，問懸崖高若干？

18. 一燈塔高 200 呎，塔底為在海平面，從塔頂測得海面上兩船之俯角為  $30^{\circ}32'$  與  $18^{\circ}40'$ ；塔底對兩船聯線之張角為  $90^{\circ}$ 。問兩船相距若干呎？

19. 某人在某點測得塔頂之仰角為  $10^{\circ}$ ，向塔前行 50 碼後，測得塔頂之仰角為  $15^{\circ}$ ，求塔之高。

20. 月之直徑為 2,164 哩，若由地球上對月之視徑所張之角為  $31'.1$ ，求地球與月之距。

176. 等腰三角形 如第七十五圖，自等腰三角形之頂至底作垂線，分此三角形為兩個相合直角三角形。凡直角三角形，若有兩部分為已知，則其餘諸部分即可求得。故解等腰三角形，亦必須有兩部分為已知，且兩部分中至少須有一部為邊。

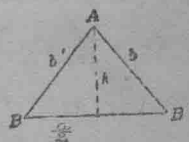
下列公式常用以解等腰三角形。

$$B + \frac{A}{2} = 90^{\circ}$$

$$a = 2b' \sin \frac{A}{2} = 2b' \cos B$$

$$h = \sqrt{\left(b' + \frac{a}{2}\right)\left(b' - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a}{2} \tan B = b' \sin B$$

$$s = \frac{ah}{2}$$



第七十五圖

177. 正多邊形 從正多邊形之中心至各頂之直線，分此多邊形為許多相合等腰三角形

設正多邊形之邊長爲  $a$  邊數爲  $n$ , 又以  $r$  表示其內切或外接圓之半徑, 則內切多邊形有下列關係:

$$\frac{a}{2} = r \sin \frac{360}{2n} \text{ 或 } a = 2r \sin \frac{180}{n},$$

又外接多邊形有下列關係:

$$\frac{a}{2} = r \tan \frac{360}{2n}, \text{ 或 } a = 2r \tan \frac{180}{n}.$$

其面積等於其周界乘邊心距之半。

### 斜三角形邊與角之關係

178. 由斜三角形邊角間之關係, 可以將任意三角形之未知部分從其已知部分推算之, 此等關係, 以三個定則之形式表之, 名曰正弦之定則, 餘弦之定則, 正切之定則。

179. 正弦之定則 設  $h$  爲  $\triangle ABC$  內由  $C$  至  $AB$  之垂線之長(第七十六圖)。

說明  $\sin A = \frac{h}{b}$ , 即  $h = b \sin A$

說明  $\sin B = \frac{h}{a}$ , 即  $h = a \sin B$

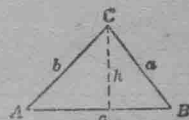
$$\therefore b \sin A = a \sin B$$

由是  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

同法, 由  $A$  至  $BC$  作垂線, 可得

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



第七十六圖

此式名爲正弦之定則。

即三角形之邊，與其所對角之正弦成等比例。

於鈍角三角形  $ABC$  內(第七十七圖)，

$$\sin A = \frac{h}{b} \text{ 即 } h = b \sin A$$

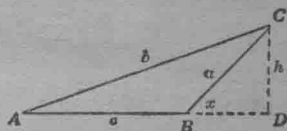
$$\sin x = \sin(180 - B) = \sin B = \frac{h}{a} \text{ 即 } h = a \sin B$$

$$\therefore b \sin A = a \sin B$$

$$\text{即 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

用正弦定則解三角形之法，見於

§§ 182, 187, 189.



第七十七圖

180. 外接圓之直徑 常比  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  有

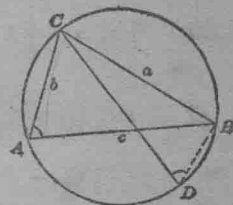
極有興趣之幾何的意義，若一圓外接於  $\triangle ABC$  如第七十八圖，則  $\angle A = \angle D$ 。

$\therefore \sin A = \sin D = \frac{a}{d}$ ， $d$  表示外接圓之直徑。

$$\therefore d = \frac{a}{\sin A}$$

即三角形一邊與其對角之正弦

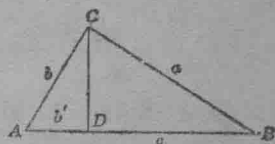
之比，等於其外接圓之直徑。



第七十八圖

181. 餘弦之定則 1. 設  $\angle A$

(第七十九圖) 爲銳角，



第七十九圖

$$\text{則 } a^2 = b^2 + c^2 - 2cb'$$



(三角形中銳角對邊之平方,等於從他兩邊平方之和,減去兩邊之一邊,與在其上之又一邊射影相乘積之兩倍。)

因  $b' = b \cos A$

所以  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  即 三角形一邊之平方,等於其他兩邊平方之和減此兩邊與其夾角之餘弦之積之兩倍。  
此定理名爲餘弦之定則。

2. 若  $\angle A$  爲鈍角(第八十圖)

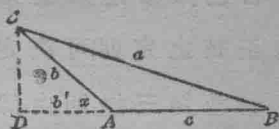
則  $a^2 = b^2 + c^2 + 2cb'$

因  $b' = b \cos x$

$$= b \cos(180 - A)$$

$$= -b \cos A$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



第八十圖

由是可知無論  $A$  爲銳角或鈍角,此式之關係常不變。

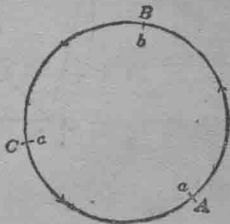
依此可知  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

試說明派達哥拉士氏定理爲餘弦定則之特例。

下述記憶此三個等式之簡單方法。

設想文字如  $a, b, c$  及  $A, B, C$  置於一圓周上,如第八十一圖矢之方向指示從  $A$  至  $B$ ,從  $B$  至  $C$ ,復從  $C$  至  $A$ 。由變第一式文字之次第,則得第二等式,同樣變第二等式文字之次第,則得第三等式,即用輪換代入法,由第一式以導出他式。



第八十一圖

182. 正弦餘弦之定則，乃用以解任意三角形者。若已知兩角及一邊，則由等式  $A+B+C=180^\circ$  可決定其第三角。又由正弦定則可決定其他兩邊。

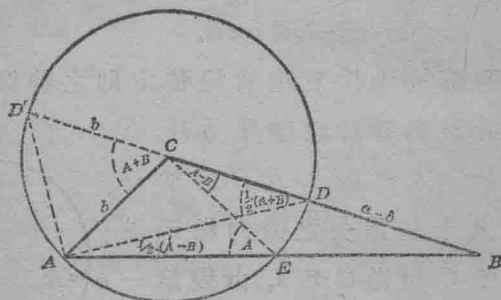
若已知兩邊  $a$  與  $b$  及對一邊之角，如  $A$ ，則第三邊  $c$ ，可由  $a^2=b^2+c^2-2bc \cos A$  決定之，其他兩角可依正弦之定則決定之。

若已知兩邊及其夾角，則由餘弦之定則，可得其第三邊，由正弦之定則，可決定其他兩角。

若已知三邊，則由餘弦之定則可求得各角。

餘弦之定則，因其所含各項不能記為數個因數，故不直用於對數，但不用對數計算極大之數，實不勝其煩，故當求可用對數計算之公式。

183. 正切之定則 設  $\triangle ABC$  為任意三角形，如第八十二圖。



第八十二圖

以  $C$  為圓心，以最短邊為半徑，作一圓，割  $CB$  與  $AB$  於  $D$  及  $E$ 。

延長  $BC$ , 遇圓周於  $D'$

作  $CE, AD$  及  $AD'$

則  $\angle D'CA = A + B$ .  $\therefore \angle D'DA = \frac{1}{2}(A + B)$  何故?

$$A = \angle CEA$$

$$= \angle ECB + B \quad \therefore \angle ECB = A - B \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\angle D'AD = 90^\circ$$

應用正弦之定則, 於  $\triangle ADB$  得

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin DAB}{\sin ADB}, \quad \text{或} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin [180^\circ - \frac{1}{2}(A+B)]}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\text{故} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \quad (1)$$

應用正弦之定則, 於  $\triangle AD'B$  得

$$\frac{D'B}{AB} = \frac{\sin D'AB}{\sin AD'B}$$

$$\text{或} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\sin [D'AD + \frac{1}{2}(A-B)]}{\sin AD'B}$$

$$= \frac{\sin [90^\circ + \frac{1}{2}(A-B)]}{\sin [90^\circ - \frac{1}{2}(A+B)]}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\therefore \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \quad (2)$$

以(1)除(2),得

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{c}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}}{\frac{c}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}} \quad \text{即} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)} \quad (3)$$

此名爲正切之定則

上列公式亦可記爲

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B+A)}{\tan \frac{1}{2}(B-A)} \quad \text{設 } b > a.$$

由輪換代入法,得含  $b$  與  $c$  及  $c$  與  $a$  之兩個相似公式.

$$\text{因} \quad \frac{A+B}{2} = \frac{180}{2} - \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2},$$

$$\text{故得} \quad \tan \frac{1}{2}(A+B) = \cot \frac{C}{2}$$

$\therefore$  由代入法,得

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cot \frac{C}{2}}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\text{故} \quad \tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}$$

此爲正切定則之化式,宜用於  $a, b, C$  爲已知數時.

184. 莫爾維特氏方程 以  $90^\circ - \frac{C}{2}$  代  $\frac{A+B}{2}$  於

§ 183 方程(1)與(2),得

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}, \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}.$$

此兩公式名曰莫爾維特氏方程式(Mollweide's Equation),\*  
最合覆算之用。

185. 三角形半角之正切 三角形內切圓  
之半徑 設  $O$  為三角形各角分線之交點,  $r$  為三角形  
內切圓之半徑, 又  $x, y, z$ , 表示由  $A, B, C$  至圓之切線之長。

則三角形之周為  $2x+2y+2z$

命  $2s = 2x + 2y + 2z$

則  $s = x + y + z$

因  $a = y + z$

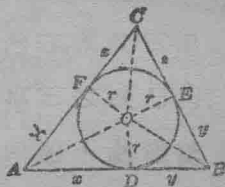
$$\therefore s - a = x$$

依此  $s - b = y; s - c = z$

於  $\triangle AOD$  內,

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{x}$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}$$



第八十三圖

\* 屈六屈氏謂此兩方程式為天文學家莫爾維特所發明。此言殊不足信。因其第二式在 1707 年, 已發現於奈端所著之算學大全也。

1746 年, 阿丕爾(F. W. Opperl)於其解析三角法中, 誘導出此兩方程式為自立的三角學定理。1765 年, 沈普生(Thomas Simpson)所著之三角學再版中, 及同年馬寶脫(Maudvit)氏之天文學原理中, 皆論及此兩式, 可見其發明確在莫氏之先也。

阿丕爾從正切定則導出此兩式, 沈普生以幾何學的證論證之。馬寶脫則僅應用訥白爾之類似式於平面三角形而已。莫爾維特從正弦定則誘導此兩式其真實之貢獻, 即使人人注意此兩式在天文學之偉大效用。

依此,

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b}; \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}.$$

由平面幾何學知已知  $\triangle ABC$  之面積  $F$  爲

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{又 } F = \frac{r}{2}(a+b+c) = rs$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

$$\text{故 } r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

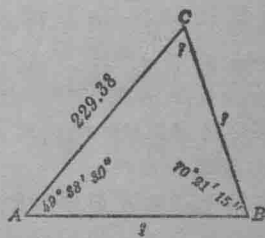
### 斜三角形之解法

186. 凡三角形,若已知其六事中之三事,則此三角形之圖可作,但已知之三事中,至少必有一事爲邊,故解任意三角形,祇須討論下述四類:

#### 187. 第一類 已知一邊及兩角

$$\text{已知: } \begin{cases} A = 49^{\circ}38'30'' & \text{求 } C, a, c, \\ B = 70^{\circ}21'15'' \\ b = 229.38 \end{cases}$$

$$\text{公式: } \begin{cases} C = 180^{\circ} - (A + B) \\ a = \frac{b \sin A}{\sin B} \\ c = \frac{b \sin C}{\sin B} \end{cases}$$



第八十四圖

解法:  $180^\circ = 179^\circ 59' 60''$

$$A + B = 119^\circ 59' 45''$$

---


$$\therefore C = 60^\circ \quad 15''$$

$$\log b = 2.36055$$

$$\log \sin A = 9.88198 - 10$$

---

相加,  $12.24253 - 10$

$$\log \sin B = 9.97396 - 10$$

---

相減,  $\log a = 2.26857$

$$\therefore a = 185.59.$$

覆算:  $B - A = 20^\circ 42' 45''$

$$\frac{1}{2}(B - A) = 10^\circ 21' 22''$$

$$\frac{1}{2}C = 30^\circ \quad 7''$$

$$b - a = 43.79$$

$$\log(b - a) = 1.64137$$

$$\log b = 2.36055$$

$$\log \sin C = 9.93757 - 10$$

---

相加,  $12.29812 - 10$

$$\log \sin B = 9.97396 - 10$$

---

相減,  $\log c = 2.32416$

$$\therefore c = 210.94.$$

$$\log c = 2.32416$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(B - A) = 9.25473 - 10$$

---

相加,  $11.57889 - 10$

$$\log \cos \frac{1}{2}C = 9.93752 - 10$$

---

相減,  $\log(b - a) = 1.64137.$

因所用為五行對數表,故其結果僅可記至有效數字五位,而最後數字,為不確定.又各角僅可計算至若干秒之近似值,故對於秒數之命分數,常棄之.

188. 餘對數  $\log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N$  之原則用以演上列之解法時,可免用減法.

因  $\log 1 = 0$

$$\begin{aligned}\therefore \log \frac{1}{N} &= 0 - \log N \\ &= (10 - \log N) - 10,\end{aligned}$$

$\frac{1}{N}$  之對數名曰  $N$  之餘對數。

當一式中包函幾個加減時，尤見餘對數之便利，因由 10 中減去某對數，易由心算得之也，今將 § 187 之例換入餘對數之算法演之如次：

$\log b = 2.36055$	$\log b = 2.36055$
$\log \sin A = 9.88198 - 10$	$\log \sin c = 9.93757 - 10$
$\text{colog} \sin B = 0.02604$	$\text{colog} \sin B = 0.02604$
$\text{相加, } \log a = 2.26857$	$\text{相加, } \log c = 2.32416$

### 習 題

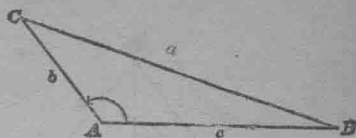
解下列三角形並覆算所得之結果：

1.  $a = 29.73,$        $A = 52^\circ 36'$        $B = 67^\circ 40'$
2.  $a = 788,$        $C = 72^\circ 12' 35'',$        $B = 55^\circ 43' 18''$
3.  $c = 3795,$        $A = 18^\circ 53' 22'',$        $B = 81^\circ 12' 5''$
4.  $b = 37,$        $A = 115^\circ 36' 24'',$        $B = 27^\circ 18' 10''$
5.  $c = 913.45,$        $A = 64^\circ 56' 18'',$        $B = 47^\circ 29' 11''$
6.  $c = 327.85,$        $A = 40^\circ 31' 42'',$        $B = 110^\circ 52' 54''$



189. 第二類 已知兩邊及對一已知邊之角

由幾何學,可知僅知此三部分,不能決定一三角形。



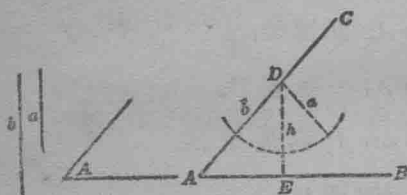
(一) 若  $A$  為鈍角,則  $a$  為三角形中最大之邊,此時有一個

三角形,且僅有此一個三角形能滿足已知條件。

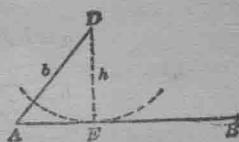
(二) 若  $A$  為直角,則可作一個三角形,且此直角三角形之解法,已於 § 175 討論之。

(三) 若  $A$  為銳角,則有下述之各種解法:

(1) 若  $a$  小於由  $D$  至  $AB$  之垂線長,即  $a < h$ , 則以  $D$  為心,  $a$  為半徑,所作之圓,不能與  $AB$  交,故無滿足已知條件之三角形,即此問題無解(見第八十五圖)。



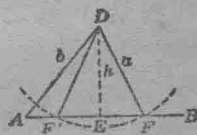
第八十五圖



第八十六圖

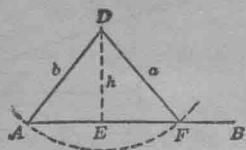
(2) 若  $a = h$  則所求之圓與  $AB$  切,而此題有一個解法,即  $\triangle ADE$ (見第八十六圖)。

(3) 若  $a > h$  而  $a < b$ , 則所作之圓交  $AB$  於  $F$  及  $F'$  兩點,故此題有兩個解法,即  $\triangle ADF, \triangle ADF'$ (見第八十七圖)。

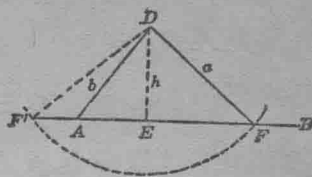


第八十七圖

(4) 若  $a=b$  則所作之圓遇  $AB$  於  $A$  及他一點  $F$ , 故此題有一個解法, 即  $\triangle ADF$  (見第八十八圖)。



第八十八圖



第八十九圖

(5) 若  $a > b$ , 則所作之圓交  $AB$  於  $F$  及  $F'$  兩點, 但僅有  $\triangle ADF$  能滿足本題之已知條件 (見第八十九圖)。

因垂線之長  $h$  可由三角法用兩個已知部分表示之, 如  $h = b \sin A$ . 故上述之討論, 可總括之如下:

1.  $A > 90^\circ$ ; 則  $a > b$ ; 一個解法; 鈍角三角形。
2.  $A = 90^\circ$ ; 一個解法; 直角三角形。
3.  $A < 90^\circ$ ; 若  $a < b \sin A$ ; 無解法。

若  $a = b \sin A$ ; 一個解法。

若  $b > a > b \sin A$ ; 兩個解法。

若  $a \leq b$ ; 一個解法。

第二類稱為兩意解法。

## 習

## 題

說明對於下述之已知部分各有若干解法:

1.  $A = 50^\circ 42'$ ,  $a = 204$ ,  $b = 204$
2.  $A = 20^\circ 10'.3$ ,  $a = 57$ ,  $b = 42$
3.  $A = 74^\circ 18' 13''$ ,  $a = 20$ ,  $b = 75$

4.  $A = 32^{\circ}6'$ ,  $a = 802$ ,  $b = 785$   
 5.  $A = 45^{\circ}$ ,  $a = 108$ ,  $b = 152.71$   
 6.  $A = 77^{\circ}17'.6$ ,  $a = 210$ ,  $b = 196$

解以下諸三角形：

7.  $a = 140.5$ ,  $b = 170.6$ ,  $A = 40^{\circ}$

討論

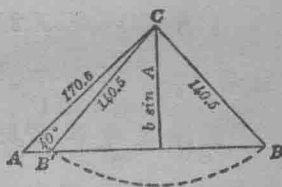
$$\log b = 2.23198$$

$$\log \sin A = 9.80307 - 10$$

---


$$\log b \sin A = 1.03005$$

$$\log a = 2.14768$$



第九十圖

$\therefore a > b \sin A$ , 又此題有兩個解法, 即  $\triangle ABC$ ,  $\triangle AB'C$  (見第九十圖)。

公式:  $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ ,  $C = 180^{\circ} - (A + B)$ ,  $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$

$$b - a = \frac{c \sin \frac{1}{2}(B - A)}{\cos \frac{1}{2}C}$$

解法:

$$\log b = 2.23198$$

$$\log \sin A = 9.80307 - 10$$

$$* \operatorname{colog} a = 7.85232 - 10$$

---


$$\log \sin B = 9.89237 - 10$$

$$B = 51^{\circ}18'.4$$

$$\therefore B' = \angle AB'C = 128^{\circ}41'.6$$

$$B + A = 91^{\circ}18'.4$$

$$C = \angle ACB = 88^{\circ}41'.6$$

$$B' + A = 168^{\circ}41'.6$$

$$\therefore C' = \angle ACB' = 11^{\circ}18'.4$$

\* Colog 即餘對數之縮寫。

$$\begin{aligned}\log a &= 2.14768 \\ \log \sin C &= 9.99989 - 10 \\ \text{colog} \sin A &= 0.19193\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}\log c &= 2.33940 \\ c &= 218.49\end{aligned}$$

覆算： $B - A = 11^\circ 18' .4$

$$\frac{1}{2}(B - A) = 5^\circ 39' .2$$

$$\frac{1}{2}C = 44^\circ 20' .8$$

$$b - a = 30.1$$

$$\log(b - a) = 1.47857$$

$$B' - A = 88^\circ 41' .6$$

$$\frac{1}{2}(B' - A) = 44^\circ 20' .8$$

$$\frac{1}{2}C' = 5^\circ 39' .2$$

$$\begin{aligned}\log a &= 2.14768 \\ \log \sin C' &= 9.29239 - 10 \\ \text{colog} \sin A &= 0.19193\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}\log AB' &= 1.63200 \\ c' = AB' &= 42.855\end{aligned}$$

$$\log c = 2.33940$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(B - A) = 8.99348 - 10$$

$$\text{colog} \cos \frac{1}{2}C = 0.145632$$

---


$$\log(b - a) = 1.47850$$

$$\log c' = 1.63200$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(B' - A) = 9.84447 - 10$$

$$\text{colog} \cos \frac{1}{2}C' = 0.00212$$

---


$$\log(b - a) = 1.47859$$

8.  $a = 491.2,$   $c = 385.7,$   $C = 46^\circ 15'$

9.  $a = 629,$   $e = 462,$   $A = 46^\circ 10'$

10.  $a = 723,$   $c = 483,$   $A = 140^\circ 11'$

11.  $a = 342.6,$   $b = 745.9,$   $A = 43^\circ 35' .6$

12.  $a = 345.46,$   $b = 531.75,$   $A = 26^\circ 47' 32''$

13. 於  $\triangle ABC$ ,  $A = 37^\circ 21'$ ,  $a = 93$ ,  $b = 85$ , 求  $\angle B$  (雪費爾大學)

14. 某路  $OA$  長  $9\frac{5}{8}$  哩與一直海岸  $OX$  成角  $31^\circ 16'$  ( $= 31^\circ .27$ ).

從  $A$  點起, 有  $AB$  及  $AB'$  兩路, 各長 6 哩, 直達海岸. 求由  $O$  至  $B$  及  $B'$  之距. (哈佛大學)

190. 第三類 已知兩邊及一夾角 下例說

明其解法:

已知  $B=37^{\circ}33'40''$ ,  $c=95,721$ ,  $a=25,463$

求  $A, C$  及  $b$ .

公式: 由等式  $\tan \frac{1}{2}(C-A) = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{1}{2}B$ , 可知  $\frac{1}{2}(C-A)$ .

由等式  $\frac{1}{2}(C+A) = 90^{\circ} - \frac{1}{2}B$ , 可知  $\frac{1}{2}(C+A)$

$$C = \frac{1}{2}(C+A) + \frac{1}{2}(C-A)$$

$$A = \frac{1}{2}(C+A) - \frac{1}{2}(C-A)$$

$$\therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C-A)}{\cos \frac{1}{2}B}$$

解法:

$$c-a=70,258$$

$$c+a=121,184$$

$$\frac{1}{2}B=18^{\circ}46'50''$$

$$\frac{1}{2}(C+A)=71^{\circ}13'10''$$

$$\log(c-a)=4.84670$$

$$\log c=4.98100$$

$$\text{colog}(c+a)=4.91656-10$$

$$\log \sin B=9.78505-10$$

$$\log \cot \frac{1}{2}B=0.46847$$

$$\text{colog} \sin C=0.12110$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(C-A)=0.23173$$

$$\log b=4.88715$$

$$\frac{1}{2}(C-A)=59^{\circ}36'30''$$

$$b=77117$$

$$\frac{1}{2}(C+A)=71^{\circ}13'10''$$

$$\text{覆算: } \log b=4.88715$$

$$C=130^{\circ}49'40''$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(C-A)=9.93580-10$$

$$A=11^{\circ}36'40''$$

$$\text{colog} \cos \frac{1}{2}B=0.02376$$

$$\log(c-a)=4.84671$$

## 習 題

解下述之三角形並覆算其結果：

$$1. \quad a=748, \quad b=375, \quad C=63^{\circ}35'30''$$

$$2. \quad a=486, \quad b=347, \quad C=51^{\circ}36'$$

$$3. \quad a=34.645, \quad b=22.531, \quad C=43^{\circ}31'$$

$$4. \quad a=145.9, \quad b=39.90, \quad C=92^{\circ}11'18''$$

$$5. \quad a=540, \quad b=420, \quad C=52^{\circ}6'$$

$$6. \quad a=469.71, \quad b=264.37, \quad C=96^{\circ}57'48''$$

$$7. \quad a=103.21, \quad b=152.37, \quad C=141^{\circ}8'54''$$

$$8. \quad a=167.38, \quad b=152.37, \quad C=150^{\circ}20'6''$$

解次之問題：

9. 一平行四邊形之兩對角線為 83.66 及 92.84, 對角線之一交角為  $84^{\circ}.28$ , 求平行四邊形之諸角及諸邊。

10. 兩車同時由同地開行, 一向北每小時行 40 哩, 一向東偏南  $10^{\circ}$  每小時行 30 哩, 問經過  $\frac{1}{2}$  小時後, 兩車相隔若干哩?

11. 由相距 5,280 呎之兩地, 同時測一飛機, 自第一地向飛機與第二地測得之地平面角為  $18^{\circ}37'$  ( $=18^{\circ}.62$ ), 又飛機之仰角為  $37^{\circ}41'$  ( $=37^{\circ}.68$ ) 自第二地向飛機與第一地測得之地平面角為  $64^{\circ}16'$ . ( $=64^{\circ}.27$ ) 求飛機之高. (由一點  $C$  向  $A, B$  所作之水平面角即含  $C$  與  $A$  之垂直面與含  $C$  與  $B$  之垂直面所成之角.)

12. 平行四邊形之兩對角線為 122 與 44. 其所夾之一角為  $47^{\circ}28'$  ( $=47^{\circ}.47$ ). 求平行四邊形之各角與各邊.

13. 設正方形  $ABCD$  以其一角頂  $A$  為中心,  $AB$  為半徑, 作  $BD$  弧, 若  $AB$  為 5 呎, 求由  $C$  至  $BD$  弧三等分點之距離.

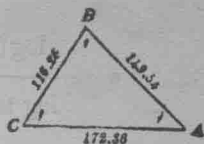
### 191. 第四類 已知三邊

其解法可以例說明之如次:

已知  $a=116.26$

$b=172.36$

$c=149.54$  (見第九十一圖)



第九十一圖

求  $A, B, C$ .

公式:  $s = \frac{1}{2}(a+b+c), \quad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

$\tan \frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a}, \quad \tan \frac{1}{2}B = \frac{r}{s-b}, \quad \tan \frac{1}{2}C = \frac{r}{s-c}$

$A+B+C=180^{\circ}$

解法:  $2s = 438.16$

$\log(s-a) = 2.01208$

$s = 219.08$

$\log(s-b) = 1.66950$

$s-a = 102.82$

$\log(s-c) = 1.84223$

$s-b = 46.72$

$\text{colog } s = 7.65940 - 10$

$s-c = 69.54$

$\log r^2 = 3.18321$

覆算:  $2s = 438.16$

$\log r = 11.59160 - 10$

$$\log r = 11.59160 - 10$$

$$\log r = 11.59160 - 10$$

$$\log(s-a) = 2.01208$$

$$\log(s-b) = 1.66950$$

$$\log \tan \frac{1}{2}A = 9.57952 - 10$$

$$\log \tan \frac{1}{2}B = 9.92210 - 10$$

$$\frac{1}{2}A = 20^\circ 47' 42''$$

$$\frac{1}{2}B = 39^\circ 53' 18''$$

$$A = 61^\circ 35' 24''$$

$$B = 79^\circ 56' 36''$$

$$\log r = 11.59160 - 10$$

$$\log(s-c) = 1.84223$$

$$\log \tan \frac{1}{2}C = 9.74937 - 10$$

$$\frac{1}{2}C = 29^\circ 18' 54''$$

$$C = 58^\circ 37' 58''$$

覆算： $A + B + C = 179^\circ 59' 58''$

### 習 題

解次之三角形。

- |                  |               |               |
|------------------|---------------|---------------|
| 1. $a = 13,$     | $b = 14,$     | $c = 15$      |
| 2. $a = 77,$     | $b = 123,$    | $c = 130.$    |
| 3. $a = 5.953,$  | $b = 9.639,$  | $c = 14.424$  |
| 4. $a = 286,$    | $b = 321,$    | $c = 463$     |
| 5. $a = 12.653,$ | $b = 17.213,$ | $c = 23.106.$ |
| 6. $a = 34.278,$ | $b = 25.691,$ | $c = 30.175.$ |
| 7. $a = 1,017,$  | $b = 246.3,$  | $c = 495.98.$ |
| 8. $a = 49.17,$  | $b = 52.82,$  | $c = 61.34.$  |



## 斜三角形之面積

192. 下述各種公式,皆可用以求三角形之面積,撰用之方法,因已知部分而異.

1. 已知一邊及其上之高: 設  $b$  爲其一邊,  $h$  爲此邊上之高,則其面積  $T$  爲

$$T = \frac{b \cdot h}{2}.$$

2. 已知兩邊及其夾角:

$$\text{因 } T = \frac{1}{2} b \cdot h \quad h = a \sin C.$$

$$\text{故 } T = \frac{ab \sin C}{2}$$

3. 已知其三邊:

$$\text{則 } T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

4. 已知兩角及其一邊:

$$\text{由正弦定則, } a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$\text{代入等式 } T = \frac{ab \sin C}{2}.$$

$$\text{則 } T = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$$

5. 已知三邊及內切圓之半徑:

$$T = rs$$

6. 已知三邊及外接圓之半徑:

由 § 180, 知  $\frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\therefore \sin C = \frac{c}{2R}$$

代入等式  $T = \frac{1}{2}ab \sin C$

則得  $T = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R}$

$$\therefore T = \frac{abc}{4R}$$

### 習 題

求下列三角形之面積：

1.  $a=40$ ,  $b=13$ ,  $c=37$
2.  $a=10$ ,  $b=12$ ,  $C=60^\circ$
3.  $a=122.5$ ,  $c=122.5$ ,  $B=110^\circ 31'$
4.  $A=61^\circ 30'$ ,  $B=4^\circ 15'$ ,  $c=163$
5.  $a=17$ ,  $b=113$ ,  $c=120$

解下列各問題：

6. 正五邊形之每邊爲 7 吋, 延長各邊成星狀形, 求此星形之面積. (哈佛大學)
7. 證明平行四邊形之面積, 等於其兩高之積除以一角之正弦. (哈佛大學)
8. 平行四邊形之兩邊爲 28.26 與 30.15, 其夾角爲  $68^\circ 29'$ , 求其面積. (雪費爾大學)
9. 稜形之邊爲 2 吋, 其一角爲  $65^\circ$ , 求其面積.

10. 圓之半徑爲111.3呎,求其內一長129.3呎之弦與其平行直徑間之面積。(教育部)

11. 平行四邊形之對角線爲12.5呎及12.8呎,其夾角爲 $52^{\circ}16'$ ,求其各邊之長及面積。

193. 三角學史略 約由紀元前2000年至1700年間之Rhind Papyrus或Reckoning Book of Ahmes中,有seqt一字,含有現今餘弦Cosine之意義。

郝布失格爾(Hypsicles)(約紀元前180年)於其所著之Risings of the Stars中,籍角之弦函數以助計算,故今用正弦函數計算之法,或由郝氏自巴比倫開其源。

人咸謂三角學始於郝派克斯(Hipparchus)(生於約紀元前160年),直天文學之一支派耳,郝氏於紀元前126年,始以圓弦表爲計算天文學問題之助,其應用之廣大,與吾人之用正弦表同。

海倫(Hero)(紀元前第一世紀)之計算正多邊形面積,曾用與正切函數相同之乘數,然海氏爲測量家,又視此法爲天文學之一部,故不甚留意及之,夷考其思想,或導源於古代之埃及乎?

梅尼羅士(Menelaus)約在紀元後98年時,著有關於圓弦函數之書六卷,其對於弦函數之應用,言之甚詳。

紀元後125年至161年間,都利默(Ptolemy)著有合於時論之天文學書,其中Megiste syntaxis一章,重述郝派克司之三

角計算法，並圓弦表。都氏又整理前說，稍加訂正，發展圓弦表在計算上之價值，如吾人之用正弦表焉。如此宏著，尊為天文學界可靠之典藉者，實歷一千五百年。至第九世紀後半期，譯成阿拉伯文，名為 *Almagest*。迨至 1464 年，里極阿盲塔納司 (Regiomontanus) 刊印其 *De Triangulis* 時，猶奉之為參考資料也。

### 印度之三角學

阿耶倍泰 Aryabhatta 者，印度最早之科學家也。其數學上之著述，吾人至今猶受其賜。其大著如 *Aryabhataiyam* 給吾人以三角學上最高之發展，且於正弦，餘弦，正矢 ( $=1-\cos$ )，皆與以專門之術語，並造有隔  $3^{\circ}45'$  之三角正弦表。

勃喇買蛤泰 Brahmagupta (生於 598 年) 著有 *Siddhanta* 一書，其中一部分，係專致力於三角學者；然除對於阿耶倍泰之謬誤處有所修改外，於阿氏之舊作並無深刻研究。其書內錄有阿氏之正弦表。

白司渴拉 (Bhaskara) (生於紀元後 1114 年) 亦印度產也。其所計算之每隔一度之正弦表，甚為正確。

### 阿拉伯之三角學

古代之阿拉伯人，特別注意於天文學及醫學，然稱彼為創造家，毋寧稱彼為借貸家。彼西借之於希臘，東借之於印度，復於其所借得之中，盡抉擇批之能事，吸兩大文明泉源

之精華，譯成本國文字，融會貫通，以成其特具之文明。因其遭遇奇運，致使其酷好之科學，不克繼續發展，即於天文學有關係之三角學，亦無顯著之進步。

阿區華里密(Alchwarizmi)(約紀元後820)曾迭譯印度之Siddhanta，名曰Sindhind。此書以阿耶倍泰之表為主，傳播甚廣，阿拉伯科學家，由此得諳三角學之計算法。

阿爾白太尼(Al Battani)(生於紀元後929年)為阿拉伯最著名之三角學家，曾於Stellar Motions一書中，發表其修改Sindhind之計算法之結果。此書於十二世紀之前，經伯拉圖譯成拉丁文，而里極阿盲塔納司之著作，係以此書為根據者也。華發(Abu'l Wafa)(940至998年)發展三角函數之應用，加入正切餘切函數，並計算 $15'$ 之角之三角函數。

阿爾白太尼之著作出版後，約一世紀有西阿拉伯人阿弗拉者(Dschahir ibn Aflah)(約1140至1150年之間)在西班牙塞維爾計算天象，仍用舊日都利默之弦函數，而對於阿爾白太尼及華發之方法，似毫不留意。當時用阿弗拉氏之匿名著作，反遍傳於歐洲，可剖熱克司之計算法，其結果為關於太陽系之問題，根據嗣後此種方法無他進步，其已經阿爾白太尼所發揮者，採入里極阿盲塔納司新方法論中

### 歐洲中古之三角學

謬婁(Johann Mueller)(1436年至1476年)科學上之盛名為里極阿盲塔納司，當在維也乃大學讀數學時，從事於

Almagest 之分析，又譯之成拉丁文，其原書或得自西班牙之摩爾學校。當其研究 Almagest 也，嘗以得是書之希臘原本為要事，蓋是書先由希臘文譯成阿拉伯文也。自後於 1464 年之 De Triangulis 中，發表其研究 Megiste syntaxis，及 Almagest 之結果與其心得，De Triangulis 實為歐洲最早之三角學課本。其後成歐洲數學復興之力，與他書不相上下，雖不免沿襲前代之重要著作，然其立論則別開生面也。其餘歐洲人之在里極阿盲塔納司以前者亦曾研究一二三角法，偉熱他 (1540—1603) 曾思考其一部分之用途，如測量術；賴克司 (1514—76) 曾視三角函數為一種比，實則科學理論第一完備之榮譽，在泰西當歸之里極阿盲塔納司也。

比德葛司 (Pitiscus) (1561—1613) 為用三角學 trigonometry 書名之第一人，時在 1595 年。

里極阿盲塔納司後之三角學略有修改及擴充。經尤拉 (1707—83) 之妙手編纂方有今日。

總之，由歷史之觀察，球面三角形之發達，遠在平面三角形之先，誠為可怪之事。然球面三角形之基礎，則藉平面三角學之發達而更加穩固矣。

## 提 要

194. 下列問題，乃本章之重要部分。

1. 問三角函數之對數之意義。
2. 述求已知角之三角函數之對數方法。

3. 述求對應於已知對數之角。
4. 討論對數對於解直角三角形之功用。
5. 述解直角三角形之公式。
6. 說明解等腰三角形及正多邊形之方法。
7. 述下列諸事件且證明之。  
    正弦之定則。  
    餘弦之定則。  
    正切之定則。    莫爾維特氏方程式。
8. 記出表下列各件之公式。  
    三角形外接圓之半徑。  
    三角形內切圓之半徑。
9. 述餘對數之意義與用法。
10. 討論解任意三角形所遇之各種情形,且述各情形所用之公式。

# 第 九 章

## 幾 角 諸 函 數 間 之 關 係

### 和 差 定 理

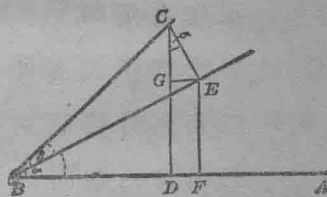
195. 兩角和之正弦餘弦 此定理之研究，分爲三部如下：

I. 設  $\alpha$  與  $\beta$  表示兩正銳角，其和小於  $90^\circ$  (第九十二圖)。

命  $\angle ABC = \alpha + \beta$ 。

求  $\sin(\alpha + \beta)$

作  $CD \perp AB$ ,



第九十二圖

則  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{DC}{CB}$ 。

作  $CE \perp BE$ ,  $EF \perp AB$ ,  $EG \perp CD$ 。

說明  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{DC}{CB} = \frac{DG + GC}{CB} = \frac{FE + GC}{CB} = \frac{FE}{CB} + \frac{GC}{CB}$ 。

說明  $FE = EB \sin \alpha$  又  $\frac{FE}{CB} = \frac{EB}{CB} \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$ 。

因  $\angle GCE = \alpha$ ，所以

$$GC = CE \cos \alpha \text{ 又 } \frac{GC}{CB} = \frac{CE}{CB} \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha$$

由代入法，

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots\dots (1)$$





但  $\cos \alpha = \sin(90^\circ + \alpha) = \sin \alpha'$ .

$$\sin \alpha = -\cos(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha'.$$

由代入,

$$\sin(\alpha' + \beta) = \sin \alpha' \cos \beta + \cos \alpha' \sin \beta.$$

故方程式(1)對於一銳角增加  $90^\circ$  時亦為真。

依此,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha' + \beta) &= \cos[90^\circ + (\alpha + \beta)] \\ &= -\sin(\alpha + \beta) \\ &= -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

由代入得

$$\cos(\alpha' + \beta) = \cos \alpha' \cos \beta - \sin \alpha' \sin \beta.$$

方程式(1)與(2)不僅對於任兩個銳角為真,即銳角增  $90^\circ$  時亦為真。

由同理再將一角增  $90^\circ$ ,其對於兩式之結果亦真。

故(1)(2)兩公式對於任何兩角皆為真。

### 習 題

1. 計算  $\sin 75^\circ$ ,  $\cos 75^\circ$

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

則  $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

計算下列諸角度之正弦餘弦：

2.  $90^\circ$  (置  $90^\circ = 60^\circ + 30^\circ$ )      3.  $105^\circ$  (置  $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ )

4.  $150^\circ$       5.  $210^\circ$       6.  $195^\circ$

7.  $120^\circ$       8.  $240^\circ$

證明下式：

$$10. \quad \sin(45^\circ + x) = \frac{(\cos x + \sin x)\sqrt{2}}{2}$$

$$11. \quad \cos(60^\circ + a) = \frac{\cos a - \sqrt{3} \sin a}{2}$$

196. 兩角差之正弦餘弦 此等定理之證明如下：

設  $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$

則  $\sin \alpha = \sin[(\alpha - \beta) + \beta]$

$$= \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta,$$

$$\cos \alpha = \cos[(\alpha - \beta) + \beta]$$

$$= \cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta.$$

以  $x$  表示  $\sin(\alpha - \beta)$  又以  $y$  表示  $\cos(\alpha - \beta)$ ,

則前之兩個方程式變為

$$\sin \alpha = x \cos \beta + y \sin \beta$$

$$\cos \alpha = -x \sin \beta + y \cos \beta$$

以行列式解之。

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}}$$

$$\therefore x = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta},$$

$$y = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta}$$

$$\therefore x = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$y = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

或  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

### 習 題

1. 計算  $\sin 15^\circ$ ,  $\cos 15^\circ$

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \dots\dots$$

計算下列諸角之正弦餘弦：

2.  $0^\circ$  (置  $0^\circ = 30^\circ - 30^\circ$ )

3.  $15^\circ$  (置  $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$ )

4.  $\sin(90^\circ - x)$

6.  $\cos(30^\circ - y)$

5.  $\cos(45^\circ - x)$

7.  $\sin(360^\circ - y)$

證下列各式：

8.  $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

9.  $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

10.  $\sin(x+y+z) = \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z$

$$+ \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z$$

## 197. 正弦餘弦之和及差

$$\text{因 } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots (2)$$

(1) (2) 相加得——

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \dots\dots\dots (3)$$

由 (1) 減 (2) 得——

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots (4)$$

依此,

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \dots\dots\dots (5)$$

及

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \dots\dots\dots (6)$$

設  $\alpha + \beta = A$  又  $\alpha - \beta = B$ ,

則  $\alpha = \frac{1}{2}(A + B)$ , 又  $\beta = \frac{1}{2}(A - B)$  何故?

代入方程式 (3) 至 (6).

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

## 習 題

證明下列各式:

$$1. \sin 35^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin 25^\circ \cos 10^\circ$$

$$2. \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$3. \sin 3\theta + \sin \theta = 2 \sin 2\theta \cos \theta$$

$$4. \sin 5x + \sin 3x = 2 \sin 4x \cos x$$

$$5. \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 2 \cos x \sin \frac{x}{2}$$

$$6. \sin(45^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = \sqrt{2} \cos x$$

$$7. \frac{\sin 2\theta + \sin \theta}{\cos 2\theta - \cos \theta} = \cot \frac{\theta}{2}$$

$$8. \frac{\sin 6x + \sin 4x}{\cos 6x + \cos 4x} = \tan 5x$$

## 198. 正切餘切之和差定理

說明

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \end{aligned}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{依此, } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

習 題

證明下式:

$$1 \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

$$2. \quad \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

$$3. \quad \tan(45 + A) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$$

$$4. \quad \tan(45 - A) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$$

### 199. 倍角之函數

於方程式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

置  $\beta = \alpha$

$$\text{則 } \sin(2\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\text{或 } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

依此,從

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

則有

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{因 } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{由 } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

則得

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha$$

$$\therefore \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

從方程式

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

則得

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

### 習 題

1. 證  $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$

2. 證  $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

置  $3\alpha = (2\alpha + \alpha)$

## 200. 半角之函數

於方程式

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

置  $2\alpha = x$

則  $\alpha = \frac{x}{2}$

即

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

求  $\sin \frac{x}{2}$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

依此從方程式



$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

則得

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

以  $\cos \frac{x}{2}$  除  $\sin \frac{x}{2}$ , 則有

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

### 習 題

證明下列方程式皆為恆等式：

$$1. \quad \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1}$$

$$2. \quad \left( \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \right)^2 = 1 + \sin A$$

$$3. \quad \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$$

$$4. \quad \tan A + \cot A = 2 \operatorname{cosec} 2A$$

$$5. \quad \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$$

$$6. \quad \cot x = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$$

$$7. \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \cos x$$

$$8. 1 + \tan A \tan \frac{A}{2} = \sec A.$$

雜 題

201. 證下列各式：

$$1. \tan 2x + \sec 2x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$2. 2 \sin x + \sin 2x = \frac{2 \sin^3 x}{1 - \cos x}$$

$$3. (\sec \alpha + \tan \alpha)^2 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

$$4. \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$5. \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$6. 1 + \tan \alpha \tan \frac{\alpha}{2} = \sec \alpha$$

$$7. \tan x = \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} \sec x$$

$$8. \frac{\cos(\alpha - 45^\circ)}{\cos(\alpha + 45^\circ)} = \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$$

解下列問題：

$$9. \text{已知 } \tan x = -\frac{4}{3}, \text{ 且 } x \text{ 在第二象限.}$$

求  $\sin 2x$ . (雪費爾大學)

$$10. \tan x = \frac{7}{24}, \text{ 而 } x \text{ 在第三象限內, } \sec y = -\frac{13}{5}, \text{ 而 } y \text{ 在第二}$$

象限內, 求  $\cos(x - 2y)$ ;  $\cot 2x$ ;  $\sin \frac{1}{2}y$ .

11. 若  $\sin x = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ , 求  $\tan \frac{x}{2}$ . (哈佛大學)

12. 若  $\tan \frac{x}{2} = y$ , 求  $\sin x$  及  $\cos x$  之值, 而以  $y$  項表示之.

(哈佛大學)

13. 直角三角形, 其兩銳角差之餘弦, 等於其兩腰相乘積之二倍, 除以斜邊之平方, 求證. (哈佛大學)

14. 若  $x = \tan^{-1} \frac{2a}{1-a^2}$ , 試求  $\sin \frac{x}{2}$  之值, 而以  $a$  表示之.

(僅思考  $0^\circ$  與  $90^\circ$  間  $x$  之值, 及  $0$  與  $1$  間  $a$  之值.)

15. 解方程式:

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \tan^{-1} 3. \quad (\text{雪費爾大學})$$

$$\text{置 } \alpha = \tan^{-1} x, \quad \beta = \tan^{-1} 2x$$

$$\text{則 } \tan(\alpha + \beta) = 3$$

16. 證明 弧  $\tan \frac{1}{2} + \text{弧} \tan \frac{1}{3} = 45^\circ$ .

### 三角方程

202. 假定  $x$  之值在  $0^\circ$  與  $360^\circ$  之間, 解下列方程

1.  $\cos 2x + 3 \sin x = 2$

說明  $1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$

解  $\sin x$  以求  $x$ .

2.  $\cos 2x + \cos x = 0$

3.  $\cos x \cos 2x + 2 \cos^3 x = 0$

用劈因數法解之.

$$4. \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=4$$

$$5. \quad \sin x+\sin 2x=1.$$

$$6. \quad \cos 2x+\sin x=4 \sin^2 x$$

†7. 解次之方程:

$$3 \sec^2 x-7 \tan^2 x=\tan x \quad (\text{耶魯大學})$$

求  $0^\circ$  與  $180^\circ$  間  $x$  之各值,並以度數表示之.

†8. 解方程  $\sin 2x+\frac{1}{2}=\sin x+\cos x$ . 求  $0^\circ$  及  $180^\circ$  之間能滿足  $x$  之諸值,並以度數表示之. (耶魯大學)

†9. 於  $0^\circ$  及  $360^\circ$  之間,求能滿足下式之  $x$  之值.

$$4 \cos 2x+3 \cos x=1. \quad (\text{哈佛大學})$$

†10. 於  $0^\circ$  及  $360^\circ$  之間,求能滿足下式之  $x$  之值,且覆算所得之結果.

$$6 \cos 2x+6 \sin^2 x=5+\sin x. \quad (\text{哈佛大學})$$

†11. 於  $0^\circ$  及  $360^\circ$  之間求能滿足下式之  $x$  之值.

$$3 \cos 2x+\sin x(3 \sin x+5)=5. \quad (\text{哈佛大學})$$

†12. 於  $0^\circ$  與  $360^\circ$  之間,求能滿足下式之  $x$  之值.

$$2 \sin 2x=\cos x \quad (\text{哈佛大學})$$

†13. 直角三角形兩銳角正切之和為 4, 求兩角之值.  
(哈佛大學)

†14. 解次之方程:

$$\cos 5\theta+\cos 3\theta=\sqrt{2} \cos 4\theta \quad (\text{普連士頓大學})$$

## 提 要

203. 下列公式已經證明：

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$2. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$3. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$5. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

$$6. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

$$7. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

$$8. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$9. \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$10. \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$11. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$12. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$13. \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$15. \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$14. \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$16. \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

204. 本章已授解三角方程之法,試再說明之。

205. 述證三角恆等式之法。

## 第 十 章

## 二 項 定 理 級 數

## 二 項 定 理

206. 二項定理 可由二項式乘冪之展開式觀察之。由實施乘法,可得下列之恆等式:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

由此等恆等式,發現下列事項:

- (1) 右端項數較左端之指數多一
- (2) 右端第一項  $a$  之指數,與二項式之指數同,以後逐次減 1,至第末項之指數為 0。
- (3) 第一項  $b$  之指數為 0,以後逐次加 1,第末項之指數與二項式之指數同。

由上三條,可知任何二項式如  $(a+b)$ , 乘至正整冪  $n$  時,其展開式為

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \dots$$

其係數之決定法如下：

排列  $(a+b)^0$ ,  $(a+b)^1$ ,  $(a+b)^2$ .....之係數如第九十四圖。  
可見排列於此形中之每一係數，各  
等於其上列最近左右兩數之和。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

第九十四圖稱爲巴斯加(Pascal)  
氏三角形。\*

第九十四圖

第二項後任何項之係數，可由其前一項之係數決之，其  
規則如下：

以前項  $a$  之指數乘該項之係數，而將乘積除以該項之  
項數。

如  $(a+b)^5$  之第五項係數爲  $\frac{10 \cdot 2}{4} = 5$ ;

第三項之係數爲  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ，餘類推。

207. 二項定理 依 § 206 之法則， $(a+b)^n$  可寫爲下  
列之形。

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n = & a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 \\
 & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots
 \end{aligned}$$

此爲對於正整冪之二項定理，其證明詳高等代數中此  
處從略。

\* 參看本書第一編 210 至 211 頁。



208. 階乘記法  $1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \dots$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r$  之積, 各稱爲 2 之階乘 3 之階乘 4 之階乘  $\dots r$  之階乘. 此等階乘, 常以記號  $2! 3! 4! \dots r!$  或  $2 \lfloor 3 \lfloor 4 \dots \lfloor r$  表示之.

$$\begin{aligned} \text{如 } (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots \end{aligned}$$

### 習 題

展開下式至第四項:

1.  $(2x-3y)^7$

於此例,  $a=2x, b=(-3y), n=7$ .

$$\begin{aligned} \text{故 } (2x-3y)^7 &= (2x)^7 + 7(2x)^6(-3y) + \frac{7 \cdot 6}{2} (2x)^5(-3y)^2 + \\ &\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3} (2x)^4(-3y)^3 + \dots \\ &= 2^7 x^7 - 7 \cdot 2^6 \cdot 3 x^6 y + 21 \cdot 2^5 \cdot 3^2 x^5 y^2 - 35 \cdot 2^4 \cdot 3^3 x^4 y^3 + \dots \\ &= 128x^7 - 1344x^6y + 6048x^5y^2 - 15120x^4y^3 + \dots \end{aligned}$$

2.  $\left(\frac{2}{y} + \frac{3y^2}{4}\right)^4$

故  $a = \frac{2}{y}, b = \frac{3y^2}{4}, n = 4$

$$\therefore \left(\frac{2}{y} + \frac{3y^2}{4}\right)^4 = \left(\frac{2}{y}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{y}\right)^3\left(\frac{3y^2}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4 \cdot 3 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(\frac{3y^2}{4}\right)^2}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 2 \left(\frac{2}{y}\right) \left(\frac{3y^2}{4}\right)^3}{3} + \frac{4 \cdot 1 \left(\frac{2}{y}\right)^0 \left(\frac{3y^2}{4}\right)^4}{4} \\
& = \frac{2^4}{y^4} + \frac{4 \cdot 2^3 \cdot 3y^2}{4y^3} + \frac{6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 y^4}{4^2 y^2} + \frac{4 \cdot 2 \cdot 3^3 y^6}{4^3 y} + \frac{3^4 y^8}{4^4} \\
& = \frac{16}{y^4} + \frac{24}{y} + \frac{27y^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

$$3. \left(\frac{2a}{b^2} - b\sqrt{a}\right)^4$$

$$\text{設 } a = \frac{2a}{b^2}, \quad b = -b\sqrt{a} = -ba^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{於是 } \left(\frac{2a}{b^2} - b\sqrt{a}\right)^4 = \left(\frac{2a}{b^2}\right)^4 + 4\left(\frac{2a}{b^2}\right)^3(-ba^{\frac{1}{2}})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4 \cdot 3 \left(\frac{2a}{b^2}\right)^2 (-ba^{\frac{1}{2}})^2 + \dots}{2} \\
& = \frac{2^4 a^4}{b^8} - \frac{4 \cdot 2^3 a^3 a^{\frac{1}{2}} b}{b^6} + \frac{6 \cdot 2^2 a^2 a b^2}{b^4} + \dots \\
& = \frac{16a^4}{b^8} - \frac{32a^3 \sqrt{a} b}{b^5} + \frac{24a^3}{b^2} + \dots
\end{aligned}$$

$$4. (x-y)^8$$

$$10. (\sqrt{x} + \sqrt{y})^5$$

$$5. (2a+4c)^4$$

$$11. (2+\sqrt{3})^4$$

$$6. (3a^2-b^2)^7$$

$$12. \left(\frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{\sqrt{y}}{x}\right)^3$$

$$7. \left(3a^2b^4 - \frac{1}{2}\right)^5$$

$$13. \left(\frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{b^8}} - \frac{\sqrt[3]{y}}{a}\right)^5$$

$$8. \left(\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y\right)^6$$

$$14. (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^4$$

$$9. \left(y^2 - \frac{b}{2y}\right)^6$$

$$15. (a^{-3} - b^{-3})^4$$

16.  $(3ab^{-3} - a^{-3}b)^6$

19.  $\left(y^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{2}{y}}\right)^5$

17.  $\left(a^2 - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{10}$

20.  $(4x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^6$

18.  $\left(\frac{3}{2k} - \frac{2k}{3}\right)^4$

209.  $(a+b)^n$  之第  $r$  項 項數與此項係數之分子,

可排列如下表:

項數	分 子
3.....	$n(n-1)$
4.....	$n(n-1)(n-2)$
5.....	$n(n-1)(n-2)(n-3)$
6.....	$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

由上表之研究,可知第  $r$  項之係數之分子爲

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots(n-r+2).$$

依此,第  $r$  項之係數之分母爲

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots (r-1).$$

說明第  $r$  項之  $a$  之指數爲  $n-r+1$ .

說明第  $r$  項之  $b$  之指數爲  $r-1$ .

故  $(a+b)^n$  之展開式之第  $r$  項之公式爲

$$t_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots (r-1)} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

習 題

1. 於  $\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^6$  求其第四項.

$$a=2x, \quad b=\frac{1}{2x}, \quad n=6, \quad r=4$$

$$\begin{aligned} \therefore t_4 &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2x)^{6-4+1} \left(\frac{1}{2x}\right)^{4-1} \\ &= \frac{20 \cdot 2^3 x^3}{2^3 x^3} = 20 \end{aligned}$$

2. 於  $\left(\frac{5}{a} + \frac{a}{5}\right)^8$  求其第五項。

3. 於  $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})^7$  求其第六項。

4. 於  $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y)^{10}$  求其第四項。

5. 記出  $(4a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{4}})^8$  之最後三項。(耶魯大學)

### 雜 題

1210. 下列各問為大學之入學試題：

1. 展開  $\left(\frac{2x}{y^3} - \frac{y^4}{x\sqrt{-6}}\right)^5$  且簡單之。(斯密司大學)

2. 記出  $(4a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{4}})^8$  之展開式之最後三項。(耶魯大學)

3. 證明  $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$ 。(哈佛大學)

4. 求  $\left(x^4 + \frac{1}{5x^2}\right)^{10}$  之第五項，且簡單之。(大脫麥司大學)

5. 於  $\left(2x + \frac{1}{3x}\right)^6$  其第四項與第五項之比為 2:1 求  $x$ 。

(普連士頓大學)

6. 記出  $\left(\frac{x}{2\sqrt[3]{y^2}} - \frac{\sqrt{y}}{x}\right)^9$  之第六項。(配塞而衛尼亞大學)

7. 求  $\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{3}{4}\right)^{28}$  之展開式之第二十三項，且簡單之。

8. 若  $\left(3x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^4$  之中項等於  $\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^7$  之第四項, 求  $x$ . (M.I.T.).
9. 記出  $(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^8$  之第一項, 且使其最簡之形有一負指數.
10. 於  $\left(2x^2 - \frac{1}{4x}\right)^8$  內, 求  $x^4$  之係數.
11. 證明  $(1+x)^{16}$  內中項之係數, 等於  $(1+x)^{15}$  內第八第九兩項係數之和. (普連士頓大學)
12. 於  $(2x - 3x^{-1})^8$  內, 求不含  $x$  之一項. (普連士頓大學)
13. 記出下列之第六項  

$$\left(\sqrt{\frac{64a^4b^6}{81m^2n^8}} + \sqrt[3]{-\frac{a^{-8}}{m^{-9}}}\right)^{10}$$
 (耶魯大學)
14. 求  $(1 - \sqrt{x})^6$  之第三項及第五項. (雪費爾大學)
15. 於  $\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{3}{2x}\right)^8$  內, 求  $x^4$  之係數.
16. 於  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{14}$  內, 求不含  $a$  之項.
17. 求  $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^8$  之中項.

## 算術級數

211. 算術級數 若干數依一定之法則連續排列者曰級數, 如  $2+4+6+8+\dots$  之式為級數, 因其中之任一項, 乃由其前項加 2 而得者也.

算術級數為一羣之數, 其後項與其前項之差為一常數.

## 習 題

1. 說明下列為算術級數之例：

3, 5, 7, 9, .....; 84, 74, 64, .....; 以3為底之 3, 9, 27, 81, .....

之對數。

2. 證明方程式  $x-b=b-c$  表示  $a, b, c$ , 為算術級數。

212. 元素 算術級數之普通形狀為  $a, (a+d), (a+2d), (a+3d), \dots$

第一項以  $a$  表示之,  $d$  為公差, 定項數為  $n$ 。

第  $n$  項稱為  $l$ 。

命  $n$  項之總和為  $s$ 。

$a, d, n, l, s$  皆為算術級數之元素。

213. 元素間之關係 第九十五圖之表指示算術級數之元素間關係之一。

項 次	項
第二項.....	$a+d$
第三項.....	$a+2d$
第四項.....	$a+3d$
第五項.....	$a+4d$
第十項.....	$a+9d$
第十五項.....	$a+14d$
第 $n$ 項.....	$a+(n-1)d$

$$\therefore l = a + (n-1)d$$

第九十五圖

其他之關係可得之如次：

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + a + (n-1)d$$

依此

$$s = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + l - (n-1)d$$

相加

$$2s = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l)$$

即

$$2s = n(a+l)$$

$$\therefore s = \frac{n}{2}(a+l).$$

由上關係可知若知其中三元素，則其他兩元素不難推算得之。

### 習 題

解次之問題：

1. 求級數  $7+10+13+\dots$  之第十項。

命  $a=7$ ,  $d=3$ ,  $n=10$ .

代入等式  $l=a+(n-1)d$ , 即得  $l$  之值。

2. 求  $2+4+6+\dots$  之第七項及其七項之總和。

3. 設  $a=7$ ,  $d=-2$ ,  $n=8$ , 求  $s$  及  $l$ 。

4. 設  $l=30$ ,  $n=9$ ,  $s=162$ , 求  $a$  及  $d$ 。

5. 算術級數之第四項為 11, 第十四項為 -39. 求其公差。

6. 第二項與第二十項 *A.P.* 之和為 10. 其積為  $23\frac{47}{64}$ . 求其 16 項之總和. (配塞而衛尼亞大學)

(註)算術級數之記號為 *A.P.* 即 *Arithmetical Progression* 之省略。

7. 已知  $l=23$ ,  $d=2$ ,  $s=143$ . 求  $a$  及  $n$ .

以  $l$ ,  $d$ ,  $s$  之值代入公式得

$$23 = a + (n-1)2$$

$$143 = \frac{n}{2}(a+23)$$

---


$$a + 2n = 25$$

$$an + 23n = 286$$

---


$$\text{即 } 2n^2 - 48n + 286 = 0$$

$$\therefore n=11, \text{ 或 } n=13.$$

故級數有兩羣, 一為  $3, 5, 7, 9, \dots$ , 一為  $-1, 1, 3, \dots$

8. 已知  $a=5$ ,  $d=3$ ,  $s=185$ . 求  $l$  及  $n$ .

9. 已知  $l=33$ ,  $s=152$ ,  $d=4$ . 求  $a$  及  $n$ .

10. 求從 1 至 100 間之偶整數之和.

11. 求從 0 至 320 間能被 3 除盡之諸整數之和.

12. 求為正整數之三位數之和, 但此等三位數皆為 9 之倍數.

13. 求級數  $1, 3, 5, 7, \dots$  之第  $n$  項及其  $n$  項之總和.

14. 公差為 5, 第二十七項為 139, 求其首項.

15. 求 0 至 200 間能以 6 除盡之諸數.

16. 某工人與其主人定約掘井, 第一碼工費八元, 此後每深一碼工費遞加 2 元. 若此井深 27 碼, 問工人得工費若干?



17. 某人購房屋及空地共價 \$6200, 約定第一年末付銀 \$600, 第二年末付銀 \$650, 按年遞推, 問需若干年, 方能付清總款?

18. 某算術級數, 首八項之和為 64, 首 18 項之和為 324, 求此級數. (普連士頓大學)

19. 某人關於其職務所定之契約如下 第一年得辛費 \$800 嗣後每年遞加 \$50, 至第二十年止, 問其第十五分之辛費若干?

20. 某童將馬鈴薯遊戲, 以 45 個馬鈴薯置於與一籃成一直線之各點上, 距籃 3 呎, 6 呎, 9 呎, 12 呎……某童每次取一馬鈴薯置籃內, 問馬鈴薯取盡時, 此童所行之路共若干呎?

21. 一球自斜面滾下, 第一秒行 8 呎, 第二秒較第一秒多行 16 呎, 以後按秒數逐次遞加, 問 12 秒後, 此球滾過之路長若干?

22. 一物體由靜止落下, 第一秒落下 16.08 呎, 第二秒落下 48.24 呎, 第三秒落下 80.40 呎, 以後逐次按秒數遞推, 問 12 秒後, 15 秒後,  $t$  秒後, 物體落下若干呎?

23. 某算術級數三項之和為 33, 第末項之平方較第一第二兩項平方之和多 11, 求此級數.

24. 彈丸以每秒 1800 呎之速度向上射擊, 當其向上時, 每秒減速 32 呎, 向下時, 每秒增速 32 呎, 問此丸升高達若干呎, 又落地時, 需時若干秒?

214. 算術中項 介於算術級數任意兩項間之數曰算術中項。

例如 5 爲 2, 8 之算術中項。

9, 5, 1, -3 四數乃 13 與 -7 間之算術中項

兩個已知數間可插入一個或多個算術中項。

例如於 5, 69 之間插入三個算術中項, 其法如下。

若 5 與 69 之間插入三個中項, 則此級數爲  $5 + \dots + 69$

(三點代表三中項)

由  $a=5$ ,  $l=69$ ,  $n=5$ , 求  $d$ 。

從公式  $l=a+(n-1)d$ , 得

$$69=5+4d,$$

$$d=16.$$

故 5 與 69 間之三個算術中項爲 21, 37, 53。

### 習 題

1. 於 -5, -3 間插入 8 個算術中項。
2. 於 9 與 11 間插入 4 個算術中項。
3. 求 15 與 7 間之算術中項。
4. 間插入若干算術中項於 249 與 15 之間, 則級數之和爲 1995。
5. 於 8 與 3 之間插入 6 個算術中項。
6. 插入 1 與 21 間之算術中項, 其和爲 132 求中項之第一第二兩項。

## 幾何級數

215. 幾何級數 一羣連續之數其第一項後之各項皆用一定數乘其前項而得者，曰幾何級數。

用以乘前項之定數曰公比。

幾何級數之普通形狀為

$a, ar, ar^2, ar^3, \dots a$  為首項,  $r$  為公比。

## 習 題

1. 證明下列各項皆為幾何級數，並求其公比。

1. 3, 6, 12, 24, ……

2. 37, -9, +3, -1, ……

2. 證明若  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  則  $a, b, c$  為幾何級數

216. 幾何級數之元素 首項  $a$ , 第  $n$  項  $l$ , 項數  $n$ , 公比  $r$ ,  $n$  項之總和  $s$ , 皆稱為幾何級數之元素。

217. 原素間之關係 由第九十六圖之表，即知原素間之關係：

項 次	項
第二項.....	$ar$
第三項.....	$ar^2$
第四項.....	$ar^3$
第五項.....	$ar^4$
第十二項.....	$ar^{11}$
第 $n$ 項.....	$ar^{n-1}$

$$\therefore l = ar^{n-1}$$

## 第九十六圖

求  $n$  項級數之和之公式如下：

$$\text{置 } s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

兩端各以  $r$  乘之，則

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

由第一式減第二式，

$$s - rs = a - ar^n,$$

$$\text{即 } (1-r)s = a(1-r^n),$$

$$\therefore s = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

### 習 題

1. 求級數  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$  至第 12 項，且求其前 8 項之和
2. 已知  $a=16, r=-\frac{1}{2}, l=-\frac{1}{8}$ ，求  $n$  及  $s$
3. 求級數  $27, -9, 3, -1, \dots$  前十項之和。
4. 已知  $a=5, n=10, s=50$ ，求  $l$  及  $r$ 。
5. 求級數  $\frac{64}{9} - \frac{16}{3} + 4 - 3 + \dots$  之第八項。
6. 幾何級數之第四項為 32，第八項為 512，求其第十項
7. 幾何級數之第一項及第三項之和為 40，其第二項為 16，求各項。
8. 三數為幾何級數，第二項比第一項多 32，第三項比第二項多 96，求此級數。
9. 某人以一信給兩友，並囑其各抄一份後各給兩友，如此遞推，問經過 12 屆之轉抄後，所抄之信共計若干。

10. 一彈性球之反彈為其落下之高之四分之三。若此球擲上至距地高15呎始下落，問此球至靜止時，在空間所經之路共若干。

11. 幾何級數首八項之和，為其首四項之和之十七倍求其公比。

12. 幾何級數首十項之和，為其首五項之和之244倍，而第四項與第六項之和為135，求其第一項與公比。（普連士頓大學）

13. 年金  $c$  元，年利百分之  $r$ ，複利法計算，問第一年後之本利和如何，又二年，三年……後之本利和如何。

說明第一年後之本利和為

$$c + \frac{cr}{100} = c \left( 1 + \frac{r}{100} \right).$$

說明第二年末之本利和為

$$c \left( 1 + \frac{r}{100} \right) + c \left( 1 + \frac{r}{100} \right) \frac{r}{100} = c \left( 1 + \frac{r}{100} \right) \left( 1 + \frac{r}{100} \right) = c \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^2.$$

說明第三年末之本利和為

$$c \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^3 \quad \text{餘類推。}$$

14. 於13題求第  $n$  年後之本利和。

15. 本金100元，年利百分之六，複利計算，問第二年後之本利和如何？10年後之本利和如何？ $n$ 年後之本利和如何？

16. 本金 25 元, 年利百分之 3 $\frac{1}{2}$ , 複利計算, 問六年後之本利和如何? 十五年後之本利和如何?

117. 一橡皮球從 40 吋高之處落下, 其每次反躍為前次落下之高之百分之四十, 用公式求其第八次落下時之高。

118. 一彈性球從 16 呎之高落下, 連次反躍, 若每次躍上為其前次落下之時之  $\frac{2}{3}$ , 證明其連續反躍所經之時間不能超過 7 秒。(第一次落下需時一秒) (哈佛大學)

119. 一橡皮球從 20 呎之高落下, 其反躍之高為其前次落下之高之  $\frac{9}{10}$ , 問此球在靜止以前經過空間之路若干。

(哈佛大學)

218. 幾何中項 幾何級數之項介於其他兩項之間者名曰幾何中項。

於幾何級數 1, 3, 9, 27, 中, 3 與 9 為 1 與 27 之兩個幾何中項。

下例說明於兩已知數間插入幾何中項之法。

於 2 與 32 間插入三個幾何中項。

$$a=2, \quad n=5, \quad l=32$$

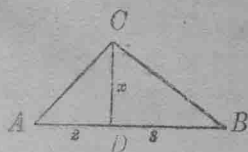
$$\therefore 32=2r^4$$

$$\therefore r=2$$

故插入之幾何中項為 4, 8, 16。

## 習 題

1. 於 486 及 6 之間插入三個幾何中項。
2. 設  $ABC$  為直角三角形,  $C$  為直角, (第九十七圖)  $CD \perp AB$ , 求證  $CD$  為  $AD, DB$  之幾何中項。



第九十七圖

3. 求 8 與 32 之幾何中項。
4. 於  $\frac{1}{4}, 12$  之間, 插入三個幾何中項
5. 若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  求證  $ab+cd$  為  $a^2+c^2$  與  $b^2+d^2$  之幾何中項。

## 雜 題

†219. 試解下列問題:

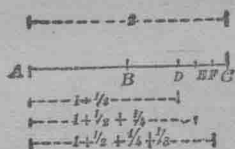
1. 求下列級數  $n$  項之總和  

$$(x-y) + \left(\frac{y^2}{x} - \frac{y^3}{x^2}\right) + \left(\frac{y^4}{x^3} - \frac{y^5}{x^4}\right) + \dots$$
 (耶魯大學)
2. 三項幾何級數之和為 70, 若以 4 乘第一項以 5 乘第二項以 4 乘第三項, 則其結果成算術級數, 求三數。
3. 若  $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$  為算術級數, 試說明  $a, b, c$  為幾何級數。
4. 一算術級數與一幾何級數之首項同為 3, 其第三項相等, 其第二項之差為 6, 試決定此兩級數。
5. 二數之差為 48, 其算術中項比幾何中項多 18 求二數。 (斯密司大學)

## 無 限 幾 何 級 數

220. 無限幾何級數 若  $n$  為一定數, 則  $n$  項幾何級數之和之求法, 學者當已知之, 若級數  $a+ar+ar^2+\dots$  之項數為無限, 則此級數稱為無限幾何級數, 若聯續各部分之和如  $a, a+ar, a+ar+ar^2, a+ar+ar^2+ar^3$  等漸近於定數  $S$ , 以  $S$  為極限, 則稱  $S$  為此無限級數  $a+ar+ar^2+ar^3+\dots$  之和。

求級數  $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$  之和, 可以圖線表示部分和如第九十八圖。



第九十八圖

1. 設  $AB=1=BC$ , 則  $AD=1+\frac{1}{2}$
2. 平分  $DC$  於  $E$ , 則  $AE=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
3. 平分  $EC$  於  $F$ , 則  $AF=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
4. 如此繼續進行, 部分和隨項數增多, 以至於與 2 之差小於任何可假定之量, 即漸近於 2。

故稱 2 為無限級數  $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$  之和。

此級數稱為歛級數。

無限幾何級數之他一例為循環小數。



如 .333…… 實為幾何級數  $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$  之簡寫,但

其  $a = \frac{3}{10}$ ,  $r = \frac{1}{10}$ , 試證明此無限級數之和為  $\frac{1}{3}$ .

以上兩例為無限幾何級數之特別形狀,其公比  $r$  小於 1.

若於級數  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ ,

命  $r=1$ , 則得

$$a + a + a + \dots$$

或  $a - a + a - a + \dots$

前者,項數之增加無限,故和之增加亦無限.後者之部分和為  $a, a-a, a-a+a$  等等,其值交迭為  $a$  與 0,故兩者之和皆為無限.

欲求無限幾何級數之和,可由求  $n$  項幾何級數之和之公式研究之:

$$\begin{aligned} \text{因 } s_n &= a \frac{1-r^n}{1-r} \\ &= \frac{a-ar^n}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \\ \therefore s_n &= \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \end{aligned}$$

1. 若  $r > 1$ , 則  $n$  為無限時,  $r^n$  亦為無限,以  $\lim_{n \rightarrow \infty} (r^n) = \infty$  表之.而讀為〔當  $n$  無限增加時,  $r^n$  之極限為無限.〕由是  $s_n$  之值亦為無限.故此級數之和不能求得.

2. 若  $r < 1$ , 則  $\lim_{n \rightarrow \infty} (r^n) = 0$ .

例如 若  $r = \frac{1}{2}$ , 則  $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$  時,  $r^n = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$ , 若  $r = .1$ , 則  $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots$  時,  $r^n = .1, .01, .001 \dots$  等.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r}$$

故無限幾何級數  $a + ar + ar^2 + ar^3 \dots$  之和以  $s$  表示之, 若  $r < 1$ , 則

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = \frac{a}{1-r}$$

### 習 題

求下列各無限級數之和:

1.  $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$

4.  $-2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{32} \dots$

設  $a = 3, r = \frac{1}{3}$

5.  $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \dots$

則  $s = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$ .

6.  $6 - 4 + \frac{8}{3} \dots$

2.  $10 + 5 + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} \dots$

7.  $\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \dots$

3.  $-3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \dots$

8.  $1.35 + 0.045 + 0.0015 + \dots$  (普連士頓大學)

9.  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \dots$  (哈佛大學)

10. 某幾何級數無限項之和為前六項之和之 64 倍, 求其公比. (普連士頓大學)

11. 幾何級數之第一項爲 225 第四項爲 144, 求此級數及無限項之和.

求下列各循環小數之極限值:

12. .1666.....

14. 1.2121.....

令  $a = \frac{6}{100}$ ,  $r = \frac{1}{10}$

15. .83333.....

求  $s$  且加 .1 於其結果

16. .234234.....

13. .363636.....

17. .23737

221. 史略 算術級數與幾何級數, 在古代數學界, 已成爲問題, 埃及學者自紀元前 2000 至 1700 年間, 對於此兩種級數之研究, 已大有成績, 惟其形狀頗呈複雜, 距最簡之級數形式尙遠, 亞米斯氏之草片手寫本, 即可爲歷史上之鐵證也.

巴比倫人用級數以計月之盈虧, 希臘人亦熱心於算術之研究, 近派達哥拉士派出, 以級數之意義與圖表相聯絡, 而級數之理論益明, 由是伯拉圖學校亦採用之.

亞奇米德發明求級數和之法則, 海倫更擴充此法則之應用, Hypsicles 與 Nicomachus 對於此等問題之教授與討論, 甚爲詳明.

印度人視級數計算爲算術之事, 不甚研究, 故其關於級數之貢獻, 遜於希臘人, 阿拉伯人對於級數之研究, 超於印度人, 倘吾人品評 1202 年利阿奈圖 (leonardo) 之 "liber abaci" 可見阿拉伯人對於級數之理論確有所見, 蓋此書集希臘與阿拉伯之大成, 實關歐洲學者之先導也.

級數爲古昔希臘之極盡法“Method of exhaustions”,及賈法利利氏之不盡除法“Theory of indivisibles”,與後代無限小數求和三法則之基礎。且由算術級數與幾何級數之聯合,而生出關於對數之問題,並發展關於數學上之各種理論與方法。

## 提 要

222. 本章已授下列各名詞之意義,

二項定理.

幾何中項.

算術級數.

無限級數.

算術中項.

級數之元素.

幾何級數.

歛級數.

223. 本章已解決之重要問題如下:

1. 展開一個若干乘幂之二項式至某項.
2. 於若干乘幂之二項式之展開式中,求其所需之第某項.
3. 已知級數之三原素,求其他二原素.
4. 於已知二數間,插入算術中項或幾何中項.
5. 求  $n$  項級數之和.
6. 求無限幾何級數之和.

224. 本章所授之公式如下:

$$1. (a+b)^n = a^n + n(a)^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots$$

$$2. \quad tr = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$3. \quad l = a + (n-1)d$$

$$5. \quad l = ar^{n-1}$$

$$4. \quad s = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$6. \quad s = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$7. \quad \text{若 } r < 1 \text{ 且項數爲無限, 則 } s = \frac{a}{1-r}$$

# 第十一章

## 含兩元之方程系

### 含兩個未知量之二次方程之圖線

225. 普通二次方程 含兩個未知量之最普通二次方程式爲

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

若  $b=c=0$ , 則上方程式變爲

$$ax^2 + dx + ey + f = 0.$$

$$\text{故 } y = -\frac{a}{e}x^2 - \frac{d}{e}x - \frac{f}{e}.$$

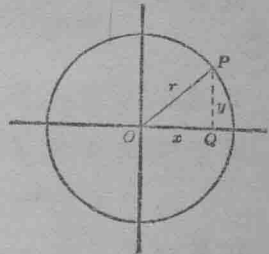
此式合於二次函數

$$ax^2 + bx + c.$$

故知其圖線爲拋物線 § 13.

226. 圓 代表含兩個未知數之二次方程之圖線, 不僅爲拋物線, 其說明如下例:

1. 設  $O$  爲以  $r$  爲半徑之圓之中心. (第九十九圖) 因圓周上任一點  $P$ , 與圓心  $O$  之距爲常數, 且等於  $r$ .



第九十九圖

令  $P$  點之坐標爲  $x, y$ , 則由派達哥拉士氏定理, 知

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

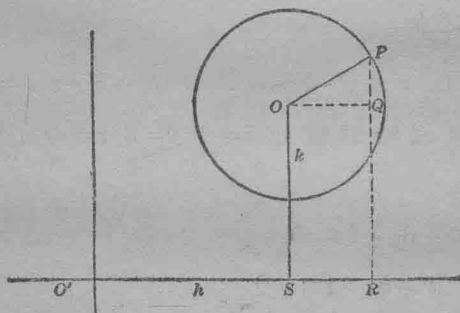
此即以  $O$  爲圓心  $r$  爲半徑之圓之方程。

此方程之圖線容易用兩脚規作之。

2. 設  $O$  爲以  $r$  爲半徑之圓之中心(第一百圖)。

命  $O$  點之坐標爲  $h, k$ 。

$P$  點之坐標爲  $x, y$ 。



第 一 百 圖

則  $\overline{QP}^2 + \overline{OQ}^2 = r^2$ 。

因  $QP = y - k$ , 又  $OQ = x - h$ 。

故此方程式可記爲

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

此爲半徑爲  $r$ , 圓心之坐標爲  $h, k$  之圓之方程。

依二項定理展開之, 則圓之方程爲

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0. \quad (1)$$

此爲一個二次方程但非普通之式 (§ 225) 因其不含  $xy$  之項且  $x^2, y^2$  之係數相等也。

若於普通二次方程中, 置  $b=0, a=c \neq 0$ , 則此方程之式即變爲(1)式之形矣。

## 習 題

1. 證明下式爲圓之方程,且求其半徑.

$$x^2+y^2=9; \quad x^2+y^2=5; \quad 2x^2+2y^2=8.$$

2. 已知圓心爲 0, 半徑爲 16;  $a; \sqrt{2}$ , 試求各方程.

3. 以第一題之諸方程與 § 225 之普通方程比較之,而決定各係數之值.

227. 方程  $x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$  之圖線若與  $h, k, r$  以特別值如  $h=4, k=3, r=\sqrt{13}$ , 則此方程之式化爲

$$x^2+y^2-8x-6y+12=0,$$

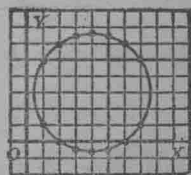
$$\text{或 } y^2-6y+(x^2-8x+12)=0$$

1. 解  $y$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{-4x^2 + 32x - 12}}{2} = 3 \pm \sqrt{-x^2 + 8x - 3}.$$

2. 由假定  $x$  之值, 而得  $y$  之對應值作表如第一百零一圖.

$x$	$y$
0	$3 \pm \sqrt{3}$ , (虛數)
1	$3 \pm 2$ 或 5, 1
2	$3 \pm 3$ 或 6, 0
3	$3 \pm \sqrt{12}$ 或 6.5, -0.5
4	$3 \pm \sqrt{13}$ 或 6.6, -0.6
5	$3 \pm \sqrt{12}$ 或 6.5, -0.5
6	$3 \pm 3$ 或 6, 0
7	$3 \pm 2$ 或 5, 1
8	$3 \pm \sqrt{3}$ , (虛數)



第一百零一圖



3. 依表作點聯以曲線，即得所需之圖線。

習 題

作次式之圖線：

1.  $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0.$

2.  $(x-7)^2 + (y+8)^2 = 36.$

228. 橢圓 於 § 225 之普通方程，若  $b=d=e=0$ ，則其

式變為

$$ax^2 + cy^2 + f = 0 \dots\dots\dots (1)$$

可知  $16x^2 + 25y^2 = 400$ ，為屬於此種形狀之方程。

兩端以 400 除之，得

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

此方程又可記為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots (2)$$

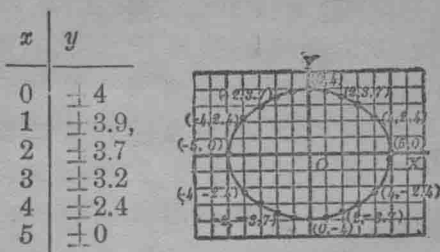
對於計算  $x, y$  之對應值，則(1)較(2)為便。

方程  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  之圖線，可求作如次：

1. 解  $y$ ,

$$y = \pm \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2} = \pm (.8) \sqrt{25 - x^2}$$

2. 由假定  $x$  之值而得  $y$  之對應值作表如第一百零二圖。



第一百零二圖

3. 按表作點，聯以曲線，即得所要之圖。

此曲線名曰橢圓。

由方程式(2)可知

(1) 此曲線關於其軸為對稱。

(2) 其在軸上之截部為  $\pm a, \pm b$ 。

$a, b$  之長為橢圓之半軸，若  $a=b$ ，則此橢圓變為圓。

### 習 題

作次式之圖線：

1.  $4x^2 + y^2 = 20$ .

2.  $x^2 + 4y^2 = 16$ .

229. 雙曲線 若方程  $ax^2 + cy^2 + f = 0$  之  $c$  為負， $a$  為

正，則此式變為

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

若  $a=5, b=4$ , 則此式化爲

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

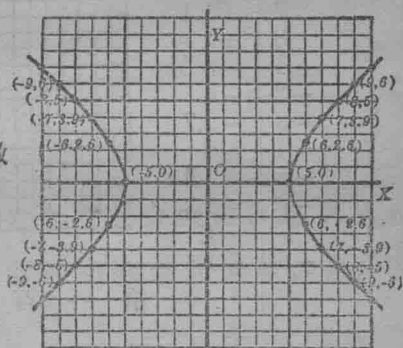
此方程之圖線可求作如下:

1. 解  $y$ ,

$$\text{則 } y = \pm (.8) \sqrt{x^2 - 25}$$

2. 假定  $x$  之值, 而得  $y$  之對應值作表如第一百零三圖.

$x$	$y$
0	$(.8) \sqrt{-25}$ 虛數
$\pm 5$	0
$\pm 6$	$\pm 2.6$
$\pm 7$	$\pm 3.9$
$\pm 8$	$\pm 5$
$\pm 9$	$\pm 6$
$\vdots$	$\vdots$



第一百零三圖

3. 按表作點, 聯以曲線, 即得方程  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 0$  之圖線.

此曲線名曰雙曲線.

### 習 題

作下列方程之圖線:

1.  $x^2 - y^2 - 4 = 0$

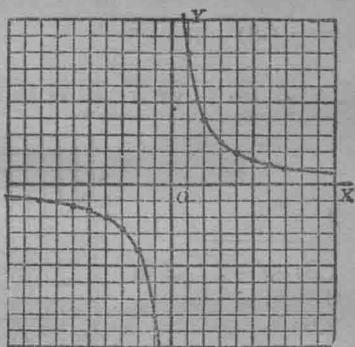
2.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

230. 方程  $xy = c$  之圖線亦爲雙曲線, 此方程已於 § 24

討論之.

若  $c=8$ , 則圖線  $xy=8$ . 此可由第一百零四圖之表中所示之值求得之。

$x$	$y$
1	+8
2	+4
3	+2.7
4	+2
5	+1.6
6	+1.3
7	+1.1
8	+1
-1	-8
-2	-4
-3	-2.7
-4	-2
-5	-1.6
-6	-1.3
-7	-1.1
-8	-1
⋮	⋮



第一百零四圖

習 題

作下列方程之圖線：

1.  $xy=24$

2.  $xy=5$

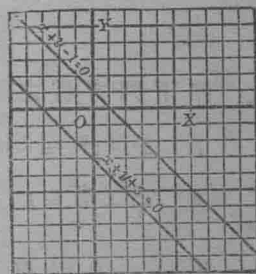
231. 兩直線 若普通二次方程為兩個直線函數因數之積, 則其圖線, 為兩直線. 今以例說明之如下:

設二次方程  $x^2+2xy+y^2+2x+2y-3=0$

即  $(x+y)^2+2(x+y)-3=0$

$\therefore (x+y+3)(x+y-1)=0$ .

此圖線為兩平行直線(見第一百



第一百零五圖

零五圖)

## 聯立二次方程之解法

232. 欲解含兩個未知量之二次方程如

$$\begin{cases} y-x^2=2 \cdots \cdots \cdots (1) \\ x-y^2=5 \cdots \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

須用代入法以消去一未知量。

因  $y=2+x^2$ , 代入(2)則

$$x-(2+x^2)^2=5,$$

$$\text{即 } x-4-4x^2-x^4=5,$$

$$\therefore x^4+4x^2-x+9=0.$$

此為四次方程,學者既久知四次方程無普通解法或將疑及解聯立二次方程系為不可能。然此情形恰與分解多項式為因數之情形相似。

原來分二次多項式為因數無普通之法,惟對於某幾種特殊形狀之多項式認為可能。解聯立二次方程,亦惟成某幾種特殊形狀者,方有解法耳。

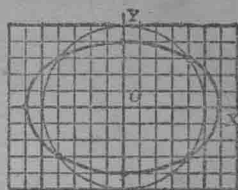
233. 第一類 方程中之未知數  $x$  或  $y$  可用加法或減法消去者,其例如下:

## 習 題

解方程系

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4x^2+9y^2=144 \end{cases}$$

1. 圖線解法 第一方程之圖線爲圓 (§ 226). 第二方程之圖線爲橢圓 (§ 228).



第一百零六圖

兩圖線相交於四點,如第一百零六圖,此四點之坐標必能滿足此兩方程.

故此題有四個解答如下:

$$(4.1, 2.9) \quad (4.1, -2.9) \quad (-4.1, 2.9) \quad (-4.1, -2.9)$$

2. 代數解法 以 4 乘第一式,與第二式相減,

$$4x^2 + 4y^2 = 100$$

$$4x^2 + 9y^2 = 144$$

$$\hline 5y^2 = 44$$

$$\therefore y_1 = \sqrt{8.8}, \quad y_2 = -\sqrt{8.8}.$$

以  $y_1$  之值代入第一式,

$$x^2 + 8.8 = 25,$$

$$\therefore x^2 = 16.2,$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{16.2}.$$

由是得兩個解答如下:

$$(\sqrt{16.2}, \sqrt{8.8}), \quad (-\sqrt{16.2}, \sqrt{8.8}).$$

依此,以  $y_2 = -\sqrt{8.8}$  代入第一方程式,即得兩個解法如下:

$$(\sqrt{16.2}, -\sqrt{8.8}), \quad (-\sqrt{16.2}, -\sqrt{8.8}).$$

學者試以第一百零六圖之圖線覆證此四個解答.

習 題

解下之方程系：

$$1. \begin{cases} 5x^2 - 2y^2 = 30 \\ 2x^2 + y^2 = 57 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 33 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 54 = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 4x^2 - 9y^2 = 36 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 36 \\ 9x^2 + 16y = 33 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{xy}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{x^2}{3} - \frac{xy}{4} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - 3y = 21 \end{cases}$$

234. 第二類 一方程可分解為兩個直線函數的因

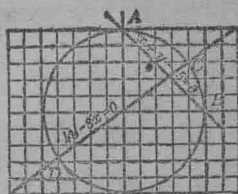
數者,其例如下:

解方程系

$$\begin{cases} 4y^2 - 3x^2 + xy + 15x - 20y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

1. 圖線解法 分解第一式為因

數如  $(4y - 3x)(x + y - 5) = 0$ .



第一百零七圖

其圖線為兩直線見(第一百零七圖)

$x^2 + y^2 = 25$  之圖線為圓 (§ 226).

故此兩直線與此圓之四個交點之坐標,即為此方程系之解答.

2. 代數解法 依第一百零七圖之圖線，此方程系有兩個解答，乃得自圓與方程為  $x+y-5=0$  之直線之交點  $A$ ，及  $B$  者。

其他兩個解答乃得自圓與方程為  $4y-3x=0$  之直線之交點  $C$  及  $D$  者。

$$\text{可知原方程系可化爲 } \begin{cases} x+y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} 4y-3x=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

兩個方程系然後求其解答。

兩個方程系皆可用代入法以消去一未知量而解之。解第一方程系如下：

$$\text{命 } x=5-y.$$

$$\text{由代入法，得 } (5-y)^2+y^2=25,$$

$$\therefore 2y^2-10y=0$$

$$\therefore y_1=0, y_2=5$$

以  $y$  之值代入  $x=5-y$ ，得  $x$  之對應值，由是得解答  $(5,0)$  及  $(0,5)$ 。

其餘解答，學者試自求之。

### 習 題

解下列方程系：

$$1. \begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2-y^2=27 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$$



$$3. \begin{cases} x^2 + xy = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 27 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 3x^2 + 5y^2 = 32 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x^2 - 3xy = 0 \\ 5x^2 + 3y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 30 = 0 \\ xy = 15 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} m^2 + n^2 - 5m - 5n = -4 \\ mn = 5 \end{cases}$$

以 2 乘第二式,與第一式相加.

235. 第三類 有一方程成  $xy=c$  之形者,其例如下:

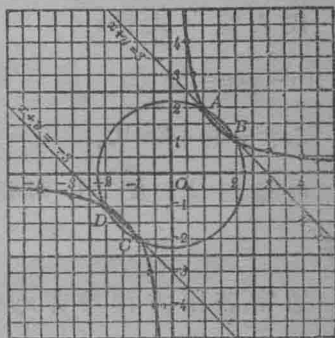
解方程系

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

1. 圖線解法 第一方程之圖線為圓,其半徑略近於  $2 \cdot 2$  (第一百零八圖).

第二方程之圖線,為雙曲線.

此兩曲線相交於  $A, B, C, D$



第一百零八圖

四點,而方程系之解答即依此四點而決定.

2. 代數解法 以 2 乘第二式,而加其結果於第一式,則得方程  $x^2 + 2xy + y^2 = 9$ , 其左端為完全平方.

開兩端之平方，即得兩個一次方程

$$x+y=+3$$

及

$$x+y=-3$$

此兩方程之圖線，必通過圓與雙曲線之四個交點如第一百零八圖。故知四個交點中有兩點可由  $x+y=3$  及  $xy=2$  之圖線決定之，其他兩點可由  $x+y=-3$  及  $xy=2$  之圖線決定之。

可知原方程可化爲  $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$  及  $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$

兩個方程系以解之。

$$\text{以 } x=3-y$$

代入第一式，得

$$(3-y)y=2,$$

$$\therefore y^2-3y+2=0.$$

由是得(1,2)及(2,1)兩個解答。

$$\text{以 } x=-3-y$$

代入第二式，得

$$(-3-y)y=2$$

$$\therefore y^2+3y+2=0$$

試證明此方程系之解答爲(-2,-1)及(-1,-2)。

通常，若兩方程均非  $xy=c$  之形，則可由相加，或相減，或開平方，或劈因數，而得直線方程。

如下之習題 2，可將已知之兩個方程相加，再以 2 除其各項，最後開兩端之平方，即得兩直線方程。

如下之習題 3，可將兩個已知方程相加，再將各項集於一端，分解其因數，即得兩直線方程。

習 題

解次之方程系：

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = -2 \\ x^2 + 9xy + y^2 = 34 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ xy + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} t^2 + u^2 = 5 \\ tu + t + u = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} r^2 + rs = 5 \\ rs + s^2 = 4 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} r^2 + s^2 + r + s = 8 \\ rs = 2 \end{cases}$$

236. 第四類 含未知數之各項皆為二次方者，其例

如下：

若一方程中含未知數之各項皆為同次方者，則稱此方程為關於各項之齊次式。

解方程系：

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases}$$

以 19 乘第一式，以 7 乘第二式，則得

$$19x^2 + 19xy + 19y^2 = 19 \cdot 7$$

$$7x^2 - 7xy + 7y^2 = 19 \cdot 7$$

---

相減，  $12x^2 + 26xy + 12y^2 = 0$

以 2 除之，  $6x^2 + 13xy + 6y^2 = 0$

分解因數  $(2x + 3y)(3x + 2y) = 0$

故原方程可化為  $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$  及  $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

兩個方程系以解之。

學者試解此兩個方程系。

### 習 題

解次之方程系：

1.  $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=3 \\ 2x^2+5xy+y^2=8 \end{cases}$

4.  $\begin{cases} 4x^2-2xy=y^2-16 \\ 5x^2-7xy+36=0 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x^2+xy=75 \\ y^2+x^2=125 \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x^2+3xy=7 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2=10 \\ 3x^2-xy-y^2=51 \end{cases}$

6.  $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \\ y^2-2xy=-15 \end{cases}$

### 高於二次之方程之解法

237. 一方程可被他方程除盡者 二次方程系或高次方程系,有可將其中一式除以他式而解之者,其例如下:

解方程系

$$\begin{cases} x^3+y^3=9 \dots\dots\dots (1) \\ x+y=3 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3+y^3=9 \dots\dots\dots (1) \\ x+y=3 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

因  $x+y$  不為 0,故以第二式除第一式,不至失方程之解答,由是以第二式除第一式,得

$$x^2-xy+y^2=3 \dots\dots\dots (3)$$

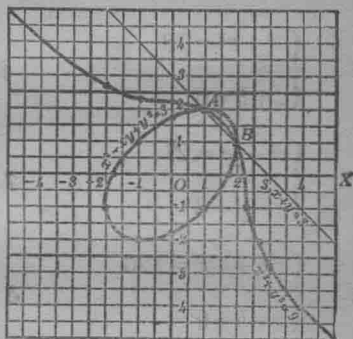
圖線解法 解方程(1),求  $y$

$$y = \sqrt[3]{9-x^3}$$

應用立方根表,作  $x, y$  之對應值表如第一百零九圖之表(1).

$x$	$y$	$x$	$y$
0	2.1	0	$\pm 1.7$
1	2	1	2, -1
2	1	2	1, 1
3	-2.6	3	虛數
4	-3.8	-1	1, -2
-1	2.1	-2	-1, -1
-2	2.6	-3	虛數
-3	3.3		
-4	4.2		

(1) (3)



第一百零九圖

學者試作方程(1)(2)之圖線而求原方程系之解答。

解方程系(3),得

$$y = \frac{x \pm \sqrt{12-3x^2}}{2}$$

由此式作  $x, y$  之對應值表如第一百零九圖之表(3).

由此可見方程(3)之圖線通過(1)(2)兩方程之圖線之交點。

故由解方程系

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

可得原方程系之解答

學者試完成本例之代數解法。

### 習 題

解次之方程系：

$$1. \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} s^2 - t^2 = 228 \\ st - t^2 = 42 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a^3 + b^3 = 18 \\ a + b = 6 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} r^3 - s^3 = 56 \\ r^2 + rs + s^2 = 28 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^3 + y^2 = 27 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} a^4 + a^2b^2 + b^4 = 91 \\ a^2 + ab + b^2 = 13 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} a^2b + ab^2 = 126 \\ a + b = 9 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} a^2 + ab + 2b^2 = 74 \\ 2a^2 + 2ab + b^2 = 73 \end{cases}$$

### 無理方程與分數方程之解法

238. 新變數之引入 方程中所含之未知量成爲一組者，可用一新記號代之，以成單簡之式。例如方程  $(x+y)^2 + 3(x+y) = -2$ ,  $x+y + \sqrt{x+y} = 6$ ,  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 8$ , 可記爲  $a^2 + 3a = -2$ ,  $a^2 + a = 6$ ,  $x^2 + y^2 = 8$ .

此方法可用於次之習題。

### 習 題

解次之方程系。

$$1. \begin{cases} a + b + \sqrt{a+b} = 6 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

以  $x$  代表  $\sqrt{a+b}$ , 解第一方程求  $x$ , 則得含  $a$  與  $b$  之兩個直線方程。

$$2. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{令 } \frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$$

$$3. \begin{cases} x + y = 72 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$

$$\text{令 } \sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} r + s - r^2s^2 = \frac{1}{2} \\ r^2 + s^2 - r^4s^4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} ab + 5a + 5b = 23 \\ 4ab + 3a + 3b = 2ab(a+b) \end{cases}$$

### 雜 題

239. 解下列之問題：

1. 一矩形之周為 22 吋, 其長之立方與寬之立方之和為 407. 求矩形之面積。

2. 兩個聯續數之立方差為 817, 求兩數。(芝加高大學)

3. 大小兩數之和, 以其大數乘之, 得積 126. 大小兩數之差, 以其小數乘之, 得積 20. 求兩數。(普連士頓大學)

4. 菱形之面積為 24 平方吋, 其兩對角線之和為 14 吋, 求菱形一邊之長。(哈佛大學)

15. 兩立方體之體積共為 559 立方吋, 其稜之長之和為 13 吋, 求各立方體之高。

6. 某舟子平時往復於 15 里之河，下水比上水少費五時，若其速度加倍，則下水比上水少費兩時，求舟子在靜水中駛船之速及水流之速。

17. 矩形之對角線長 13 呎，若其各邊加長 2 呎，則其面積增加 38 平方呎，求其兩邊之長。

8. 甲乙二人同時由同地起身，甲向東行乙向南行，5 時後，甲較乙多行 5 里，而兩人相距 25 里，求各人行走之速度。

9. 某兩位數以其數字之和除之，得商 2 餘數 2，以其數字之和乘之，得積 112，求此數。

10. 某工程甲、乙、丙三人合作，1 時 20 分成功，若三人獨作，則丙所需之時為甲所需之時之二倍，而較乙多 2 小時，問各人獨作各需時若干。

11. 兩數之和，差，及其平方之和之比如 5 : 3 : 51，求兩數。  
(耶魯大學)

12. 父子年齡之和為 100 歲，父子年齡數之積之十分之一減去 180，等於父之年齡，求父子之年齡。

13. 設  $l$  與  $n$  為兩未知數，試解方程系。

$$\begin{cases} l = a + (n-1)d \\ 2s = n(a+l). \end{cases}$$

又設  $a = \frac{1}{3}$ ,  $d = -\frac{1}{12}$ ,  $s = -\frac{3}{2}$ , 求  $l$  與  $n$ 。

(普連士頓大學)



14. 某工程甲、乙合作，20日成。甲獨作，較乙獨作多需9日。問甲乙獨作各需若干日。（耶魯大學）

15. 兩人乘自動車作336哩之賽跑，勝者因每時多跑二哩，故早到四小時，求勝者跑若干時及其速度。（雪費爾大學）

16. 甲乙兩人共作一工，各得工資36元。甲比乙少作工二日，而所得工資每日比乙多20仙。求其每日所得之工資及工作之日數。（雪費爾大學）

17. 某人演說，聽者360人，分坐若干列，每列人數相等。若每列增三人，則可減少四列，問列數若干。

18. 若矩形之長增4尺，寬減3尺，則其面積不變。若其長增16尺，寬減10尺，則其面積減少三分之一。求矩形之邊

解下列方程系：

$$19. \begin{cases} x^2 - 3xy - y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + 3y^2 = 7 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} s^2 + st + s - t = -2 \\ 2s^2 - st - t^2 = 0 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x + y = 5 - xy \\ x + y = \frac{6}{xy} \end{cases} \quad (\text{耶魯大學})$$

$$22. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 133 \\ x - \sqrt{xy} + y = 7 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 3xy=1 \\ 36x^2+180xy+36y^2=-35 \end{cases} \quad (\text{雪費爾大學})$$

$$24. \begin{cases} x-y=1 \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6} \end{cases} \quad 25. \begin{cases} x^2-xy=3 \\ xy-y^2=2 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x^2-4xy+4y^2-x+2y-6=0 \\ 4x^2+12xy+9y^2+2x+3y-12=0 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x+\frac{1}{y}=1 \\ y+\frac{1}{x}=4 \end{cases} \quad (\text{哈佛大學})$$

$$28. \begin{cases} s^2+st+t^2=13s \\ s^2-st+t^2=7s \end{cases} \quad (\text{芝加高大學})$$

$$29. \begin{cases} 5x^2y^2-2=3xy \\ x+5y=1 \end{cases} \quad (\text{普連士頓大學})$$

$$30. \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{xy})=30 \end{cases} \quad (\text{耶魯大學})$$

$$31. \begin{cases} 2x+\sqrt{xy}=10 \\ 3y-2\sqrt{xy}=-1 \end{cases} \quad 32. \begin{cases} xy=80 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x^2y^2+28xy-480=0 \\ 2x+y=11 \end{cases} \quad (\text{耶魯大學})$$

$$34. \begin{cases} x^2+xy+y^2=21 \\ x-\sqrt{xy}+y=3. \end{cases}$$

## 提 要

240. 本章已授求作下列二次方程之圖線法:

1. 方程  $y = ax^2 + bx + c$  表示一拋物線.
2. 方程  $x^2 + y^2 = a^2$  及  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  表示一圓.
3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  或  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  之圖線表示一橢圓.
4. 方程  $xy = c$  及  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  表示一雙曲線.

241. 概述解下列方程系之方法.

$$1. \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4x^2 - 2x + 5 = y \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4 \\ x^2 + 2y^2 - xy = 7 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 4x^2 + 9y^2 = 144 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x^3 - y^3 = 21 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ xy = 24 \end{cases} \quad 7. \begin{cases} x + y - x^2y^2 = z \\ x^2 + y^2 - x^4y^4 = 4 \end{cases}$$

## 第十二章

### 表面之面積

242. 吾人常見之物，有成角柱形者，如房屋，如箱，如尖塔等；有成曲面柱形者，如鍋爐，水管，支柱等；有成曲面錐形者，如漏斗，水桶等；有成球形者，如皮球，地球儀等；有爲角柱形，曲面柱形，曲面錐形，球形以相當之配置而成者，如各種建築物及工藝品等。本章以授上述各形，及求其面積之公式爲目的。

#### 多面體 曲面柱 曲面錐

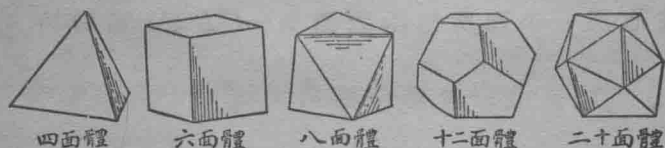
243. 多面體。以諸平面所圍成之立體，曰多面體。

#### 習 題

1. 試舉多面體之例。
2. 問圍成一體至少須要幾平面？

244. 面，表面，稜，頂。圍成一多面體之諸平面曰面；諸面之和曰表面；面與面之交曰稜；稜與稜之交曰頂。

245. 多面體之分類. 多面體可依其面數而分類如下: 四面圍成之體曰四面體; 六面圍成之體曰六面體; 八面圍成之體曰八面體; 十二面圍成之體曰十二面體; 二十面圍成之體曰二十面體(見第一百一十圖).



第 一 百 一 十 圖

246. 凸多面體,面,頂,稜之關係.

計算 § 245 諸體之面,頂,稜,而得結果如次:

面 數 ( $f$ ).....	4	6	8	12
頂 數 ( $v$ ).....	4	8	6	20
面頂數和( $f+v$ ).....	8	14	14	32
稜 數 ( $e$ ).....	6	12	12	30

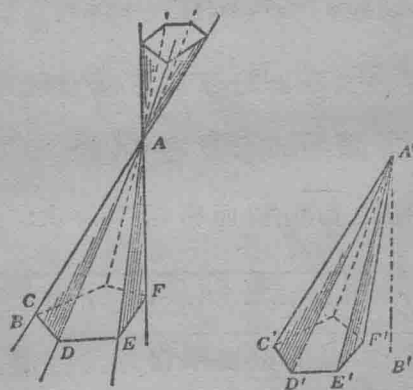
以  $f$  表示面數,以  $v$  表示頂數,以  $f+v$  表示面頂數之和,以  $e$  表示稜數.

試比較  $e$  與  $f+v$ . 試以等式之形狀說明  $e$  與  $f+v$  之關係.

數學家尤拉(1707—83)曾證明  $e+2=f+v$ .

247. 角錐。通過一定點  $A$  之一直線  $AB$ , (第一百十一圖) 觸不與  $A$  點同面之他平面上之一多角形  $CDEF$  之邊旋動, 則生成一角錐表面。  $AB$  線名曰角錐面之母線, 多角形  $CDEF$  名曰角錐面之準線, 定點  $A$  名曰角錐面之頂。

角錐面與一平面所包函之體  $A'-C'D'E'F'$  名曰角錐。



第一百十一圖

多角形  $C'D'E'F'$  爲角錐體之底。

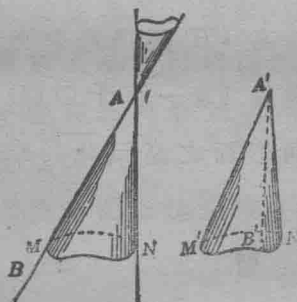
頂點與底間之面曰角錐體之側面。

從頂點  $A'$  至底面之垂直距離曰角錐體之高。

稜  $A'C'$ ,  $A'D'$ ……等曰角錐體之側稜。

248. 曲面錐。過通一定點  $A$  之一直線  $AB$  (第一百十二圖) 觸不與  $A$  同平面之他平面上之閉合曲線旋動, 則生成一曲面錐面。  $AB$  線名曰母線, 閉合曲線名曰曲面錐之準線, 定點  $A$  名曰曲面錐之頂, 在任何位置之母線, 名曰元素。

曲面錐面與一平面所包圍之體, 名曰曲面錐。



第一百十二圖

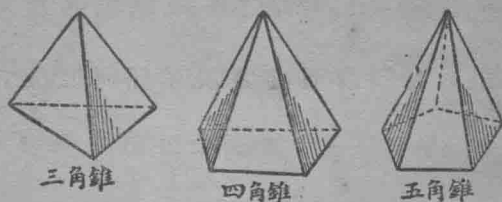
以一平面與曲面錐相割所成之曲線, 曰曲面錐之底。

在頂點與底間之面, 曰曲面錐之側面。

從頂至底平面之垂直距離, 曰曲面錐之高。

角錐面或曲面錐面在定點兩側之兩部, 各稱為該錐面之片。

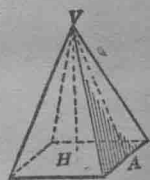
249. 角錐之分類。角錐依其底之爲三角形,四角形,五角形……而稱爲三角錐,四角錐,五角錐……等。(見第一百十三圖)



第一百十三圖

三角錐又稱爲四面體,且其四面中可任稱其一面爲底。底爲正多角形而高  $VH$  經過底之外接圓之圓心者,曰正角錐 (第一百十四圖)

正角錐中一三角形面之高,曰此角錐之斜高。



第一百十四圖

### 習 題

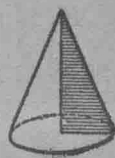
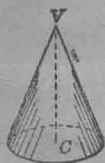
1. 人工物之爲角錐者,試舉其例。
2. 證明正角錐之各側稜皆等。
3. 證明正角錐之各側面,皆爲全等之等腰三角形。
4. 證明正角錐之斜高,即爲各側面之斜高。
5. 結四面體四稜(無三稜共一頂點者)中點之直線,成平行四邊形。
6. 結四面體相對稜中點之直線,互相平分。(哈佛大學)



250. 曲面錐之分類。曲面錐之底為圓者，曰圓錐。

(第一百十五圖)

本章所研究者，以圓錐為限。



第一百十五圖 第一百十六圖 第一百十七圖

聯結頂點  $V$  與底之中心  $C$  之直線，曰圓錐之軸。

圓錐之軸垂直於其底者，曰正圓錐。(第一百十五圖)

圓錐之軸不垂直於其底者，曰斜圓錐。(第一百十六圖)

正圓錐可視為一直角三角形，依其一腰為軸而旋轉所生成，故又稱旋轉圓錐體。(第一百十七圖)

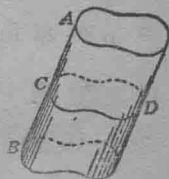
由旋轉圓錐體之頂至曲面錐之底上一點之距，曰旋轉圓錐體之斜高。

習 題

1. 正圓錐體之高為 10 吋，底之半徑為 4 吋，求其斜高。

2. 正圓錐之斜高為 50 吋，其底之半徑為 25 吋，求其高。

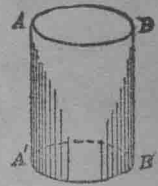
251. 曲面柱 一直線  $AB$  移動，常與一定直線平行，且常與不在  $AB$  同平面而在他一平面內之一曲線相觸，則生一曲面柱面。(第一百十八圖)此移動線名曰母線，在任何位置之母線稱為曲柱面之元素。



第一百十八圖

兩平行平面與一曲面柱面所包之立體，曰曲面柱。(第一百十九圖)

曲面柱表面，即曲面柱之側面，而兩平面曲線  $AB$  與  $A'B'$ ，為曲面柱之兩底。兩底中間之垂直距離，稱為曲面柱之高。



第一百十九圖

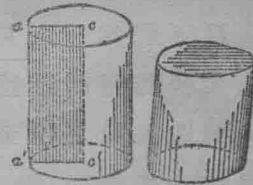
### 252. 曲面柱之分類。

曲面柱之底面為圓者，曰圓柱。

本章所研究者以圓柱為限。

曲柱面之底為圓周，且各原素皆垂直於底平面者，曰正圓柱(第一百二十圖)。其原素傾斜於底平面者，曰斜圓柱(第一百二十一圖)。

正圓柱可認為一矩形依其一邊為軸旋轉一週所成。(第一百二十圖) 故正圓柱又稱旋轉圓柱。

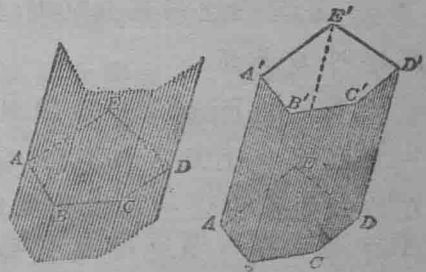


第一百二十圖 第一百二十一圖

253. 角柱。一定直線移動，常與其本身平行，且常觸在他平面內之一凸多角形(如  $ABCDE$ ) 之邊，則生成角柱面(第一百二十二圖)。

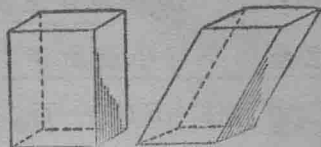
兩平行平面與一角柱面所包之立體，曰角柱。(第一百二十三圖)

角柱之底、表面及高之意義，與曲面柱同。



第一百二十二圖 第一百二十三圖

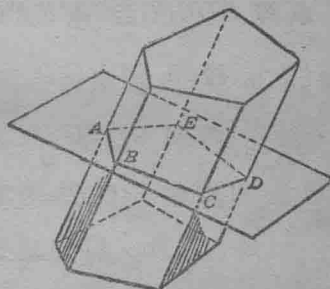
254. 角柱之分類。角柱之側稜，垂直於底平面者，曰正角柱。(第一百二十四圖) 傾斜於底面者，曰斜角柱。(第一百二十五圖) 角柱之爲三角柱四角柱……等，依於其底之爲三角形，四角形……等而定。



第一百二十四圖 第一百二十五圖

習 題

1. 證明角柱之各側稜皆等。
2. 證明正角柱之各側稜，皆等於其高。
3. 證明角柱之各側面，皆爲平行四邊形。
4. 一直線平行於定直線，且與定直線相距有定遠，求其軌跡。



第一百二十六圖

5. 一點距一定直線有定遠，求其軌跡。
6. 證明角柱之側稜平行於不含此稜之諸側面。

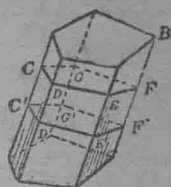
平面所造之截面

255. 截面。一平面與一立體之面之交線，名曰此立體面被一平面所截之截面如第一百二十六圖之  $ABCDE$  是也。

256. 正截面. 作截面之平面, 與角柱之側稜或曲面柱之元素成直角者, 曰正截面.

257. 定理: 角柱之截面, 爲截其各稜之兩個平行平面所作者, 全等.

已知角柱  $AB$  (第一百二十七圖) 平面  $CF \parallel$  平面  $C'F'$ ;  $CDEFG$  及  $C'D'E'F'G'$  爲此兩平行面所作之截面.



第一百二十七圖

求證  $CDEFG \cong C'D'E'F'G'$ .

證: 證明  $CD \parallel C'D'$ ,  $DE \parallel D'E'$  等

證明  $CD = C'D'$ ,  $DE = D'E'$  等.

證明  $\angle CDE = \angle C'D'E'$ ,

$\angle DEF = \angle D'E'F'$ , 等. (§ 545)

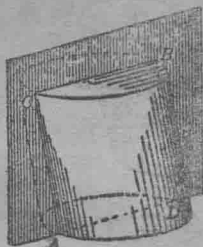
故  $CDEFG \cong C'D'E'F'G'$ . 何故?

### 習 題

證明下列各題:

1. 角柱之各正截面全等.
2. 若角柱之截面與底平行, 則此截面與底全等.
3. 角柱之兩底全等.
4. 角柱之截面爲一側稜之平行平面所作者, 必爲一平行四邊形.

258. 定理：曲面柱面之截面，為通過其一元素之一平面所作者，必為一平行四邊形。



第一百二十八圖

已知曲面柱  $AB$ ,  $DB$  為其一元素,  $P$  為通過  $DB$  之平面(第一百二十八圖).

求證平面  $P$  與曲面柱面  $AB$  之交線, 為一平行四邊形.

證: 平面  $P$  與曲面柱底相交於直線  $AD$ . 何故?

過  $A$ , 作  $AC \parallel DB$ .

則  $AC$  必在平面  $P$  內. 何故?

$AC$  亦為曲面柱之元素, 何故?

故  $AC$  在曲面柱面內. 何故?

故  $AC$  必為平面  $P$  與曲面柱面之交線. 何故?

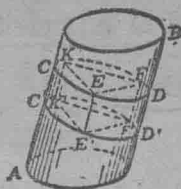
作  $CB$ , 且證明其為  $P$  與曲面柱上底之交線.

顯明  $ABCD$  為平行四邊形.

習 題

於 § 258 若  $AB$  為正曲面柱, 則  $ADBC$  為矩形, 試證之.

259. 定理：曲面柱之諸截面，爲截各元素之諸平行平面所作者，全相等。



第一百二十九圖

已知曲面柱  $AB$  之截面  $CD \parallel$  截面  $C'D'$ 。(第一百二十九圖)  
求證  $CD \cong C'D'$ 。

證：設  $E'$  與  $F'$  爲  $C'D'$  上之兩定點。又  $K'$  爲  $C'D'$  上之他一定點。

作通過  $E', F'$  及  $K'$  之元素，遇  $CD$  於  $E, F$  及  $K$ 。  
作  $\triangle EFK$  及  $\triangle E'F'K'$ 。

而證明  $\triangle EFK \cong \triangle E'F'K'$ 。(邊邊邊)

設想  $CD$  置於  $C'D'$  上，使  $E$  合於  $E'$ ， $F$  合於  $F'$ 。  
則  $K$  必合於  $K'$ 。何故？

故  $CD$  上之任一點，必合於  $C'D'$  上一對應點。

故  $CD \cong C'D'$ 。

### 習 題

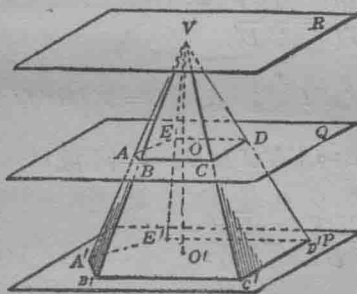
證明下述事件爲 § 259 之特別情形：

1. 曲面柱之諸截面爲與底平行之平面所作者，與底全等。

2. 曲面柱之兩底全等.
3. 曲面柱之諸正截面全等.

260. 定理: 若角錐為平行於其底之平面所截,則

1. 此平面分其稜與高成比例,
2. 截面與底為相似形.
3. 截面面積與底面積之比,如其頂至截面與底之距離之平方比.



第一百三十圖

已知角錐體  $V-A'B'C'D'E'$ ; 平面  $Q \parallel$  平面  $P$ ;  $VO' \perp P$ . (第一百三十圖)

1. 求證  $\frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{VC}{VC'} = \dots = \frac{VO}{VO'}$

證: 過  $V$ , 作平面  $R$  平行於平面  $P$  及  $Q$ , 則其終結學者可自求之. (參看 §524).

2. 求證  $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ .

證：說明  $AB \parallel A'B'$ ;  $BC \parallel B'C'$ , 等。

$$\therefore \triangle VAB \sim \triangle VA'B';$$

說明  $BC \parallel B'C'$ , 等。

$$\therefore \frac{VB}{VB'} = \frac{AB}{A'B'}; \quad \frac{VB}{VB'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{何故?}$$

依此說明

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \quad \text{等。}$$

證明  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ;  $\angle BCD = \angle B'C'D'$ , 等。

$$\therefore ABCDE \sim A'B'C'D'E'. \quad \text{何故?}$$

3. 求證  $\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{VO}^2}{VO'^2}$

證：  $\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{AB}^2}{A'B'^2} \quad \text{何故?}$

$$\frac{\overline{AB}^2}{A'B'^2} = \frac{\overline{VB}^2}{VB'^2} = \frac{\overline{VO}^2}{VO'^2} \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{VO}^2}{VO'^2} \quad \text{何故?}$$

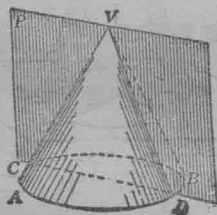
### 習 題

1. 角錐之底面積為 110 平方呎, 平行於底且距底 5 呎之截面之面積為 80 平方呎, 求其高至第二位小數。



2. 角錐之底為50平方吋,高為6吋,設欲使截面之面積為底面積之半,問截平面應距頂若干?

261. 定理: 曲面錐之截面為通過其頂之平面所作者,為一三角形.



第一百三十一圖

已知曲面錐  $V-AB$ , 又  $P$  為過曲面錐頂之截平面。(第一百三十一圖)

求證此截面為一三角形。

證: 平面  $P$  與其底  $ACB$  相交於直線  $CD$ 。

作直線  $VC, VD$ 。

則  $VC, VD$  皆為曲面錐之元素。 何故?

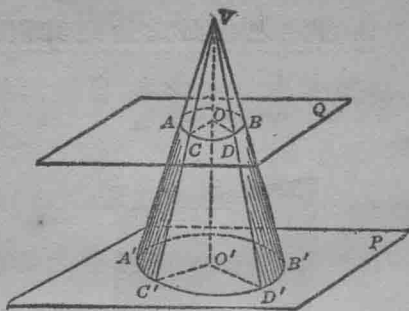
故  $VC, VD$  同在曲面錐面內。 何故?

但  $VC, VD$  又同在平面  $P$  內。 何故?

故直線  $VC, VD$  為  $P$  與曲面錐面之截線

且此截面為一三角形。 何故?

262. 定理：圓錐之截面爲平行於底之平面所作者，必爲一圓。



第一百三十二圖

已知圓錐  $V-A'B'$ ，又平面  $Q \parallel$  平面  $P$ 。(第一百三十二圖)  
求證截面  $ACDB$  必爲一圓。

證：於  $AB$  上取任意兩點  $C$  與  $D$ 。

作元素  $VCC'$  與  $VD D'$ 。

作  $VO'$  交含  $AB$  之平面於  $O$ 。

作  $CO, DO, C'O', D'D'$ 。

證明  $\triangle VOC \sim \triangle VO'C'$ ； $\triangle VOD \sim \triangle VO'D'$ 。

於是  $\frac{VO}{VO'} = \frac{CO}{C'O'}$ 。何故？

$\frac{VO}{VO'} = \frac{DO}{D'O'}$ 。何故？

$\therefore \frac{CO}{C'O'} = \frac{DO}{D'O'}$ 。何故？

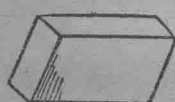
因  $C'O' = D'O'$ ，所以  $CO = DO$ 。

$\therefore$  截面  $ACDB$  爲圓。

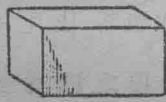
習 題

1. 正圓錐之軸通過平行於底之諸截面之中心, 求證.
2. 若圓錐之截面, 為平行於底之平面所作, 則截面半徑與底半徑之比, 如頂至截平面之距與頂至底平面之距之比.

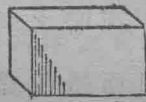
263. 平行六面體. 角柱之底成平行四邊形者, 曰平行六面體.(第一百三十三至一百三十六圖)



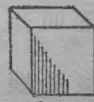
平行六面體



長方體



矩形面體



立方體

第一百三十三圖 第一百三十四圖 第一百三十五圖 第一百三十六圖

平行六面體之側稜垂直於其底者, 曰長方體, 或曰正平行六面體.(第一百三十四圖)

正平行六面體之底為矩形者曰矩形面體.(第一百三十五圖)

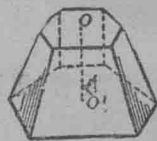
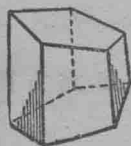
平行六面體之各面皆成正方形者, 曰立方體.(第一百三十六圖)

習 題

1. 說明正平行六面體與矩形面體之分別.
2. 說明矩形面體之各面皆為矩形.
3. 證明平行六面體之相對面皆平行.(用 § 545 證之)

4. 平行六面體之截面，爲割其四個平行稜之平面所作者，必爲一平行四邊形。
5. 立方體之對角線皆等。
6. 立方體之稜爲 2; 3.4;  $e$ 。求其對角線。
7. 證明矩形面體之對角線之平方，等於其過於一頂之三稜之平方之和。
8. 矩形面體之稜爲 6, 8, 10, 求其對角線。
9. 證明矩形面體之對角線相等，且互相平分。
10. 集於矩形面體任意一角頂之稜爲 4, 6, 8, 求其對角線。
11. 立方體之對角線爲 12 寸，求其一稜之長。

264. 截角柱。角柱之一部分，以其底平面及不與底平行之一平面爲界者，曰截角柱。(第一百三十七圖)



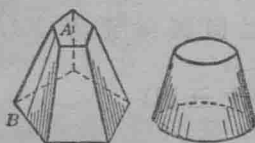
第一百三十七圖      第一百三十八圖

265. 平截角錐，高。角錐之一部分以其底平面及平行於底之一平面爲界者，曰平截角錐。(第一百三十八圖)其上下兩平行平面間之垂線  $O O'$ ，曰平截椎體之高

習 題

1. 證明平截角錐之側面皆為梯形。
2. 證明平截正角錐之諸側面，為幾個全等梯形。
3. 設過平截角錐之高之中點，作與底平行之截面，則此截面之周，等於兩底之周之半和。

266. 平截角錐之斜高。 平截正角錐之一側面為一梯形，梯形之高，即為平截正角錐之斜高，第一百三十九圖之  $AB$ ，其例也。



第一百三十九圖 第一百四十圖

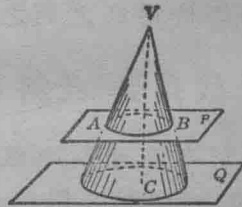
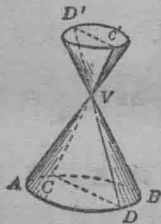
267. 平截曲面錐。 圓錐之一部分以其底平面及平行於底之截平面為界者，曰平截圓錐。(第一百四十圖)

268. 圓錐之截面。 欲討論正圓錐之平面截面，宜先討論下列諸情形：

設  $P$  為垂直於平面  $AVB$  之平面。

1. 若  $P$  通過頂點  $V$  及一元素  $VD$ , (第一百四十一圖)  
則割錐面成兩個相交之直線如  $DD'$  及  $CC'$ .

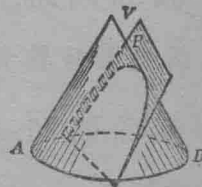
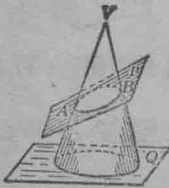
2. 若  $P$  不通過頂點  $V$  而垂直於軸  $VC$ , 則其截面為一圓. (第一百四十二圖)



第一百四十一圖      第一百四十二圖

3. 若  $P$  不垂直於軸, 但與兩元素  $VA, VB$  相交; 則其截面為一橢圓. (第一百四十三圖)

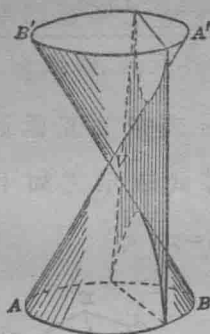
4. 若  $P$  與一元素平行, 則其截面為一拋物線. (第一百四十四圖)



第一百四十三圖

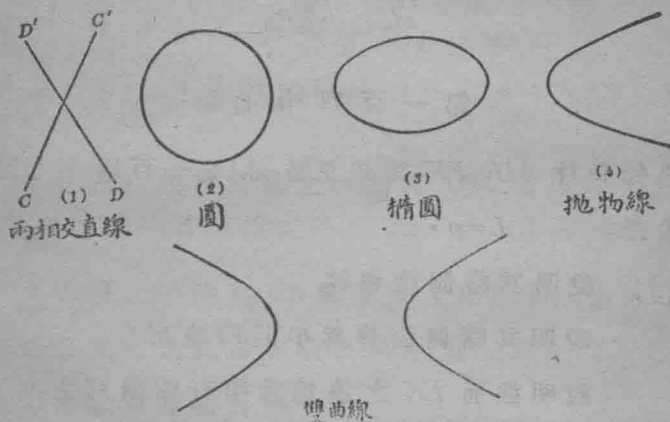
第一百四十四圖

5. 若  $P$  與某延長元素相遇, 則其截面為一雙曲線。(第一百四十五圖)



第一百四十五圖

由是得圓錐之截面如次:



第一百四十六圖

由第十一章可知此等曲線為含兩個未知量之二次方程之圖線。

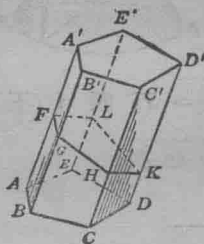
上述諸截面之詳細討論詳於解析幾何學, 茲不贅及。

## 面 積

269. 定理: 角柱體之側面積等於其側稜乘其正截面之周.

以  $L$  表示側面積,  $p$  表示其正截面之周,  $e$  表示其側稜之長, 則此定理可以等式表示之如下:

$$L = p \cdot e.$$



第一百四十七圖

已知角柱  $AD'$ ,  $FK$  爲其正截面。(第一百四十七圖)

求證  $L = p \cdot e.$

證: 說明其諸側稜相等.

說明其諸側面皆爲平行四邊形,

說明截面  $FK$  之邊爲諸平行四邊形之高.

由是  $AB' = \overline{FG} \cdot \overline{BB'} = \overline{FG} \cdot e,$

$$BC' = \overline{GH} \cdot \overline{CC'} = \overline{GH} \cdot e,$$

---

相加,  $AB' + BC' + \dots = (\overline{FG} + \overline{GH} + \dots) e$

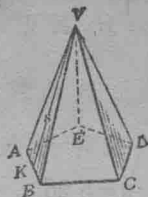
即  $L = p \cdot e.$



## 習 題

1. 證明正角柱之側面積,等於其底之周乘高.
2. 角柱之側稜為 18 公分,其正截面之周為 29 公分,求其側面積.
3. 求  $L$ 
  - (1) 設  $e=2.75$ ,  $p=5.26$ .
  - (2) 設  $e=5\frac{1}{4}$ ,  $p=10\frac{3}{7}$ .
  - (3) 設  $e=12.14$ ,  $p=25\frac{19}{100}$ .
4. 求  $p$ 
  - (1) 設  $L=20.26$ ,  $e=12.48$ .
  - (2) 設  $L=19\frac{4}{7}$ ,  $e=6.92$ .
5. 設有正六角柱,其底之一邊為 5 呎,其高為 8 呎,求其側面積.
6. 立方體之一稜為 2.6 公分,求其總面積.
7. 正三角柱之底為等邊三角形,其一邊  $a=2.7$  吋,其高為  $h=8.4$  吋,求其總面積.
8. 高 9 吋,寬  $9\frac{3}{4}$  吋,長 20 吋,之水槽,內敷銅板,問共需銅板若干方吋.
9. 長  $9\frac{1}{2}$  呎,寬 7 呎,深 5 呎,之水池,內敷鉛片,問共需鉛片若干方呎.

270. 定理: 正角錐之側面積,等於其底之周乘斜高之半,即  $L = \frac{1}{2}s \cdot p$



第一百四十八圖

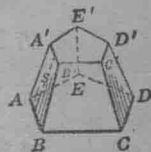
已知正角錐  $V-ABCDE$ ;  $VK$  爲其斜高。(第一百四十八圖)

求證  $L = \frac{1}{2}s \cdot p$ .

證: 說明  $L = \frac{1}{2}s \cdot AB + \frac{1}{2}s \cdot BC + \frac{1}{2}s \cdot CD + \dots$   
 $= \frac{1}{2}s \cdot (AB + BC + CD + \dots)$   
 $= \frac{1}{2}s \cdot p$   
 $\therefore L = \frac{1}{2}s \cdot p$

271. 定理: 平截正角錐之側面積,等於兩底之周之半和乘斜高,即  $L = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)s$ .

試證之。



習題 第一百四十九圖

1. 正三角錐之斜高 8 呎,底之一邊 3 呎,求其側面積。
2. 正角錐之高爲 5 呎,其底爲每邊 6 呎之正六角形,求其側面積。

3. 正角錐之高為 8 呎, 其底面為 25 平方呎之正方形, 求其側面積。

4. 正角錐之底為每邊六尺之正方形, 其斜高與底面成角  $45^\circ$ , 求其側面積。

5. 正角錐之底面為 900 平方單位之正方形, 其高為 12, 求其側面積。

6. 平截正六角錐體之底邊為 6 及 14, 其斜高為 20, 求其側面積及總面積。

7. 某禮拜堂之尖塔高 80 呎, 其底為每邊 10 呎之正六角形, 若裝飾費為每平方碼須 20 仙, 問共須裝飾費若干。

272. 正圓柱及正圓錐之側面積。正圓柱及正圓錐之側面積, 可展開其側面為一平面形而求之。

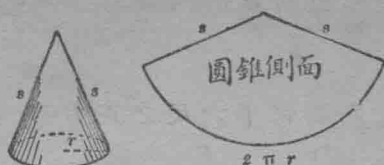


第一百五十圖

若展開正圓柱之側面, 則成一矩形, 其寬等於圓柱之高, 其長等於圓柱底之圓周。(第一百五十圖)

設以  $L$  表示其側面積,  $r$  表示其底之半徑,  $h$  表示圓柱之高,

$$\text{則 } L = 2\pi rh,$$



第 一 百 五 十 一 圖

若展開圓錐之一側面，則成一扇形，扇形弧之長等於圓錐底之圓周，扇形半徑等於圓錐之斜高。（第一百五十一圖）

設以  $s$  表示斜高， $r$  表示其底之半徑， $L$  表示其側面積，

$$\text{則 } L = \pi r s.$$

## 習 題

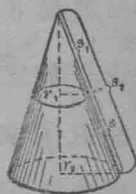
1. 轉動一斜圓柱於一平面上，而畫其側面積。
2. 畫一斜圓錐之側面積於一平面上。
3. 今有煮衣釜一個，在最大之長度為 24 吋，寬  $11\frac{1}{2}$  吋，高  $12\frac{1}{2}$  吋，兩端為半圓形，其接口之寬如下：兩端之餘邊為  $1\frac{1}{2}$  吋，長邊之餘邊為 1 吋，底周圍之餘邊為  $\frac{1}{2}$  吋，問製此釜須錫皮若干（方吋）。

## 273. 平截正圓錐之側面積。

說明平截正圓錐之側面積為兩正圓錐側面積之差。（第一百五十二圖）

若以公式表示之則為

$$L = \pi (s_2 r_2 - s_1 r_1),$$



第 一 百 五 十 二 圖

因  $s_1$  與  $s_2$  非平截正圓錐之已知部分,故此公式需變易  
形狀如下:

$$\therefore \frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} \quad \text{何故?}$$

$$\therefore s_2 r_1 - s_1 r_2 = 0 \quad \text{何故?}$$

$$\begin{aligned} \therefore L &= \pi (s_2 r_2 + s_2 r_1 - s_1 r_2 - s_1 r_1) \\ &= \pi [s_2 (r_2 + r_1) - s_1 (r_2 + r_1)] \\ &= \pi (r_2 + r_1) (s_2 - s_1) \end{aligned}$$

$$\therefore L = \pi (r_1 + r_2) s$$

此式可作

$$L = \frac{1}{2} (2\pi r_1 + 2\pi r_2) s.$$

故 平截正圓錐之側面積,等於兩底周之半和乘斜高。

### 習 題

1. 說明求旋轉圓柱之總面積公式爲

$$T = 2\pi r (h + r), \quad h \text{ 表示其高, } r \text{ 表示其底之半徑,}$$

2. 說明求旋轉圓錐之總面積公式爲

$$T = \pi r (s + r), \quad s \text{ 表示其斜高, } r \text{ 表示其底之半徑,}$$

試以文言代此式所表示之定則。

3. 說明平截旋轉圓錐之側面積,等於距其兩底面等  
遠之截面之周乘其斜高,

說明  $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ , (第一百五十三

圖)

故  $r_1 + r_2 = 2r$ .

代入等式  $L = \pi(r_1 + r_2)s$ .

即得  $L = 2\pi r \cdot s$ .

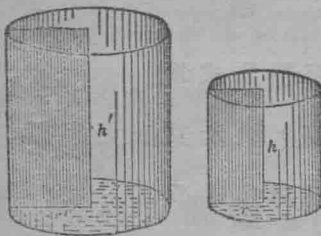


第一百五十三圖

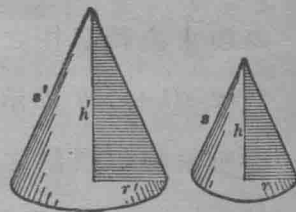
4. 錢桶上口之直徑 9 吋, 下底之直徑  $8\frac{1}{2}$  吋, 斜高 11 吋. 對於寬需費  $1\frac{1}{2}$  吋長需費 1 吋, 底之直徑須比先大 1 吋. 求製此桶所需之木若干平方呎.

5. 一平截正圓錐之側面積為  $60\pi$  平方尺, 若其兩底之半徑為 6 尺, 與 4 尺, 求其斜高

274. 相似圓柱. 兩正圓柱, 為兩個相似矩形以相當邊為軸, 旋轉而成者, 相似. (第一百五十四圖)



第一百五十四圖



第一百五十五圖

275. 相似圓錐. 兩正圓錐, 為兩個相似直角三角形以相當邊為軸, 旋轉而成者, 相似. (第一百五十五圖)

276. 定理: 兩相似正圓柱(或正圓錐)之側面積或全面積之比,等於其兩高之平方比,或兩底半徑之平方比.

證: 以  $r$  與  $r'$  表示圓柱底之半徑,  $h$  與  $h'$  表示圓柱之高,  $L$  與  $L'$  表示圓柱之側面積,  $T$  與  $T'$  表示圓柱之全面積(第一百五十四圖)指明

$$\frac{L}{L'} = \frac{2\pi r h}{2\pi r' h'} = \frac{r h}{r' h'} = \frac{r}{r'} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{2\pi r (h+r)}{2\pi r' (h'+r')} = \frac{r (h+r)}{r' (h'+r')} = \frac{r}{r'} \times \frac{h+r}{h'+r'}$$

因  $\frac{h}{h'} = \frac{r}{r'}$ , 所以  $\frac{h+r}{h'+r'} = \frac{r}{r'} = \frac{h}{h'}$ .

由代入法,

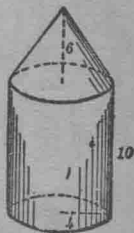
$$\frac{T}{T'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}$$

證第一百五十五圖圓錐之法,與上相似,學者可自求之.

### 習 題

1. 說明兩相似正圓錐側面積或全面積之比,如其兩斜高之平方比.

2. 一水桶為一圓柱與一圓錐所合成,其大小數目如第一百五十六圖所示,求其面積.



第一百五十六圖

3. 今欲造一儲藏桶,(第一百五十七圖)其底之直徑為 156 尺,總高為 24 尺,頂高 8 尺,問須材料若干平方尺.

## 習 題

†277. 解下列問題：

1. 設旋轉圓柱之高  $h=8.5$  吋，其底之半徑  $r=5.3$  吋，求其側面積及全面積。

2. 正四角錐之一底邊為 7 公分，其高為 6.8 公分，求其側面積及全面積。

3. 正圓錐之底之半徑為 4.2 其高為 5.7，求其側面積及全面積。

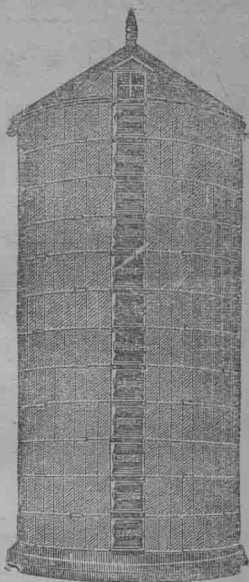
4. 試求一平截角錐之側面積，設其高為 10，其兩底皆為正方形，上底之一邊等於 4，下底之一邊等於 6。

5. 正角柱之高為 40，其底為直角三角形，夾直角之兩邊為 36 與 43，求其側面積與全面積。

6. 正角柱之底為每邊 6 呎之正六角形，高為 10 尺，求其側面積與全面積。

7. 一花崗石圓柱高 24 呎，其底之直徑為 4.5 呎，今欲磨其側面，每平方尺需工銀 60 仙，問共需銀若干。

8. 有角錐，高 460 呎，其底為每邊 746 呎之正方形，問其側面積若干。



第一百五十七圖



9. 一正六角錐形之尖塔,其底之周為60呎,斜高為48呎,若其外鋪以石板,問需石板若干平方呎。

10. 一正圓柱形之儲氣箱高72呎,其底之直徑為45呎,今於其外面塗漆,每平方碼需銀26仙,問漆此箱須銀若干。

11. 有一漏斗,其最大端之直徑為8吋,出口之直徑為 $1\frac{1}{2}$ 吋,出口之尖端為1吋,漏斗之斜高6吋,出口管之斜高4吋,定各部分之接縫長寬各 $\frac{1}{2}$ 吋,若以錫製此漏斗,問共須錫片若干平方吋。

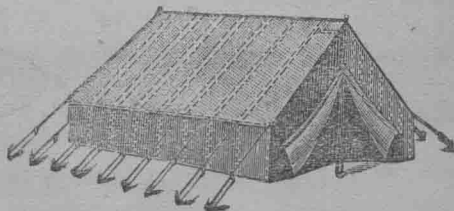
12. 正圓錐高12吋,底之半徑8吋,正圓柱高4吋,底之半徑2吋,今欲以平行於圓錐底之平面橫截圓錐,使截得小圓錐之側面積等於圓柱之側面積加其底面積,問截平面距圓錐之頂若干。

13. 一風磨之水槽(第一百五十八圖)高12呎,其直徑8呎,其頂之直徑9呎高3呎,問須若干方呎材料,方能製成。



第一百五十八圖

14. 天幕之寬為12呎,長為18呎,頂高8呎,牆高 $3\frac{1}{2}$ 呎,問製成須材料若干平方呎。(見第一百五十九圖)

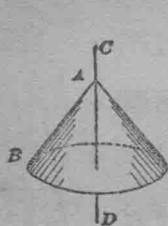


第一百五十九圖

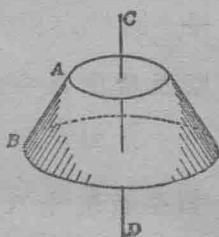
## 旋 轉 表 面

278. 旋轉表面。若一線段  $AB$ , 如第一百六十至一百六十四圖依其同平面內一直線  $CD$  為軸而旋轉, 則線段上之每點各畫一圓, 圓之平面, 與軸垂直。 何故?

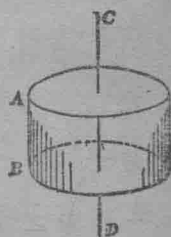
由旋轉此線段而生出之面曰旋轉表面。依線段與軸之關係位置之不同, 因而此線段生成之旋轉表面為正圓錐之側面(第一百六十圖), 為平截正圓錐之側面(第一百六十一圖), 為正圓柱之側面(第一百六十二圖), 為一圓(第一百六十三圖), 為一圓環(第一百六十四圖)。



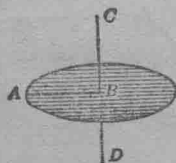
第一百六十圖



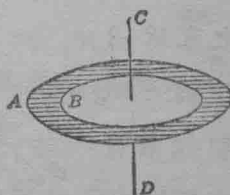
第一百六十一圖



第一百六十二圖



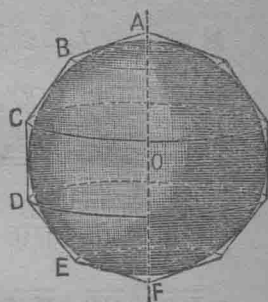
第一百六十三圖



第一百六十四圖

279. 定理：若偶數邊正多角形之半周，依其兩相對角頂之連結線為軸而旋轉，則諸邊所生成之表面積等於此對角線與內切於此多角形之圓周之相乘積。

證：第一百六十五圖之表面為圓錐面，圓柱面，及平截圓錐面組合而成，故其面積可將圓錐面，平截圓錐面，及圓柱面相加而得。



第一百六十五圖

可知欲求其全面積之公式，須先知諸側面之和。

1. 由  $AB$  旋轉所成之面(第一百六十六圖)為  $L_1 = \pi \overline{BB'} \times \overline{AB}$  (§ 272).

平分  $AB$  於  $M$ ,

作  $MM' \perp AF$ ,

說明  $MM' = \frac{1}{2} \overline{BB'}$ .

如是  $L_1 = 2\pi \overline{MM'} \times \overline{AB}$ . 何故?

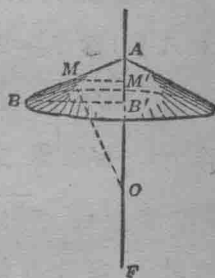
作  $MO \perp AB$ ,

則  $\triangle OMM' \sim \triangle ABB'$ , 何故?

$\therefore \frac{AB}{MO} = \frac{AB'}{MM'}$ . 何故?

$\therefore \overline{MM'} \times \overline{AB} = \overline{MO} \times \overline{AB'}$ . 何故?

$\therefore L_1 = 2\pi \overline{MO} \times \overline{AB'}$ . 何故?



第一百六十六圖

2.  $BC$  旋轉所生之面積(第一百六十七圖)爲

$$L_2 = \pi(\overline{CC'} + \overline{BB'}) \overline{BC}. (\S 273)$$

平分  $BC$  於  $M$ , 作  $MM' \perp AF$ .

說明  $CC' + BB' = 2MM'$ .

於是  $L_2 = 2\pi \overline{MM'} \times \overline{BC}$ .

作  $BB'' \perp CC'$ ,

則  $\triangle CBB'' \cong \triangle OMM'$ , 何故?

$$\therefore \frac{CB}{MO} = \frac{BB''}{MM'} = \frac{B'C'}{MM'}$$

$$\therefore \overline{MM'} \times \overline{CB} = \overline{MO} \times \overline{B'C'}$$

$$\therefore L_2 = 2\pi \overline{MO} \times \overline{B'C'}$$

3.  $CD$  旋轉所生之表面(第一百六十八圖)爲  $L_3 = 2\pi \overline{DD'} \times \overline{CD}$ .

平分  $CD$  於  $M$ ,

作  $MO$ .

則  $L_3 = 2\pi \overline{MO} \times \overline{CD}$ .

依此可求得其餘各部之面積.

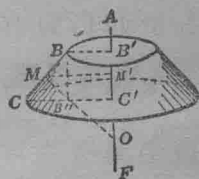
於是  $L_1 = 2\pi \overline{MO} \times \overline{AB'}$ .

$$L_2 = 2\pi \overline{MO} \times \overline{B'C'}$$

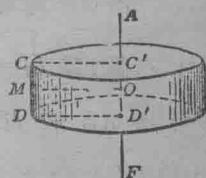
$$L_3 = 2\pi \overline{MO} \times \overline{C'D'}$$

相加,  $L = 2\pi \overline{MO} (\overline{AB'} + \overline{B'C'} + \dots + \overline{E'F})$ .

即  $L = 2\pi \overline{MO} \times \overline{AF}$



第一百六十七圖



第一百六十八圖

280. 球之面積。欲求球之表面積，須先作內接於半圓之半個正多邊形如  $ABCDE$  (第一百六十九圖)。

多邊形  $ABCDE$  所生之表面之面積為  $2\pi\overline{MO} \times \overline{AE}$ 。

設此多邊形之邊數無限增加，則其周漸近於圓，以圓為極限。

此多邊形各邊旋轉所生之表面之面積，以半圓所生球面之面積為極限。

$MO$  漸近於半徑  $r$ ，以  $r$  為極限。

由是  $2\pi MO$  漸近於  $2\pi r$ 。

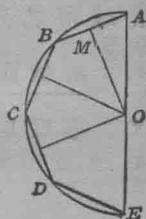
$$2\pi\overline{MO} \times \overline{AE} \text{ 漸近於 } 2\pi r \times \overline{AE} = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2.$$

故  $ABCDE$  所生表面之面積，漸近於  $4\pi r^2$ ，以  $4\pi r^2$  為極限。由前討論，得下定理：

球表面之面積等於其直徑乘大圓弧之長即  $S=4\pi r^2$ 。

281. 球帶。球面之一部分在兩平行平面之間者曰

球帶(第一百七十圖)。兩平面間之距離為球帶之高。此兩平面在球面所作之截面為球帶之底。若兩平行平面中有一平面與球面相切，則此帶稱為一底球帶。



第一百六十九圖



第一百七十圖

## 習 題

1. 說明球帶之面積，等於其高與大圓弧之相乘積，即

$$Z = 2\pi rh.$$

設球帶之高為 12，球之半徑為 15，求球帶之面積。

2. 兩球面積之比，如其兩半徑之平方比，求證。

3. 半球形屋頂之直徑為  $1\frac{1}{2}$  呎，問其面積為若干平方呎。

4. 地球近似於直徑為 7,920 哩之球，求其面積。

5. 設北溫帶之高為 1,800 哩，求其面積。

6. 說明球之面積，等於其外切圓柱之側面積。

7. 設月球之直徑為 2,162 哩，求地球面積與月球面積之比。

8. 設有一球，半徑為  $r$ ，距球心等遠之處，有兩平行平面截一球帶於此球，球帶之面積，等於以帶底為底所作圓柱之側面積之  $\frac{1}{2}$ ，求平面與球心之距。(哈佛大學)

9. 西西里島最高之火山埃得納，高 3,300 公尺，某人從此山之頂望一方向，問能望遠若干？

欲求之距離為 3,300 公尺(山高)及 6374 公里(山高與球直徑之和)之幾何中項。

10. 某人乘氣球上升，高與地球半徑等，說明此人見地面四分之一。(哈佛大學)

11. 旋轉圓錐之側面積，與球面積皆為49平方呎，若球之半徑等於圓錐之底半徑，求圓錐之高。

12. 立方體之八角頂皆在一球面上，證明此立方之任一對角線皆為球之直徑。

若立方體之一稜為  $a$ ，求以立方體之一面之平面為底之一底球帶面積。（哈佛大學）

13. 問  $30^\circ$  與  $60^\circ$  緯度間之溫帶之面積與地面之比如何。（試說明計算之程序）

14. 在球心一側之兩平行平面，於球面上截一球帶，帶之面積為球面積之  $\frac{1}{4}$ ，帶底面積近球心者為遠球心者之二倍，求從球心至近於球心帶底平面之距離。（哈佛大學）

## 提 要

282. 本章已授下列各名詞之意義：

多面體。

正角錐，斜高

多面體之面，稜，頂，表面。

圓錐，正圓錐，旋轉圓錐。

四面體，六面體

曲面柱面，圓柱，正圓柱。

八面體，十二面體

斜圓柱。

二十面體。

旋轉圓柱。

角錐及曲面錐之表面

角柱面，角柱。

準線，母線

直角柱，斜角柱。

三角錐，四角錐，五角錐。

三角柱，四角柱。

截面。正截面。	圓,橢圓,拋物線,
平行六面體。	雙曲線。
截角柱。	相似圓柱,相似圓錐
平截角錐,平截圓錐。	旋轉體之面積。
正圓錐之截面。	球帶。

283. 本章已證明之重要定理如下:

1. 等式  $f+v=e+2$  表示凸多面體之稜,頂,面,之關係。
2. 正角錐之各側稜皆等。
3. 正角錐之各側面皆為全等之等腰三角形。
4. 角柱之各側稜皆等。
5. 角柱之各側面皆為平行四邊形。
6. 角柱之截面為截其各稜之兩個平行平面所作者全等。
7. 角柱之各正截面全等。
8. 若角柱之截面與底平行,則此截面與底全等。
9. 曲面柱面之截面為通過一元素之一平面所作者,為一平行四邊形。
10. 曲面柱之諸截面為截各元素之平行平面所作者全相等。
11. 曲面柱之諸截面為與底平行之平面所作者,與底全等。



12. 曲面錐之截面，爲通過其頂之平面所作者，爲一三角形。
13. 圓錐之截面，爲平行於底之平面所作者，必爲一圓。
14. 若角錐爲平行於其底之平面所截，則此平面分其稜與高成比例；截面與底爲相似形；截面面積與底面積之比，如其頂至截面與底之距離之平方比。
15. 兩相似圓柱(或圓錐)之側面積或全面積之比，等於其兩高之平方比，或兩底半徑之平方比。
16. 平面與正圓錐之截面，爲兩相交直線，或一圓，或一拋物線，或一雙曲線，或一橢圓。

284. 本章所授之公式如下：

I. 側面積：

角柱,  $L = p \cdot e$

正角柱,  $L = p \cdot h$

正角錐,  $L = \frac{1}{2}s \cdot p$

平截角錐,  $L = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)s$

正圓柱,  $L = 2\pi r h$

正圓錐,  $L = \pi r \cdot s$

平截正圓錐,  $L = \pi(r_1 + r_2)s$

II. 半個正多邊形依其兩對角頂之連結線爲軸面旋轉，其所生之面積爲

$$L = 2\pi \overline{MO} \times \overline{AF}$$

## III. 球面之面積,

$$S = 4\pi r^2$$

## IV. 球帶之面積

$$Z = 2\pi r h.$$

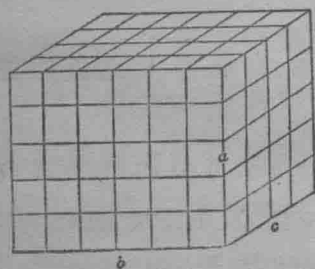
## 第十三章

## 體積

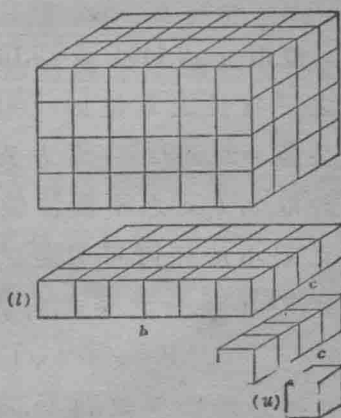
## 矩形面體之體積

285. 體積。欲測一立方體之諸面所包圍空間之大小，須用一稜為單位長之立方體為體積之單位而測之。立體所含有此單位體積之倍數，即為該立體所有之體積。

286. 矩形面體之體積。設  $a, b, c$  為會合於一頂之三稜之長，(第一百七十一圖) 作平行於底之諸平面，則長方體  $p$  可分作  $a$  個相等之片  $(l)$ ，(第一百七十二圖) 每個片可分為  $b$  個相等之條  $(s)$ ，每條又可分為  $c$  個相等之小立方體  $(u)$ 。



第一百七十一圖



第一百七十二圖

故知每個  $s$  之體積為  $c$ ，而每個  $l$  之體積為  $b \times c$ ，又每個  $p$  之體積為  $a \times b \times c$ 。

以上乃假定  $a, b, c$  為可公度者，若  $a, b, c$  為不可公度如  $a = \sqrt{6}m$ ;  $b = \sqrt{10}m$ ;  $c = \sqrt{15}m$ ，則  $a = 2.4494 \dots m$ ;  $b = 3.1623 \dots m$ ;  $c = 3.8730 \dots m$ 。而此長方形之體積可計算至所需之精密度如下：

1. 設取  $a = 2.4$ ,  $b = 3.1$ ,  $c = 3.8$ ，而以一公寸為長之單位，則  $V = 24 \times 31 \times 38$  立方公寸 = 28,272 立方公寸 = 28.272 立方公尺。

2. 設取  $a = 2.44$ ,  $b = 3.16$ ,  $c = 3.87$ ，而以一公分為長之單位，則  $V = 244 \times 316 \times 387$  立方公分 = 29,839,248 立方公分 = 29.839248 立方公尺。

3. 設取  $a = 2.449$ ,  $b = 3.162$ ,  $c = 3.873$ ，而以一公釐為長之單位，則  $V = 29,991,497,274$  立方公釐 = 29.9914 ..... 立方公尺。

4. 設取  $a = 2.4494$ ,  $b = 3.1623$ ,  $c = 3.8730$ ，而以一公釐之十分之一為長之單位，則  $V = 29,999,241,802,260$  立方十分之一之公釐 = 29.9992 ..... 立方公尺。

故設取  $a, b, c$  之小數位數愈多，則取得  $V$  之近似值與真值之差小於任何可假定之量。

假定  $V = a \cdot b \cdot c$  之公式，對於  $a, b, c$  不可公約時亦為真，則

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{6} \times \sqrt{10} \times \sqrt{15} \text{ 立方公尺} \\ &= \sqrt{6 \times 10 \times 15} \text{ 立方公尺} \\ &= 30 \text{ 立方公尺。} \end{aligned}$$

然此值爲前漸次所得結果， $V=28.272, 29.8392, 29.9914, 29.9992$ ，等之漸近值。

故無論  $a, b, c$  爲可公度或爲不可公度，由本節之討論可知矩形面體之體積等於其三度之連乘積。

### 習 題

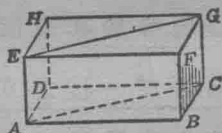
證明習題 1—6

1. 矩形面體之體積，等於其底面積乘高。
2. 立方體之體積，等於一稜之立方。
3. 兩立方體體積之比，等於其一稜之立方比。
4. 兩矩形面體體積之比，等於其三度連乘積之比。
5. 等高兩矩形面體之比，等於其底之比，等底兩矩形面體之比，等於其高之比。
6. 有一度相等之兩矩形面體之比，等於其他兩度連乘積之比，有兩度相等之兩矩形面體之比，等於其他一度之比。
7. 說明立方體之體積，與其稜之立方正變。若其稜增至一倍或二倍……則其體積之增加如何。
8. 欲決定一矩形面體之面積，先須知其幾度？設欲測其一面之面積，則須知其幾度？
9. 一房長 12.5 呎，寬 12 呎，高 11 呎，問能容空氣若干立方呎？

10. 以長 9 呎,寬 4 呎,高 3 呎,之磚築一長 20 呎,高 4 呎,寬 2 呎之牆,問須磚若干?

### 體積之比較

287. 定理: 通過一正平行六面體兩相對稜之平面,分此平行六面體為兩個等積之正三角柱.



第一百七十三圖

已知正平行六面體  $AG$ , 又通過  $AE, CG$  之平面  $ACGE$  (第一百七十三圖).

求證 角柱  $ABC-F \cong$  角柱  $CDA-H$ .

證:  $\triangle AB \cong \triangle CDA$ . 何故?

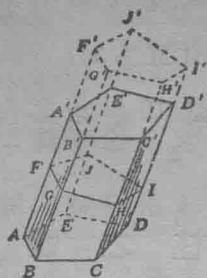
設想置  $ABC-F$  於  $CDA-H$  之位置, 使  $\triangle ABC$  合於  $\triangle CDA$ .

則  $BF$  合於  $DH$ ,  $AE$  合於  $GC$ ,  $GC$  合於  $AE$ . 何故?

故  $\triangle EFG$  與  $\triangle GHE$  相合. 何故?

$\therefore$  角柱  $ABC-F$ , 與角柱  $CDA-H$  相合而全等.

288. 定理: 一斜角柱之體積, 與以其正截面為底, 以其稜為高之正角柱相等.



第一百七十四圖

已知斜角柱  $AD'$ ，正角柱  $FI'$ ， $FI$  為斜角柱  $AD'$  之正截面，又  $FF' = AA'$  (第一百七十四圖)。

求證  $AD' = FI'$ 。

證：設想置截角柱  $AI$  於截角柱  $A'I'$  之位置，使  $AD$  重合於  $A'D'$ ，

指明  $FA, GB, HC, \dots$  與  $F'A', G'B', H'C', \dots$  相合。

指明  $AG, BH, \dots$  與  $A'G', B'H', \dots$  相合。

故  $AI = A'I'$ ，(因兩者互相密合)

但  $AI' \equiv AI'$ ，

相減  $\therefore AD' = FI'$ 。(等數減等數，得數相等。)

習 題

1. 立方體之對角線為  $10\sqrt{3}$ ，求其體積。
2. 立方體之對角線為 24 吋，求其全面積與體積。

3. 一長方池長 20 呎, 寬 12 呎, 高 10.4 呎, 問此池容水若干加倫? (一加倫含 231 立方吋)

4. 一球體之直徑為 10 吋, 求其內接立方體之體積與全面積。(雪費爾大學)

## 角 柱 之 體 積

289. 定理: 正三角柱之體積, 等於其底面積乘高.

已知正三角柱  $ABC-F$  (第一百七十五圖).

求證  $ABC-F = \overline{ABC} \times \overline{CF}$ .

證: 作  $FG \perp DE$ , 又作  $CH \perp AB$ .

說明  $FG$  與  $CH$  皆垂直於平面  $AE$ .

過  $FG$  與  $CH$ , 作一平面.

作  $AK \parallel HC$ ,  $CK \parallel HA$ .

作  $KI \parallel HG$ , 遇平面  $DGF$  於  $I$ ,

則  $AHCK-F$  為一矩形面體.

$$AHC-F = \frac{1}{2} AHCK-F \quad (\S 287).$$

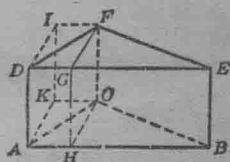
$$\therefore AHC-F = \frac{1}{2} AHCK \times CF. \quad (\S 286)$$

$$\therefore AHC-F = \overline{AHC} \times \overline{CF}. \quad \text{何故?}$$

依此可證

$$HBC-F = \overline{HBC} \times \overline{CF}.$$

相加  $ABC-F = \overline{ABC} \times \overline{CF}.$



第一百七十五圖



290. 定理：正平行六面體之體積，等於其底面積乘高。

分正平行六面體為兩個相等之正三角柱， (§ 287) 又求此兩個正三角柱體積之和，即得正平行六面體之體積。

291. 定理：斜平行六面體之體積，等於其底面積乘高。

已知斜平行六面體  $AG$  如第一百七十六圖， $ABCD$  為其底， $h$  為其高。

求證  $AG = ABCD \times h$ 。

證：作一正截面  $A'H'$

以  $A'H'$  為底，作一  
正平行六面體  $A'G'$

使其稜  $A'B' = AB$ ，

則  $AG = A'G'$  何故？

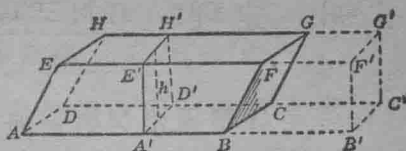
但  $A'G' = A'H' \times A'B'$

$$= (h \times A'D') \times A'B'$$

$$= h \times A'D' \times AB$$

$$= h \times (A'D' \times AB)$$

$$= h \times ABCD.$$



第一百七十六圖

此結果可簡單記為

$$V = h \cdot b.$$

292. 定理：通過任一平行六面體兩相對稜之平面，分此平行六面體，為兩個等積之三角柱。

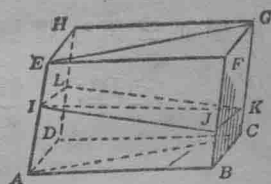
作正截面  $IJKL$  如第一百七十七圖。

說明三角柱  $ABC-F$  等於以  $IJK$  為底， $BF$  為高之正角柱。

說明  $CDA-H$  等於以  $KLI$  為底以  $BF$  為高之正角柱。

說明此兩正角柱相等。

$$\therefore ABC-F = CDA-H.$$



第一百七十七圖

293. 定理：任何三角柱之體積，等於其底面積乘高。

作一平行四邊形  $ABDC$  如第一百七十八圖。

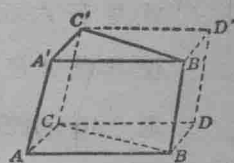
作一平行六面體  $ABDC-B'$ 。

$$\text{則 } ABC-B' = \frac{1}{2} ABDC-B'. (\S 292)$$

$$ABDC-B' = ABCD \times h. (\S 291)$$

$$ABC-B' = \frac{1}{2} ABDC \times h,$$

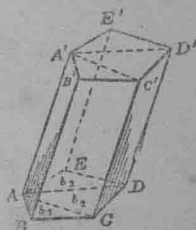
$$= ABC \times h.$$



第一百七十八圖

294. 定理：任何角柱體之體積，等於其底面積乘高。

過  $AA'$  及其餘之諸側稜，各作一平面如第一百七十九圖，則此角柱分為若干個三角柱。



第一百七十九圖

命此諸三角柱之底各爲  $b_1, b_2, b_3, \dots$ ; 其高爲  $h$ .

則  $ABC-A' = b_1 h,$

$$ACD-A' = b_2 h,$$

$$ADE-A' = b_3 h, \text{ 等.}$$

---

相加  $ABCDE-A' = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots) h,$

以簡明之式表示此結果, 卽爲

$$V = b \cdot h.$$

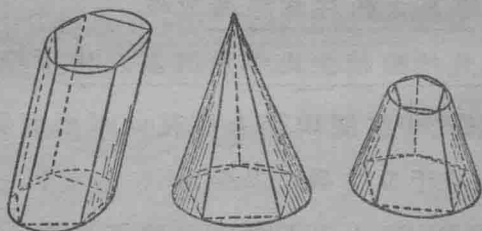
### 習 題

1. 等底等高之角柱爲等積, 求證.
2. 等底角柱體積之比, 等於其高之比, 求證.
3. 掘一長 200 呎深 10 呎上口寬 6 呎下底寬 4 呎之溝, 問須挖出土若干立方碼?
4. 掘長 10 桿深 4 呎上口寬 7 呎下底寬  $4\frac{1}{2}$  呎之濠, 每一立方碼之土須銀 42 仙, 問共須銀若干?
5. 一正三角柱高 8 吋, 其底爲每邊 2 吋之正三角形, 求其體積.
6. 一三角柱高 10 呎, 其底爲邊爲 3 呎, 4 呎, 5 呎之直角三角形, 求其體積.
7. 一三角柱之體積爲 250, 其底爲每邊爲 7 之正三角形, 求其高.
8. 一三角柱高 30 吋, 其底邊爲 12 吋, 10 吋, 10 吋, 求其體積.

9. 一角柱高 60 吋,其底為菱形一邊長 40 吋短對角線長 48 吋,求其體積.

10. 正六角柱之全面積為 276,其底面積為 12,求其體積.  
(耶魯大學)

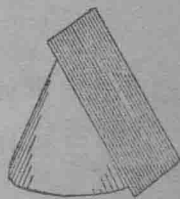
295. 內接角柱,角錐,平截角錐. 若角柱,角錐,平截角錐之側稜為圓柱,圓錐,平截圓錐之元素,或前者之底內接於後者之底,則此角錐,角柱,平截角錐謂之內接於此圓柱,圓錐,平截圓錐.(第一百八十圖)



第一百八十圖

由此可見內接角柱,角錐,平截角錐之體積,小於圓柱,圓錐,平截圓錐之體積.

296. 切平面. 若一平面含圓柱,圓錐,或平截圓錐之一元素,且僅含此一元素,又不與表面相交,則此平面稱為圓柱,圓錐,或平截圓錐之切平面.(第一百八十一圖)



第一百八十一圖

## 習題

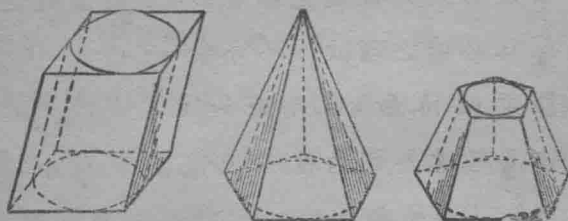
1. 設一平面通過圓錐底之一切線，又過此切點之一元素，則此平面，必為此圓錐之切面。

問此定理對於任何曲面錐面皆為真否？（哈佛大學）

2. 圓柱之兩個切平面之交線，與圓柱之元素平行。

（耶魯大學）

297. 外切角柱，角錐，平截角錐。若角柱，角錐，平截角錐之側面，切於圓柱，圓錐，平截圓錐之側面，或前者之底外切於後者之底，則此角柱，角錐，平截角錐，謂之外切於此圓柱，圓錐，平截圓錐。（第一百八十二圖）



第一百八十二圖

由此可見外切角柱，角錐，平截角錐之體積，大於圓柱，圓錐，平截圓錐之體積。

## 圓柱之體積

298. 定理：圓柱之體積等於其底面積乘高。

已知圓柱  $AC$  (第一百八十三圖)。

其底面積為  $b$ , 其高為  $h$ 。

求證其體積  $v = b \cdot h$ 。

證：(反證法)

假定  $v \neq b \cdot h$ 。

則  $v > b \cdot h$ , 或  $v < b \cdot h$ 。

(1) 假定  $v < bh$ , 命  $v = B'h$ , 而  $b > B'$ ,

作圓柱之內接角柱令其底為  $B'$  且大於  $B$ ,  
即  $b > B' > B$ ,

於是  $B'h > Bh$ 。

由是內接角柱體之體積  $B'h$ , 大於圓柱之體積  $Bh$ 。

此為必無之理, 故  $v$  不小於  $b \cdot h$ 。

(2) 假定  $v > bh$ , 命  $v = B'h$ , 而  $b < B'$ 。

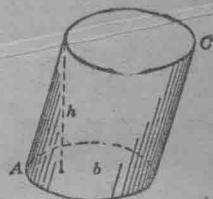
作圓柱之外切角柱, 令其底為  $B'$  且小於  $B$ ,  
即  $b < B' < B$ 。

於是  $B'h < Bh$ 。

由是外切角柱之體積, 小於圓柱之體積。

然此為不合理, 故  $v$  不大於  $b \cdot h$

$$\therefore v = b \cdot h.$$



第一百八十三圖

299. 定理：旋轉圓柱之體積，以公式表示之，爲

$$V = \pi r^2 \cdot h,$$

$h$  爲高， $r$  爲底之半徑。試證之。

### 習題

1. 挖長  $\frac{3}{4}$  哩，高 20 呎之隧道，其橫截面爲半圓形，問須挖出土若干立方碼。

2. 設用一立方呎之銅，製一銅絲，直徑爲  $\frac{1}{8}$  吋，問銅絲長若干。

3. 長 75 碼之水管，其內徑爲  $2\frac{3}{4}$  吋，問能容水若干立方呎？

4. 挖深 80 呎，直徑 5 呎之井，每立方碼需工資 \$3.25。問共須銀若干？

5. 圓環之內半徑爲 8 吋，外半徑爲 10 吋，求其體積。

此環可設想爲一圓柱，其高等於以內半徑與外半徑之等差中項爲半徑之圓周長。

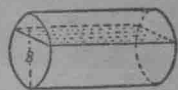
6. 裝水 30 加倫之鍋爐，其直徑爲 1 呎，求其高。

7. 旋轉圓柱之高爲 26，其底之半徑爲 24，求其體積。

8. 兩個相似旋轉圓柱體體積之比，如其相當高之立方比，或爲其底半徑之立方比，求證。

$$\text{指明 } \frac{V}{V'} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{r}{r'} = \frac{r^3}{r'^3}.$$

9. 長為 4 呎, 底之直徑為 10 吋之圓柱形水槽, 一部分滿以水如第一百八十四圖, 水之最深處為 8 吋, 問此水槽現充水若干?



10. 矩形依其一邊為軸而旋轉, 所生之體積, 與被矩形之一對角線所分之三角形所生之體積, 其比如何, (教育部) 用 § 306 求之。

11. 每邊 5 吋之立方體, 恰被水蓋住於直徑為 12 吋之圓柱形水桶底上, 問取出此立方體後, 桶中之水面落下若干? (哈佛大學)

12. 高 8 吋與高 10 吋之圓柱, 其側面均恰能以  $10 \times 8$  平方吋之矩形紙片遮蔽, 試比較此兩圓柱形之大小, (耶魯大學)

13. 若一正方形依於在其同平面內一直線為軸而旋轉一週, 但此直線與一邊平行, 且不與其任一邊相交, 則其所生之體積, 等於正方形之面積乘正方形之心所畫成之圓周之長, 試證之, (哈佛大學)

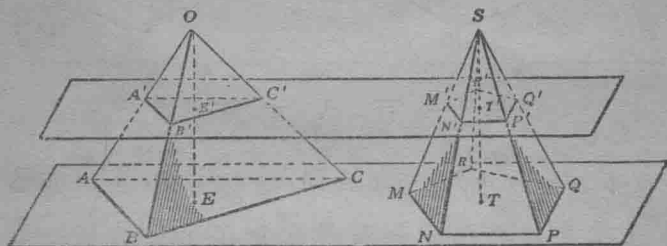
14. 半徑為 5 吋之玻璃圓筒, 內儲以水, 以不規則之黃金塊沉入水內, 則水面升高 3 吋, 求此金塊重若干兩, 但金塊每 1 立方吋重 11 兩, (教育部)

15. 一正六角柱內接於一底半徑為 10 之圓柱, 試比較六角柱與圓柱之側面積及體積之大小, (耶魯大學)



### 角錐之體積

300. 定理：若等高等底之兩角錐，被與底平行且距頂等遠之平面所截，則其兩截面之面積相等。



第一百八十五圖

證：

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{\overline{OE'}^2}{\overline{OE}^2} \quad (\S 260)$$

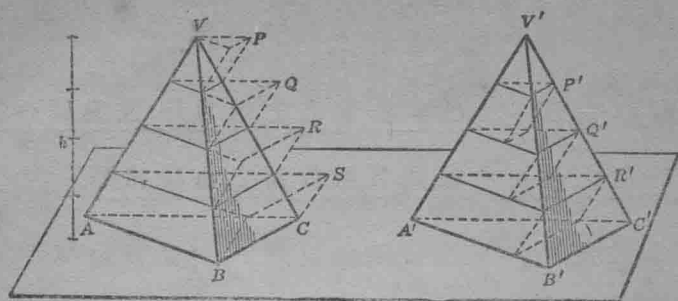
$$\frac{M'N'P'Q'R'}{MNPQR} = \frac{\overline{ST'}^2}{\overline{ST}^2}$$

$$\frac{\overline{OE'}^2}{\overline{OE}^2} = \frac{\overline{ST'}^2}{\overline{ST}^2} \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{M'N'P'Q'R'}{MNPQR} \quad \text{何故?}$$

$$\therefore A'B'C' = M'N'P'Q'R'. \quad \text{何故?}$$

301. 定理：等底等高之兩個三角錐為等積。



第一百八十六圖

討論：置兩角錐之底於同一平面上，(第一百八十六圖)分其高  $h$  為等部分  $x$ ，過各部分作平行於底平面之平面，割角錐為數對面積相等之截面，(§ 300)。

用各截面為下底，作高為  $x$ ，側稜平行於  $VA$ ，及  $V'A'$  之諸角柱，如此，角錐  $V-ABC$  內，作有角柱  $P, Q, R$ ，及  $S$ 。設想於角錐  $V'-A'B'C'$  內亦同樣作得角柱一組。

次用諸截面為上底，作高為  $x$ ，側稜平行於  $VA$  及  $V'A'$  之諸角柱。

由是於角錐  $V'-A'B'C'$  內作得角柱  $P', Q', R'$ ，設想於角錐  $V-ABC$  內，亦作有同樣之角柱一組。

說明  $P=P', Q=Q', R=R'$ 。

以  $X$  表示  $P+Q+R+S$ ，

以  $Y$  表示  $P'+Q'+R'$ ，

則  $X=Y=S$ 。

以  $V$  及  $V'$  表示  $V-ABC$  及  $V'-A'B'C'$  之體積, 則

$$X > V > Y,$$

及  $X > V' > Y.$

∴  $V$  與  $V'$  之差小於  $X$  與  $Y$  之差.

即  $V - V' < X - Y.$

或  $V - V' < S.$

若  $h$  之等分數為前次等分數之二倍, 則新作之各組角柱體積之差仍保其同樣關係, 又  $V - V' < S_1$ . 而  $S_1$  等於  $S$  之半.

逐項推行此法, 至  $S_n$  小於任何可假定之量,

則  $V - V' < S_n.$

欲證明  $V = V'$  其法則如下:

假定  $V \neq V'$ , 而命  $V > V'$ , 又  $V - V' = d.$

由上討論知增加  $h$  之等分數, 可使  $S$  小於任何可假定之量, 即可使  $S$  小於  $d.$

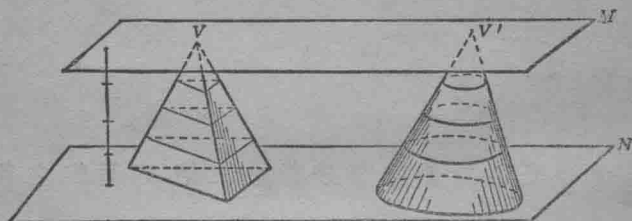
故  $V - V' < d$

此與假說  $V - V' = d$  相反.

故  $V \neq V'$  之假定屬於謬誤.

故  $V = V',$

302. 賈法利利\*氏定理：設有  $V$  與  $V'$  兩立體，介於兩平行平面  $M$  與  $N$  之間，又有一平面，平行於  $M$  與  $N$ ，且於此兩立體截兩個相等平面。（見第一百八十七圖）



第一百八十七圖

由分  $M$  與  $N$  中間之距離為若干等分，且過各分點作平行於  $N$  之平面，可將此兩立體分為若干薄片。

當  $M$  與  $N$  中間之平面增加，則所截之薄片減至極薄，而各漸近於角柱形或圓柱形。

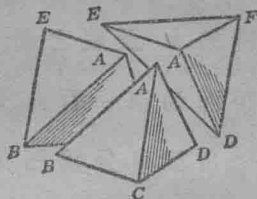
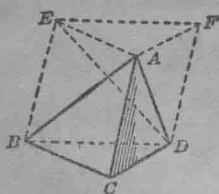
由是任一對相當薄片皆相等，因其等底而等高也。（§ 294）故  $V$  之諸薄片之和等於  $V'$  之諸薄片之和。

當薄片之數增至無限，由與 § 301 相似之說法，可知  $V = V'$ 。此定理稱為賈法利利氏定理，可換言如下：

介於兩平行平面間之兩立體，若其被已知平面之平行平面所作之各對截面之面積相等，則此兩立體為等積。

\* 賈法利利 (Cavalieri) 1598 年生於密蘭，1647 年沒於箔錄那，以著“Principle of indivisibles”而負盛名，確守集無量數點而成線，集無量數線而成面，集無量數面而成體之說，其法則雖有不當，然尚有為積分學所採用者。

303. 定理：三角錐之體積等於其底面積乘高之三分之一。\*



第一百八十八圖      第一百八十九圖

已知此三角錐  $A-BCD$  (第一百八十八圖)。

$v$  表示其體積,  $b$  表示其底,  $h$  表示其高。

求證  $v = \frac{b \cdot h}{3}$ 。

證：以  $BCD$  為底, 作三角柱  $BCD-E$ , 令其高為  $h$ , 又  $AC$  為其側稜之一。

作平面  $EAD$  與  $BAD$  分此角柱為三個三角錐如第一百八十九圖。

則  $A-BCD = D-EAF$  (§ 301),

$D-EAF \equiv A-EFD$ ,

$A-EFD = A-BED$ 。 何故?

故三角柱  $BCD-E$  被分為三個等積三角錐。

故三角錐  $A-BCD =$  三角柱  $BCD-E$  之  $\frac{1}{3}$ ,

即  $v = \frac{1}{3} b \cdot h$ 。

\* 此定理為游道射士(生於紀元前 408 年)所唱導。

304. 定理：任何角錐體之體積，等於其底面積乘

高之三分之一，即  $v = \frac{1}{3}b \cdot h$ 。

證· 通過頂點  $V$ ，及底之對角線，

作各平面如第一百九十圖。

則已知角錐可分為三角錐

$V-AEB, V-BEC$ ……等。

此等三角錐體積之和，即為已

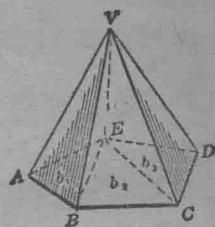
知角錐之體積。

即  $v = \frac{1}{3}hb_1 + \frac{1}{3}hb_2 + \dots$

$= \frac{1}{3}h(b_1 + b_2 + \dots)$

$\therefore v = \frac{1}{3}hb,$

$h$  表示高度， $b$  表示角錐  $V-ABCDE$  之底面積。



第一百九十圖

### 習 題

1. 一角錐高 12 吋，其底為每邊 10 吋之正方形，求體積。
2. 一正四面體之一稜為 3 吋，求其體積。
3. 一正角錐高 5 呎，其底為每邊 4 呎之正方形，求其體積。
4. 一正六角錐高 5 吋，其底之周為 12 吋，求其體積。
5. 埃及之最大角錐，原高 480 呎 9 吋，其底為每邊 764 呎之正方形，自撤去其外層以後，高為 460 呎，底為每邊 746 呎，問撤去石板若干立方呎？

6. 一正四角錐高 10, 其底之面積為 400, 求其體積, 設其平行於底之截面為 100, 問此截面距頂若干遠?

7. 一正六角錐之底可內接於半徑為 10 之圓, 其一側稜為 20, 求其體積. (哈佛大學)

8. 平行六面體之三稜為  $AB, AC, AD$ , 試證明  $BCD$  平面分此平行六面體為兩部, 此兩部體積之比為 5:1.

又通過此三稜之中點之一平面, 分此體為兩分, 其兩分體積之比如何? (哈佛大學)

### 平截角錐之體積

305. 以  $b_1$  與  $b_2$  表示平截角錐上底與下底之面積如第一百九十一圖.

由頂至兩底之距以  $h_1$  與  $h_2$  表示之,

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2^2}{h_1^2} \quad (\S 260)$$

以  $h$  表示平截角錐體之高  $O_1O_2$ , 則

$$h_1 = h_2 - h.$$

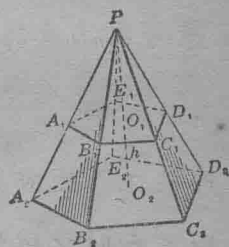
$$\therefore \frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2^2}{(h_2 - h)^2}.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1}} = \frac{h_2}{h_2 - h}.$$

$$\therefore h_2 \sqrt{b_2} - h \sqrt{b_2} = h_2 \sqrt{b_1}.$$

$$\therefore h_2 \sqrt{b_2} - h_2 \sqrt{b_1} = h \sqrt{b_2}.$$

$$\therefore h_2 = \frac{h \sqrt{b_2}}{\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}}.$$



第一百九十一圖

以  $v$  表示平截角錐之體積，則

$$A_2 D_1 = (P - A_2 B_2 C_2 D_2 E_2) - (P - A_1 B_1 C_1 D_1 E_1),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } v &= \frac{1}{3} b_2 h_2 - \frac{1}{3} b_1 h_1 \\ &= \frac{1}{3} b_2 h_2 - \frac{1}{3} b_1 (h_2 - h) \\ &= \frac{1}{3} b_2 h_2 - \frac{1}{3} b_1 h_2 + \frac{1}{3} b_1 h \\ &= \frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} h_2 (b_2 - b_1) \\ &= \frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} \frac{h \sqrt{b_2} (b_2 - b_1)}{\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}} \\ &= \frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} \frac{h \sqrt{b_2} (\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}) (\sqrt{b_2} + \sqrt{b_1})}{\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}} \\ &= \frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} h \sqrt{b_2} (\sqrt{b_2} + \sqrt{b_1}), \\ &= \frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} h (\sqrt{b_2 b_2} + \sqrt{b_1} \sqrt{b_2}) \\ \therefore v &= \frac{1}{3} h (b_1 + b_2 + \sqrt{b_1 b_2}) \end{aligned}$$

### 習 題

門柱之石帽成正四角錐形，其高為 15 吋，底每邊 4 吋，設於距底 5 吋之處作一平行於底之截平面，問截去之尖頂之體積為何？（教育部）

### 圓錐之體積

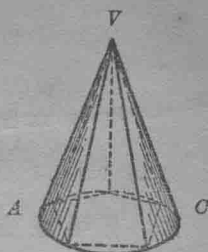
306. 定理：圓錐之體積，等於其底面積乘高之三分之一，即  $= \frac{1}{3} b \cdot h$ .



證(反證法):

1. 設  $v < \frac{1}{3}bh$ ,  
又  $v = \frac{1}{3}Bh$ ,  
而  $B < b$ .

作一角錐內接於已知圓錐如第一百九十二圖。



第一百九十二圖

令角錐之底  $B' > B$ .

於是  $\frac{1}{3}B'h > \frac{1}{3}Bh$ ; 即  $\frac{1}{3}B'h > v$ .

即內接角錐之體積,大於圓錐之體積。

然此為不合理,  $V$  不小於  $\frac{1}{3}b \cdot h$ .

2. 同樣可證  $v$  不大於  $\frac{1}{3}bh$ .
3. 故  $v = \frac{1}{3}b \cdot h$ .

### 習 題

一直角三角形,依其一腰為軸而旋轉,所生之體積,等於此三角形之面積乘其中線之交點旋轉時所畫之圓周。

### 截圓錐之體積

307. 求平截圓錐之體積之公式,與求平截角錐之體積之公式同,故其結果亦為

$$v = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2 + \sqrt{b_1 b_2})$$

308. 求平截旋轉圓錐之體積,

命  $b_1 = \pi r_1^2$ , 又  $b_2 = \pi r_2^2$ ,

則  $\sqrt{b_1 b_2} = \sqrt{\pi r_1^2 \pi r_2^2} = \pi r_1 r_2$ .

代入 § 307 公式得

$$v = \frac{1}{2}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

## 習 題

1. 有平截圓錐體高 3 呎，兩底皆為正六角形，上底之一邊為 8 吋，下底之一邊為 4 吋，求其體積。

2. 有平截旋轉圓錐體高 12 吋，兩底之半徑為 4 吋與 5 吋，求其體積。

3. 穀若干石，堆成一圓錐形，其高為 4 呎，底半徑為 5 呎，若以底每邊 4 呎之正方形之倉儲之，問倉須高若干呎？

4. 用豆堆成一圓錐形，令高 4 呎，其底半徑 6.5 呎，問需豆若干蒲式耳。(Bushel)

(1 蒲式耳含有 2,150 立方吋)。

5. 底為 15 平方吋，高為 12 吋之圓錐，求其體積。

6. 一平截圓錐之高為 6 吋，其兩底之半徑為 8 吋與 4 吋，求其體積。

7. 掘一容水 5,280 立方吋之池，上口之半徑 18 吋，下底之半徑 10 吋，求其深。 $(\pi = \frac{22}{7})$  (耶魯大學)

8. 底面積為 324 平方吋，高為 6 吋之角錐，以平行於底之平面於距底 4 吋處截之，問截下之錐為若干立方吋？

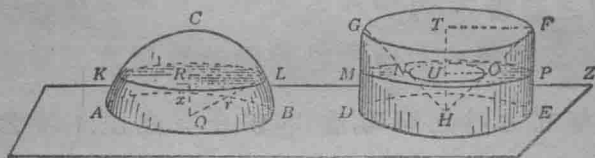
9. 一穀倉(見第一百九十三圖)高 10 呎，直徑 9 呎，頂高 3 呎，求其容積。



球之體積

309. 定理：半徑為  $r$  之球，其體積為  $\frac{4}{3}\pi r^3$ 。

設  $ACB$  (第一百九十四圖) 為半球，而  $DF$  為圓柱，其底  $DE$  等於圓  $AB$ ，其高等於球半徑  $r$ 。



第一百九十四圖

假定於圓柱割出一圓錐  $H-GF$ ，而所餘之立體為  $GDEFHG$ 。

作一平面，距平面  $Z$  為  $x$ ，且截半球  $ACB$  於  $KL$ ，截圓柱  $GDEFH$  於  $MNOP$ 。

說明  $RL = \sqrt{r^2 - x^2}$ 。

說明  $\frac{UO}{TF} = \frac{HU}{HT}$ ，或  $\frac{UO}{r} = \frac{x}{r}$ ，

$$\therefore UO = x.$$

說明  $KL$  之面積  $= \pi(r^2 - x^2)$ 。

說明圓環  $MNOP$  之面積。

$$= \pi r^2 - \pi x^2,$$

$$= \pi(r^2 - x^2).$$

∴ 半球  $ACB = GDEFHG$  (§ 302).

因  $GDEFHG = (DF) - (H - GF)$

$$= \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \pi r^3 \cdot r$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^3,$$

所以半球  $ACB = \frac{2}{3} \pi r^3$ .

故球之面積  $v = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

### 習 題

1. 每立方吋之鐵磚,重 .26 磅,今有直徑 4 吋之鑄鐵球,問重若干?
2. 球之直徑為 4 吋,求其體積.
3. 球壳厚  $\frac{1}{4}$  吋,其外直徑為 4 吋,求球壳之體積.
4. 球面之面積為 6 平方吋,求其體積.
5. 以長 12 吋,寬 8 吋,厚 4 吋之金屬長方條鑄成一球,問此球之半徑長若干?
6. 證明兩球體積之比,各其兩半徑之立方比.
7. 認定太陽與地球之半徑為 4,000 哩及 860,000 哩,試比較其體積.
8. 保護鎗身之外壳為一端有半球之圓柱形,外壳之總長四倍於其直徑,試比較圓柱部分半球部分之面與體積. (雪費爾大學)
9. 對角線為  $6\sqrt{3}$  之立方體,內切一球,求此球之體積與面積. (耶魯大學)

10. 一立方體內切一球,求球半徑與立方體之稜之比.
11. 問球之體積爲其內接正方體幾分之幾.(哈佛大學)
12. 正八面體之一稜爲  $a$ ,求其內切球之體積.(哈佛大學)
13. 半徑爲  $a$  之半圓,內接一銳角爲  $30^\circ$  之直角三角形,而直角三角形之斜邊即半圓之直徑,以半圓之直徑爲軸回轉一周,求三角形所生體積與半圓所生體積之比.(耶魯大學)
14. 有一圓錐形之玻璃杯滿裝以水,其頂角爲  $60^\circ$  其底口之直徑爲 2 吋,若以其能容之最大球嵌入其中,問尚餘水若干. (耶魯大學)
15. 同底上曲面相等之正圓錐與半球,其體積之比爲何? (哈佛大學)

### 分球體之體積

310. 分球體。兩平行平面所截得球體之一部曰分球體,(第一百九十五圖)兩平行平面之距,曰分球體之高.兩平行平面所作之截面,曰分球體之底.



雙底分球體

第一百九十五圖



單底分球體

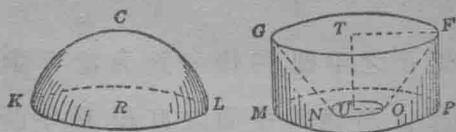
第一百九十六圖

若兩平行平面中有一平面爲球之切面,則此分球體僅有一底,故名單底分球體.(第一百九十六圖)

311. 定理：單底分球體之體積爲

$$V = \frac{1}{3}h^2\pi(3r-h).$$

$r$  爲球半徑,  $h$  爲分球體之高.



第一百九十七圖

證：由 § 302, § 309, 分球體  $KCL$  (第一百九十七圖) 之體積等於  $MPFONG$ .

即  $KCL$  等於圓柱  $MF$  與平截圓錐  $GNOF$  之差.

平截圓錐之底半徑爲  $TF=r$  及  $UO=x=r-h$ .

$$\therefore MF = \pi r^2 h,$$

$$\text{又 } GNOF = \frac{1}{3}\pi h [r^2 + (r-h)^2 + r(r-h)] \quad (\S 308)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h (3r^2 - 3rh + h^2).$$

$$\therefore KCL = MF - GNOF = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h (3r^2 - 3rh + h^2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h (3r^2 - 3r^2 + 3rh - h^2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h (3rh - h^2).$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h).$$

312. 定理：雙底分球體之體積爲

$$V = \frac{h}{2} (\pi r_1^2 + \pi r_2^2) + \frac{\pi h^3}{6}.$$

證：雙底分球體之體積, 等於兩個單底分球體體積之差.

以  $h$  表示雙底分球體之高,  $h_1$  及  $h_2$  表示兩個單底分球體之高。

於是  $h = h_1 - h_2$ 。

$$\begin{aligned} \therefore V &= \frac{1}{3}\pi h_1^2(3r - h_1) - \frac{1}{3}\pi h_2^2(3r - h_2) \\ &= \pi r h_1^2 - \frac{1}{3}\pi h_1^3 - \pi r h_2^2 + \frac{1}{3}\pi h_2^3 \\ &= \pi r (h_1^2 - h_2^2) - \frac{1}{3}\pi (h_1^3 - h_2^3) \\ &= \pi r (h_1 - h_2)(h_1 + h_2) - \frac{1}{3}\pi (h_1 - h_2)(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \\ &= \pi (h_1 - h_2) \left[ r(h_1 + h_2) - \frac{1}{3}(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \right] \\ &= \pi h \left[ r h_1 + r h_2 - \frac{1}{3}(h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2 + 3h_1 h_2) \right] \\ &= \pi h \left[ r h_1 + r h_2 - \frac{1}{3}(h^2 + 3h_1 h_2) \right] \\ &= \pi h \left( r h_1 + r h_2 - \frac{h^2}{3} - h_1 h_2 \right). \end{aligned}$$

說明  $\frac{h_2}{r_2} = \frac{r_2}{2r - h_2}$  及  $\frac{h_1}{r_1} = \frac{r_1}{2r - h_1}$ 。

$$\therefore 2r h_2 - h_2^2 = r_2^2,$$

$$\text{且 } 2r h_1 - h_1^2 = r_1^2.$$

---

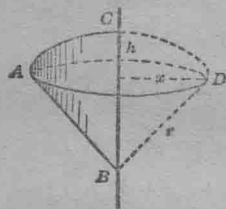
相加得  $2r h_1 + 2r h_2 - (h_1^2 + h_2^2) = r_1^2 + r_2^2$ 。

$$\therefore r h_1 + r h_2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{2}.$$

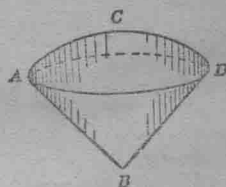
$$\begin{aligned} \therefore V &= \pi h \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{2} - \frac{h^2}{3} - h_1 h_2 \right) \\ &= \pi h \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{h^2 + 2h_1 h_2}{2} - \frac{h^2}{3} - \frac{2h_1 h_2}{2} \right) \\ &= \frac{\pi h}{2} \left( r_1^2 + r_2^2 + h^2 - \frac{2h^2}{3} \right). \\ \therefore V &= \frac{h}{2} (\pi r_1^2 + \pi r_2^2) + \frac{\pi h^3}{6}. \end{aligned}$$

313. 球面錐。圓之一扇形，依其一半徑為軸而旋轉所生之體積曰球面錐。

扇形  $ABC$  (第一百九十八圖) 依  $BC$  為軸而旋轉，則生成一球面錐如第一百九十九圖。



第一百九十八圖



第一百九十九圖

314. 定理：球面錐之體積為

$$v = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

證：

$$ABDC = ABD + ACD$$

$$= \frac{1}{2}\pi x^2 (r-h) + \frac{1}{2}\pi h^2 (3r-h),$$

$$= \frac{1}{2}\pi [r^2 - (r-h)^2] (r-h) + \frac{1}{2}\pi h^2 (3r-h),$$

$$= \frac{1}{2}\pi (2rh - h^2) (r-h) + \frac{1}{2}\pi h^2 (3r-h),$$

$$= \frac{1}{2}\pi h (2r^2 - hr - 2rh + h^2 + 3rh - h^2),$$

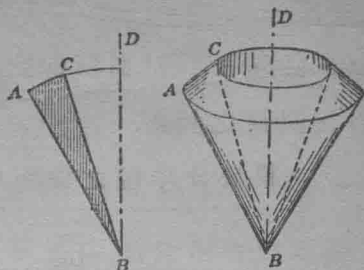
$$= \frac{1}{2}\pi h \cdot 2r^2.$$

$$\therefore v = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

315. 中空球面錐。圓之一扇形，於圓之直徑為軸而旋轉所生之體積，曰中空球面錐。



如扇形  $ABC$  (第二百圖) 依  $BD$  為軸而旋轉則生成中空球面錐如第二百零一圖。



第二百零圖 第二百零一圖

316. 定理: 中空球面錐之體積 為

$$v = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

證: 中空球面錐為兩個球面錐之差,

以  $v_1$  與  $v_2$  表兩個球錐之體積,

則 
$$v_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h_1,$$

$$v_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h_2,$$

---


$$\therefore v_1 - v_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 (h_1 - h_2),$$

或 
$$v = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

習題

1. 距球心為球半徑三分之一之平面, 分球體為兩分, 求此兩分之比. (哈佛大學)

2. 一球體面積之平方呎數等於其體積之立方呎數, 求此球之半徑.

又於半徑之中點, 作半徑之垂直平面, 求此平面割去之球面部分面積.

†3. 球之直徑為 6 吋, 今欲於球上穿一孔使挖出之體積為球體積之半, 求此孔之大.

挖出之部分為一圓柱  $C$ , 及兩分球體  $S$ .

說明 
$$2S = \frac{2\pi r^3}{3} (2 + \cos x - 2 \cos^2 x - \cos^3 x)$$

及 
$$C = 2\pi r^3 (\cos x - \cos^3 x).$$

14. 一球體之直徑為10吋,若過球體穿一圓柱形之孔,令其直徑長5吋,問所餘之立體體積為何?設想球體之中心在圓柱之軸內。

5. 單底分球體之曲面為  $25\pi$ , 其高為3, 求其體積。

## 提 要

317. 本章所授之名詞如下:

體積之單位, 體積。

內接角柱, 角錐, 平截角錐。

外切角柱, 角錐, 平截角錐。

切平面。

分球體, 球面錐, 中空球面錐。

318. 本章所授之重要定理如下:

1. 通過一正平行六面體兩相對稜之平面, 分此平行六面體為兩個等積之正三角柱。

2. 一斜角柱之體積, 與以其正截面為底, 以其側稜為高之正角柱相等。

3. 通過任一平行六面體兩相對稜之平面, 分此平行六面體為兩個等積之三角柱。

4. 等底等高之角柱為等積。

5. 兩個相似旋轉圓柱體積之比, 如其相當高之立方比, 或為其底半徑之立方比。

6. 若等高等底之兩角錐，被與底平行且距頂等遠之平面所截，則其兩截面之面積相等。
7. 等底等高之兩個三角錐為等積。
8. 介於兩平行平面間之兩立體，若其被已知平面之平行平面所作之各對截面之面積相等，則此兩立體為等積。

319. 本章所授重要之公式如下：

矩形面體..... $v = a \times b \times c$

$v = b \times h$  ( $b$  表示底)

立方體..... $v = c^3$

正三角柱..... $v = b \times h$

正六面體..... $v = b \times h$

三角柱..... $v = b \times h$

角柱..... $v = b \times h$

圓柱..... $v = b \times h$

旋轉圓柱..... $v = \pi r^2 h$

角錐..... $v = \frac{1}{3} b \times h$

平截角錐..... $v = \frac{1}{3} h (b_1 + b_2 + \sqrt{b_1 b_2})$

圓錐..... $v = \frac{1}{3} h \times b.$

平截旋轉圓錐..... $v = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

球體..... $v = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$\text{單底分球體} \dots\dots\dots v = \frac{1}{2}\pi h^2(3r-h)$$

$$\text{雙底分球體} \dots\dots\dots v = \frac{h}{2}(\pi r_1^2 + \pi r_2^2) + \frac{\pi h^3}{6}$$

$$\text{球面錐} \dots\dots\dots v = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

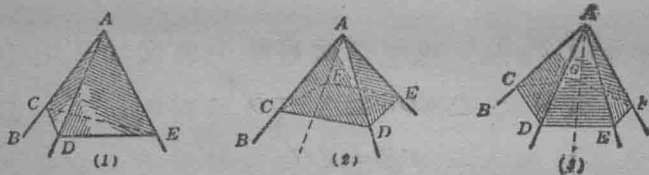
$$\text{中空球面錐} \dots\dots\dots v = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

## 第十四章

## 多面角 四面體 球面多邊形

## 多面角

320. 多面角. 設一直線  $AB$ , 固定  $A$  之一端, 且常觸不在同平面上之凸多角形  $CDEFG$  而旋動, 則成一多面角如第二百零二圖.



第二百零二圖

定點  $A$  爲多面角之頂點.

周圍之平面如  $CAD$ ,  $DAE$ ……等, 爲多面角之面面之交線  $AC, AD$ , ……等爲多面角之稜. 又  $\angle CAD, \angle DAE$ , ……等爲多面角之面角.

321. 三面角. 有三面之多面角, 曰三面角 (見第二百零二圖之(1)).

試於本教室內, 指出數個三面角.

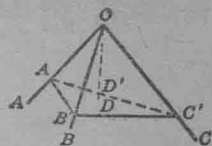
322. 定理：三面角中，任兩個面角之和，大於第三個面角。

已知三面角  $O-ABC$  (第二百零三圖)。

求證  $\angle AOB + \angle BOC > \angle AOC$ 。

證：此定理對於三個面角相等者，

容易證明。



第二百零三圖

假定三個面角不相等而  $\angle AOC$  爲一最大之面角。

則於平面  $AOC$  內作  $OD$  使  $\angle AOD = \angle AOB$ 。

截  $OD' = OB'$ 。

過  $B'$  與  $D'$  作一平面與諸平面交於  $A'B', B'C', C'A'$ 。

說明  $\triangle A'OB' \cong \triangle A'OD'$

$$\therefore A'B' = A'D'.$$

說明  $A'B' + B'C' > A'C'$ 。

相減，  $B'C' > D'C'$ 。

$$\therefore \angle B'OC' > \angle D'OC'.$$

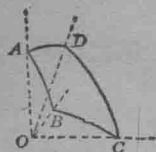
$$\therefore \angle A'OB' + \angle B'OC' > \angle A'OD' + \angle D'OC'.$$

即  $\angle AOB + \angle BOC > \angle AOC$ 。

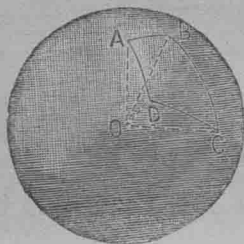
### 習 題

1. 說明三面角之任兩面角之差小於第三面角。
2. 說明多面角之任一面角小於其他諸面角之和。
3. 說明平分三面角之三個平面交於一直線。

323. 球面多邊形。設多面角  $O-ABCD$  (第二百零四圖)之  $O$  置於球心,則其諸面與球面之交線爲球之大圓弧  $AB, BC, CD, DA$ , 而球面形  $ABCD$  名曰球面多邊形。



第二百零四圖



第二百零五圖

故球面多邊形者,即置多面角之頂於球心時,其多面角之諸面在球面上所作之截面也。

球心多面角之面數,對應於球面多邊形之邊數。

圍成球面形之弧  $AB, BC, \dots$  等,各稱爲球面多邊形之邊。

邊之交點稱爲球面多邊形之頂。

有三邊之球面多邊形,曰球面三角形,\*如第二百零五圖。

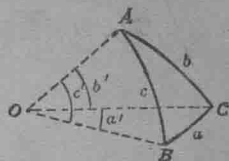
\* 球面三角形之性質在天文學,航海學,地理學常用以解問題發明球面幾何學之最早者,爲天文學家,下述事實,乃天文學家應用球面幾何極有興趣之事。

1. 決定觀察者在地面上之位置,即求其經度與緯度。
2. 已知兩地之經度與緯度求兩地之距離及其關係位置。
3. 決定一星之位置。
4. 決定地面上兩地之時差。
5. 決定航海之路程。

## 習題

1. 球面多邊形之邊，常以度數測之。

說明球面多邊形之邊之度數，  
同於頂在球心之對應多面角  
之面角度數。 (第二百零六圖)



第二百零六圖

2. 一球面三角形之兩邊為  $88^\circ$  與  $70^\circ$ ，求其第三邊之最大限度。

由習題 2，可見球面多角形之某幾種性質，可由多面角推知之。

3. 說明球面三角形任兩邊之和大於第三邊。 (第二百零六圖)

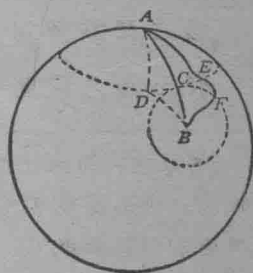
4. 球面上兩點間之最短線，為連兩點之大圓之劣弧。 求證。

證：1. 設  $A$ ，與  $B$  為兩已知點， $\widehat{ACB}$  為連兩點之大圓之劣弧。(第二百零七圖)

設  $C$  為  $\widehat{AB}$  上之任一點，以  $A$  與  $B$  為心， $AC$ ， $BC$  為半徑，各於球面作圓，通過  $C$  點。命  $D$  為  $A$  圓周上任一點，過  $D$  作大圓  $\widehat{AD}$ ， $\widehat{DB}$ ，

則  $\widehat{AD} + \widehat{DB} > \widehat{AB}$ . (§ 323, 習題 3)

但  $\widehat{AD} = \widehat{AC}$ .



第二百零七圖

$\therefore \widehat{DB} > \widehat{CB}$ . 故知  $D$  在  $B$  圓之外，

故  $A$  與  $B$  兩圓相切於  $C$ 。



2. 設  $AEFB$  為球面上連結  $A$  與  $B$  而不過  $C$  之任一線，則  $AEFB$  遇  $A$  與  $B$  兩圓於兩個不同之點  $E$  及  $F$ 。何故？

然無論  $AE$  之形狀若何，從  $A$  至  $C$  必可作一線與  $AE$  相等，又無論  $BF$  之形狀若何，從  $B$  至  $C$  必可作一線與  $BF$  相等。何故？

故從  $A$  至  $B$  且經過  $C$  必可作一線等於  $AE+FB$ 。

因  $AE+FB < AE+EF+FB$ ，所以從  $A$  至  $B$  且經過  $C$  必可作一線，小於  $AEFB$ 。

故從  $A$  至  $B$  之最短線，必經過  $C$ 。

因  $C$  為  $\widehat{AB}$  上之任一點，故從  $A$  至  $B$  之最短線通過  $\widehat{AB}$  上之任一點。

即  $\widehat{AB}$  為從  $A$  至  $B$  之最短線。

324. 定理：凡凸多面角，諸面角之和小於四直角。

已知凸多面角  $O-ABCDE$ 。(第二百零八圖)

求證  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \dots < 4$  直角。

證：命  $ABCDE$  為截多面角諸稜之一

平面對於多面角所作之截面。

從多角形  $ABCDE$  內任一點  $O'$  至

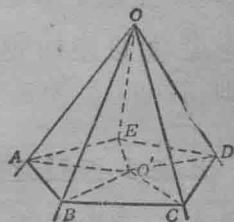
諸頂作直線  $OA, OB, OC, \dots$  等。

於三面角  $B-AOC$  內，

$\angle ABO + \angle OBC > \angle ABC$  (§ 322)。

於三面角  $C-BOD$  內，

$\angle BCO + \angle OCD > \angle BCD$  等。



第二百零八圖

相加,

$$\angle ABO + \angle OBC + \angle BCO + \angle OCD + \dots > \angle ABC + \angle BCD + \dots$$

即以  $O$  爲頂之諸三角形各底角之和,大於以  $O'$  爲頂之諸三角形各底角之和。

但以  $O$  爲頂之諸三角形各角之和,等於以  $O'$  爲頂之諸三角形各角之和。

故由等量減不等量,可知在  $O$  點之諸角之和,小於在  $O'$  點之諸角之和,即

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \dots < \angle AO'B + \angle BO'C + \angle CO'D + \dots$$

$$\text{因 } \angle AO'B + \angle BO'C + \angle CO'D + \dots = 4 \text{ 直角,}$$

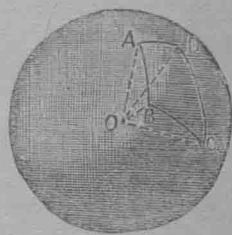
$$\therefore \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \dots < 4 \text{ 直角.}$$

### 習 題

證明一球面凸多邊形各邊之和小於  $360^\circ$ 。(見第二百零九圖)

### 325. 正多面體之種類.

於 § 245, 已見五個正多面體,今乃依 § 324 之定理,以證明正凸多面體不能多於五種。



第二百零九圖

凡正多面體之諸面,皆爲正多邊形如等邊三角形,正四角形,正五角形等,而任一正多面體內一多面角之諸面角和,必小於  $360^\circ$ 。何故?

說明多面角僅能用三個、四個或五個等邊三角形，相合而成，不能有六個或多於六個等邊三角形相合於一頂也。

正四面體，乃三個等邊三角形相合於一頂而成之多面體。

正八面體，乃四個等邊三角形相合於一頂而成之多面體。

正二十面體，乃五個等邊三角形相合於一頂而成之多面體。

說明三個正方形能組成一多面角，四個或多於四個則不能。故多面體不能以四個或多於四個正方形相合於一頂而成。

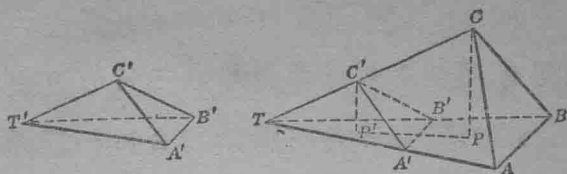
立方體之一頂為三個正方形所組成。

說明三個正五邊形能組成一多面角，四個或多於四個則不能。故多面體之各面成正五邊形者，惟十二面體一種。

說明正多面體不能有六個或多於六個正多邊形相合於一頂而成之理。

## 四 面 體

326. 定理：若兩四面體有一個三面角彼此相等，則其體積之比，等於此三面角三稜連乘積之比。



第 二 百 一 十 圖

已知四面體  $T-ABC$  與  $T'-A'B'C'$  如第二百一十圖，  
其三面角  $T$  等於三面角  $T'$ ，又  $V$  與  $V'$  各表示其體積。

求證  $\frac{V}{V'} = \frac{TA \times TB \times TC}{T'A' \times T'B' \times T'C'}$ 。

證：置  $T'-A'B'C'$  於  $T-ABC$  之上。

使三面角  $T'$  全合於三面角  $T$ 。

作  $C'P'$  及  $CP$  垂直於  $ATB$ 。

$$\text{則 } \frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} \times ABT \times CP}{\frac{1}{3} \times A'B'T \times C'P'} = \frac{ABT}{A'B'T} \times \frac{CP}{C'P'}$$

因  $\triangle ABT$ ,  $\triangle A'B'T$  有一角相等，

$$\therefore \frac{ABT}{A'B'T} = \frac{TA \times TB}{T'A' \times T'B'}$$

說明  $\frac{CP}{C'P'} = \frac{TC}{T'C'}$ 。

由代入， $\frac{V}{V'} = \frac{TA \times TB}{T'A' \times T'B'} \times \frac{TC}{T'C'}$ ，

即  $\frac{V}{V'} = \frac{TA \times TB \times TC}{T'A' \times T'B' \times T'C'}$

327. 相似多面體。多面體有同數之相似面且在相似之位置，又其諸相當多面角彼此相等者，曰相似多面體。

328. 定理：兩個相似四面體體積之比，等於其相當稜之立方之比。

證：因  $\frac{V}{V'} = \frac{TA \times TB \times TC}{T'A' \times T'B' \times T'C'}$  (§ 326).

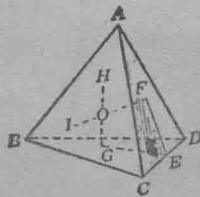
說明  $\frac{TA}{T'A'} = \frac{TB}{T'B'} = \frac{TC}{T'C'}$ .

$$\therefore \frac{V}{V'} = \frac{TA}{T'A'} \times \frac{TA}{T'A'} \times \frac{TA}{T'A'} = \frac{TA^3}{T'A'^3}.$$

### 習 題

甲角錐之體積為其相似乙角錐體積之  $\frac{1}{8}$ 。甲角錐之底面積為 36 平方呎，乙角錐之高為 9 呎，求兩角錐之體積。

329. 求作一球面，令過不在同一平面內之四點。



第二百一十一圖

已知四點  $A, B, C, D$  不在同一平面內如第二百一十一圖，求作過四點之一球面。

作法：作  $AB, AC, AD, BC, CD$  及  $DB$  而成四面體  $A-BCD$  平分  $CD$  於  $E$ 。

作平面  $FEG$  於  $E$ ，令垂直於  $CD$ ，且交平面  $CAD$  與  $CBD$  於直線  $EF$  與  $EG$ 。

說明  $EF$  通過  $\triangle CAD$  之外接圓心  $F$ ，又  $EG$  通過  $\triangle CBD$  之外接圓心  $G$ 。

作  $FI \perp$  平面  $CAD$ ，又  $GH \perp$  平面  $CBD$ 。

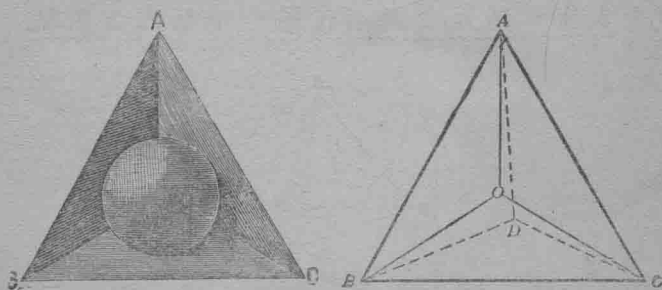
因  $CD$  垂直於平面  $FEG$ ，所以平面  $CAD$  與平面  $CBD$  皆垂直於平面  $FEG$ 。何故？

說明  $FI$  與  $GH$  皆在平面  $FEG$  內 (§ 551)。

說明  $FI$  與  $GH$  不平行。

命  $FI$  與  $GH$  之交點為  $O$ ，而說明  $O$  點距  $A, B, C, D$  等。故以  $O$  為心， $OA$  為半徑所作之球，通過  $A, B, C, D$  四點。

330. 求作一已知四面體之內切球。



第二百十二圖

已知四面體  $A-BCD$  如第二百十二圖。

求作此四面體之內切球。

作法：作平面  $BOD$  平分二面角  $BD$ 。

作平面  $BOC$  平分二面角  $BC$ 。

此兩平面，因有一點公用，故必相遇於一直線如  $BO$ 。

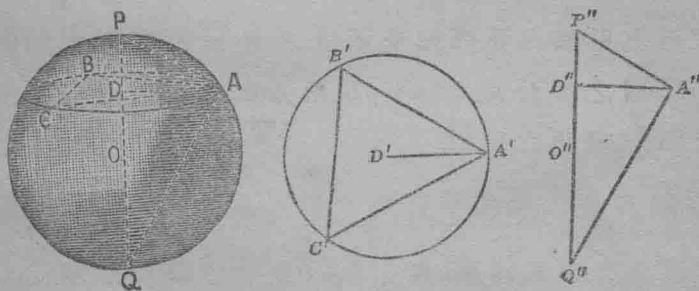
作平面  $COA$  平分二面角  $AC$ 。

則此平面遇  $BOC$  與  $BOD$  二平面之交線於一點如  $O$ 。

說明  $O$  為距四面體  $A-BCD$  四面等遠之點。

故以  $O$  為心，以由  $O$  至任一面之垂線為半徑所作之球，必與諸面相切。

1331. 求作一已知實質球之直徑。



第 二 百 十 三 圖

已知實質球  $O$  如第二百十三圖。

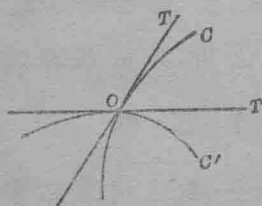
求作其直徑

作法：於球上任取一點  $P$  爲極，作圓  $ABC$ 。  
 命  $A, B, C$  爲圓周上之三點。  
 作三角形  $A'B'C'$  全等於三角形  $ABC$ 。  
 作  $\triangle A'B'C'$  之外接圓，而命其圓心爲  $D'$ 。  
 作  $D'A''$  等於半徑  $D'A'$ 。  
 過  $D''$  作直線  $P''Q'' \perp D'A''$ 。  
 從  $A''$ ，截  $A''P'' = AP$ 。  
 於  $A''$  作  $A''Q'' \perp A''P''$ 。  
 故  $P''Q''$  爲已知球之直徑，  
 此題之證明，學者可自求之。

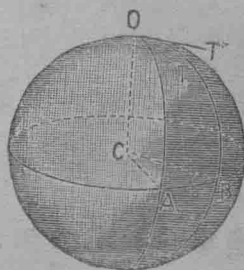
## 球 面 角

332. 球面角。第二百十四圖之兩相交曲線  $C$  與  $C'$  互成一角，此角卽爲過兩曲線交點之兩切線所成之角  $TOT'$ 。

球面上兩個大圓弧相交而成之角，如第二百十五圖之  $\angle TOT'$ ，謂之球面角。 $OA$  與  $OB$  兩弧曰球面角之兩邊，兩弧之交點  $O$ ，曰角之頂點。



第二百十四圖



第二百十五圖



333. 球面角之測度。如第二百十五圖，以  $O$  爲極，作以球面角之兩邊爲限之大圓弧  $AB$ 。

作半徑  $CO, CA, CB$ 。

說明  $OC$  垂直  $OT$  及  $CA$ 。

$$\therefore OT \parallel CA.$$

同樣  $OT' \parallel CB$ 。

$$\therefore \angle TOT' = \angle ACB.$$

但  $\angle ACB$  可以弧  $\widehat{AB}$  度之。

$\therefore \angle TOT'$ ，或球面角  $ABO$  亦可以  $\widehat{AB}$  度之。

以上證明次之定理：

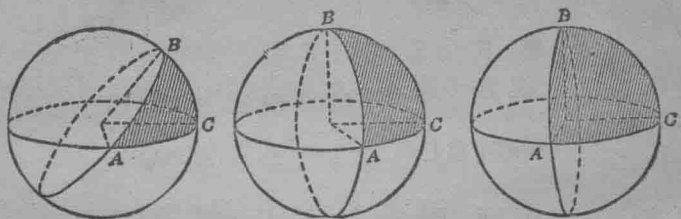
球面角可以其頂點爲極，於其兩邊（或其延長線）間作大圓弧度之

### 習 題

1. 球面角等於其兩邊之平面所成之二面角。試證之。
2. 球面三角形各邊所成之角，等於其對應三面角之二面角。試證之。

334. 直球面角。若含一角之兩邊之兩平面互相垂直，則此角爲直球面角。

335. 球面三角形之分類。 球面等腰三角形, 等邊三角形, 及不等邊三角形之意義, 與平面三角形同。

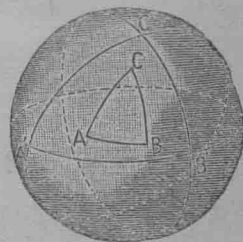


第二百十六圖

球面三角形之為直角三角形, 二直角三角形, 及三直角三角形, 依其有一直角, 二直角, 三直角而定。(見第二百十六圖)

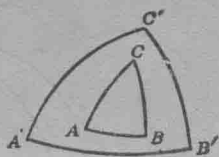
### 極球面三角形

336. 極三角形。 設  $\triangle ABC$  為已知球面三角形, (第二百十七圖) 以  $C, A, B$ , 為極, 作大圓弧  $A'B', B'C', C'A'$ . 任兩大圓弧若延長之, 必有兩個交點。設  $C'$  為  $A'C'$  與  $B'C'$  之交點, 但近於  $C$ ; 設  $B'$  為  $A'B'$  與  $C'B'$  之交點, 但近於  $B$ ; 設  $A'$  為  $B'A'$  與  $C'A'$  之交點, 但近於  $A$ ; 於是  $\triangle A'B'C'$  為  $\triangle ABC$  之極三角形。



第二百十七圖

337. 定理： 兩球面三角形，若此形為彼形之極三角形，則彼形亦為此形之極三角形。



第二百十八圖

已知  $\triangle ABC$  及其極三角形  $A'B'C'$  (見第二百十八圖)。

求證  $\triangle ABC$  為  $\triangle A'B'C'$  之極三角形。

證： 因  $A$  為  $B'C'$  之極，故  $A$  距  $B'$  為一象限。

因  $C$  為  $B'A'$  之極， $C$  距  $B'$  為一象限。

$\therefore B'$  為  $AC$  之極。

同樣可證  $A'$  為  $BC$  之極，又  $C'$  為  $AB$  之極。

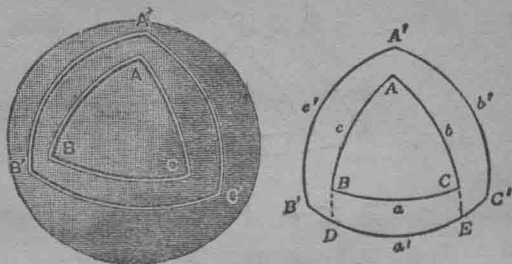
$\therefore \triangle ABC$  為  $\triangle A'B'C'$  之極三角形。

### 習 題

1. 試作一兩直角三角形之極三角形，且說明此極三角形亦為兩直角三角形。

2. 說明已知三直角三角形之極三角形與已知三角形相等。

338. 定理：在兩個極三角形內，一三角形之各角與他三角形之各對邊相補。



第二百十九圖

已知  $\triangle ABC$ ，與  $\triangle A'B'C'$  互為極三角形，又  $a, b, c$ ，及  $a', b', c'$ ，表示其各角所對之邊。(第二百十九圖)

求證  $A+a'=180^\circ$ ；  $B+b'=180^\circ$ ；  $C+c'=180^\circ$ ；

$A'+a=180^\circ$ ；  $B'+b=180^\circ$ ；  $C'+c=180^\circ$ 。

證：延長  $\angle A$  之邊令交  $B'C'$  於  $D$  及  $E$ 。

因  $\angle A$  可以弧  $DE$  度之 (§ 333)，故  $A = \widehat{DE}$ 。

因  $\widehat{B'E} = 90^\circ = \widehat{DC'}$ ， $\widehat{B'E} + \widehat{DC'} = 180^\circ$

$\widehat{B'E} + (\widehat{DE} + \widehat{EC'}) = 180^\circ$ ，何故？

$\widehat{DE} + (\widehat{B'E} + \widehat{EC'}) = 180^\circ$ ，何故？

$\widehat{DE} + \widehat{B'C'} = 180^\circ$ ，何故？

$\therefore A + a' = 180^\circ$ 。何故？

同樣  $B + b' = 180^\circ$ 。  $C + c' = 180^\circ$ ，等。

## 習 題

1. 三角形之三角為  $75^\circ, 85^\circ, 88^\circ$ , 求其極三角形之三邊.
2. 球面三角形之三角為  $88^\circ, 125^\circ, 96^\circ$ , 求其極三角形之三邊.

339. 定理: 球面三角形三內角之和, 小於六直角而大於二直角.

已知球面三角形  $ABC$  如第二百二十圖.

求證  $A+B+C < 540^\circ$ ;

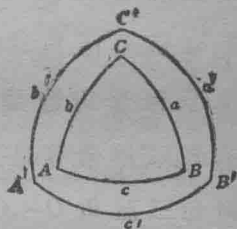
$A+B+C > 180^\circ$ .

證: 1. 設  $\triangle A'B'C'$  為  $\triangle ABC$  之極三角形.

則  $A+a' = 180^\circ$ ,

$B+b' = 180^\circ$ ,

$C+c' = 180^\circ$ ,



第二百二十圖

相加,  $A+B+C+a'+b'+c' = 540^\circ$ ,

$\therefore A+B+C = 540^\circ - (a'+b'+c')$

即  $A+B+C < 540^\circ$

2.  $A+B+C+a'+b'+c' = 540^\circ$

$360^\circ > a'+b'+c'$  (參看 § 324 之習題)

相加,  $A+B+C+a'+b'+c' + 360^\circ > 540^\circ + a'+b'+c'$

$\therefore A+B+C > 180^\circ$ .

340. 球面餘度。球面三角形三內角之和，與 $180^\circ$ 之差，曰球面餘度

### 習 題

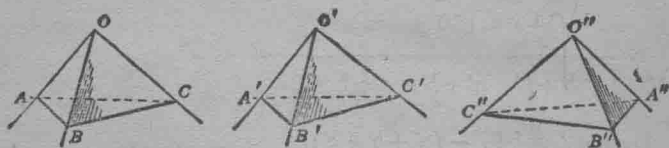
1. 說明 $\triangle ABC$ 之球面餘度為 $A^\circ + B^\circ + C^\circ - 180^\circ$ 。
2. 球面三角形之三角為 $100^\circ, 65^\circ, 190^\circ$ ，求其球面餘度。

### 對 稱 與 全 等

341. 全等多面角。若兩個多面角彼此密合，則此兩多面角為全等。

若兩個多面角為全等，則其對應面角與對應二面角皆互相等。但有對應面角與對應二面角互相等之兩個多面角，未必定為全等，是亦不可不知也。

例如三面角 $O-ABC$ 與 $O'-A'B'C'$ 與 $O''-A''B''C''$ （第二百二十一圖）其對應面角與二面角互相等。

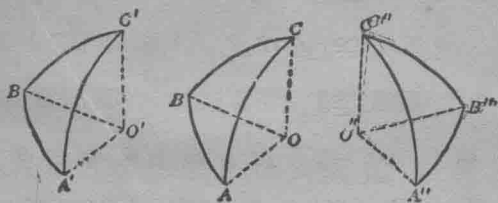


第 二 百 二 十 一 圖

$O-ABC$ 與 $O'-A'B'C'$ 為全等，而 $O-ABC$ 與 $O''-A''B''C''$ 不為全等。

342. 對稱多面角。兩多面角，若其面角二面角互相等，而排列之次序相反，則此兩多面角為對稱。

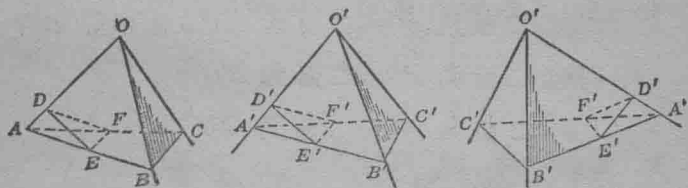
343. 全等與對稱球面多邊形。一球面多邊形之邊與角等於他一球面多邊形之相當邊與相當角，若其排列之次序同，則稱此兩形爲全等，若其排列之次序相反，則稱此兩形爲對稱。



第 二 百 二 十 二 圖

如第二百二十二圖  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，而  $\triangle ABC$  及  $\triangle A'B'C'$  皆與  $\triangle A''B''C''$  爲對稱。

344. 定理：兩三面角中，若有三個面角彼此相等，則其對應二面角亦相等。



第 二 百 二 十 三 圖

已知三面角  $O-ABC$  與  $O'-A'B'C'$  (第二百二十三圖) 有  $\angle AOB = \angle A'O'B'$ ;  $\angle BOC = \angle B'O'C'$ ;

$$\angle COA = \angle C'O'A'.$$

求證 二面角  $AO =$  二面角  $A'O'$ ;

二面角  $BO =$  二面角  $B'O'$ ;

二面角  $CO =$  二面角  $C'O'$ 。

證：取  $OA=OB=OC=O'A'=O'B'=O'C'$ 。

作  $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A'$ 。

證明  $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$ ；

$\triangle BOC \cong \triangle B'O'C'$ ；

$\triangle COA \cong \triangle C'O'A'$ 。

證明  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，

取  $OD=O'D'$ 。

於  $AOB$  及  $AOC$  面內，作  $DE$  及  $DF$  垂直於  $AO$ 。

同樣作  $D'E', D'F'$ ；

證明  $\triangle EDA \cong \triangle E'D'A'$ ；  $\triangle FDA \cong \triangle F'D'A'$ ；

證明  $\triangle EAF \cong \triangle E'A'F'$ ；

證明  $\triangle EDF \cong \triangle E'D'F'$ ；

$\therefore \angle EDF = \angle E'D'F'$ 。

$\therefore$  二面角  $AO =$  二面角  $A'O'$ 。(有相等之平面角)

同樣二面角  $BO =$  二面角  $B'O'$ 。

二面角  $CO =$  二面角  $C'O'$ 。

### 習 題

證明次之各題：

1. 兩三面角，若其各面角彼此互相等，且排列之次序相同，則此兩三面角為全等。

2. 兩三面角，若其各面角彼此互相等而排列之次序相反，則此兩三面角為對稱。



3. 兩三角形,在同球或等球上,若其三邊彼此相等,則

(1) 若其相等部分之排列次序相同,則兩形全等.

(2) 若其相等部分之排列次序相反,則兩形對稱.

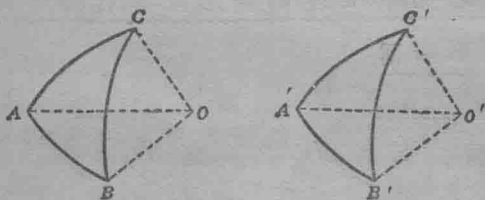
說明此兩三角形之三邊既彼此相等,其三角亦必彼此相等,故爲全等而對稱.

4. 同球或等球上之兩個球面三角形爲全等,設

(1) 此形之兩邊及其夾角,等於彼形之兩邊及其夾角而排列之次序相同.

(2) 此形之兩角及其夾邊,等於彼形之兩角及其夾邊而排列之次序相同.

說明  $\triangle ABC$  能與  $\triangle A'B'C'$  密合(第二百二十四圖)

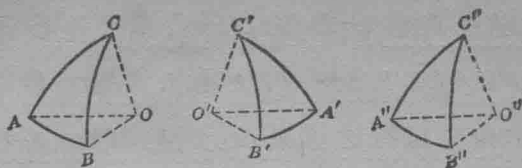


第 二 百 二 十 四 圖

5. 同球或等球上之兩個球面三角形爲對稱,設

(1) 此形之兩邊及其夾角,等於彼形之兩邊及其夾角而排列之次序相反.

(2) 此形之兩角及其夾邊,等於彼形之兩角及其夾邊而排列之次序相反.



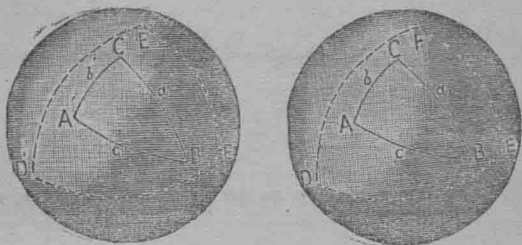
第 二 百 二 十 五 圖

設  $\triangle ABC$  及  $\triangle A'B'C'$  爲已知三角形。(第二百二十五圖)  
 作  $\triangle A''B''C''$  與  $\triangle A'B'C'$  對稱。  
 則  $\triangle A'B'C'$  與  $\triangle A''B''C''$  爲互等邊且互等角。  
 證明  $\triangle ABC \cong \triangle A''B''C''$ 。

$\therefore \triangle ABC$  對稱於  $\triangle A'B'C'$ 。

6. 試述三面角對應於 3 題 4 題 5 題之定理且證明之。

7. 在同球或等球上，兩個互等角三角形必互等邊。若相等部排列之次序相同，則兩形全等，若相等部排列之次序相反則兩形對稱。



第 二 百 二 十 六 圖

已知球面三角形  $ABC$  及  $A'B'C'$  (第二百二十六圖)

$$\angle A = \angle A' \quad \angle B = \angle B' \quad \angle C = \angle C'$$

求證  $a = a' \quad b = b' \quad c = c'$

且  $\triangle ABC$  與  $\triangle A'B'C'$  若不全等，則對稱。

證：作極三角形  $DEF$  及  $D'E'F'$ 。

說明  $\triangle DEF$  及  $\triangle D'E'F'$  爲互等邊。 (§ 338)

說明  $\triangle DEF$  及  $\triangle D'E'F'$  爲互等角。 (習題 3)

說明  $\triangle ABC$  及  $\triangle A'B'C'$  爲互等邊。 (§ 338)

$\therefore \triangle ABC$  及  $\triangle A'B'C'$  爲全等，否則對稱。 (§ 343)

345. 理定：等腰球面三角形，其對等腰之兩角必等。

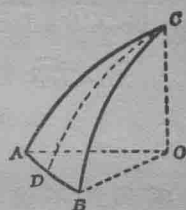
作平分  $AB$  之大圓弧  $CD$  如第二

百二十七圖。

則  $\triangle ADC$  與  $\triangle BDC$  爲互等邊，且

對稱。

$\therefore \angle A = \angle B$ 。



第二百二十七圖

習 題

1. 試述三面角對應於 § 345 之定理，且證明之。

2. 兩個對稱等腰三角形爲全等，試證之。

346. 定理：若球面三角形有兩角相等，則其對等角之兩邊相等。

證：作  $\triangle ABC$  之極三角形，如第

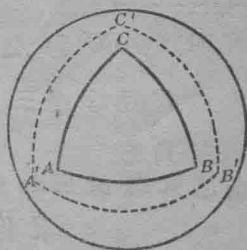
二百二十八圖。

因  $\angle A = \angle B$ ，

故  $\widehat{B'C'} = \widehat{A'C'}$  (§ 338)。

$\therefore \angle B' = \angle A'$  (§ 345)。

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}$  (§ 338)。



第二百二十八圖

347. 定理：若球面三角形有兩角不等，則對不等角之兩邊亦不等，其大邊對大角。

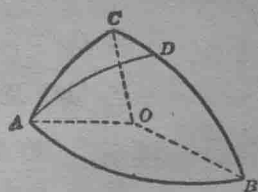
證：作大圓弧  $AD$ ，如第二百二十九圖。

使  $\angle DAB = \angle DBA$ 。

則  $\widehat{AC} < \widehat{CD} + \widehat{DA}$ ，

即  $\widehat{AC} < \widehat{CD} + \widehat{DB}$ 。

$\therefore \widehat{AC} < \widehat{CB}$ 。



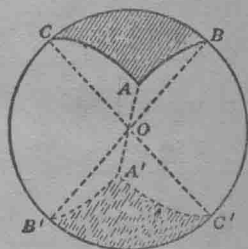
第二百二十九圖

348. 定理：若球面三角形有兩邊不等，則對不等邊之兩角亦不等，其大角對大邊。

用反證法證之。

349. 定理：從一已知球面三角形之各頂，作球之直徑，令交球面於他三點，則此三點為已知球面三角形之對稱球面三角形之三頂。

證明  $\triangle ABC$  與  $\triangle A'B'C'$  (第二百三十圖) 為互等邊三角形，故亦為互等角三角形。



第二百三十圖

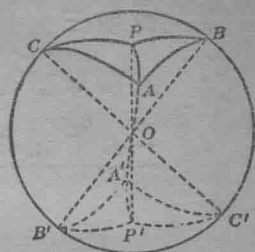
### 球面三角形之面積

350. 定理：兩對稱球面三角形之面積必等。

已知對稱球面三角形  $ABC$  及  $A'B'C'$  如第二百三十一圖。

求證  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ 。

證：配置兩三角形使  $A$  與  $A'$ ，  
 $B$  與  $B'$ ， $C$  與  $C'$  各在球直  
 徑之一端。命  $P$  為  $A, B, C$ ，  
 所決定之小圓之極，而  $P'$   
 為過  $P$  之直徑之他端。



第二百三十一圖

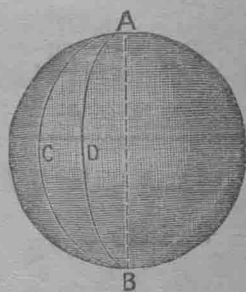
說明  $\triangle APB$  與  $\triangle A'P'B'$  為等腰為對稱且為全等。

同樣， $\triangle CPA \cong \triangle C'P'A'$

又  $\triangle BPC \cong \triangle B'P'C'$

相加， $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ 。

351. 月形。 第二百三十二圖  
 之兩個大半圓弧， $ACB$  與  $ADB$  合成  
 一月形。球面角  $CAD$  稱為月形角。球  
 面之一部分介於兩個大半圓弧之  
 間者稱為月形之表面，其面積，即月  
 形之面積。



第二百三十二圖

352. 球面度。 球面三角形有兩邊各等於一象限，且  
 其所夾之球面角為  $1^\circ$  者，其面積恆用為測球面多邊形面  
 積之單位，名曰球面度。

## 習 題

1. 說明三直角三角形,含有 90 球面度。
2. 說明球面含有 720 球面度。
3. 一月形之球面度數,爲其月形角度數之兩倍,即

$$L=2(A).$$

$A$  表示月形角之度數,  $L$  表示月形面積之球面度數。

4. 說明一個球面度之面積,以平面上之面積單位表示之爲  $\frac{\pi R^2}{90}$ 。

5. 說明月形之面積  $S$ , 以平面上之面積單位表示之,爲  $\frac{\pi R^2 A}{90}$ 。  $A$  爲月形之角度數,  $r$  爲球之半徑。

353. 定理: 球面三角形之面積,以球面度數表示之,其數等於此三角形之球面餘度。

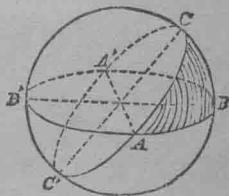
已知球面三角形  $ABC$  如第二百三十三圖。

求證此三角形之面積

$$S = (A + B + C - 180) \text{ 球面度.}$$

$A, B, C$ , 表示  $\triangle ABC$  各角之度數,

又  $S$  表示  $\triangle ABC$  之面積之球面度數。



第二百三十三圖

證： 引長  $\triangle ABC$  之各邊。

則  $\triangle ABC$  之諸角，爲月形  $C'ACBC'$ ,  $B'CBAB'$ ,  
 $A'BACA'$  之月形角。

月形  $C'ACBC' = \triangle ABC + \triangle ABC' = 2(C)$ 。

(§ 352, 習題 3)

月形  $B'CBAB' = \triangle ABC + \triangle CB'A = 2(B)$ 。

月形  $A'BACA' = \triangle ABC + \triangle CA'B = 2(A)$ 。

$$3 \ (\triangle ABC) + \triangle ABC' + \triangle CB'A + \triangle CA'B = 2(A+B+C)$$

$$\begin{aligned} \text{即 } (2 \triangle ABC) + \triangle ABC + \triangle ABC' + \triangle CB'A + \triangle CA'B \\ = 2(A+B+C) \end{aligned}$$

說明

$$\triangle CA'B = \triangle C'AB'$$

$$\begin{aligned} \therefore 2(\triangle ABC) + \triangle ABC + \triangle ABC' + \triangle CB'A + \triangle C'AB' \\ = 2(A+B+C) \end{aligned}$$

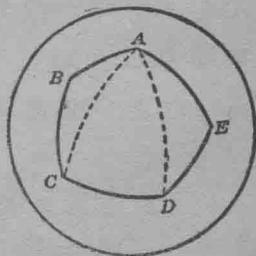
$$\therefore 2(\triangle ABC) + \text{半球面} = 2(A+B+C)$$

$$\therefore 2(\triangle ABC) + \frac{1}{2}(720) = 2(A+B+C)$$

$$\therefore \triangle ABC = A+B+C - \frac{1}{4}(720)$$

$$\text{即 } S = A+B+C - 180$$

354. 設  $ABCDE$  (第二百三十四圖) 爲有  $n$  邊之球面多邊形，作大圓弧如  $AC$  與  $AD$ ，分  $ABCDE$  爲  $(n-2)$  個球面三角形。



第二百三十四圖

以  $T_1, T_2, T_3, \dots$  等表示  $\triangle BAC, \triangle CAD, \triangle DAE, \dots$  等之面積。

以  $s_1, s_2, s_3, \dots$  等表示  $\triangle BAC, \triangle CBD, \triangle DAE, \dots$  等三內角之和。

$$\begin{aligned} \text{則} \quad T_1 &= s_1 - 180, \\ T_2 &= s_2 - 180, \\ T_3 &= s_3 - 180 \text{ 等.} \end{aligned}$$

$$\text{相加,} \quad P = [s_1 + s_2 + s_3 + \dots (n-2) 180]$$

$$\text{即} \quad P = s - (n-2) 180$$

$P$  表示球面多邊形之球面度,  $s$  表示球面多邊形諸內角之和。

此定理可述之如下:

球面多邊形之面積,以球面度數表示之,其數等於此多邊形之球面餘度。

### 習 題

1. 一球面三角形之角為  $90^\circ, 90^\circ, 79^\circ$ , 以球面度數表示其面積。
2. 球之半徑為 3 吋, 14 吋,  $a$  吋, 求其每一球面度之面積。
3. 一球面多邊形之角為  $70^\circ, 105^\circ, 145^\circ, 125^\circ, 150^\circ$ , 求其面積。
4. 一球面三角形之角為  $85^\circ, 120^\circ, 95^\circ$ , 球半徑為 6 吋, 求三角形之面積。



5. 一球面三角形之面積爲 100 平方吋,其三角爲  $100^\circ$ ,  $64^\circ$ ,  $200^\circ$  求球之半徑.

6. 證明球面三角形之面積,與其球面餘度成正比例. 於半徑爲 10 吋之球面上,作三個完全大圓弧而分此球面爲八個球面三角形,其中一個三角形之三角爲  $40^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $120^\circ$ ,問此八個三角形各爲若干平方吋. (哈佛大學)

7. 半徑爲 2 呎之球面上一三角形之面積爲 2 平方碼,求其極三角形之周.

## 提 要

355. 本章所授之名詞如下:

多面角,三面角.

極球面三角形.

球面多邊形.

球面餘度.

球面三角形.

全等形與對稱形.

相似多面體.

月形.

球面角.

球面度.

直角球面三角形.

二直角及三直角球面三角形.

356. 本章所證明之重要定理如下:

1. 三面角中任兩個面角之和,大於第三個面角
2. 球面三角形任兩邊之和,大於第三邊.
3. 球面上兩點間之最短線,爲連兩點之大圓之劣弧

4. 凡凸多面角諸面角之和小於四直角。
5. 一球面凸多邊形各邊之和小於  $360^\circ$ 。
6. 正多面體不能多於五種。
7. 若兩四面體有一個三面角彼此相等，則其體積之比等於此三面角三稜連乘積之比。
8. 兩個相似多面體之比，等於其相當稜立方之比。
9. 球面角可以其頂點爲極於其兩邊(或其延長線)間作大圓弧度之。
10. 球面角等於其兩邊之平面所成之二面角。
11. 兩球面三角形，若此形爲彼形之極三角形，則彼形亦爲此形之極三角形。
12. 在兩個極三角形內，一三角形之各角與他三角形之各對邊相補。
13. 球面三角形三內角之和，小於六直角而大於二直角。
14. 兩三面角中，若有三個面角彼此相等，則其對應二面角亦相等。
15. (1) 兩三面角，若此三面角之諸面角，等於彼三面角之諸面角；  
 (2) 若此三面角，有兩個面角及其所夾之二面角各等於彼三面角之相當部分；

(3) 若此三面角有兩個二面角及其所夾之面角各等於彼三面角之相當部分；

(4) 若此三面角之諸二面角各等於彼三面角之相當部分；

則此兩三面角全等，設其各部分排列之次序相同；或則此兩三面角爲對稱，設其各部分排列之次序相反。

16. 兩個球面三角形，若有下列之對應部分相等，則兩形爲全等或爲對稱。

(1) 三邊；      (2) 三角；      (3) 兩邊及夾角；

(4) 兩角及夾邊。

17. 在同球或等球上，兩個互等角三角形必互等邊，又其逆定理。

18. 等腰球面三角形之兩底角必等，又其逆定理。

19. 若球面三角形有兩角不等，則對不等角之兩邊亦不等，又其逆定理。

20. 從一已知球面三角形之各頂，作球之直徑，令交球面於他三點，則此三點爲已知球面三角形之對稱球面三角形之三頂。

21. 兩對稱球面三角形之面積必等。

357. 本章所授之重要求作題如下：

1. 求作一球面，令過不在同一平面內之四點。
2. 求作一已知四面體之內切球。
3. 求作一已知實質球之直徑。

358. 本章已證明之重要公式如下：

1. 月形之面積，

$$L = 2(A) \text{ 球面度.}$$

$A$  表示月形角之度數。

2. 球面三角形之面積，

$$T = (A + B + C - 180) \text{ 球面度.}$$

$A, B, C$  表示三角形三角之度數。

此公式又可記爲

$$T = E \text{ (球面餘度).}$$

3. 球面多邊形之面積，

$$P = \{s - (n - 2)180\} \text{ 球面度}$$

$s$  表示多邊形諸內角之度數和。

此公式又可記爲

$$P = E \text{ (球面餘度).}$$

## 第十五章

## 前兩編幾何學定理及假說提要

359. 因謀學者之便利,特將前兩編所授之幾何學定理及假說,總揭於下,俾學者對於從前所習,得有系統的記憶,並免翻閱他書之煩,凡( )內之數字,表示第一編之節目;〔 )內之數字,表示第二編之節目。

## 基本假說

360. 經過兩點,祇可有一直線。(20)
361. 直線如有兩點在面內,則全線必在面內。(204)
362. 兩點間最短之線爲直線。(22)
363. 兩直線祇可相交於一點。(25)
364. 一線段或一角,等於其分之和。(33)
365. 一線段或一角,大於其分之任一分。(34)
366. 相等數同加一數得數相等。(35)
367. 相等數加相等數得數相等。(36)
368. 相等數同減一數,或同減相等數,較數必等。(41)
369. 等數加不等數,得數不等,兩得數大小之序,以兩不等數而定。(42)
370. 不等數加同序之不等數,得數不等如前序。(43)

371. 等數減不等數,得數不等,其序與前不等數相反.  
(44)
372. 等數除等數,(除數 0 不在內)商數必等.(78)
373. 相等數同乘一數,或乘相等數,積數相等.(80)

### 角

374. 凡直角皆相等.(118)
375. 等圓心角,在同圓內或等圓內所割之弧必等,弦亦等.(124)
376. 同圓或等圓內,等弧等弦必爲等角所割.(125)
377. 凡圓心角,可以所割之弧量之.(126)
378. 若兩角之兩邊兩兩平行,則兩角相等,或互爲補角.(197)
379. 若兩接角之和,等於一平角,則兩外邊,必同在一直線內.(177)
380. 直線一旁,同以直線內一點爲頂點之諸接角,其和等於一平角,即 180 度.(179)
381. 繞一點全空間諸接角之和,等於一周角,即 360 度.  
(180)
382. 兩直線相交,其對頂角必等.(183)

### 三角形及多邊形之角

383. 三角形三內角之和,等於兩直角,即 180 度.(112)  
(198)

384. 於三角形各頂點,取一外角,其和必等於 360 度.  
(115)
385. 三角形之外角,等於兩內對角之和.(118)(199)
386. 若兩三角形中,有兩角彼此相等,則第三角亦必彼此相等,兩形互為等角三角形.[91]
387. 等腰三角形之兩底角相等.(280)
388. 等邊三角形,亦為等角三角形.(281)
389. 若三角形內有兩角相等,則此形為等腰三角形.  
(281)
390. 直三角形之兩銳角,互為餘角.(184)
391. 若直三角形之銳角為  $30^\circ$  及  $60^\circ$ ,則  $90^\circ$  角之對邊為  $30^\circ$  角對邊之兩倍.(185)
392.  $n$  邊形諸內角之和為  $(n-2)180^\circ$ ,或  $(n-2)$  平角.[88]
393. 設於多邊形之每角頂各作一外角,則諸外角之和必為  $360^\circ$ ,即 2 平角.[89]

## 垂 線

394. 一點至一直線之垂線,為此點距線之最短者.  
(285)
395. 於已知線內已知之一點,祇可作一垂線.(176)
396. 由一點至一線,祇可作一垂線.(296)

397. 直線之中點垂線內各點,與直線兩端之距必等.  
(281)
398. 若線外一點,距線之兩端等,則此點必在線之中點垂線內.(283)
399. 若已知直線上有兩點,各距兩已知點等,則已知直線必為兩已知點聯線之中點垂線.[83]

## 平 行 線

400. 平行線,任何點,相距皆等遠.(192)
401. 於線外一點,祇可作一直線與其線平行.(194)
402. 一線割兩線,若同位角等,則兩線平行.(195)
403. 若兩線皆為一線之垂線,則兩線平行.[110]
404. 若一線割兩線,令兩內錯角相等,則兩線平行.  
[112]
405. 兩直線為一直線所割,若割線同旁之兩內角互為補角,則兩直線平行.(195)
406. 若兩線各與一線平行,則兩線必互相平行.(195)
407. 若兩平行線為一直線所割,則其同位角必等,其內錯角亦等,割線同旁之兩內角,必互為補角.(196)
408. 設兩平行線中有一線,與一第三線垂直,則第二線亦與第三線垂 . [116]



409. 若一線平分三角形之一邊,又與第二邊平行,則此線平分第三邊。(159)

410. 若三(或三以上)平行線截一割線,令成相等之線段,則此諸平行線可截各割線,亦成相等之線段。(160)

411. 三角形任兩邊之中點聯線,與第三邊平行。(168)

### 相 合 三 角 形

412. 兩三角形,若此形之兩邊及其夾角,等於彼形之兩邊及其夾角,則兩形相合。(邊,角,邊) (274)

413. 兩三角形,若此形之兩角及中間之邊,等於彼形之兩角及中間之邊,則兩形相合。(角,邊,角) (275)

414. 兩三角形,若此形之三邊,各等於彼形之三相當邊,則兩形相合。(邊,邊,邊) (283)

415. 兩直三角形,若此形之弦與一邊,等於彼形之弦與一相當邊,則兩形相合。(285)

### 四 邊 形

416. 若四邊形爲平行四邊形,則

1. 對角線分此形作兩相合三角形。
2. 對邊相等。
3. 對角相等。

4. 兩隣角互作補角。
5. 兩對角線互相平分。〔118—122〕

417. 四邊形可作平行四邊形者，爲

1. 對邊兩兩平行。
2. 對邊兩兩相等。
3. 兩對邊平行而相等。
4. 對角兩兩相等。
5. 兩對角線互相平分。〔123—127〕

## 相 似 形

418. 三角形一邊之平行線，及餘兩邊所成之三角形，與原三角形相似。〔214〕

419. 兩三角形，若此形之兩角，與彼形之兩相當角兩兩相等，則兩形相似。〔217〕

420. 兩三角形，若此形兩邊之比例，等於彼形兩邊之比例，又此兩邊所夾之角，彼此相等，則兩形相似。〔218〕

421. 兩三角形，若其相當邊各成等比例，則兩形相似。〔219〕

422. 相似多邊形之周相比，等於任兩相應邊相比。〔219〕

423. 相似多邊形之各相應對角線，可分多邊形作同位之相似三角形。〔220〕

424. 直三角形由頂角至弦之垂線，分直三角形作兩部，彼此成相似形，並各與原形相似。(224)

### 三角形各邊之關係

425. 凡直三角形，勾方股方之和，等於弦方。(233)代數學證法，(462)幾何學證法。

426. 三角形中銳角對邊之平方，等於從他兩邊平方之和減去兩邊之一邊與在其上之又一邊正射影相乘積之兩倍。(240)

427. 三角形中鈍角對邊之平方，等於就他兩邊平方之和，再加兩邊之一邊與在其上之又一邊正射影相乘積之兩倍。(241)

428. 三角形兩邊上正方形之和，等於第三邊半邊上正方形之兩倍加第三邊中線上正方形之兩倍。(463)

### 等比例線段

429. 相似多邊形之周相比，等於任兩相應邊相比。(219)

430. 設圓內有兩弦相交，則此弦之兩段相乘，等於彼弦之兩段相乘。(314)

431. 若從圓外一點，作一切線與一割線，則切線為全割線與其圓外一段之等比例中項。(315)

432. 若從圓外一點作兩割線至凹弧，則此割線與其圓外一段相乘，等於彼割線與其圓外一段相乘。〔317〕

433. 直三角形，由直角之頂至弦之垂線，為弦之兩段之等比例中項。〔230〕

434. 直三角形直角兩旁之任一邊，為在弦上此邊之射影與全弦之等比例中項。〔232〕

435. 設於一圓內直徑上之任一點，作一垂線至圓周，則此線為直徑兩段之等比例中項。〔231〕

436. 若兩平行線割兩交割線，則一割線上所截之線段，與別割線上所截之相當段成等比例。〔163〕

437. 若多數平行線為兩割線所割，則第一割線上之諸線段與第二割線上之相當段成等比例。〔167〕

438. 若兩線割兩已知交線，令兩已知線之相當段成等比例，則兩線平行。〔168〕

439. 三角形一內角之平分線，內分對邊作線段，與隣邊成等比例。〔170〕

## 圓

440. 圓周內，圓周上，或圓周外之各點，依其距中心之近遠，必小於，等於，或大於半徑。〔274〕

441. 兩圓，若其半徑相等，全形必等。又凡等圓，其半徑必等。〔275〕

442. 圓之直徑,必分圓為兩相等部.[276]
443. 交切點之半徑,必與切線互為垂線.(308)
444. 一直線,在半徑之外端與半徑為垂線.此線必為圓之切線.(309)
445. 過不同在一直線上之三點,可作一圓.[284]
446. 同圓或等圓,其相等之中心角必截等弧.又凡等弧,必為相等之中心角所截.[281]
447. 同圓或等圓,其等弧必對等弦;又其逆定理為等弦必對弧弧.[283]
448. 設從圓外一點作兩切線至圓,則此兩切線相等.[315]
449. 下例五項,若以任何二項作假說,則其餘三項必合理.
1. 一線通過圓心.
  2. 一線垂於一弦.
  3. 一線平分一弦.
  4. 平分一劣弧.
  5. 平分一優弧.[284]
450. 同圓或等圓,其相等之弦,必距中心等.又逆定理,凡距中心等之弦,必等.[285]
451. 弧之夾於兩平行割線者,必等.又逆定理,若兩割線夾等弧,而不在圓內相交,則彼此平行.[286]

452. 設兩圓相交，則兩圓心之聯線，必平分兩圓之公弦。又此線與此弦互作垂線。〔287〕

453. 設兩圓相切，其中心與切點，同在一直線內。〔289〕

### 用弧量角法

454. 中心角可用截弧量之。〔297〕

455. 同圓或等圓之兩中心角，與其邊所截之弧有同比。〔297〕

456. 一內接角，可用其邊所截之弧之半量之。〔298〕

457. 切線與經過切點之弦所成之角，可用其截弧之半量之。〔300〕

458. 若兩弦相交於圓內，則所成任一角，皆以兩截弧之和之半量之。〔304〕

459. 若兩割線相遇於圓外，則所成之角，以兩截弧之較之半量之。〔305〕

460. 一切線遇一割線於圓外，所成之角，以兩截弧之較之半量之。〔306〕

461. 兩切線所成之角，以兩截弧之較之半量之。〔307〕

### 正多邊形與圓

462. 若分一圓作諸等弧，則對弧之諸弦成一正內接多邊形。〔435〕

463. 一正內接多邊形有  $n$  邊，設對各邊之弧之中點與多邊形之隣角頂相聯，則成一有  $2n$  邊之正內接多邊形。  
〔436〕

464. 若分一圓作諸等弧，則從各分點所作之切線，互成一正外切多邊形。〔437〕

465. 一圓內切於一正多邊形，若於其隣切點間諸弧之中點作圓之切線，則所成之正外切多邊形，其邊數為原形之兩倍。〔438〕

466. 圓內有一已知正多邊形，若從對各邊之弧之中點作切線，則所作之切線與各邊平行，且成一外切正多邊形。〔444〕

467. 於任一已知正多邊形外，可作一外接圓。〔445〕

468. 於任一已知正多邊形內，可作一內切圓。〔446〕

469. 一內接正  $2n$  邊形之周，大於同圓內之正  $n$  邊形之周。〔447〕

470. 一外切正  $2n$  邊形之周，小於同圓外之正  $n$  邊形之周。〔448〕

471. 圓周之長度，可用下列公式表示之，

$$C = \pi d, \text{ 或 } C = 2\pi r. \text{〔450〕}$$

### 不 等 式

472. 直徑大於圓之任一弦。〔339〕

473. 三角形之一外角,大於任一遠內角.[339]

474. 若三角形之兩邊不等,則相對之兩角亦不等,較大之角,與較長之邊相對.(281)

475. 若三角形內兩角不等,則相對之兩邊亦不等,較長之邊,與較大之角相對.(281)

476. 從一線之垂線內一點,作兩斜線至此線,若其射影不等,則兩斜線亦不等.[340]

477. 從一線之垂線內一點,有兩斜線至此線,設此兩斜線不等,則其射影亦不等.[341]

478. 若由三角形內一點,作兩線至一邊之兩端,則此兩線之和,小於他兩邊之和.[348]

479. 同圓或等圓,弦之不等者,與中心距離亦不等,其小者,與中心之距離遠,又逆定理爲弦之與中心距離不等者,必不等,距中心較遠者,較小.[349]

480. 設兩三角形有兩邊兩兩相等,然兩邊所夾之角,此形大於彼形,則對此角之第三邊亦此形大於彼形,又逆定理爲設兩三角形有兩邊兩兩相等,若其第三邊此形大於彼形,則第三邊所對之角,亦此形大於彼形.[350—351]

481. 同圓或等圓,對不等弦之弧不等,其大小之序,與弦同,又逆定理爲對不等弧之弦不等,其大小之序與弧同,

[352]



## 軌 跡 會 合 線

482. 設平面內有各點,距兩已知點等,則各點之軌跡,爲此兩點聯線之中點垂線.[407]

483. 設平面內有各點,在一角內,距角之兩邊恆等,則此各點之軌跡,爲角之平分線.[408]

484. 平面內有各點,距一已知點有已知遠,此各點之軌跡爲圓,其中心爲已知點,其半徑等於已知遠.[409]

485. 平面內有各點,距一已知線有已知遠,此各點之軌跡含兩線,各與已知線平行,又距已知線有已知遠.[410]

486. 設空間中有各點,距圓周上各點恆等,則空間中各點之軌跡爲一線,通過圓心,又垂於圓之平面.[411]

487. 設空間中有各點,距兩已知點恆等,則各點之軌跡,爲一平面,此平面平分兩已知點之聯線,又垂於聯線.[412]

488. 二面角內有各點,距兩面恆等,則各點之軌跡,爲平分此角之平面.[413]

## 會 合 線

489. 三角形之三中線,會合於一點.[417]

490. 三角形各邊之中點垂線,必會合於一點,此點與各角頂相距等.[419]

491. 三角形各角之平分線，必會合於一點，此點與各邊相距等。〔421〕

492. 三角形之三垂線，必會合於一點。〔422〕

## 面 積

493. 等底及等高之平行四邊形必相等。〔459〕

494. 長方形之面積，等於底乘高，即  $S = b \cdot h$ 〔481〕

495. 平行四邊形之面積，等於底乘高，即  $P = b \cdot h$ 〔482〕

496. 三角形之面積，等於高乘底之半，即  $A = \frac{1}{2}b \cdot h$ 〔465〕

497. 三角形之面積，等於兩邊與其夾角正弦連乘積之半，即  $A = \frac{1}{2}ab \sin C$ 。〔466〕

498. 三角形之面積，等於其半周與內切圓半徑之乘積，即  $A = \frac{1}{2}p \cdot r = sr$ 。〔467〕

499. 三角形之面積，等於三邊之乘積除以外接圓半徑之四倍，即  $A = \frac{abc}{4r}$ 。〔468〕

500. 三角形之面積，為  $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。〔469〕

501. 等邊三角形之面積，為一邊平方之四分一乘 3 之平方根，即  $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$  〔471〕

502. 梯形之面積，等於高與兩底之和相乘積之半，即  $T = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ 〔483〕

503. 正內接多邊形之面積，等於半周乘邊心距。〔484〕

504. 正外切多邊形之面積,等於半周乘半徑.[485]

505. 圓之面積,爲其周與半徑相乘積之半,即  $A = \frac{1}{2}cr$   
[489]

506. 圓之面積之公式,爲  $A = \pi r^2$ . [489]

507. 圓之扇形之面積,爲  $A = \frac{1}{2}a'r$ . [490]

508. 圓之弓形之面積,爲  $A = \frac{1}{2}a'r - \frac{1}{2}a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ ,

或  $A = \frac{1}{2}a'r - \frac{1}{2}r^2 \sin x$ . [491]

### 面積之等比例

509. 等比例之中項相乘,等於外項相乘.(259)

510. 兩長方形之面積相比,如其長寬相乘之比.(260)

511. 若兩長方形之底等,則兩形相比如其高相比.  
(261)

512. 若兩長方形之高等,則兩形相比如其底相比.  
(262)

513. 兩平行四邊形之面積相比,如其高與底相乘之比.(263)

514. 兩三角形之面積相比,如其高與底相乘之比.  
(264)

515. 若兩平行四邊形之底等,則兩形相比,如其高相比.(265)

516. 若兩三角形之底等,則兩形相比,如其高相比。  
(266)
517. 兩相似三角形,其面積之比,等於其相應邊平方之比。〔498〕
518. 兩相似多邊形,其面積之比,等於其相應邊平方之比。〔499〕

### 空間中之線與平面

519. 定空間中平面之位置,有下列各情形:
1. 一直線與一點,點不在線內。
  2. 三點不同在一直線內。
  3. 兩交叉直線。
  4. 兩平行線。〔139〕
520. 若兩平面相交,則相交之處為一直線。〔143〕
521. 若兩平面同與一線垂直,則兩平面平行。〔178〕
522. 若兩平行平面為一第三平面所割,則相交處之線互相平行。〔179〕
523. 平行線段為平行平面所截者,必相等。〔180〕
524. 若三(或三以上)平行平面,為兩割線所割,則兩割線之相當段成等比例。〔181〕
525. 平面上不垂於平面之直線,其射影亦為一直線。  
(355)

526. 平面上垂於平面之直線其射影爲一點。(356)
527. 一已知線與平面上此線之射影所成之銳角,較小於此線與平面內他一線所成之角,但此他一線,須經過已知線與平面之交點者。(357)
528. 從一點至一平面,以垂線爲最短之距離。(342)
529. 設從一點至一平面,有諸斜線,遇平面於距垂線脚等遠之諸點,則此諸斜線皆等。(344)
530. 設從一點至一平面,有諸斜線,遇平面於距垂線脚不等遠之諸點,則此諸斜線皆不等,較遠之線較長。(345)
531. 設從一點至一平面,有諸等斜線,則此諸線,必遇平面於距垂線脚等遠之諸點。(346)
532. 設從一點至一平面,有兩不等斜線,其較長者,遇平面於距垂線脚較遠之點。(347)
533. 若一線垂於兩交線,則此線垂於兩交線所成之平面。(364)
534. 過一已知線內一已知點,垂直於此線之諸線,皆在過此點垂直於此線之平面內。(366)
535. 垂於一已知線內一已知點,祇可求作一平面。  
(367)
536. 從一已知線外一已知點,祇可求作一平面,垂直於此線。(368)

537. 於一已知平面內一已知點,祇可求作一垂線.  
〔370〕
538. 從一已知平面外一已知點,祇可求作一垂線至  
平面.〔372〕
539. 垂於同一平面之諸線,彼此平行.〔373〕
540. 兩平行線,若此線垂於一平面,則彼線亦垂於此  
平面.〔374〕
541. 同與一線平行之兩線,彼此平行.〔375〕
542. 若兩線平行,則含此線而不含彼線之平面,與彼  
線平行.〔376〕
543. 兩平行平面,若此平面垂於一線,則彼平面亦垂  
於此線.〔377〕
544. 設有兩交線,與一已知平面平行,則過兩線之平  
面,亦與已知平面平行.〔378〕
545. 設有兩角,不同在一平面,然其邊平行,且所行之  
方向同,則兩角相等,其平面平行.〔379〕
546. 凡二面角之諸平面角皆等.〔380〕
547. 若兩二面角相等,則其平面角相等.〔381〕
548. 兩二面角相等,如其平面角相等.〔381〕
549. 若一線垂於一平面,則經過此線之各平面,皆垂  
於此平面.〔382〕

550. 若兩平面互為垂直，則此平面內之線，其垂於兩平面之交線者，必垂於彼平面。(383)

551. 若兩平面互為垂直，則其交線內一點垂於此平面之線，必在他平面內。(383)

552. 兩平面互為垂直，若由此平面內一點，作彼平面之垂線，則此線必在此平面內。(383)

553. 若一平面垂於兩平面，則必垂於兩平面之交線。(384)

554. 若一線不垂於一已知平面，則經過此線，祇有一平面可垂於已知平面。(385)

555. 球體之截面，為一平面所截成者，為一圓。(389)

556. 圓之軸，經過中心。(390)

557. 一球體之直徑，其經過圓之中心者，垂於此圓之平面。(390)

558. 一球體之諸大圓皆等。(390)

559. 各大圓平分其球體。(390)

560. 設球面有兩點，但非直徑之端點，則經過此兩點，祇可求作一大圓。(390)

561. 在球體之圓上諸點，距其同極皆等。(392)

562. 大圓之極距，為一象限。(395)

563. 設球面上有一點，與面上兩已知點之距離各為一象限，則此點為經過兩已知點之大圓之極。(396)

564. 兩球面之交界爲一圓,但此圓之平面,必垂於兩球體之中心線,又其中心必在此線內.[397]

565. 切於一球體之平面,與半徑作垂面於端點.[399]

566. 設一平面,垂於球體一半徑之外端,則切於球體.  
[400]

### 求 作 題

567. 求作一平面,令過一已知線內之已知點,並垂於此線.[365]

568. 從一已知線外一已知點,祇可作一平面,垂直於此線.[368]

569. 於一已知平面內一已知點,求作一垂線於平面.  
[369]

570. 由一平面外一點,求作一垂線至平面.[371]

571. 若一線不垂於一已知平面,則經過此線,祇有一平面可垂於已知平面.[385]



對數表三角函數表  
及數學上之公式

## 目 錄

表	頁
I. 真數之常用對數 .....	1
II. 三角函數之常用對數 .....	21
III. 三角自然函數之值 .....	73
IV. 乘方及方根 .....	99
V. 公式 .....	103
VI. 重要常數及其對數 .....	111
VII. 度分秒化法 .....	115

表 I

真數 1 至 10000 之常用對數



N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>100</b>	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389	
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242	
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	<b>44 43 42</b>
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078	1  4.4 4.3 4.2
<b>105</b>	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	2  8.8 8.6 8.4
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	3  13.2 12.9 12.6
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302	4  17.0 17.2 16.8
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	5  22.0 21.5 21.0
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100	6  26.4 25.8 25.2
<b>110</b>	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493	7  30.8 30.1 29.4
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	8  35.2 34.4 33.6
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269	9  39.6 38.7 37.8
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	<b>41 40 39</b>
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032	1  4.1 4.0 3.9
<b>115</b>	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	2  8.2 8.0 7.8
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	3  12.3 12.0 11.7
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151	4  16.4 16.0 15.6
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	5  20.5 20.0 19.5
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	6  24.6 24.0 23.4
<b>120</b>	08 918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243	7  28.7 28.0 27.3
121	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	8  32.8 32.0 31.2
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	9  36.9 36.0 35.1
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307	<b>39 37 36</b>
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	1  3.8 3.7 3.6
<b>125</b>	09 691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003	2  7.6 7.4 7.2
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	3  11.4 11.1 10.8
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	4  15.2 14.8 14.4
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025	5  19.0 18.5 18.0
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	6  22.8 22.2 21.6
<b>130</b>	09 394	428	461	494	528	561	594	628	661	694	7  26.6 25.9 25.2
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024	8  30.4 29.6 28.8
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	9  34.2 33.3 32.4
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	<b>35 34 33</b>
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001	1  3.5 3.4 3.3
<b>135</b>	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	2  7.0 6.8 6.6
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	3  10.5 10.2 9.9
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	4  14.0 13.6 13.2
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270	5  17.5 17.0 16.5
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	6  21.0 20.4 19.8
<b>140</b>	14 613	644	675	706	737	768	799	829	860	891	7  24.5 23.8 23.1
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198	8  28.0 27.2 26.4
142	229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	9  31.5 30.6 29.7
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	<b>32 31 30</b>
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107	1  3.2 3.1 3.0
<b>145</b>	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	2  6.4 6.2 6.0
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	3  9.6 9.3 9.0
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	4  12.8 12.4 12.0
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	5  16.0 15.5 15.0
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	6  19.2 18.6 18.0
<b>150</b>	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	7  22.4 21.7 21.0
											8  25.6 24.8 24.0
											9  28.8 27.9 27.0
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	<b>29 28</b>
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	<b>1 2.9 2.8</b> <b>2 5.8 5.6</b> <b>3 8.7 8.4</b> <b>4 11.6 11.2</b> <b>5 14.5 14.0</b> <b>6 17.4 16.8</b> <b>7 20.3 19.6</b> <b>8 23.2 22.4</b> <b>9 26.1 25.2</b>
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	
158	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112	
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656	<b>27 26</b>
161	883	710	737	763	790	817	844	871	898	925	
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	<b>1 2.7 2.6</b> <b>2 5.4 5.2</b> <b>3 8.1 7.8</b> <b>4 10.8 10.4</b> <b>5 13.5 13.0</b> <b>6 16.2 15.6</b> <b>7 18.0 18.2</b> <b>8 21.6 20.8</b> <b>9 24.3 23.4</b>
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274	<b>25</b>
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	<b>1 2.5</b> <b>2 5.0</b> <b>3 7.5</b> <b>4 10.0</b> <b>5 12.5</b> <b>6 15.0</b> <b>7 17.5</b> <b>8 20.0</b> <b>9 22.5</b>
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744	<b>24 23</b>
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	
185	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	<b>1 2.4 2.3</b> <b>2 4.8 4.6</b> <b>3 7.2 6.9</b> <b>4 9.6 9.2</b> <b>5 12.0 11.5</b> <b>6 14.4 13.3</b> <b>7 16.8 16.1</b> <b>8 19.2 18.4</b> <b>9 21.6 20.7</b>
186	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161	
187	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081	<b>22 21</b>
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307	
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533	
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758	
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981	
195	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203	<b>1 2.2 2.1</b> <b>2 4.4 4.2</b> <b>3 6.6 6.3</b> <b>4 8.8 8.4</b> <b>5 11.0 10.5</b> <b>6 13.2 12.6</b> <b>7 15.4 14.7</b> <b>8 17.6 16.8</b> <b>9 19.8 18.9</b>
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425	
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645	
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863	
199	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081	
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>200</b>	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298	<b>22 21</b>
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514	
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728	
203	750	771	792	814	835	856	878	899	920	942	
204	963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154	1   2.2 2.1
<b>205</b>	31 175	197	218	239	260	281	302	323	345	366	2   4.4 4.2
206	387	408	429	450	471	492	513	534	555	576	3   6.6 6.3
207	597	618	639	660	681	702	723	744	765	785	4   8.8 8.4
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994	5   11.0 10.5
209	32 015	035	056	077	098	118	139	160	181	201	6   13.2 12.6
<b>210</b>	222	243	263	284	305	325	346	366	387	408	7   15.4 14.7
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613	8   17.6 16.8
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818	9   19.8 18.9
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021	<b>20</b>
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224	1   2.0
<b>215</b>	244	264	284	304	325	345	365	385	405	425	2   4.0
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626	3   6.0
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826	4   8.0
218	846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025	5   10.0
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223	6   12.0
<b>220</b>	242	262	282	301	321	341	361	380	400	420	7   14.0
221	439	459	479	498	518	537	557	577	596	616	8   16.0
222	635	655	674	694	713	733	753	772	792	811	9   18.0
223	830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005	<b>19</b>
224	35 025	044	064	083	102	122	141	160	180	199	1   1.0
<b>225</b>	218	238	257	276	295	315	334	353	372	392	2   3.8
226	411	430	449	468	488	507	526	545	564	583	3   5.7
227	603	622	641	660	679	698	717	736	755	774	4   7.6
228	793	813	832	851	870	889	908	927	946	965	5   9.5
229	984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154	6   11.4
<b>230</b>	36 173	192	211	229	248	267	286	305	324	342	7   13.3
231	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530	8   15.2
232	549	568	586	605	624	642	661	680	699	717	9   17.1
233	736	754	773	791	810	829	847	866	884	903	<b>18</b>
234	922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088	1   1.8
<b>235</b>	37 107	125	144	162	181	199	218	236	254	273	2   3.6
236	291	310	328	346	365	383	401	420	438	457	3   5.4
237	475	493	511	530	548	566	585	603	621	639	4   7.2
238	658	676	694	712	731	749	767	785	803	822	5   9.0
239	840	858	876	894	912	931	949	967	985	*003	6   10.8
<b>240</b>	38 021	039	057	075	093	112	130	148	166	184	7   12.6
241	202	220	238	256	274	292	310	328	346	364	8   14.4
242	382	399	417	435	453	471	489	507	525	543	9   16.2
243	561	578	596	614	632	650	668	686	703	721	<b>17</b>
244	739	757	775	792	810	828	846	863	881	899	1   1.7
<b>245</b>	917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076	2   3.4
246	39 094	111	129	146	164	182	199	217	235	252	3   5.1
247	270	287	305	322	340	358	375	393	410	428	4   6.8
248	445	463	480	498	515	533	550	568	585	602	5   8.5
249	620	637	655	672	690	707	724	742	759	777	6   10.2
<b>250</b>	794	811	829	846	863	881	898	915	933	950	7   11.9
											8   13.6
											9   15.3
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
250	39 794	811	820	846	863	881	898	915	933	950	
251		967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
252	40	140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
253		312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
254		483	500	*518	535	552	569	586	603	620	637
255		654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
256		824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
257		993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
258	41	162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
259		330	347	363	380	397	414	430	447	464	481
260		497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
261		664	681	697	714	731	747	764	780	797	814
262		830	847	863	880	896	913	929	946	963	979
263		996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144
264	42	160	177	193	210	226	243	259	275	292	308
265		325	341	357	374	390	406	423	439	455	472
266		488	504	521	537	553	570	586	602	619	635
267		651	667	684	700	716	732	749	765	781	797
268		813	830	846	862	878	894	911	927	943	959
269		975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120
270	43	136	152	169	185	201	217	233	249	265	281
271		297	313	329	345	361	377	393	409	425	441
272		457	473	489	505	521	537	553	569	584	600
273		616	632	648	664	680	696	712	727	743	759
274		775	791	807	823	838	854	870	886	902	917
275		933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075
276	44	091	107	122	138	154	170	185	201	217	232
277		248	264	279	295	311	326	342	358	373	389
278		404	420	436	451	467	483	498	514	529	545
279		560	576	592	607	623	638	654	669	685	700
280		716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
281		871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010
282	45	025	040	056	071	086	102	117	133	148	163
283		179	194	209	225	240	255	271	286	301	317
284		332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
285		484	500	515	530	545	561	576	591	606	621
286		637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
287		788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
288		939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075
289	46	090	105	120	135	150	165	180	195	210	225
290		240	255	270	285	300	315	330	345	359	374
291		389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
292		538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
293		687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
294		835	850	864	879	894	909	923	938	953	967
295		982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114
296	47	129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
297		276	290	305	319	334	349	363	378	392	407
298		422	436	451	465	480	494	509	524	538	553
299		567	582	596	611	625	640	654	669	683	698
300		712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP



N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>300</b>	47 712	727	741	756	770	784	799	813	828	842	
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986	
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130	
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273	<b>15</b>
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416	1 1.5
<b>305</b>	430	444	458	473	487	501	515	530	544	558	2 3.0
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700	3 4.5
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841	4 6.0
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982	5 7.5
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122	6 9.0
<b>310</b>	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262	7 10.5
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402	8 12.0
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541	9 13.5
313	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679	
314	693	707	721	734	748	762	776	790	803	817	<b>14</b>
<b>315</b>	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955	1 1.4
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092	2 2.8
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229	3 4.2
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365	4 5.6
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501	5 7.0
<b>320</b>	515	529	542	556	569	583	596	610	623	637	6 8.4
321	651	664	678	691	705	718	732	745	759	772	7 9.8
322	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907	8 11.2
323	920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041	9 12.6
324	51 055	068	081	095	108	121	135	148	162	175	
<b>325</b>	188	202	215	228	242	255	268	282	295	308	<b>13</b>
326	322	335	348	362	375	388	402	415	428	441	1 1.3
327	455	468	481	495	508	521	534	548	561	574	2 2.6
328	587	601	614	627	640	654	667	680	693	706	3 3.9
329	720	733	746	759	772	786	799	812	825	838	4 5.2
<b>330</b>	851	865	878	891	904	917	930	943	957	970	5 6.5
331	983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101	6 7.8
332	52 114	127	140	153	166	179	192	205	218	231	7 9.1
333	244	257	270	284	297	310	323	336	349	362	8 10.4
334	375	388	401	414	427	440	453	466	479	492	9 11.7
<b>335</b>	504	517	530	543	556	569	582	595	608	621	
336	634	647	660	673	686	699	711	724	737	750	
337	763	776	789	802	815	827	840	853	866	879	
338	892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007	
339	53 020	033	046	058	071	084	097	110	122	135	<b>12</b>
<b>340</b>	148	161	173	186	199	212	224	237	250	263	1 1.2
341	275	288	301	314	326	339	352	364	377	390	2 2.4
342	403	415	428	441	453	466	479	491	504	517	3 3.6
343	529	542	555	567	580	593	605	618	631	643	4 4.8
344	656	668	681	694	706	719	732	744	757	769	5 6.0
<b>345</b>	782	794	807	820	832	845	857	870	882	895	6 7.2
346	908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020	7 8.4
347	54 033	045	058	070	083	095	108	120	133	145	8 9.6
348	158	170	183	195	208	220	233	245	258	270	9 10.8
349	283	295	307	320	332	345	357	370	382	394	
<b>350</b>	407	419	432	444	456	469	481	494	506	518	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
350	54 407	419	432	444	456	469	481	494	506	518	
351	531	543	555	568	580	593	605	617	630	642	
352	654	667	679	691	704	716	728	741	753	765	
353	777	790	802	814	827	839	851	864	876	888	
354	900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011	13
355	55 023	035	047	060	072	084	096	108	121	133	1   1.3
356	145	157	169	182	194	206	218	230	242	255	2   2.6
357	267	279	291	303	315	328	340	352	364	376	3   3.9
358	388	400	413	425	437	449	461	473	485	497	4   5.2
359	509	522	534	546	558	570	582	594	606	618	5   6.5
360	630	642	654	666	678	691	703	715	727	739	6   7.8
361	751	763	775	787	799	811	823	835	847	859	7   9.1
362	871	883	895	907	919	931	943	955	967	979	8   10.4
363	991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098	9   11.7
364	56 110	122	134	146	158	170	182	194	206	217	
365	229	241	253	265	277	289	301	312	324	336	12
366	348	360	372	384	396	407	419	431	443	455	1   1.2
367	467	479	490	502	514	526	538	549	561	573	2   2.4
368	585	597	609	620	632	644	656	667	679	691	3   3.6
369	703	714	726	738	750	761	773	785	797	808	4   4.8
370	820	832	844	855	867	879	891	902	914	926	5   6.0
371	937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*042	6   7.2
372	57 054	066	078	089	101	113	124	136	148	159	7   8.4
373	171	183	194	206	217	229	241	252	264	276	8   9.6
374	287	299	310	322	334	345	357	368	380	392	9   10.8
375	403	415	426	438	449	461	473	484	496	507	
376	519	530	542	553	565	576	588	600	611	623	
377	634	646	657	669	680	692	703	715	726	738	
378	749	761	772	784	795	807	818	829	841	852	
379	864	876	887	898	910	921	933	944	955	967	11
380	978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081	1   1.1
381	58 002	104	115	127	138	149	161	172	184	195	2   2.2
382	206	218	229	240	252	263	274	286	297	309	3   3.3
383	320	331	343	354	365	377	388	399	410	422	4   4.4
384	433	444	456	467	478	490	501	512	524	535	5   5.5
385	546	557	569	580	591	602	614	625	636	647	6   6.6
386	659	670	681	692	704	715	726	737	749	760	7   7.7
387	771	782	794	805	816	827	838	850	861	872	8   8.8
388	883	894	906	917	928	939	950	961	973	984	9   9.9
389	995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095	
390	59 106	118	129	140	151	162	173	184	195	207	10
391	218	229	240	251	262	273	284	295	306	318	1   1.0
392	329	340	351	362	373	384	395	406	417	428	2   2.0
393	439	450	461	472	483	494	506	517	528	539	3   3.0
394	550	561	572	583	594	605	616	627	638	649	4   4.0
395	660	671	682	693	704	715	726	737	748	759	5   5.0
396	770	780	791	802	813	824	835	846	857	868	6   6.0
397	879	890	901	912	923	934	945	956	966	977	7   7.0
398	988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086	8   8.0
399	60 007	108	119	130	141	152	163	173	184	195	9   9.0
400	206	217	228	239	249	260	271	282	293	304	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
400	60 206	217	228	239	249	260	271	282	293	304	
401		314	325	336	347	358	369	379	390	401	
402		423	433	444	455	466	477	487	498	509	
403		531	541	552	563	574	584	595	606	617	
404		638	649	660	670	681	692	703	713	724	
405		746	756	767	778	788	799	810	821	831	
406		853	863	874	885	895	906	917	927	938	
407		959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045	
408	61 066	077	087	098	109	119	130	140	151	162	1 1.1
409		172	183	194	204	215	225	236	247	257	2 2.2
410		278	289	300	310	321	331	342	352	363	3 3.3
411		384	395	405	416	426	437	448	458	469	4 4.4
412		490	500	511	521	532	542	553	563	574	5 5.5
413		595	606	616	627	637	648	658	669	679	6 6.6
414		700	711	721	731	742	752	763	773	784	7 7.7
415		805	815	826	836	847	857	868	878	889	8 8.8
416		909	920	930	941	951	962	972	982	993	9 9.9
417	62 014	024	034	045	055	066	076	086	097	107	
418		118	128	138	149	159	170	180	190	201	
419		221	232	242	252	263	273	284	294	304	
420		325	335	346	356	366	377	387	397	408	
421		428	439	449	459	469	480	490	500	511	
422		531	542	552	562	572	583	593	603	613	
423		634	644	655	665	675	685	696	706	716	
424		737	747	757	767	778	788	798	808	818	
425		839	849	859	870	880	890	900	910	921	
426		941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	
427	63 043	053	063	073	083	094	104	114	124	134	
428		144	155	165	175	185	195	205	215	225	
429		246	256	266	276	286	296	306	317	327	
430		347	357	367	377	387	397	407	417	428	
431		448	458	468	478	488	498	508	518	528	
432		548	558	568	579	589	599	609	619	629	
433		649	659	669	679	689	699	709	719	729	
434		749	759	769	779	789	799	809	819	829	
435		849	859	869	879	889	899	909	919	929	
436		949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	
437	64 048	058	068	078	088	098	108	118	128	137	
438		147	157	167	177	187	197	207	217	227	
439		246	256	266	276	286	296	306	316	326	
440		345	355	365	375	385	395	404	414	424	
441		444	454	464	473	483	493	503	513	523	
442		542	552	562	572	582	591	601	611	621	
443		640	650	660	670	680	689	699	709	719	
444		738	748	758	768	777	787	797	807	816	
445		836	846	856	865	875	885	895	904	914	
446		933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	
447	65 031	040	050	060	070	079	089	099	108	118	
448		128	137	147	157	167	176	186	196	205	
449		225	234	244	254	263	273	283	292	302	
450		321	331	341	350	360	369	379	389	398	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
450	65 321	331	341	350	360	369	379	389	398	408	
451		418	427	437	447	456	466	475	485	495	
452		514	523	533	543	552	562	571	581	591	
453		610	619	629	639	648	658	667	677	686	
454		706	715	725	734	744	753	763	772	782	
455		801	811	820	830	839	849	858	868	877	
456		896	906	916	925	935	944	954	963	973	
457		092	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	
458	66	087	096	106	115	124	134	143	153	162	1 1.0
459		181	191	200	210	219	229	238	247	257	2 2.0
460		276	285	295	304	314	323	332	342	351	3 3.0
461		370	380	389	398	408	417	427	436	445	4 4.0
462		464	474	483	492	502	511	521	530	539	5 5.0
463		558	567	577	586	596	605	614	624	633	6 6.0
464		652	661	671	680	689	699	708	717	727	7 7.0
465		745	755	764	773	783	792	801	811	820	8 8.0
466		839	848	857	867	876	885	894	904	913	9 9.0
467		932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015
468	67	025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
469		117	127	136	145	154	164	173	182	191	201
470		210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
471		302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
472		394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
473		486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
474		578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
475		669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
476		761	770	779	788	797	806	815	825	834	843
477		852	861	870	879	888	897	906	916	925	934
478		943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024
479	68	034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
480		124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
481		215	224	233	242	251	260	269	278	287	296
482		305	314	323	332	341	350	359	368	377	386
483		395	404	413	422	431	440	449	458	467	476
484		485	494	502	511	520	529	538	547	556	565
485		574	583	592	601	610	619	628	637	646	655
486		664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
487		753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
488		842	851	860	869	878	886	895	904	913	922
489		931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011
490	69	020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
491		108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
492		197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
493		285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
494		373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
495		461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
496		548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
497		636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
498		723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
499		810	819	827	836	845	854	862	871	880	888
500		897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>500</b>	69 897	906	914	*923	932	940	949	958	966	975	
501	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062	
502	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148	
503	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234	
504	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321	
<b>505</b>	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406	
506	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492	9
507	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578	
508	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663	1 0.9
509	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749	2 1.8
<b>510</b>	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834	3 2.7
511	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919	4 3.6
512	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003	5 4.5
513	71 012	020	029	037	046	054	063	071	079	088	6 5.4
514	096	105	113	122	130	139	147	155	164	172	7 6.3
<b>515</b>	181	189	198	206	214	223	231	240	248	257	8 7.2
516	265	273	282	290	299	307	315	324	332	341	9 8.1
517	349	357	366	374	383	391	399	408	416	425	
518	433	441	450	458	466	475	483	492	500	508	
519	517	525	533	542	550	559	567	575	584	592	
<b>520</b>	600	609	617	625	634	642	550	659	667	675	
521	684	692	700	709	717	725	734	742	750	759	8
522	767	775	784	792	800	809	817	825	834	842	
523	850	858	867	875	883	892	900	908	917	925	1 0.8
524	933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008	2 1.6
<b>525</b>	72 016	024	032	041	049	057	066	074	082	090	3 2.4
526	099	107	115	123	132	140	148	156	165	173	4 3.2
527	181	189	198	206	214	222	230	239	247	255	5 4.0
528	263	272	280	288	296	304	313	321	329	337	6 4.8
529	346	354	362	370	378	387	395	403	411	419	7 5.6
<b>530</b>	428	436	444	452	460	469	477	485	493	501	8 6.4
531	509	518	526	534	542	550	558	567	575	583	9 7.2
532	591	599	607	616	624	632	640	648	656	665	
533	673	681	689	697	705	713	722	730	738	746	
534	754	762	770	779	787	795	803	811	819	827	
<b>535</b>	835	843	852	860	868	876	884	892	900	908	
536	916	925	933	941	949	957	965	973	981	989	
537	997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070	
538	73 078	086	094	102	111	119	127	135	143	151	1 0.7
539	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231	2 1.4
<b>540</b>	239	247	255	263	272	280	288	296	304	312	3 2.1
541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392	4 2.8
542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472	5 3.5
543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552	6 4.2
544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632	7 4.9
<b>545</b>	640	648	656	664	672	679	687	695	703	711	8 5.6
546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791	9 6.3
547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870	
548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949	
549	957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028	
<b>550</b>	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107	
<b>N</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>PP</b>

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107	
551		115	123	131	139	147	155	162	170	178	
552		194	202	210	218	225	233	241	249	257	
553		273	280	288	296	304	312	320	327	335	
554		351	359	367	374	382	390	398	406	414	
555		429	437	445	453	461	468	476	484	492	
556		507	515	523	531	539	547	554	562	570	
557		588	593	601	609	617	624	632	640	648	
558		663	671	679	687	695	702	710	718	726	
559		741	749	757	764	772	780	788	796	803	
560		819	827	834	842	850	858	865	873	881	8
561		896	904	912	920	927	935	943	950	958	
562		974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043
563	75 051	059	066	074	082	089	097	105	113	120	1 0.8
564		128	136	143	151	159	166	174	182	189	2 1.6
565		205	213	220	228	236	243	251	259	266	3 2.4
566		282	289	297	305	312	320	328	335	343	4 3.2
567		358	366	374	381	389	397	404	412	420	5 4.0
568		435	442	450	458	465	473	481	488	496	6 4.8
569		511	519	526	534	542	549	557	565	572	7 5.6
570		587	595	603	610	618	626	633	641	648	8 6.4
571		664	671	679	686	694	702	709	717	724	9 7.2
572		740	747	755	762	770	778	785	793	800	
573		815	823	831	838	846	853	861	868	876	
574		891	899	906	914	921	929	937	944	952	
575		967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035
576	76 042	050	057	065	072	080	087	095	103	110	
577		118	125	133	140	148	155	163	170	178	
578		193	200	208	215	223	230	238	245	253	
579		268	275	283	290	298	305	313	320	328	
580		343	350	358	365	373	380	388	395	403	7
581		418	425	433	440	448	455	462	470	477	
582		492	500	507	515	522	530	537	545	552	1 0.7
583		567	574	582	589	597	604	612	619	626	2 1.4
584		641	649	656	664	671	678	686	693	701	3 2.1
585		716	723	730	738	745	753	760	768	775	4 2.8
586		790	797	805	812	819	827	834	842	849	5 3.5
587		864	871	879	886	893	901	908	916	923	6 4.2
588		938	945	953	960	967	975	982	989	997	7 4.9
589	77 012	019	026	034	041	048	056	063	070	078	8 5.6
590		085	093	100	107	115	122	129	137	144	9 6.3
591		159	166	173	181	188	195	203	210	217	
592		232	240	247	254	262	269	276	283	291	
593		305	313	320	327	335	342	349	357	364	
594		379	386	393	401	408	415	422	430	437	
595		452	459	466	474	481	488	495	503	510	
596		525	532	539	546	554	561	568	576	583	
597		597	605	612	619	627	634	641	648	656	
598		670	677	685	692	699	706	714	721	728	
599		743	750	757	764	772	778	786	793	801	
600		815	822	830	837	844	851	859	866	873	
601		880									
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>600</b>	77 815	822	830	837	844	851	859	866	873	880	
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952	
603	960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025	
603	78 032	039	046	053	061	068	075	082	089	097	
604	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168	
<b>605</b>	176	183	190	197	204	211	219	226	233	240	
606	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312	8
607	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383	
608	390	398	405	412	419	426	433	440	447	455	1   0.8
609	462	469	476	483	490	497	504	512	519	525	2   1.6
<b>610</b>	533	540	547	554	561	569	576	583	590	597	3   2.4
611	604	611	618	625	633	640	647	654	661	668	4   3.2
612	675	682	689	696	704	711	718	725	732	739	5   4.0
613	746	753	760	767	774	781	789	796	803	810	6   4.8
614	817	824	831	838	845	852	859	866	873	880	7   5.6
<b>615</b>	888	895	902	909	916	923	930	937	944	951	8   6.4
616	958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021	9   7.2
617	79 029	036	043	050	057	064	071	078	085	092	
618	099	106	113	120	127	134	141	148	155	162	
619	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232	
<b>620</b>	239	246	253	260	267	274	281	288	295	302	
621	309	316	323	330	337	344	351	358	365	372	7
622	379	386	393	400	407	414	421	428	435	442	
623	449	456	463	470	477	484	491	498	505	511	1   0.7
624	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581	2   1.4
<b>625</b>	588	595	602	609	616	623	630	637	644	650	3   2.1
626	657	664	671	678	685	692	699	706	713	720	4   2.8
627	727	734	741	748	754	761	768	775	782	789	5   3.5
628	796	803	810	817	824	831	837	844	851	858	6   4.2
629	865	872	879	886	893	900	906	913	920	927	7   4.9
<b>630</b>	934	941	948	955	962	969	975	982	989	996	8   5.6
631	80 003	010	017	024	030	037	044	051	058	065	9   6.3
632	072	079	085	092	099	106	113	120	127	134	
633	140	147	154	161	168	175	182	188	195	202	
634	209	216	223	229	236	243	250	257	264	271	
<b>635</b>	277	284	291	298	305	312	318	325	332	339	
636	346	353	359	366	373	380	387	393	400	407	
637	414	421	428	434	441	448	455	462	468	475	
638	482	489	496	502	509	516	523	530	536	543	1   0.6
639	550	557	564	570	577	584	591	598	604	611	2   1.2
<b>640</b>	618	625	632	638	645	652	659	665	672	679	3   1.8
641	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747	4   2.4
642	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814	5   3.0
643	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882	6   3.6
644	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949	7   4.2
<b>645</b>	956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017	8   4.8
646	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084	9   5.4
647	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151	
648	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218	
649	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285	
<b>650</b>	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP	
<b>650</b>	81	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351	
651		358	365	371	378	385	391	398	405	411	418	
652		425	431	438	445	451	458	465	471	478	485	
653		491	498	505	511	518	525	531	538	544	551	
654		558	564	571	578	584	591	598	604	611	617	
<b>655</b>		624	631	637	644	651	657	664	671	677	684	
656		690	697	704	710	717	723	730	737	743	750	
657		757	763	770	776	783	790	796	803	809	816	
658		823	829	836	842	849	856	862	869	875	882	
659		889	895	902	908	915	921	928	935	941	948	
<b>660</b>		954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014	7
661	82	020	027	033	040	046	053	060	066	073	079	
662		086	092	099	105	112	119	125	132	138	145	1 0.7
663		151	158	164	171	178	184	191	197	204	210	2 1.4
664		217	223	230	236	243	249	256	263	269	276	3 2.1
<b>665</b>		282	289	295	302	308	315	321	328	334	341	4 2.8
666		347	354	360	367	373	380	387	393	400	406	5 3.5
667		413	419	426	432	439	445	452	458	465	471	6 4.2
668		478	484	491	497	504	510	517	523	530	536	7 4.9
669		543	549	556	562	569	575	582	588	595	601	8 5.6
<b>670</b>		607	614	620	627	633	640	646	653	659	666	9 6.3
671		672	679	685	692	698	705	711	718	724	730	
672		737	743	750	756	763	769	776	782	789	795	
673		802	808	814	821	827	834	840	847	853	860	
674		866	872	879	885	892	898	905	911	918	924	
<b>675</b>		930	937	943	950	956	963	969	975	982	988	
676		995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052	
677	83	059	065	072	078	085	091	097	104	110	117	
678		123	129	136	142	149	155	161	168	174	181	
679		187	193	200	206	213	219	225	232	238	245	
<b>680</b>		251	257	264	270	276	283	289	296	302	308	
681		315	321	327	334	340	347	353	359	366	372	
682		378	385	391	398	404	410	417	423	429	436	
683		442	448	455	461	467	474	480	487	493	499	
684		506	512	518	525	531	537	544	550	556	563	1 0.6
<b>685</b>		569	575	582	588	594	601	607	613	620	626	2 1.2
686		632	639	645	651	658	664	670	677	683	689	3 1.8
687		696	702	708	715	721	727	734	740	746	753	4 2.4
688		759	765	771	778	784	790	797	803	809	816	5 3.0
689		822	828	835	841	847	853	860	866	872	879	6 3.6
<b>690</b>		885	891	897	904	910	916	923	929	935	942	7 4.2
691		948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004	8 4.8
692	84	011	017	023	029	036	042	048	055	061	067	9 5.4
693		073	080	086	092	098	105	111	117	123	130	
694		136	142	148	155	161	167	173	180	186	192	
<b>695</b>		198	205	211	217	223	230	236	242	248	255	
696		261	267	273	280	286	292	298	305	311	317	
697		323	330	336	342	348	354	361	367	373	379	
698		386	392	398	404	410	417	423	429	435	442	
699		448	454	460	466	473	479	485	491	497	504	
<b>700</b>		510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP	



N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>700</b>	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	
701	572	578	584	590	597	603	609	615	621	628	
702	634	640	646	652	658	665	671	677	683	689	
703	696	702	708	714	720	726	733	739	745	751	
704	757	763	770	776	782	788	794	800	807	813	
<b>705</b>	819	825	831	837	844	850	856	862	868	874	
706	880	887	893	899	905	911	917	924	930	936	
707	942	948	954	960	967	973	979	985	991	997	
708	85 003	009	016	022	028	034	040	046	052	058	
709	065	071	077	083	089	095	101	107	114	120	
<b>710</b>	126	132	138	144	150	156	163	169	175	181	
711	187	193	199	205	211	217	224	230	236	242	
712	248	254	260	266	272	278	285	291	297	303	
713	309	315	321	327	333	339	345	352	358	364	
714	370	376	382	388	394	400	406	412	418	425	
<b>715</b>	431	437	442	449	455	461	467	473	479	485	
716	491	497	503	509	516	522	528	534	540	546	
717	552	558	564	570	576	582	588	594	600	606	
718	612	618	625	631	637	643	649	655	661	667	
719	678	679	685	691	697	703	709	715	721	727	
<b>720</b>	733	739	745	751	757	763	769	775	781	788	
721	794	800	806	812	818	824	830	836	842	848	
722	854	860	866	872	878	884	890	896	902	908	
723	914	920	926	932	938	944	950	956	962	968	
724	974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028	
<b>725</b>	86 034	040	046	052	058	064	070	076	082	088	
726	094	100	106	112	118	124	130	136	141	147	
727	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207	
728	213	219	225	231	237	243	249	255	261	267	
729	273	279	285	291	297	303	308	314	320	326	
<b>730</b>	332	338	344	350	356	362	368	374	380	386	
731	392	398	404	410	415	421	427	433	439	445	
732	451	457	463	469	475	481	487	493	499	504	
733	510	516	522	528	534	540	546	552	558	564	
734	570	576	581	587	593	599	605	611	617	623	
<b>735</b>	629	635	641	646	652	658	664	670	676	682	
736	688	694	700	705	711	717	723	729	735	741	
737	747	753	759	764	770	776	782	788	794	800	
738	806	812	817	823	829	835	841	847	853	859	
739	864	870	876	882	888	894	900	906	911	917	
<b>740</b>	923	929	935	941	947	953	958	964	970	976	
741	982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035	
742	87 040	046	052	058	064	070	075	081	087	093	
743	099	105	111	116	122	128	134	140	146	151	
744	157	163	169	175	181	186	192	198	204	210	
<b>745</b>	216	221	227	233	239	245	251	256	262	268	
746	274	280	286	291	297	303	309	315	320	326	
747	332	338	344	349	355	361	367	373	379	384	
748	390	396	402	408	413	419	425	431	437	442	
749	448	454	460	466	471	477	483	489	495	500	
<b>750</b>	506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

7  
1 0.7  
2 1.4  
3 2.1  
4 2.8  
5 3.5  
6 4.2  
7 4.9  
8 5.6  
9 6.3

6  
1 0.6  
2 1.2  
3 1.8  
4 2.4  
5 3.0  
6 3.6  
7 4.2  
8 4.8  
9 5.4

5  
1 0.5  
2 1.0  
3 1.5  
4 2.0  
5 2.5  
6 3.0  
7 3.5  
8 4.0  
9 4.5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>750</b>	87 506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	
751	564	570	576	581	587	593	599	604	610	616	
752	622	628	633	639	645	651	656	662	668	674	
753	679	685	691	697	703	708	714	720	726	731	
754	737	743	749	754	760	766	772	777	783	789	
<b>755</b>	795	800	806	812	818	823	829	835	841	846	
756	852	858	864	869	875	881	887	892	898	904	
757	910	915	921	927	933	938	944	950	955	961	
758	967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018	
759	88 024	030	036	041	047	053	058	064	070	076	
<b>760</b>	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133	
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190	6
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247	
763	252	258	264	270	275	281	287	292	298	304	1 0 6
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360	2 1 2
<b>765</b>	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417	3 1 8
766	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474	4 2 4
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530	5 3 0
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587	6 3 6
769	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643	7 4 2
<b>770</b>	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700	8 4 8
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756	9 5 4
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812	
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868	
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925	
<b>775</b>	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981	
776	986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037	
777	89 042	048	053	059	064	070	076	081	087	092	
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148	
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204	
<b>780</b>	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260	
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315	6
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371	
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426	1 0 5
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481	2 1 0
<b>785</b>	487	492	498	504	509	515	520	526	531	537	3 1 5
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592	4 2 0
787	597	603	609	614	620	625	631	636	642	647	5 2 5
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702	6 3 0
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757	7 3 5
<b>790</b>	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812	8 4 0
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867	9 4 5
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922	
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	977	
794	982	988	993	998	*004	*009	*015	*020	*026	*031	
<b>795</b>	90 037	042	048	053	059	064	069	075	080	086	
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140	
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195	
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249	
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304	
<b>800</b>	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP	
<b>800</b>	90	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	
801		363	369	374	380	385	390	396	401	407	412	
802		417	423	428	434	439	445	450	455	461	466	
803		472	477	482	488	493	499	504	509	515	520	
804		526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	
<b>805</b>		580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	
806		634	639	644	650	655	660	666	671	677	682	
807		687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	
808		741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	
809		795	800	806	811	816	822	827	832	838	843	
<b>810</b>		849	854	859	865	870	875	881	886	891	897	
811		902	907	913	918	924	929	934	940	945	950	6
812		956	961	966	972	977	982	988	993	998	004	
813	91	009	014	020	025	030	036	041	046	052	057	1   0.6
814		062	068	073	078	084	089	094	100	105	110	2   1.2
<b>815</b>		116	121	126	132	137	142	148	153	158	164	3   1.8
816		169	174	180	185	190	196	201	206	212	217	4   2.4
817		222	228	233	238	243	249	254	259	265	270	5   3.0
818		275	281	286	291	297	302	307	312	318	323	6   3.6
819		328	334	339	344	350	355	360	365	371	376	7   4.2
<b>820</b>		381	387	392	397	403	408	413	418	424	429	8   4.8
821		434	440	445	450	455	461	466	471	477	482	9   5.4
822		487	492	498	503	508	514	519	524	529	535	
823		540	545	551	556	561	566	572	577	582	587	
824		593	598	603	609	614	619	624	630	635	640	
<b>825</b>		645	651	656	661	666	672	677	682	687	693	
826		698	703	709	714	719	724	730	735	740	745	
827		751	756	761	766	772	777	782	787	793	798	
828		803	808	814	819	824	829	834	840	845	850	
829		855	861	866	871	876	882	887	892	897	903	
<b>830</b>		908	913	918	924	929	934	939	944	950	955	
831		960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007	5
832		012	018	023	028	033	038	044	049	054	059	
833	92	065	070	075	080	085	091	096	101	106	111	1   0.5
834		117	122	127	132	137	143	148	153	158	163	2   1.0
<b>835</b>		169	174	179	184	189	195	200	205	210	215	3   1.5
836		221	226	231	236	241	247	252	257	262	267	4   2.0
837		273	278	283	288	293	298	304	309	314	319	5   2.5
838		324	330	335	340	345	350	355	361	366	371	6   3.0
839		376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	7   3.5
<b>840</b>		428	433	438	443	449	454	459	464	469	474	8   4.0
841		480	485	490	495	500	505	511	516	521	526	9   4.5
842		531	536	542	547	552	557	562	567	572	578	
843		583	588	593	598	603	609	614	619	624	629	
844		634	639	645	650	655	660	665	670	675	681	
<b>845</b>		686	691	696	701	706	711	716	722	727	732	
846		737	742	747	752	758	763	768	773	778	783	
847		788	793	799	804	809	814	819	824	829	834	
848		840	845	850	855	860	865	870	875	881	886	
849		891	896	901	906	911	916	921	927	932	937	
<b>850</b>		942	947	952	957	962	967	973	978	983	988	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP	

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP	
850	92	942	947	952	957	962	967	973	978	983	988	
851		993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039	
852	93	044	049	054	059	064	069	075	080	085	090	
853		095	100	105	110	115	120	125	131	136	141	
854		146	151	156	161	166	171	176	181	186	192	
855		197	202	207	212	217	222	227	232	237	242	
856		247	252	258	263	268	273	278	283	288	293	6
857		298	303	308	313	318	323	328	334	339	344	
858		349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	1   0.6
859		399	404	409	414	420	425	430	435	440	445	2   1.2
860		450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	3   1.8
861		500	505	510	515	520	526	531	536	541	546	4   2.4
862		551	556	561	566	571	576	581	586	591	596	5   3.0
863		601	606	611	616	621	626	631	636	641	646	6   3.6
864		651	656	661	666	671	676	682	687	692	697	7   4.2
865		702	707	712	717	722	727	732	737	742	747	8   4.8
866		752	757	762	767	772	777	782	787	792	797	9   5.4
867		802	807	812	817	822	827	832	837	842	847	
868		852	857	862	867	872	877	882	887	892	897	
869		902	907	912	917	922	927	932	937	942	947	
870		952	957	962	967	972	977	982	987	992	997	
871	04	002	007	012	017	022	027	032	037	042	047	5
872		052	057	062	067	072	077	082	086	091	096	
873		101	106	111	116	121	126	131	136	141	146	1   0.5
874		151	156	161	166	171	176	181	186	191	196	2   1.0
875		201	206	211	216	221	226	231	236	240	245	3   1.5
876		250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	4   2.0
877		300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	5   2.5
878		349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	6   3.0
879		399	404	409	414	419	424	429	433	438	443	7   3.5
880		448	453	458	463	468	473	478	483	488	493	8   4.0
881		498	503	507	512	517	522	527	532	537	542	9   4.5
882		547	552	557	562	567	571	576	581	586	591	
883		596	601	606	611	616	621	626	630	635	640	
884		645	650	655	660	665	670	675	680	685	689	
885		694	699	704	709	714	719	724	729	734	738	
886		743	748	753	758	763	768	773	778	783	787	4
887		792	797	802	807	812	817	822	827	832	836	
888		841	846	851	856	861	866	871	876	880	885	1   0.4
889		890	895	900	905	910	915	919	924	929	934	2   0.8
890		939	944	949	954	959	963	968	973	978	983	3   1.2
891		988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032	4   1.6
892	95	036	041	046	051	056	061	066	071	075	080	5   2.0
893		085	090	095	100	105	109	114	119	124	129	6   2.4
894		134	139	143	148	153	158	163	168	173	177	7   2.8
895		182	187	192	197	202	207	211	216	221	226	8   3.2
896		231	236	240	245	250	255	260	265	270	274	9   3.6
897		279	284	289	294	299	303	308	313	318	323	
898		328	332	337	342	347	352	357	361	366	371	
899		376	381	386	390	395	400	405	410	415	419	
900		424	429	434	439	444	448	453	458	463	468	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP	

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>900</b>	95 424	429	434	439	444	448	453	458	463	468	
901	472	477	482	487	492	497	501	506	511	516	
902	521	525	530	535	540	545	550	554	559	564	
903	569	574	578	583	588	593	598	602	607	612	
904	617	622	626	631	636	641	646	650	655	660	
<b>905</b>	665	670	674	679	684	689	694	698	703	708	
906	713	718	722	727	732	737	742	746	751	756	
907	761	766	770	775	780	785	789	794	799	804	
908	809	813	818	823	828	832	837	842	847	852	
909	856	861	866	871	875	880	885	890	895	899	
<b>910</b>	904	909	914	918	923	928	933	938	942	947	
911	952	957	961	966	971	976	980	985	990	995	5
912	999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042	
913	96 047	052	057	061	066	071	076	080	085	090	1   0.5
914	095	099	104	019	114	118	123	128	133	137	2   1.0
<b>915</b>	142	147	152	156	161	166	171	175	180	185	3   1.5
916	190	194	199	204	209	213	218	223	227	232	4   2.0
917	237	242	246	251	256	261	265	270	275	280	5   2.5
918	284	289	294	298	303	308	313	317	322	327	6   3.0
919	332	336	341	346	350	355	360	365	369	374	7   3.5
<b>920</b>	379	384	388	393	398	402	407	412	417	421	8   4.0
921	426	431	435	440	445	450	454	459	464	468	9   4.5
922	473	478	483	487	492	497	501	506	511	515	
923	520	525	530	534	539	544	548	553	558	562	
924	567	572	577	581	586	591	595	600	605	609	
<b>925</b>	614	619	624	628	633	638	642	647	652	656	
926	661	666	670	675	680	685	689	694	699	703	
927	708	713	717	722	727	731	736	741	745	750	
928	755	759	764	769	774	778	783	788	792	797	
929	802	806	811	816	820	825	830	834	839	844	
<b>930</b>	848	853	858	862	867	872	876	881	886	890	
931	895	900	904	909	914	918	923	928	932	937	4
932	942	946	951	956	960	965	970	974	979	984	
933	988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030	1   0.4
934	97 035	039	044	049	053	058	063	067	072	077	2   0.8
<b>935</b>	081	086	090	095	100	104	109	114	118	123	3   1.2
936	128	132	137	142	146	151	155	160	165	169	4   1.6
937	174	179	183	188	192	197	202	206	211	216	5   2.0
938	220	225	230	234	239	243	248	253	257	262	6   2.4
939	267	271	276	280	285	290	294	299	304	308	7   2.8
<b>940</b>	313	317	322	327	331	336	340	345	350	354	8   3.2
941	359	364	368	373	377	382	387	391	396	400	9   3.6
942	405	410	414	419	424	428	433	437	442	447	
943	451	456	460	465	470	474	479	483	488	493	
944	497	502	506	511	516	520	525	529	534	539	
<b>945</b>	543	548	552	557	562	566	571	575	580	585	
946	589	594	598	603	607	612	617	621	626	630	
947	635	640	644	649	653	658	663	667	672	676	
948	681	685	690	695	699	704	708	713	717	722	
949	727	731	736	740	745	749	754	759	763	768	
<b>950</b>	772	777	782	786	791	795	800	804	809	813	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
<b>950</b>	97 772	777	782	785	791	795	800	804	809	813	
951	818	823	827	832	836	841	845	850	855	859	
952	864	868	873	877	882	886	891	896	900	905	
953	909	914	918	923	928	932	937	941	946	950	
954	955	959	964	968	973	978	982	987	991	996	
<b>955</b>	98 000	005	009	014	019	023	028	032	037	041	
956	046	050	055	059	064	068	073	078	082	087	
957	091	096	100	105	109	114	118	123	127	132	
958	137	141	146	150	155	159	164	168	173	177	
959	182	186	191	195	200	204	209	214	218	223	
<b>960</b>	227	232	236	241	245	250	254	259	263	268	
961	272	277	281	286	290	295	299	304	308	313	5
962	318	322	327	331	336	340	345	349	354	358	1 0.5
963	363	367	372	376	381	385	390	394	399	403	2 1.0
964	408	412	417	421	426	430	435	439	444	448	3 1.5
<b>965</b>	453	457	462	466	471	475	480	484	489	493	4 2.0
966	498	502	507	511	516	520	525	529	534	538	5 2.5
967	543	547	552	556	561	565	570	574	579	583	6 3.0
968	588	592	597	601	605	610	614	619	623	628	7 3.5
969	632	637	641	646	650	655	659	664	668	673	8 4.0
<b>970</b>	677	682	686	691	695	700	704	709	713	717	9 4.5
971	722	726	731	735	740	744	749	753	758	762	
972	767	771	776	780	784	789	793	798	802	807	
973	811	816	820	825	829	834	838	843	847	851	
974	856	860	865	869	874	878	883	887	892	896	
<b>975</b>	900	905	909	914	918	923	927	932	936	941	
976	945	949	954	958	963	967	972	976	981	985	
977	989	994	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029	
978	99 034	038	043	047	052	056	061	065	069	074	
979	078	083	087	092	096	100	105	109	114	118	
<b>980</b>	123	127	131	136	140	145	149	154	158	162	
981	167	171	176	180	185	189	193	198	202	207	4
982	211	216	220	224	229	233	238	242	247	251	1 0.4
983	255	260	264	269	273	277	282	286	291	295	2 0.8
984	300	304	308	313	317	322	326	330	335	339	3 1.2
<b>985</b>	344	348	352	357	361	366	370	374	379	383	4 1.6
986	388	392	396	401	405	410	414	419	423	427	5 2.0
987	432	436	441	445	449	454	458	463	467	471	6 2.4
988	476	480	484	489	493	498	502	506	511	515	7 2.8
989	520	524	528	533	537	542	546	550	555	559	8 3.2
<b>990</b>	564	568	572	577	581	585	590	594	599	603	9 3.6
991	607	612	616	621	625	629	634	638	642	647	
992	651	656	660	664	669	673	677	682	686	691	
993	695	699	704	708	712	717	721	726	730	734	
994	739	743	747	752	756	760	765	769	774	778	
<b>995</b>	782	787	791	795	800	804	808	813	817	822	
996	826	830	835	839	843	848	852	856	861	865	
997	870	874	878	883	887	891	896	900	904	909	
998	913	917	922	926	930	935	939	944	948	952	
999	957	961	965	970	974	978	983	987	991	996	
<b>1000</b>	00 000	004	009	013	017	022	026	030	035	039	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

## 表 II

### 三角函數之常用對數

自 $0'$ 至 $3'$ 及 $89^{\circ}57'$ 至 $90^{\circ}$ 載有每秒之對數

自 $3'$ 至 $2^{\circ}$ 及 $88^{\circ}$ 至 $89^{\circ}57'$ 載有每十秒之對數

自 $2^{\circ}$ 至 $88^{\circ}$ 載有每分之對數





L Sin and L Tan				L Sin and L Tan					
"	0'	1'	2'	"	"	0'	1'	2'	"
<b>0</b>	—	6.46 373	6.76 476	<b>60</b>	<b>30</b>	6.16 270	6.63 982	6.86 167	<b>30</b>
1	4.68 557	6.47 090	6.76 836	59	31	6.17 694	6.64 462	6.86 455	29
2	4.98 660	6.47 797	6.77 193	58	32	6.19 072	6.64 936	6.86 742	28
3	5.16 270	6.48 492	6.77 548	57	33	6.20 409	6.65 406	6.87 027	27
4	5.28 763	6.49 175	6.77 900	56	34	6.21 705	6.65 876	6.87 310	26
<b>5</b>	5.38 454	6.49 849	6.78 248	<b>55</b>	<b>35</b>	6.22 964	6.66 330	6.87 591	<b>25</b>
6	5.46 373	6.50 512	6.78 595	54	36	6.24 188	6.66 785	6.87 870	24
7	5.53 067	6.51 165	6.78 938	53	37	6.25 378	6.67 235	6.88 147	23
8	5.58 866	6.51 808	6.79 278	52	38	6.26 536	6.67 680	6.88 423	22
9	5.63 982	6.52 442	6.79 616	51	39	6.27 664	6.68 121	6.88 697	21
<b>10</b>	5.68 557	6.53 067	6.79 952	<b>50</b>	<b>40</b>	6.28 763	6.68 557	6.88 969	<b>20</b>
11	5.72 697	6.53 683	6.80 285	49	41	6.29 836	6.68 990	6.89 240	19
12	5.76 476	6.54 291	6.80 615	48	42	6.30 882	6.69 418	6.89 509	18
13	5.79 952	6.54 890	6.80 943	47	43	6.31 904	6.69 841	6.89 776	17
14	5.83 170	6.55 481	6.81 268	46	44	6.32 903	6.70 261	6.90 042	16
<b>15</b>	5.86 167	6.56 064	6.81 591	<b>45</b>	<b>45</b>	6.33 879	6.70 676	6.90 306	<b>15</b>
16	5.88 969	6.56 639	6.81 911	44	46	6.34 833	6.71 088	6.90 568	14
17	5.91 602	6.57 207	6.82 230	43	47	6.35 767	6.71 496	6.90 829	13
18	5.94 085	6.57 767	6.82 545	42	48	6.36 682	6.71 900	6.91 088	12
19	5.96 433	6.58 320	6.82 859	41	49	6.37 577	6.72 300	6.91 346	11
<b>20</b>	5.98 660	6.58 866	6.83 170	<b>40</b>	<b>50</b>	6.38 454	6.72 697	6.91 602	<b>10</b>
21	6.00 779	6.59 406	6.83 479	39	51	6.39 315	6.73 090	6.91 857	9
22	6.02 800	6.59 939	6.83 786	38	52	6.40 158	6.73 479	6.92 110	8
23	6.04 730	6.60 465	6.84 091	37	53	6.40 985	6.73 865	6.92 362	7
24	6.06 579	6.60 985	6.84 394	36	54	6.41 797	6.74 248	6.92 612	6
<b>25</b>	6.08 351	6.61 499	6.84 694	<b>35</b>	<b>55</b>	6.42 594	6.74 627	6.92 861	<b>5</b>
26	6.10 055	6.62 007	6.84 993	34	56	6.43 376	6.75 003	6.93 109	4
27	6.11 694	6.62 509	6.85 289	33	57	6.44 145	6.75 376	6.93 355	3
28	6.13 273	6.63 006	6.85 584	32	58	6.44 900	6.75 746	6.93 599	2
29	6.14 797	6.63 496	6.85 876	31	59	6.45 648	6.76 112	6.93 843	1
<b>30</b>	6.16 270	6.63 982	6.86 167	<b>30</b>	<b>60</b>	6.46 373	6.76 476	6.94 085	<b>0</b>
"	59'	58'	57'	"	"	59'	58'	57'	"
L Cos and L Cot				L Cos and L Cot					

89°57'—三角函數之常用對數表—90°

由本頁取出之每一對數後均須添寫 -10

					' "	L Sin	L Cos	L Tan	" '
					' "	L Sin	L Cos	L Tan	" '
小於3 或大於89°57'					10 0	7.46 373	0.00 000	7.46 373	0 60
					10 10	7.47 090	0.00 000	7.47 091	50
					20 7.47 797	0.00 000	7.47 797	40	
					30 7.48 491	0.00 000	7.48 492	30	
					40 7.49 175	0.00 000	7.49 178	20	
角之函數已見前頁					50 7.49 849	0.00 000	7.49 849	10	
					11 0	7.50 512	0.00 000	7.50 512	0 49
					10 7.51 165	0.00 000	7.51 165	50	
					20 7.51 808	0.00 000	7.51 809	40	
					30 7.52 442	0.00 000	7.52 443	30	
					40 7.53 067	0.00 000	7.53 067	20	
					50 7.53 683	0.00 000	7.53 683	10	
					12 0	7.54 291	0.00 000	7.54 291	0 48
					10 7.54 890	0.00 000	7.54 890	50	
					20 7.55 481	0.00 000	7.55 481	40	
					30 7.55 064	0.00 000	7.55 064	30	
					40 7.56 639	0.00 000	7.56 639	20	
					50 7.57 206	0.00 000	7.57 207	10	
					13 0	7.57 767	0.00 000	7.57 767	0 47
					10 7.58 320	0.00 000	7.58 320	50	
					20 7.58 866	0.00 000	7.58 867	40	
					30 7.59 406	0.00 000	7.59 406	30	
					40 7.59 939	0.00 000	7.59 939	20	
					50 7.60 465	0.00 000	7.60 466	10	
					14 0	7.60 985	0.00 000	7.60 986	0 46
					10 7.61 499	0.00 000	7.61 500	50	
					20 7.62 007	0.00 000	7.62 008	40	
					30 7.62 509	0.00 000	7.62 510	30	
					40 7.63 006	0.00 000	7.63 006	20	
					50 7.63 496	0.00 000	7.63 497	10	
					15 0	7.62 982	0.00 000	7.63 982	0 45
					10 7.64 461	0.00 000	7.64 462	50	
					20 7.64 936	0.00 000	7.64 937	40	
					30 7.65 406	0.00 000	7.65 406	30	
					40 7.65 870	0.00 000	7.65 871	20	
					50 7.66 330	0.00 000	7.66 330	10	
					16 0	7.66 784	0.00 000	7.66 785	0 44
					10 7.67 235	0.00 000	7.67 235	50	
					20 7.67 680	0.00 000	7.67 680	40	
					30 7.68 121	0.00 000	7.68 121	30	
					40 7.68 557	9.99 999	7.68 558	20	
					50 7.68 989	9.99 999	7.68 990	10	
					17 0	7.69 417	9.99 999	7.69 418	0 43
					10 7.69 841	9.99 999	7.69 842	50	
					20 7.70 261	9.99 999	7.70 261	40	
					30 7.70 676	9.99 999	7.70 677	30	
					40 7.71 088	9.99 999	7.71 088	20	
					50 7.71 496	9.99 999	7.71 496	10	
					18 0	7.71 900	9.99 999	7.71 900	0 43
					10 7.72 300	9.99 999	7.72 301	50	
					20 7.72 697	9.99 999	7.72 697	40	
					30 7.73 090	9.99 999	7.73 090	30	
					40 7.73 479	9.99 999	7.73 480	20	
					50 7.73 865	9.99 999	7.73 866	10	
					19 0	7.74 248	9.99 999	7.74 248	0 41
					10 7.74 627	9.99 999	7.74 628	50	
					20 7.75 003	9.99 999	7.75 004	40	
					30 7.75 376	9.99 999	7.75 377	30	
					40 7.75 745	9.99 999	7.75 746	20	
					50 7.76 112	9.99 999	7.76 113	10	
20 0	7.76 475	9.99 999	7.76 476	0 40					
' "	L Cos	L Sin	L Cot	" '	' "	L Cos	L Sin	L Cot	" '

' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "	' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "
20 0	7.76 476	9.99 999	7.76 476	0 40	50 0	7.94 084	9.99 998	7.94 086	0 30
10	7.76 836	9.99 999	7.76 837	50	10	7.94 325	9.99 998	7.94 326	50
20	7.77 193	9.99 999	7.77 194	40	20	7.94 564	9.99 998	7.94 566	40
30	7.77 548	9.99 999	7.77 549	30	30	7.94 802	9.99 998	7.94 804	30
40	7.77 899	9.99 999	7.77 900	20	40	7.95 039	9.99 998	7.95 040	20
50	7.78 248	9.99 999	7.78 249	10	50	7.95 274	9.99 998	7.95 276	10
21 0	7.78 594	9.99 999	7.78 595	0 39	51 0	7.95 508	9.99 998	7.95 510	0 29
10	7.78 938	9.99 999	7.78 938	50	10	7.95 741	9.99 998	7.95 743	50
20	7.79 278	9.99 999	7.79 279	40	20	7.95 973	9.99 998	7.95 974	40
30	7.79 618	9.99 999	7.79 617	30	30	7.96 203	9.99 998	7.96 205	30
40	7.79 952	9.99 999	7.79 952	20	40	7.96 432	9.99 998	7.96 434	20
50	7.80 284	9.99 999	7.80 285	10	50	7.96 660	9.99 998	7.96 662	10
22 0	7.80 615	9.99 999	7.80 615	0 38	52 0	7.96 887	9.99 998	7.96 889	0 28
10	7.80 942	9.99 999	7.80 943	50	10	7.97 113	9.99 998	7.97 114	50
20	7.81 268	9.99 999	7.81 269	40	20	7.97 337	9.99 998	7.97 339	40
30	7.81 591	9.99 999	7.81 591	30	30	7.97 560	9.99 998	7.97 562	30
40	7.81 911	9.99 999	7.81 912	20	40	7.97 782	9.99 998	7.97 784	20
50	7.82 229	9.99 999	7.82 230	10	50	7.98 003	9.99 998	7.98 005	10
23 0	7.82 545	9.99 999	7.82 546	0 37	53 0	7.98 223	9.99 998	7.98 225	0 27
10	7.82 859	9.99 999	7.82 860	50	10	7.98 442	9.99 998	7.98 444	50
20	7.83 170	9.99 999	7.83 171	40	20	7.98 660	9.99 998	7.98 662	40
30	7.83 479	9.99 999	7.83 480	30	30	7.98 876	9.99 998	7.98 878	30
40	7.83 786	9.99 999	7.83 787	20	40	7.99 092	9.99 998	7.99 094	20
50	7.84 091	9.99 999	7.84 092	10	50	7.99 306	9.99 998	7.99 308	10
24 0	7.84 393	9.99 999	7.84 394	0 36	54 0	7.99 520	9.99 998	7.99 522	0 26
10	7.84 694	9.99 999	7.84 695	50	10	7.99 732	9.99 998	7.99 734	50
20	7.84 992	9.99 999	7.84 994	40	20	7.99 943	9.99 998	7.99 946	40
30	7.85 289	9.99 999	7.85 290	30	30	8.00 154	9.99 998	8.00 156	30
40	7.85 583	9.99 999	7.85 584	20	40	8.00 363	9.99 998	8.00 365	20
50	7.85 876	9.99 999	7.85 877	10	50	8.00 571	9.99 998	8.00 574	10
25 0	7.86 168	9.99 999	7.86 167	0 35	55 0	8.00 779	9.99 998	8.00 781	0 25
10	7.86 455	9.99 999	7.86 456	50	10	8.00 985	9.99 998	8.00 987	50
20	7.86 741	9.99 999	7.86 743	40	20	8.01 160	9.99 998	8.01 193	40
30	7.87 026	9.99 999	7.87 027	30	30	8.01 295	9.99 998	8.01 397	30
40	7.87 309	9.99 999	7.87 310	20	40	8.01 598	9.99 998	8.01 600	20
50	7.87 590	9.99 999	7.87 591	10	50	8.01 801	9.99 998	8.01 803	10
26 0	7.87 870	9.99 999	7.87 871	0 34	56 0	8.02 002	9.99 998	8.02 004	0 24
10	7.88 147	9.99 999	7.88 148	50	10	8.02 203	9.99 998	8.02 205	50
20	7.88 423	9.99 999	7.88 424	40	20	8.02 402	9.99 998	8.02 405	40
30	7.88 697	9.99 999	7.88 698	30	30	8.02 601	9.99 998	8.02 604	30
40	7.88 969	9.99 999	7.88 970	20	40	8.02 799	9.99 998	8.02 801	20
50	7.89 240	9.99 999	7.89 241	10	50	8.02 996	9.99 998	8.02 998	10
27 0	7.89 509	9.99 999	7.89 510	0 33	57 0	8.03 192	9.99 997	8.03 194	0 23
10	7.89 776	9.99 999	7.89 777	50	10	8.03 387	9.99 997	8.03 390	50
20	7.90 041	9.99 999	7.90 043	40	20	8.03 581	9.99 997	8.03 584	40
30	7.90 305	9.99 999	7.90 307	30	30	8.03 775	9.99 997	8.03 777	30
40	7.90 568	9.99 999	7.90 569	20	40	8.03 967	9.99 997	8.03 970	20
50	7.90 829	9.99 999	7.90 830	10	50	8.04 159	9.99 997	8.04 162	10
28 0	7.91 088	9.99 999	7.91 089	0 32	58 0	8.04 350	9.99 997	8.04 353	0 22
10	7.91 346	9.99 999	7.91 347	50	10	8.04 540	9.99 997	8.04 543	50
20	7.91 602	9.99 999	7.91 603	40	20	8.04 729	9.99 997	8.04 732	40
30	7.91 857	9.99 999	7.91 858	30	30	8.04 918	9.99 997	8.04 921	30
40	7.92 110	9.99 998	7.92 111	20	40	8.05 105	9.99 997	8.05 108	20
50	7.92 362	9.99 998	7.92 363	10	50	8.05 292	9.99 997	8.05 295	10
29 0	7.92 612	9.99 998	7.92 613	0 31	59 0	8.05 478	9.99 997	8.05 481	0 21
10	7.92 861	9.99 998	7.92 862	50	10	8.05 663	9.99 997	8.05 666	50
20	7.93 108	9.99 998	7.93 110	40	20	8.05 848	9.99 997	8.05 851	40
30	7.93 354	9.99 998	7.93 356	30	30	8.06 031	9.99 997	8.06 034	30
40	7.93 599	9.99 998	7.93 601	20	40	8.06 214	9.99 997	8.06 217	20
50	7.93 842	9.99 998	7.93 844	10	50	8.06 396	9.99 997	8.06 399	10
30 0	7.94 084	9.99 998	7.94 086	0 30	40 0	8.06 578	9.99 997	8.06 581	0 20

' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "	' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "
40 0	8.06 578	9.99 997	8.06 581	0 20	50 0	8.16 268	9.99 995	8.16 273	0 10
10	8.06 758	9.99 997	8.06 761	50	10	8.16 413	9.99 995	8.16 417	50
20	8.06 938	9.99 997	8.06 941	40	20	8.16 557	9.99 995	8.16 561	40
30	8.07 117	9.99 997	8.07 120	30	30	8.16 700	9.99 995	8.16 705	30
40	8.07 295	9.99 997	8.07 299	20	40	8.16 843	9.99 995	8.16 848	20
50	8.07 473	9.99 997	8.07 476	10	50	8.16 986	9.99 995	8.16 991	10
41 0	8.07 650	9.99 997	8.07 653	0 19	51 0	8.17 128	9.99 995	8.17 133	0 9
10	8.07 826	9.99 997	8.07 829	50	10	8.17 270	9.99 995	8.17 275	50
20	8.08 002	9.99 997	8.08 005	40	20	8.17 411	9.99 995	8.17 416	40
30	8.08 176	9.99 997	8.08 180	30	30	8.17 552	9.99 995	8.17 557	30
40	8.08 350	9.99 997	8.08 354	20	40	8.17 692	9.99 995	8.17 697	20
50	8.08 524	9.99 997	8.08 527	10	50	8.17 832	9.99 995	8.17 837	10
42 0	8.08 696	9.99 997	8.08 700	0 18	52 0	8.17 971	9.99 995	8.17 976	0 8
10	8.08 868	9.99 997	8.08 872	50	10	8.18 110	9.99 995	8.18 115	50
20	8.09 040	9.99 997	8.09 043	40	20	8.18 249	9.99 995	8.18 254	40
30	8.09 210	9.99 997	8.09 214	30	30	8.18 387	9.99 995	8.18 392	30
40	8.09 380	9.99 997	8.09 384	20	40	8.18 524	9.99 995	8.18 530	20
50	8.09 550	9.99 997	8.09 553	10	50	8.18 662	9.99 995	8.18 667	10
43 0	8.09 718	9.99 997	8.09 722	0 17	53 0	8.18 798	9.99 995	8.18 804	0 7
10	8.09 886	9.99 997	8.09 890	50	10	8.18 935	9.99 995	8.18 940	50
20	8.10 054	9.99 997	8.10 057	40	20	8.19 071	9.99 995	8.19 076	40
30	8.10 220	9.99 997	8.10 224	30	30	8.19 206	9.99 995	8.19 212	30
40	8.10 386	9.99 997	8.10 390	20	40	8.19 341	9.99 995	8.19 347	20
50	8.10 552	9.99 996	8.10 555	10	50	8.19 476	9.99 995	8.19 481	10
44 0	8.10 717	9.99 996	8.10 720	0 16	54 0	8.19 610	9.99 995	8.19 616	0 6
10	8.10 881	9.99 996	8.10 884	50	10	8.19 744	9.99 995	8.19 749	50
20	8.11 044	9.99 996	8.11 048	40	20	8.19 877	9.99 995	8.19 883	40
30	8.11 207	9.99 996	8.11 211	30	30	8.20 010	9.99 995	8.20 016	30
40	8.11 370	9.99 996	8.11 373	20	40	8.20 143	9.99 995	8.20 149	20
50	8.11 531	9.99 996	8.11 535	10	50	8.20 275	9.99 994	8.20 281	10
45 0	8.11 693	9.99 996	8.11 696	0 15	55 0	8.20 407	9.99 994	8.20 413	0 5
10	8.11 853	9.99 996	8.11 857	50	10	8.20 538	9.99 994	8.20 544	50
20	8.12 013	9.99 996	8.12 017	40	20	8.20 669	9.99 994	8.20 675	40
30	8.12 172	9.99 996	8.12 176	30	30	8.20 800	9.99 994	8.20 806	30
40	8.12 331	9.99 996	8.12 335	20	40	8.20 930	9.99 994	8.20 936	20
50	8.12 489	9.99 996	8.12 493	10	50	8.21 060	9.99 994	8.21 066	10
46 0	8.12 647	9.99 996	8.12 651	0 14	56 0	8.21 189	9.99 994	8.21 195	0 4
10	8.12 804	9.99 996	8.12 808	50	10	8.21 319	9.99 994	8.21 324	50
20	8.12 961	9.99 996	8.12 965	40	20	8.21 447	9.99 994	8.21 453	40
30	8.13 117	9.99 996	8.13 121	30	30	8.21 576	9.99 994	8.21 581	30
40	8.13 272	9.99 996	8.13 276	20	40	8.21 703	9.99 994	8.21 709	20
50	8.13 427	9.99 996	8.13 431	10	50	8.21 831	9.99 994	8.21 837	10
47 0	8.13 581	9.99 996	8.13 585	0 13	57 0	8.21 958	9.99 994	8.21 964	0 3
10	8.13 735	9.99 996	8.13 739	50	10	8.22 085	9.99 994	8.22 091	50
20	8.13 888	9.99 996	8.13 892	40	20	8.22 211	9.99 994	8.22 217	40
30	8.14 041	9.99 996	8.14 045	30	30	8.22 337	9.99 994	8.22 343	30
40	8.14 193	9.99 996	8.14 197	20	40	8.22 463	9.99 994	8.22 469	20
50	8.14 344	9.99 996	8.14 348	10	50	8.22 588	9.99 994	8.22 595	10
48 0	8.14 495	9.99 996	8.14 500	0 12	58 0	8.22 713	9.99 994	8.22 720	0 2
10	8.14 646	9.99 996	8.14 650	50	10	8.22 838	9.99 994	8.22 844	50
20	8.14 796	9.99 996	8.14 800	40	20	8.22 962	9.99 994	8.22 968	40
30	8.14 945	9.99 996	8.14 950	30	30	8.23 086	9.99 994	8.23 092	30
40	8.15 094	9.99 996	8.15 099	20	40	8.23 210	9.99 994	8.23 216	20
50	8.15 243	9.99 996	8.15 247	10	50	8.23 333	9.99 994	8.23 339	10
49 0	8.15 391	9.99 996	8.15 395	0 11	59 0	8.23 456	9.99 994	8.23 462	0 1
10	8.15 538	9.99 996	8.15 543	50	10	8.23 578	9.99 994	8.23 585	50
20	8.15 685	9.99 996	8.15 690	40	20	8.23 700	9.99 994	8.23 707	40
30	8.15 832	9.99 996	8.15 836	30	30	8.23 822	9.99 993	8.23 829	30
40	8.15 978	9.99 995	8.15 982	20	40	8.23 944	9.99 993	8.23 950	20
50	8.16 123	9.99 995	8.16 128	10	50	8.24 065	9.99 993	8.24 071	10
50 0	8.16 268	9.99 995	8.16 273	0 10	60 0	8.24 186	9.99 993	8.24 192	0 0

' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "	' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "
0 0	8.24 186	9.99 993	8.24 192	0 60	10 0	8.30 879	9.99 991	8.30 888	0 60
10	8.24 306	9.99 993	8.24 313	50	10	8.30 983	9.99 991	8.30 992	50
20	8.24 426	9.99 993	8.24 433	40	20	8.31 086	9.99 991	8.31 095	40
30	8.24 546	9.99 993	8.24 553	30	30	8.31 188	9.99 991	8.31 198	30
40	8.24 665	9.99 993	8.24 672	20	40	8.31 291	9.99 991	8.31 300	20
50	8.24 785	9.99 993	8.24 791	10	50	8.31 393	9.99 991	8.31 403	10
1 0	8.24 903	9.99 993	8.24 910	0 59	11 0	8.31 495	9.99 991	8.31 505	0 49
10	8.25 022	9.99 993	8.25 029	50	10	8.31 597	9.99 991	8.31 606	50
20	8.25 140	9.99 993	8.25 147	40	20	8.31 699	9.99 991	8.31 708	40
30	8.25 258	9.99 993	8.25 265	30	30	8.31 800	9.99 991	8.31 809	30
40	8.25 375	9.99 993	8.25 382	20	40	8.31 901	9.99 991	8.31 911	20
50	8.25 493	9.99 993	8.25 500	10	50	8.32 002	9.99 991	8.32 012	10
2 0	8.25 609	9.99 993	8.25 616	0 58	12 0	8.32 103	9.99 990	8.32 112	0 48
10	8.25 726	9.99 993	8.25 733	50	10	8.32 203	9.99 990	8.32 213	50
20	8.25 842	9.99 993	8.25 849	40	20	8.32 303	9.99 990	8.32 313	40
30	8.25 958	9.99 993	8.25 965	30	30	8.32 403	9.99 990	8.32 413	30
40	8.26 074	9.99 993	8.26 081	20	40	8.32 503	9.99 990	8.32 513	20
50	8.26 189	9.99 993	8.26 196	10	50	8.32 602	9.99 990	8.32 612	10
3 0	8.26 304	9.99 993	8.26 312	0 57	13 0	8.32 702	9.99 990	8.32 711	0 47
10	8.26 419	9.99 993	8.26 426	50	10	8.32 801	9.99 990	8.32 811	50
20	8.26 533	9.99 993	8.26 541	40	20	8.32 899	9.99 990	8.32 909	40
30	8.26 648	9.99 993	8.26 655	30	30	8.32 998	9.99 990	8.33 008	30
40	8.26 761	9.99 993	8.26 769	20	40	8.33 096	9.99 990	8.33 106	20
50	8.26 875	9.99 993	8.26 882	10	50	8.33 195	9.99 990	8.33 205	10
4 0	8.26 988	9.99 992	8.26 996	0 56	14 0	8.33 292	9.99 990	8.33 302	0 46
10	8.27 101	9.99 992	8.27 109	50	10	8.33 390	9.99 990	8.33 400	50
20	8.27 214	9.99 992	8.27 221	40	20	8.33 488	9.99 990	8.33 498	40
30	8.27 326	9.99 992	8.27 334	30	30	8.33 585	9.99 990	8.33 595	30
40	8.27 438	9.99 992	8.27 446	20	40	8.33 682	9.99 990	8.33 692	20
50	8.27 550	9.99 992	8.27 558	10	50	8.33 779	9.99 990	8.33 789	10
5 0	8.27 661	9.99 992	8.27 669	0 55	15 0	8.33 875	9.99 990	8.33 886	0 45
10	8.27 773	9.99 992	8.27 780	50	10	8.33 972	9.99 990	8.33 982	50
20	8.27 883	9.99 992	8.27 891	40	20	8.34 068	9.99 990	8.34 078	40
30	8.27 994	9.99 992	8.28 002	30	30	8.34 164	9.99 990	8.34 174	30
40	8.28 104	9.99 992	8.28 112	20	40	8.34 260	9.99 989	8.34 270	20
50	8.28 215	9.99 992	8.28 223	10	50	8.34 355	9.99 989	8.34 366	10
6 0	8.28 324	9.99 992	8.28 332	0 54	16 0	8.34 450	9.99 989	8.34 461	0 44
10	8.28 434	9.99 992	8.28 442	50	10	8.34 546	9.99 989	8.34 556	50
20	8.28 543	9.99 992	8.28 551	40	20	8.34 640	9.99 989	8.34 651	40
30	8.28 652	9.99 992	8.28 660	30	30	8.34 735	9.99 989	8.34 746	30
40	8.28 761	9.99 992	8.28 769	20	40	8.34 830	9.99 989	8.34 840	20
50	8.28 869	9.99 992	8.28 877	10	50	8.34 924	9.99 989	8.34 935	10
7 0	8.28 977	9.99 992	8.28 986	0 53	17 0	8.35 018	9.99 989	8.35 029	0 43
10	8.29 085	9.99 992	8.29 094	50	10	8.35 112	9.99 989	8.35 123	50
20	8.29 193	9.99 992	8.29 201	40	20	8.35 206	9.99 989	8.35 217	40
30	8.29 300	9.99 992	8.29 309	30	30	8.35 299	9.99 989	8.35 310	30
40	8.29 407	9.99 992	8.29 416	20	40	8.35 392	9.99 989	8.35 403	20
50	8.29 514	9.99 992	8.29 523	10	50	8.35 485	9.99 989	8.35 497	10
8 0	8.29 621	9.99 992	8.29 629	0 52	18 0	8.35 578	9.99 989	8.35 590	0 42
10	8.29 727	9.99 991	8.29 736	50	10	8.35 671	9.99 989	8.35 682	50
20	8.29 833	9.99 991	8.29 842	40	20	8.35 764	9.99 989	8.35 775	40
30	8.29 939	9.99 991	8.29 947	30	30	8.35 856	9.99 989	8.35 867	30
40	8.30 044	9.99 991	8.30 053	20	40	8.35 948	9.99 989	8.35 959	20
50	8.30 150	9.99 991	8.30 158	10	50	8.36 040	9.99 989	8.36 051	10
9 0	8.30 255	9.99 991	8.30 263	0 51	19 0	8.36 131	9.99 989	8.36 143	0 41
10	8.30 359	9.99 991	8.30 368	50	10	8.36 223	9.99 988	8.36 235	50
20	8.30 464	9.99 991	8.30 473	40	20	8.36 314	9.99 988	8.36 326	40
30	8.30 568	9.99 991	8.30 577	30	30	8.36 405	9.99 988	8.36 417	30
40	8.30 672	9.99 991	8.30 681	20	40	8.36 496	9.99 988	8.36 508	20
50	8.30 776	9.99 991	8.30 785	10	50	8.36 587	9.99 988	8.36 599	10
10 0	8.30 879	9.99 991	8.30 888	0 50	20 0	8.36 678	9.99 988	8.36 689	0 40
' "	L Cos	L Sin	L Cot	' "	' "	L Cos	L Sin	L Cot	' "

' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "	' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "
20 0	8.36 678	9.99 988	8.36 689	0 40	30 0	8.41 792	9.99 985	8.41 807	0 30
10	8.36 768	9.99 988	8.36 780	50	10	8.41 872	9.99 985	8.41 887	50
20	8.36 858	9.99 988	8.36 870	40	20	8.41 952	9.99 985	8.41 967	40
30	8.36 948	9.99 988	8.36 960	30	30	8.42 032	9.99 985	8.42 048	30
40	8.37 038	9.99 988	8.37 050	20	40	8.42 112	9.99 985	8.42 127	20
50	8.37 128	9.99 988	8.37 140	10	50	8.42 192	9.99 985	8.42 207	10
21 0	8.37 217	9.99 988	8.37 229	0 39	31 0	8.42 272	9.99 985	8.42 287	0 29
10	8.37 306	9.99 988	8.37 318	50	10	8.42 351	9.99 985	8.42 366	50
20	8.37 395	9.99 988	8.37 408	40	20	8.42 430	9.99 985	8.42 445	40
30	8.37 484	9.99 988	8.37 497	30	30	8.42 510	9.99 985	8.42 525	30
40	8.37 573	9.99 988	8.37 585	20	40	8.42 589	9.99 985	8.42 606	20
50	8.37 062	9.99 988	8.37 674	10	50	8.42 667	9.99 985	8.42 683	10
22 0	8.37 750	9.99 988	8.37 762	0 38	32 0	8.42 745	9.99 984	8.42 762	0 28
10	8.37 838	9.99 988	8.37 850	50	10	8.42 825	9.99 984	8.42 840	50
20	8.37 926	9.99 988	8.37 938	40	20	8.42 903	9.99 984	8.42 919	40
30	8.38 014	9.99 987	8.38 026	30	30	8.42 982	9.99 984	8.42 997	30
40	8.38 101	9.99 987	8.38 114	20	40	8.43 060	9.99 984	8.43 075	20
50	8.38 189	9.99 987	8.38 202	10	50	8.43 138	9.99 984	8.43 154	10
23 0	8.38 276	9.99 987	8.38 289	0 37	33 0	8.43 216	9.99 984	8.43 232	0 27
10	8.38 363	9.99 987	8.38 376	50	10	8.43 293	9.99 984	8.43 309	50
20	8.38 450	9.99 987	8.38 463	40	20	8.43 371	9.99 984	8.43 387	40
30	8.38 537	9.99 987	8.38 550	30	30	8.43 448	9.99 984	8.43 464	30
40	8.38 624	9.99 987	8.38 636	20	40	8.43 526	9.99 984	8.43 542	20
50	8.38 710	9.99 987	8.38 723	10	50	8.43 603	9.99 984	8.43 619	10
24 0	8.38 796	9.99 987	8.38 809	0 36	34 0	8.43 680	9.99 984	8.43 696	0 26
10	8.38 882	9.99 987	8.38 895	50	10	8.43 757	9.99 984	8.43 773	50
20	8.38 968	9.99 987	8.38 981	40	20	8.43 834	9.99 984	8.43 850	40
30	8.39 054	9.99 987	8.39 067	30	30	8.43 910	9.99 984	8.43 927	30
40	8.39 139	9.99 987	8.39 153	20	40	8.43 987	9.99 984	8.44 003	20
50	8.39 225	9.99 987	8.39 238	10	50	8.44 063	9.99 983	8.44 080	10
25 0	8.39 310	9.99 987	8.39 323	0 35	35 0	8.44 139	9.99 983	8.44 156	0 25
10	8.39 395	9.99 987	8.39 408	50	10	8.44 216	9.99 983	8.44 232	50
20	8.39 480	9.99 987	8.39 493	40	20	8.44 292	9.99 983	8.44 308	40
30	8.39 565	9.99 987	8.39 587	30	30	8.44 367	9.99 983	8.44 384	30
40	8.39 649	9.99 987	8.39 663	20	40	8.44 443	9.99 983	8.44 460	20
50	8.39 734	9.99 986	8.39 747	10	50	8.44 519	9.99 983	8.44 536	10
26 0	8.39 818	9.99 986	8.39 832	0 34	36 0	8.44 594	9.99 983	8.44 611	0 24
10	8.39 902	9.99 986	8.39 916	50	10	8.44 669	9.99 983	8.44 686	50
20	8.39 986	9.99 986	8.40 000	40	20	8.44 745	9.99 983	8.44 762	40
30	8.40 070	9.99 986	8.40 083	30	30	8.44 820	9.99 983	8.44 837	30
40	8.40 153	9.99 986	8.40 167	20	40	8.44 895	9.99 983	8.44 912	20
50	8.40 237	9.99 986	8.40 251	10	50	8.44 969	9.99 983	8.44 987	10
27 0	8.40 320	9.99 986	8.40 334	0 33	37 0	8.45 044	9.99 983	8.45 061	0 23
10	8.40 403	9.99 986	8.40 417	50	10	8.45 119	9.99 983	8.45 136	50
20	8.40 486	9.99 986	8.40 500	40	20	8.45 193	9.99 983	8.45 210	40
30	8.40 569	9.99 986	8.40 583	30	30	8.45 267	9.99 983	8.45 285	30
40	8.40 651	9.99 986	8.40 665	20	40	8.45 341	9.99 982	8.45 359	20
50	8.40 734	9.99 986	8.40 748	10	50	8.45 415	9.99 982	8.45 433	10
28 0	8.40 816	9.99 986	8.40 830	0 32	38 0	8.45 489	9.99 982	8.45 507	0 22
10	8.40 898	9.99 986	8.40 913	50	10	8.45 563	9.99 982	8.45 581	50
20	8.40 980	9.99 986	8.40 995	40	20	8.45 637	9.99 982	8.45 655	40
30	8.41 062	9.99 986	8.41 077	30	30	8.45 710	9.99 982	8.45 728	30
40	8.41 144	9.99 986	8.41 158	20	40	8.45 784	9.99 982	8.45 802	20
50	8.41 225	9.99 986	8.41 240	10	50	8.45 857	9.99 982	8.45 875	10
29 0	8.41 307	9.99 985	8.41 321	0 31	39 0	8.45 930	9.99 982	8.45 948	0 21
10	8.41 388	9.99 985	8.41 403	50	10	8.46 003	9.99 982	8.46 021	50
20	8.41 469	9.99 985	8.41 484	40	20	8.46 076	9.99 982	8.46 094	40
30	8.41 550	9.99 985	8.41 565	30	30	8.46 149	9.99 982	8.46 167	30
40	8.41 631	9.99 985	8.41 646	20	40	8.46 222	9.99 982	8.46 240	20
50	8.41 711	9.99 985	8.41 726	10	50	8.46 294	9.99 982	8.46 312	10
30 0	8.41 792	9.99 985	8.41 807	0 30	40 0	8.46 366	9.99 982	8.46 385	0 20
' "	L Cos	L Sin	L Cot	' "	' "	L Cos	L Sin	L Cot	' "

' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "	' "	L Sin	L Cos	L Tan	' "
40 0	8.46 366	9.99 982	8.46 385	0 20	50 0	8.50 504	9.99 978	8.50 527	0 10
10	8.46 439	9.99 982	8.46 457	50	10	8.50 570	9.99 978	8.50 593	50
20	8.46 511	9.99 982	8.46 529	40	20	8.50 636	9.99 978	8.50 658	40
30	8.46 583	9.99 981	8.46 602	30	30	8.50 701	9.99 978	8.50 724	30
40	8.46 655	9.99 981	8.46 674	20	40	8.50 767	9.99 977	8.50 789	20
50	8.46 727	9.99 981	8.46 745	10	50	8.50 832	9.99 977	8.50 855	10
41 0	8.46 799	9.99 981	8.46 817	0 19	51 0	8.50 897	9.99 977	8.50 920	0 9
10	8.46 870	9.99 981	8.46 889	50	10	8.50 963	9.99 977	8.50 985	50
20	8.46 942	9.99 981	8.46 960	40	20	8.51 028	9.99 977	8.51 050	40
30	8.47 013	9.99 981	8.47 032	30	30	8.51 092	9.99 977	8.51 015	30
40	8.47 084	9.99 981	8.47 103	20	40	8.51 157	9.99 977	8.51 180	20
50	8.47 155	9.99 981	8.47 174	10	50	8.51 222	9.99 977	8.51 245	10
42 0	8.47 226	9.99 981	8.47 245	0 18	52 0	8.51 287	9.99 977	8.51 310	0 8
10	8.47 297	9.99 981	8.47 316	50	10	8.51 351	9.99 977	8.51 374	50
20	8.47 368	9.99 981	8.47 387	40	20	8.51 416	9.99 977	8.51 439	40
30	8.47 439	9.99 981	8.47 458	30	30	8.51 480	9.99 977	8.51 503	30
40	8.47 509	9.99 981	8.47 528	20	40	8.51 544	9.99 977	8.51 568	20
50	8.47 580	9.99 981	8.47 599	10	50	8.51 609	9.99 977	8.51 632	10
43 0	8.47 650	9.99 981	8.47 669	0 17	53 0	8.51 673	9.99 977	8.51 696	0 7
10	8.47 720	9.99 980	8.47 740	50	10	8.51 737	9.99 976	8.51 760	50
20	8.47 790	9.99 980	8.47 810	40	20	8.51 801	9.99 976	8.51 824	40
30	8.47 860	9.99 980	8.47 880	30	30	8.51 864	9.99 976	8.51 888	30
40	8.47 930	9.99 980	8.47 950	20	40	8.51 928	9.99 976	8.51 952	20
50	8.48 000	9.99 980	8.48 020	10	50	8.51 992	9.99 976	8.52 015	10
44 0	8.48 066	9.99 980	8.48 090	0 16	54 0	8.52 055	9.99 976	8.52 079	0 6
10	8.48 139	9.99 980	8.48 159	50	10	8.52 119	9.99 976	8.52 143	50
20	8.48 208	9.99 980	8.48 228	40	20	8.52 182	9.99 976	8.52 206	40
30	8.48 278	9.99 980	8.48 298	30	30	8.52 245	9.99 976	8.52 269	30
40	8.48 347	9.99 980	8.48 367	20	40	8.52 308	9.99 976	8.52 332	20
50	8.48 416	9.99 980	8.48 436	10	50	8.52 371	9.99 976	8.52 396	10
45 0	8.48 485	9.99 980	8.48 505	0 15	55 0	8.52 434	9.99 976	8.52 459	0 6
10	8.48 554	9.99 980	8.48 574	50	10	8.52 497	9.99 976	8.52 522	50
20	8.48 622	9.99 980	8.48 643	40	20	8.52 560	9.99 976	8.52 584	40
30	8.48 691	9.99 980	8.48 711	30	30	8.52 623	9.99 976	8.52 647	30
40	8.48 760	9.99 979	8.48 780	20	40	8.52 685	9.99 975	8.52 710	20
50	8.48 828	9.99 979	8.48 849	10	50	8.52 748	9.99 975	8.52 772	10
46 0	8.48 896	9.99 979	8.48 917	0 14	56 0	8.52 810	9.99 975	8.52 835	0 4
10	8.48 965	9.99 979	8.48 985	50	10	8.52 872	9.99 975	8.52 897	50
20	8.49 033	9.99 979	8.49 053	40	20	8.52 935	9.99 975	8.52 960	40
30	8.49 101	9.99 979	8.49 121	30	30	8.52 997	9.99 975	8.53 022	30
40	8.49 169	9.99 979	8.49 189	20	40	8.53 059	9.99 975	8.53 084	20
50	8.49 236	9.99 979	8.49 257	10	50	8.53 121	9.99 975	8.53 146	10
47 0	8.49 304	9.99 979	8.49 325	0 13	57 0	8.53 183	9.99 975	8.53 208	0 3
10	8.49 372	9.99 979	8.49 393	50	10	8.53 245	9.99 975	8.53 270	50
20	8.49 439	9.99 979	8.49 460	40	20	8.53 306	9.99 975	8.53 332	40
30	8.49 506	9.99 979	8.49 528	30	30	8.53 368	9.99 975	8.53 393	30
40	8.49 574	9.99 979	8.49 595	20	40	8.53 429	9.99 975	8.53 455	20
50	8.49 641	9.99 979	8.49 662	10	50	8.53 491	9.99 974	8.53 518	10
48 0	8.49 708	9.99 979	8.49 729	0 12	58 0	8.53 552	9.99 974	8.53 578	0 2
10	8.49 775	9.99 979	8.49 796	50	10	8.53 614	9.99 974	8.53 639	50
20	8.49 842	9.99 978	8.49 863	40	20	8.53 675	9.99 974	8.53 700	40
30	8.49 908	9.99 978	8.49 930	30	30	8.53 736	9.99 974	8.53 762	30
40	8.49 975	9.99 978	8.49 997	20	40	8.53 797	9.99 974	8.53 823	20
50	8.50 042	9.99 978	8.50 063	10	50	8.53 858	9.99 974	8.53 884	10
49 0	8.50 108	9.99 978	8.50 130	0 11	59 0	8.53 919	9.99 974	8.53 945	0 1
10	8.50 174	9.99 978	8.50 196	50	10	8.53 979	9.99 974	8.54 005	50
20	8.50 241	9.99 978	8.50 263	40	20	8.54 040	9.99 974	8.54 066	40
30	8.50 307	9.99 978	8.50 329	30	30	8.54 101	9.99 974	8.54 127	30
40	8.50 373	9.99 978	8.50 395	20	40	8.54 161	9.99 974	8.54 187	20
50	8.50 439	9.99 978	8.50 461	10	50	8.54 222	9.99 974	8.54 248	10
50 0	8.50 504	9.99 978	8.50 527	0 10	60 0	8.54 282	9.99 974	8.54 308	0 1
' "	L Cos	L Sin	L Cot	' "	' "	L Cos	L Sin	L Cot	' "

88°——三角函數之常用對數表——88°20'

由本頁取出之每一對數後均須添寫—10

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos		PP		
0	8.54 282		8.54 308		1.45 692	9.99 074	60			
1	8.54 642	360	8.54 669	361	1.45 331	9.99 973	59			
2	8.54 999	357	8.55 027	358	1.44 973	9.99 973	58			
3	8.55 354	355	8.55 382	355	1.44 618	9.99 972	57	360	350	340
4	8.55 705	351	8.55 734	352	1.44 266	9.99 972	56	1	36	34
		349		349				2	73	70
5	8.56 054	346	8.56 083	346	1.43 917	9.99 971	55	3	168	165
6	8.56 400	343	8.56 429	344	1.43 571	9.99 971	54	4	144	140
7	8.56 743	341	8.56 773	341	1.43 227	9.99 970	53	5	180	175
8	8.57 084	337	8.57 114	338	1.42 886	9.99 970	52	6	216	210
9	8.57 421	336	8.57 452	336	1.42 548	9.99 969	51	7	252	245
		332		332				8	288	280
10	8.57 757	332	8.57 788	333	1.42 212	9.99 969	50	9	324	315
11	8.58 089	330	8.58 121	330	1.41 879	9.99 968	49			
12	8.58 419	328	8.58 451	328	1.41 549	9.99 968	48			
13	8.58 747	325	8.58 779	326	1.41 221	9.99 967	47	330	320	310
14	8.59 072	323	8.59 105	323	1.40 895	9.99 967	46	1	33	32
		320		320				2	66	64
15	8.59 395	318	8.59 428	319	1.40 572	9.99 967	45	3	99	96
16	8.59 715	316	8.59 749	316	1.40 251	9.99 966	44	4	132	128
17	8.60 032	313	8.60 068	314	1.39 932	9.99 966	43	5	165	160
18	8.60 349	311	8.60 384	311	1.39 616	9.99 965	42	6	198	192
19	8.60 662	309	8.60 698	310	1.39 302	9.99 964	41	7	231	224
		307		307				8	264	256
20	8.60 973	305	8.61 009	305	1.38 991	9.99 964	40	9	297	288
21	8.61 282	302	8.61 319	303	1.38 681	9.99 963	39			
22	8.61 589	301	8.61 626	301	1.38 374	9.99 963	38	300	290	280
23	8.61 894	298	8.61 931	299	1.38 069	9.99 962	37	1	30	29
24	8.62 196	296	8.62 234	296	1.37 766	9.99 962	36	2	60	58
		294		294				3	90	87
25	8.62 497	292	8.62 535	292	1.37 465	9.99 961	35	4	120	116
26	8.62 795	290	8.62 834	290	1.37 166	9.99 961	34	5	150	145
27	8.63 091	288	8.63 131	288	1.36 869	9.99 960	33	6	180	174
28	8.63 385	286	8.63 426	286	1.36 574	9.99 960	32	7	210	203
29	8.63 678	284	8.63 718	284	1.36 282	9.99 959	31	8	240	232
		282		282				9	270	261
30	8.63 968	281	8.64 009	281	1.35 991	9.99 959	30			
31	8.64 256	279	8.64 298	279	1.35 702	9.99 958	29	280	275	270
32	8.64 543	277	8.64 585	277	1.35 415	9.99 958	28	1	28.0	27.5
33	8.64 827	275	8.64 870	275	1.35 130	9.99 957	27	2	56.0	55.0
34	8.65 110	273	8.65 154	273	1.34 846	9.99 956	26	3	84.0	82.5
		271		271				4	112.0	110.0
35	8.65 391	270	8.65 435	270	1.34 565	9.99 956	25	5	140.0	137.5
36	8.65 670	268	8.65 715	268	1.34 285	9.99 955	24	6	168.0	165.0
37	8.65 947	266	8.65 992	266	1.34 007	9.99 955	23	7	196.0	192.5
38	8.66 223	264	8.66 269	264	1.33 731	9.99 954	22	8	224.0	220.0
39	8.66 497	263	8.66 543	263	1.33 457	9.99 954	21	9	252.0	247.5
		261		261						
40	8.66 769	260	8.66 816	260	1.33 184	9.99 953	20			
41	8.67 039	258	8.67 087	258	1.32 913	9.99 952	19	285	280	285
42	8.67 308	256	8.67 356	256	1.32 644	9.99 952	18	1	26.5	26.0
43	8.67 575	254	8.67 624	254	1.32 376	9.99 951	17	2	53.0	52.0
44	8.67 841	252	8.67 890	252	1.32 110	9.99 951	16	3	79.5	78.0
		250		250				4	106.0	104.0
45	8.68 104	249	8.68 154	249	1.31 846	9.99 950	15	5	132.5	130.0
46	8.68 367	247	8.68 417	247	1.31 583	9.99 949	14	6	159.0	156.0
47	8.68 627	246	8.68 678	246	1.31 322	9.99 949	13	7	185.5	182.0
48	8.68 886	244	8.68 938	244	1.31 062	9.99 948	12	8	212.0	208.0
49	8.69 144	242	8.69 196	242	1.30 804	9.99 948	11	9	238.5	234.0
		240		240						
50	8.69 400	239	8.69 453	239	1.30 547	9.99 947	10			
51	8.69 654	237	8.69 708	237	1.30 292	9.99 946	9	280	245	240
52	8.69 907	235	8.69 962	235	1.30 038	9.99 946	8	1	25.0	24.5
53	8.70 159	233	8.70 214	233	1.29 786	9.99 945	7	2	50.0	49.0
54	8.70 409	231	8.70 465	231	1.29 535	9.99 944	6	3	75.0	73.5
		229		229				4	100.0	98.0
55	8.70 658	228	8.70 714	228	1.29 286	9.99 944	5	5	125.0	122.5
56	8.70 905	226	8.70 962	226	1.29 038	9.99 943	4	6	150.0	147.0
57	8.71 151	224	8.71 208	224	1.28 792	9.99 942	3	7	175.0	171.5
58	8.71 395	222	8.71 453	222	1.28 547	9.99 942	2	8	200.0	196.0
59	8.71 638	220	8.71 697	220	1.28 303	9.99 941	1	9	225.0	220.5
		218		218						
60	8.71 880		8.71 940		1.28 060	9.99 940	0			
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin		PP		



	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos		PP
0	8.71 880	240	8.71 940	241	1.28 000	0.99 940	60	
1	8.72 120	239	8.72 181	239	1.27 819	0.99 940	59	241 239 237 235 234
2	8.72 359	238	8.72 420	239	1.27 580	0.99 939	58	241 239 237 235 234
3	8.72 597	237	8.72 659	237	1.27 341	0.99 938	57	241 239 237 235 234
4	8.72 834	235	8.72 896	236	1.27 104	0.99 938	56	241 239 237 235 234
5	8.73 069	234	8.73 132	234	1.26 866	0.99 937	55	241 239 237 235 234
6	8.73 303	232	8.73 366	234	1.26 634	0.99 936	54	241 239 237 235 234
7	8.73 535	232	8.73 600	232	1.26 400	0.99 936	53	241 239 237 235 234
8	8.73 767	230	8.73 832	231	1.26 168	0.99 935	52	241 239 237 235 234
9	8.73 997	229	8.74 063	229	1.25 937	0.99 934	51	232 231 229 227 226
10	8.74 226	228	8.74 292	229	1.25 708	0.99 934	50	232 231 229 227 226
11	8.74 454	226	8.74 521	227	1.25 479	0.99 933	49	232 231 229 227 226
12	8.74 680	226	8.74 748	226	1.25 252	0.99 932	48	232 231 229 227 226
13	8.74 906	224	8.74 974	225	1.25 026	0.99 932	47	232 231 229 227 226
14	8.75 130	223	8.75 199	224	1.24 801	0.99 931	46	232 231 229 227 226
15	8.75 353	222	8.75 423	222	1.24 577	0.99 930	45	232 231 229 227 226
16	8.75 575	220	8.75 645	222	1.24 355	0.99 929	44	232 231 229 227 226
17	8.75 795	220	8.75 867	220	1.24 133	0.99 929	43	232 231 229 227 226
18	8.76 015	219	8.76 087	219	1.23 913	0.99 928	42	232 231 229 227 226
19	8.76 234	217	8.76 306	219	1.23 694	0.99 927	41	224 222 220 219 217
20	8.76 451	216	8.76 525	217	1.23 475	0.99 926	40	224 222 220 219 217
21	8.76 667	216	8.76 742	217	1.23 258	0.99 926	39	224 222 220 219 217
22	8.76 883	216	8.76 958	216	1.23 042	0.99 925	38	224 222 220 219 217
23	8.77 097	214	8.77 173	215	1.22 827	0.99 924	37	224 222 220 219 217
24	8.77 310	213	8.77 387	214	1.22 613	0.99 923	36	224 222 220 219 217
25	8.77 522	212	8.77 600	213	1.22 400	0.99 923	35	224 222 220 219 217
26	8.77 733	211	8.77 811	211	1.22 189	0.99 922	34	224 222 220 219 217
27	8.77 943	209	8.78 023	210	1.21 978	0.99 921	33	216 216 213 211 209
28	8.78 152	208	8.78 232	209	1.21 768	0.99 920	32	216 216 213 211 209
29	8.78 360	208	8.78 441	208	1.21 559	0.99 920	31	216 216 213 211 209
30	8.78 568	206	8.78 649	206	1.21 351	0.99 919	30	216 216 213 211 209
31	8.78 774	205	8.78 855	206	1.21 145	0.99 918	29	216 216 213 211 209
32	8.78 979	204	8.79 061	205	1.20 939	0.99 917	28	216 216 213 211 209
33	8.79 183	203	8.79 260	204	1.20 734	0.99 917	27	216 216 213 211 209
34	8.79 386	202	8.79 470	203	1.20 530	0.99 916	26	216 216 213 211 209
35	8.79 588	201	8.79 673	202	1.20 327	0.99 915	25	208 206 203 201 199
36	8.79 789	201	8.79 875	201	1.20 125	0.99 914	24	208 206 203 201 199
37	8.79 990	199	8.80 076	201	1.19 924	0.99 913	23	208 206 203 201 199
38	8.80 189	199	8.80 273	199	1.19 723	0.99 913	22	208 206 203 201 199
39	8.80 388	197	8.80 476	198	1.19 524	0.99 912	21	208 206 203 201 199
40	8.80 585	197	8.80 674	198	1.19 326	0.99 911	20	208 206 203 201 199
41	8.80 782	196	8.80 872	198	1.19 128	0.99 910	19	208 206 203 201 199
42	8.80 978	196	8.81 068	196	1.18 932	0.99 909	18	208 206 203 201 199
43	8.81 173	194	8.81 264	195	1.18 736	0.99 909	17	208 206 203 201 199
44	8.81 367	193	8.81 459	194	1.18 541	0.99 908	16	208 206 203 201 199
45	8.81 560	192	8.81 653	193	1.18 347	0.99 907	15	208 206 203 201 199
46	8.81 752	192	8.81 846	192	1.18 154	0.99 906	14	208 206 203 201 199
47	8.81 944	190	8.82 038	192	1.17 962	0.99 905	13	208 206 203 201 199
48	8.82 134	190	8.82 230	190	1.17 770	0.99 904	12	208 206 203 201 199
49	8.82 324	189	8.82 420	190	1.17 580	0.99 904	11	208 206 203 201 199
50	8.82 513	188	8.82 610	189	1.17 390	0.99 903	10	208 206 203 201 199
51	8.82 701	187	8.82 799	188	1.17 201	0.99 902	9	208 206 203 201 199
52	8.82 888	187	8.82 987	188	1.17 013	0.99 901	8	208 206 203 201 199
53	8.83 075	186	8.83 175	186	1.16 825	0.99 900	7	208 206 203 201 199
54	8.83 261	185	8.83 361	186	1.16 639	0.99 899	6	188 186 184 182 181
55	8.83 446	184	8.83 547	185	1.16 453	0.99 898	5	188 186 184 182 181
56	8.83 630	183	8.83 732	184	1.16 268	0.99 898	4	188 186 184 182 181
57	8.83 813	183	8.83 916	184	1.16 084	0.99 897	3	188 186 184 182 181
58	8.83 996	181	8.84 100	182	1.15 900	0.99 896	2	188 186 184 182 181
59	8.84 177	181	8.84 282	182	1.15 718	0.99 895	1	188 186 184 182 181
60	8.84 358		8.84 464		1.15 536	0.99 894	0	188 186 184 182 181
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin		PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos		PP
0	8.84 358		8.84 464	182	1.15 536	9.99 894	60	
1	8.84 539	181	8.84 646	180	1.15 354	9.99 893	59	182 181 180 179 178
2	8.84 718	179	8.84 826	180	1.15 174	9.99 892	58	18.2 18.1 18.0 17.9 17.8
3	8.84 897	178	8.85 006	179	1.14 994	9.99 891	57	36.4 36.2 36.0 35.8 35.6
4	8.85 075	177	8.85 185	178	1.14 815	9.99 891	56	54.6 54.3 54.0 53.7 53.4
5	8.85 252	177	8.85 363	177	1.14 637	9.99 890	55	72.8 72.4 72.0 71.6 71.2
6	8.85 429	176	8.85 540	177	1.14 460	9.99 889	54	91.0 90.5 90.0 89.5 89.0
7	8.85 605	176	8.85 717	177	1.14 283	9.99 888	53	109.2 108.6 108.0 107.4 106.8
8	8.85 780	175	8.85 893	176	1.14 107	9.99 887	52	127.4 126.7 126.0 125.3 124.6
9	8.85 955	173	8.86 069	174	1.13 931	9.99 886	51	145.6 144.8 144.0 143.2 142.4
10	8.86 128	173	8.86 243	174	1.13 757	9.99 885	50	163.8 162.9 162.0 161.1 160.2
11	8.86 301	173	8.86 417	174	1.13 583	9.99 884	49	177 176 175 174 173
12	8.86 474	171	8.86 591	172	1.13 409	9.99 883	48	17.7 17.6 17.5 17.4 17.3
13	8.86 645	171	8.86 763	172	1.13 237	9.99 882	47	35.4 35.2 35.0 34.8 34.6
14	8.86 816	171	8.86 935	171	1.13 065	9.99 881	46	53.1 52.8 52.5 52.2 51.9
15	8.86 987	169	8.87 106	170	1.12 894	9.99 880	45	70.8 70.4 70.0 69.6 69.2
16	8.87 156	169	8.87 277	170	1.12 723	9.99 879	44	88.5 88.0 87.5 87.0 86.5
17	8.87 325	169	8.87 447	170	1.12 553	9.99 879	43	106.2 105.6 105.0 104.4 103.8
18	8.87 494	167	8.87 610	169	1.12 384	9.99 878	42	123.9 123.2 122.5 121.8 121.1
19	8.87 661	168	8.87 785	168	1.12 215	9.99 877	41	141.6 140.8 140.0 139.2 138.4
20	8.87 829	166	8.87 953	167	1.12 047	9.99 876	40	159.3 158.4 157.5 156.6 155.7
21	8.87 995	166	8.88 120	167	1.11 880	9.99 875	39	172 171 170 169 168
22	8.88 161	165	8.88 287	166	1.11 713	9.99 874	38	17.2 17.1 17.0 16.9 16.8
23	8.88 326	164	8.88 453	165	1.11 547	9.99 873	37	34.2 33.2 33.0 32.8 32.6
24	8.88 490	164	8.88 618	165	1.11 382	9.99 872	36	50.1 49.8 49.5 49.2 48.9
25	8.88 654	163	8.88 783	165	1.11 217	9.99 871	35	66.8 66.4 66.0 65.6 65.2
26	8.88 817	163	8.88 948	165	1.11 052	9.99 870	34	83.0 82.5 82.0 81.5 81.0
27	8.88 980	163	8.89 111	163	1.10 889	9.99 869	33	100.2 100.2 99.9 99.4 97.8
28	8.89 142	162	8.89 274	163	1.10 726	9.99 868	32	118.9 118.2 115.5 114.8 114.1
29	8.89 304	160	8.89 437	161	1.10 563	9.99 867	31	133.6 132.8 132.0 131.2 130.4
30	8.89 464	161	8.89 598	162	1.10 402	9.99 866	30	148.8 148.4 148.5 147.6 146.7
31	8.89 625	159	8.89 760	160	1.10 240	9.99 865	29	162 161 160 159 158
32	8.89 784	159	8.89 920	160	1.10 080	9.99 864	28	16.2 16.1 16.0 15.9 15.8
33	8.89 943	159	8.90 080	160	1.09 920	9.99 863	27	32.4 32.2 32.0 31.8 31.6
34	8.90 102	158	8.90 240	159	1.09 760	9.99 862	26	48.6 48.3 48.0 47.7 47.4
35	8.90 260	157	8.90 399	158	1.09 601	9.99 861	25	64.8 64.4 64.0 63.6 63.2
36	8.90 417	157	8.90 557	158	1.09 443	9.99 860	24	81.0 80.5 80.0 79.5 79.0
37	8.90 574	156	8.90 715	157	1.09 285	9.99 859	23	97.2 96.6 96.0 95.4 94.8
38	8.90 730	155	8.90 872	157	1.09 128	9.99 858	22	113.4 112.7 112.0 111.3 110.6
39	8.90 886	155	8.91 029	156	1.08 971	9.99 857	21	129.6 128.8 128.0 127.2 126.4
40	8.91 040	155	8.91 185	155	1.08 815	9.99 856	20	148.8 148.4 148.5 147.6 146.7
41	8.91 195	154	8.91 340	155	1.08 660	9.99 855	19	162 161 160 159 158
42	8.91 349	153	8.91 495	155	1.08 505	9.99 854	18	16.2 16.1 16.0 15.9 15.8
43	8.91 502	153	8.91 650	153	1.08 350	9.99 853	17	32.4 32.2 32.0 31.8 31.6
44	8.91 655	152	8.91 803	154	1.08 197	9.99 852	16	48.6 48.3 48.0 47.7 47.4
45	8.91 807	152	8.91 957	153	1.08 043	9.99 851	15	64.8 64.4 64.0 63.6 63.2
46	8.91 959	151	8.92 110	152	1.07 890	9.99 850	14	81.0 80.5 80.0 79.5 79.0
47	8.92 110	151	8.92 262	152	1.07 738	9.99 849	13	97.2 96.6 96.0 95.4 94.8
48	8.92 261	150	8.92 414	151	1.07 586	9.99 847	12	113.4 112.7 112.0 111.3 110.6
49	8.92 411	150	8.92 565	151	1.07 435	9.99 846	11	129.6 128.8 128.0 127.2 126.4
50	8.92 561	149	8.92 716	150	1.07 284	9.99 845	10	148.8 148.4 148.5 147.6 146.7
51	8.92 710	149	8.92 866	150	1.07 134	9.99 844	9	162 161 160 159 158
52	8.92 859	148	8.93 016	149	1.06 984	9.99 843	8	16.2 16.1 16.0 15.9 15.8
53	8.93 007	147	8.93 165	148	1.06 835	9.99 842	7	32.4 32.2 32.0 31.8 31.6
54	8.93 154	147	8.93 313	149	1.06 687	9.99 841	6	48.6 48.3 48.0 47.7 47.4
55	8.93 301	147	8.93 462	147	1.06 538	9.99 840	5	64.8 64.4 64.0 63.6 63.2
56	8.93 448	146	8.93 609	147	1.06 391	9.99 839	4	81.0 80.5 80.0 79.5 79.0
57	8.93 594	146	8.93 756	147	1.06 244	9.99 838	3	97.2 96.6 96.0 95.4 94.8
58	8.93 740	145	8.93 903	146	1.06 097	9.99 837	2	113.4 112.7 112.0 111.3 110.6
59	8.93 885	145	8.94 049	146	1.05 951	9.99 836	1	129.6 128.8 128.0 127.2 126.4
60	8.94 030		8.94 195		1.05 805	9.99 834	0	148.8 148.4 148.5 147.6 146.7
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin		PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos		PP					
0	8.94 030		8.94 195		1.05 805	9.99 834	<b>60</b>						
1	8.94 174	144	8.94 340	145	1.05 660	9.99 833	59	<b>147</b>	<b>146</b>	<b>145</b>	<b>144</b>		
2	8.94 317	143	8.94 485	145	1.05 515	9.99 832	58	14.7	14.6	14.5	14.4		
3	8.94 461	142	8.94 630	143	1.05 370	9.99 831	57	29.4	29.2	29.0	28.8		
4	8.94 603	143	8.94 773	144	1.05 227	9.99 830	56	44.1	43.8	43.5	43.2		
								58.8	58.4	58.0	57.6		
<b>5</b>	8.94 746	141	8.94 917	143	1.05 083	9.99 829	<b>55</b>	73.5	73.0	72.5	72.0		
6	8.94 887	142	8.95 060	142	1.04 940	9.99 828	54	88.2	87.6	87.0	86.4		
7	8.95 029	141	8.95 202	142	1.04 798	9.99 827	53	102.9	102.2	101.5	100.8		
8	8.95 170	140	8.95 344	142	1.04 656	9.99 825	52	117.6	116.8	116.0	115.2		
9	8.95 310	140	8.95 486	141	1.04 514	9.99 824	51	132.3	131.4	130.5	129.6		
<b>10</b>	8.95 450	139	8.95 627	140	1.04 373	9.99 823	<b>50</b>	<b>143</b>	<b>142</b>	<b>141</b>	<b>140</b>		
11	8.95 589	139	8.95 767	141	1.04 233	9.99 822	49	14.3	14.2	14.1	14.0		
12	8.95 728	139	8.95 908	139	1.04 092	9.99 821	48	28.6	28.4	28.2	28.0		
13	8.95 867	138	8.96 047	140	1.03 953	9.99 820	47	42.9	42.6	42.3	42.0		
14	8.96 005	138	8.96 187	138	1.03 813	9.99 819	46	57.2	56.8	56.4	56.0		
								71.5	71.0	70.5	70.0		
								85.8	85.2	84.6	84.0		
<b>15</b>	8.96 143	137	8.96 325	139	1.03 675	9.99 817	<b>45</b>	100.1	99.4	98.7	98.0		
16	8.96 280	137	8.96 464	138	1.03 536	9.99 816	44	114.4	113.6	112.8	112.0		
17	8.96 417	136	8.96 602	137	1.03 398	9.99 815	43	128.7	127.8	126.9	126.0		
18	8.96 553	136	8.96 739	138	1.03 261	9.99 814	42						
19	8.96 689	136	8.96 877	136	1.03 123	9.99 813	41	<b>139</b>	<b>138</b>	<b>137</b>	<b>136</b>		
								13.9	13.8	13.7	13.6		
<b>20</b>	8.96 825	135	8.97 013	137	1.02 987	9.99 812	<b>40</b>	27.8	27.6	27.4	27.2		
21	8.96 960	135	8.97 150	135	1.02 850	9.99 810	39	41.7	41.4	41.1	40.8		
22	8.97 095	135	8.97 285	136	1.02 715	9.99 809	38	55.6	55.2	54.8	54.4		
23	8.97 229	134	8.97 421	135	1.02 579	9.99 808	37	69.5	69.0	68.5	68.0		
24	8.97 363	133	8.98 556	135	1.02 444	9.99 807	36	83.4	82.8	82.2	81.6		
								97.3	96.6	95.9	95.2		
<b>25</b>	8.97 496	133	8.97 691	134	1.02 309	9.99 806	<b>35</b>	111.2	110.4	109.6	108.8		
26	8.97 629	133	8.97 825	134	1.02 175	9.99 804	34	125.1	124.2	123.3	122.4		
27	8.97 762	132	8.97 959	133	1.02 041	9.99 803	33						
28	8.97 894	132	8.98 092	133	1.01 908	9.99 802	32	<b>135</b>	<b>134</b>	<b>133</b>	<b>132</b>		
29	8.98 026	131	8.98 225	133	1.01 775	9.99 801	31	13.5	13.4	13.3	13.2		
								27.0	26.8	26.6	26.4		
<b>30</b>	8.98 157	131	8.98 358	132	1.01 642	9.99 800	<b>30</b>	40.5	40.2	39.9	39.6		
31	8.98 288	131	8.98 490	132	1.01 510	9.99 798	29	54.0	53.6	53.2	52.8		
32	8.98 419	130	8.98 622	131	1.01 378	9.99 797	28	67.5	67.0	66.5	66.0		
33	8.98 549	130	8.98 753	131	1.01 247	9.99 796	27	81.0	80.4	79.8	79.2		
34	8.98 679	129	8.98 884	131	1.01 116	9.99 795	26	94.5	93.8	93.1	92.4		
								108.0	107.2	106.4	105.6		
<b>35</b>	8.98 808	129	8.99 015	130	1.00 985	9.99 793	<b>25</b>	121.5	120.6	119.7	118.8		
36	8.98 937	129	8.99 145	130	1.00 855	9.99 792	24						
37	8.99 066	128	8.99 275	130	1.00 725	9.99 791	23	<b>131</b>	<b>130</b>	<b>129</b>	<b>128</b>		
38	8.99 194	128	8.99 405	129	1.00 595	9.99 790	22	13.1	13.0	12.9	12.8		
39	8.99 322	128	8.99 534	128	1.00 466	9.99 788	21	26.2	26.0	25.8	25.6		
								39.3	39.0	38.7	38.4		
								52.4	52.0	51.6	51.2		
<b>40</b>	8.99 450	127	8.99 662	129	1.00 338	9.99 787	<b>20</b>	65.5	65.0	64.5	64.0		
41	8.99 577	127	8.99 791	128	1.00 209	9.99 786	19	78.6	78.0	77.4	76.8		
42	8.99 704	126	8.99 919	127	1.00 081	9.99 785	18	91.7	91.0	90.3	89.6		
43	8.99 830	126	9.00 046	128	0.99 954	9.99 783	17	104.8	104.0	103.2	102.4		
44	8.99 956	126	9.00 174	127	0.99 826	9.99 782	16	117.9	117.0	116.1	115.2		
<b>45</b>	9.00 082	125	9.00 301	126	0.99 699	9.99 781	<b>15</b>	<b>127</b>	<b>126</b>	<b>125</b>	<b>124</b>		
46	9.00 207	125	9.00 427	126	0.99 573	9.99 780	14	12.7	12.6	12.5	12.4		
47	9.00 332	124	9.00 553	126	0.99 447	9.99 778	13	25.4	25.2	25.0	24.8		
48	9.00 456	124	9.00 679	126	0.99 321	9.99 777	12	38.1	37.8	37.5	37.2		
49	9.00 581	123	9.00 805	125	0.99 195	9.99 776	11	50.8	50.4	50.0	49.6		
								63.5	63.0	62.5	62.0		
<b>50</b>	9.00 704	123	9.00 930	125	0.99 070	9.99 775	<b>10</b>	76.2	75.6	75.0	74.4		
51	9.00 828	123	9.01 055	124	0.98 945	9.99 773	9	88.9	88.2	87.5	86.8		
52	9.00 951	123	9.01 179	124	0.98 821	9.99 772	8	101.6	100.8	100.0	99.2		
53	9.01 074	122	9.01 303	124	0.98 697	9.99 771	7	114.3	113.4	112.5	111.6		
54	9.01 196	122	9.01 427	123	0.98 573	9.99 769	6						
<b>55</b>	9.01 318	122	9.01 550	123	0.98 450	9.99 768	<b>5</b>	<b>123</b>	<b>122</b>	<b>121</b>	<b>120</b>		
56	9.01 440	121	9.01 673	123	0.98 327	9.99 767	4	12.3	12.2	12.1	12.0		
57	9.01 561	121	9.01 796	123	0.98 204	9.99 765	3	24.6	24.4	24.2	24.0		
58	9.01 682	121	9.01 918	122	0.98 082	9.99 764	2	36.9	36.6	36.3	36.0		
59	9.01 803	121	9.02 040	122	0.97 960	9.99 763	1	49.2	48.8	48.4	48.0		
								61.5	61.0	60.5	60.0		
								73.8	73.2	72.6	72.0		
								86.1	85.4	84.7	84.0		
								98.4	97.6	96.8	96.0		
<b>60</b>	9.01 923	120	9.02 162	122	0.97 838	9.99 761	<b>0</b>	110.7	109.8	108.9	108.0		
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin		PP					



'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos		PP
0	9.08 589		9.08 914		0.91 086	9.99 675	60	
1	9.08 692	103	9.09 019	105	0.90 981	9.99 674	50	
2	9.08 795	103	9.09 123	104	0.90 877	9.99 672	58	
3	9.08 897	102	9.09 227	104	0.90 773	9.99 670	57	
4	9.08 999	102	9.09 330	103	0.90 670	9.99 669	56	105 104 103
5	9.09 101	102	9.09 434	104	0.90 566	9.99 667	55	1 110.5 10.4 10.3
6	9.09 202	101	9.09 537	103	0.90 463	9.99 666	54	2 21.0 20.8 20.6
7	9.09 304	102	9.09 640	103	0.90 360	9.99 664	53	3 31.5 31.2 30.9
8	9.09 405	101	9.09 742	102	0.90 258	9.99 663	52	4 42.0 41.6 41.2
9	9.09 506	101	9.09 845	103	0.90 155	9.99 661	51	5 52.5 52.0 51.5
10	9.09 606	100	9.09 947	102	0.90 053	9.99 659	50	6 63.0 62.4 61.8
11	9.09 707	101	9.10 049	102	0.89 951	9.99 658	49	7 73.5 72.8 72.1
12	9.09 807	100	9.10 150	101	0.89 850	9.99 656	48	8 84.0 83.2 82.4
13	9.09 907	100	9.10 252	102	0.89 748	9.99 655	47	9 94.5 93.6 92.7
14	9.10 006	99	9.10 353	101	0.89 647	9.99 653	46	
15	9.10 106	100	9.10 454	101	0.89 546	9.99 611	45	102 101 99
16	9.10 205	99	9.10 555	101	0.89 445	9.99 600	44	1 10.2 10.1 9.9
17	9.10 304	99	9.10 656	100	0.89 344	9.99 648	43	2 20.4 20.2 19.8
18	9.10 402	99	9.10 756	100	0.89 244	9.99 647	42	3 30.6 30.3 29.7
19	9.10 501	98	9.10 856	100	0.89 144	9.99 645	41	4 40.8 40.4 39.6
20	9.10 599	98	9.10 956	100	0.89 044	9.99 643	40	5 51.0 50.3 49.5
21	9.10 697	98	9.11 056	100	0.88 944	9.99 642	39	6 61.2 60.6 59.4
22	9.10 795	98	9.11 155	99	0.88 845	9.99 640	38	7 71.4 70.7 69.3
23	9.10 893	97	9.11 254	99	0.88 746	9.99 638	37	8 81.6 80.8 79.2
24	9.10 990	97	9.11 353	99	0.88 647	9.99 637	36	9 91.8 90.9 89.1
25	9.11 087	97	9.11 452	99	0.88 548	9.99 635	35	
26	9.11 184	97	9.11 551	99	0.88 449	9.99 633	34	98 97 96
27	9.11 281	96	9.11 649	98	0.88 351	9.99 632	33	
28	9.11 377	96	9.11 747	98	0.88 253	9.99 630	32	1 9.8 9.7 9.6
29	9.11 474	96	9.11 845	98	0.88 155	9.99 629	31	2 19.6 19.4 19.2
30	9.11 570	96	9.11 943	97	0.88 057	9.99 627	30	3 29.4 29.1 28.8
31	9.11 666	95	9.12 040	98	0.87 960	9.99 625	29	4 39.2 38.8 38.4
32	9.11 761	95	9.12 138	97	0.87 862	9.99 624	28	5 49.0 48.5 48.0
33	9.11 857	95	9.12 235	97	0.87 765	9.99 622	27	6 58.8 58.2 57.6
34	9.11 952	95	9.12 332	96	0.87 668	9.99 620	26	7 68.6 67.9 67.2
35	9.12 047	95	9.12 428	97	0.87 572	9.99 618	25	8 78.4 77.6 76.8
36	9.12 142	94	9.12 525	97	0.87 475	9.99 617	24	9 88.2 87.3 86.4
37	9.12 236	94	9.12 621	96	0.87 379	9.99 615	23	
38	9.12 331	94	9.12 717	96	0.87 283	9.99 613	22	95 94 93
39	9.12 425	94	9.12 813	96	0.87 187	9.99 612	21	
40	9.12 519	93	9.12 909	95	0.87 091	9.99 610	20	1 9.5 9.4 9.3
41	9.12 612	94	9.13 004	95	0.86 996	9.99 608	19	2 19.0 18.8 18.6
42	9.12 706	93	9.13 099	95	0.86 901	9.99 607	18	3 28.5 28.2 27.9
43	9.12 799	93	9.13 194	95	0.86 806	9.99 605	17	4 38.0 37.6 37.2
44	9.12 892	93	9.13 289	95	0.86 711	9.99 603	16	5 47.5 47.0 46.5
45	9.12 985	93	9.13 384	94	0.86 616	9.99 601	15	6 57.0 56.4 55.8
46	9.13 078	93	9.13 478	94	0.86 522	9.99 600	14	7 66.5 65.8 65.1
47	9.13 171	92	9.13 573	94	0.86 427	9.99 598	13	8 76.0 75.2 74.4
48	9.13 263	92	9.13 667	94	0.86 333	9.99 596	12	9 85.5 84.6 83.7
49	9.13 355	92	9.13 761	93	0.86 239	9.99 595	11	
50	9.13 447	92	9.13 854	94	0.86 146	9.99 593	10	92 91 90
51	9.13 539	91	9.13 948	93	0.86 052	9.99 591	9	1 9.3 9.1 9.0
52	9.13 630	92	9.14 041	93	0.85 959	9.99 589	8	2 18.4 18.2 18.0
53	9.13 722	91	9.14 134	93	0.85 866	9.99 588	7	3 27.6 27.3 27.0
54	9.13 813	91	9.14 227	93	0.85 773	9.99 586	6	4 36.8 36.4 36.0
55	9.13 904	90	9.14 320	92	0.85 680	9.99 584	5	5 46.0 45.5 45.0
56	9.13 994	91	9.14 412	92	0.85 588	9.99 582	4	6 55.2 54.6 54.0
57	9.14 085	90	9.14 504	93	0.85 496	9.99 581	3	7 64.4 63.7 63.0
58	9.14 175	91	9.14 597	91	0.85 403	9.99 579	2	8 73.6 72.8 72.0
59	9.14 266	90	9.14 688	92	0.85 312	9.99 577	1	9 82.8 81.9 81.0
60	9.14 356		9.14 780		0.85 220	9.99 575	0	
	L Cos	d	L Cot	c d	LTan	L Sin	'	PP

'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	PP
0	9.14 356	89	9.14 780	92	0.85 220	9.99 575	<b>60</b>
1	9.14 445	90	9.14 872	91	0.85 128	9.99 574	59
2	9.14 535	89	9.14 963	91	0.85 037	9.99 572	58
3	9.14 624	89	9 15 054	91	0.84 946	9.99 570	57
4	9.14 714	90	9 15 145	91	0.84 855	9.99 568	56
		89		91			
5	9.14 803	88	9 15 236	91	0.84 764	9.99 566	<b>55</b>
6	9.14 891	89	9 15 327	90	0.84 673	9.99 565	54
7	9.14 980	89	9 15 417	91	0.84 583	9.99 563	53
8	9.15 069	88	9 15 508	90	0.84 492	9.99 561	52
9	9.15 157	88	9 15 598	90	0.84 402	9.99 559	51
		88		90			
10	9.15 245	88	9 15 688	89	0.84 312	9.99 557	<b>50</b>
11	9.15 333	88	9 15 777	90	0.84 223	9.99 556	49
12	9.15 421	87	9 15 867	89	0.84 133	9.99 554	48
13	9.15 508	88	9 15 956	89	0.84 044	9.99 552	47
14	9.15 596	87	9.16 046	89	0.83 954	9.99 550	46
		87		89			
15	9.15 683	87	9.16 135	88	0.83 865	9.99 548	<b>45</b>
16	9.15 770	87	9.16 224	89	0.83 776	9.99 546	44
17	9.15 857	87	9.16 312	89	0.83 688	9.99 545	43
18	9.15 944	86	9.16 401	88	0.83 599	9.99 543	42
19	9.16 030	86	9.16 489	88	0.83 511	9.99 541	41
		86		88			
20	9.16 116	87	9.16 577	88	0.83 423	9.99 539	<b>40</b>
21	9.16 203	86	9.16 665	88	0.83 335	9.99 537	39
22	9.16 289	85	9.16 753	88	0.83 247	9.99 535	38
23	9.16 374	86	9.16 841	87	0.83 159	9.99 533	37
24	9.16 460	85	9.16 928	88	0.83 072	9.99 532	36
		85		88			
25	9.16 545	86	9.17 016	87	0.82 984	9.99 530	<b>35</b>
26	9.16 631	85	9.17 103	87	0.82 897	9.99 528	34
27	9.16 716	85	9.17 190	87	0.82 810	9.99 526	33
28	9.16 801	85	9.17 277	86	0.82 723	9.99 524	32
29	9.16 886	84	9.17 363	87	0.82 637	9.99 522	31
		84		87			
30	9.16 970	85	9.17 450	86	0.82 550	9.99 520	<b>30</b>
31	9.17 055	84	9.17 536	86	0.82 464	9.99 518	29
32	9.17 139	84	9.17 622	86	0.82 378	9.99 517	28
33	9.17 223	84	9.17 708	86	0.82 292	9.99 515	27
34	9.17 307	84	9.17 794	86	0.82 206	9.99 513	26
		84		86			
35	9.17 391	83	9.17 880	85	0.82 120	9.99 511	<b>25</b>
36	9.17 474	84	9.17 965	85	0.82 035	9.99 509	24
37	9.17 558	83	9.18 051	86	0.81 949	9.99 507	23
38	9.17 641	83	9.18 136	85	0.81 864	9.99 505	22
39	9.17 724	83	9.18 221	85	0.81 779	9.99 503	21
		83		85			
40	9.17 807	83	9.18 306	85	0.81 694	9.99 501	<b>20</b>
41	9.17 890	83	9.18 391	84	0.81 609	9.99 499	19
42	9.17 973	82	9.18 475	85	0.81 525	9.99 497	18
43	9.18 055	82	9.18 560	84	0.81 440	9.99 495	17
44	9.18 137	83	9.18 644	84	0.81 356	9.99 494	16
		83		84			
45	9.18 220	82	9.18 728	84	0.81 272	9.99 492	<b>15</b>
46	9.18 302	81	9.18 812	84	0.81 188	9.99 490	14
47	9.18 383	82	9.18 896	83	0.81 104	9.99 488	13
48	9.18 465	82	9.18 979	84	0.81 021	9.99 486	12
49	9.18 547	81	9.19 063	83	0.80 937	9.99 484	11
		81		83			
50	9.18 628	81	9.19 146	83	0.80 854	9.99 482	<b>10</b>
51	9.18 709	81	9.19 229	83	0.80 771	9.99 480	9
52	9.18 790	81	9.19 312	83	0.80 688	9.99 478	8
53	9.18 871	81	9.19 395	83	0.80 605	9.99 476	7
54	9.18 952	81	9.19 478	83	0.80 522	9.99 474	6
		81		83			
55	9.19 033	80	9.19 561	82	0.80 439	9.99 472	<b>5</b>
56	9.19 113	80	9.19 643	82	0.80 357	9.99 470	4
57	9.19 193	80	9.19 725	82	0.80 275	9.99 468	3
58	9.19 273	80	9.19 807	82	0.80 193	9.99 466	2
59	9.19 353	80	9.19 889	82	0.80 111	9.99 464	1
		80		82			
60	9.19 433		9.19 971		0.80 029	9.99 462	<b>0</b>
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	PP

'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos		PP
0	9.19 433	80	9.19 971	82	0.80 029	9.99 462	60	
1	9.19 513	79	9.20 053	81	0.79 947	9.99 460	59	
2	9.19 592	80	9.20 134	82	0.79 866	9.99 458	58	
3	9.19 672	79	9.20 216	81	0.79 784	9.99 456	57	
4	9.19 751	79	9.20 297	81	0.79 703	9.99 454	56	
5	9.19 830	79	9.20 378	81	0.79 622	9.99 452	55	82 81 80
6	9.19 909	79	9.20 459	81	0.79 541	9.99 450	54	
7	9.19 988	79	9.20 540	81	0.79 460	9.99 448	53	1   8.2 8.1 8.0
8	9.20 067	78	9.20 621	80	0.79 379	9.99 446	52	2   16.4 16.2 16.0
9	9.20 145	78	9.20 701	81	0.79 299	9.99 444	51	3   24.6 24.3 24.0
10	9.20 223	79	9.20 782	80	0.79 218	9.99 442	50	4   32.8 32.4 32.0
11	9.20 302	78	9.20 862	80	0.79 138	9.99 440	49	5   41.0 40.5 40.0
12	9.20 380	78	9.20 942	80	0.79 058	9.99 438	48	6   49.2 48.6 48.0
13	9.20 458	77	9.21 022	80	0.78 978	9.99 436	47	7   57.4 56.7 56.0
14	9.20 535	78	9.21 102	80	0.78 898	9.99 434	46	8   65.6 64.8 64.0
15	9.20 613	78	9.21 182	79	0.78 818	9.99 432	45	9   73.8 72.9 72.0
16	9.20 691	77	9.21 261	80	0.78 739	9.99 429	44	
17	9.20 768	77	9.21 341	79	0.78 659	9.99 427	43	
18	9.20 845	77	9.21 420	79	0.78 580	9.99 425	42	
19	9.20 922	77	9.21 499	79	0.78 501	9.99 423	41	
20	9.20 999	77	9.21 578	79	0.78 422	9.99 421	40	79 78 77
21	9.21 076	77	9.21 657	79	0.78 343	9.99 419	39	1   7.0 7.8 7.7
22	9.21 153	76	9.21 736	78	0.78 264	9.99 417	38	2   15.8 15.6 15.4
23	9.21 229	77	9.21 814	79	0.78 186	9.99 415	37	3   23.7 23.4 23.1
24	9.21 306	76	9.21 893	78	0.78 107	9.99 413	36	4   31.6 31.2 30.8
25	9.21 382	76	9.21 971	78	0.78 029	9.99 411	35	5   39.5 39.0 38.5
26	9.21 458	76	9.22 049	78	0.77 951	9.99 409	34	6   47.7 46.8 46.2
27	9.21 534	76	9.22 127	78	0.77 873	9.99 407	33	7   55.3 54.6 53.9
28	9.21 610	75	9.22 205	78	0.77 795	9.99 404	32	8   63.2 62.4 61.6
29	9.21 685	76	9.22 283	78	0.77 717	9.99 402	31	9   71.1 70.2 69.3
30	9.21 761	75	9.22 361	77	0.77 639	9.99 400	30	
31	9.21 836	76	9.22 438	78	0.77 562	9.99 398	29	
32	9.21 912	75	9.22 516	77	0.77 484	9.99 396	28	
33	9.21 987	75	9.22 593	77	0.77 407	9.99 394	27	
34	9.22 062	75	9.22 670	77	0.77 330	9.99 392	26	76 75 74
35	9.22 137	74	9.22 747	77	0.77 253	9.99 390	25	1   7.6 7.5 7.4
36	9.22 211	75	9.22 824	77	0.77 176	9.99 388	24	2   15.2 15.0 14.8
37	9.22 286	75	9.22 901	77	0.77 099	9.99 385	23	3   22.8 22.5 22.2
38	9.22 361	74	9.22 977	76	0.77 023	9.99 383	22	4   30.4 30.0 29.6
39	9.22 435	74	9.23 054	77	0.76 946	9.99 381	21	5   38.0 37.5 37.0
40	9.22 509	74	9.23 130	76	0.76 870	9.99 379	20	6   45.6 45.0 44.4
41	9.22 583	74	9.23 206	77	0.76 794	9.99 377	19	7   53.2 52.5 51.8
42	9.22 657	74	9.23 283	76	0.76 717	9.99 375	18	8   60.8 60.0 59.2
43	9.22 731	74	9.23 359	76	0.76 641	9.99 372	17	9   68.4 67.5 66.6
44	9.22 805	73	9.23 435	75	0.76 565	9.99 370	16	
45	9.22 878	74	9.23 510	76	0.76 490	9.99 368	15	
46	9.22 952	73	9.23 586	75	0.76 414	9.99 366	14	
47	9.23 025	73	9.23 661	76	0.76 339	9.99 364	13	
48	9.23 098	73	9.23 737	75	0.76 263	9.99 362	12	73 72 71
49	9.23 171	73	9.23 812	75	0.76 188	9.99 359	11	1   7.3 7.2 7.1
50	9.23 244	73	9.23 887	75	0.76 113	9.99 357	10	2   14.6 14.4 14.2
51	9.23 317	73	9.23 962	75	0.76 038	9.99 355	9	3   21.9 21.6 21.3
52	9.23 390	73	9.24 037	75	0.75 963	9.99 353	8	4   29.2 28.8 28.4
53	9.23 462	72	9.24 112	75	0.75 888	9.99 351	7	5   36.5 36.0 35.5
54	9.23 535	73	9.24 186	74	0.75 814	9.99 348	6	6   43.8 43.2 42.6
55	9.23 607	72	9.24 261	75	0.75 739	9.99 346	5	7   51.1 50.4 49.7
56	9.23 679	73	9.24 335	74	0.75 665	9.99 344	4	8   58.4 57.6 56.8
57	9.23 752	72	9.24 410	74	0.75 590	9.99 342	3	9   65.7 64.8 63.9
58	9.23 823	71	9.24 484	74	0.75 516	9.99 340	2	
59	9.23 895	72	9.24 558	74	0.75 442	9.99 337	1	
60	9.23 967		9.24 632		0 75 368	9.99 335	0	
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	'	PP

'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.23 967	72	0.24 632	74	0.75 368	9.99 535	2	60
1	9.24 039	71	0.24 706	73	0.75 294	9.99 333	2	59
2	9.24 110	71	9.24 779	74	0.75 221	9.99 331	2	58
3	9.24 181	72	9.24 853	73	0.75 147	9.99 328	2	57
4	9.24 253	71	9.24 926	74	0.75 074	9.99 326	2	56
5	9.24 324	71	9.25 000	73	0.75 000	9.99 324	2	55
6	9.24 395	71	9.25 073	73	0.74 927	9.99 322	2	54
7	9.24 466	70	9.25 146	73	0.74 854	9.99 319	2	53
8	9.24 536	71	9.25 219	73	0.74 781	9.99 317	2	52
9	9.24 607	70	9.25 292	73	0.74 708	9.99 315	2	51
10	9.24 677	71	9.25 365	72	0.74 635	9.99 313	2	50
11	9.24 748	70	9.25 437	73	0.74 563	9.99 310	2	49
12	9.24 818	70	9.25 510	72	0.74 490	9.99 308	2	48
13	9.24 888	70	9.25 582	73	0.74 418	9.99 306	2	47
14	9.24 958	70	9.25 655	72	0.74 345	9.99 304	2	46
15	9.25 028	70	9.25 727	72	0.74 273	9.99 301	2	45
16	9.25 098	70	9.25 799	72	0.74 201	9.99 299	2	44
17	9.25 168	69	9.25 871	72	0.74 129	9.99 297	2	43
18	9.25 237	70	9.25 943	72	0.74 057	9.99 294	2	42
19	9.25 307	69	9.26 015	71	0.73 985	9.99 292	2	41
20	9.25 376	69	9.26 086	72	0.73 914	9.99 290	2	40
21	9.25 445	69	9.26 158	72	0.73 842	9.99 288	2	39
22	9.25 514	69	9.26 229	72	0.73 771	9.99 285	2	38
23	9.25 583	69	9.26 301	71	0.73 699	9.99 283	2	37
24	9.25 652	69	9.26 372	71	0.73 628	9.99 281	2	36
25	9.25 721	69	9.26 443	71	0.73 557	9.99 278	2	35
26	9.25 790	68	9.26 514	71	0.73 486	9.99 276	2	34
27	9.25 858	69	9.26 585	70	0.73 415	9.99 274	2	33
28	9.25 927	68	9.26 655	70	0.73 345	9.99 271	2	32
29	9.25 995	68	9.26 726	71	0.73 274	9.99 269	2	31
30	9.26 063	68	9.26 797	70	0.73 203	9.99 267	2	30
31	9.26 131	68	9.26 867	70	0.73 133	9.99 264	2	29
32	9.26 199	68	9.26 937	71	0.73 063	9.99 262	2	28
33	9.26 267	68	9.27 008	70	0.72 992	9.99 260	2	27
34	9.26 335	68	9.27 078	70	0.72 922	9.99 257	2	26
35	9.26 403	67	9.27 148	70	0.72 852	9.99 255	2	25
36	9.26 470	68	9.27 218	70	0.72 782	9.99 252	2	24
37	9.26 538	67	9.27 288	69	0.72 712	9.99 250	2	23
38	9.26 605	67	9.27 357	70	0.72 643	9.99 248	2	22
39	9.26 672	67	9.27 427	69	0.72 573	9.99 245	2	21
40	9.26 739	67	9.27 496	70	0.72 504	9.99 243	2	20
41	9.26 806	67	9.27 566	69	0.72 434	9.99 241	2	19
42	9.26 873	67	9.27 635	69	0.72 365	9.99 238	2	18
43	9.26 940	67	9.27 704	69	0.72 296	9.99 236	2	17
44	9.27 007	66	9.27 773	69	0.72 227	9.99 233	2	16
45	9.27 073	67	9.27 842	69	0.72 158	9.99 231	2	15
46	9.27 140	66	9.27 911	69	0.72 089	9.99 229	2	14
47	9.27 206	67	9.27 980	69	0.72 020	9.99 226	2	13
48	9.27 273	66	9.28 049	68	0.71 951	9.99 224	2	12
49	9.27 339	66	9.28 117	69	0.71 883	9.99 221	2	11
50	9.27 405	66	9.28 186	68	0.71 814	9.99 219	2	10
51	9.27 471	66	9.28 254	69	0.71 746	9.99 217	2	9
52	9.27 537	65	9.28 323	68	0.71 677	9.99 214	2	8
53	9.27 602	66	9.28 391	68	0.71 609	9.99 212	2	7
54	9.27 668	66	9.28 459	68	0.71 541	9.99 209	2	6
55	9.27 734	65	9.28 527	68	0.71 473	9.99 207	2	5
56	9.27 799	65	9.28 595	67	0.71 405	9.99 204	2	4
57	9.27 864	66	9.28 662	68	0.71 338	9.99 202	2	3
58	9.27 930	65	9.28 730	68	0.71 270	9.99 200	2	2
59	9.27 995	65	9.28 798	67	0.71 202	9.99 197	2	1
60	9.28 060	65	9.28 865	67	0.71 135	9.99 195	2	0
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d	PP



'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.28 060	65	9.28 865	68	0.71 135	9.99 195	3	69
1	9.28 125	65	9.28 933	67	0.71 067	9.99 192	2	59
2	9.28 190	64	9.29 000	67	0.71 000	9.99 190	2	58
3	9.28 254	65	9.29 067	67	0.70 933	9.99 187	2	57
4	9.28 319	65	9.29 134	67	0.70 866	9.99 185	2	56
5	9.28 384	64	9.29 201	67	0.70 799	9.99 182	3	55
6	9.28 448	64	9.29 268	67	0.70 732	9.99 180	2	54
7	9.28 512	65	9.29 335	67	0.70 665	9.99 177	2	53
8	9.28 577	64	9.29 402	66	0.70 598	9.99 175	2	52
9	9.28 641	64	9.29 468	67	0.70 532	9.99 172	3	51
10	9.28 705	64	9.29 535	66	0.70 465	9.99 170	2	50
11	9.28 769	64	9.29 601	67	0.70 399	9.99 167	3	49
12	9.28 833	63	9.29 668	66	0.70 332	9.99 165	2	48
13	9.28 896	64	9.29 734	66	0.70 266	9.99 162	2	47
14	9.28 960	64	9.29 800	66	0.70 200	9.99 160	2	46
15	9.29 024	63	9.29 866	66	0.70 134	9.99 157	3	45
16	9.29 087	63	9.29 932	66	0.70 068	9.99 155	2	44
17	9.29 150	64	9.29 998	66	0.70 002	9.99 152	3	43
18	9.29 214	63	9.30 064	66	0.69 936	9.99 150	2	42
19	9.29 277	63	9.30 130	65	0.69 870	9.99 147	3	41
20	9.29 340	63	9.30 195	66	0.69 805	9.99 145	2	40
21	9.29 403	63	9.30 261	65	0.69 739	9.99 142	3	39
22	9.29 466	63	9.30 326	65	0.69 674	9.99 140	2	38
23	9.29 529	62	9.30 391	66	0.69 609	9.99 137	3	37
24	9.29 591	63	9.30 457	65	0.69 543	9.99 135	2	36
25	9.29 654	62	9.30 522	65	0.69 478	9.99 132	3	35
26	9.29 716	63	9.30 587	65	0.69 413	9.99 130	2	34
27	9.29 779	62	9.30 652	65	0.69 348	9.99 127	3	33
28	9.29 841	62	9.30 717	65	0.69 283	9.99 124	2	32
29	9.29 903	63	9.30 782	64	0.69 218	9.99 122	3	31
30	9.29 966	62	9.30 846	65	0.69 154	9.99 119	2	30
31	9.30 028	62	9.30 911	64	0.69 089	9.99 117	3	29
32	9.30 090	61	9.30 975	65	0.69 025	9.99 114	2	28
33	9.30 151	62	9.31 040	64	0.68 960	9.99 112	3	27
34	9.30 213	62	9.31 104	64	0.68 896	9.99 109	2	26
35	9.30 275	61	9.31 168	65	0.68 832	9.99 106	3	25
36	9.30 336	62	9.31 233	64	0.68 767	9.99 104	2	24
37	9.30 398	61	9.31 297	64	0.68 703	9.99 101	3	23
38	9.30 459	62	9.31 361	64	0.68 639	9.99 099	2	22
39	9.30 521	61	9.31 425	64	0.68 575	9.99 096	3	21
40	9.30 582	61	9.31 489	63	0.68 511	9.99 093	2	20
41	9.30 643	61	9.31 552	64	0.68 448	9.99 091	3	19
42	9.30 704	61	9.31 616	63	0.68 384	9.99 088	2	18
43	9.30 765	61	9.31 679	64	0.68 321	9.99 086	3	17
44	9.30 826	61	9.31 743	63	0.68 257	9.99 083	2	16
45	9.30 887	60	9.31 806	64	0.68 194	9.99 080	3	15
46	9.30 947	61	9.31 870	63	0.68 130	9.99 078	2	14
47	9.31 008	60	9.31 933	63	0.68 067	9.99 075	3	13
48	9.31 068	61	9.31 996	63	0.68 004	9.99 072	2	12
49	9.31 129	60	9.32 059	63	0.67 941	9.99 070	3	11
50	9.31 189	61	9.32 122	63	0.67 878	9.99 067	2	10
51	9.31 250	60	9.32 185	63	0.67 815	9.99 064	3	9
52	9.31 310	60	9.32 248	63	0.67 752	9.99 062	2	8
53	9.31 370	60	9.32 311	62	0.67 689	9.99 059	3	7
54	9.31 430	60	9.32 373	63	0.67 627	9.99 056	2	6
55	9.31 490	59	9.32 436	62	0.67 564	9.99 054	3	5
56	9.31 549	60	9.32 498	63	0.67 502	9.99 051	2	4
57	9.31 609	60	9.32 561	62	0.67 439	9.99 048	3	3
58	9.31 669	59	9.32 623	62	0.67 377	9.99 046	2	2
59	9.31 728	60	9.32 685	62	0.67 315	9.99 043	3	1
60	9.31 788		9.32 747		0.67 253	9.99 040		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.31 788	59	9.32 747	63	0.67 253	9.99 040	2	60
1	9.31 847	60	9.32 810	62	0.67 190	9.99 038	3	59
2	9.31 907	59	9.32 872	61	0.67 128	9.99 035	3	58
3	9.31 966	59	9.32 933	62	0.67 067	9.99 032	2	57
4	9.32 025	59	9.32 995	62	0.67 005	9.99 030	2	56
		59		62			3	
5	9.32 084	59	9.33 057	62	0.66 943	9.99 027	3	55
6	9.32 143	59	9.33 119	61	0.66 881	9.99 024	3	54
7	9.32 202	59	9.33 180	62	0.66 820	9.99 022	2	53
8	9.32 261	58	9.33 242	61	0.66 758	9.99 019	3	52
9	9.32 319	58	9.33 303	61	0.66 697	9.99 016	3	51
		59		62			3	
10	9.32 378	59	9.33 365	61	0.66 635	9.99 013	2	50
11	9.32 437	58	9.33 426	61	0.66 574	9.99 011	3	49
12	9.32 495	58	9.33 487	61	0.66 513	9.99 008	3	48
13	9.32 553	59	9.33 548	61	0.66 452	9.99 005	3	47
14	9.32 612	58	9.33 609	61	0.66 391	9.99 002	2	46
		58		61			2	
15	9.32 670	58	9.33 670	61	0.66 330	9.99 000	3	45
16	9.32 728	58	9.33 731	61	0.66 269	9.98 997	3	44
17	9.32 786	58	9.33 792	61	0.66 208	9.98 994	3	43
18	9.32 844	58	9.33 853	61	0.66 147	9.98 991	3	42
19	9.32 902	58	9.33 913	60	0.66 087	9.98 989	2	41
		58		61			3	
20	9.32 960	58	9.33 974	60	0.66 026	9.98 986	3	40
21	9.33 018	57	9.34 034	61	0.65 966	9.98 983	3	39
22	9.33 075	58	9.34 095	60	0.65 905	9.98 980	2	38
23	9.33 133	57	9.34 155	60	0.65 845	9.98 978	3	37
24	9.33 190	58	9.34 215	61	0.65 785	9.98 975	3	36
		58		60			3	
25	9.33 248	57	9.34 276	60	0.65 724	9.98 972	3	35
26	9.33 305	57	9.34 336	60	0.65 664	9.98 969	3	34
27	9.33 362	57	9.34 396	60	0.65 604	9.98 967	2	33
28	9.33 420	58	9.34 456	60	0.65 544	9.98 964	3	32
29	9.33 477	57	9.34 516	60	0.65 484	9.98 961	3	31
		57		60			3	
30	9.33 534	57	9.34 576	59	0.65 424	9.98 958	3	30
31	9.33 591	56	9.34 635	60	0.65 365	9.98 955	2	29
32	9.33 647	57	9.34 695	60	0.65 305	9.98 953	3	28
33	9.33 704	57	9.34 755	59	0.65 245	9.98 950	3	27
34	9.33 761	57	9.34 814	60	0.65 186	9.98 947	3	26
		57		60			3	
35	9.33 818	56	9.34 874	59	0.65 126	9.98 944	3	25
36	9.33 874	57	9.34 933	59	0.65 067	9.98 941	3	24
37	9.33 931	56	9.34 992	59	0.65 008	9.98 938	2	23
38	9.33 987	56	9.35 051	60	0.64 949	9.98 936	3	22
39	9.34 043	57	9.35 111	59	0.64 889	9.98 933	3	21
		57		59			3	
40	9.34 100	56	9.35 170	59	0.64 830	9.98 930	3	20
41	9.34 156	56	9.35 229	59	0.64 771	9.98 927	3	19
42	9.34 212	56	9.35 288	59	0.64 712	9.98 924	3	18
43	9.34 268	56	9.35 347	58	0.64 653	9.98 921	2	17
44	9.34 324	56	9.35 405	59	0.64 595	9.98 919	2	16
		56		59			3	
45	9.34 380	56	9.35 464	59	0.64 536	9.98 916	3	15
46	9.34 436	55	9.35 523	58	0.64 477	9.98 913	3	14
47	9.34 491	56	9.35 581	59	0.64 419	9.98 910	3	13
48	9.34 547	55	9.35 640	58	0.64 360	9.98 907	3	12
49	9.34 602	56	9.35 698	59	0.64 302	9.98 904	3	11
		56		59			3	
50	9.34 658	55	9.35 757	58	0.64 243	9.98 901	3	10
51	9.34 713	56	9.35 815	58	0.64 185	9.98 898	2	9
52	9.34 769	55	9.35 873	58	0.64 127	9.98 896	3	8
53	9.34 824	55	9.35 931	58	0.64 069	9.98 893	3	7
54	9.34 879	55	9.35 989	58	0.64 011	9.98 890	3	6
		55		58			3	
55	9.34 934	55	9.36 047	58	0.63 953	9.98 887	3	5
56	9.34 989	55	9.36 105	58	0.63 895	9.98 884	3	4
57	9.35 044	55	9.36 163	58	0.63 837	9.98 881	3	3
58	9.35 099	55	9.36 221	58	0.63 779	9.98 878	3	2
59	9.35 154	55	9.36 279	58	0.63 721	9.98 875	3	1
		55		57			3	
60	9.35 209		9.36 336		0.63 664	9.98 872		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.35 209	54	9.36 336	58	0.63 664	9.98 872	3	60
1	9.35 263	55	9.36 394	58	0.63 606	9.98 869	2	59
2	9.35 318	55	9.36 452	57	0.63 548	9.98 867	3	58
3	9.35 373	54	9.36 509	57	0.63 491	9.98 864	3	57
4	9.35 427	54	9.36 566	57	0.63 434	9.98 861	3	56
		54		58			3	
5	9.35 481	55	9.36 624	57	0.63 376	9.98 858	3	55
6	9.35 536	54	9.36 681	57	0.63 319	9.98 855	3	54
7	9.35 590	54	9.36 738	57	0.63 262	9.98 852	3	53
8	9.35 644	54	9.36 795	57	0.63 205	9.98 849	3	52
9	9.35 698	54	9.36 852	57	0.63 148	9.98 846	3	51
		54		57			3	
10	9.35 752	54	9.36 909	57	0.63 091	9.98 843	3	50
11	9.35 806	54	9.36 966	57	0.63 034	9.98 840	3	49
12	9.35 860	54	9.37 023	57	0.62 977	9.98 837	3	48
13	9.35 914	54	9.37 080	57	0.62 920	9.98 834	3	47
14	9.35 968	54	9.37 137	57	0.62 863	9.98 831	3	46
		54		56			3	
15	9.36 022	53	9.37 193	57	0.62 807	9.98 828	3	45
16	9.36 075	54	9.37 250	57	0.62 750	9.98 825	3	44
17	9.36 129	53	9.37 306	56	0.62 694	9.98 822	3	43
18	9.36 182	54	9.37 363	56	0.62 637	9.98 819	3	42
19	9.36 236	53	9.37 419	57	0.62 581	9.98 816	3	41
		53		57			3	
20	9.36 289	53	9.37 476	56	0.62 524	9.98 813	3	40
21	9.36 342	53	9.37 532	56	0.62 468	9.98 810	3	39
22	9.36 395	54	9.37 588	56	0.62 412	9.98 807	3	38
23	9.36 449	53	9.37 644	56	0.62 356	9.98 804	3	37
24	9.36 502	53	9.37 700	56	0.62 300	9.98 801	3	36
		53		56			3	
25	9.36 555	53	9.37 756	56	0.62 244	9.98 798	3	35
26	9.36 608	52	9.37 812	56	0.62 188	9.98 795	3	34
27	9.36 660	53	9.37 868	56	0.62 132	9.98 792	3	33
28	9.36 713	53	9.37 924	56	0.62 076	9.98 789	3	32
29	9.36 766	53	9.37 980	55	0.62 020	9.98 786	3	31
		53		55			3	
30	9.36 819	52	9.38 035	56	0.61 965	9.98 783	3	30
31	9.36 871	53	9.38 091	56	0.61 909	9.98 780	3	29
32	9.36 924	52	9.38 147	55	0.61 853	9.98 777	3	28
33	9.36 976	52	9.38 202	55	0.61 798	9.98 774	3	27
34	9.37 028	52	9.38 257	55	0.61 743	9.98 771	3	26
		53		56			3	
35	9.37 081	52	9.38 313	55	0.61 687	9.98 768	3	25
36	9.37 133	52	9.38 368	55	0.61 632	9.98 765	3	24
37	9.37 185	52	9.38 423	55	0.61 577	9.98 762	3	23
38	9.37 237	52	9.38 479	55	0.61 521	9.98 759	3	22
39	9.37 289	52	9.38 534	55	0.61 466	9.98 756	3	21
		52		55			3	
40	9.37 341	52	9.38 589	55	0.61 411	9.98 753	3	20
41	9.37 393	52	9.38 644	55	0.61 356	9.98 750	3	19
42	9.37 445	52	9.38 699	55	0.61 301	9.98 746	3	18
43	9.37 497	52	9.38 754	54	0.61 246	9.98 743	3	17
44	9.37 549	51	9.38 808	55	0.61 192	9.98 740	3	16
		51		55			3	
45	9.37 600	52	9.38 863	55	0.61 137	9.98 737	3	15
46	9.37 652	51	9.38 918	54	0.61 082	9.98 734	3	14
47	9.37 703	52	9.38 972	55	0.61 028	9.98 731	3	13
48	9.37 755	51	9.39 027	55	0.60 973	9.98 728	3	12
49	9.37 806	51	9.39 082	55	0.60 918	9.98 725	3	11
		52		54			3	
50	9.37 858	51	9.39 136	54	0.60 864	9.98 722	3	10
51	9.37 909	51	9.39 190	55	0.60 810	9.98 719	3	9
52	9.37 960	51	9.39 245	54	0.60 755	9.98 715	3	8
53	9.38 011	51	9.39 299	54	0.60 701	9.98 712	3	7
54	9.38 062	51	9.39 353	54	0.60 647	9.98 709	3	6
		51		54			3	
55	9.38 113	51	9.39 407	54	0.60 593	9.98 706	3	5
56	9.38 164	51	9.39 461	54	0.60 539	9.98 703	3	4
57	9.38 215	51	9.39 515	54	0.60 485	9.98 700	3	3
58	9.38 266	51	9.39 569	54	0.60 431	9.98 697	3	2
59	9.38 317	51	9.39 623	54	0.60 377	9.98 694	3	1
		51		54			4	
60	9.38 368		9.39 677		0.60 323	9.98 690		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9 38 368	50	9 39 677	54	0 60 323	9 98 690	3	60
1	9 38 418	51	9 39 731	54	0 60 269	9 98 687	3	59
2	9 38 460	50	9 39 785	53	0 60 215	9 98 684	3	58
3	9 38 519	51	9 39 838	54	0 60 162	9 98 681	3	57
4	9 38 570	50	9 39 892	53	0 60 108	9 98 678	3	56
5	9 38 620	50	9 39 945	54	0 60 055	9 98 675	4	55
6	9 38 670	51	9 39 999	53	0 60 001	9 98 671	3	54
7	9 38 721	50	9 40 052	54	0 59 948	9 98 668	3	53
8	9 38 771	50	9 40 106	53	0 59 894	9 98 665	3	52
9	9 38 821	50	9 40 159	53	0 59 841	9 98 662	3	51
10	9 38 871	50	9 40 212	54	0 59 788	9 98 659	3	50
11	9 38 921	50	9 40 266	53	0 59 734	9 98 656	4	49
12	9 38 971	50	9 40 319	53	0 59 681	9 98 652	3	48
13	9 39 021	50	9 40 372	53	0 59 628	9 98 649	3	47
14	9 39 071	50	9 40 425	53	0 59 575	9 98 646	3	46
15	9 39 121	49	9 40 478	53	0 59 522	9 98 643	3	45
16	9 39 170	50	9 40 531	53	0 59 469	9 98 640	4	44
17	9 39 220	50	9 40 584	52	0 59 416	9 98 636	3	43
18	9 39 270	50	9 40 636	53	0 59 364	9 98 633	3	42
19	9 39 319	50	9 40 689	53	0 59 311	9 98 630	3	41
20	9 39 369	49	9 40 742	53	0 59 258	9 98 627	4	40
21	9 39 418	49	9 40 795	52	0 59 205	9 98 623	3	39
22	9 39 467	50	9 40 847	53	0 59 153	9 98 620	3	38
23	9 39 517	49	9 40 900	52	0 59 100	9 98 617	3	37
24	9 39 566	49	9 40 952	53	0 59 048	9 98 614	4	36
25	9 39 615	49	9 41 005	52	0 58 995	9 98 610	3	35
26	9 39 664	49	9 41 057	52	0 58 943	9 98 607	3	34
27	9 39 713	49	9 41 109	52	0 58 891	9 98 604	3	33
28	9 39 762	49	9 41 161	53	0 58 839	9 98 601	4	32
29	9 39 811	49	9 41 214	52	0 58 786	9 98 597	3	31
30	9 39 860	49	9 41 266	52	0 58 734	9 98 594	3	30
31	9 39 909	49	9 41 318	52	0 58 682	9 98 591	3	29
32	9 39 958	48	9 41 370	52	0 58 630	9 98 588	4	28
33	9 40 006	48	9 41 422	52	0 58 578	9 98 584	3	27
34	9 40 055	48	9 41 474	52	0 58 526	9 98 581	3	26
35	9 40 103	49	9 41 526	52	0 58 474	9 98 578	4	25
36	9 40 152	49	9 41 578	51	0 58 422	9 98 574	4	24
37	9 40 200	48	9 41 629	52	0 58 371	9 98 571	3	23
38	9 40 249	49	9 41 681	52	0 58 319	9 98 568	3	22
39	9 40 297	49	9 41 733	51	0 58 267	9 98 565	4	21
40	9 40 346	48	9 41 784	52	0 58 216	9 98 561	3	20
41	9 40 394	48	9 41 836	51	0 58 164	9 98 558	3	19
42	9 40 442	48	9 41 887	52	0 58 113	9 98 555	4	18
43	9 40 490	48	9 41 939	51	0 58 061	9 98 551	3	17
44	9 40 538	48	9 41 990	51	0 58 010	9 98 548	3	16
45	9 40 586	48	9 42 041	52	0 57 959	9 98 545	4	15
46	9 40 634	48	9 42 093	51	0 57 907	9 98 541	3	14
47	9 40 682	48	9 42 144	51	0 57 856	9 98 538	3	13
48	9 40 730	48	9 42 195	51	0 57 805	9 98 535	4	12
49	9 40 778	47	9 42 246	51	0 57 754	9 98 531	3	11
50	9 40 825	48	9 42 297	51	0 57 703	9 98 528	3	10
51	9 40 873	48	9 42 348	51	0 57 652	9 98 525	4	9
52	9 40 921	47	9 42 399	51	0 57 601	9 98 521	3	8
53	9 40 968	48	9 42 450	51	0 57 550	9 98 518	3	7
54	9 41 016	47	9 42 501	51	0 57 499	9 98 515	4	6
55	9 41 063	48	9 42 552	51	0 57 448	9 98 511	3	5
56	9 41 111	47	9 42 603	50	0 57 397	9 98 508	3	4
57	9 41 158	47	9 42 653	51	0 57 347	9 98 505	4	3
58	9 41 205	47	9 42 704	51	0 57 296	9 98 501	3	2
59	9 41 252	48	9 42 755	50	0 57 245	9 98 498	4	1
60	9 41 300		9 42 805		0 57 195	9 98 494		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.41 300	47	9.42 805	51	0.57 195	9.98 494	3	<b>60</b>
1	9.41 347	47	9.42 856	50	0.57 144	9.98 491	3	59
2	9.41 394	47	9.42 906	51	0.57 094	9.98 488	3	58
3	9.41 441	47	9.42 957	50	0.57 043	9.98 484	4	57
4	9.41 488	47	9.43 007	50	0.56 993	9.98 481	3	56
		47		50			4	
<b>5</b>	9.41 535	47	9.43 057	51	0.56 943	9.98 477	3	<b>55</b>
6	9.41 582	46	9.43 108	50	0.56 892	9.98 474	3	54
7	9.41 628	46	9.43 158	50	0.56 842	9.98 471	4	53
8	9.41 675	47	9.43 208	50	0.56 792	9.98 467	3	52
9	9.41 722	47	9.43 258	50	0.56 742	9.98 464	3	51
		46		50			4	
<b>10</b>	9.41 768	47	9.43 308	50	0.56 692	9.98 460	3	<b>50</b>
11	9.41 815	46	9.43 <sup>3</sup> 358	50	0.56 642	9.98 457	3	49
12	9.41 861	46	9.43 408	50	0.56 592	9.98 453	4	48
13	9.41 908	47	9.43 458	50	0.56 542	9.98 450	3	47
14	9.41 954	46	9.43 508	50	0.56 492	9.98 447	3	46
		47		50			4	
<b>15</b>	9.42 001	46	9.43 558	49	0.56 442	9.98 443	3	<b>45</b>
16	9.42 047	46	9.43 607	50	0.56 393	9.98 440	4	44
17	9.42 093	47	9.43 657	50	0.56 343	9.98 436	3	43
18	9.42 140	46	9.43 707	49	0.56 293	9.98 433	3	42
19	9.42 186	46	9.43 756	50	0.56 244	9.98 429	4	41
		46		50			3	
<b>20</b>	9.42 232	46	9.43 806	49	0.56 194	9.98 426	4	<b>40</b>
21	9.42 278	46	9.43 855	50	0.56 145	9.98 422	3	39
22	9.42 324	46	9.43 905	49	0.56 095	9.98 419	4	38
23	9.42 370	46	9.43 954	50	0.56 046	9.98 415	3	37
24	9.42 416	45	9.44 004	49	0.55 996	9.98 412	3	36
		46		49			3	
<b>25</b>	9.42 461	46	9.44 053	49	0.55 947	9.98 409	4	<b>35</b>
26	9.42 507	46	9.44 102	49	0.55 898	9.98 405	3	34
27	9.42 553	46	9.44 151	50	0.55 849	9.98 402	4	33
28	9.42 599	45	9.44 201	49	0.55 799	9.98 398	4	32
29	9.42 644	46	9.44 250	49	0.55 750	9.98 395	3	31
		46		49			4	
<b>30</b>	9.42 690	45	9.44 299	49	0.55 701	9.98 391	3	<b>30</b>
31	9.42 735	46	9.44 348	49	0.55 652	9.98 388	4	29
32	9.42 781	45	9.44 397	49	0.55 603	9.98 384	3	28
33	9.42 826	46	9.44 446	49	0.55 554	9.98 381	4	27
34	9.42 872	45	9.44 495	49	0.55 505	9.98 377	4	26
		45		49			4	
<b>35</b>	9.42 917	45	9.44 544	48	0.55 456	9.98 373	3	<b>25</b>
36	9.42 962	46	9.44 592	49	0.55 408	9.98 370	4	24
37	9.43 008	45	9.44 641	49	0.55 359	9.98 366	4	23
38	9.43 053	45	9.44 690	48	0.55 310	9.98 363	3	22
39	9.43 098	45	9.44 738	48	0.55 262	9.98 359	4	21
		45		49			3	
<b>40</b>	9.43 143	45	9.44 787	49	0.55 213	9.98 356	4	<b>20</b>
41	9.43 188	45	9.44 836	48	0.55 164	9.98 352	3	19
42	9.43 233	45	9.44 884	49	0.55 116	9.98 349	4	18
43	9.43 278	45	9.44 933	48	0.55 067	9.98 345	4	17
44	9.43 323	44	9.44 981	48	0.55 019	9.98 342	3	16
		44		48			4	
<b>45</b>	9.43 367	45	9.45 029	49	0.54 971	9.98 338	4	<b>15</b>
46	9.43 412	45	9.45 078	48	0.54 922	9.98 334	4	14
47	9.43 457	45	9.45 126	48	0.54 874	9.98 331	3	13
48	9.43 502	44	9.45 174	48	0.54 826	9.98 327	4	12
49	9.43 546	45	9.45 222	49	0.54 778	9.98 324	3	11
		45		49			4	
<b>50</b>	9.43 591	44	9.45 271	48	0.54 729	9.98 320	3	<b>10</b>
51	9.43 635	45	9.45 319	48	0.54 681	9.98 317	9	9
52	9.43 680	44	9.45 367	48	0.54 633	9.98 313	4	8
53	9.43 724	44	9.45 415	48	0.54 585	9.98 309	4	7
54	9.43 769	45	9.45 463	48	0.54 537	9.98 306	5	6
		44		48			4	
<b>55</b>	9.43 813	44	9.45 511	48	0.54 489	9.98 302	3	<b>5</b>
56	9.43 857	44	9.45 559	47	0.54 441	9.98 299	4	4
57	9.43 901	45	9.45 606	48	0.54 394	9.98 295	4	3
58	9.43 946	44	9.45 654	48	0.54 346	9.98 291	4	2
59	9.43 990	44	9.45 702	48	0.54 298	9.98 288	3	1
		44		48			4	
<b>60</b>	9.44 034		9.45 750		0.54 250	9.98 284		<b>0</b>
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.44 034	44	9.45 750	47	0.54 250	9.98 284	3	60
1	9.44 078	44	9.45 797	48	0.54 203	9.98 281	4	59
2	9.44 122	44	9.45 845	47	0.54 155	9.98 277	5	58
3	9.44 166	44	9.45 892	48	0.54 108	9.98 273	6	57
4	9.44 210	44	9.45 940	47	0.54 060	9.98 270	7	56
5	9.44 253	44	9.45 987	48	0.54 013	9.98 266	8	55
6	9.44 297	44	9.46 035	47	0.53 965	9.98 262	9	54
7	9.44 341	44	9.46 082	48	0.53 918	9.98 259	1	53
8	9.44 385	43	9.46 130	47	0.53 870	9.98 255	2	52
9	9.44 428	44	9.46 177	48	0.53 823	9.98 251	3	51
10	9.44 472	44	9.46 224	47	0.53 776	9.98 248	4	50
11	9.44 516	43	9.46 271	48	0.53 729	9.98 244	5	49
12	9.44 559	43	9.46 319	47	0.53 681	9.98 240	6	48
13	9.44 602	44	9.46 366	48	0.53 634	9.98 237	7	47
14	9.44 646	43	9.46 413	47	0.53 587	9.98 233	8	46
15	9.44 689	44	9.46 460	48	0.53 540	9.98 229	9	45
16	9.44 733	43	9.46 507	47	0.53 493	9.98 226	1	44
17	9.44 776	43	9.46 554	48	0.53 446	9.98 222	2	43
18	9.44 819	43	9.46 601	47	0.53 399	9.98 218	3	42
19	9.44 862	43	9.46 648	48	0.53 352	9.98 215	4	41
20	9.44 905	43	9.46 694	47	0.53 306	9.98 211	5	40
21	9.44 948	44	9.46 741	48	0.53 259	9.98 207	6	39
22	9.44 992	43	9.46 788	47	0.53 212	9.98 204	7	38
23	9.45 035	42	9.46 835	48	0.53 165	9.98 200	8	37
24	9.45 077	43	9.46 881	47	0.53 119	9.98 196	9	36
25	9.45 120	43	9.46 928	48	0.53 072	9.98 192	1	35
26	9.45 163	43	9.46 975	46	0.53 025	9.98 189	2	34
27	9.45 206	43	9.47 021	47	0.52 979	9.98 185	3	33
28	9.45 249	43	9.47 068	46	0.52 932	9.98 181	4	32
29	9.45 292	42	9.47 114	48	0.52 886	9.98 177	5	31
30	9.45 334	43	9.47 160	47	0.52 840	9.98 174	6	30
31	9.45 377	42	9.47 207	48	0.52 793	9.98 170	7	29
32	9.45 419	43	9.47 253	46	0.52 747	9.98 166	8	28
33	9.45 462	42	9.47 299	47	0.52 701	9.98 162	9	27
34	9.45 504	43	9.47 346	48	0.52 654	9.98 159	1	26
35	9.45 547	42	9.47 392	46	0.52 608	9.98 155	2	25
36	9.45 589	43	9.47 438	48	0.52 562	9.98 151	3	24
37	9.45 632	42	9.47 484	46	0.52 516	9.98 147	4	23
38	9.45 674	42	9.47 530	48	0.52 470	9.98 144	5	22
39	9.45 716	42	9.47 576	46	0.52 424	9.98 140	6	21
40	9.45 758	43	9.47 622	48	0.52 378	9.98 136	7	20
41	9.45 801	42	9.47 668	46	0.52 332	9.98 132	8	19
42	9.45 843	42	9.47 714	48	0.52 286	9.98 129	9	18
43	9.45 885	42	9.47 760	46	0.52 240	9.98 125	1	17
44	9.45 927	42	9.47 806	48	0.52 194	9.98 121	2	16
45	9.45 969	42	9.47 852	46	0.52 148	9.98 117	3	15
46	9.46 011	42	9.47 897	48	0.52 103	9.98 113	4	14
47	9.46 053	42	9.47 943	46	0.52 057	9.98 110	5	13
48	9.46 095	41	9.47 989	48	0.52 011	9.98 106	6	12
49	9.46 136	42	9.48 035	46	0.51 965	9.98 102	7	11
50	9.46 178	42	9.48 080	45	0.51 920	9.98 098	8	10
51	9.46 220	42	9.48 126	48	0.51 874	9.98 094	9	9
52	9.46 262	41	9.48 171	46	0.51 829	9.98 090	1	8
53	9.46 303	42	9.48 217	48	0.51 783	9.98 087	2	7
54	9.46 345	41	9.48 262	45	0.51 738	9.98 083	3	6
55	9.46 386	42	9.48 307	48	0.51 693	9.98 079	4	5
56	9.46 428	41	9.48 353	46	0.51 647	9.98 075	5	4
57	9.46 469	42	9.48 398	45	0.51 602	9.98 071	6	3
58	9.46 511	41	9.48 443	48	0.51 557	9.98 067	7	2
59	9.46 552	42	9.48 489	46	0.51 511	9.98 063	8	1
60	9.46 594	42	9.48 534	45	0.51 466	9.98 060	9	0
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.46 594	41	9.48 534	45	0.51 466	9.98 060	4	60
1	9.46 635	41	9.48 579	45	0.51 421	9.98 056	4	59
2	9.46 676	41	9.48 624	45	0.51 376	9.98 052	4	58
3	9.46 717	41	9.48 669	45	0.51 331	9.98 048	4	57
4	9.46 758	41	9.48 714	45	0.51 286	9.98 044	4	56
5	9.46 800	42	9.48 759	45	0.51 241	9.98 040	4	55
6	9.46 841	41	9.48 804	45	0.51 196	9.98 036	4	54
7	9.46 882	41	9.48 849	45	0.51 151	9.98 032	4	53
8	9.46 923	41	9.48 894	45	0.51 106	9.98 029	4	52
9	9.46 964	41	9.48 939	45	0.51 061	9.98 025	4	51
10	9.47 005	40	9.48 984	45	0.51 016	9.98 021	4	50
11	9.47 045	41	9.49 029	44	0.50 971	9.98 017	4	49
12	9.47 086	41	9.49 073	45	0.50 927	9.98 013	4	48
13	9.47 127	41	9.49 118	45	0.50 882	9.98 009	4	47
14	9.47 168	41	9.49 163	44	0.50 837	9.98 005	4	46
15	9.47 209	40	9.49 207	45	0.50 793	9.98 001	4	45
16	9.47 249	41	9.49 252	44	0.50 748	9.97 997	4	44
17	9.47 290	40	9.49 296	45	0.50 704	9.97 993	4	43
18	9.47 330	41	9.49 341	44	0.50 659	9.97 989	4	42
19	9.47 371	40	9.49 385	45	0.50 615	9.97 986	4	41
20	9.47 411	41	9.49 430	44	0.50 570	9.97 982	4	40
21	9.47 452	40	9.49 474	45	0.50 526	9.97 978	4	39
22	9.47 492	41	9.49 519	44	0.50 481	9.97 974	4	38
23	9.47 533	40	9.49 563	44	0.50 437	9.97 970	4	37
24	9.47 573	40	9.49 607	45	0.50 393	9.97 966	4	36
25	9.47 618	41	9.49 652	44	0.50 348	9.97 962	4	35
26	9.47 654	40	9.49 696	44	0.50 304	9.97 958	4	34
27	9.47 694	40	9.49 740	44	0.50 260	9.97 954	4	33
28	9.47 734	40	9.49 784	44	0.50 216	9.97 950	4	32
29	9.47 774	40	9.49 828	44	0.50 172	9.97 946	4	31
30	9.47 814	40	9.49 872	44	0.50 128	9.97 942	4	30
31	9.47 854	40	9.49 916	44	0.50 084	9.97 938	4	29
32	9.47 894	40	9.49 960	44	0.50 040	9.97 934	4	28
33	9.47 934	40	9.50 004	44	0.49 996	9.97 930	4	27
34	9.47 974	40	9.50 048	44	0.49 952	9.97 926	4	26
35	9.48 014	40	9.50 092	44	0.49 908	9.97 922	4	25
36	9.48 054	40	9.50 136	44	0.49 864	9.97 918	4	24
37	9.48 094	39	9.50 180	43	0.49 820	9.97 914	4	23
38	9.48 133	40	9.50 223	44	0.49 777	9.97 910	4	22
39	9.48 173	40	9.50 267	44	0.49 733	9.97 906	4	21
40	9.48 213	39	9.50 311	44	0.49 689	9.97 902	4	20
41	9.48 252	40	9.50 355	44	0.49 645	9.97 898	4	19
42	9.48 292	40	9.50 398	43	0.49 602	9.97 894	4	18
43	9.48 332	39	9.50 442	43	0.49 558	9.97 890	4	17
44	9.48 371	40	9.50 485	44	0.49 515	9.97 886	4	16
45	9.48 411	39	9.50 529	43	0.49 471	9.97 882	4	15
46	9.48 450	40	9.50 572	44	0.49 428	9.97 878	4	14
47	9.48 490	39	9.50 616	43	0.49 384	9.97 874	4	13
48	9.48 529	39	9.50 659	43	0.49 341	9.97 870	4	12
49	9.48 568	39	9.50 703	43	0.49 297	9.97 866	4	11
50	9.48 607	40	9.50 746	43	0.49 254	9.97 861	4	10
51	9.48 647	39	9.50 789	43	0.49 211	9.97 857	4	9
52	9.48 686	39	9.50 833	43	0.49 167	9.97 853	4	8
53	9.48 725	39	9.50 876	43	0.49 124	9.97 849	4	7
54	9.48 764	39	9.50 919	43	0.49 081	9.97 845	4	6
55	9.48 803	39	9.50 962	43	0.49 038	9.97 841	4	5
56	9.48 842	39	9.51 005	43	0.48 995	9.97 837	4	4
57	9.48 881	39	9.51 048	43	0.48 952	9.97 833	4	3
58	9.48 920	39	9.51 092	44	0.48 908	9.97 829	4	2
59	9.48 959	39	9.51 135	43	0.48 865	9.97 825	4	1
60	9.48 998	39	9.51 178	43	0.48 822	9.97 821	4	0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.48 998		9.51 178		0.48 822	9.97 821			
1	9.49 037	39	9.51 221	43	0.48 779	9.97 817	4	60	
2	9.49 076	39	9.51 264	43	0.48 736	9.97 812	4	59	
3	9.49 115	38	9.51 306	42	0.48 694	9.97 808	4	58	
4	9.49 153	39	9.51 349	43	0.48 651	9.97 804	4	57	
		39		43			4	56	
5	9.49 192	39	9.51 392	43	0.48 608	9.97 800	4	55	
6	9.49 231	38	9.51 435	43	0.48 565	9.97 796	4	54	
7	9.49 269	39	9.51 478	43	0.48 522	9.97 792	4	53	
8	9.49 308	39	9.51 520	42	0.48 480	9.97 788	4	52	
9	9.49 347	38	9.51 563	43	0.48 437	9.97 784	4	51	43 42 41
		38		42			5		
10	9.49 385	39	9.51 606	42	0.48 394	9.97 779	4	50	1 4.3 4.2 4.1
11	9.49 424	38	9.51 648	43	0.48 352	9.97 775	4	49	2 8.6 8.4 8.2
12	9.49 462	38	9.51 691	43	0.48 309	9.97 771	4	48	3 12.9 12.6 12.3
13	9.49 500	39	9.51 734	43	0.48 266	9.97 767	4	47	4 17.2 16.8 16.4
14	9.49 539	38	9.51 776	42	0.48 224	9.97 763	4	46	5 21.5 21.0 20.5
		38		43			4	45	6 25.8 25.2 24.6
15	9.49 577	38	9.51 819	42	0.48 181	9.97 759	5	44	7 30.1 29.4 28.7
16	9.49 615	39	9.51 861	42	0.48 139	9.97 754	4	43	8 34.4 33.6 32.8
17	9.49 654	38	9.51 903	43	0.48 097	9.97 750	4	42	9 38.7 37.8 36.9
18	9.49 692	38	9.51 946	42	0.48 054	9.97 746	4	41	
19	9.49 730	38	9.51 988	42	0.48 012	9.97 742	4	40	
		38		42			4	39	
20	9.49 768	38	9.52 031	42	0.47 969	9.97 738	4	38	
21	9.49 806	38	9.52 073	42	0.47 927	9.97 734	5	37	
22	9.49 844	38	9.52 115	42	0.47 885	9.97 729	4	36	
23	9.49 882	38	9.52 157	42	0.47 843	9.97 725	4	35	
24	9.49 920	38	9.52 200	42	0.47 800	9.97 721	4	34	
		38		42			4	33	
25	9.49 958	38	9.52 242	42	0.47 758	9.97 717	5	32	39 38 37
26	9.49 996	38	9.52 284	42	0.47 716	9.97 713	4	31	1 3.9 3.8 3.7
27	9.50 034	38	9.52 326	42	0.47 674	9.97 708	4	30	2 7.8 7.6 7.4
28	9.50 072	38	9.52 368	42	0.47 632	9.97 704	4	29	3 11.7 11.4 11.1
29	9.50 110	38	9.52 410	42	0.47 590	9.97 700	5	28	4 15.6 15.2 14.8
		38		42			4	27	5 19.5 19.0 18.5
30	9.50 148	37	9.52 452	42	0.47 548	9.97 696	4	26	6 23.4 22.8 22.2
31	9.50 185	38	9.52 494	42	0.47 506	9.97 691	4	25	7 27.3 26.6 25.9
32	9.50 223	38	9.52 536	42	0.47 464	9.97 687	5	24	8 31.2 30.4 29.6
33	9.50 261	37	9.52 578	42	0.47 422	9.97 683	4	23	9 35.1 34.2 33.3
34	9.50 298	38	9.52 620	41	0.47 380	9.97 679	4	22	
		38		41			5	21	
35	9.50 336	38	9.52 661	42	0.47 339	9.97 674	4	20	
36	9.50 374	37	9.52 703	42	0.47 297	9.97 670	4	19	
37	9.50 411	38	9.52 745	42	0.47 255	9.97 666	4	18	
38	9.50 449	37	9.52 787	42	0.47 213	9.97 662	5	17	
39	9.50 486	37	9.52 829	41	0.47 171	9.97 657	4	16	36 5 4
		38		42			4	15	1 3.6 0.5 0.4
40	9.50 523	38	9.52 870	42	0.47 130	9.97 653	4	14	2 7.2 1.0 0.8
41	9.50 561	37	9.52 912	41	0.47 088	9.97 649	5	13	3 10.8 1.5 1.2
42	9.50 598	37	9.52 953	42	0.47 047	9.97 645	4	12	4 14.4 2.0 1.6
43	9.50 635	38	9.52 995	42	0.47 005	9.97 640	4	11	5 18.0 2.5 2.0
44	9.50 673	37	9.53 037	41	0.46 963	9.97 636	4	10	6 21.6 3.0 2.4
		37		42			4	9	7 25.2 3.5 2.8
45	9.50 710	37	9.53 078	42	0.46 922	9.97 632	5	8	8 28.8 4.0 3.2
46	9.50 747	37	9.53 120	41	0.46 880	9.97 628	4	7	9 32.4 4.5 3.6
47	9.50 784	37	9.53 161	41	0.46 839	9.97 623	4	6	
48	9.50 821	37	9.53 202	42	0.46 798	9.97 619	4	5	
49	9.50 858	38	9.53 244	41	0.46 756	9.97 615	5	4	
		38		41			4	3	
50	9.50 896	37	9.53 285	42	0.46 715	9.97 610	4	2	
51	9.50 933	37	9.53 327	41	0.46 673	9.97 606	5	1	
52	9.50 970	37	9.53 368	41	0.46 632	9.97 602	4	0	
53	9.51 007	36	9.53 409	41	0.46 591	9.97 597	4		
54	9.51 043	37	9.53 450	42	0.46 550	9.97 593	4		
		37		42			5		
55	9.51 080	37	9.53 492	42	0.46 508	9.97 589	4		
56	9.51 117	37	9.53 533	41	0.46 467	9.97 584	4		
57	9.51 154	37	9.53 574	41	0.46 426	9.97 580	5		
58	9.51 191	36	9.53 615	41	0.46 385	9.97 576	4		
59	9.51 227	37	9.53 656	41	0.46 344	9.97 571	4		
		37		41			4		
60	9.51 264		9.53 697		0.46 303	9.97 567			
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d		PP



<i>n</i>	L Sin	<i>d</i>	L Tan	<i>cd</i>	L Cot	L Cos	<i>d</i>	PP
0	9.51 264		9.53 697		0.46 303	9.97 567		60
1	9.51 301	37	9.53 738	41	0.46 262	9.97 563	4	59
2	9.51 338	37	9.53 779	41	0.46 221	9.97 558	5	58
3	9.51 374	36	9.53 820	41	0.46 180	9.97 554	4	57
4	9.51 411	37	9.53 861	41	0.46 139	9.97 550	4	56
		36		41			5	
5	9.51 447	37	9.53 902	41	0.46 098	9.97 545	4	55
6	9.51 484	36	9.53 943	41	0.46 057	9.97 541	5	54
7	9.51 520	37	9.53 984	41	0.46 016	9.97 536	4	53
8	9.51 557	37	9.54 025	40	0.45 975	9.97 532	4	52
9	9.51 593	36	9.54 065	41	0.45 935	9.97 528	4	51
		36		41			5	
10	9.51 629	37	9.54 106	41	0.45 894	9.97 523	4	50
11	9.51 666	36	9.54 147	40	0.45 853	9.97 519	4	49
12	9.51 702	36	9.54 187	41	0.45 813	9.97 515	4	48
13	9.51 738	36	9.54 228	41	0.45 772	9.97 510	5	47
14	9.51 774	36	9.54 269	41	0.45 731	9.97 506	4	46
		37		40			5	
15	9.51 811	36	9.54 309	41	0.45 691	9.97 501	4	45
16	9.51 847	36	9.54 350	40	0.45 650	9.97 497	4	44
17	9.51 883	36	9.54 390	41	0.45 610	9.97 492	4	43
18	9.51 919	36	9.54 431	40	0.45 569	9.97 488	4	42
19	9.51 955	36	9.54 471	40	0.45 529	9.97 484	4	41
		36		41			5	
20	9.51 991	36	9.54 512	40	0.45 488	9.97 479	4	40
21	9.52 027	36	9.54 552	40	0.45 448	9.97 475	4	39
22	9.52 063	36	9.54 593	41	0.45 407	9.97 470	5	38
23	9.52 099	36	9.54 633	40	0.45 367	9.97 466	4	37
24	9.52 135	36	9.54 673	40	0.45 327	9.97 461	5	36
		36		41			4	
25	9.52 171	36	9.54 714	40	0.45 286	9.97 457	4	35
26	9.52 207	36	9.54 754	40	0.45 246	9.97 453	4	34
27	9.52 242	35	9.54 794	40	0.45 206	9.97 448	5	33
28	9.52 278	36	9.54 835	41	0.45 165	9.97 444	4	32
29	9.52 314	36	9.54 875	40	0.45 125	9.97 439	5	31
		86		40			4	
30	9.52 350	35	9.54 915	40	0.45 085	9.97 435	4	30
31	9.52 385	36	9.54 955	40	0.45 045	9.97 430	5	29
32	9.52 421	35	9.54 995	40	0.45 005	9.97 426	4	28
33	9.52 456	36	9.55 035	40	0.44 965	9.97 421	5	27
34	9.52 492	36	9.55 075	40	0.44 925	9.97 417	4	26
		35		40			5	
35	9.52 527	36	9.55 115	40	0.44 885	9.97 412	4	25
36	9.52 563	36	9.55 155	40	0.44 845	9.97 408	4	24
37	9.52 598	35	9.55 195	40	0.44 805	9.97 403	5	23
38	9.52 634	36	9.55 235	40	0.44 765	9.97 399	4	22
39	9.52 669	35	9.55 275	40	0.44 725	9.97 394	5	21
		36		40			4	
40	9.52 705	35	9.55 315	40	0.44 685	9.97 390	5	20
41	9.52 740	35	9.55 355	40	0.44 645	9.97 385	4	19
42	9.52 775	36	9.55 395	40	0.44 605	9.97 381	5	18
43	9.52 811	35	9.55 434	39	0.44 566	9.97 376	4	17
44	9.52 846	35	9.55 474	40	0.44 526	9.97 372	5	16
		35		40			5	
45	9.52 881	35	9.55 514	40	0.44 486	9.97 367	4	15
46	9.52 916	35	9.55 554	39	0.44 446	9.97 363	4	14
47	9.52 951	35	9.55 593	40	0.44 407	9.97 358	5	13
48	9.52 986	35	9.55 633	40	0.44 367	9.97 353	4	12
49	9.53 021	35	9.55 673	39	0.44 327	9.97 349	5	11
		35		39			5	
50	9.53 056	36	9.55 712	40	0.44 288	9.97 344	4	10
51	9.53 092	34	9.55 752	39	0.44 248	9.97 340	4	9
52	9.53 126	35	9.55 791	40	0.44 209	9.97 335	5	8
53	9.53 161	35	9.55 831	40	0.44 169	9.97 331	4	7
54	9.53 196	35	9.55 870	39	0.44 130	9.97 326	5	6
		35		40			4	
55	9.53 231	35	9.55 910	39	0.44 090	9.97 322	5	5
56	9.53 266	35	9.55 949	40	0.44 051	9.97 317	4	4
57	9.53 301	35	9.55 989	39	0.44 011	9.97 312	5	3
58	9.53 336	34	9.56 028	39	0.43 972	9.97 308	4	2
59	9.53 370	35	9.56 067	40	0.43 933	9.97 303	5	1
		35		40			4	
60	9.53 405		9.56 107		0.43 893	9.97 299		0
	L Cos	<i>d</i>	L Cot	<i>cd</i>	L Tan	L Sin	<i>d</i>	PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.53 405	35	9.56 107	30	0.43 893	9.97 299	60	
1	9.53 440	35	9.56 146	30	0.43 854	9.97 294	59	
2	9.53 475	34	9.56 185	30	0.43 815	9.97 289	58	
3	9.53 509	35	9.56 224	40	0.43 776	9.97 285	57	
4	9.53 544	34	9.56 264	30	0.43 736	9.97 280	56	
5	9.53 578	35	9.56 303	30	0.43 697	9.97 276	55	
6	9.53 613	34	9.56 342	30	0.43 658	9.97 271	54	
7	9.53 647	35	9.56 381	30	0.43 619	9.97 266	53	
8	9.53 682	34	9.56 420	30	0.43 580	9.97 262	52	
9	9.53 716	35	9.56 459	30	0.43 541	9.97 257	51	40 39 38
10	9.53 751	34	9.56 498	39	0.43 502	9.97 252	50	1 4.0 3.0 3.8
11	9.53 785	34	9.56 537	39	0.43 463	9.97 248	49	2 8.0 7.8 7.6
12	9.53 819	35	9.56 576	39	0.43 424	9.97 243	48	3 12.0 11.7 11.4
13	9.53 854	34	9.56 615	39	0.43 385	9.97 238	47	4 16.0 15.6 15.2
14	9.53 888	34	9.56 654	39	0.43 346	9.97 234	46	5 20.0 19.5 19.0
15	9.53 922	35	9.56 693	39	0.43 307	9.97 229	45	6 24.0 23.4 22.8
16	9.53 957	34	9.56 732	39	0.43 268	9.97 224	44	7 28.0 27.3 26.6
17	9.53 991	34	9.56 771	39	0.43 229	9.97 220	43	8 32.0 31.2 30.4
18	9.54 025	34	9.56 810	30	0.43 190	9.97 215	42	9 36.0 35.1 34.2
19	9.54 059	34	9.56 849	38	0.43 151	9.97 210	41	
20	9.54 093	34	9.56 887	39	0.43 113	9.97 206	40	
21	9.54 127	34	9.56 926	39	0.43 074	9.97 201	39	
22	9.54 161	34	9.56 965	39	0.43 035	9.97 196	38	
23	9.54 195	34	9.57 004	38	0.42 996	9.97 192	37	
24	9.54 229	34	9.57 042	39	0.42 958	9.97 187	36	
25	9.54 263	34	9.57 081	39	0.42 919	9.97 182	35	
26	9.54 297	34	9.57 120	38	0.42 880	9.97 178	34	37 35 34
27	9.54 331	34	9.57 158	39	0.42 842	9.97 173	33	
28	9.54 365	34	9.57 197	38	0.42 803	9.97 168	32	1 3.7 3.5 3.4
29	9.54 399	34	9.57 235	38	0.42 765	9.97 163	31	2 7.4 7.0 6.8
30	9.54 433	33	9.57 274	39	0.42 726	9.97 159	30	3 11.1 10.5 10.2
31	9.54 466	34	9.57 312	38	0.42 688	9.97 154	29	4 14.8 14.0 13.6
32	9.54 500	34	9.57 351	38	0.42 649	9.97 149	28	5 18.5 17.5 17.0
33	9.54 534	33	9.57 389	39	0.42 611	9.97 145	27	6 22.2 21.0 20.4
34	9.54 567	34	9.57 428	38	0.42 572	9.97 140	26	7 25.9 24.5 23.8
35	9.54 601	34	9.57 466	38	0.42 534	9.97 135	25	8 29.6 28.0 27.2
36	9.54 635	33	9.57 504	39	0.42 496	9.97 130	24	9 33.3 31.5 30.6
37	9.54 668	34	9.57 543	38	0.42 457	9.97 126	23	
38	9.54 702	33	9.57 581	38	0.42 419	9.97 121	22	
39	9.54 735	34	9.57 619	39	0.42 381	9.97 116	21	
40	9.54 769	33	9.57 658	38	0.42 342	9.97 111	20	
41	9.54 802	34	9.57 696	38	0.42 304	9.97 107	19	
42	9.54 836	33	9.57 734	38	0.42 266	9.97 102	18	
43	9.54 869	34	9.57 772	38	0.42 228	9.97 97	17	
44	9.54 903	33	9.57 810	39	0.42 190	9.97 92	16	33 5 4
45	9.54 936	33	9.57 849	38	0.42 151	9.97 87	15	1 3.3 0.5 0.4
46	9.54 969	34	9.57 887	38	0.42 113	9.97 83	14	2 6.6 1.0 0.8
47	9.55 003	33	9.57 925	38	0.42 075	9.97 78	13	3 9.9 1.5 1.2
48	9.55 036	33	9.57 963	38	0.42 037	9.97 73	12	4 13.2 2.0 1.6
49	9.55 069	33	9.58 001	38	0.41 999	9.97 68	11	5 16.5 2.5 2.0
50	9.55 102	34	9.58 039	38	0.41 961	9.97 63	10	6 19.8 3.0 2.4
51	9.55 136	33	9.58 077	38	0.41 923	9.97 59	9	7 23.1 3.5 2.8
52	9.55 169	33	9.58 115	38	0.41 885	9.97 54	8	8 26.4 4.0 3.2
53	9.55 202	33	9.58 153	38	0.41 847	9.97 49	7	9 29.7 4.5 3.6
54	9.55 235	33	9.58 191	38	0.41 809	9.97 44	6	
55	9.55 268	33	9.58 229	38	0.41 771	9.97 39	5	
56	9.55 301	33	9.58 267	37	0.41 733	9.97 35	4	
57	9.55 334	33	9.58 304	37	0.41 696	9.97 30	3	
58	9.55 367	33	9.58 342	38	0.41 658	9.97 25	2	
59	9.55 400	33	9.58 380	38	0.41 620	9.97 20	1	
60	9.55 433		9.58 418		0.41 582	9.97 015	0	
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.55 433	33	9.58 418	37	0.41 582	9.97 015	5	60	
1	9.55 466	33	9.58 455	38	0.41 545	9.97 010	5	59	
2	9.55 499	33	9.58 493	38	0.41 507	9.97 005	5	58	
3	9.55 532	32	9.58 531	38	0.41 469	9.97 001	4	57	
4	9.55 564	32	9.58 569	38	0.41 431	9.96 996	5	56	
		33		37			5		
5	9.55 597	33	9.58 606	38	0.41 394	9.96 991	5	55	
6	9.55 630	33	9.58 644	37	0.41 356	9.96 986	5	54	
7	9.55 663	32	9.58 681	38	0.41 319	9.96 981	5	53	
8	9.55 695	33	9.58 719	38	0.41 281	9.96 976	5	52	
9	9.55 728	33	9.58 757	38	0.41 243	9.96 871	5	51	38 37 36
		32		37			5		
10	9.55 761	32	9.58 794	38	0.41 206	9.96 966	4	50	1   3.8 3.7 3.6
11	9.55 793	33	9.58 832	37	0.41 168	9.96 962	5	49	2   7.6 7.4 7.2
12	9.55 826	32	9.58 869	38	0.41 131	9.96 957	5	48	3   11.4 11.1 10.8
13	9.55 858	33	9.58 907	37	0.41 093	9.96 952	5	47	4   15.2 14.8 14.4
14	9.55 891	33	9.58 944	37	0.41 056	9.96 947	5	46	5   19.0 18.5 18.0
		32		37			5		6   22.8 22.2 21.6
15	9.55 923	33	9.58 981	38	0.41 019	9.96 942	5	45	7   26.6 25.9 25.2
16	9.55 956	32	9.59 019	37	0.40 981	9.96 937	5	44	8   30.4 29.6 28.8
17	9.55 988	33	9.59 056	38	0.40 944	9.96 932	5	43	9   34.2 33.3 32.4
18	9.56 021	32	9.59 094	37	0.40 906	9.96 927	5	42	
19	9.56 053	32	9.59 131	37	0.40 869	9.96 922	5	41	
		33		37			5		
20	9.56 085	33	9.59 168	37	0.40 832	9.96 917	5	40	
21	9.56 118	32	9.59 205	38	0.40 795	9.96 912	5	39	
22	9.56 150	32	9.59 243	37	0.40 757	9.96 907	5	38	
23	9.56 182	33	9.59 280	37	0.40 720	9.96 903	4	37	
24	9.56 215	32	9.59 317	37	0.40 683	9.96 898	5	36	
		33		37			5		
25	9.56 247	32	9.59 354	37	0.40 646	9.96 893	5	35	
26	9.56 279	32	9.59 391	37	0.40 609	9.96 888	5	34	33 32 31
27	9.56 311	32	9.59 429	38	0.40 571	9.96 883	5	33	
28	9.56 343	32	9.59 466	37	0.40 534	9.96 878	5	32	1   3.3 3.2 3.1
29	9.56 375	32	9.59 503	37	0.40 497	9.96 873	5	31	2   6.6 6.4 6.2
		33		37			5		3   9.9 9.6 9.3
30	9.56 408	32	9.59 540	37	0.40 460	9.96 868	5	30	4   13.2 12.8 12.4
31	9.56 440	32	9.59 577	37	0.40 423	9.96 863	5	29	5   16.5 16.0 15.5
32	9.56 472	32	9.59 614	37	0.40 386	9.96 858	5	28	6   19.8 19.2 18.6
33	9.56 504	32	9.59 651	37	0.40 349	9.96 853	5	27	7   23.1 22.4 21.7
34	9.56 536	32	9.59 688	37	0.40 312	9.96 848	5	26	8   26.4 25.6 24.8
		33		37			5		9   29.7 28.8 27.9
35	9.56 568	31	9.59 725	37	0.40 275	9.96 843	5	25	
36	9.56 599	32	9.59 762	37	0.40 238	9.96 838	5	24	
37	9.56 631	32	9.59 799	36	0.40 201	9.96 833	5	23	
38	9.56 663	32	9.59 835	37	0.40 165	9.96 828	5	22	
39	9.56 695	32	9.59 872	37	0.40 128	9.96 823	5	21	
		33		37			5		
40	9.56 727	32	9.59 909	37	0.40 091	9.96 818	5	20	
41	9.56 759	31	9.59 946	37	0.40 054	9.96 813	5	19	
42	9.56 790	32	9.59 983	37	0.40 017	9.96 808	5	18	
43	9.56 822	32	9.60 019	36	0.39 981	9.96 803	5	17	
44	9.56 854	32	9.60 056	37	0.39 944	9.96 798	5	16	6 5 4
		33		37			5		
45	9.56 886	31	9.60 093	37	0.39 907	9.96 793	5	15	1   0.6 0.5 0.4
46	9.56 917	32	9.60 130	36	0.39 870	9.96 788	5	14	2   1.2 1.0 0.8
47	9.56 949	31	9.60 166	37	0.39 834	9.96 783	5	13	3   1.8 1.5 1.2
48	9.56 980	32	9.60 203	37	0.39 797	9.96 778	5	12	4   2.4 2.0 1.6
49	9.57 012	32	9.60 240	36	0.39 760	9.96 772	6	11	5   3.0 2.5 2.0
		33		36			5		6   3.6 3.0 2.4
50	9.57 044	31	9.60 276	37	0.39 724	9.96 767	5	10	7   4.2 3.5 2.8
51	9.57 075	32	9.60 313	37	0.39 687	9.96 762	5	9	8   4.8 4.0 3.2
52	9.57 107	31	9.60 349	36	0.39 651	9.96 757	5	8	9   5.4 4.5 3.6
53	9.57 138	31	9.60 386	36	0.39 614	9.96 752	5	7	
54	9.57 169	31	9.60 422	36	0.39 578	9.96 747	5	6	
		32		37			5		
55	9.57 201	31	9.60 459	36	0.39 541	9.96 742	5	5	
56	9.57 232	32	9.60 495	37	0.39 505	9.96 737	5	4	
57	9.57 264	31	9.60 532	36	0.39 468	9.96 732	5	3	
58	9.57 295	31	9.60 568	37	0.39 432	9.96 727	5	2	
59	9.57 326	31	9.60 605	37	0.39 395	9.96 722	5	1	
		32		36			5		
60	9.57 358		9.60 641		0.39 359	9.96 717		0	
L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d		PP	

	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.57 358	31	9.60 641	36	0.39 359	9.96 717	6	<b>60</b>	
1	9.57 389	31	9.60 677	36	0.39 323	9.96 711	6	59	
2	9.57 420	31	9.60 714	37	0.39 286	9.96 706	5	58	
3	9.57 451	31	9.60 750	36	0.39 250	9.96 701	5	57	
4	9.57 482	31	9.60 786	36	0.39 214	9.96 696	5	56	
		32		37			5		
5	9.57 514	31	9.60 823	36	0.39 177	9.96 691	5	<b>55</b>	
6	9.57 545	31	9.60 859	36	0.39 141	9.96 686	5	54	
7	9.57 576	31	9.60 895	36	0.39 105	9.96 681	5	53	
8	9.57 607	31	9.60 931	36	0.39 069	9.96 676	5	52	
9	9.57 638	31	9.60 967	36	0.39 033	9.96 670	6	51	<b>37 36 35</b>
		31		37			5		
<b>10</b>	9.57 669	31	9.61 004	36	0.38 996	9.96 665	<b>50</b>	1	3.7 3.6 3.5
11	9.57 700	31	9.61 040	36	0.38 960	9.96 660	5	49	2 7.4 7.2 7.0
12	9.57 731	31	9.61 076	36	0.38 924	9.96 655	5	48	3 11.1 10.8 10.5
13	9.57 762	31	9.61 112	36	0.38 888	9.96 650	5	47	4 14.8 14.4 14.0
14	9.57 793	31	9.61 148	36	0.38 852	9.96 645	5	46	5 18.5 18.0 17.5
		31		36			5	0	6 22.2 21.6 21.0
<b>15</b>	9.57 824	31	9.61 184	36	0.38 816	9.96 640	<b>45</b>	7	25.9 25.2 24.5
16	9.57 855	30	9.61 220	36	0.38 780	9.96 634	6	44	8 29.6 28.8 28.0
17	9.57 885	30	9.61 256	36	0.38 744	9.96 629	5	43	9 33.3 32.4 31.5
18	9.57 916	31	9.61 292	36	0.38 708	9.96 624	5	42	
19	9.57 947	31	9.61 328	36	0.38 672	9.96 619	5	41	
		31		36			5		
<b>20</b>	9.57 978	30	9.61 364	36	0.38 636	9.96 614	<b>40</b>	39	
21	9.58 008	31	9.61 400	36	0.38 600	9.96 608	6	38	
22	9.58 039	31	9.61 436	36	0.38 564	9.96 603	5	37	
23	9.58 070	31	9.61 472	36	0.38 528	9.96 598	5	36	
24	9.58 101	30	9.61 508	36	0.38 492	9.96 593	5		
		30		36			5		
<b>25</b>	9.58 131	31	9.61 544	35	0.38 456	9.96 588	<b>35</b>	34	
26	9.58 162	31	9.61 579	36	0.38 421	9.96 582	6	33	<b>32 31 30</b>
27	9.58 192	30	9.61 615	36	0.38 385	9.96 577	5	32	
28	9.58 223	31	9.61 651	36	0.38 349	9.96 572	5	31	1 3.2 3.1 3.0
29	9.58 253	30	9.61 687	36	0.38 313	9.96 567	5	30	2 6.4 6.2 6.0
		31		35			5		3 9.6 9.3 9.0
<b>30</b>	9.58 284	30	9.61 722	36	0.38 278	9.96 562	<b>30</b>	4	12.8 12.4 12.0
31	9.58 314	31	9.61 758	36	0.38 242	9.96 556	6	29	5 16.0 15.5 15.0
32	9.58 345	30	9.61 794	36	0.38 206	9.96 551	5	28	6 19.2 18.6 18.0
33	9.58 375	31	9.61 830	35	0.38 170	9.96 546	5	27	7 22.4 21.7 21.0
34	9.58 406	30	9.61 865	36	0.38 135	9.96 541	5	26	8 25.6 24.8 24.0
		30		36			6	25	9 28.8 27.9 27.0
<b>35</b>	9.58 436	31	9.61 901	35	0.38 099	9.96 535	<b>25</b>	24	
36	9.58 467	30	9.61 936	36	0.38 064	9.96 530	5	23	
37	9.58 497	30	9.61 972	36	0.38 028	9.96 525	5	22	
38	9.58 527	30	9.62 008	35	0.37 992	9.96 520	5	21	
39	9.58 557	31	9.62 043	36	0.37 957	9.96 514	6		
		31		36			5		
<b>40</b>	9.58 588	30	9.62 079	35	0.37 921	9.96 509	<b>20</b>	19	
41	9.58 618	30	9.62 114	36	0.37 886	9.96 504	6	18	
42	9.58 648	30	9.62 150	36	0.37 850	9.96 498	5	17	
43	9.58 678	30	9.62 185	35	0.37 815	9.96 493	5	16	
44	9.58 709	31	9.62 221	36	0.37 779	9.96 488	5	15	<b>29 6 5</b>
		30		35			5		
<b>45</b>	9.58 739	30	9.62 256	36	0.37 744	9.96 483	<b>15</b>	1	2.9 0.6 0.5
46	9.58 769	30	9.62 292	35	0.37 708	9.96 477	6	14	2 5.8 1.2 1.0
47	9.58 799	30	9.62 327	35	0.37 673	9.96 472	5	13	3 8.7 1.8 1.5
48	9.58 829	30	9.62 362	36	0.37 638	9.96 467	5	12	4 11.6 2.4 2.0
49	9.58 859	30	9.62 398	35	0.37 602	9.96 461	6	11	5 14.5 3.0 2.5
		30		35			5	0	6 17.4 3.6 3.0
<b>50</b>	9.58 889	30	9.62 433	35	0.37 567	9.96 456	<b>10</b>	7	20.3 4.2 3.5
51	9.58 919	30	9.62 468	36	0.37 532	9.96 451	6	9	8 23.2 4.8 4.0
52	9.58 949	30	9.62 504	35	0.37 496	9.96 445	5	8	9 26.1 5.4 4.5
53	9.58 979	30	9.62 539	35	0.37 461	9.96 440	5	7	
54	9.59 009	30	9.62 574	35	0.37 426	9.96 435	5	6	
		30		35			6		
<b>55</b>	9.59 039	30	9.62 609	36	0.37 391	9.96 429	<b>5</b>	5	
56	9.59 069	29	9.62 645	35	0.37 355	9.96 424	5	4	
57	9.59 098	30	9.62 680	35	0.37 320	9.96 419	5	3	
58	9.59 128	30	9.62 715	35	0.37 285	9.96 413	6	2	
59	9.59 158	30	9.62 750	35	0.37 250	9.96 408	5	1	
		30		35			5		
<b>60</b>	9.59 188		9.62 785		0.37 215	9.96 403		<b>0</b>	
L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d		PP	

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.59 188		9.62 785		0.37 215	9.96 403		00	
1	9.59 218	30	9.62 820	35	0.37 180	9.96 397	6	59	
2	9.59 247	29	9.62 855	35	0.37 145	9.96 392	5	58	
3	9.59 277	30	9.62 890	35	0.37 110	9.96 387	5	57	
4	9.59 307	30	9.62 926	36	0.37 074	9.96 381	6	56	
		29		35			5		
5	9.59 336		9.62 961		0.37 039	9.96 376		55	
6	9.59 366	30	9.62 996	35	0.37 004	9.96 370	6	54	
7	9.59 396	30	9.63 031	35	0.36 969	9.96 365	5	53	
8	9.59 425	29	9.63 066	35	0.36 934	9.96 360	5	52	
9	9.59 455	30	9.63 101	35	0.36 899	9.96 354	6	51	
		29		34			5		36 35 34
10	9.59 484		9.63 135		0.36 865	9.96 349		50	
11	9.59 514	30	9.63 170	35	0.36 830	9.96 343	6	49	1 3.6 3.5 3.4
12	9.59 543	29	9.63 205	35	0.36 795	9.96 338	5	48	2 7.2 7.0 6.8
13	9.59 573	30	9.63 240	35	0.36 760	9.96 333	5	47	3 10.8 10.5 10.2
14	9.59 602	29	9.63 275	35	0.36 725	9.96 327	6	46	4 14.4 14.0 13.6
		30		35			4	5	5 18.0 17.5 17.0
15	9.59 632		9.63 310		0.36 690	9.96 322	5	45	6 21.6 21.0 20.4
16	9.59 661	29	9.63 345	35	0.36 655	9.96 316	6	44	7 25.2 24.5 23.8
17	9.59 690	29	9.63 379	34	0.36 621	9.96 311	5	43	8 28.8 28.0 27.2
18	9.59 720	30	9.63 414	35	0.36 586	9.96 305	6	42	9 32.4 31.5 30.6
19	9.59 749	29	9.63 449	35	0.36 551	9.96 300	5	41	
		30		35			6		
20	9.59 778		9.63 484		0.36 516	9.96 294		40	
21	9.59 808	30	9.63 519	35	0.36 481	9.96 289	5	39	
22	9.59 837	29	9.63 553	34	0.36 447	9.96 284	5	38	
23	9.59 866	29	9.63 588	35	0.36 412	9.96 278	6	37	
24	9.59 895	29	9.63 623	35	0.36 377	9.96 273	5	36	
		30		34			6		
25	9.59 924		9.63 657		0.36 343	9.96 267		35	
26	9.59 954	30	9.63 692	35	0.36 308	9.96 262	5	34	
27	9.59 983	29	9.63 726	34	0.36 274	9.96 256	6	33	30 29 28
28	9.60 012	29	9.63 761	35	0.36 239	9.96 251	5	32	
29	9.60 041	29	9.63 796	35	0.36 204	9.96 245	6	31	1 3.0 2.9 2.8
		30		34			5		2 6.0 5.8 5.6
30	9.60 070		9.63 830		0.36 170	9.96 240		30	3 9.0 8.7 8.4
31	9.60 099	29	9.63 865	35	0.36 135	9.96 234	6	29	4 12.0 11.6 11.2
32	9.60 128	29	9.63 899	34	0.36 101	9.96 229	5	28	5 15.0 14.5 14.0
33	9.60 157	29	9.63 934	35	0.36 066	9.96 223	6	27	6 18.0 17.4 16.8
34	9.60 186	29	9.63 968	34	0.36 032	9.96 218	5	26	7 21.0 20.3 19.6
		30		35			5	25	8 24.0 23.2 22.4
35	9.60 215		9.64 003		0.35 997	9.96 212	6	25	9 27.0 26.1 25.2
36	9.60 244	29	9.64 037	34	0.35 963	9.96 207	5	24	
37	9.60 273	29	9.64 072	34	0.35 928	9.96 201	6	23	
38	9.60 302	29	9.64 106	34	0.35 894	9.96 196	5	22	
39	9.60 331	29	9.64 140	34	0.35 860	9.96 190	6	21	
		28		35			5		
40	9.60 359		9.64 175		0.35 825	9.96 185		20	
41	9.60 388	29	9.64 209	34	0.35 791	9.96 179	6	19	
42	9.60 417	29	9.64 243	35	0.35 757	9.96 174	5	18	
43	9.60 446	29	9.64 278	34	0.35 722	9.96 168	6	17	
44	9.60 474	28	9.64 312	34	0.35 688	9.96 162	6	16	
		29		34			5		6 5
45	9.60 503		9.64 346		0.35 654	9.96 157		15	
46	9.60 532	29	9.64 381	35	0.35 619	9.96 151	6	14	1 0.6 0.5
47	9.60 561	29	9.64 415	34	0.35 585	9.96 146	5	13	2 1.2 1.0
48	9.60 589	28	9.64 449	34	0.35 551	9.96 140	6	12	3 1.8 1.5
49	9.60 618	29	9.64 483	34	0.35 517	9.96 135	5	11	4 2.4 2.0
		28		34			5		5 3.0 2.5
50	9.60 646		9.64 517		0.35 483	9.96 129		10	6 3.6 3.0
51	9.60 675	29	9.64 552	35	0.35 448	9.96 123	6	9	7 4.2 3.5
52	9.60 704	29	9.64 586	34	0.35 414	9.96 118	5	8	8 4.8 4.0
53	9.60 732	28	9.64 620	34	0.35 380	9.96 112	6	7	9 5.4 4.5
54	9.60 761	29	9.64 654	34	0.35 346	9.96 107	5	6	
		28		34			6		
55	9.60 789		9.64 688		0.35 312	9.96 101		5	
56	9.60 818	29	9.64 722	34	0.35 278	9.96 095	6	4	
57	9.60 846	28	9.64 756	34	0.35 244	9.96 090	5	3	
58	9.60 875	29	9.64 790	34	0.35 210	9.96 084	6	2	
59	9.60 903	28	9.64 824	34	0.35 176	9.96 079	5	1	
		28		34			6		
60	9.60 931		9.64 858		0.35 142	9.96 073		0	
L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d		PP	

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.60 931		9.64 858		0.35 142	9.96 073		60
1	9.60 960	29	9.64 892	34	0.35 108	9.96 087	6	59
2	9.60 988	28	9.64 926	34	0.35 074	9.96 092	6	58
3	9.61 016	29	9.64 960	34	0.35 040	9.96 056	6	57
4	9.61 045	28	9.64 994	34	0.35 006	9.96 050	6	56
5		28		34			5	
5	9.61 073	28	9.65 028	34	0.34 972	9.96 045	6	55
6	9.61 101	28	9.65 062	34	0.34 938	9.96 039	6	54
7	9.61 129	29	9.65 096	34	0.34 904	9.96 034	6	53
8	9.61 158	29	9.65 130	34	0.34 870	9.96 028	6	52
9	9.61 186	28	9.65 164	34	0.34 836	9.96 022	6	51
		28		33			5	34 33
10	9.61 214	28	9.65 197	34	0.34 803	9.96 017	6	50
11	9.61 242	28	9.65 231	34	0.34 769	9.96 011	6	49
12	9.61 270	28	9.65 265	34	0.34 735	9.96 005	6	48
13	9.61 298	28	9.65 299	34	0.34 701	9.96 000	6	47
14	9.61 326	28	9.65 333	34	0.34 667	9.95 994	6	46
		28		33			6	
15	9.61 354	28	9.65 366	34	0.34 634	9.95 988	6	45
16	9.61 382	28	9.65 400	34	0.34 600	9.95 982	6	44
17	9.61 411	29	9.65 434	34	0.34 566	9.95 977	5	43
18	9.61 438	27	9.65 467	33	0.34 533	9.95 971	6	42
19	9.61 466	28	9.65 501	34	0.34 499	9.95 965	6	41
		28		34			5	
20	9.61 494	28	9.65 535	33	0.34 465	9.95 960	6	40
21	9.61 522	28	9.65 568	33	0.34 432	9.95 954	6	39
22	9.61 550	28	9.65 602	34	0.34 398	9.95 948	6	38
23	9.61 578	28	9.65 636	34	0.34 364	9.95 942	6	37
24	9.61 606	28	9.65 669	33	0.34 331	9.95 937	5	36
		28		34			6	
25	9.61 634	28	9.65 703	33	0.34 297	9.95 931	6	35
26	9.61 662	27	9.65 736	34	0.34 264	9.95 925	5	34
27	9.61 689	28	9.65 770	33	0.34 230	9.95 920	6	33
28	9.61 717	28	9.65 803	34	0.34 197	9.95 914	6	32
29	9.61 745	28	9.65 837	33	0.34 163	9.95 908	6	31
		28		33			5	
30	9.61 773	27	9.65 870	34	0.34 130	9.95 902	6	30
31	9.61 800	28	9.65 904	33	0.34 096	9.95 897	6	29
32	9.61 828	28	9.65 937	34	0.34 063	9.95 891	6	28
33	9.61 856	27	9.65 971	33	0.34 029	9.95 885	6	27
34	9.61 883	28	9.66 004	34	0.33 996	9.95 879	6	26
		28		34			6	
35	9.61 911	28	9.66 038	33	0.33 962	9.95 873	5	25
36	9.61 939	27	9.66 071	33	0.33 929	9.95 868	6	24
37	9.61 966	28	9.66 104	34	0.33 896	9.95 862	6	23
38	9.61 994	27	9.66 138	33	0.33 862	9.95 856	6	22
39	9.62 021	28	9.66 171	33	0.33 829	9.95 850	6	21
		28		33			6	
40	9.62 049	27	9.66 204	34	0.33 796	9.95 844	5	20
41	9.62 076	28	9.66 238	33	0.33 762	9.95 839	6	19
42	9.62 104	27	9.66 271	33	0.33 729	9.95 833	6	18
43	9.62 131	28	9.66 304	33	0.33 696	9.95 827	6	17
44	9.62 159	27	9.66 337	34	0.33 663	9.95 821	6	16
		27		34			5	
45	9.62 186	28	9.66 371	33	0.33 629	9.95 815	6	15
46	9.62 214	27	9.66 404	33	0.33 596	9.95 810	6	14
47	9.62 241	27	9.66 437	33	0.33 563	9.95 804	6	13
48	9.62 268	28	9.66 470	33	0.33 530	9.95 798	6	12
49	9.62 296	27	9.66 503	33	0.33 497	9.95 792	6	11
		27		34			6	
50	9.62 323	27	9.66 537	33	0.33 463	9.95 786	6	10
51	9.62 350	27	9.66 570	33	0.33 430	9.95 780	6	9
52	9.62 377	28	9.66 603	33	0.33 397	9.95 775	6	8
53	9.62 405	27	9.66 636	33	0.33 364	9.95 769	6	7
54	9.62 432	27	9.66 669	33	0.33 331	9.95 763	6	6
		27		33			6	
55	9.62 459	27	9.66 702	33	0.33 298	9.95 757	6	5
56	9.62 486	27	9.66 735	33	0.33 265	9.95 751	6	4
57	9.62 513	27	9.66 768	33	0.33 232	9.95 745	6	3
58	9.62 541	28	9.66 801	33	0.33 199	9.95 739	6	2
59	9.62 568	27	9.66 834	33	0.33 166	9.95 733	6	1
		27		33			5	
60	9.62 595		9.66 867		0.33 133	9.95 728		0
L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP	

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.62 595	27	9.66 867	33	0.33 133	9.95 728	6	60	
1	9.62 622	27	9.66 900	33	0.33 100	9.95 722	6	59	
2	9.62 640	27	9.66 933	33	0.33 067	9.95 716	6	58	
3	9.62 676	27	9.66 966	33	0.33 034	9.95 710	6	57	
4	9.62 703	27	9.66 999	33	0.33 001	9.95 704	6	56	
		27		33			6		
5	9.62 730	27	9.67 032	33	0.32 968	9.95 698	6	55	
6	9.62 757	27	9.67 065	33	0.32 935	9.95 692	6	54	
7	9.62 784	27	9.67 098	33	0.32 902	9.95 686	6	53	
8	9.62 811	27	9.67 131	32	0.32 869	9.95 680	6	52	
9	9.62 838	27	9.67 163	32	0.32 837	9.95 674	6	51	
		27		33			6		33 32
10	9.62 865	27	9.67 196	33	0.32 804	9.95 668	6	50	1   3.3 3.2
11	9.62 892	26	9.67 229	33	0.32 771	9.95 663	5	49	2   6.6 6.4
12	9.62 918	26	9.67 262	33	0.32 738	9.95 657	6	48	3   9.9 9.6
13	9.62 945	27	9.67 295	33	0.32 705	9.95 651	6	47	4   13.2 12.8
14	9.62 972	27	9.67 327	32	0.32 673	9.95 645	6	46	5   16.6 16.0
		27		33			6		6   18.8 19.2
15	9.62 999	27	9.67 360	33	0.32 640	9.95 639	6	45	7   23.1 23.4
16	9.63 026	26	9.67 393	33	0.32 607	9.95 633	6	44	8   26.4 25.6
17	9.63 052	26	9.67 426	32	0.32 574	9.95 627	6	43	9   20.7 20.8
18	9.63 079	27	9.67 458	33	0.32 542	9.95 621	6	42	
19	9.63 106	27	9.67 491	33	0.32 509	9.95 615	6	41	
		26		33			6		
20	9.63 133	26	9.67 524	32	0.32 476	9.95 609	6	40	
21	9.63 159	27	9.67 556	32	0.32 444	9.95 603	6	39	
22	9.63 186	27	9.67 589	33	0.32 411	9.95 597	6	38	
23	9.63 213	26	9.67 622	33	0.32 378	9.95 591	6	37	
24	9.63 239	26	9.67 654	32	0.32 346	9.95 585	6	36	
		27		33			6		
25	9.63 266	26	9.67 687	32	0.32 313	9.95 579	6	35	
26	9.63 292	27	9.67 719	32	0.32 281	9.95 573	6	34	27 26
27	9.63 319	26	9.67 752	33	0.32 248	9.95 567	6	33	
28	9.63 345	27	9.67 785	32	0.32 215	9.95 561	6	32	1   2.7 2.6
29	9.63 372	26	9.67 817	32	0.32 183	9.95 555	6	31	2   5.4 5.2
		27		33			6		3   8.1 7.8
30	9.63 398	27	9.67 850	32	0.32 150	9.95 549	6	30	4   10.8 10.4
31	9.63 425	26	9.67 882	32	0.32 118	9.95 543	6	29	5   13.5 13.0
32	9.63 451	27	9.67 915	32	0.32 085	9.95 537	6	28	6   16.2 15.6
33	9.63 478	26	9.67 947	33	0.32 053	9.95 531	6	27	7   18.9 18.2
34	9.63 504	26	9.67 980	32	0.32 020	9.95 525	6	26	8   21.6 20.8
		27		32			6		9   24.3 23.4
35	9.63 531	26	9.68 012	32	0.31 988	9.95 519	6	25	
36	9.63 557	26	9.68 044	33	0.31 956	9.95 513	6	24	
37	9.63 583	27	9.68 077	32	0.31 923	9.95 507	6	23	
38	9.63 610	26	9.68 109	32	0.31 891	9.95 500	7	22	
39	9.63 636	26	9.68 142	33	0.31 858	9.95 494	6	21	
		26		32			6		
40	9.63 662	27	9.68 174	32	0.31 826	9.95 488	6	20	
41	9.63 689	26	9.68 206	33	0.31 794	9.95 482	6	19	
42	9.63 715	26	9.68 239	32	0.31 761	9.95 476	6	18	
43	9.63 741	26	9.68 271	32	0.31 729	9.95 470	6	17	
44	9.63 767	27	9.68 303	33	0.31 697	9.95 464	6	16	7 6 5
		26		32			6		
45	9.63 794	26	9.68 336	32	0.31 664	9.95 458	6	15	1   0.7 0.6 0.5
46	9.63 820	26	9.68 368	32	0.31 632	9.95 452	6	14	2   1.4 1.2 1.0
47	9.63 846	26	9.68 400	32	0.31 600	9.95 446	6	13	3   2.1 1.8 1.5
48	9.63 872	26	9.68 432	32	0.31 568	9.95 440	6	12	4   2.8 2.4 2.0
49	9.63 898	26	9.68 465	33	0.31 535	9.95 434	6	11	5   3.5 3.0 2.5
		26		32			7		6   4.2 3.6 3.0
50	9.63 924	26	9.68 497	32	0.31 503	9.95 427	6	10	7   4.9 4.2 3.5
51	9.63 950	26	9.68 529	32	0.31 471	9.95 421	6	9	8   5.6 4.8 4.0
52	9.63 976	26	9.68 561	32	0.31 439	9.95 415	6	8	9   6.3 5.4 4.5
53	9.64 002	26	9.68 593	32	0.31 407	9.95 409	6	7	
54	9.64 028	26	9.68 626	33	0.31 374	9.95 403	6	6	
		26		32			6		
55	9.64 054	26	9.68 658	32	0.31 342	9.95 397	6	5	
56	9.64 080	26	9.68 690	32	0.31 310	9.95 391	6	4	
57	9.64 106	26	9.68 722	32	0.31 278	9.95 384	6	3	
58	9.64 132	26	9.68 754	32	0.31 246	9.95 378	6	2	
59	9.64 158	26	9.68 786	32	0.31 214	9.95 372	6	1	
60	9.64 184	26	9.68 818	32	0.31 182	9.95 366	6	0	
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d		PP

'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.64 184	26	9.68 818	32	0.31 182	9.95 366	6	<b>60</b>	
1	9.64 210	26	9.68 850	32	0.31 150	9.95 360	6	59	
2	9.64 236	26	9.68 882	32	0.31 118	9.95 354	6	58	
3	9.64 262	26	9.68 914	32	0.31 086	9.95 348	6	57	
4	9.64 288	26	9.68 946	32	0.31 054	9.95 341	7	56	
		25		32			6		
5	9.64 313	26	9.68 978	32	0.31 022	9.95 335	6	<b>55</b>	
6	9.64 339	26	9.69 010	32	0.30 990	9.95 329	6	54	
7	9.64 365	26	9.69 042	32	0.30 958	9.95 323	6	53	
8	9.64 391	26	9.69 074	32	0.30 926	9.95 317	6	52	
9	9.64 417	26	9.69 106	32	0.30 894	9.95 310	7	51	32 31
		25		32			6		
10	9.64 442	26	9.69 138	32	0.30 862	9.95 304	6	<b>50</b>	1   3.2 3.1
11	9.64 468	26	9.69 170	32	0.30 830	9.95 298	6	49	2   6.4 6.2
12	9.64 494	26	9.69 202	32	0.30 798	9.95 292	6	48	3   9.6 9.3
13	9.64 519	26	9.69 234	32	0.30 766	9.95 286	6	47	4   12.8 12.4
14	9.64 545	26	9.69 266	32	0.30 734	9.95 279	7	46	5   16.0 15.5
		26		32			6	6	6   19.2 18.6
15	9.64 571	25	9.69 298	31	0.30 702	9.95 273	6	<b>45</b>	7   22.4 21.7
16	9.64 596	26	9.69 329	32	0.30 671	9.95 267	6	44	8   25.6 24.8
17	9.64 622	26	9.69 361	32	0.30 639	9.95 261	6	43	9   28.8 27.9
18	9.64 647	25	9.69 393	32	0.30 607	9.95 254	7	42	
19	9.64 673	26	9.69 425	32	0.30 575	9.95 248	6	41	
		25		32			6		
20	9.64 698	26	9.69 457	31	0.30 543	9.95 242	6	<b>40</b>	
21	9.64 724	25	9.69 488	32	0.30 512	9.95 236	7	39	
22	9.64 749	26	9.69 520	32	0.30 480	9.95 229	6	38	
23	9.64 775	25	9.69 552	32	0.30 448	9.95 223	6	37	
24	9.64 800	26	9.69 584	31	0.30 416	9.95 217	6	36	
		26		31			6		
25	9.64 826	25	9.69 615	32	0.30 385	9.95 211	7	<b>35</b>	
26	9.64 851	25	9.69 647	32	0.30 353	9.95 204	6	34	26 25 24
27	9.64 877	26	9.69 679	32	0.30 321	9.95 198	6	33	
28	9.64 902	25	9.69 710	31	0.30 290	9.95 192	6	32	1   2.6 2.5 2.4
29	9.64 927	25	9.69 742	32	0.30 258	9.95 185	7	31	2   5.2 5.0 4.8
		26		32			6	6	3   7.8 7.5 7.2
30	9.64 953	25	9.69 774	31	0.30 226	9.95 179	6	<b>30</b>	4   10.4 10.0 9.6
31	9.64 978	25	9.69 805	32	0.30 195	9.95 173	6	29	5   13.0 12.5 12.0
32	9.65 003	25	9.69 837	31	0.30 163	9.95 167	6	28	6   15.6 15.0 14.4
33	9.65 029	26	9.69 868	32	0.30 132	9.95 160	7	27	7   18.2 17.5 16.8
34	9.65 054	25	9.69 900	31	0.30 100	9.95 154	6	26	8   20.8 20.0 19.2
		25		32			6	6	9   23.4 22.5 21.6
35	9.65 079	25	9.69 932	31	0.30 068	9.95 148	7	<b>25</b>	
36	9.65 104	26	9.69 963	32	0.30 037	9.95 141	6	24	
37	9.65 130	25	9.69 995	31	0.30 005	9.95 135	6	23	
38	9.65 155	25	9.70 026	32	0.29 974	9.95 129	6	22	
39	9.65 180	25	9.70 058	31	0.29 942	9.95 122	7	21	
		25		31			6		
40	9.65 205	25	9.70 089	32	0.29 911	9.95 116	6	<b>20</b>	
41	9.65 230	25	9.70 121	31	0.29 879	9.95 110	6	19	
42	9.65 255	26	9.70 152	32	0.29 848	9.95 103	7	18	
43	9.65 281	25	9.70 184	32	0.29 816	9.95 097	6	17	
44	9.65 306	25	9.70 215	31	0.29 785	9.95 090	7	16	7 6
		25		32			6		
45	9.65 331	25	9.70 247	31	0.29 753	9.95 084	6	<b>15</b>	1   0.7 0.6
46	9.65 356	25	9.70 278	31	0.29 722	9.95 078	7	14	2   1.4 1.2
47	9.65 381	25	9.70 309	32	0.29 691	9.95 071	6	13	3   2.1 1.8
48	9.65 406	25	9.70 341	31	0.29 659	9.95 065	6	12	4   2.8 2.4
49	9.65 431	25	9.70 372	32	0.29 628	9.95 059	6	11	5   3.5 3.0
		25		32			7	6	6   4.2 3.6
50	9.65 456	25	9.70 404	31	0.29 596	9.95 052	6	<b>10</b>	7   4.9 4.2
51	9.65 481	25	9.70 435	31	0.29 565	9.95 046	6	9	8   5.6 4.8
52	9.65 506	25	9.70 466	32	0.29 534	9.95 039	6	8	9   6.3 5.4
53	9.65 531	25	9.70 498	31	0.29 502	9.95 033	6	7	
54	9.65 556	24	9.70 529	31	0.29 471	9.95 027	7	6	
		25		31			6		
55	9.65 580	25	9.70 560	32	0.29 440	9.95 020	6	<b>5</b>	
56	9.65 605	25	9.70 592	31	0.29 408	9.95 014	6	4	
57	9.65 630	25	9.70 623	31	0.29 377	9.95 007	7	3	
58	9.65 655	25	9.70 654	31	0.29 346	9.95 001	6	2	
59	9.65 680	25	9.70 685	31	0.29 315	9.94 995	6	1	
		25		32			7		
60	9.65 705		9.70 717		0.29 283	9.94 988		<b>0</b>	
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d	'	PP



	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.65 705		9.70 717		0.29 283	9.94 988		60	
1	9.65 729	24	9.70 748	31	0.29 252	9.94 982	6	59	
2	9.65 754	25	9.70 779	31	0.29 221	9.94 975	6	58	
3	9.65 779	25	9.70 810	31	0.29 190	9.94 969	6	57	
4	9.65 804	25	9.70 841	31	0.29 159	9.94 962	6	56	
		24		32			6		
5	9.65 828	25	9.70 873	31	0.29 127	9.94 956	6	55	
6	9.65 853	25	9.70 904	31	0.29 096	9.94 949	6	54	
7	9.65 878	25	9.70 935	31	0.29 065	9.94 943	6	53	
8	9.65 902	24	9.70 966	31	0.29 034	9.94 936	6	52	
9	9.65 927	25	9.70 997	31	0.29 003	9.94 930	6	51	32 31 30
		25		31			7		
10	9.65 952	24	9.71 028	31	0.28 972	9.94 923	6	50	1 3.2 3.1 3.0
11	9.65 976	25	9.71 059	31	0.28 941	9.94 917	6	49	2 6.4 6.2 6.0
12	9.66 001	24	9.71 090	31	0.28 910	9.94 911	6	48	3 9.6 9.3 9.0
13	9.66 025	25	9.71 121	32	0.28 879	9.94 904	6	47	4 12.8 12.4 12.0
14	9.66 050	25	9.71 153	31	0.28 847	9.94 898	6	46	5 15.9 15.5 15.0
		25		31			7		6 19.2 18.6 18.0
15	9.66 075	24	9.71 184	31	0.28 816	9.94 891	6	45	7 22.4 21.7 21.0
16	9.66 099	25	9.71 215	31	0.28 785	9.94 885	6	44	8 25.6 24.8 24.0
17	9.66 124	24	9.71 246	31	0.28 754	9.94 878	6	43	9 28.8 27.9 27.0
18	9.66 148	25	9.71 277	31	0.28 723	9.94 871	6	42	
19	9.66 173	25	9.71 308	31	0.28 692	9.94 865	6	41	
		24		31			7		
20	9.66 197	24	9.71 339	31	0.28 661	9.94 858	6	40	
21	9.66 221	25	9.71 370	31	0.28 630	9.94 852	6	39	
22	9.66 246	24	9.71 401	31	0.28 599	9.94 845	6	38	
23	9.66 270	25	9.71 431	30	0.28 569	9.94 839	6	37	
24	9.66 295	25	9.71 462	31	0.28 538	9.94 832	6	36	
		24		31			6		
25	9.66 319	24	9.71 493	31	0.28 507	9.94 826	6	35	
26	9.66 343	25	9.71 524	31	0.28 476	9.94 819	6	34	25 24 23
27	9.66 368	24	9.71 555	31	0.28 445	9.94 813	6	33	
28	9.66 392	24	9.71 586	31	0.28 414	9.94 806	6	32	1 2.5 2.4 2.3
29	9.66 416	25	9.71 617	31	0.28 383	9.94 799	6	31	2 5.0 4.8 4.6
		25		31			6		3 7.5 7.2 6.9
30	9.66 441	24	9.71 648	31	0.28 352	9.94 793	6	30	4 10.0 9.6 9.2
31	9.66 465	24	9.71 679	31	0.28 321	9.94 786	6	29	5 12.5 12.0 11.5
32	9.66 489	24	9.71 709	30	0.28 291	9.94 780	6	28	6 15.0 14.4 13.8
33	9.66 513	24	9.71 740	31	0.28 260	9.94 773	6	27	7 17.5 16.8 16.1
34	9.66 537	25	9.71 771	31	0.28 229	9.94 767	6	26	8 20.0 19.2 18.4
		25		31			7		9 22.5 21.6 20.7
35	9.66 562	24	9.71 802	31	0.28 198	9.94 760	6	25	
36	9.66 586	24	9.71 833	30	0.28 167	9.94 753	6	24	
37	9.66 610	24	9.71 863	31	0.28 137	9.94 747	6	23	
38	9.66 634	24	9.71 894	31	0.28 106	9.94 740	6	22	
39	9.66 658	24	9.71 925	31	0.28 075	9.94 734	6	21	
		24		30			7		
40	9.66 682	24	9.71 955	31	0.28 045	9.94 727	6	20	
41	9.66 706	25	9.71 986	31	0.28 014	9.94 720	6	19	
42	9.66 731	24	9.72 017	31	0.27 983	9.94 714	6	18	
43	9.66 755	24	9.72 048	31	0.27 952	9.94 707	6	17	
44	9.66 779	24	9.72 078	30	0.27 922	9.94 700	6	16	7 6
		24		31			6		
45	9.66 803	24	9.72 109	31	0.27 891	9.94 694	6	15	1 0.7 0.6
46	9.66 827	24	9.72 140	30	0.27 860	9.94 687	6	14	2 1.4 1.2
47	9.66 851	24	9.72 170	31	0.27 830	9.94 680	6	13	3 2.1 1.8
48	9.66 875	24	9.72 201	31	0.27 799	9.94 674	6	12	4 2.8 2.4
49	9.66 899	24	9.72 231	30	0.27 769	9.94 667	6	11	5 3.5 3.0
		23		31			7		6 4.2 3.6
50	9.66 922	24	9.72 262	31	0.27 738	9.94 660	6	10	7 4.9 4.2
51	9.66 946	24	9.72 293	31	0.27 707	9.94 654	6	9	8 5.6 4.8
52	9.66 970	24	9.72 323	30	0.27 677	9.94 647	6	8	9 6.3 5.4
53	9.66 994	24	9.72 354	30	0.27 646	9.94 640	6	7	
54	9.67 018	24	9.72 384	30	0.27 616	9.94 634	6	6	
		24		31			7		
55	9.67 042	24	9.72 415	30	0.27 585	9.94 627	6	5	
56	9.67 066	24	9.72 445	31	0.27 555	9.94 620	6	4	
57	9.67 090	23	9.72 476	31	0.27 524	9.94 614	6	3	
58	9.67 113	23	9.72 506	30	0.27 494	9.94 607	6	2	
59	9.67 137	24	9.72 537	31	0.27 463	9.94 600	6	1	
		24		30			7		
60	9.67 161		9.72 567		0.27 433	9.94 593		0	
L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d		PP	

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.67 161	24	9.72 567	31	0.27 433	9.94 593	6	60	
1	9.67 185	23	9.72 598	30	0.27 402	9.94 587	7	59	
2	9.67 208	24	9.72 628	31	0.27 372	9.94 580	7	58	
3	9.67 232	24	9.72 659	30	0.27 341	9.94 573	6	57	
4	9.67 256	24	9.72 689	31	0.27 311	9.94 567	7	56	
5	9.67 280	23	9.72 720	30	0.27 280	9.94 560	7	55	
6	9.67 303	24	9.72 750	30	0.27 250	9.94 553	7	54	
7	9.67 327	24	9.72 780	30	0.27 220	9.94 546	6	53	
8	9.67 350	23	9.72 811	31	0.27 189	9.94 540	7	52	
9	9.67 374	24	9.72 841	30	0.27 159	9.94 533	7	51	31 30 29
10	9.67 398	24	9.72 872	31	0.27 128	9.94 526	7	50	1 3.1 3.0 2.9
11	9.67 421	23	9.72 902	30	0.27 098	9.94 519	7	49	2 6.2 6.0 5.8
12	9.67 445	24	9.72 932	31	0.27 068	9.94 513	6	48	3 9.3 9.0 8.7
13	9.67 468	23	9.72 963	30	0.27 037	9.94 506	7	47	4 12.4 12.0 11.6
14	9.67 492	24	9.72 993	30	0.27 007	9.94 499	7	46	5 15.5 15.0 14.5
15	9.67 515	23	9.73 023	30	0.26 977	9.94 492	7	45	6 18.6 18.6 17.4
16	9.67 539	24	9.73 054	31	0.26 946	9.94 485	7	44	7 21.7 21.8 20.3
17	9.67 562	23	9.73 084	30	0.26 916	9.94 479	6	43	8 24.8 24.0 23.2
18	9.67 586	24	9.73 114	30	0.26 886	9.94 472	7	42	9 27.9 27.0 26.1
19	9.67 609	24	9.73 144	31	0.26 856	9.94 465	7	41	
20	9.67 633	23	9.73 175	30	0.26 825	9.94 458	7	40	
21	9.67 656	24	9.73 205	30	0.26 795	9.94 451	6	39	
22	9.67 680	23	9.73 235	30	0.26 765	9.94 445	7	38	
23	9.67 703	23	9.73 265	30	0.26 735	9.94 438	7	37	
24	9.67 726	23	9.73 295	30	0.26 705	9.94 431	7	36	
25	9.67 750	24	9.73 326	31	0.26 674	9.94 424	7	35	24 23 22
26	9.67 773	23	9.73 356	30	0.26 644	9.94 417	7	34	
27	9.67 796	23	9.73 386	30	0.26 614	9.94 410	6	33	
28	9.67 820	24	9.73 416	30	0.26 584	9.94 404	7	32	1 2.4 2.3 2.2
29	9.67 843	23	9.73 446	30	0.26 554	9.94 397	7	31	2 4.8 4.6 4.4
30	9.67 866	23	9.73 476	30	0.26 524	9.94 390	7	30	3 7.2 6.9 6.6
31	9.67 890	24	9.73 507	31	0.26 493	9.94 383	7	29	4 9.0 9.2 8.8
32	9.67 913	23	9.73 537	30	0.26 463	9.94 376	7	28	5 12.0 11.5 11.0
33	9.67 936	23	9.73 567	30	0.26 433	9.94 369	7	27	6 14.4 13.8 13.2
34	9.67 959	23	9.73 597	30	0.26 403	9.94 362	7	26	7 16.8 16.1 15.4
35	9.67 982	23	9.73 627	30	0.26 373	9.94 355	7	25	8 19.2 18.4 17.6
36	9.68 006	24	9.73 657	30	0.26 343	9.94 349	6	24	9 21.6 20.7 19.8
37	9.68 029	23	9.73 687	30	0.26 313	9.94 342	7	23	
38	9.68 052	23	9.73 717	30	0.26 283	9.94 335	7	22	
39	9.68 075	23	9.73 747	30	0.26 253	9.94 328	7	21	
40	9.68 098	23	9.73 777	30	0.26 223	9.94 321	7	20	
41	9.68 121	23	9.73 807	30	0.26 193	9.94 314	7	19	
42	9.68 144	23	9.73 837	30	0.26 163	9.94 307	7	18	
43	9.68 167	23	9.73 867	30	0.26 133	9.94 300	7	17	
44	9.68 190	23	9.73 897	30	0.26 103	9.94 293	7	16	7 6
45	9.68 213	24	9.73 927	30	0.26 073	9.94 286	7	15	1 0.7 0.6
46	9.68 237	23	9.73 957	30	0.26 043	9.94 279	7	14	2 1.4 1.2
47	9.68 260	23	9.73 987	30	0.26 013	9.94 273	6	13	3 2.1 1.8
48	9.68 283	23	9.74 017	30	0.25 983	9.94 266	7	12	4 2.8 2.4
49	9.68 305	22	9.74 047	30	0.25 953	9.94 259	7	11	5 3.5 3.0
50	9.68 328	23	9.74 077	30	0.25 923	9.94 252	7	10	6 4.3 3.6
51	9.68 351	23	9.74 107	30	0.25 893	9.94 245	7	9	7 4.9 4.2
52	9.68 374	23	9.74 137	29	0.25 863	9.94 238	7	8	8 5.0 4.8
53	9.68 397	23	9.74 166	30	0.25 834	9.94 231	7	7	9 6.3 5.4
54	9.68 420	23	9.74 196	30	0.25 804	9.94 224	7	6	
55	9.68 443	23	9.74 226	30	0.25 774	9.94 217	7	5	
56	9.68 466	23	9.74 256	30	0.25 744	9.94 210	7	4	
57	9.68 489	23	9.74 286	30	0.25 714	9.94 203	7	3	
58	9.68 512	22	9.74 316	29	0.25 684	9.94 196	7	2	
59	9.68 534	23	9.74 345	30	0.25 655	9.94 189	7	1	
60	9.68 557	23	9.74 375	30	0.25 625	9.94 182	7	0	
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d		PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.68 557	23	9.74 375	30	0.25 625	9.94 182	7	60
1	9.68 580	23	9.74 405	30	0.25 595	9.94 175	7	59
2	9.68 603	22	9.74 435	30	0.25 565	9.94 168	7	58
3	9.68 625	22	9.74 465	29	0.25 535	9.94 161	7	57
4	9.68 648	23	9.74 494	30	0.25 506	9.94 154	7	56
		23		30			7	
5	9.68 671	23	9.74 524	30	0.25 476	9.94 147	7	55
6	9.68 694	22	9.74 554	29	0.25 446	9.94 140	7	54
7	9.68 716	22	9.74 583	30	0.25 417	9.94 133	7	53
8	9.68 739	23	9.74 613	30	0.25 387	9.94 126	7	52
9	9.68 762	23	9.74 643	30	0.25 357	9.94 119	7	51
		22		30			7	
10	9.68 784	23	9.74 673	29	0.25 327	9.94 112	7	50
11	9.68 807	22	9.74 702	30	0.25 298	9.94 105	7	49
12	9.68 829	23	9.74 732	30	0.25 268	9.94 99	8	48
13	9.68 852	23	9.74 762	29	0.25 238	9.94 90	7	47
14	9.68 875	22	9.74 791	30	0.25 209	9.94 83	7	46
		22		30			7	
15	9.68 897	23	9.74 821	30	0.25 179	9.94 76	7	45
16	9.68 920	22	9.74 851	29	0.25 149	9.94 69	7	44
17	9.68 942	22	9.74 880	29	0.25 120	9.94 62	7	43
18	9.68 965	22	9.74 910	29	0.25 090	9.94 55	7	42
19	9.68 987	23	9.74 939	29	0.25 061	9.94 48	7	41
		22		30			7	
20	9.69 010	22	9.74 969	29	0.25 031	9.94 41	7	40
21	9.69 032	23	9.74 998	30	0.25 002	9.94 34	7	39
22	9.69 055	22	9.75 028	30	0.24 972	9.94 27	7	38
23	9.69 077	23	9.75 058	29	0.24 942	9.94 20	8	37
24	9.69 100	22	9.75 087	30	0.24 913	9.94 12	7	36
		22		30			7	
25	9.69 122	22	9.75 117	29	0.24 883	9.94 05	7	35
26	9.69 144	23	9.75 146	29	0.24 854	9.93 98	7	34
27	9.69 167	22	9.75 176	30	0.24 824	9.93 91	7	33
28	9.69 189	23	9.75 205	29	0.24 795	9.93 84	7	32
29	9.69 212	22	9.75 235	29	0.24 765	9.93 77	7	31
		22		29			7	
30	9.69 234	22	9.75 264	30	0.24 736	9.93 70	7	30
31	9.69 256	23	9.75 294	29	0.24 706	9.93 63	7	29
32	9.69 279	22	9.75 323	29	0.24 677	9.93 55	8	28
33	9.69 301	22	9.75 353	30	0.24 647	9.93 48	7	27
34	9.69 323	22	9.75 382	29	0.24 618	9.93 41	7	26
		22		29			7	
35	9.69 345	23	9.75 411	30	0.24 589	9.93 34	7	25
36	9.69 368	22	9.75 441	29	0.24 559	9.93 27	7	24
37	9.69 390	22	9.75 470	30	0.24 529	9.93 20	8	23
38	9.69 412	22	9.75 500	29	0.24 500	9.93 12	7	22
39	9.69 434	22	9.75 529	29	0.24 471	9.93 05	7	21
		22		30			7	
40	9.69 456	23	9.75 558	30	0.24 442	9.93 98	7	20
41	9.69 479	22	9.75 588	29	0.24 412	9.93 89	7	19
42	9.69 501	22	9.75 617	29	0.24 383	9.93 84	8	18
43	9.69 523	22	9.75 647	30	0.24 353	9.93 76	7	17
44	9.69 545	22	9.75 676	29	0.24 324	9.93 69	8	16
		22		29			7	
45	9.69 567	22	9.75 705	30	0.24 295	9.93 62	7	15
46	9.69 589	22	9.75 735	29	0.24 265	9.93 55	8	14
47	9.69 611	22	9.75 764	29	0.24 236	9.93 47	7	13
48	9.69 633	22	9.75 793	29	0.24 207	9.93 40	7	12
49	9.69 655	22	9.75 822	30	0.24 178	9.93 33	7	11
		22		30			7	
50	9.69 677	22	9.75 852	29	0.24 148	9.93 26	7	10
51	9.69 699	22	9.75 881	29	0.24 119	9.93 19	7	9
52	9.69 721	22	9.75 910	29	0.24 090	9.93 11	8	8
53	9.69 743	22	9.75 939	29	0.24 061	9.93 04	7	7
54	9.69 765	22	9.75 969	30	0.24 031	9.93 97	7	6
		22		29			8	
55	9.69 787	22	9.75 998	29	0.24 002	9.93 89	7	5
56	9.69 809	22	9.76 027	29	0.23 973	9.93 82	7	4
57	9.69 831	22	9.76 056	30	0.23 944	9.93 75	7	3
58	9.69 853	22	9.76 086	29	0.23 914	9.93 68	8	2
59	9.69 875	22	9.76 115	29	0.23 885	9.93 60	7	1
		22		29			7	
60	9.69 897		9.76 144		0.23 856	9.93 53		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.69 897	22	9.76 144	29	0.23 856	9.93 753	7	60
1	9.69 919	22	9.76 173	29	0.23 827	9.93 746	8	59
2	9.69 941	22	9.76 202	29	0.23 798	9.93 738	7	58
3	9.69 963	21	9.76 231	30	0.23 769	9.93 731	7	57
4	9.69 984	22	9.76 261	29	0.23 739	9.93 724	7	56
5	9.70 006	22	9.76 290	29	0.23 710	9.93 717	8	55
6	9.70 028	22	9.76 319	29	0.23 681	9.93 709	8	54
7	9.70 050	22	9.76 348	29	0.23 652	9.93 702	7	53
8	9.70 072	22	9.76 377	29	0.23 623	9.93 695	8	52
9	9.70 093	21	9.76 406	29	0.23 594	9.93 687	8	51
10	9.70 115	22	9.76 435	29	0.23 565	9.93 680	7	50
11	9.70 137	22	9.76 464	29	0.23 536	9.93 673	8	49
12	9.70 159	21	9.76 493	29	0.23 507	9.93 665	8	48
13	9.70 180	22	9.76 522	29	0.23 478	9.93 658	8	47
14	9.70 202	22	9.76 551	29	0.23 449	9.93 650	8	46
15	9.70 224	21	9.76 580	29	0.23 420	9.93 643	7	45
16	9.70 245	22	9.76 609	30	0.23 391	9.93 636	8	44
17	9.70 267	21	9.76 639	29	0.23 361	9.93 628	8	43
18	9.70 288	22	9.76 668	29	0.23 332	9.93 621	7	42
19	9.70 310	22	9.76 697	28	0.23 303	9.93 614	8	41
20	9.70 332	21	9.76 725	29	0.23 275	9.93 606	7	40
21	9.70 353	22	9.76 754	29	0.23 246	9.93 599	8	39
22	9.70 375	22	9.76 783	29	0.23 217	9.93 591	8	38
23	9.70 396	21	9.76 812	29	0.23 188	9.93 584	7	37
24	9.70 418	22	9.76 841	29	0.23 159	9.93 577	7	36
25	9.70 439	21	9.76 870	29	0.23 130	9.93 569	8	35
26	9.70 461	21	9.76 899	29	0.23 101	9.93 562	8	34
27	9.70 482	22	9.76 928	29	0.23 072	9.93 554	8	33
28	9.70 504	21	9.76 957	29	0.23 043	9.93 547	8	32
29	9.70 525	22	9.76 986	29	0.23 014	9.93 539	8	31
30	9.70 547	21	9.77 015	29	0.22 985	9.93 532	7	30
31	9.70 568	22	9.77 044	29	0.22 956	9.93 525	8	29
32	9.70 590	21	9.77 073	28	0.22 927	9.93 517	8	28
33	9.70 611	22	9.77 101	29	0.22 899	9.93 510	7	27
34	9.70 633	21	9.77 130	29	0.22 870	9.93 502	8	26
35	9.70 654	21	9.77 159	29	0.22 841	9.93 495	7	25
36	9.70 675	22	9.77 188	29	0.22 812	9.93 487	8	24
37	9.70 697	21	9.77 217	29	0.22 783	9.93 480	8	23
38	9.70 718	21	9.77 246	28	0.22 754	9.93 472	8	22
39	9.70 739	22	9.77 274	29	0.22 726	9.93 465	8	21
40	9.70 761	21	9.77 303	29	0.22 697	9.93 457	7	20
41	9.70 782	21	9.77 332	29	0.22 668	9.93 450	8	19
42	9.70 803	21	9.77 361	29	0.22 639	9.93 442	8	18
43	9.70 824	22	9.77 390	28	0.22 610	9.93 435	8	17
44	9.70 846	21	9.77 418	29	0.22 582	9.93 427	8	16
45	9.70 867	21	9.77 447	29	0.22 553	9.93 420	7	15
46	9.70 888	21	9.77 476	29	0.22 524	9.93 412	14	14
47	9.70 909	22	9.77 505	28	0.22 495	9.93 405	13	3 2.4 2.1
48	9.70 931	21	9.77 533	29	0.22 467	9.93 397	12	4 3.2 2.8
49	9.70 952	21	9.77 562	29	0.22 438	9.93 390	11	5 4.0 3.5
50	9.70 973	21	9.77 591	28	0.22 409	9.93 382	10	6 4.8 4.2
51	9.70 994	21	9.77 619	29	0.22 381	9.93 375	9	7 5.6 4.9
52	9.71 015	21	9.77 648	29	0.22 352	9.93 367	8	8 6.4 5.6
53	9.71 036	22	9.77 677	29	0.22 323	9.93 360	7	9 7.2 6.3
54	9.71 058	21	9.77 706	28	0.22 294	9.93 352	8	6
55	9.71 079	21	9.77 734	29	0.22 266	9.93 344	7	5
56	9.71 100	21	9.77 763	28	0.22 237	9.93 337	8	4
57	9.71 121	21	9.77 791	29	0.22 209	9.93 329	8	3
58	9.71 142	21	9.77 820	29	0.22 180	9.93 322	8	2
59	9.71 163	21	9.77 849	28	0.22 151	9.93 314	7	1
60	9.71 184	21	9.77 877	28	0.22 123	9.93 307	7	0
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.71 184	21	9.77 877	29	0.22 123	9.93 307	8	<b>60</b>
1	9.71 205	21	9.77 906	29	0.22 094	9.93 299	8	59
2	9.71 226	21	9.77 935	28	0.22 065	9.93 291	8	58
3	9.71 247	21	9.77 963	29	0.22 037	9.93 284	7	57
4	9.71 268	21	9.77 992	29	0.22 008	9.93 276	8	56
		21		28			7	
5	9.71 289	21	9.78 020	29	0.21 980	9.93 269	8	<b>55</b>
6	9.71 310	21	9.78 049	28	0.21 951	9.93 261	8	54
7	9.71 331	21	9.78 077	29	0.21 923	9.93 253	8	53
8	9.71 352	21	9.78 106	29	0.21 894	9.93 246	8	52
9	9.71 373	21	9.78 135	29	0.21 865	9.93 238	8	51
		20		28			8	<b>29 28</b>
10	9.71 393	21	9.78 163	29	0.21 837	9.93 230	8	<b>50</b>
11	9.71 414	21	9.78 192	28	0.21 808	9.93 223	7	49
12	9.71 435	21	9.78 220	29	0.21 780	9.93 215	8	48
13	9.71 456	21	9.78 249	28	0.21 751	9.93 207	8	47
14	9.71 477	21	9.78 277	29	0.21 723	9.93 200	7	46
		21		29			8	
15	9.71 498	21	9.78 306	28	0.21 694	9.93 192	8	<b>45</b>
16	9.71 519	20	9.78 334	29	0.21 666	9.93 184	8	44
17	9.71 539	21	9.78 363	28	0.21 637	9.93 177	8	43
18	9.71 560	21	9.78 391	28	0.21 609	9.93 169	8	42
19	9.71 581	21	9.78 419	28	0.21 581	9.93 161	8	41
		21		29			7	
20	9.71 602	20	9.78 448	28	0.21 552	9.93 154	8	<b>40</b>
21	9.71 622	21	9.78 476	29	0.21 524	9.93 146	8	39
22	9.71 643	21	9.78 505	28	0.21 495	9.93 138	8	38
23	9.71 664	21	9.78 533	28	0.21 467	9.93 131	7	37
24	9.71 685	21	9.78 562	29	0.21 438	9.93 123	8	36
		20		28			8	
25	9.71 705	21	9.78 590	28	0.21 410	9.93 115	7	<b>35</b>
26	9.71 726	21	9.78 618	29	0.21 382	9.93 108	8	34
27	9.71 747	21	9.78 647	28	0.21 353	9.93 100	8	33
28	9.71 767	20	9.78 675	29	0.21 325	9.93 092	8	32
29	9.71 788	21	9.78 704	28	0.21 296	9.93 084	8	31
		21		28			7	
30	9.71 809	20	9.78 732	28	0.21 268	9.93 077	8	<b>30</b>
31	9.71 829	21	9.78 760	29	0.21 240	9.93 069	8	29
32	9.71 850	20	9.78 789	28	0.21 211	9.93 061	8	28
33	9.71 870	21	9.78 817	28	0.21 183	9.93 053	7	27
34	9.71 891	20	9.78 845	29	0.21 155	9.93 046	8	26
		20		29			8	
35	9.71 911	21	9.78 874	28	0.21 126	9.93 038	8	<b>25</b>
36	9.71 932	20	9.78 902	28	0.21 098	9.93 030	8	24
37	9.71 952	21	9.78 930	28	0.21 070	9.93 022	8	23
38	9.71 973	21	9.78 959	29	0.21 041	9.93 014	8	22
39	9.71 994	21	9.78 987	28	0.21 013	9.93 007	7	21
		20		28			8	
40	9.72 014	20	9.79 015	28	0.20 985	9.92 999	8	<b>20</b>
41	9.72 034	21	9.79 043	29	0.20 957	9.92 991	8	19
42	9.72 055	20	9.79 072	28	0.20 928	9.92 983	8	18
43	9.72 075	21	9.79 100	28	0.20 900	9.92 976	7	17
44	9.72 096	21	9.79 128	28	0.20 872	9.92 968	8	16
		20		28			8	<b>8</b>
45	9.72 116	21	9.79 156	29	0.20 844	9.92 960	8	<b>15</b>
46	9.72 137	20	9.79 185	28	0.20 815	9.92 952	8	14
47	9.72 157	20	9.79 213	28	0.20 787	9.92 944	8	13
48	9.72 177	21	9.79 241	28	0.20 759	9.92 936	8	12
49	9.72 198	21	9.79 269	28	0.20 731	9.92 929	7	11
		20		28			8	
50	9.72 218	20	9.79 297	29	0.20 703	9.92 921	8	<b>10</b>
51	9.72 238	21	9.79 326	28	0.20 674	9.92 913	8	9
52	9.72 259	20	9.79 354	28	0.20 646	9.92 905	8	8
53	9.72 279	20	9.79 382	28	0.20 618	9.92 897	8	7
54	9.72 299	20	9.79 410	28	0.20 590	9.92 889	8	6
		21		28			8	
55	9.72 320	20	9.79 438	28	0.20 562	9.92 881	8	<b>5</b>
56	9.72 340	20	9.79 466	29	0.20 534	9.92 874	7	4
57	9.72 360	21	9.79 495	28	0.20 505	9.92 866	8	3
58	9.72 381	20	9.79 523	28	0.20 477	9.92 858	8	2
59	9.72 401	20	9.79 551	28	0.20 449	9.92 850	8	1
		20		28			8	
60	9.72 421		9.79 579		0.20 421	9.92 842		<b>0</b>
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.72 421	20	9.79 579	28	0.20 421	9.92 842	8	60
1	9.72 441	20	9.79 607	28	0.20 303	9.92 834	8	59
2	9.72 461	21	9.79 635	28	0.20 365	9.92 826	8	58
3	9.72 482	21	9.79 663	28	0.20 337	9.92 818	8	57
4	9.72 502	20	9.79 691	28	0.20 309	9.92 810	8	56
		20		28			7	
5	9.72 522	20	9.79 719	28	0.20 281	9.92 803	8	55
6	9.72 542	20	9.79 747	28	0.20 253	9.92 795	8	54
7	9.72 562	20	9.79 776	28	0.20 224	9.92 787	8	53
8	9.72 582	20	9.79 804	28	0.20 196	9.92 779	8	52
9	9.72 602	20	9.79 832	28	0.20 168	9.92 771	8	51
		20		28			8	29 28 27
10	9.72 622	21	9.79 860	28	0.20 140	9.92 763	8	50
11	9.72 643	21	9.79 888	28	0.20 112	9.92 755	8	49
12	9.72 663	20	9.79 916	28	0.20 084	9.92 747	8	48
13	9.72 683	20	9.79 944	28	0.20 056	9.92 739	8	47
14	9.72 703	20	9.79 972	28	0.20 028	9.92 731	8	46
		20		28			8	
15	9.72 723	20	9.80 000	28	0.20 000	9.92 723	8	45
16	9.72 743	20	9.80 028	28	0.19 972	9.92 715	8	44
17	9.72 763	20	9.80 056	28	0.19 944	9.92 707	8	43
18	9.72 783	20	9.80 084	28	0.19 916	9.92 699	8	42
19	9.72 803	20	9.80 112	28	0.19 888	9.92 691	8	41
		20		28			8	
20	9.72 823	20	9.80 140	28	0.19 860	9.92 683	8	40
21	9.72 843	20	9.80 168	28	0.19 832	9.92 675	8	39
22	9.72 863	20	9.80 195	28	0.19 805	9.92 667	8	38
23	9.72 883	19	9.80 223	28	0.19 777	9.92 659	8	37
24	9.72 902	20	9.80 251	28	0.19 749	9.92 651	8	36
		20		28			8	
25	9.72 922	20	9.80 279	28	0.19 721	9.92 643	8	35
26	9.72 942	20	9.80 307	28	0.19 693	9.92 635	8	34
27	9.72 962	20	9.80 335	28	0.19 665	9.92 627	8	33
28	9.72 982	20	9.80 363	28	0.19 637	9.92 619	8	32
29	9.73 002	20	9.80 391	28	0.19 609	9.92 611	8	31
		20		28			8	
30	9.73 022	19	9.80 419	28	0.19 581	9.92 603	8	30
31	9.73 041	20	9.80 447	27	0.19 553	9.92 595	8	29
32	9.73 061	20	9.80 474	28	0.19 526	9.92 587	8	28
33	9.73 081	20	9.80 502	28	0.19 498	9.92 579	8	27
34	9.73 101	20	9.80 530	28	0.19 470	9.92 571	8	26
		20		28			8	
35	9.73 121	19	9.80 558	28	0.19 442	9.92 563	8	25
36	9.73 140	20	9.80 586	28	0.19 414	9.92 555	8	24
37	9.73 160	20	9.80 614	28	0.19 386	9.92 546	8	23
38	9.73 180	20	9.80 642	28	0.19 358	9.92 538	8	22
39	9.73 200	19	9.80 669	28	0.19 331	9.92 530	8	21
		19		28			8	
40	9.73 219	20	9.80 697	28	0.19 303	9.92 522	8	20
41	9.73 239	20	9.80 725	28	0.19 275	9.92 514	8	19
42	9.73 259	19	9.80 753	28	0.19 247	9.92 506	8	18
43	9.73 278	20	9.80 781	28	0.19 219	9.92 498	8	17
44	9.73 298	20	9.80 808	28	0.19 192	9.92 490	8	16
		20		28			8	
45	9.73 318	19	9.80 836	28	0.19 164	9.92 482	8	15
46	9.73 337	20	9.80 864	28	0.19 136	9.92 473	8	14
47	9.73 357	20	9.80 892	27	0.19 108	9.92 465	8	13
48	9.73 377	19	9.80 919	28	0.19 081	9.92 457	8	12
49	9.73 396	20	9.80 947	28	0.19 053	9.92 449	8	11
		20		28			8	
50	9.73 416	19	9.80 975	28	0.19 025	9.92 441	8	10
51	9.73 435	20	9.81 003	27	0.18 997	9.92 433	8	9
52	9.73 455	19	9.81 030	28	0.18 970	9.92 425	8	8
53	9.73 474	20	9.81 058	28	0.18 942	9.92 416	8	7
54	9.73 494	19	9.81 086	28	0.18 914	9.92 408	8	6
		19		27			8	
55	9.73 513	20	9.81 113	28	0.18 887	9.92 400	8	5
56	9.73 533	19	9.81 141	28	0.18 859	9.92 392	8	4
57	9.73 552	20	9.81 169	27	0.18 831	9.92 384	8	3
58	9.73 572	19	9.81 196	28	0.18 804	9.92 376	8	2
59	9.73 591	20	9.81 224	28	0.18 776	9.92 367	8	1
		20		28			9	
60	9.73 611		9.81 252		0.18 748	9.92 359		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.73 611	19	9.81 252	27	0.18 748	9.92 359	8	60
1	9.73 630	20	9.81 279	28	0.18 721	9.92 351	8	59
2	9.73 650	19	9.81 307	28	0.18 693	9.92 343	8	58
3	9.73 669	20	9.81 335	27	0.18 665	9.92 335	8	57
4	9.73 689	19	9.81 362	28	0.18 638	9.92 326	8	56
5	9.73 708	19	9.81 390	28	0.18 610	9.92 318	8	55
6	9.73 727	20	9.81 418	27	0.18 582	9.92 310	8	54
7	9.73 747	19	9.81 445	28	0.18 555	9.92 302	8	53
8	9.73 766	19	9.81 473	27	0.18 527	9.92 293	8	52
9	9.73 785	20	9.81 500	28	0.18 500	9.92 285	8	51
10	9.73 805	19	9.81 528	28	0.18 472	9.92 277	8	50
11	9.73 824	19	9.81 556	27	0.18 444	9.92 269	8	49
12	9.73 843	20	9.81 583	28	0.18 417	9.92 260	8	48
13	9.73 863	19	9.81 611	27	0.18 389	9.92 252	8	47
14	9.73 882	19	9.81 638	28	0.18 362	9.92 244	8	46
15	9.73 901	20	9.81 666	27	0.18 334	9.92 235	8	45
16	9.73 921	19	9.81 693	28	0.18 307	9.92 227	8	44
17	9.73 940	19	9.81 721	27	0.18 279	9.92 219	8	43
18	9.73 959	20	9.81 748	28	0.18 252	9.92 211	8	42
19	9.73 978	19	9.81 776	27	0.18 224	9.92 202	8	41
20	9.73 997	20	9.81 803	28	0.18 197	9.92 194	8	40
21	9.74 017	19	9.81 831	27	0.18 169	9.92 186	8	39
22	9.74 036	19	9.81 858	28	0.18 142	9.92 177	8	38
23	9.74 055	20	9.81 886	27	0.18 114	9.92 169	8	37
24	9.74 074	19	9.81 913	28	0.18 087	9.92 161	8	36
25	9.74 093	20	9.81 941	27	0.18 059	9.92 152	8	35
26	9.74 113	19	9.81 968	28	0.18 032	9.92 144	8	34
27	9.74 132	20	9.81 996	27	0.18 004	9.92 136	8	33
28	9.74 151	19	9.82 023	28	0.17 977	9.92 127	8	32
29	9.74 170	19	9.82 051	27	0.17 949	9.92 119	8	31
30	9.74 189	20	9.82 078	28	0.17 922	9.92 111	8	30
31	9.74 208	19	9.82 106	27	0.17 894	9.92 102	8	29
32	9.74 227	19	9.82 133	28	0.17 867	9.92 094	8	28
33	9.74 246	20	9.82 161	27	0.17 839	9.92 086	8	27
34	9.74 265	19	9.82 188	28	0.17 812	9.92 077	8	26
35	9.74 284	19	9.82 215	27	0.17 785	9.92 069	8	25
36	9.74 303	20	9.82 243	28	0.17 757	9.92 060	8	24
37	9.74 322	19	9.82 270	27	0.17 730	9.92 052	8	23
38	9.74 341	19	9.82 298	28	0.17 702	9.92 044	8	22
39	9.74 360	20	9.82 325	27	0.17 675	9.92 035	8	21
40	9.74 379	19	9.82 352	28	0.17 648	9.92 027	8	20
41	9.74 398	19	9.82 380	27	0.17 620	9.92 018	8	19
42	9.74 417	20	9.82 407	28	0.17 593	9.92 010	8	18
43	9.74 436	19	9.82 435	27	0.17 565	9.92 002	8	17
44	9.74 455	19	9.82 462	28	0.17 538	9.91 993	8	16
45	9.74 474	20	9.82 489	27	0.17 511	9.91 985	8	15
46	9.74 493	19	9.82 517	28	0.17 483	9.91 976	8	14
47	9.74 512	19	9.82 544	27	0.17 456	9.91 968	8	13
48	9.74 531	20	9.82 571	28	0.17 429	9.91 959	8	12
49	9.74 549	19	9.82 599	27	0.17 401	9.91 951	8	11
50	9.74 568	19	9.82 626	28	0.17 374	9.91 942	8	10
51	9.74 587	20	9.82 653	27	0.17 347	9.91 934	8	9
52	9.74 606	19	9.82 681	28	0.17 319	9.91 925	8	8
53	9.74 625	19	9.82 708	27	0.17 292	9.91 917	8	7
54	9.74 644	20	9.82 735	28	0.17 265	9.91 908	8	6
55	9.74 662	19	9.82 762	27	0.17 238	9.91 900	8	5
56	9.74 681	19	9.82 790	28	0.17 210	9.91 891	8	4
57	9.74 700	20	9.82 817	27	0.17 183	9.91 883	8	3
58	9.74 719	19	9.82 844	28	0.17 156	9.91 874	8	2
59	9.74 737	19	9.82 871	27	0.17 129	9.91 866	8	1
60	9.74 756	20	9.82 899	28	0.17 101	9.91 857	8	0
°	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.74 756		9.82 899		0.17 101	9.91 857		60
1	9.74 775	19	9.82 926	27	0.17 074	9.91 849	8	59
2	9.74 794	19	9.82 953	27	0.17 047	9.91 840	8	58
3	9.74 812	18	9.82 980	27	0.17 020	9.91 832	8	57
4	9.74 831	19	9.83 008	28	0.16 992	9.91 823	9	56
		19		27			8	
5	9.74 850		9.83 035		0.16 965	9.91 815		55
6	9.74 868	18	9.83 062	27	0.16 938	9.91 806	9	54
7	9.74 887	19	9.83 089	27	0.16 911	9.91 798	8	53
8	9.74 906	19	9.83 117	28	0.16 883	9.91 789	8	52
9	9.74 924	18	9.83 144	27	0.16 856	9.91 781	8	51
		19		27			9	28 27 26
10	9.74 943		9.83 171		0.16 829	9.91 772		50
11	9.74 961	18	9.83 198	27	0.16 802	9.91 763	9	49
12	9.74 980	19	9.83 225	27	0.16 775	9.91 755	8	48
13	9.74 999	19	9.83 252	27	0.16 748	9.91 746	8	47
14	9.75 017	18	9.83 280	28	0.16 720	9.91 738	8	46
		19		27			9	
15	9.75 036		9.83 307		0.16 693	9.91 729		45
16	9.75 054	18	9.83 334	27	0.16 666	9.91 720	9	44
17	9.75 073	19	9.83 361	27	0.16 639	9.91 712	8	43
18	9.75 091	18	9.83 388	27	0.16 612	9.91 703	8	42
19	9.75 110	19	9.83 415	27	0.16 585	9.91 695	8	41
		18		27			9	
20	9.75 128		9.83 442		0.16 558	9.91 686		40
21	9.75 147	19	9.83 470	28	0.16 530	9.91 677	9	39
22	9.75 165	18	9.83 497	27	0.16 503	9.91 669	8	38
23	9.75 184	19	9.83 524	27	0.16 476	9.91 660	8	37
24	9.75 202	18	9.83 551	27	0.16 449	9.91 651	8	36
		19		27			9	
25	9.75 221		9.83 578		0.16 422	9.91 643		35
26	9.75 239	18	9.83 605	27	0.16 395	9.91 634	9	34
27	9.75 258	19	9.83 632	27	0.16 368	9.91 625	8	33
28	9.75 276	18	9.83 659	27	0.16 341	9.91 617	8	32
29	9.75 294	19	9.83 686	27	0.16 314	9.91 608	9	31
		18		27			8	19 18
30	9.75 313		9.83 713		0.16 287	9.91 599		30
31	9.75 331	18	9.83 740	28	0.16 260	9.91 591	8	29
32	9.75 350	19	9.83 768	28	0.16 232	9.91 582	8	28
33	9.75 368	18	9.83 795	27	0.16 205	9.91 573	8	27
34	9.75 386	19	9.83 822	27	0.16 178	9.91 565	8	26
		18		27			9	
35	9.75 405		9.83 849		0.16 151	9.91 556		25
36	9.75 423	18	9.83 876	27	0.16 124	9.91 547	9	24
37	9.75 441	19	9.83 903	27	0.16 097	9.91 538	8	23
38	9.75 459	18	9.83 930	27	0.16 070	9.91 530	8	22
39	9.75 478	19	9.83 957	27	0.16 043	9.91 521	9	21
		18		27			8	
40	9.75 496		9.83 984		0.16 016	9.91 512		20
41	9.75 514	18	9.84 011	27	0.15 989	9.91 504	8	19
42	9.75 533	19	9.84 038	27	0.15 962	9.91 495	9	18
43	9.75 551	18	9.84 065	27	0.15 935	9.91 486	9	17
44	9.75 569	19	9.84 092	27	0.15 908	9.91 477	8	16
		18		27			9	9 8
45	9.75 587		9.84 119		0.15 881	9.91 469		15
46	9.75 605	18	9.84 146	27	0.15 854	9.91 460	9	14
47	9.75 624	19	9.84 173	27	0.15 827	9.91 451	9	13
48	9.75 642	18	9.84 200	27	0.15 800	9.91 442	9	12
49	9.75 660	19	9.84 227	27	0.15 773	9.91 433	9	11
		18		27			8	5 4.5 4.0
50	9.75 678		9.84 254		0.15 746	9.91 425		10
51	9.75 696	18	9.84 280	26	0.15 720	9.91 416	9	9
52	9.75 714	19	9.84 307	27	0.15 693	9.91 407	9	8
53	9.75 733	18	9.84 334	27	0.15 666	9.91 398	9	7
54	9.75 751	19	9.84 361	27	0.15 639	9.91 389	8	6
		18		27			9	
55	9.75 769		9.84 388		0.15 612	9.91 381		5
56	9.75 787	18	9.84 415	27	0.15 585	9.91 372	9	4
57	9.75 805	19	9.84 442	27	0.15 558	9.91 363	9	3
58	9.75 823	18	9.84 469	27	0.15 531	9.91 354	9	2
59	9.75 841	19	9.84 496	27	0.15 504	9.91 345	9	1
		18		27			9	
60	9.75 859		9.84 523		0.15 477	9.91 336		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP



	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.75 859	18	9.84 523	27	0.15 477	9.91 336	8	<b>60</b>
1	9.75 877	18	9.84 550	26	0.15 450	9.91 328	9	59
2	9.75 895	18	9.84 576	26	0.15 424	9.91 319	9	58
3	9.75 913	18	9.84 603	27	0.15 397	9.91 310	9	57
4	9.75 931	18	9.84 630	27	0.15 370	9.91 301	9	56
		18		27			9	
5	9.75 949	18	9.84 657	27	0.15 343	9.91 292	9	<b>55</b>
6	9.75 967	18	9.84 684	27	0.15 316	9.91 283	9	54
7	9.75 985	18	9.84 711	27	0.15 289	9.91 274	8	53
8	9.76 003	18	9.84 738	26	0.15 262	9.91 266	9	52
9	9.76 021	18	9.84 764	27	0.15 236	9.91 257	9	51
		18		27			9	<b>27 26</b>
10	9.76 039	18	9.84 791	27	0.15 209	9.91 248	9	<b>50</b>
11	9.76 057	18	9.84 818	27	0.15 182	9.91 239	9	49
12	9.76 075	18	9.84 845	27	0.15 155	9.91 230	9	48
13	9.76 093	18	9.84 872	27	0.15 128	9.91 221	9	47
14	9.76 111	18	9.84 899	27	0.15 101	9.91 212	9	46
		18		26			9	
15	9.76 129	17	9.84 925	27	0.15 075	9.91 203	9	<b>45</b>
16	9.76 146	18	9.84 952	27	0.15 048	9.91 194	9	44
17	9.76 164	18	9.84 979	27	0.15 021	9.91 185	9	43
18	9.76 182	18	9.85 006	27	0.14 994	9.91 176	9	42
19	9.76 200	18	9.85 033	27	0.14 967	9.91 167	9	41
		18		26			9	
20	9.76 218	18	9.85 059	27	0.14 941	9.91 158	9	<b>40</b>
21	9.76 236	18	9.85 086	27	0.14 914	9.91 149	8	39
22	9.76 253	17	9.85 113	27	0.14 887	9.91 141	8	38
23	9.76 271	18	9.85 140	27	0.14 860	9.91 132	9	37
24	9.76 289	18	9.85 166	26	0.14 834	9.91 123	9	36
		18		27			9	
25	9.76 307	17	9.85 193	27	0.14 807	9.91 114	9	<b>35</b>
26	9.76 324	18	9.85 220	27	0.14 780	9.91 105	9	34
27	9.76 342	18	9.85 247	26	0.14 753	9.91 096	9	33
28	9.76 360	18	9.85 273	27	0.14 727	9.91 087	9	32
29	9.76 378	17	9.85 300	27	0.14 700	9.91 078	9	31
		18		27			9	<b>18 17</b>
30	9.76 395	18	9.85 327	27	0.14 673	9.91 069	9	<b>30</b>
31	9.76 413	18	9.85 354	26	0.14 646	9.91 060	9	29
32	9.76 431	18	9.85 380	26	0.14 620	9.91 051	9	28
33	9.76 448	17	9.85 407	27	0.14 593	9.91 042	9	27
34	9.76 466	18	9.85 434	26	0.14 566	9.91 033	9	26
		18		26			10	
35	9.76 484	17	9.85 460	27	0.14 540	9.91 023	9	<b>25</b>
36	9.76 501	18	9.85 487	27	0.14 513	9.91 014	9	24
37	9.76 519	18	9.85 514	26	0.14 486	9.91 005	9	23
38	9.76 537	17	9.85 540	27	0.14 460	9.90 996	9	22
39	9.76 554	18	9.85 567	27	0.14 433	9.90 987	9	21
		18		27			9	
40	9.76 572	18	9.85 594	26	0.14 406	9.90 978	9	<b>20</b>
41	9.76 590	17	9.85 620	27	0.14 380	9.90 969	9	19
42	9.76 607	18	9.85 647	27	0.14 353	9.90 960	9	18
43	9.76 625	18	9.85 674	27	0.14 326	9.90 951	9	17
44	9.76 642	17	9.85 700	26	0.14 300	9.90 942	9	16
		18		27			9	<b>10 9 8</b>
45	9.76 660	17	9.85 727	27	0.14 273	9.90 933	9	<b>15</b>
46	9.76 677	18	9.85 754	26	0.14 246	9.90 924	9	14
47	9.76 695	17	9.85 780	27	0.14 220	9.90 915	9	13
48	9.76 712	18	9.85 807	27	0.14 193	9.90 906	10	12
49	9.76 730	17	9.85 834	26	0.14 166	9.90 896	10	11
		17		26			9	
50	9.76 747	18	9.85 860	27	0.14 140	9.90 887	9	<b>10</b>
51	9.76 765	18	9.85 887	26	0.14 113	9.90 878	9	9
52	9.76 782	17	9.85 913	26	0.14 087	9.90 869	9	8
53	9.76 800	18	9.85 940	27	0.14 060	9.90 860	9	7
54	9.76 817	17	9.85 967	27	0.14 033	9.90 851	9	6
		18		26			9	
55	9.76 835	17	9.85 993	27	0.14 007	9.90 842	10	<b>5</b>
56	9.76 852	18	9.86 020	26	0.13 980	9.90 832	9	4
57	9.76 870	18	9.86 046	26	0.13 954	9.90 823	9	3
58	9.76 887	17	9.86 073	27	0.13 927	9.90 814	9	2
59	9.76 904	18	9.86 100	27	0.13 900	9.90 805	9	1
		18		26			9	
60	9.76 922		9.86 126		0.13 874	9.90 796		<b>0</b>
L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP	

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9 76 922	17	9 86 126	27	0 13 874	9 90 796	9	60
1	9 76 939	18	9 86 153	26	0 13 847	9 90 787	10	59
2	9 76 957	17	9 86 179	27	0 13 821	9 90 777	9	58
3	9 76 974	17	9 86 206	26	0 13 794	9 90 768	9	57
4	9 76 991	18	9 86 232	27	0 13 768	9 90 759	9	56
5	9 77 009	17	9 86 259	26	0 13 741	9 90 750	9	55
6	9 77 026	17	9 86 285	27	0 13 715	9 90 741	10	54
7	9 77 043	18	9 86 312	26	0 13 688	9 90 731	9	53
8	9 77 061	17	9 86 338	27	0 13 662	9 90 722	9	52
9	9 77 078	17	9 86 365	27	0 13 635	9 90 713	9	51
10	9 77 095	17	9 86 392	26	0 13 608	9 90 704	9	50
11	9 77 112	18	9 86 418	27	0 13 582	9 90 694	10	49
12	9 77 130	17	9 86 445	26	0 13 555	9 90 685	9	48
13	9 77 147	17	9 86 471	27	0 13 529	9 90 676	9	47
14	9 77 164	17	9 86 498	26	0 13 502	9 90 667	10	46
15	9 77 181	18	9 86 524	27	0 13 476	9 90 657	9	45
16	9 77 199	17	9 86 551	26	0 13 449	9 90 648	9	44
17	9 77 216	17	9 86 577	26	0 13 423	9 90 639	9	43
18	9 77 233	17	9 86 603	27	0 13 397	9 90 630	9	42
19	9 77 250	18	9 86 630	26	0 13 370	9 90 620	10	41
20	9 77 268	17	9 86 656	27	0 13 344	9 90 611	9	40
21	9 77 285	17	9 86 683	26	0 13 317	9 90 602	10	39
22	9 77 302	17	9 86 709	27	0 13 291	9 90 592	9	38
23	9 77 319	17	9 86 736	26	0 13 264	9 90 583	9	37
24	9 77 336	17	9 86 762	26	0 13 238	9 90 574	9	36
25	9 77 353	17	9 86 789	26	0 13 211	9 90 565	10	35
26	9 77 370	17	9 86 815	27	0 13 185	9 90 555	9	34
27	9 77 387	18	9 86 842	26	0 13 158	9 90 546	9	33
28	9 77 405	17	9 86 868	26	0 13 132	9 90 537	10	32
29	9 77 422	17	9 86 894	27	0 13 106	9 90 527	9	31
30	9 77 439	17	9 86 921	26	0 13 079	9 90 518	9	30
31	9 77 456	17	9 86 947	27	0 13 053	9 90 509	10	29
32	9 77 473	17	9 86 974	26	0 13 026	9 90 499	9	28
33	9 77 490	17	9 87 000	27	0 13 000	9 90 490	10	27
34	9 77 507	17	9 87 027	26	0 12 973	9 90 480	9	26
35	9 77 524	17	9 87 053	26	0 12 947	9 90 471	9	25
36	9 77 541	17	9 87 079	27	0 12 921	9 90 462	10	24
37	9 77 558	17	9 87 106	26	0 12 894	9 90 452	9	23
38	9 77 575	17	9 87 132	26	0 12 868	9 90 443	9	22
39	9 77 592	17	9 87 158	27	0 12 842	9 90 434	10	21
40	9 77 609	17	9 87 185	26	0 12 815	9 90 424	9	20
41	9 77 626	17	9 87 211	27	0 12 789	9 90 415	9	19
42	9 77 643	17	9 87 238	26	0 12 762	9 90 405	9	18
43	9 77 660	17	9 87 264	26	0 12 736	9 90 396	9	17
44	9 77 677	17	9 87 290	27	0 12 710	9 90 386	10	16
45	9 77 694	17	9 87 317	26	0 12 683	9 90 377	9	15
46	9 77 711	17	9 87 343	26	0 12 657	9 90 368	9	14
47	9 77 728	16	9 87 369	27	0 12 631	9 90 358	10	13
48	9 77 744	17	9 87 395	26	0 12 604	9 90 349	9	12
49	9 77 761	17	9 87 422	26	0 12 578	9 90 339	10	11
50	9 77 778	17	9 87 448	27	0 12 552	9 90 330	9	10
51	9 77 795	17	9 87 475	26	0 12 525	9 90 320	10	9
52	9 77 812	17	9 87 501	26	0 12 499	9 90 311	9	8
53	9 77 829	17	9 87 527	27	0 12 473	9 90 301	10	7
54	9 77 846	16	9 87 554	26	0 12 446	9 90 292	9	6
55	9 77 862	17	9 87 580	26	0 12 420	9 90 282	10	5
56	9 77 879	17	9 87 606	27	0 12 394	9 90 273	9	4
57	9 77 896	17	9 87 633	26	0 12 367	9 90 263	9	3
58	9 77 913	17	9 87 659	26	0 12 341	9 90 254	10	2
59	9 77 930	16	9 87 685	26	0 12 315	9 90 244	9	1
60	9 77 946		9 87 711		0 12 289	9 90 235		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.77 946	17	9.87 711	27	0.12 289	9.90 235	10	<b>60</b>	
1	9.77 963	17	9.87 738	26	0.12 262	9.90 225	9	59	
2	9.77 980	17	9.87 764	26	0.12 236	9.90 216	9	58	
3	9.77 997	16	9.87 790	26	0.12 210	9.90 206	9	57	
4	9.78 013	17	9.87 817	27	0.12 183	9.90 197	10	56	
5	9.78 030	17	9.87 843	26	0.12 157	9.90 187	10	<b>55</b>	
6	9.78 047	16	9.87 869	26	0.12 131	9.90 178	9	54	
7	9.78 063	17	9.87 895	26	0.12 105	9.90 168	9	53	
8	9.78 080	17	9.87 922	27	0.12 078	9.90 159	9	52	
9	9.78 097	16	9.87 948	26	0.12 052	9.90 149	10	51	<b>27 26</b>
10	9.78 113	17	9.87 974	26	0.12 026	9.90 139	9	<b>50</b>	1   2.7 2.6
11	9.78 130	17	9.88 000	26	0.12 000	9.90 130	9	49	2   5.4 5.2
12	9.78 147	17	9.88 027	27	0.11 973	9.90 120	9	48	3   8.1 7.8
13	9.78 163	16	9.88 053	26	0.11 947	9.90 111	10	47	4   10.8 10.4
14	9.78 180	17	9.88 079	26	0.11 921	9.90 101	10	46	5   13.5 13.0
15	9.78 197	16	9.88 105	26	0.11 895	9.90 091	9	<b>45</b>	6   16.2 15.6
16	9.78 213	17	9.88 131	27	0.11 869	9.90 082	9	44	7   18.9 18.2
17	9.78 230	16	9.88 158	26	0.11 842	9.90 072	9	43	8   21.6 20.8
18	9.78 246	17	9.88 184	26	0.11 816	9.90 063	10	42	9   24.3 23.4
19	9.78 263	17	9.88 210	26	0.11 790	9.90 053	10	41	
20	9.78 280	16	9.88 236	26	0.11 764	9.90 043	10	<b>40</b>	
21	9.78 296	17	9.88 262	26	0.11 738	9.90 034	9	39	
22	9.78 313	17	9.88 289	27	0.11 711	9.90 024	10	38	
23	9.78 329	16	9.88 315	26	0.11 685	9.90 014	10	37	
24	9.78 346	16	9.88 341	26	0.11 659	9.90 005	9	36	
25	9.78 362	17	9.88 367	26	0.11 633	9.89 995	10	<b>35</b>	
26	9.78 379	16	9.88 393	26	0.11 607	9.89 985	9	34	<b>17 16</b>
27	9.78 395	17	9.88 420	26	0.11 580	9.89 976	10	33	
28	9.78 412	17	9.88 446	26	0.11 554	9.89 966	10	32	1   1.7 1.6
29	9.78 428	16	9.88 472	26	0.11 528	9.89 956	10	31	2   3.4 3.2
30	9.78 445	16	9.88 498	26	0.11 502	9.89 947	10	<b>30</b>	3   5.1 4.8
31	9.78 461	17	9.88 524	26	0.11 476	9.89 937	10	29	4   6.8 6.4
32	9.78 478	16	9.88 550	26	0.11 450	9.89 927	9	28	5   8.5 8.0
33	9.78 494	16	9.88 577	26	0.11 423	9.89 918	10	27	6   10.2 9.6
34	9.78 510	17	9.88 603	26	0.11 397	9.89 908	10	26	7   11.9 11.2
35	9.78 527	16	9.88 629	26	0.11 371	9.89 898	10	<b>25</b>	8   13.6 12.8
36	9.78 543	17	9.88 655	26	0.11 345	9.89 888	9	24	9   15.3 14.4
37	9.78 560	16	9.88 681	26	0.11 319	9.89 879	10	23	
38	9.78 576	16	9.88 707	26	0.11 293	9.89 869	10	22	
39	9.78 592	17	9.88 733	26	0.11 267	9.89 859	10	21	
40	9.78 609	16	9.88 759	26	0.11 241	9.89 849	10	<b>20</b>	
41	9.78 625	17	9.88 786	26	0.11 214	9.89 840	9	19	
42	9.78 642	16	9.88 812	26	0.11 188	9.89 830	10	18	
43	9.78 658	16	9.88 838	26	0.11 162	9.89 820	10	17	
44	9.78 674	17	9.88 864	26	0.11 136	9.89 810	10	16	<b>10 9</b>
45	9.78 691	16	9.88 890	26	0.11 110	9.89 801	10	<b>15</b>	1   1.0 0.9
46	9.78 707	16	9.88 916	26	0.11 084	9.89 791	10	14	2   2.0 1.8
47	9.78 723	16	9.88 942	26	0.11 058	9.89 781	10	13	3   3.0 2.7
48	9.78 739	16	9.88 968	26	0.11 032	9.89 771	10	12	4   4.0 3.6
49	9.78 756	17	9.88 994	26	0.11 006	9.89 761	10	11	5   5.0 4.5
50	9.78 772	16	9.89 020	26	0.10 980	9.89 752	9	<b>10</b>	6   6.0 5.4
51	9.78 788	17	9.89 046	27	0.10 954	9.89 742	10	9	7   7.0 6.3
52	9.78 805	16	9.89 073	26	0.10 927	9.89 732	10	8	8   8.0 7.2
53	9.78 821	16	9.89 099	26	0.10 901	9.89 722	10	7	9   9.0 8.1
54	9.78 837	16	9.89 125	26	0.10 875	9.89 712	10	6	
55	9.78 853	16	9.89 151	26	0.10 849	9.89 702	10	<b>5</b>	
56	9.78 869	17	9.89 177	26	0.10 823	9.89 693	9	4	
57	9.78 886	16	9.89 203	26	0.10 797	9.89 683	10	3	
58	9.78 902	16	9.89 229	26	0.10 771	9.89 673	10	2	
59	9.78 918	16	9.89 255	26	0.10 745	9.89 663	10	1	
60	9.78 934	16	9.89 281	26	0.10 719	9.89 653	10	<b>0</b>	
'	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d	'	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.78 934	16	9.89 281	26	0.10 710	9.89 653	10	60
1	9.78 950	17	9.89 307	26	0.10 693	9.89 643	10	59
2	9.78 967	16	9.89 333	26	0.10 667	9.89 633	10	58
3	9.78 983	16	9.89 359	26	0.10 641	9.89 624	9	57
4	9.78 999	16	9.89 385	26	0.10 615	9.89 614	10	56
		16		26			10	
5	9.79 015	16	9.89 411	26	0.10 589	9.89 604	10	55
6	9.79 031	16	9.89 437	26	0.10 563	9.89 594	10	54
7	9.79 047	16	9.89 463	26	0.10 537	9.89 584	10	53
8	9.79 063	16	9.89 489	26	0.10 511	9.89 574	10	52
9	9.79 079	16	9.89 515	26	0.10 485	9.89 564	10	51
		16		26			10	26 26
10	9.79 095	16	9.89 541	26	0.10 459	9.89 554	10	50
11	9.79 111	17	9.89 567	26	0.10 433	9.89 544	10	49
12	9.79 128	16	9.89 593	26	0.10 407	9.89 534	10	48
13	9.79 144	16	9.89 619	26	0.10 381	9.89 524	10	47
14	9.79 160	16	9.89 645	26	0.10 355	9.89 514	10	46
		16		26			10	
15	9.79 176	16	9.89 671	26	0.10 329	9.89 504	9	45
16	9.79 192	16	9.89 697	26	0.10 303	9.89 495	9	44
17	9.79 208	16	9.89 723	26	0.10 277	9.89 485	10	43
18	9.79 224	16	9.89 749	26	0.10 251	9.89 475	10	42
19	9.79 240	16	9.89 775	26	0.10 225	9.89 465	10	41
		16		26			10	
20	9.79 256	16	9.89 801	26	0.10 199	9.89 455	10	40
21	9.79 272	16	9.89 827	26	0.10 173	9.89 445	10	39
22	9.79 288	16	9.89 853	26	0.10 147	9.89 435	10	38
23	9.79 304	16	9.89 879	26	0.10 121	9.89 425	10	37
24	9.79 319	15	9.89 905	26	0.10 095	9.89 415	10	36
		16		26			10	
25	9.79 335	16	9.89 931	26	0.10 069	9.89 405	10	35
26	9.79 351	16	9.89 957	26	0.10 043	9.89 395	10	34
27	9.79 367	16	9.89 983	26	0.10 017	9.89 385	10	33
28	9.79 383	16	9.90 009	26	0.09 991	9.89 375	11	32
29	9.79 399	16	9.90 085	26	0.09 965	9.89 364	11	31
		16		26			10	
30	9.79 415	16	9.90 061	25	0.09 939	9.89 354	10	30
31	9.79 431	16	9.90 086	26	0.09 914	9.89 344	10	29
32	9.79 447	16	9.90 112	26	0.09 888	9.89 334	10	28
33	9.79 463	15	9.90 138	26	0.09 862	9.89 324	10	27
34	9.79 478	16	9.90 164	26	0.09 836	9.89 314	10	26
		16		26			10	
35	9.79 494	16	9.90 190	26	0.09 810	9.89 304	10	25
36	9.79 510	16	9.90 216	26	0.09 784	9.89 294	10	24
37	9.79 526	16	9.90 242	26	0.09 758	9.89 284	10	23
38	9.79 542	16	9.90 268	26	0.09 732	9.89 274	10	22
39	9.79 558	16	9.90 294	26	0.09 706	9.89 264	10	21
		15		26			10	
40	9.79 573	18	9.90 320	26	0.09 680	9.89 254	10	20
41	9.79 589	16	9.90 346	25	0.09 654	9.89 244	11	19
42	9.79 605	16	9.90 371	26	0.09 629	9.89 233	11	18
43	9.79 621	15	9.90 397	26	0.09 603	9.89 223	11	17
44	9.79 636	16	9.90 423	26	0.09 577	9.89 213	10	16
		16		26			10	
45	9.79 652	16	9.90 449	26	0.09 551	9.89 203	10	15
46	9.79 668	16	9.90 475	26	0.09 525	9.89 193	10	14
47	9.79 684	15	9.90 501	26	0.09 499	9.89 183	10	13
48	9.79 699	16	9.90 527	26	0.09 473	9.89 173	10	12
49	9.79 715	16	9.90 553	26	0.09 447	9.89 162	11	11
		16		25			10	
50	9.79 731	15	9.90 578	26	0.09 422	9.89 152	10	10
51	9.79 746	16	9.90 604	26	0.09 396	9.89 142	10	9
52	9.79 762	16	9.90 630	26	0.09 370	9.89 132	10	8
53	9.79 778	15	9.90 656	26	0.09 344	9.89 122	10	7
54	9.79 793	16	9.90 682	26	0.09 318	9.89 112	10	6
		16		26			11	
55	9.79 809	16	9.90 708	26	0.09 292	9.89 101	10	5
56	9.79 825	15	9.90 734	25	0.09 266	9.89 091	10	4
57	9.79 840	16	9.90 759	26	0.09 241	9.89 081	10	3
58	9.79 856	16	9.90 785	26	0.09 215	9.89 071	10	2
59	9.79 872	16	9.90 811	26	0.09 189	9.89 060	11	1
		15		26			10	
60	9.79 887		9.90 837		0.09 163	9.89 050		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.79 887	16	9.90 837		0.09 163	9.89 050	60	
1	9.79 903	15	9.90 863	26	0.09 137	9.89 040	10	59
2	9.79 918	16	9.90 889	26	0.09 111	9.89 030	10	58
3	9.79 934	16	9.90 914	25	0.09 086	9.89 020	11	57
4	9.79 950	16	9.90 940	26	0.09 060	9.89 009	10	56
		15		26			10	
5	9.79 965	16	9.90 966	26	0.09 034	9.88 999	10	55
6	9.79 981	16	9.90 992	26	0.09 008	9.88 989	11	54
7	9.79 996	15	9.91 018	25	0.08 982	9.88 978	10	53
8	9.80 012	16	9.91 043	25	0.08 957	9.88 968	10	52
9	9.80 027	15	9.91 069	26	0.08 931	9.88 958	10	51
		16		26			10	26 25
10	9.80 043	15	9.91 095	26	0.08 905	9.88 948	11	50
11	9.80 058	16	9.91 121	26	0.08 879	9.88 937	11	49
12	9.80 074	15	9.91 147	26	0.08 853	9.88 927	10	48
13	9.80 089	16	9.91 172	26	0.08 828	9.88 917	11	47
14	9.80 105	16	9.91 198	26	0.08 802	9.88 906	11	46
		15		26			10	
15	9.80 120	16	9.91 224	26	0.08 776	9.88 896	10	45
16	9.80 136	15	9.91 250	26	0.08 750	9.88 886	11	44
17	9.80 151	15	9.91 276	26	0.08 724	9.88 875	11	43
18	9.80 166	16	9.91 301	25	0.08 699	9.88 865	10	42
19	9.80 182	15	9.91 327	26	0.08 673	9.88 855	10	41
		16		26			11	
20	9.80 197	16	9.91 353	26	0.08 647	9.88 844	10	40
21	9.80 213	15	9.91 379	25	0.08 621	9.88 834	10	39
22	9.80 228	16	9.91 404	26	0.08 595	9.88 824	11	38
23	9.80 244	15	9.91 430	26	0.08 570	9.88 813	11	37
24	9.80 259	15	9.91 456	26	0.08 544	9.88 803	10	36
		16		26			10	
25	9.80 274	16	9.91 482	25	0.08 518	9.88 793	11	35
26	9.80 290	15	9.91 507	26	0.08 493	9.88 782	11	34
27	9.80 305	15	9.91 533	26	0.08 467	9.88 772	10	33
28	9.80 320	16	9.91 559	26	0.08 441	9.88 761	11	32
29	9.80 336	16	9.91 585	26	0.08 415	9.88 751	10	31
		15		25			10	
30	9.80 351	15	9.91 610	26	0.08 390	9.88 741	11	30
31	9.80 366	16	9.91 636	26	0.08 364	9.88 730	10	29
32	9.80 382	15	9.91 662	26	0.08 338	9.88 720	11	27
33	9.80 397	15	9.91 688	25	0.08 312	9.88 709	10	27
34	9.80 412	16	9.91 713	26	0.08 287	9.88 699	10	26
		16		26			11	
35	9.80 428	15	9.91 739	26	0.08 261	9.88 688	10	25
36	9.80 443	15	9.91 765	26	0.08 235	9.88 678	10	24
37	9.80 458	15	9.91 791	25	0.08 209	9.88 668	10	23
38	9.80 473	16	9.91 816	26	0.08 184	9.88 657	11	22
39	9.80 489	15	9.91 842	26	0.08 158	9.88 647	10	21
		16		26			11	
40	9.80 504	15	9.91 868	25	0.08 132	9.88 636	10	20
41	9.80 519	15	9.91 893	26	0.08 107	9.88 626	10	19
42	9.80 534	16	9.91 919	26	0.08 081	9.88 615	10	18
43	9.80 550	15	9.91 945	26	0.08 055	9.88 605	10	17
44	9.80 565	15	9.91 971	25	0.08 029	9.88 594	11	16
		16		25			10	
45	9.80 580	15	9.91 996	26	0.08 004	9.88 584	11	15
46	9.80 595	15	9.92 022	26	0.07 978	9.88 573	11	14
47	9.80 610	15	9.92 048	26	0.07 952	9.88 563	10	13
48	9.80 625	16	9.92 073	26	0.07 927	9.88 552	11	12
49	9.80 641	15	9.92 099	26	0.07 901	9.88 542	10	11
		16		26			11	
50	9.80 656	15	9.92 125	25	0.07 875	9.88 531	10	10
51	9.80 671	15	9.92 150	26	0.07 850	9.88 521	11	9
52	9.80 686	15	9.92 176	26	0.07 824	9.88 510	11	8
53	9.80 701	15	9.92 202	26	0.07 798	9.88 499	11	7
54	9.80 716	16	9.92 227	25	0.07 773	9.88 489	10	6
		15		26			11	
55	9.80 731	15	9.92 253	26	0.07 747	9.88 478	10	5
56	9.80 746	16	9.92 279	25	0.07 721	9.88 468	11	4
57	9.80 762	15	9.92 304	26	0.07 696	9.88 457	11	3
58	9.80 777	15	9.92 330	26	0.07 670	9.88 447	10	2
59	9.80 792	15	9.92 356	26	0.07 644	9.88 436	11	1
		16		25			11	
60	9.80 807		9.92 381		0.07 619	9.88 425	0	
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.80 807	15	9.92 381	26	0.07 619	9.88 425	10	60	
1	9.80 822	15	9.92 407	26	0.07 593	9.88 415	11	59	
2	9.80 837	15	9.92 433	25	0.07 567	9.88 404	11	58	
3	9.80 852	15	9.92 458	26	0.07 542	9.88 394	11	57	
4	9.80 867	15	9.92 484	26	0.07 516	9.88 383	11	56	
		15		26			11		
5	9.80 882	15	9.92 510	25	0.07 490	9.88 372	10	55	
6	9.80 897	15	9.92 535	26	0.07 465	9.88 362	11	54	
7	9.80 912	15	9.92 561	26	0.07 439	9.88 351	11	53	
8	9.80 927	15	9.92 587	25	0.07 413	9.88 340	11	52	
9	9.80 942	15	9.92 612	25	0.07 388	9.88 330	10	51	26 25
		15		26			11		
10	9.80 957	15	9.92 638	25	0.07 362	9.88 319	11	50	1   2.6 2.5
11	9.80 972	15	9.92 663	26	0.07 337	9.88 308	11	49	2   5.2 5.0
12	9.80 987	15	9.92 689	26	0.07 311	9.88 298	11	48	3   7.8 7.5
13	9.81 002	15	9.92 715	25	0.07 285	9.88 287	11	47	4   10.4 10.0
14	9.81 017	15	9.92 740	25	0.07 260	9.88 276	11	46	5   13.0 12.5
		15		26			10		6   15.6 15.0
15	9.81 032	15	9.92 766	26	0.07 234	9.88 266	11	45	7   18.2 17.5
16	9.81 047	14	9.92 792	25	0.07 208	9.88 255	11	44	8   20.8 20.0
17	9.81 061	15	9.92 817	26	0.07 183	9.88 244	11	43	9   23.4 22.5
18	9.81 076	15	9.92 843	25	0.07 157	9.88 234	11	42	
19	9.81 091	15	9.92 868	25	0.07 132	9.88 223	11	41	
		15		26			11		
20	9.81 106	15	9.92 894	26	0.07 106	9.88 212	11	40	
21	9.81 121	15	9.92 920	25	0.07 080	9.88 201	10	39	
22	9.81 136	15	9.92 945	25	0.07 055	9.88 191	11	38	
23	9.81 151	15	9.92 971	26	0.07 029	9.88 180	11	37	
24	9.81 166	15	9.92 996	25	0.07 004	9.88 169	11	36	
		14		26			11		
25	9.81 180	15	9.93 022	26	0.06 978	9.88 158	10	35	
26	9.81 195	15	9.93 048	25	0.06 952	9.88 148	11	34	15 14
27	9.81 210	15	9.93 073	26	0.06 927	9.88 137	11	33	
28	9.81 225	15	9.93 099	25	0.06 901	9.88 126	11	32	1   1.5 1.4
29	9.81 240	15	9.93 124	25	0.06 876	9.88 115	11	31	2   3.0 2.8
		14		26			10		3   4.5 4.2
30	9.81 254	15	9.93 150	25	0.06 850	9.88 105	11	30	4   6.0 5.6
31	9.81 269	15	9.93 175	26	0.06 825	9.88 094	11	29	5   7.5 7.0
32	9.81 284	15	9.93 201	26	0.06 799	9.88 083	11	28	6   9.0 8.4
33	9.81 299	15	9.93 227	25	0.06 773	9.88 072	11	27	7   10.5 9.8
34	9.81 314	15	9.93 252	25	0.06 748	9.88 061	11	26	8   12.0 11.2
		14		26			10		9   13.5 12.6
35	9.81 328	15	9.93 278	25	0.06 722	9.88 051	11	25	
36	9.81 343	15	9.93 303	26	0.06 697	9.88 040	11	24	
37	9.81 358	15	9.93 329	25	0.06 671	9.88 029	11	23	
38	9.81 372	15	9.93 354	26	0.06 646	9.88 018	11	22	
39	9.81 387	15	9.93 380	26	0.06 620	9.88 007	11	21	
		15		26			11		
40	9.81 402	15	9.93 406	25	0.06 594	9.87 996	11	20	
41	9.81 417	15	9.93 431	26	0.06 569	9.87 985	11	19	
42	9.81 431	14	9.93 457	25	0.06 543	9.87 975	11	18	
43	9.81 446	15	9.93 482	26	0.06 518	9.87 964	11	17	
44	9.81 461	15	9.93 508	26	0.06 492	9.87 953	11	16	11 10
		14		25			11		
45	9.81 475	15	9.93 533	26	0.06 467	9.87 942	11	15	1   1.1 1.0
46	9.81 490	15	9.93 559	25	0.06 441	9.87 931	11	14	2   2.2 2.0
47	9.81 505	14	9.93 584	26	0.06 416	9.87 920	11	13	3   3.3 3.0
48	9.81 519	15	9.93 610	26	0.06 390	9.87 909	11	12	4   4.4 4.0
49	9.81 534	15	9.93 636	25	0.06 364	9.87 898	11	11	5   5.5 5.0
		15		25			11		6   6.6 6.0
50	9.81 549	14	9.93 661	26	0.06 339	9.87 887	10	10	7   7.7 7.0
51	9.81 563	15	9.93 687	25	0.06 313	9.87 877	11	9	8   8.8 8.0
52	9.81 578	15	9.93 712	26	0.06 288	9.87 866	11	8	9   9.9 9.0
53	9.81 592	15	9.93 738	25	0.06 262	9.87 855	11	7	
54	9.81 607	15	9.93 763	25	0.06 237	9.87 844	11	6	
		15		26			11		
55	9.81 622	14	9.93 789	25	0.06 211	9.87 833	11	5	
56	9.81 636	15	9.93 814	26	0.06 186	9.87 822	11	4	
57	9.81 651	15	9.93 840	25	0.06 160	9.87 811	11	3	
58	9.81 665	14	9.93 865	25	0.06 135	9.87 800	11	2	
59	9.81 680	15	9.93 891	26	0.06 109	9.87 789	11	1	
		14		25			11		
60	9.81 694		9.93 916		0.06 084	9.87 778			
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	'	PP

	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.81 694	15	9.93 916	26	0.06 084	9.87 778	11	<b>60</b>	
1	9.81 709	14	9.93 942	25	0.06 058	9.87 767	11	59	
2	9.81 723	15	9.93 967	26	0.06 033	9.87 756	11	58	
3	9.81 738	15	9.93 993	25	0.06 007	9.87 745	11	57	
4	9.81 752	14	9.94 018	25	0.05 982	9.87 734	11	56	
				26			11		
5	9.81 767	14	9.94 044	25	0.05 956	9.87 723	11	<b>55</b>	
6	9.81 781	15	9.94 069	26	0.05 931	9.87 712	11	54	
7	9.81 796	14	9.94 095	25	0.05 905	9.87 701	11	53	
8	9.81 810	15	9.94 120	26	0.05 880	9.87 690	11	52	
9	9.81 825	14	9.94 146	25	0.05 854	9.87 679	11	51	<b>26 25</b>
		15		25			11		
10	9.81 839	15	9.94 171	26	0.05 829	9.87 668	11	<b>50</b>	1   2.6 2.5
11	9.81 854	14	9.94 197	25	0.05 803	9.87 657	11	49	2   5.2 5.0
12	9.81 868	15	9.94 222	26	0.05 778	9.87 646	11	48	3   7.8 7.5
13	9.81 882	14	9.94 248	25	0.05 752	9.87 635	11	47	4   10.4 10.0
14	9.81 897	15	9.94 273	26	0.05 727	9.87 624	11	46	5   13.0 12.5
		14		26			11		6   15.6 15.0
15	9.81 911	15	9.94 299	25	0.05 701	9.87 613	12	<b>45</b>	7   18.2 17.5
16	9.81 926	14	9.94 324	26	0.05 676	9.87 601	11	44	8   20.8 20.0
17	9.81 940	15	9.94 350	25	0.05 650	9.87 590	11	43	9   23.4 22.5
18	9.81 955	14	9.94 375	26	0.05 625	9.87 579	11	42	
19	9.81 969	14	9.94 401	25	0.05 599	9.87 568	11	41	
		15		25			11		
20	9.81 983	15	9.94 426	26	0.05 574	9.87 557	11	<b>40</b>	
21	9.81 998	14	9.94 452	25	0.05 548	9.87 546	11	39	
22	9.82 012	14	9.94 477	26	0.05 523	9.87 535	11	38	
23	9.82 026	14	9.94 503	25	0.05 497	9.87 524	11	37	
24	9.82 041	15	9.94 528	25	0.05 472	9.87 513	11	36	
		14		26			12		
25	9.82 055	14	9.94 554	25	0.05 446	9.87 501	11	<b>35</b>	
26	9.82 069	15	9.94 579	25	0.05 421	9.87 490	11	34	<b>15 14</b>
27	9.82 084	14	9.94 604	26	0.05 396	9.87 479	11	33	
28	9.82 098	14	9.94 630	25	0.05 370	9.87 468	11	32	1   1.5 1.4
29	9.82 112	14	9.94 655	25	0.05 345	9.87 457	11	31	2   3.0 2.8
		14		26			11		3   4.5 4.2
30	9.82 126	15	9.94 681	25	0.05 319	9.87 446	12	<b>30</b>	4   6.0 5.6
31	9.82 141	14	9.94 706	26	0.05 294	9.87 434	11	29	5   7.5 7.0
32	9.82 155	14	9.94 732	25	0.05 268	9.87 423	11	28	6   9.0 8.4
33	9.82 169	15	9.94 757	26	0.05 243	9.87 412	11	27	7   10.5 9.8
34	9.82 184	14	9.94 783	25	0.05 217	9.87 401	11	26	8   12.0 11.2
		15		25			11		9   13.5 12.6
35	9.82 198	14	9.94 808	26	0.05 192	9.87 390	12	<b>25</b>	
36	9.82 212	14	9.94 834	25	0.05 166	9.87 378	11	24	
37	9.82 226	14	9.94 859	25	0.05 141	9.87 367	11	23	
38	9.82 240	14	9.94 884	26	0.05 116	9.87 356	11	22	
39	9.82 255	15	9.94 910	25	0.05 090	9.87 345	11	21	
		14		25			11		
40	9.82 269	14	9.94 935	26	0.05 065	9.87 334	12	<b>20</b>	
41	9.82 283	14	9.94 961	25	0.05 039	9.87 322	11	19	
42	9.82 297	14	9.94 986	26	0.05 014	9.87 311	11	18	
43	9.82 311	15	9.95 012	25	0.04 988	9.87 300	11	17	
44	9.82 326	15	9.95 037	25	0.04 963	9.87 288	12	16	<b>12 11</b>
		14		25			11		
45	9.82 340	14	9.95 062	26	0.04 938	9.87 277	11	<b>15</b>	1   1.2 1.1
46	9.82 354	14	9.95 088	25	0.04 912	9.87 266	11	14	2   2.4 2.2
47	9.82 368	14	9.95 113	26	0.04 887	9.87 255	12	13	3   3.6 3.3
48	9.82 382	14	9.95 139	25	0.04 861	9.87 243	11	12	4   4.8 4.4
49	9.82 396	14	9.95 164	26	0.04 836	9.87 232	11	11	5   6.0 5.5
		14		26			11		6   7.2 6.6
50	9.82 410	14	9.95 190	25	0.04 810	9.87 221	12	<b>10</b>	7   8.4 7.7
51	9.82 424	14	9.95 215	25	0.04 785	9.87 209	11	9	8   9.6 8.8
52	9.82 439	15	9.95 240	26	0.04 760	9.87 198	11	8	9   10.8 9.9
53	9.82 453	14	9.95 266	25	0.04 734	9.87 187	11	7	
54	9.82 467	14	9.95 291	26	0.04 709	9.87 175	12	6	
		14		26			11		
55	9.82 481	14	9.95 317	25	0.04 683	9.87 164	11	<b>5</b>	
56	9.82 495	14	9.95 342	26	0.04 658	9.87 153	12	4	
57	9.82 509	14	9.95 368	25	0.04 632	9.87 141	11	3	
58	9.82 523	14	9.95 393	25	0.04 607	9.87 130	11	2	
59	9.82 537	14	9.95 418	25	0.04 582	9.87 119	11	1	
		14		26			12		
60	9.82 551		9.95 444		0.04 556	9.87 107		<b>0</b>	
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d		PP

'	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.82 551	14	9.95 444	25	0.04 556	9.87 107	11	60
1	9.82 565	14	9.95 469	25	0.04 531	9.87 096	11	59
2	9.82 579	14	9.95 495	26	0.04 505	9.87 085	11	58
3	9.82 593	14	9.95 520	25	0.04 480	9.87 073	12	57
4	9.82 607	14	9.95 545	25	0.04 455	9.87 062	11	56
		14		26			12	
5	9.82 621	14	9.95 571	25	0.04 429	9.87 050	11	55
6	9.82 635	14	9.95 596	26	0.04 404	9.87 039	11	54
7	9.82 649	14	9.95 622	25	0.04 378	9.87 028	12	53
8	9.82 663	14	9.95 647	25	0.04 353	9.87 016	11	52
9	9.82 677	14	9.95 672	25	0.04 328	9.87 005	11	51
		14		26			12	26 25
10	9.82 691	14	9.95 698	25	0.04 302	9.86 993	11	50
11	9.82 705	14	9.95 723	25	0.04 277	9.86 982	11	49
12	9.82 719	14	9.95 748	25	0.04 252	9.86 970	12	48
13	9.82 733	14	9.95 774	26	0.04 226	9.86 959	11	47
14	9.82 747	14	9.95 799	25	0.04 201	9.86 947	12	46
		14		26			11	
15	9.82 761	14	9.95 825	25	0.04 175	9.86 936	12	45
16	9.82 775	13	9.95 850	25	0.04 150	9.86 924	11	44
17	9.82 788	14	9.95 875	25	0.04 125	9.86 913	11	43
18	9.82 802	14	9.95 901	26	0.04 099	9.86 902	11	42
19	9.82 816	14	9.95 926	25	0.04 074	9.86 890	12	41
		14		26			11	
20	9.82 830	14	9.95 952	25	0.04 048	9.86 879	12	40
21	9.82 844	14	9.95 977	25	0.04 023	9.86 867	12	39
22	9.82 858	14	9.96 002	25	0.03 998	9.86 855	12	38
23	9.82 872	14	9.96 028	26	0.03 972	9.86 844	11	37
24	9.82 885	13	9.96 053	25	0.03 947	9.86 832	12	36
		14		25			11	
25	9.82 899	14	9.96 078	26	0.03 922	9.86 821	12	35
26	9.82 913	14	9.96 104	25	0.03 896	9.86 809	12	34
27	9.82 927	14	9.96 129	25	0.03 871	9.86 798	11	33
28	9.82 941	14	9.96 155	26	0.03 845	9.86 786	12	32
29	9.82 955	14	9.96 180	25	0.03 820	9.86 775	11	31
		13		25			12	
30	9.82 968	14	9.96 205	26	0.03 795	9.86 763	11	30
31	9.82 982	14	9.96 231	25	0.03 769	9.86 752	12	29
32	9.82 996	14	9.96 256	25	0.03 744	9.86 740	12	28
33	9.83 010	13	9.96 281	26	0.03 719	9.86 728	11	27
34	9.83 023	14	9.96 307	25	0.03 693	9.86 717	12	26
		14		25			12	
35	9.83 037	14	9.96 332	25	0.03 668	9.86 705	11	25
36	9.83 051	14	9.96 357	25	0.03 643	9.86 694	11	24
37	9.83 065	14	9.96 383	26	0.03 617	9.86 682	12	23
38	9.83 078	13	9.96 408	25	0.03 592	9.86 670	12	22
39	9.83 092	14	9.96 433	25	0.03 567	9.86 659	11	21
		14		26			12	
40	9.83 106	14	9.96 459	25	0.03 541	9.86 647	12	20
41	9.83 120	13	9.96 484	26	0.03 516	9.86 635	11	19
42	9.83 133	14	9.96 510	25	0.03 490	9.86 624	11	18
43	9.83 147	14	9.96 535	25	0.03 465	9.86 612	12	17
44	9.83 161	13	9.96 560	26	0.03 440	9.86 600	12	16
		13		20			11	12 11
45	9.83 174	14	9.96 586	25	0.03 414	9.86 589	12	15
46	9.83 188	14	9.96 611	25	0.03 389	9.86 577	12	14
47	9.83 202	14	9.96 636	26	0.03 364	9.86 565	12	13
48	9.83 215	13	9.96 662	25	0.03 338	9.86 554	11	12
49	9.83 229	14	9.96 687	25	0.03 313	9.86 542	12	11
		13		25			12	
50	9.83 242	14	9.96 712	26	0.03 288	9.86 530	12	10
51	9.83 256	14	9.96 738	25	0.03 262	9.86 518	11	9
52	9.83 270	13	9.96 763	25	0.03 237	9.86 507	12	8
53	9.83 283	14	9.96 788	26	0.03 212	9.86 495	12	7
54	9.83 297	13	9.96 814	25	0.03 186	9.86 483	12	6
		13		25			11	
55	9.83 310	14	9.96 839	25	0.03 161	9.86 472	12	5
56	9.83 324	14	9.96 864	26	0.03 136	9.86 460	12	4
57	9.83 338	13	9.96 890	25	0.03 110	9.86 448	12	3
58	9.83 351	14	9.96 915	25	0.03 085	9.86 436	12	2
59	9.83 365	13	9.96 940	26	0.03 060	9.86 425	11	1
		13		26			12	
60	9.83 378		9.96 966		0.03 034	9.86 413		0
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d	PP



'	L Sin	d	L Tan	c d	L Cot	L Cos	d	PP
0	9.83 378	14	9.96 966	25	0.03 034	9.86 413	12	60
1	9.83 392	13	9.96 991	25	0.03 009	9.86 401	12	59
2	9.83 405	14	9.97 016	26	0.02 984	9.86 389	12	58
3	9.83 419	13	9.97 042	25	0.02 958	9.86 377	11	57
4	9.83 432	13	9.97 067	25	0.02 933	9.86 366	11	56
		14		25			12	
5	9.83 446	13	9.97 092	26	0.02 908	9.86 354	12	55
6	9.83 459	14	9.97 118	25	0.02 882	9.86 342	12	54
7	9.83 473	13	9.97 143	25	0.02 857	9.86 330	12	53
8	9.83 486	14	9.97 168	25	0.02 832	9.86 318	12	52
9	9.83 500	13	9.97 193	25	0.02 807	9.86 306	12	51
		13		26			11	26 25
10	9.83 513	14	9.97 219	25	0.02 781	9.86 295	12	50
11	9.83 527	13	9.97 244	25	0.02 756	9.86 283	12	49
12	9.83 540	14	9.97 269	26	0.02 731	9.86 271	12	48
13	9.83 554	13	9.97 295	25	0.02 705	9.86 259	12	47
14	9.83 567	13	9.97 320	25	0.02 680	9.86 247	12	46
		14		25			12	
15	9.83 581	13	9.97 345	26	0.02 655	9.86 235	12	45
16	9.83 594	14	9.97 371	25	0.02 629	9.86 223	12	44
17	9.83 608	13	9.97 396	25	0.02 604	9.86 211	11	43
18	9.83 621	13	9.97 421	26	0.02 579	9.86 200	12	42
19	9.83 634	14	9.97 447	25	0.02 553	9.86 188	12	41
		14		25			12	
20	9.83 648	13	9.97 472	25	0.02 528	9.86 176	12	40
21	9.83 661	13	9.97 497	26	0.02 503	9.86 164	12	39
22	9.83 674	14	9.97 523	25	0.02 477	9.86 152	12	38
23	9.83 688	13	9.97 548	25	0.02 452	9.86 140	12	37
24	9.83 701	13	9.97 573	25	0.02 427	9.86 128	12	36
		14		25			12	
25	9.83 715	13	9.97 598	26	0.02 402	9.86 116	12	35
26	9.83 728	13	9.97 624	25	0.02 376	9.86 104	12	34
27	9.83 741	13	9.97 649	25	0.02 351	9.86 092	12	33
28	9.83 755	14	9.97 674	26	0.02 326	9.86 080	12	32
29	9.83 768	13	9.97 700	25	0.02 300	9.86 068	12	31
		13		25			12	
30	9.83 781	14	9.97 725	25	0.02 275	9.86 056	12	30
31	9.83 795	13	9.97 750	25	0.02 250	9.86 044	12	29
32	9.83 808	13	9.97 776	26	0.02 224	9.86 032	12	28
33	9.83 821	13	9.97 801	25	0.02 199	9.86 020	12	27
34	9.83 834	13	9.97 826	25	0.02 174	9.86 008	12	26
		14		25			12	
35	9.83 848	13	9.97 851	26	0.02 149	9.85 996	12	25
36	9.83 861	13	9.97 877	25	0.02 123	9.85 984	12	24
37	9.83 874	13	9.97 902	25	0.02 098	9.85 972	12	23
38	9.83 887	14	9.97 927	26	0.02 073	9.85 960	12	22
39	9.83 901	13	9.97 953	25	0.02 047	9.85 948	12	21
		13		25			12	
40	9.83 914	13	9.97 978	25	0.02 022	9.85 936	12	20
41	9.83 927	13	9.98 003	26	0.01 997	9.85 924	12	19
42	9.83 940	14	9.98 029	25	0.01 971	9.85 912	12	18
43	9.83 954	13	9.98 054	25	0.01 946	9.85 900	12	17
44	9.83 967	13	9.98 079	25	0.01 921	9.85 888	12	16
		13		25			12	12 11
45	9.83 980	13	9.98 104	26	0.01 896	9.85 876	12	15
46	9.83 993	13	9.98 130	25	0.01 870	9.85 864	13	14
47	9.84 006	13	9.98 155	25	0.01 845	9.85 851	13	13
48	9.84 020	14	9.98 180	26	0.01 820	9.85 839	12	12
49	9.84 033	13	9.98 206	25	0.01 794	9.85 827	12	11
		13		25			12	
50	9.84 046	13	9.98 231	25	0.01 769	9.85 815	12	10
51	9.84 059	13	9.98 256	25	0.01 744	9.85 803	12	9
52	9.84 072	13	9.98 281	26	0.01 719	9.85 791	12	8
53	9.84 085	13	9.98 307	25	0.01 693	9.85 779	13	7
54	9.84 098	14	9.98 332	25	0.01 668	9.85 766	13	6
		14		25			12	
55	9.84 112	13	9.98 357	26	0.01 643	9.85 754	12	5
56	9.84 125	13	9.98 383	25	0.01 617	9.85 742	12	4
57	9.84 138	13	9.98 408	25	0.01 592	9.85 730	12	3
58	9.84 151	13	9.98 433	25	0.01 567	9.85 718	12	2
59	9.84 164	13	9.98 458	25	0.01 542	9.85 706	12	1
		13		26			13	
60	9.84 177		9.98 484		0.01 516	9.85 693		0
	L Cos	d	L Cot	c d	L Tan	L Sin	d	PP

	L Sin	d	L Tan	cd	L Cot	L Cos	d		PP
0	9.84 177	13	9.98 484	25	0.01 516	9.85 693	12	60	
1	9.84 190	13	9.98 509	25	0.01 491	9.85 681	12	59	
2	9.84 203	13	9.98 534	26	0.01 466	9.85 669	12	58	
3	9.84 216	13	9.98 560	25	0.01 440	9.85 657	12	57	
4	9.84 229	13	9.98 585	25	0.01 415	9.85 645	12	56	
		13		25			13		
5	9.84 242	13	9.98 610	25	0.01 390	9.85 632	12	55	
6	9.84 255	14	9.98 635	26	0.01 365	9.85 620	12	54	
7	9.84 269	13	9.98 661	25	0.01 339	9.85 608	12	53	
8	9.84 282	13	9.98 686	25	0.01 314	9.85 596	13	52	
9	9.84 295	13	9.98 711	25	0.01 289	9.85 583	12	51	
		13		26			12		
10	9.84 308	13	9.98 737	25	0.01 263	9.85 571	12	50	
11	9.84 321	13	9.98 762	25	0.01 238	9.85 559	12	49	
12	9.84 334	13	9.98 787	25	0.01 213	9.85 547	12	48	
13	9.84 347	13	9.98 812	26	0.01 188	9.85 534	12	47	
14	9.84 360	13	9.98 838	25	0.01 162	9.85 522	12	46	
		13		25			12		26 25 14
15	9.84 373	12	9.98 863	25	0.01 137	9.85 510	13	45	
16	9.84 385	12	9.98 888	25	0.01 112	9.85 497	12	44	1 2.6 2.5 1.4
17	9.84 398	13	9.98 913	26	0.01 087	9.85 485	12	43	2 5.2 5.0 2.8
18	9.84 411	13	9.98 939	25	0.01 061	9.85 473	12	42	3 7.8 7.6 4.2
19	9.84 424	13	9.98 964	25	0.01 036	9.85 460	13	41	4 10.4 10.0 5.6
		13		25			12		5 13.0 12.5 7.0
20	9.84 437	13	9.98 989	26	0.01 011	9.85 448	12	40	6 15.8 15.0 8.4
21	9.84 450	13	9.99 015	25	0.00 985	9.85 436	13	39	7 18.2 17.5 9.8
22	9.84 463	13	9.99 040	25	0.00 960	9.85 423	13	38	8 20.8 20.0 11.2
23	9.84 476	13	9.99 065	25	0.00 935	9.85 411	12	37	9 23.4 22.5 12.6
24	9.84 489	13	9.99 090	26	0.00 910	9.85 399	13	36	
		13		26			13		
25	9.84 502	13	9.99 116	25	0.00 884	9.85 386	12	35	
26	9.84 515	13	9.99 141	25	0.00 859	9.85 374	12	34	
27	9.84 528	13	9.99 166	25	0.00 834	9.85 361	12	33	
28	9.84 540	13	9.99 191	25	0.00 809	9.85 349	12	32	
29	9.84 553	13	9.99 217	26	0.00 783	9.85 337	12	31	
		13		25			13		
30	9.84 566	13	9.99 242	25	0.00 758	9.85 324	12	30	
31	9.84 579	13	9.99 267	26	0.00 733	9.85 312	13	29	
32	9.84 592	13	9.99 293	25	0.00 707	9.85 299	12	28	
33	9.84 605	13	9.99 318	25	0.00 682	9.85 287	13	27	
34	9.84 618	12	9.99 343	25	0.00 657	9.85 274	12	26	
		12		25			12		
35	9.84 630	13	9.99 368	26	0.00 632	9.85 262	12	25	
36	9.84 643	13	9.99 394	25	0.00 606	9.85 250	12	24	
37	9.84 656	13	9.99 419	25	0.00 581	9.85 237	13	23	
38	9.84 669	13	9.99 444	25	0.00 556	9.85 225	12	22	
39	9.84 682	13	9.99 469	25	0.00 531	9.85 212	13	21	
		12		26			12		13 12
40	9.84 694	13	9.99 495	25	0.00 505	9.85 200	13	20	1 1.3 1.2
41	9.84 707	13	9.99 520	25	0.00 480	9.85 187	12	19	2 2.6 2.4
42	9.84 720	13	9.99 545	25	0.00 455	9.85 175	13	18	3 3.9 3.6
43	9.84 733	12	9.99 570	26	0.00 430	9.85 162	12	17	4 5.2 4.8
44	9.84 745	13	9.99 596	25	0.00 404	9.85 150	12	16	5 6.5 6.0
		13		25			13		6 7.8 7.2
45	9.84 758	13	9.99 621	25	0.00 379	9.85 137	12	15	7 9.1 8.4
46	9.84 771	13	9.99 646	25	0.00 354	9.85 125	12	14	8 10.4 9.6
47	9.84 784	13	9.99 672	26	0.00 328	9.85 112	13	13	9 11.7 10.8
48	9.84 796	12	9.99 697	25	0.00 303	9.85 100	12	12	
49	9.84 809	13	9.99 722	25	0.00 278	9.85 087	13	11	
		13		25			13		
50	9.84 822	13	9.99 747	26	0.00 253	9.85 074	12	10	
51	9.84 835	12	9.99 773	25	0.00 227	9.85 062	13	9	
52	9.84 847	13	9.99 798	25	0.00 202	9.85 049	12	8	
53	9.84 860	13	9.99 823	25	0.00 177	9.85 037	13	7	
54	9.84 873	12	9.99 848	26	0.00 152	9.85 024	12	6	
		12		26			12		
55	9.84 885	13	9.99 874	25	0.00 126	9.85 012	13	5	
56	9.84 898	13	9.99 899	25	0.00 101	9.84 999	13	4	
57	9.84 911	12	9.99 924	25	0.00 076	9.84 986	12	3	
58	9.84 923	13	9.99 949	26	0.00 051	9.84 974	13	2	
59	9.84 936	13	9.99 975	25	0.00 025	9.84 961	12	1	
		13		25			12		
60	9.84 949		0.00 000		0.00 000	9.84 949		0	
	L Cos	d	L Cot	cd	L Tan	L Sin	d		PP

表 III

自 $0^{\circ}$ 至 $90^{\circ}$ 每分之三角自然函數之值



	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.00000	.00000	∞	1.0000	60
1	.029	.029	3437.7	.000	59
2	.058	.058	1718.9	.000	58
3	.087	.087	1145.9	.000	57
4	.116	.116	859.44	.000	56
5	.00145	.00145	687.55	1.0000	55
6	.175	.175	572.96	.000	54
7	.204	.204	491.11	.000	53
8	.233	.233	429.72	.000	52
9	.262	.262	381.97	.000	51
10	.00291	.00291	343.77	1.0000	50
11	.320	.320	312.52	.99999	49
12	.349	.349	286.48	.999	48
13	.378	.378	264.44	.999	47
14	.407	.407	245.55	.999	46
15	.00436	.00436	229.18	.99999	45
16	.465	.465	214.86	.999	44
17	.495	.495	202.22	.999	43
18	.524	.524	190.98	.999	42
19	.553	.553	180.93	.998	41
20	.00582	.00582	171.89	.99998	40
21	.611	.611	163.70	.998	39
22	.640	.640	156.26	.998	38
23	.669	.669	149.47	.998	37
24	.698	.698	143.24	.998	36
25	.00727	.00727	137.51	.99997	35
26	.756	.756	132.22	.997	34
27	.785	.785	127.32	.997	33
28	.814	.814	122.77	.997	32
29	.844	.844	118.54	.996	31
30	.00873	.00873	114.59	.99996	30
31	.902	.902	110.89	.996	29
32	.931	.931	107.43	.996	28
33	.960	.960	104.17	.995	27
34	.00989	.00989	101.11	.995	26
35	.01018	.01018	98.218	.99995	25
36	.047	.047	95.489	.995	24
37	.076	.076	92.908	.994	23
38	.105	.105	90.463	.994	22
39	.134	.135	88.144	.994	21
40	.01164	.01164	85.940	.99993	20
41	.193	.193	83.844	.993	19
42	.222	.222	81.847	.993	18
43	.251	.251	79.943	.992	17
44	.280	.280	78.126	.992	16
45	.01309	.01309	76.390	.99991	15
46	.338	.338	74.729	.991	14
47	.367	.367	73.139	.991	13
48	.396	.396	71.615	.990	12
49	.425	.425	70.153	.990	11
50	.01454	.01455	68.750	.99989	10
51	.483	.484	67.402	.989	9
52	.513	.513	66.105	.989	8
53	.542	.542	64.858	.988	7
54	.571	.571	63.657	.988	6
55	.01600	.01600	62.499	.99987	5
56	.629	.629	61.383	.987	4
57	.658	.658	60.306	.986	3
58	.687	.687	59.266	.986	2
59	.716	.716	58.261	.985	1
60	.01745	.01746	57.290	.99985	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.01745	.01746	57.290	.99985	60
1	.774	.775	56.351	.984	59
2	.803	.804	55.442	.984	58
3	.832	.833	54.561	.983	57
4	.862	.862	53.709	.983	56
5	.01891	.01891	52.882	.99982	55
6	.920	.920	52.081	.982	54
7	.949	.949	51.303	.981	53
8	.01978	.01978	50.540	.980	52
9	.02007	.02007	49.816	.980	51
10	.02036	.02036	49.104	.99979	50
11	.065	.066	48.412	.979	49
12	.094	.095	47.740	.978	48
13	.123	.124	47.085	.977	47
14	.152	.153	46.449	.977	46
15	.02181	.02182	45.829	.99976	45
16	.211	.211	45.226	.976	44
17	.240	.240	44.639	.975	43
18	.269	.269	44.066	.974	42
19	.298	.298	43.508	.974	41
20	.02327	.02328	42.964	.99973	40
21	.356	.357	42.433	.973	39
22	.385	.386	41.916	.972	38
23	.414	.415	41.411	.971	37
24	.443	.444	40.917	.970	36
25	.02472	.02473	40.436	.99969	35
26	.501	.502	39.965	.969	34
27	.530	.531	39.506	.968	33
28	.560	.560	39.057	.967	32
29	.589	.589	38.618	.966	31
30	.02618	.02619	38.188	.99966	30
31	.647	.648	37.769	.965	29
32	.676	.677	37.358	.964	28
33	.705	.706	36.956	.963	27
34	.734	.735	36.563	.963	26
35	.02763	.02764	36.178	.99962	25
36	.792	.793	35.801	.961	24
37	.821	.822	35.431	.960	23
38	.850	.851	35.070	.959	22
39	.879	.881	34.715	.959	21
40	.02908	.02910	34.368	.99958	20
41	.938	.939	34.027	.957	19
42	.967	.968	33.694	.956	18
43	.02996	.02997	33.366	.955	17
44	.03025	.03026	33.045	.954	16
45	.03054	.03055	32.730	.99953	15
46	.083	.084	32.421	.952	14
47	.112	.114	32.118	.952	13
48	.141	.143	31.821	.951	12
49	.170	.172	31.528	.950	11
50	.03199	.03201	31.242	.99949	10
51	.228	.230	30.960	.948	9
52	.257	.259	30.683	.947	8
53	.286	.288	30.412	.946	7
54	.316	.317	30.145	.945	6
55	.03345	.03346	29.882	.99944	5
56	.374	.376	29.624	.943	4
57	.403	.405	29.371	.942	3
58	.432	.434	29.122	.941	2
59	.461	.463	28.877	.940	1
60	.03490	.03492	28.636	.99939	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.03490	.03492	28.636	.99939	00
1	519	521	.399	938	59
2	548	550	28.166	937	58
3	577	579	27.937	936	57
4	606	609	.712	935	56
5	.03635	.03638	27.490	.99934	55
6	664	667	.271	933	54
7	693	696	27.057	932	53
8	723	725	26.845	931	52
9	752	754	.637	930	51
10	.03781	.03783	26.432	.99929	50
11	810	812	.230	927	49
12	839	842	26.031	926	48
13	868	871	25.835	925	47
14	897	900	.642	924	46
15	.03926	.03929	25.452	.99923	45
16	955	958	.264	922	44
17	.03984	.03987	25.080	921	43
18	.04013	.04016	24.898	919	42
19	042	046	.719	918	41
20	.04071	.04075	24.542	.99917	40
21	100	104	.368	916	39
22	129	133	.196	915	38
23	159	162	24.026	913	37
24	188	191	23.859	912	36
25	.04217	.04220	23.695	.99911	35
26	246	250	.532	910	34
27	275	279	.372	909	33
28	304	308	.214	907	32
29	333	337	23.058	906	31
30	.04362	.04366	22.904	.99905	30
31	391	395	.752	904	29
32	420	424	.602	902	28
33	449	454	.454	901	27
34	478	483	.308	900	26
35	.04507	.04512	22.164	.99898	25
36	536	541	22.022	897	24
37	565	570	21.881	896	23
38	594	599	.743	894	22
39	623	628	.606	893	21
40	.04653	.04658	21.470	.99892	20
41	682	687	.337	890	19
42	711	716	.205	889	18
43	740	745	21.075	888	17
44	769	774	20.946	886	16
45	.04798	.04803	20.819	.99885	15
46	827	833	.693	883	14
47	856	862	.569	882	13
48	885	891	.446	881	12
49	914	920	.325	879	11
50	.04943	.04949	20.206	.99878	10
51	.04972	.04978	20.087	876	9
52	.05001	.05007	19.970	875	8
53	030	037	.855	873	7
54	059	066	.740	872	6
55	.05088	.05095	19.627	.99870	5
56	117	124	.516	869	4
57	146	153	.405	867	3
58	175	182	.296	866	2
59	205	212	.188	864	1
60	.05234	.05241	19.081	.99863	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.05234	.05241	19.081	.99863	00
1	263	.270	18.976	861	59
2	292	.299	.871	860	58
3	321	.328	.768	858	57
4	350	.357	.666	857	56
5	.05379	.05387	18.564	.99855	55
6	408	.416	.464	854	54
7	437	.445	.366	852	53
8	466	.474	.268	851	52
9	495	.503	.171	849	51
10	.05524	.05533	18.075	.99847	50
11	553	.562	17.980	846	49
12	582	.591	.886	844	48
13	611	.620	.793	842	47
14	640	.649	.702	841	46
15	.05669	.05678	17.611	.99839	45
16	698	.708	.521	838	44
17	727	.737	.431	836	43
18	756	.766	.343	834	42
19	785	.795	.256	833	41
20	.05814	.05824	17.169	.99831	40
21	844	.854	17.084	829	39
22	873	.883	16.999	827	38
23	902	.912	.915	826	37
24	931	.941	.832	824	36
25	.05960	.05970	16.750	.99822	35
26	05989	.05999	.668	821	34
27	.06018	.06029	.587	819	33
28	047	.058	.507	817	32
29	076	.087	.428	815	31
30	.06105	.06116	16.350	.99813	30
31	134	.145	.272	812	29
32	163	.175	.195	810	28
33	192	.204	.119	808	27
34	221	.233	16.043	806	26
35	.06250	.06262	15.969	.99804	25
36	279	.291	.895	803	24
37	308	.321	.821	801	23
38	337	.350	.748	799	22
39	366	.379	.676	797	21
40	.06395	.06408	15.605	.99795	20
41	424	.438	.534	793	19
42	453	.467	.464	792	18
43	482	.496	.394	790	17
44	511	.525	.325	788	16
45	.06540	.06554	15.257	.99786	15
46	569	.584	.189	784	14
47	598	.613	.122	782	13
48	627	.642	15.056	780	12
49	656	.671	14.990	778	11
50	.06685	.06700	14.924	.99776	10
51	714	.730	.860	774	9
52	743	.759	.795	772	8
53	773	.788	.732	770	7
54	802	.817	.669	768	6
55	.06831	.06847	14.606	.99766	5
56	860	.876	.544	764	4
57	889	.905	.482	762	3
58	918	.934	.421	760	2
59	947	.963	.361	758	1
60	.06976	.06993	14.301	.99756	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.06976	.06993	14.301	.99756	60
1	.07005	.07022	.241	754	59
2	.034	.051	.182	752	58
3	.063	.080	.124	750	57
4	.092	.110	.065	748	56
5	.07121	.07139	14.008	.99746	55
6	.150	.163	13.951	744	54
7	.179	.197	.894	742	53
8	.208	.227	.838	740	52
9	.237	.256	.782	738	51
10	.07266	.07285	13.727	.99736	50
11	.295	.314	.672	734	49
12	.324	.344	.617	731	48
13	.353	.373	.563	729	47
14	.382	.402	.510	727	46
15	.07411	.07431	13.457	.99725	45
16	.440	.461	.404	723	44
17	.469	.490	.352	721	43
18	.498	.519	.300	719	42
19	.527	.548	.248	716	41
20	.07556	.07578	13.197	.99714	40
21	.585	.607	.146	712	39
22	.614	.636	.096	710	38
23	.643	.665	13.046	708	37
24	.672	.695	12.996	705	36
25	.07701	.07724	12.947	.99703	35
26	.730	.753	.898	701	34
27	.759	.782	.850	699	33
28	.788	.812	.801	696	32
29	.817	.841	.754	694	31
30	.07846	.07870	12.706	.99692	30
31	.875	.899	.659	689	29
32	.904	.929	.612	687	28
33	.933	.958	.566	685	27
34	.962	.07987	.520	683	26
35	.07991	.08017	12.474	.99680	25
36	.08020	.046	.429	678	24
37	.049	.075	.384	676	23
38	.078	.104	.339	673	22
39	.107	.134	.295	671	21
40	.08136	.08163	12.251	.99668	20
41	.165	.192	.207	666	19
42	.194	.221	.163	664	18
43	.223	.251	.120	661	17
44	.252	.280	.077	659	16
45	.08281	.08309	12.035	.99657	15
46	.310	.339	11.992	654	14
47	.339	.368	.950	652	13
48	.368	.397	.909	649	12
49	.397	.427	.867	647	11
50	.08426	.08456	11.826	.99644	10
51	.455	.485	.785	642	9
52	.484	.514	.745	639	8
53	.513	.544	.705	637	7
54	.542	.573	.664	635	6
55	.08571	.08602	11.625	.99632	5
56	.600	.632	.585	630	4
57	.629	.661	.546	627	3
58	.658	.690	.507	625	2
59	.687	.720	.468	622	1
60	.08716	.08749	11.430	.99619	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.08716	.08749	11.430	.99619	60
1	.745	.778	.892	617	59
2	.774	.807	.854	614	58
3	.803	.837	.816	612	57
4	.831	.866	.779	609	56
5	.08860	.08895	11.242	.99607	55
6	.889	.925	.205	604	54
7	.918	.954	.168	602	53
8	.947	.08983	.132	599	52
9	.08976	.09013	.095	596	51
10	.09005	.09042	11.059	.99594	50
11	.034	.071	11.024	591	49
12	.063	.101	10.988	588	48
13	.092	.130	.953	586	47
14	.121	.159	.918	583	46
15	.09150	.09189	10.883	.99580	45
16	.179	.218	.848	578	44
17	.208	.247	.814	575	43
18	.237	.277	.780	572	42
19	.266	.306	.746	570	41
20	.09295	.09335	10.712	.99567	40
21	.324	.365	.678	564	39
22	.353	.394	.645	562	38
23	.382	.423	.612	559	37
24	.411	.453	.579	556	36
25	.09440	.09482	10.546	.99553	35
26	.469	.511	.514	551	34
27	.498	.541	.481	548	33
28	.527	.570	.449	545	32
29	.556	.600	.417	542	31
30	.09585	.09629	10.385	.99540	30
31	.614	.658	.354	537	29
32	.642	.688	.322	534	28
33	.671	.717	.291	531	27
34	.700	.746	.260	528	26
35	.09729	.09776	10.229	.99526	25
36	.758	.805	.199	523	24
37	.787	.834	.168	520	23
38	.816	.864	.138	517	22
39	.845	.893	.108	514	21
40	.09874	.09923	10.078	.99511	20
41	.903	.952	.048	508	19
42	.932	.09981	10.019	506	18
43	.961	1.0011	9.9893	503	17
44	.09990	.040	.9601	500	16
45	.10019	.10069	9.9310	.99497	15
46	.048	.099	.9021	494	14
47	.077	.128	.8734	491	13
48	.106	.158	.8448	488	12
49	.135	.187	.8164	485	11
50	.10164	.10216	9.7882	.99482	10
51	.192	.246	.7601	479	9
52	.221	.275	.7322	476	8
53	.250	.305	.7044	473	7
54	.279	.334	.6768	470	6
55	.10308	.10363	9.6493	.99467	5
56	.337	.393	.6220	464	4
57	.366	.422	.5949	461	3
58	.395	.452	.5679	458	2
59	.424	.481	.5411	455	1
60	.10453	.10510	9.5144	.99452	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	10453	10510	9 5144	.99452	<b>60</b>
1	482	540	.4878	449	59
2	511	569	.4614	446	58
3	540	599	.4352	443	57
4	569	628	.4090	440	56
<b>5</b>	.10597	.10657	9 3831	.99437	<b>55</b>
6	626	687	.3572	434	54
7	655	716	.3315	431	53
8	684	746	.3060	428	52
9	713	775	.2806	424	51
<b>10</b>	.10742	.10805	9 2553	.99421	<b>50</b>
11	771	834	.2302	418	49
12	800	863	.2052	415	48
13	829	893	.1803	412	47
14	858	922	.1555	409	46
<b>15</b>	.10887	.10952	9 1309	.99406	<b>45</b>
16	916	10981	.1065	402	44
17	945	11011	.0821	399	43
18	10973	040	.0579	396	42
19	.11002	070	.0338	393	41
<b>20</b>	.11031	.11099	9 0098	.99390	<b>40</b>
21	060	128	8 9860	386	39
22	089	158	.9623	383	38
23	118	187	.9387	380	37
24	147	217	.9152	377	36
<b>25</b>	.11176	.11246	8 8919	.99374	<b>35</b>
26	205	276	.8686	370	34
27	234	305	.8455	367	33
28	263	335	.8225	364	32
29	291	364	.7996	360	31
<b>30</b>	.11320	.11394	8 7769	.99357	<b>30</b>
31	349	423	.7542	354	29
32	378	452	.7317	351	28
33	407	482	.7093	347	27
34	436	511	.6870	344	26
<b>35</b>	.11465	.11541	8 6648	.99341	<b>25</b>
36	494	570	.6427	337	24
37	523	600	.6208	334	23
38	552	629	.5989	331	22
39	580	659	.5772	327	21
<b>40</b>	.11609	.11688	8 5555	.99324	<b>20</b>
41	638	718	.5340	320	19
42	667	747	.5126	317	18
43	696	777	.4913	314	17
44	725	806	.4701	310	16
<b>45</b>	.11754	.11836	8 4490	.99307	<b>15</b>
46	783	865	.4280	303	14
47	812	895	.4071	300	13
48	840	924	.3863	297	12
49	869	954	.3656	293	11
<b>50</b>	.11898	.11983	8 3450	.99290	<b>10</b>
51	927	1.2013	.3245	286	9
52	956	042	.3041	283	8
53	.11985	072	.2838	279	7
54	.12014	101	.2636	276	6
<b>55</b>	.12043	.12131	8 2434	.99272	<b>5</b>
56	071	160	.2234	269	4
57	100	190	.2035	265	3
58	129	219	.1837	262	2
59	158	249	.1640	258	1
<b>60</b>	.12187	.12278	8 1443	.99255	<b>0</b>
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	12187	.12278	8 1443	.99255	<b>60</b>
1	216	308	.1248	251	59
2	245	338	.1054	248	58
3	274	367	.0860	244	57
4	302	397	.0667	240	56
<b>5</b>	.12331	.12426	8 0476	.99237	<b>55</b>
6	360	456	.0285	233	54
7	389	485	8 0095	230	53
8	418	515	7 9906	226	52
9	447	544	.9718	222	51
<b>10</b>	.12476	.12574	7 9530	.99219	<b>50</b>
11	504	603	.9344	215	49
12	533	633	.9158	211	48
13	562	662	.8973	208	47
14	591	692	.8789	204	46
<b>15</b>	.12620	.12722	7 8606	.99200	<b>45</b>
16	649	751	.8424	197	44
17	678	781	.8243	193	43
18	706	810	.8062	189	42
19	735	840	.7882	186	41
<b>20</b>	.12764	.12869	7 7704	.99182	<b>40</b>
21	793	899	.7525	178	39
22	822	929	.7348	175	38
23	851	958	.7171	171	37
24	880	.12988	.6996	167	36
<b>25</b>	.12908	.13017	7 6821	.99163	<b>35</b>
26	937	047	.6647	160	34
27	966	076	.6473	156	33
28	.12995	106	.6301	152	32
29	.13024	136	.6129	148	31
<b>30</b>	.13053	.13165	7 5958	.99144	<b>30</b>
31	081	195	.5787	141	29
32	110	224	.5618	137	28
33	139	254	.5449	133	27
34	168	284	.5281	129	26
<b>35</b>	.13197	.13313	7 5113	.99125	<b>25</b>
36	226	343	.4947	122	24
37	254	372	.4781	118	23
38	283	402	.4615	114	22
39	312	432	.4451	110	21
<b>40</b>	.13341	.13461	7 4287	.99106	<b>20</b>
41	370	491	.4124	102	19
42	399	521	.3962	098	18
43	427	550	.3800	094	17
44	456	580	.3639	091	16
<b>45</b>	.13485	.13609	7 3479	.99087	<b>15</b>
46	514	639	.3319	083	14
47	543	669	.3160	079	13
48	572	698	.3002	075	12
49	600	728	.2844	071	11
<b>50</b>	.13629	.13758	7 2687	.99067	<b>10</b>
51	658	787	.2531	063	9
52	687	817	.2375	059	8
53	716	846	.2220	055	7
54	744	876	.2066	051	6
<b>55</b>	.13773	.13906	7 1912	.99047	<b>5</b>
56	802	935	.1759	043	4
57	831	965	.1607	039	3
58	860	.13995	.1455	035	2
59	889	.14024	.1304	031	1
<b>60</b>	.13917	.14054	7 1154	.99027	<b>0</b>
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	



'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	.13917	.14054	7.1154	.99027	60
1	946	084	.1904	023	59
2	.13975	143	.0855	019	58
3	.14004	143	.0706	015	57
4	033	173	.0658	011	56
5	.14061	.14202	7.0410	.99006	55
6	090	232	0264	.99002	54
7	119	262	7.0117	.98998	53
8	148	291	6.9972	.991	52
9	177	321	.9827	.990	51
10	.14205	.14351	6.9682	.98986	50
11	234	381	.9538	.982	49
12	263	410	.9395	.978	48
13	292	440	.9252	.973	47
14	320	470	.9110	.969	46
15	.14349	.14499	6.8969	.98965	45
16	378	529	.8828	.961	44
17	407	559	.8687	.957	43
18	436	588	.8548	.953	42
19	464	618	.8408	.948	41
20	.14493	.14648	6.8269	.98944	40
21	522	678	.8131	.940	39
22	551	707	.7994	.936	38
23	580	737	.7856	.931	37
24	608	767	.7720	.927	36
25	.14637	.14796	6.7584	.98923	35
26	666	826	.7448	.919	34
27	695	856	.7313	.914	33
28	723	886	.7179	.910	32
29	752	915	.7045	.906	31
30	.14781	.14945	6.6912	.98902	30
31	810	.14975	.6779	.897	29
32	838	15005	.6646	.893	28
33	867	034	.6514	.889	27
34	896	064	.6383	.884	26
35	.14925	.15094	6.6252	.98880	25
36	954	124	.6122	.876	24
37	.14982	153	.5992	.871	23
38	.15011	183	.5863	.867	22
39	040	213	.5734	.863	21
40	.15069	.15243	6.5606	.98858	20
41	097	272	.5478	.854	19
42	126	302	.5350	.849	18
43	155	332	.5223	.845	17
44	184	362	.5097	.841	16
45	.15212	.15391	6.4971	.98836	15
46	241	421	.4846	.832	14
47	270	451	.4721	.827	13
48	299	481	.4596	.823	12
49	327	511	.4472	.818	11
50	.15356	.15540	6.4348	.98814	10
51	385	570	.4225	.809	9
52	414	600	.4103	.805	8
53	442	630	.3980	.800	7
54	471	660	.3859	.796	6
55	.15500	.15689	6.3737	.98791	5
56	529	719	.3617	.787	4
57	557	749	.3496	.782	3
58	586	779	.3376	.778	2
59	615	809	.3257	.773	1
60	.15643	.15838	6.3138	.98769	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	.15643	.15838	6.3138	.98769	60
1	672	868	.3019	.764	59
2	701	898	.2901	.760	58
3	730	928	.2783	.755	57
4	758	958	.2666	.751	56
5	.15787	.15988	6.2549	.98746	55
6	816	.16017	.2432	.741	54
7	845	047	.2316	.737	53
8	873	077	.2200	.732	52
9	902	107	.2085	.728	51
10	.15931	.16137	6.1970	.98723	50
11	959	167	.1856	.718	49
12	.15988	196	.1742	.714	48
13	.16017	226	.1628	.709	47
14	046	256	.1515	.704	46
15	.16074	.16286	6.1402	.98700	45
16	103	316	.1290	.695	44
17	132	346	.1178	.690	43
18	160	376	.1066	.686	42
19	189	405	.0955	.681	41
20	.16218	.16435	6.0844	.98676	40
21	246	465	.0734	.671	39
22	275	495	.0624	.667	38
23	304	525	.0514	.662	37
24	333	555	.0405	.657	36
25	.16361	.16585	6.0296	.98652	35
26	390	615	.0188	.648	34
27	419	645	.0080	.643	33
28	447	674	.5.9972	.638	32
29	476	704	.9865	.633	31
30	.16505	.16734	5.9758	.98629	30
31	533	764	.9651	.624	29
32	562	794	.9545	.619	28
33	591	824	.9439	.614	27
34	620	854	.9333	.609	26
35	.16648	.16884	5.9228	.98604	25
36	677	914	.9124	.600	24
37	706	944	.9019	.595	23
38	734	.16974	.8915	.590	22
39	763	.17004	.8811	.585	21
40	.16792	.17033	5.8708	.98580	20
41	820	063	.8605	.575	19
42	849	093	.8502	.570	18
43	878	123	.8400	.565	17
44	906	153	.8298	.561	16
45	.16935	.17183	5.8197	.98556	15
46	964	213	.8095	.551	14
47	.16992	243	.7994	.546	13
48	.17021	273	.7894	.541	12
49	050	303	.7794	.536	11
50	.17078	.17333	5.7694	.98531	10
51	107	363	.7594	.526	9
52	136	393	.7495	.521	8
53	164	423	.7396	.516	7
54	193	453	.7297	.511	6
55	.17222	.17483	5.7199	.98506	5
56	250	513	.7101	.501	4
57	279	543	.7004	.496	3
58	308	573	.6906	.491	2
59	336	603	.6809	.486	1
60	.17365	.17633	5.6713	.98481	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.17365	.17633	5.6713	.98481	60	.19081	.19438	5.1446	.98163	
1	.393	.663	.6617	476	59	109	.468	.1366	157	
2	.422	.693	.6521	471	58	2	138	.498	.1286	
3	.451	.723	.6425	466	57	3	167	.529	.1207	
4	.479	.753	.6329	461	56	4	195	.559	.1128	
5	.17508	.17783	5.6234	.98455	55	5	.19224	.19589	5.1049	.98135
6	.537	.813	.6140	450	54	6	252	.619	.0970	
7	.565	.843	.6045	445	53	7	281	.649	.0892	
8	.594	.873	.5951	440	52	8	309	.680	.0814	
9	.623	.903	.5857	435	51	9	338	.710	.0736	
10	.17651	.17933	5.5784	.98430	50	10	.19366	.19740	5.0658	.98107
11	.680	.963	.5671	425	49	11	395	.770	.0581	
12	.708	.17993	.5578	420	48	12	423	.801	.0504	
13	.737	.18023	.5485	414	47	13	452	.831	.0427	
14	.766	.053	.5393	409	46	14	481	.861	.0350	
15	.17794	.18083	5.5301	.98404	45	15	.19509	.19891	5.0273	.98079
16	.823	.113	.5209	399	44	16	538	.921	.0197	
17	.852	.143	.5118	394	43	17	566	.952	.0121	
18	.880	.173	.5025	389	42	18	595	.19982	5.0045	.061
19	.909	.203	.4936	383	41	19	623	.20012	4.9969	.056
20	.17937	.18233	5.4845	.98378	40	20	.19652	.20042	4.9894	.98050
21	.966	.263	.4755	373	39	21	680	.073	.9819	.044
22	.17995	.293	.4665	368	38	22	709	.103	.9744	.039
23	.18023	.323	.4575	362	37	23	737	.133	.9669	.033
24	.052	.353	.4486	357	36	24	.766	.164	.9594	.027
25	.18081	.18384	5.4397	.98352	35	25	.19794	.20194	4.9520	.98021
26	.109	.414	.4306	347	34	26	.823	.224	.9446	.016
27	.138	.444	.4219	341	33	27	.851	.254	.9372	.010
28	.166	.474	.4131	336	32	28	.880	.285	.9298	.98004
29	.195	.504	.4043	331	31	29	.908	.315	.9225	.97998
30	.18224	.18534	5.3955	.98325	30	30	.19937	.20345	4.9152	.97992
31	.252	.564	.3868	320	29	31	.965	.376	.9078	.987
32	.281	.594	.3781	315	28	32	.19994	.406	.9006	.981
33	.309	.624	.3694	310	27	33	.20022	.436	.8933	.975
34	.338	.654	.3607	304	26	34	.051	.466	.8860	.969
35	.18367	.18684	5.3521	.98299	25	35	.20079	.20497	4.8788	.97963
36	.395	.714	.3435	294	24	36	.108	.527	.8716	.958
37	.424	.745	.3349	288	23	37	.136	.557	.8644	.952
38	.452	.775	.3263	283	22	38	.165	.588	.8573	.946
39	.481	.805	.3178	277	21	39	.193	.618	.8501	.940
40	.18509	.18835	5.3093	.98272	20	40	.20222	.20648	4.8430	.97934
41	.538	.865	.3008	267	19	41	.250	.679	.8359	.928
42	.567	.895	.2924	261	18	42	.279	.709	.8288	.922
43	.595	.925	.2839	256	17	43	.307	.739	.8218	.916
44	.624	.955	.2755	250	16	44	.336	.770	.8147	.910
45	.18652	.18986	5.2672	.98245	15	45	.20364	.20800	4.8077	.97905
46	.681	.19016	.2588	240	14	46	.393	.830	.8007	.899
47	.710	.046	.2505	234	13	47	.421	.861	.7937	.893
48	.738	.076	.2422	229	12	48	.450	.891	.7867	.887
49	.767	.106	.2339	223	11	49	.478	.921	.7798	.881
50	.18795	.19136	5.2257	.98218	10	50	.20507	.20952	4.7729	.97875
51	.824	.166	.2174	212	9	51	.535	.20952	.7859	.869
52	.852	.197	.2092	207	8	52	.563	.21013	.7591	.863
53	.881	.227	.2011	201	7	53	.592	.043	.7522	.857
54	.910	.257	.1929	196	6	54	.620	.073	.7453	.851
55	.18938	.19287	5.1848	.98190	5	55	.20649	.21104	4.7385	.97845
56	.967	.317	.1787	185	4	56	.677	.134	.7317	.839
57	.18995	.347	.1686	179	3	57	.706	.164	.7249	.833
58	.19024	.378	.1606	174	2	58	.734	.195	.7181	.827
59	.052	.408	.1526	168	1	59	.763	.225	.7114	.821
60	.19081	.19438	5.1446	.98163	0	60	.20791	.21256	4.7046	.97815
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin		N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.20791	.21256	4.7046	.97815	60
1	820	286	.6979	809	59
2	848	316	.6912	803	58
3	877	347	.6845	797	57
4	905	377	.6779	791	56
5	.20933	.21408	4.6712	.97784	55
6	962	438	.6646	778	54
7	.20990	.21469	.6580	772	53
8	.21019	.21499	.6514	766	52
9	047	529	.6448	760	51
10	.21076	.21560	4.6382	.97754	50
11	104	590	.6317	748	49
12	132	621	.6252	742	48
13	161	651	.6187	735	47
14	189	682	.6122	729	46
15	.21218	.21712	4.6057	.97723	45
16	246	743	.5993	717	44
17	275	778	.5928	711	43
18	303	804	.5864	705	42
19	331	834	.5800	698	41
20	.21360	.21864	4.5736	.97692	40
21	388	895	.5673	686	39
22	417	925	.5609	680	38
23	445	956	.5546	673	37
24	474	.21980	.5483	667	36
25	.21502	.22017	4.5420	.97661	35
26	530	047	.5357	655	34
27	559	078	.5294	648	33
28	587	108	.5232	642	32
29	616	139	.5169	636	31
30	.21644	.22169	4.5107	.97630	30
31	672	200	.5045	623	29
32	701	231	.4983	617	28
33	729	261	.4922	611	27
34	758	292	.4860	604	26
35	.21786	.22322	4.4799	.97598	25
36	814	353	.4737	592	24
37	843	383	.4676	585	23
38	871	414	.4615	579	22
39	899	444	.4555	573	21
40	.21928	.22475	4.4494	.97566	20
41	956	505	.4434	560	19
42	.21985	.536	.4373	553	18
43	.22013	567	.4313	547	17
44	641	597	.4253	541	16
45	.22070	.22628	4.4194	.97534	15
46	098	658	.4134	528	14
47	126	689	.4075	521	13
48	155	719	.4015	515	12
49	183	750	.3956	508	11
50	.22212	.22781	4.3897	.97502	10
51	240	811	.3838	496	9
52	268	842	.3779	489	8
53	297	872	.3721	483	7
54	325	903	.3662	476	6
55	.22353	.22934	4.3604	.97470	5
56	382	964	.3546	463	4
57	410	.22995	.3488	457	3
58	438	.23026	.3430	450	2
59	467	056	.3372	444	1
60	.22496	.23087	4.3315	.97437	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.22495	.23087	4.3315	.97437	60
1	523	117	.3257	430	59
2	552	148	.3200	424	58
3	580	179	.3143	417	57
4	608	209	.3086	411	56
5	.22637	.23240	4.3029	.97404	55
6	665	271	.2972	398	54
7	693	301	.2916	391	53
8	722	332	.2859	384	52
9	750	363	.2803	378	51
10	.22778	.23393	4.2747	.97371	50
11	807	424	.2691	365	49
12	835	455	.2635	358	48
13	863	485	.2580	351	47
14	892	516	.2524	345	46
15	.22920	.23547	4.2468	.97338	45
16	948	578	.2413	331	44
17	.22977	608	.2358	325	43
18	.23005	639	.2303	318	42
19	033	670	.2248	311	41
20	.23062	.23700	4.2193	.97304	40
21	090	731	.2139	298	39
22	118	762	.2084	291	38
23	146	793	.2030	284	37
24	175	823	.1976	278	36
25	.23203	.23854	4.1922	.97271	35
26	231	885	.1868	264	34
27	260	916	.1814	257	33
28	288	946	.1760	251	32
29	316	.23977	.1706	244	31
30	.23345	.24008	4.1653	.97237	30
31	373	039	.1600	230	29
32	401	069	.1547	223	28
33	429	100	.1493	217	27
34	458	131	.1441	210	26
35	.23486	.24162	4.1388	.97203	25
36	514	193	.1335	196	24
37	542	223	.1282	189	23
38	571	254	.1230	182	22
39	599	285	.1178	176	21
40	.23627	.24316	4.1126	.97169	20
41	656	347	.1074	162	19
42	684	377	.1022	155	18
43	712	408	.0970	148	17
44	740	439	.0918	141	16
45	.23769	.24470	4.0867	.97134	15
46	797	501	.0815	127	14
47	825	532	.0764	120	13
48	853	562	.0713	113	12
49	882	593	.0662	106	11
50	.23910	.24624	4.0611	.97100	10
51	938	055	.0560	093	9
52	966	086	.0509	086	8
53	.23995	717	.0459	079	7
54	.24023	747	.0408	.072	6
55	.24051	.24778	4.0358	.97065	5
56	079	809	.0308	058	4
57	108	840	.0257	051	3
58	136	871	.0207	044	2
59	164	902	.0158	037	1
60	.24192	.24933	4.0108	.97030	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	24192	.24933	4.0108	97030	<b>60</b>
1	220	964	.0058	023	59
2	249	24995	4.0009	015	58
3	277	25026	3.9959	008	57
4	305	056	.9910	97001	56
<b>5</b>	.24333	25087	3.9861	.96994	<b>55</b>
6	362	118	.9812	987	54
7	390	149	.9763	980	53
8	418	180	.9714	973	52
9	446	211	.9665	966	51
<b>10</b>	.24474	.25242	3.9617	.96959	<b>50</b>
11	503	273	.9568	952	49
12	531	304	.9520	945	48
13	559	335	.9471	937	47
14	587	366	.9423	930	46
<b>15</b>	.24615	25397	3.9375	.96923	<b>45</b>
16	644	428	.9327	916	44
17	672	459	.9279	909	43
18	700	490	.9232	902	42
19	728	521	.9184	894	41
<b>20</b>	.24756	.25552	3.9136	.96887	<b>40</b>
21	784	583	.9089	880	39
22	813	614	.9042	873	38
23	841	645	.8995	866	37
24	869	676	.8947	858	36
<b>25</b>	.24897	25707	3.8900	.96851	<b>35</b>
26	925	738	.8854	844	34
27	954	769	.8807	837	33
28	24982	800	.8760	829	32
29	25010	831	.8714	822	31
<b>30</b>	.25038	25862	3.8667	.96815	<b>30</b>
31	066	893	.8621	807	29
32	094	924	.8575	800	28
33	122	955	.8528	793	27
34	151	.25986	.8482	786	26
<b>35</b>	.25179	26017	3.8436	.96778	<b>25</b>
36	207	048	.8391	771	24
37	235	079	.8345	764	23
38	263	110	.8299	756	22
39	291	141	.8254	749	21
<b>40</b>	.25320	26172	3.8208	.96742	<b>20</b>
41	348	203	.8163	734	19
42	376	235	.8118	727	18
43	404	266	.8073	719	17
44	432	297	.8028	712	16
<b>45</b>	.25460	26328	3.7983	.96705	<b>15</b>
46	488	359	.7938	697	14
47	516	390	.7893	690	13
48	545	421	.7848	682	12
49	573	452	.7804	675	11
<b>50</b>	.25601	26483	3.7760	.96667	<b>10</b>
51	629	515	.7715	660	9
52	657	546	.7671	653	8
53	685	577	.7627	645	7
54	713	608	.7583	638	6
<b>55</b>	.25741	26639	3.7539	.96630	<b>5</b>
56	769	670	.7495	623	4
57	798	701	.7451	615	3
58	826	733	.7408	608	2
59	854	764	.7364	600	1
<b>60</b>	.25882	.26795	3.7321	.96593	<b>0</b>
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.25882	.26795	3.7321	.96593	<b>60</b>
1	910	826	.7277	585	59
2	938	857	.7234	578	58
3	966	888	.7191	570	57
4	.25994	920	.7148	562	56
<b>5</b>	.26022	26951	3.7105	.96555	<b>55</b>
6	050	26982	.7062	547	54
7	079	.27013	.7019	540	53
8	107	044	.6976	532	52
9	135	076	.6933	524	51
<b>10</b>	.26163	.27107	3.6891	.96517	<b>50</b>
11	191	138	.6848	509	49
12	219	169	.6806	502	48
13	247	201	.6764	494	47
14	275	232	.6722	486	46
<b>15</b>	.26303	.27263	3.6680	.96479	<b>45</b>
16	331	294	.6638	471	44
17	359	326	.6596	463	43
18	387	357	.6554	456	42
19	415	388	.6512	448	41
<b>20</b>	.26443	27419	3.6470	.96440	<b>40</b>
21	471	451	.6429	433	39
22	500	482	.6387	425	38
23	528	513	.6346	417	37
24	556	545	.6305	410	36
<b>25</b>	.26584	.27576	3.6264	.96402	<b>35</b>
26	612	607	.6222	394	34
27	640	638	.6181	386	33
28	668	670	.6140	379	32
29	696	701	.6100	371	31
<b>30</b>	.26724	.27732	3.6059	.96363	<b>30</b>
31	752	764	.6018	355	29
32	780	795	.5978	347	28
33	808	826	.5937	340	27
34	836	858	.5897	332	26
<b>35</b>	.26864	.27889	3.5856	.96324	<b>25</b>
36	892	921	.5816	316	24
37	920	952	.5776	308	23
38	948	.27983	.5736	301	22
39	.26976	.28015	.5696	293	21
<b>40</b>	.27004	.28046	3.5656	.96285	<b>20</b>
41	032	077	.5616	277	19
42	060	109	.5576	269	18
43	088	140	.5536	261	17
44	116	172	.5497	253	16
<b>45</b>	.27144	.28203	3.5457	.96246	<b>15</b>
46	172	234	.5418	238	14
47	200	266	.5379	230	13
48	228	297	.5339	222	12
49	256	329	.5300	214	11
<b>50</b>	.27284	.28360	3.5261	.96206	<b>10</b>
51	312	391	.5222	198	9
52	340	423	.5183	190	8
53	368	454	.5144	182	7
54	396	486	.5105	174	6
<b>55</b>	.27424	.28517	3.5067	.96166	<b>5</b>
56	452	549	.5028	158	4
57	480	580	.4989	150	3
58	508	612	.4951	142	2
59	536	643	.4912	134	1
<b>60</b>	.27564	.28675	3.4874	.96126	<b>0</b>
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos		N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.27564	.28675	3.4874	.98126	60	.29237	.30573	3.2709	.95630	60
1	592	706	.4836	118	59	265	605	.2675	622	59
2	620	738	.4798	110	58	293	637	.2641	613	58
3	648	769	.4760	102	57	321	669	.2607	605	57
4	676	801	.4722	094	56	348	700	.2573	596	56
5	.27704	.28832	3.4684	.96086	55	.29376	.30732	3.2539	.95588	55
6	731	864	.4646	078	54	404	764	.2506	579	54
7	759	895	.4608	070	53	432	796	.2472	571	53
8	787	927	.4570	062	52	460	828	.2438	562	52
9	815	958	.4533	054	51	487	860	.2405	554	51
10	.27843	.28990	3.4495	.96046	50	.29515	.30891	3.2371	.95545	50
11	871	29021	.4458	037	49	513	923	.2338	536	49
12	899	053	.4420	029	48	571	955	.2305	528	48
13	927	064	.4383	021	47	599	.30987	.2272	519	47
14	955	116	.4346	013	46	626	.31019	.2238	511	46
15	.27983	.29147	3.4308	.96005	45	.29654	.31051	3.2205	.95502	45
16	.28011	179	.4271	.95997	44	682	083	.2172	493	44
17	039	210	.4234	.989	43	710	115	.2139	485	43
18	067	242	.4197	.981	42	737	147	.2106	476	42
19	095	274	.4160	.972	41	765	178	.2073	467	41
20	.28123	.29305	3.4124	.95964	40	.29793	.31210	3.2041	.95459	40
21	150	337	.4087	.956	39	821	242	.2008	450	39
22	178	368	.4050	.948	38	849	274	.1975	441	38
23	206	400	.4014	.940	37	876	306	.1943	433	37
24	234	432	.3977	.931	36	904	338	.1910	424	36
25	.28262	.29463	3.3941	.95923	35	.29932	.31370	3.1878	.95415	35
26	290	495	.3904	.915	34	960	402	.1845	407	34
27	318	526	.3868	.907	33	29987	434	.1813	398	33
28	346	558	.3832	.898	32	30015	466	.1780	389	32
29	374	590	.3796	.890	31	043	498	.1748	380	31
30	.28402	.29621	3.3759	.95882	30	.30071	.31530	3.1716	.95372	30
31	429	653	.3723	.874	29	098	562	.1684	363	29
32	457	685	.3687	.865	28	126	594	.1652	354	28
33	485	716	.3652	.857	27	154	626	.1620	345	27
34	513	748	.3616	.849	26	182	658	.1588	337	26
35	.28541	.29780	3.3580	.95841	25	.30209	.31690	3.1556	.95328	25
36	569	811	.3544	.832	24	237	722	.1524	319	24
37	597	843	.3509	.824	23	265	754	.1492	310	23
38	625	875	.3473	.816	22	292	786	.1460	301	22
39	652	906	.3438	.807	21	320	818	.1429	293	21
40	.28680	.29938	3.3402	.95799	20	.30348	.31850	3.1397	.95284	20
41	708	.29970	.3367	.791	19	376	882	.1366	275	19
42	736	.30001	.3332	.782	18	403	914	.1334	266	18
43	764	033	.3297	.774	17	431	946	.1303	257	17
44	792	065	.3261	.766	16	459	.31978	.1271	248	16
45	.28820	.30097	3.3226	.95757	15	.30486	.32010	3.1240	.95240	15
46	847	128	.3191	.749	14	514	042	.1209	231	14
47	875	160	.3156	.740	13	542	074	.1178	222	13
48	903	192	.3122	.732	12	570	106	.1146	213	12
49	931	224	.3087	.724	11	597	139	.1115	204	11
50	.28959	.30255	3.3052	.95715	10	.30625	.32171	3.1084	.95195	10
51	.28987	287	.3017	.707	9	51	653	.203	186	9
52	.29015	319	.2983	.698	8	52	680	.205	177	8
53	042	351	.2948	.690	7	53	708	.207	168	7
54	070	382	.2914	.681	6	54	736	.209	159	6
55	.29098	.30414	3.2879	.95673	5	.30763	.32331	3.0930	.95150	5
56	126	446	.2845	.664	4	56	791	.203	142	4
57	154	478	.2811	.656	3	57	819	.206	133	3
58	182	509	.2777	.647	2	58	846	.208	124	2
59	209	541	.2743	.639	1	59	874	.210	115	1
60	.29237	.30573	3.2709	.95630	0	.30902	.32492	3.0777	.95106	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin		N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos		N Sin	N Tan	N Cot	N Cos		
0	.30902	.32492	3.0777	.95106	60	.32557	.34433	2.9042	.94552	60	
1	.929	.524	.0746	.097	59	1	.584	.465	.9015	.542	59
2	.957	.556	.0716	.088	58	2	.612	.493	.8987	.533	58
3	.30985	.588	.0686	.079	57	3	.639	.530	.8960	.523	57
4	.31012	.621	.0655	.070	56	4	.667	.563	.8933	.514	56
5	.31040	.32653	3.0625	.95061	55	5	.32694	.34596	2.8905	.94504	55
6	.068	.685	.0595	.052	44	6	.722	.628	.8878	.495	54
7	.095	.717	.0565	.043	53	7	.749	.661	.8851	.485	53
8	.123	.749	.0535	.033	52	8	.777	.693	.8824	.476	52
9	.151	.782	.0505	.024	51	9	.804	.726	.8797	.466	51
10	.31178	.32814	3.0475	.95015	50	10	.32832	.34758	2.8770	.94457	50
11	.206	.846	.0445	.95006	49	11	.859	.791	.8743	.447	49
12	.233	.878	.0415	.94997	48	12	.887	.824	.8716	.438	48
13	.261	.911	.0385	.9488	47	13	.914	.856	.8689	.428	47
14	.289	.943	.0356	.9479	46	14	.942	.889	.8662	.418	46
15	.31316	.32975	3.0326	.94970	45	15	.32969	.34922	2.8636	.94409	45
16	.344	.33007	.0296	.961	44	16	.32997	.954	.8609	.399	44
17	.372	.040	.0267	.952	43	17	.33024	.34987	.8582	.390	43
18	.399	.072	.0237	.943	42	18	.051	.35020	.8556	.380	42
19	.427	.104	.0208	.933	41	19	.079	.052	.8529	.370	41
20	.31454	.33136	3.0178	.94924	40	20	.33106	.35085	2.8502	.94361	40
21	.432	.169	.0149	.915	39	21	.134	.118	.8476	.351	39
22	.510	.201	.0120	.906	38	22	.161	.150	.8449	.342	38
23	.537	.233	.0090	.897	37	23	.189	.183	.8423	.332	37
24	.565	.266	.0061	.888	36	24	.216	.216	.8397	.322	36
25	.31598	.33298	3.0032	.94878	35	25	.33244	.35248	2.8370	.94313	35
26	.620	.330	.0003	.869	34	26	.271	.281	.8344	.303	34
27	.648	.363	.2.9974	.860	33	27	.298	.314	.8318	.293	33
28	.675	.395	.9945	.851	32	28	.326	.346	.8291	.284	32
29	.703	.427	.9916	.842	31	29	.353	.379	.8265	.274	31
30	.31730	.33480	2.9887	.94832	30	30	.33381	.35412	2.8239	.94264	30
31	.758	.492	.9858	.823	29	31	.408	.445	.8213	.254	29
32	.786	.524	.9829	.814	28	32	.436	.477	.8187	.245	28
33	.813	.557	.9800	.805	27	33	.463	.510	.8161	.235	27
34	.841	.589	.9772	.795	26	34	.490	.543	.8135	.225	26
35	.31868	.33621	2.9743	.94786	25	35	.33518	.35576	2.8109	.94215	25
36	.896	.654	.9714	.777	24	36	.545	.608	.8083	.206	24
37	.923	.686	.9686	.768	23	37	.573	.641	.8057	.196	23
38	.951	.718	.9657	.758	22	38	.600	.674	.8032	.186	22
39	.31979	.751	.9629	.749	21	39	.627	.707	.8006	.176	21
40	.32068	.33783	2.9600	.94740	20	40	.33655	.35740	2.7980	.94167	20
41	.034	.816	.9572	.730	19	41	.682	.772	.7955	.157	19
42	.061	.848	.9544	.721	18	42	.710	.805	.7929	.147	18
43	.089	.881	.9515	.712	17	43	.737	.838	.7903	.137	17
44	.116	.913	.9487	.702	16	44	.764	.871	.7878	.127	16
45	.32144	.33945	2.9459	.94693	15	45	.33792	.35904	2.7852	.94118	15
46	.171	.33978	.9431	.684	14	46	.819	.937	.7827	.108	14
47	.199	.34010	.9403	.674	13	47	.846	.35969	.7801	.098	13
48	.227	.043	.9375	.665	12	48	.874	.36002	.7776	.088	12
49	.254	.075	.9347	.656	11	49	.901	.035	.7751	.078	11
50	.32282	.34108	2.9319	.94646	10	50	.33929	.36068	2.7725	.94068	10
51	.309	.140	.9291	.637	9	51	.956	.101	.7700	.058	9
52	.337	.173	.9263	.627	8	52	.33983	.134	.7675	.049	8
53	.364	.205	.9235	.618	7	53	.34011	.167	.7650	.039	7
54	.392	.238	.9208	.609	6	54	.038	.199	.7625	.029	6
55	.32419	.34270	2.9180	.94599	5	55	.34065	.36232	2.7600	.94019	5
56	.447	.303	.9152	.590	4	56	.093	.265	.7575	.94009	4
57	.474	.335	.9125	.580	3	57	.120	.298	.7550	.93999	3
58	.502	.368	.9097	.571	2	58	.147	.331	.7525	.989	2
59	.529	.400	.9070	.561	1	59	.175	.364	.7500	.979	1
60	.32557	.34433	2.9042	.94552	0	60	.34202	.36397	2.7475	.93969	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin		N Cos	N Cot	N Tan	N Sin		

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	.34202	.36397	2.7475	.93969	60
1	229	430	.7450	.959	59
2	257	463	.7425	.949	58
3	284	496	.7400	.939	57
4	311	529	.7376	.929	56
5	.34339	.36562	2.7351	.93919	55
6	366	595	.7326	.909	54
7	393	628	.7302	.899	53
8	421	661	.7277	.889	52
9	448	694	.7253	.879	51
10	.34475	.36727	2.7228	.93869	50
11	503	760	.7204	.859	49
12	530	793	.7179	.849	48
13	557	826	.7155	.839	47
14	584	859	.7130	.829	46
15	.34612	.36892	2.7106	.93819	45
16	639	925	.7082	.809	44
17	666	958	.7058	.799	43
18	694	991	.7034	.789	42
19	721	1024	.7009	.779	41
20	.34748	.37057	2.6985	.93769	40
21	775	1090	.6961	.759	39
22	803	1123	.6937	.748	38
23	830	1157	.6913	.738	37
24	857	1190	.6889	.728	36
25	.34884	.37223	2.6865	.93718	35
26	912	1256	.6841	.708	34
27	939	1289	.6818	.698	33
28	966	1322	.6794	.688	32
29	993	1355	.6770	.677	31
30	.35021	.37388	2.6746	.93667	30
31	1048	1422	.6723	.657	29
32	1075	1455	.6699	.647	28
33	1102	1488	.6675	.637	27
34	1130	1521	.6652	.626	26
35	.35157	.37554	2.6628	.93616	25
36	1184	1588	.6605	.606	24
37	1211	1621	.6581	.596	23
38	1239	1654	.6558	.585	22
39	1266	1687	.6534	.575	21
40	.35293	.37720	2.6511	.93565	20
41	1320	1754	.6488	.555	19
42	1347	1787	.6464	.544	18
43	1375	1820	.6441	.534	17
44	1402	1853	.6418	.524	16
45	.35429	.37887	2.6395	.93514	15
46	1456	1920	.6371	.503	14
47	1484	1953	.6348	.493	13
48	1511	1986	.6325	.483	12
49	1538	2020	.6302	.472	11
50	.35565	.38053	2.6279	.93462	10
51	1592	2086	.6256	.452	9
52	1619	2120	.6233	.441	8
53	1647	2153	.6210	.431	7
54	1674	2186	.6187	.420	6
55	.35701	.38220	2.6165	.93410	5
56	1728	2253	.6142	.400	4
57	1755	2286	.6119	.389	3
58	1782	2320	.6096	.379	2
59	1810	2353	.6074	.368	1
60	.35837	.38386	2.6051	.93358	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	.35837	.38386	2.6051	.93358	60
1	864	420	.6028	.848	59
2	891	453	.6006	.837	58
3	918	487	.5983	.827	57
4	945	520	.5961	.816	56
5	.35973	.38553	2.5938	.93306	55
6	36000	587	.5916	.295	54
7	627	629	.5893	.285	53
8	654	664	.5871	.274	52
9	681	697	.5848	.264	51
10	.36108	.38721	2.5826	.93253	50
11	135	754	.5804	.243	49
12	162	787	.5782	.232	48
13	190	821	.5759	.222	47
14	217	854	.5737	.211	46
15	.36244	.38888	2.5715	.93201	45
16	271	921	.5693	.190	44
17	298	955	.5671	.180	43
18	325	988	.5649	.169	42
19	352	1022	.5627	.159	41
20	.36379	.39055	2.5605	.93148	40
21	406	1089	.5583	.137	39
22	434	1122	.5561	.127	38
23	461	1156	.5539	.116	37
24	488	1190	.5517	.106	36
25	.36515	.39223	2.5495	.93095	35
26	542	1257	.5473	.084	34
27	569	1290	.5452	.074	33
28	596	1324	.5430	.063	32
29	623	1357	.5408	.052	31
30	.36650	.39391	2.5386	.93042	30
31	677	1425	.5365	.031	29
32	704	1458	.5343	.020	28
33	731	1492	.5322	.010	27
34	758	1526	.5300	.000	26
35	.36785	.39559	2.5279	.92988	25
36	812	1593	.5257	.978	24
37	839	1626	.5236	.967	23
38	867	1660	.5214	.956	22
39	894	1694	.5193	.945	21
40	.36921	.39727	2.5172	.92935	20
41	948	1761	.5150	.924	19
42	975	1795	.5129	.913	18
43	1002	1829	.5108	.902	17
44	1029	1862	.5086	.892	16
45	.37056	.39896	2.5065	.92881	15
46	1083	1930	.5044	.870	14
47	1110	1963	.5023	.859	13
48	1137	1997	.5002	.849	12
49	1164	2031	.4981	.838	11
50	.37191	.40065	2.4990	.92827	10
51	1218	2098	.4969	.816	9
52	1245	2132	.4948	.805	8
53	1272	2166	.4927	.794	7
54	1299	2200	.4906	.784	6
55	.37326	.40234	2.4855	.92773	5
56	1353	2267	.4834	.762	4
57	1380	2301	.4813	.751	3
58	1407	2335	.4792	.740	2
59	1434	2369	.4772	.729	1
60	.37461	.40403	2.4751	.92718	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.37461	.40403	2.4751	.92718	60
1	.488	436	.4730	707	59
2	.515	470	.4709	697	58
3	.542	504	.4689	686	57
4	.569	538	.4668	675	56
5	.37595	.40572	2.4648	.92664	55
6	.622	606	.4627	653	54
7	.649	640	.4606	642	53
8	.676	674	.4586	631	52
9	.703	707	.4566	620	51
10	.37730	.40741	2.4545	.92609	50
11	.757	775	.4525	598	49
12	.784	809	.4504	587	48
13	.811	843	.4484	576	47
14	.838	877	.4464	565	46
15	.37865	.40911	2.4443	.92554	45
16	.892	945	.4423	543	44
17	.919	.40979	.4403	532	43
18	.946	.41013	.4383	521	42
19	.973	.047	.4362	510	41
20	.37999	.41081	2.4342	.92499	40
21	.38026	.115	.4322	488	39
22	.053	149	.4302	477	38
23	.080	183	.4282	466	37
24	.107	217	.4262	455	36
25	.38134	.41251	2.4242	.92444	35
26	.161	285	.4222	432	34
27	.188	319	.4202	421	33
28	.215	353	.4182	410	32
29	.241	387	.4162	399	31
30	.38268	.41421	2.4142	.92388	30
31	.295	455	.4122	377	29
32	.322	490	.4102	366	28
33	.349	524	.4083	355	27
34	.376	558	.4063	343	26
35	.38403	.41592	2.4043	.92332	25
36	.430	625	.4023	321	24
37	.456	660	.4004	310	23
38	.483	694	.3984	299	22
39	.510	728	.3964	287	21
40	.38537	.41763	2.3945	.92276	20
41	.564	797	.3925	265	19
42	.591	831	.3906	254	18
43	.617	865	.3886	243	17
44	.644	899	.3867	231	16
45	.38671	.41933	2.3847	.92220	15
46	.698	.41968	.3828	209	14
47	.725	.42002	.3808	198	13
48	.752	.036	.3789	186	12
49	.778	.070	.3770	175	11
50	.38805	.42105	2.3750	.92164	10
51	.832	.139	.3731	152	9
52	.859	.173	.3712	141	8
53	.886	.207	.3693	130	7
54	.912	.242	.3673	119	6
55	.38939	.42276	2.3654	.92107	5
56	.966	.310	.3635	996	4
57	.38993	.345	.3616	085	3
58	.39020	.379	.3597	073	2
59	.046	.413	.3578	062	1
60	.39073	.42447	2.3559	.92050	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.39073	.42447	2.3559	.92050	60
1	.100	482	.3539	039	59
2	.127	516	.3520	028	58
3	.153	551	.3501	016	57
4	.180	585	.3483	.02005	56
5	.39207	.42619	2.3464	.91994	55
6	.234	654	.3445	982	54
7	.260	688	.3426	971	53
8	.287	722	.3407	959	52
9	.314	757	.3388	948	51
10	.39341	.42791	2.3369	.91936	50
11	.367	826	.3351	925	49
12	.394	860	.3332	914	48
13	.421	894	.3313	902	47
14	.448	929	.3294	891	46
15	.39474	.42963	2.3276	.91879	45
16	.501	.42998	.3257	868	44
17	.528	.43032	.3238	856	43
18	.555	.067	.3220	845	42
19	.581	.101	.3201	833	41
20	.39608	.43136	2.3183	.91822	40
21	.635	.170	.3164	810	39
22	.661	.205	.3146	799	38
23	.688	.239	.3127	787	37
24	.715	.274	.3109	775	36
25	.39741	.43308	2.3090	.91764	35
26	.768	.343	.3072	752	34
27	.795	.378	.3053	741	33
28	.822	.412	.3035	729	32
29	.848	.447	.3017	718	31
30	.39875	.43481	2.2998	.91706	30
31	.902	.516	.2980	694	29
32	.928	.550	.2962	683	28
33	.955	.585	.2944	671	27
34	.39982	.43654	2.2925	.91648	26
35	.40008	.43654	2.2907	.91648	25
36	.035	.689	.2889	636	24
37	.062	.724	.2871	625	23
38	.088	.758	.2853	613	22
39	.115	.793	.2835	601	21
40	.40141	.43828	2.2817	.91590	20
41	.168	.862	.2799	578	19
42	.195	.897	.2781	566	18
43	.221	.932	.2763	555	17
44	.248	.43966	.2745	543	16
45	.40275	.44001	2.2727	.91531	15
46	.301	.036	.2709	519	14
47	.328	.071	.2691	508	13
48	.355	.105	.2673	496	12
49	.381	.140	.2655	484	11
50	.40408	.44175	2.2637	.91472	10
51	.434	.210	.2620	461	9
52	.461	.244	.2602	449	8
53	.488	.279	.2584	437	7
54	.514	.314	.2566	425	6
55	.40541	.44349	2.2549	.91414	5
56	.567	.384	.2531	402	4
57	.594	.418	.2513	390	3
58	.621	.453	.2496	378	2
59	.647	.488	.2478	366	1
60	.40674	.44523	2.2460	.91355	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	



	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	40674	44523	2.2460	91355	60
1	700	558	2.443	343	59
2	727	593	2.425	331	58
3	753	627	2.408	319	57
4	780	662	2.390	307	56
5	40806	44697	2.2373	91295	55
6	833	732	2.355	283	54
7	860	767	2.338	272	53
8	886	802	2.320	260	52
9	913	837	2.303	248	51
10	40939	44872	2.2286	91236	50
11	966	907	2.268	224	49
12	40992	942	2.251	212	48
13	41019	44977	2.234	200	47
14	045	45012	2.216	188	46
15	41072	45047	2.2199	91176	45
16	098	082	2.182	164	44
17	125	117	2.165	152	43
18	151	152	2.148	140	42
19	178	187	2.130	128	41
20	41204	45222	2.2113	91116	40
21	231	257	2.096	104	39
22	257	292	2.079	092	38
23	284	327	2.062	080	37
24	310	362	2.045	068	36
25	41337	45397	2.2028	91056	35
26	363	432	2.011	044	34
27	390	467	1.994	032	33
28	416	502	1.977	020	32
29	443	538	1.960	01008	31
30	41469	45573	2.1943	90996	30
31	496	608	1.926	984	29
32	522	643	1.909	972	28
33	549	678	1.892	960	27
34	575	713	1.876	948	26
35	41602	45748	2.1859	90936	25
36	628	784	1.842	924	24
37	655	819	1.825	911	23
38	681	854	1.808	899	22
39	707	889	1.792	887	21
40	41734	45924	2.1775	90875	20
41	760	960	1.758	863	19
42	787	45995	1.742	851	18
43	813	46030	1.725	839	17
44	840	065	1.708	826	16
45	41866	46101	2.1692	90814	15
46	892	136	1.675	802	14
47	919	171	1.659	790	13
48	945	206	1.642	778	12
49	972	242	1.625	766	11
50	41998	46277	2.1609	90753	10
51	42024	312	1.592	741	9
52	051	348	1.576	729	8
53	077	383	1.560	717	7
54	104	418	1.543	704	6
55	42130	46454	2.1527	90692	5
56	158	489	1.510	680	4
57	183	525	1.494	668	3
58	209	560	1.478	655	2
59	235	595	1.461	643	1
60	42262	46631	2.1445	90631	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	42262	46631	2.1445	90631	60
1	288	666	1.429	618	59
2	315	702	1.413	606	58
3	341	737	1.396	594	57
4	367	772	1.380	582	56
5	42394	46808	2.1364	90569	55
6	420	843	1.348	557	54
7	446	879	1.332	545	53
8	473	914	1.315	532	52
9	499	950	1.299	520	51
10	42525	46985	2.1283	90507	50
11	552	47021	1.287	495	49
12	578	056	1.251	483	48
13	604	092	1.235	470	47
14	631	128	1.219	458	46
15	42657	47163	2.1203	90446	45
16	683	199	1.187	433	44
17	709	234	1.171	421	43
18	736	270	1.155	408	42
19	762	305	1.139	396	41
20	42788	47341	2.1123	90383	40
21	815	377	1.107	371	39
22	841	412	1.092	358	38
23	867	448	1.076	346	37
24	894	483	1.060	334	36
25	42920	47519	2.1044	90321	35
26	946	555	1.028	309	34
27	972	590	1.013	296	33
28	42999	626	0.997	284	32
29	43025	662	0.981	271	31
30	43051	47698	2.0965	90259	30
31	077	733	0.950	246	29
32	104	769	0.934	233	28
33	130	805	0.918	221	27
34	156	840	0.903	208	26
35	43182	47876	2.0887	90196	25
36	209	912	0.872	183	24
37	235	948	0.856	171	23
38	261	47984	0.840	158	22
39	287	48019	0.825	146	21
40	43313	48055	2.0809	90133	20
41	340	091	0.794	120	19
42	366	127	0.778	108	18
43	392	163	0.763	095	17
44	418	198	0.748	082	16
45	43445	48234	2.0732	90070	15
46	471	270	0.717	057	14
47	497	306	0.701	045	13
48	523	342	0.686	032	12
49	549	378	0.671	019	11
50	43575	48414	2.0655	90007	10
51	602	450	0.640	89994	9
52	628	486	0.625	981	8
53	654	521	0.609	968	7
54	680	557	0.594	956	6
55	43706	48598	2.0579	89943	5
56	733	629	0.564	930	4
57	759	665	0.549	918	3
58	785	701	0.533	905	2
59	811	737	0.518	892	1
60	43837	48773	2.0503	89879	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	43837	48773	2.0503	.89879	60
1	863	809	.0488	867	59
2	889	845	.0473	854	58
3	916	881	.0458	841	57
4	942	917	.0443	828	56
5	43968	48953	2.0428	.89816	55
6	43994	48989	.0413	803	54
7	44020	49026	.0398	790	53
8	046	062	.0383	777	52
9	072	098	.0368	764	51
10	44008	49134	2.0353	.89752	50
11	124	170	.0338	739	49
12	151	206	.0323	726	48
13	177	242	.0308	713	47
14	203	278	.0293	700	46
15	44229	49315	2.0278	.89687	45
16	255	351	.0263	674	44
17	281	387	.0248	662	43
18	307	423	.0233	649	42
19	333	459	.0219	636	41
20	44359	49495	2.0204	.89623	40
21	385	532	.0189	610	39
22	411	568	.0174	597	38
23	437	604	.0160	584	37
24	464	640	.0145	571	36
25	44490	49677	2.0130	.89558	35
26	516	713	.0115	545	34
27	542	749	.0101	532	33
28	568	786	.0086	519	32
29	594	822	.0072	506	31
30	44620	49858	2.0057	.89493	30
31	646	894	.0042	480	29
32	672	931	.0028	467	28
33	698	967	2.0013	454	27
34	724	50004	1.9999	441	26
35	44750	50040	1.9984	.89428	25
36	776	076	.9970	415	24
37	802	113	.9955	402	23
38	828	149	.9941	389	22
39	854	185	.9926	376	21
40	44880	50222	1.9912	.89363	20
41	906	258	.9897	350	19
42	932	295	.9883	337	18
43	958	331	.9868	324	17
44	44984	368	.9854	311	16
45	45010	50404	1.9840	.89298	15
46	036	441	.9825	285	14
47	062	477	.9811	272	13
48	088	514	.9797	259	12
49	114	550	.9782	245	11
50	45140	50587	1.9768	.89232	10
51	166	623	.9754	219	9
52	192	660	.9740	206	8
53	218	696	.9725	193	7
54	243	733	.9711	180	6
55	45269	50769	1.9697	.89167	5
56	295	806	.9683	153	4
57	321	843	.9669	140	3
58	347	879	.9654	127	2
59	373	916	.9640	114	1
60	45399	50953	1.9626	.89101	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	45399	50953	1.9626	.89101	60
1	425	50989	.9612	087	59
2	451	51026	.9598	074	58
3	477	063	.9584	061	57
4	503	099	.9570	048	56
5	45529	51136	1.9556	.89035	55
6	554	173	.9542	021	54
7	580	209	.9528	.89008	53
8	606	246	.9514	.88995	52
9	632	283	.9500	981	51
10	45658	51319	1.9486	.88968	50
11	684	356	.9472	955	49
12	710	393	.9458	942	48
13	736	430	.9444	928	47
14	762	467	.9430	915	46
15	45787	51503	1.9416	.88902	45
16	813	540	.9402	888	44
17	839	577	.9388	875	43
18	865	614	.9375	862	42
19	891	651	.9361	848	41
20	45917	51688	1.9347	.88835	40
21	942	724	.9333	822	39
22	968	761	.9319	808	38
23	45994	798	.9306	795	37
24	46020	835	.9292	782	36
25	46046	51872	1.9278	.88768	35
26	072	909	.9265	755	34
27	097	946	.9251	741	33
28	123	51983	.9237	728	32
29	149	52020	.9223	715	31
30	46175	52057	1.9210	.88701	30
31	201	094	.9196	688	29
32	226	131	.9183	674	28
33	252	168	.9169	661	27
34	278	205	.9155	647	26
35	46304	52242	1.9142	.88634	25
36	330	279	.9128	620	24
37	355	316	.9115	607	23
38	381	353	.9101	593	22
39	407	390	.9088	580	21
40	46433	52427	1.9074	.88566	20
41	458	464	.9061	553	19
42	484	501	.9047	539	18
43	510	538	.9034	526	17
44	536	575	.9020	512	16
45	46561	52613	1.9007	.88499	15
46	587	650	.8993	485	14
47	613	687	.8980	472	13
48	639	724	.8967	458	12
49	664	761	.8953	445	11
50	46690	52798	1.8940	.88431	10
51	716	836	.8927	417	9
52	742	873	.8913	404	8
53	767	910	.8900	390	7
54	793	947	.8887	377	6
55	46819	52985	1.8873	.88363	5
56	844	53022	.8860	349	4
57	870	059	.8847	336	3
58	896	096	.8834	322	2
59	921	134	.8820	308	1
60	46947	53171	1.8807	.88295	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.46947	.53171	1.8807	.88295	40
1	.973	.208	.8794	.281	59
2	.46999	.246	.8781	.267	58
3	.47024	.283	.8768	.254	57
4	.050	.320	.8755	.240	56
5	.47076	.53358	1.8741	.88226	55
6	.101	.395	.8728	.213	54
7	.127	.432	.8715	.199	53
8	.153	.470	.8702	.185	52
9	.178	.507	.8689	.172	51
10	.47204	.53545	1.8676	.88158	50
11	.229	.582	.8663	.144	49
12	.255	.620	.8650	.130	48
13	.281	.657	.8637	.117	47
14	.306	.694	.8624	.103	46
15	.47332	.53732	1.8611	.88089	45
16	.358	.769	.8598	.075	44
17	.383	.807	.8585	.062	43
18	.409	.844	.8572	.048	42
19	.434	.882	.8559	.034	41
20	.47460	.53920	1.8546	.88020	40
21	.486	.957	.8533	.88006	39
22	.511	.53995	.8520	.87993	38
23	.537	.54032	.8507	.87979	37
24	.562	.070	.8495	.87965	36
25	.47588	.54107	1.8482	.87951	35
26	.614	.145	.8469	.937	34
27	.639	.183	.8456	.923	33
28	.665	.220	.8443	.909	32
29	.690	.258	.8430	.896	31
30	.47716	.54296	1.8418	.87882	30
31	.741	.333	.8405	.868	29
32	.767	.371	.8392	.854	28
33	.793	.409	.8379	.840	27
34	.818	.446	.8367	.826	26
35	.47844	.54484	1.8354	.87812	25
36	.869	.522	.8341	.798	24
37	.895	.560	.8329	.784	23
38	.920	.597	.8316	.770	22
39	.946	.635	.8303	.756	21
40	.47971	.54673	1.8291	.87743	20
41	.47997	.711	.8278	.729	19
42	.48022	.748	.8265	.715	18
43	.048	.786	.8253	.701	17
44	.073	.824	.8240	.687	16
45	.48099	.54862	1.8228	.87673	15
46	.124	.900	.8215	.659	14
47	.150	.938	.8202	.645	13
48	.175	.54975	.8190	.631	12
49	.201	.55013	.8177	.617	11
50	.48226	.55051	1.8165	.87603	10
51	.252	.089	.8152	.589	9
52	.277	.127	.8140	.575	8
53	.303	.165	.8127	.561	7
54	.328	.203	.8115	.546	6
55	.48354	.55241	1.8103	.87532	5
56	.379	.279	.8090	.518	4
57	.405	.317	.8078	.504	3
58	.430	.355	.8065	.490	2
59	.456	.393	.8053	.476	1
60	.48481	.55431	1.8040	.87462	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.48481	.55431	1.8040	.87462	60
1	.506	.469	.8028	.448	59
2	.532	.507	.8016	.434	58
3	.557	.545	.8003	.420	57
4	.583	.583	.7991	.406	56
5	.48608	.55621	1.7979	.87391	55
6	.634	.659	.7966	.377	54
7	.659	.697	.7954	.363	53
8	.684	.736	.7942	.349	52
9	.710	.774	.7930	.335	51
10	.48735	.55812	1.7917	.87321	50
11	.761	.850	.7905	.306	49
12	.786	.888	.7893	.292	48
13	.811	.926	.7881	.278	47
14	.837	.55964	.7868	.264	46
15	.48862	.56003	1.7856	.87250	45
16	.888	.041	.7844	.235	44
17	.913	.079	.7832	.221	43
18	.938	.117	.7820	.207	42
19	.964	.156	.7808	.193	41
20	.48989	.56194	1.7796	.87178	40
21	.49014	.232	.7783	.164	39
22	.040	.270	.7771	.150	38
23	.065	.309	.7759	.136	37
24	.090	.347	.7747	.121	36
25	.49116	.56385	1.7735	.87107	35
26	.141	.424	.7723	.093	34
27	.166	.462	.7711	.079	33
28	.192	.501	.7700	.064	32
29	.217	.539	.7687	.050	31
30	.49242	.56577	1.7675	.87036	30
31	.268	.616	.7663	.021	29
32	.293	.654	.7651	.87007	28
33	.318	.693	.7639	.86993	27
34	.344	.731	.7627	.978	26
35	.49369	.56769	1.7615	.86964	25
36	.394	.808	.7603	.943	24
37	.419	.846	.7591	.935	23
38	.445	.885	.7579	.921	22
39	.470	.923	.7567	.906	21
40	.49495	.56962	1.7556	.86892	20
41	.521	.57000	.7544	.878	19
42	.546	.039	.7532	.863	18
43	.571	.078	.7520	.849	17
44	.596	.116	.7508	.834	16
45	.49622	.57155	1.7496	.86820	15
46	.647	.193	.7485	.805	14
47	.672	.232	.7473	.791	13
48	.697	.271	.7461	.777	12
49	.723	.309	.7449	.762	11
50	.49748	.57348	1.7437	.86748	10
51	.773	.386	.7426	.733	9
52	.798	.425	.7414	.719	8
53	.824	.464	.7402	.704	7
54	.849	.503	.7391	.690	6
55	.49874	.57541	1.7379	.86675	5
56	.899	.580	.7367	.661	4
57	.924	.619	.7355	.646	3
58	.950	.657	.7344	.632	2
59	.49975	.57735	1.7321	.86603	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.50000	.57735	1.7321	.86603	00
1	.025	.774	.7309	.588	59
2	.050	.813	.7297	.573	58
3	.076	.851	.7286	.559	57
4	.101	.890	.7274	.544	56
5	.50126	.57929	1.7262	.86530	55
6	.151	.57968	.7251	.515	54
7	.176	.58007	.7239	.501	53
8	.201	.046	.7228	.486	52
9	.227	.085	.7216	.471	51
10	.50252	.58124	1.7205	.86457	50
11	.277	.162	.7193	.442	49
12	.302	.201	.7182	.427	48
13	.327	.240	.7170	.413	47
14	.352	.279	.7159	.398	46
15	.50377	.58318	1.7147	.86384	45
16	.403	.357	.7136	.369	44
17	.428	.396	.7124	.354	43
18	.453	.435	.7113	.340	42
19	.478	.474	.7102	.325	41
20	.50503	.58513	1.7090	.86310	40
21	.528	.552	.7079	.295	39
22	.553	.591	.7067	.281	38
23	.578	.631	.7056	.266	37
24	.603	.670	.7045	.251	36
25	.50628	.58709	1.7033	.86237	35
26	.654	.748	.7022	.222	34
27	.679	.787	.7011	.207	33
28	.704	.826	.6999	.192	32
29	.729	.865	.6988	.178	31
30	.50754	.58905	1.6977	.86163	30
31	.779	.944	.6965	.148	29
32	.804	.58983	.6954	.133	28
33	.829	.59022	.6943	.119	27
34	.854	.061	.6932	.104	26
35	.50879	.59101	1.6920	.86089	25
36	.904	.140	.6909	.074	24
37	.929	.179	.6898	.059	23
38	.954	.218	.6887	.045	22
39	.50979	.258	.6875	.030	21
40	.51004	.59297	1.6864	.86015	20
41	.029	.336	.6853	.86000	19
42	.054	.376	.6842	.85985	18
43	.079	.415	.6831	.85970	17
44	.104	.454	.6820	.85956	16
45	.51129	.59494	1.6808	.85941	15
46	.154	.533	.6797	.926	14
47	.179	.573	.6786	.911	13
48	.204	.612	.6775	.896	12
49	.229	.651	.6764	.881	11
50	.51254	.59691	1.6753	.85866	10
51	.279	.730	.6742	.851	9
52	.304	.770	.6731	.836	8
53	.329	.809	.6720	.821	7
54	.354	.849	.6709	.806	6
55	.51379	.59888	1.6698	.85792	5
56	.404	.928	.6687	.777	4
57	.429	.59967	.6676	.762	3
58	.454	.60007	.6665	.747	2
59	.479	.046	.6654	.732	1
60	.51504	.60086	1.6643	.85717	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.51504	.60086	1.6643	.85717	60
1	.529	.126	.6632	.702	59
2	.554	.165	.6621	.687	58
3	.579	.205	.6610	.672	57
4	.604	.245	.6599	.657	56
5	.51628	.60284	1.6588	.85642	55
6	.653	.324	.6577	.627	54
7	.678	.364	.6566	.612	53
8	.703	.403	.6555	.597	52
9	.728	.443	.6545	.582	51
10	.51753	.60483	1.6534	.85567	50
11	.778	.522	.6523	.551	49
12	.803	.562	.6512	.536	48
13	.828	.602	.6501	.521	47
14	.852	.642	.6490	.506	46
15	.51877	.60681	1.6479	.85491	45
16	.902	.721	.6469	.476	44
17	.927	.761	.6458	.461	43
18	.952	.801	.6447	.446	42
19	.51977	.841	.6436	.431	41
20	.52002	.60881	1.6426	.85416	40
21	.026	.921	.6415	.401	39
22	.051	.60960	.6404	.385	38
23	.076	.61000	.6393	.370	37
24	.101	.040	.6383	.355	36
25	.52126	.61080	1.6372	.85340	35
26	.151	.120	.6361	.325	34
27	.175	.160	.6351	.310	33
28	.200	.200	.6340	.294	32
29	.225	.240	.6329	.279	31
30	.52250	.61280	1.6319	.85264	30
31	.275	.320	.6308	.249	29
32	.299	.360	.6297	.234	28
33	.324	.400	.6287	.218	27
34	.349	.440	.6276	.203	26
35	.52374	.61480	1.6265	.85188	25
36	.399	.520	.6255	.173	24
37	.423	.561	.6244	.157	23
38	.448	.601	.6234	.142	22
39	.473	.641	.6223	.127	21
40	.52498	.61681	1.6212	.85112	20
41	.522	.721	.6202	.096	19
42	.547	.761	.6191	.081	18
43	.572	.801	.6181	.066	17
44	.597	.842	.6170	.051	16
45	.52621	.61882	1.6160	.85035	15
46	.646	.922	.6149	.020	14
47	.671	.61962	.6139	.85005	13
48	.696	.62003	.6128	.84989	12
49	.720	.043	.6118	.974	11
50	.52745	.62083	1.6107	.84959	10
51	.770	.124	.6097	.943	9
52	.794	.164	.6087	.928	8
53	.819	.204	.6076	.913	7
54	.844	.245	.6066	.897	6
55	.52869	.62285	1.6055	.84882	5
56	.893	.325	.6045	.866	4
57	.918	.366	.6034	.851	3
58	.943	.406	.6024	.836	2
59	.967	.446	.6014	.820	1
60	.52992	.62487	1.6003	.84805	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.52992	.62487	1.6003	.84805	60
1	.53017	.527	.5993	.789	59
2	.041	.568	.5983	.774	58
3	.066	.608	.5972	.759	57
4	.091	.649	.5962	.743	56
5	.53115	.62689	1.5952	.84728	55
6	.140	.730	.5941	.712	54
7	.164	.770	.5931	.697	53
8	.189	.811	.5921	.681	52
9	.214	.852	.5911	.666	51
10	.53238	.62892	1.5900	.84650	50
11	.263	.933	.5890	.635	49
12	.288	.62973	.5880	.619	48
13	.312	.63014	.5869	.604	47
14	.337	.055	.5859	.588	46
15	.53361	.63095	1.5849	.84573	45
16	.386	.136	.5839	.557	44
17	.411	.177	.5829	.542	43
18	.435	.217	.5818	.526	42
19	.460	.258	.5808	.511	41
20	.53484	.63299	1.5798	.84495	40
21	.509	.340	.5788	.480	39
22	.534	.380	.5778	.464	38
23	.558	.421	.5768	.448	37
24	.583	.462	.5757	.433	36
25	.53607	.63503	1.5747	.84417	35
26	.632	.544	.5737	.402	34
27	.656	.584	.5727	.386	33
28	.681	.625	.5717	.370	32
29	.705	.666	.5707	.355	31
30	.53730	.63707	1.5697	.84339	30
31	.754	.748	.5687	.324	29
32	.779	.789	.5677	.308	28
33	.804	.830	.5667	.292	27
34	.828	.871	.5657	.277	26
35	.53853	.63912	1.5647	.84261	25
36	.877	.953	.5637	.245	24
37	.902	.63994	.5627	.230	23
38	.926	.64035	.5617	.214	22
39	.951	.076	.5607	.198	21
40	.53975	.64117	1.5597	.84182	20
41	.54000	.158	.5587	.167	19
42	.024	.199	.5577	.151	18
43	.049	.240	.5567	.135	17
44	.073	.281	.5557	.120	16
45	.54097	.64322	1.5547	.84104	15
46	.122	.363	.5537	.088	14
47	.146	.404	.5527	.072	13
48	.171	.446	.5517	.057	12
49	.195	.487	.5507	.041	11
50	.54220	.64528	1.5497	.84025	10
51	.244	.569	.5487	.84009	9
52	.269	.610	.5477	.83994	8
53	.293	.652	.5468	.978	7
54	.317	.693	.5458	.962	6
55	.54342	.64734	1.5448	.83946	5
56	.366	.775	.5438	.930	4
57	.391	.817	.5428	.915	3
58	.415	.858	.5418	.899	2
59	.440	.899	.5408	.883	1
60	.54464	.64941	1.5399	.83867	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.54464	.64941	1.5399	.83867	60
1	.488	.64982	.5389	.851	59
2	.513	.65024	.5379	.835	58
3	.537	.065	.5369	.819	57
4	.561	.106	.5359	.804	56
5	.54586	.65148	1.5350	.83788	55
6	.610	.189	.5340	.772	54
7	.635	.231	.5330	.756	53
8	.659	.272	.5320	.740	52
9	.683	.314	.5311	.724	51
10	.54708	.65355	1.5301	.83708	50
11	.732	.397	.5291	.692	49
12	.756	.438	.5282	.676	48
13	.781	.480	.5272	.660	47
14	.805	.521	.5262	.645	46
15	.54829	.65563	1.5253	.83629	45
16	.854	.604	.5243	.613	44
17	.878	.646	.5233	.597	43
18	.902	.688	.5224	.581	42
19	.927	.729	.5214	.565	41
20	.54951	.65771	1.5204	.83549	40
21	.975	.813	.5195	.533	39
22	.54999	.854	.5185	.517	38
23	.55024	.896	.5175	.501	37
24	.048	.938	.5166	.485	36
25	.55072	.65980	1.5156	.83469	35
26	.097	.66021	.5147	.453	34
27	.121	.063	.5137	.437	33
28	.145	.105	.5127	.421	32
29	.169	.147	.5118	.405	31
30	.55194	.66189	1.5108	.83389	30
31	.218	.230	.5099	.373	29
32	.242	.272	.5089	.356	28
33	.266	.314	.5080	.340	27
34	.291	.356	.5070	.324	26
35	.55315	.66398	1.5061	.83308	25
36	.339	.440	.5051	.292	24
37	.363	.482	.5042	.276	23
38	.388	.524	.5032	.260	22
39	.412	.566	.5023	.244	21
40	.55346	.66608	1.5013	.83228	20
41	.460	.650	.5004	.212	19
42	.484	.692	.4994	.195	18
43	.509	.734	.4985	.179	17
44	.533	.776	.4975	.163	16
45	.55557	.66818	1.4966	.83147	15
46	.581	.860	.4957	.131	14
47	.605	.902	.4947	.115	13
48	.630	.944	.4938	.098	12
49	.654	.986	.4928	.082	11
50	.55678	.67028	1.4919	.83066	10
51	.702	.071	.4910	.050	9
52	.726	.113	.4900	.034	8
53	.750	.155	.4891	.017	7
54	.775	.197	.4882	.83001	6
55	.55799	.67239	1.4872	.82985	5
56	.823	.282	.4863	.969	4
57	.847	.324	.4854	.953	3
58	.871	.366	.4844	.936	2
59	.895	.409	.4835	.920	1
60	.55909	.67451	1.4826	.82904	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.55919	.67451	1.4826	.82904	60
1	.943	493	.4816	.887	59
2	.968	536	.4807	.871	58
3	.55922	578	.4798	.855	57
4	.56016	620	.4788	.839	56
5	.56040	.67663	1.4779	.82822	55
6	.064	705	.4770	.806	54
7	.088	748	.4761	.790	53
8	.112	790	.4751	.773	52
9	.136	832	.4742	.757	51
10	.56160	.67875	1.4733	.82741	50
11	.184	917	.4724	.724	49
12	.208	.67960	.4715	.708	48
13	.232	.68002	.4705	.692	47
14	.256	.045	.4696	.675	46
15	.56280	.68088	1.4687	.82659	45
16	.305	130	.4678	.643	44
17	.329	173	.4669	.628	43
18	.353	215	.4659	.610	42
19	.377	258	.4650	.593	41
20	.56401	.68301	1.4641	.82577	40
21	.425	343	.4632	.561	39
22	.449	386	.4623	.544	38
23	.473	429	.4614	.528	37
24	.497	471	.4605	.511	36
25	.56521	.68514	1.4596	.82495	35
26	.545	557	.4586	.478	34
27	.569	600	.4577	.462	33
28	.593	642	.4568	.446	32
29	.617	685	.4559	.429	31
30	.56641	.68728	1.4550	.82413	30
31	.665	771	.4541	.396	29
32	.689	814	.4532	.380	28
33	.713	857	.4523	.363	27
34	.736	900	.4514	.347	26
35	.56760	.68942	1.4505	.82330	25
36	.784	.68985	.4496	.314	24
37	.808	.69028	.4487	.297	23
38	.832	.071	.4478	.281	22
39	.856	.114	.4469	.264	21
40	.56880	.69157	1.4460	.82248	20
41	.904	200	.4451	.231	19
42	.928	243	.4442	.214	18
43	.952	286	.4433	.198	17
44	.56976	.329	.4424	.181	16
45	.57000	.69372	1.4415	.82165	15
46	.024	416	.4406	.148	14
47	.047	459	.4397	.132	13
48	.071	502	.4388	.115	12
49	.095	545	.4379	.098	11
50	.57119	.69588	1.4370	.82082	10
51	.143	631	.4361	.065	9
52	.167	675	.4352	.048	8
53	.191	718	.4344	.032	7
54	.215	761	.4335	.015	6
55	.57238	.69804	1.4326	.81999	5
56	.262	847	.4317	.982	4
57	.286	891	.4308	.965	3
58	.310	934	.4299	.949	2
59	.334	.69977	.4290	.932	1
60	.57358	.70021	1.4281	.81915	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.57358	.70021	1.4281	.81915	60
1	.381	.064	.4273	.899	59
2	.405	.107	.4264	.882	58
3	.429	.151	.4255	.865	57
4	.453	.194	.4246	.848	56
5	.57477	.70238	1.4237	.81832	55
6	.501	.281	.4229	.815	54
7	.524	.325	.4220	.798	53
8	.548	.368	.4211	.782	52
9	.572	.412	.4202	.765	51
10	.57596	.70455	1.4193	.81748	50
11	.619	.499	.4185	.731	49
12	.643	.542	.4176	.714	48
13	.667	.586	.4167	.698	47
14	.691	.629	.4158	.681	46
15	.57715	.70673	1.4150	.81664	45
16	.738	.717	.4141	.647	44
17	.762	.760	.4132	.631	43
18	.786	.804	.4124	.614	42
19	.810	.848	.4115	.597	41
20	.57833	.70891	1.4106	.81580	40
21	.857	.935	.4097	.563	39
22	.881	.70979	.4089	.546	38
23	.904	.71023	.4080	.530	37
24	.928	.066	.4071	.513	36
25	.57952	.71110	1.4063	.81496	35
26	.976	.154	.4054	.479	34
27	.57999	.198	.4045	.462	33
28	.58023	.242	.4037	.445	32
29	.047	.285	.4028	.428	31
30	.58070	.71329	1.4019	.81412	30
31	.094	.373	.4011	.395	29
32	.118	.417	.4002	.378	28
33	.141	.461	.3994	.361	27
34	.165	.505	.3985	.344	26
35	.58189	.71549	1.3976	.81327	25
36	.212	.593	.3968	.310	24
37	.236	.637	.3959	.293	23
38	.260	.681	.3951	.276	22
39	.283	.725	.3942	.259	21
40	.58307	.71769	1.3934	.81242	20
41	.330	.813	.3925	.225	19
42	.354	.857	.3916	.208	18
43	.378	.901	.3908	.191	17
44	.401	.946	.3899	.174	16
45	.58425	.71990	1.3891	.81157	15
46	.449	.72034	.3882	.140	14
47	.472	.078	.3874	.123	13
48	.496	.122	.3865	.106	12
49	.519	.167	.3857	.089	11
50	.58543	.72211	1.3848	.81072	10
51	.567	.255	.3840	.055	9
52	.590	.299	.3831	.038	8
53	.614	.344	.3823	.021	7
54	.637	.388	.3814	.004	6
55	.58661	.72432	1.3806	.80987	5
56	.684	.477	.3798	.970	4
57	.708	.521	.3789	.953	3
58	.731	.565	.3781	.936	2
59	.755	.610	.3772	.919	1
60	.58779	.72654	1.3764	.80902	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.58779	.72654	1.3704	.80902	60
1	802	699	.3755	885	59
2	826	743	.3747	867	58
3	849	788	.3739	850	57
4	873	832	.3730	833	56
5	.58896	.72877	1.3722	.80816	55
6	920	921	.3713	799	54
7	943	.72966	.3705	782	53
8	967	.73010	.3697	765	52
9	.58990	055	.3688	748	51
10	50014	73100	1.3680	.80730	50
11	037	144	.3672	713	49
12	061	180	.3663	696	48
13	084	234	.3655	679	47
14	108	278	.3647	662	46
15	59131	73323	1.3638	.80644	45
16	154	368	.3630	627	44
17	178	413	.3622	610	43
18	201	457	.3613	593	42
19	225	502	.3605	576	41
20	59248	73547	1.3597	.80558	40
21	272	592	.3588	541	39
22	295	637	.3580	524	38
23	318	681	.3572	507	37
24	342	726	.3564	489	36
25	59365	73771	1.3555	.80472	35
26	389	816	.3547	455	34
27	412	861	.3539	438	33
28	436	906	.3531	420	32
29	459	951	.3522	403	31
30	59482	73996	1.3514	.80386	30
31	506	74041	.3506	368	29
32	529	086	.3498	351	28
33	552	131	.3490	334	27
34	576	176	.3481	316	26
35	59599	74221	1.3473	.80299	25
36	622	267	.3465	282	24
37	646	312	.3457	264	23
38	669	357	.3449	247	22
39	693	402	.3440	230	21
40	59716	74447	1.3432	.80212	20
41	739	402	.3424	195	19
42	763	538	.3416	178	18
43	786	583	.3408	160	17
44	809	628	.3400	143	16
45	59832	74674	1.3392	.80125	15
46	856	719	.3384	108	14
47	879	764	.3375	091	13
48	902	810	.3367	073	12
49	926	855	.3359	056	11
50	59949	74900	1.3351	.80038	10
51	972	946	.3343	021	9
52	59995	74991	.3335	.80003	8
53	60019	75037	.3327	.79986	7
54	042	082	.3319	968	6
55	60065	75128	1.3311	.79951	5
56	089	173	.3303	934	4
57	112	219	.3295	916	3
58	135	264	.3287	899	2
59	158	310	.3278	881	1
60	.60182	.75355	1.3270	.79864	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.60182	.75355	1.3270	.79864	60
1	205	401	.3262	846	59
2	228	447	.3254	829	58
3	251	492	.3246	811	57
4	274	538	.3238	793	56
5	.60298	.75584	1.3230	.79776	55
6	321	629	.3222	758	54
7	344	675	.3214	741	53
8	367	721	.3206	723	52
9	390	767	.3198	706	51
10	60414	.75812	1.3190	.79688	50
11	437	858	.3182	671	49
12	460	904	.3175	653	48
13	483	950	.3167	635	47
14	506	.75996	.3159	618	46
15	.60529	.76042	1.3151	.79600	45
16	553	088	.3143	583	44
17	576	134	.3135	565	43
18	599	180	.3127	547	42
19	622	226	.3119	530	41
20	60645	.76272	1.3111	.79512	40
21	668	318	.3103	494	39
22	691	364	.3095	477	38
23	714	410	.3087	459	37
24	738	456	.3079	441	36
25	60761	.76502	1.3072	.79424	35
26	784	548	.3064	406	34
27	807	594	.3056	388	33
28	830	640	.3048	371	32
29	853	686	.3040	353	31
30	60876	.76733	1.3032	.79335	30
31	899	779	.3024	318	29
32	922	825	.3017	300	28
33	945	871	.3009	282	27
34	968	918	.3001	264	26
35	60991	.76964	1.3033	.79247	25
36	61015	.77010	.2985	229	24
37	038	057	.2977	211	23
38	061	103	.2970	193	22
39	084	149	.2962	176	21
40	61107	.77196	1.2954	.79158	20
41	130	242	.2946	140	19
42	153	289	.2938	122	18
43	176	335	.2931	105	17
44	199	382	.2923	087	16
45	.61222	.77428	1.2915	.79069	15
46	245	475	.2907	051	14
47	268	521	.2900	033	13
48	291	568	.2892	79616	12
49	314	615	.2884	.78998	11
50	.61337	.77661	1.2876	.78980	10
51	360	708	.2869	962	9
52	383	754	.2861	944	8
53	406	801	.2853	926	7
54	429	848	.2846	908	6
55	.61451	.77895	1.2838	.78891	5
56	474	941	.2830	873	4
57	497	.77988	.2822	855	3
58	520	.78035	.2815	837	2
59	543	082	.2807	819	1
60	.61566	.78129	1.2799	.78801	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	.61566	.78129	1.2799	.78801	60
1	.589	175	.2792	783	59
2	.612	222	.2784	765	58
3	.635	269	.2776	747	57
4	.658	316	.2769	729	56
5	.61681	.78363	1.2761	.78711	55
6	.704	410	.2753	694	54
7	.726	457	.2746	676	53
8	.749	504	.2738	658	52
9	.772	551	.2731	640	51
10	.61795	.78598	1.2723	.78622	50
11	.818	645	.2715	604	49
12	.841	692	.2708	586	48
13	.864	739	.2700	568	47
14	.887	786	.2693	550	46
15	.61909	.78834	1.2685	.78532	45
16	.932	881	.2677	514	44
17	.955	928	.2670	496	43
18	.61978	.78975	1.2662	.78442	42
19	.62001	.79022	.2655	460	41
20	.62024	.79070	1.2647	.78442	40
21	.046	117	.2640	424	39
22	.069	164	.2632	405	38
23	.092	212	.2624	387	37
24	.115	259	.2617	369	36
25	.62138	.79306	1.2609	.78351	35
26	.160	354	.2602	333	34
27	.183	401	.2594	315	33
28	.206	449	.2587	297	32
29	.229	496	.2579	279	31
30	.62251	.79544	1.2572	.78261	30
31	.274	591	.2564	243	29
32	.297	639	.2557	225	28
33	.320	686	.2549	206	27
34	.342	734	.2542	188	26
35	.62365	.79781	1.2534	.78170	25
36	.388	829	.2527	152	24
37	.411	877	.2519	134	23
38	.433	924	.2512	116	22
39	.456	.79972	.2504	98	21
40	.62479	.80020	1.2497	.78079	20
41	.502	967	.2489	91	19
42	.524	115	.2482	94	18
43	.547	163	.2475	97	17
44	.570	211	.2467	78007	16
45	.62592	.80258	1.2460	.77988	15
46	.615	308	.2452	970	14
47	.638	354	.2445	952	13
48	.660	402	.2437	934	12
49	.683	450	.2430	916	11
50	.62706	.80498	1.2423	.77897	10
51	.728	546	.2415	879	9
52	.751	594	.2408	861	8
53	.774	642	.2401	843	7
54	.796	690	.2393	824	6
55	.62819	.80738	1.2386	.77806	5
56	.842	786	.2378	788	4
57	.864	834	.2371	769	3
58	.887	882	.2364	751	2
59	.909	930	.2356	733	1
60	.62932	.80978	1.2349	.77715	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	.62932	.80978	1.2349	.77715	60
1	.955	.81027	.2342	696	59
2	.62977	.075	.2334	678	58
3	.63000	123	.2327	660	57
4	.022	171	.2320	641	56
5	.63045	.81220	1.2312	.77623	55
6	.068	268	.2305	605	54
7	.096	316	.2298	586	53
8	.113	364	.2290	568	52
9	.135	413	.2283	550	51
10	.63158	.81461	1.2276	.77531	50
11	.180	510	.2268	513	49
12	.203	558	.2261	494	48
13	.225	606	.2254	476	47
14	.248	655	.2247	458	46
15	.63271	.81703	1.2239	.77439	45
16	.293	752	.2232	421	44
17	.316	800	.2225	402	43
18	.338	849	.2218	384	42
19	.361	898	.2210	366	41
20	.63383	.81946	1.2203	.77347	40
21	.406	.81995	.2196	329	39
22	.428	.82044	.2189	310	38
23	.451	.092	.2181	292	37
24	.473	141	.2174	273	36
25	.63496	.82190	1.2167	.77255	35
26	.518	238	.2160	236	34
27	.540	287	.2153	218	33
28	.563	336	.2145	199	32
29	.585	385	.2138	181	31
30	.63608	.82434	1.2131	.77162	30
31	.630	483	.2124	144	29
32	.653	531	.2117	125	28
33	.675	580	.2109	107	27
34	.698	629	.2102	98	26
35	.63720	.82678	1.2095	.77070	25
36	.742	727	.2088	95	24
37	.765	776	.2081	93	23
38	.787	825	.2074	77014	22
39	.810	874	.2066	.76996	21
40	.63832	.82923	1.2059	.76977	20
41	.854	.82972	.2052	959	19
42	.877	.83022	.2045	940	18
43	.899	.071	.2038	921	17
44	.922	120	.2031	903	16
45	.63944	.83169	1.2024	.76884	15
46	.966	218	.2017	866	14
47	.63989	268	.2009	847	13
48	.64011	317	.2002	828	12
49	.033	366	.1995	810	11
50	.64056	.83415	1.1988	.76791	10
51	.078	465	.1981	772	9
52	.100	514	.1974	754	8
53	.123	564	.1967	735	7
54	.145	613	.1960	717	6
55	.64167	.83662	1.1953	.76698	5
56	.190	712	.1946	679	4
57	.212	761	.1939	661	3
58	.234	811	.1932	642	2
59	.256	860	.1925	623	1
60	.64279	.83910	1.1918	.76604	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'



	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.64279	.83910	1.1918	.79604	60
1	301	.83960	.1910	586	59
2	323	.84099	.1903	567	58
3	346	.856	.1896	548	57
4	368	108	.1889	530	56
5	.64390	.84158	1.1882	.76511	55
6	412	208	.1875	492	54
7	435	258	.1868	473	53
8	457	307	.1861	455	52
9	479	357	.1854	436	51
10	.64501	.84467	1.1847	.76417	50
11	524	457	.1840	398	49
12	546	507	.1833	380	48
13	568	556	.1826	361	47
14	590	606	.1819	342	46
15	.64612	.84656	1.1812	.76323	45
16	635	706	.1806	304	44
17	657	756	.1799	286	43
18	679	806	.1792	267	42
19	701	856	.1785	248	41
20	.64723	.84906	1.1778	.76229	40
21	746	.84956	.1771	210	39
22	768	.85006	.1764	192	38
23	790	857	.1757	173	37
24	812	107	.1750	154	36
25	.64834	.85157	1.1743	.76135	35
26	856	207	.1736	116	34
27	878	257	.1729	97	33
28	901	308	.1722	78	32
29	923	358	.1715	59	31
30	.64945	.85408	1.1708	.76041	30
31	967	458	.1702	42	29
32	.64989	509	.1695	.76003	28
33	.65011	559	.1688	.75984	27
34	633	609	.1681	965	26
35	.65055	.85600	1.1674	.75946	25
36	677	710	.1667	927	24
37	100	761	.1660	908	23
38	122	811	.1653	889	22
39	144	862	.1647	870	21
40	.65166	.85912	1.1640	.75851	20
41	188	.85963	.1633	832	19
42	210	.86014	.1626	813	18
43	232	664	.1619	794	17
44	254	115	.1612	775	16
45	.65276	.86166	1.1606	.75756	15
46	298	216	.1599	738	14
47	320	267	.1592	719	13
48	342	318	.1585	700	12
49	364	368	.1578	680	11
50	.65386	.86419	1.1571	.75661	10
51	408	470	.1565	642	9
52	430	521	.1558	623	8
53	452	572	.1551	604	7
54	474	623	.1544	585	6
55	.65496	.86674	1.1538	.75566	5
56	518	725	.1531	547	4
57	540	776	.1524	528	3
58	562	827	.1517	509	2
59	584	878	.1510	490	1
60	.65606	.86929	1.1504	.75471	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	
0	.65606	.86929	1.1504	.75471	60
1	628	.86980	.1497	452	59
2	650	.87031	.1490	433	58
3	672	682	.1483	414	57
4	694	133	.1477	395	56
5	.65716	.87184	1.1470	.75375	55
6	738	236	.1463	356	54
7	759	287	.1456	337	53
8	781	338	.1450	318	52
9	803	389	.1443	299	51
10	.65825	.87441	1.1435	.75280	50
11	847	492	.1430	261	49
12	869	543	.1423	241	48
13	891	595	.1416	222	47
14	913	646	.1410	203	46
15	.65935	.87698	1.1403	.75184	45
16	956	749	.1396	165	44
17	.65978	801	.1389	146	43
18	.66000	852	.1383	126	42
19	922	904	.1376	107	41
20	.66044	.87955	1.1369	.75088	40
21	966	.88007	.1363	969	39
22	988	959	.1356	950	38
23	109	110	.1349	930	37
24	131	162	.1343	.75011	36
25	.66153	.88214	1.1336	.74992	35
26	175	265	.1329	973	34
27	197	317	.1323	953	33
28	218	369	.1316	934	32
29	240	421	.1310	915	31
30	.66262	.88473	1.1303	.74896	30
31	284	524	.1296	876	29
32	306	576	.1290	857	28
33	327	628	.1283	838	27
34	349	680	.1276	818	26
35	.66371	.88732	1.1270	.74799	25
36	393	784	.1263	780	24
37	414	836	.1257	760	23
38	436	888	.1250	741	22
39	458	940	.1243	722	21
40	.66480	.88992	1.1237	.74703	20
41	501	.89045	.1230	683	19
42	523	937	.1224	664	18
43	545	149	.1217	644	17
44	566	201	.1211	625	16
45	.66588	.89253	1.1204	.74606	15
46	610	308	.1197	586	14
47	632	358	.1191	567	13
48	653	410	.1184	548	12
49	675	463	.1178	528	11
50	.66697	.89515	1.1171	.74509	10
51	718	567	.1165	489	9
52	740	620	.1158	470	8
53	762	672	.1152	451	7
54	783	725	.1145	431	6
55	.66805	.89777	1.1139	.74412	5
56	827	830	.1132	392	4
57	848	883	.1126	373	3
58	870	935	.1119	355	2
59	891	988	.1113	334	1
60	.66913	.90040	1.1106	.74314	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	.66913	.90040	1.1106	.74314	60
1	935	003	.1100	295	59
2	956	146	.1093	276	58
3	978	199	.1087	256	57
4	.66999	251	.1080	237	56
5	.67021	.90304	1.1074	.74217	55
6	043	357	.1067	198	54
7	064	410	.1061	178	53
8	086	463	.1054	159	52
9	107	516	.1048	139	51
10	.67129	.90569	1.1041	.74120	50
11	151	621	.1035	100	49
12	172	674	.1028	080	48
13	194	727	.1022	061	47
14	215	781	.1016	041	46
15	.67237	.90834	1.1009	.74022	45
16	258	887	.1003	.74002	44
17	280	940	.0996	.73983	43
18	301	.90993	.0990	963	42
19	323	.91046	.0983	944	41
20	.67344	.91099	1.0977	.73924	40
21	366	153	.0971	904	39
22	387	205	.0964	885	38
23	409	259	.0958	865	37
24	430	313	.0951	846	36
25	.67452	.91366	1.0945	.73826	35
26	473	419	.0939	806	34
27	495	473	.0932	787	33
28	516	526	.0926	767	32
29	538	580	.0919	747	31
30	.67559	.91633	1.0913	.73728	30
31	580	687	.0907	708	29
32	602	740	.0900	688	28
33	623	794	.0894	669	27
34	645	847	.0888	649	26
35	.67666	.91901	1.0881	.73629	25
36	688	.91955	.0875	610	24
37	709	.92008	.0869	590	23
38	730	062	.0862	570	22
39	752	116	.0856	551	21
40	.67773	.92170	1.0850	.73531	20
41	795	224	.0843	511	19
42	816	277	.0837	491	18
43	837	331	.0831	472	17
44	859	385	.0824	452	16
45	.67880	.92439	1.0818	.73432	15
46	901	493	.0812	413	14
47	923	547	.0805	393	13
48	944	601	.0799	373	12
49	965	655	.0793	353	11
50	.67987	.92709	1.0786	.73333	10
51	.68008	763	.0780	314	9
52	029	817	.0774	294	8
53	051	872	.0768	274	7
54	072	926	.0761	254	6
55	.68093	.92980	1.0755	.73234	5
56	115	.93034	.0749	215	4
57	136	088	.0742	195	3
58	157	143	.0736	175	2
59	179	197	.0730	155	1
60	.68200	.93252	1.0724	.73135	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
0	.68200	.93252	1.0724	.73135	60
1	221	306	.0717	116	59
2	242	360	.0711	096	58
3	264	415	.0705	076	57
4	285	469	.0699	056	56
5	.68306	.93524	1.0692	.73036	55
6	327	578	.0686	.73016	54
7	349	633	.0680	.72996	53
8	370	688	.0674	976	52
9	391	742	.0668	957	51
10	.68412	.93797	1.0661	.72937	50
11	484	852	.0655	917	49
12	455	906	.0649	897	48
13	476	.93961	.0643	877	47
14	497	.94016	.0637	857	46
15	.68518	.94071	1.0630	.72837	45
16	539	125	.0624	817	44
17	561	180	.0618	797	43
18	582	235	.0612	777	42
19	603	290	.0606	757	41
20	.68624	.94345	1.0599	.72737	40
21	645	400	.0593	717	39
22	666	455	.0587	697	38
23	688	510	.0581	677	37
24	709	565	.0575	657	36
25	.68730	.94620	1.0569	.72637	35
26	751	676	.0562	617	34
27	772	731	.0556	597	33
28	793	786	.0550	577	32
29	814	841	.0544	557	31
30	.68835	.94896	1.0538	.72537	30
31	857	.94952	.0532	517	29
32	878	.95007	.0526	497	28
33	899	062	.0519	477	27
34	920	118	.0513	457	26
35	.68941	.95173	1.0507	.72437	25
36	962	229	.0501	417	24
37	.68983	284	.0495	397	23
38	.69004	340	.0489	377	22
39	025	395	.0483	357	21
40	.69046	.95451	1.0477	.72337	20
41	067	506	.0470	317	19
42	088	562	.0464	297	18
43	109	618	.0458	277	17
44	130	673	.0452	257	16
45	.69151	.95729	1.0446	.72236	15
46	172	785	.0440	216	14
47	193	841	.0434	196	13
48	214	897	.0428	176	12
49	235	.95952	.0422	156	11
50	.69256	.96008	1.0416	.72136	10
51	277	064	.0410	116	9
52	298	120	.0404	096	8
53	319	176	.0398	076	7
54	340	232	.0392	056	6
55	.69361	.96288	1.0385	.72035	5
56	382	344	.0379	.72015	4
57	403	400	.0373	.71995	3
58	424	457	.0367	974	2
59	445	513	.0361	954	1
60	.69466	.96568	1.0355	.71934	0
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	

'	N Sin	N Tan	N Cot	N Cos	'
<b>0</b>	.60466	.96569	1.0355	.71934	<b>60</b>
1	487	625	.0349	914	59
2	508	681	.0343	894	58
3	529	738	.0337	873	57
4	549	794	.0331	853	56
<b>5</b>	.69570	.96850	1.0325	.71833	<b>55</b>
6	591	907	.0319	813	54
7	612	.96963	.0313	792	53
8	633	.97020	.0307	772	52
9	654	076	.0301	752	51
<b>10</b>	.69675	.97133	1.0295	.71732	<b>50</b>
11	696	189	.0289	711	49
12	717	246	.0283	691	48
13	737	302	.0277	671	47
14	758	359	.0271	650	46
<b>15</b>	.69779	.97416	1.0265	.71630	<b>45</b>
16	800	472	.0259	610	44
17	821	529	.0253	590	43
18	842	586	.0247	569	42
19	862	643	.0241	549	41
<b>20</b>	.69883	.97700	1.0235	.71529	<b>40</b>
21	904	755	.0230	508	39
22	925	813	.0224	488	38
23	946	870	.0218	468	37
24	966	927	.0212	447	36
<b>25</b>	.69987	.97984	1.0206	.71427	<b>35</b>
26	70008	.98041	.0200	407	34
27	029	098	.0194	386	33
28	049	155	.0188	366	32
29	070	213	.0182	345	31
<b>30</b>	.70091	.98270	1.0176	.71325	<b>30</b>
31	112	327	.0170	305	29
32	132	384	.0164	284	28
33	153	441	.0158	264	27
34	174	499	.0152	243	26
<b>35</b>	.70195	.98556	1.0147	.71223	<b>25</b>
36	215	613	.0141	203	24
37	236	671	.0135	182	23
38	257	728	.0129	162	22
39	277	786	.0123	141	21
<b>40</b>	.70298	.98843	1.0117	.71121	<b>20</b>
41	319	931	.0111	100	19
42	339	.98958	.0105	080	18
43	360	.99015	.0099	059	17
44	381	073	.0094	039	16
<b>45</b>	.70401	.99131	1.0088	.71019	<b>15</b>
46	422	139	.0082	70998	14
47	443	247	.0076	978	13
48	463	304	.0070	957	12
49	484	362	.0064	937	11
<b>50</b>	.70505	.99420	1.0058	.70916	<b>10</b>
51	525	478	.0052	896	9
52	546	536	.0047	875	8
53	567	594	.0041	855	7
54	587	652	.0035	834	6
<b>55</b>	.70608	.99710	1.0029	.70813	<b>5</b>
56	628	768	.0023	793	4
57	649	826	.0017	772	3
58	670	884	.0012	752	2
59	690	.99942	.0006	731	1
<b>60</b>	.70711	1.0000	1.0000	.70711	<b>0</b>
	N Cos	N Cot	N Tan	N Sin	'



表 IV

乘方及方根



數	平方	立方	平方根	立方根	數	平方	立方	平方根	立方根
1	1	1	1.000	1.000	51	2,601	132,651	7.141	3.703
2	4	8	1.414	1.259	52	2,704	140,608	7.211	3.732
3	9	27	1.732	1.442	53	2,809	148,877	7.280	3.766
4	16	64	2.000	1.587	54	2,916	157,464	7.348	3.779
5	25	125	2.236	1.709	55	3,025	166,375	7.416	3.802
6	36	216	2.449	1.817	56	3,136	175,616	7.483	3.825
7	49	343	2.645	1.912	57	3,249	185,193	7.549	3.848
8	64	512	2.828	2.000	58	3,364	195,112	7.615	3.870
9	81	729	3.000	2.080	59	3,481	205,379	7.681	3.892
10	100	1,000	3.162	2.154	60	3,600	216,000	7.745	3.914
11	121	1,331	3.316	2.223	61	3,721	226,981	7.810	3.936
12	144	1,728	3.464	2.289	62	3,844	238,328	7.874	3.957
13	169	2,197	3.605	2.351	63	3,969	250,047	7.937	3.979
14	196	2,744	3.741	2.410	64	4,096	262,144	8.000	4.000
15	225	3,375	3.872	2.466	65	4,225	274,625	8.062	4.020
16	256	4,096	4.000	2.519	66	4,356	287,496	8.124	4.041
17	289	4,913	4.123	2.571	67	4,489	300,763	8.185	4.061
18	324	5,832	4.242	2.620	68	4,624	314,432	8.246	4.081
19	361	6,859	4.358	2.668	69	4,761	328,509	8.306	4.101
20	400	8,000	4.472	2.714	70	4,900	343,000	8.366	4.121
21	441	9,261	4.582	2.758	71	5,041	357,911	8.426	4.140
22	484	10,648	4.690	2.802	72	5,184	373,248	8.485	4.160
23	529	12,167	4.795	2.843	73	5,329	389,017	8.544	4.179
24	576	13,824	4.898	2.884	74	5,476	405,224	8.602	4.198
25	625	15,625	5.000	2.924	75	5,625	421,875	8.660	4.217
26	676	17,576	5.099	2.962	76	5,776	438,976	8.717	4.235
27	729	19,683	5.196	3.000	77	5,929	456,533	8.774	4.254
28	784	21,952	5.291	3.036	78	6,084	474,552	8.831	4.272
29	841	24,389	5.385	3.072	79	6,241	493,039	8.888	4.290
30	900	27,000	5.477	3.107	80	6,400	512,000	8.944	4.308
31	961	29,791	5.567	3.141	81	6,561	531,441	9.000	4.326
32	1,024	32,768	5.656	3.174	82	6,724	551,368	9.055	4.344
33	1,089	35,937	5.744	3.207	83	6,889	571,787	9.110	4.362
34	1,156	39,304	5.830	3.239	84	7,056	592,704	9.165	4.379
35	1,225	42,875	6.916	3.271	85	7,225	614,125	9.219	4.396
36	1,296	46,656	6.000	3.301	86	7,396	636,056	9.273	4.414
37	1,369	50,653	6.082	3.332	87	7,569	658,503	9.327	4.431
38	1,444	54,872	6.164	3.361	88	7,744	681,472	9.380	4.447
39	1,521	59,319	6.244	3.391	89	7,921	704,969	9.433	4.464
40	1,600	64,000	6.324	3.419	90	8,100	729,000	9.486	4.481
41	1,681	68,921	6.403	3.448	91	8,281	753,571	9.539	4.497
42	1,764	74,088	6.480	3.476	92	8,464	778,688	9.591	4.514
43	1,849	79,507	6.557	3.503	93	8,649	804,357	9.643	4.530
44	1,936	85,184	6.633	3.530	94	8,836	830,584	9.695	4.546
45	2,025	91,125	6.708	3.556	95	9,025	857,375	9.746	4.562
46	2,116	97,336	6.782	3.583	96	9,216	884,736	9.797	4.578
47	2,209	103,823	6.855	3.608	97	9,409	912,673	9.848	4.594
48	2,304	110,592	6.928	3.634	98	9,604	941,192	9.899	4.610
49	2,401	117,649	6.998	3.659	99	9,801	970,299	9.949	4.626
50	2,500	125,000	7.071	3.684	100	10,000	1,000,000	10.000	4.641





表 V  
公 式



# 公 式

## 平 面 幾 何

1. 圓周之長  $= 2\pi r = 3.14159 d$
2. 圓之面積  $= \pi r^2$
3. 三角形之面積  $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \sin C$   
 $= \frac{1}{2}r(a+b+c)$   
 $= \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
4. 平行四邊形之面積  $= bh$
5. 正方形之面積  $= a^2$
6. 等邊三角形之面積  $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
7. 梯形之面積  $= \frac{1}{2}h(b_1+b_2) = hm$

## 立 體 幾 何

1. 角柱之體積  $= ba$
2. 角錐之體積  $= \frac{1}{3}ba$
3. 直圓柱之體積  $= \pi r^2 a$
4. 直圓柱諸面積之和  $= 2\pi r(r+a)$
5. 直圓柱之側面積  $= 2\pi r a$
6. 直圓錐之體積  $= \frac{1}{3}\pi r^2 a$
7. 直圓錐之側面積  $= \pi r s$
8. 直圓錐諸面積之和  $= \pi r(r+s)$

9. 球之面積  $= 4\pi r^2$

10. 球之體積  $= \frac{4}{3}\pi r^3$

## 級 數

### 1. 算術級數:

$$l = a + (n-1)d; \quad s = \frac{n}{2}(a+l)$$

### 2. 幾何級數:

$$l = ar^{n-1}; \quad s = \frac{a-ar^n}{1-r}; \quad \text{設 } r < 1 \text{ 又 } n \rightarrow \infty, \quad s = \frac{a}{1-r}$$

### 3. 二項式定理:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 +$$

等等

$$\text{第 } k \text{ 項} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

## 對 數

1.  $\log ab = \log a + \log b$

2.  $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

3.  $\log a^n = n \log a$

4.  $\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$

5.  $\log 1 = 0$

6.  $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$

7.  $\text{colog } N = \log \frac{1}{N} = (10 - \log N) - 10$

## 二 次 方 程

$$\text{設 } ax^2 + bx + c = 0, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

設  $b^2 - 4ac = 0$ , 其根爲實數又彼此相等.

設  $b^2 - 4ac > 0$ , 其根爲實數但彼此不等.

設  $b^2 - 4ac < 0$ , 其根爲複數.

## 三 角 公 式

$$1. \quad \sin a = \frac{a}{c}, \quad \cos a = \frac{b}{c}, \quad \tan a = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{c}{a}, \quad \sec a = \frac{c}{b}, \quad \cot a = \frac{b}{a}.$$

$$2. \quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$6. \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$3. \quad \sec^2 a = 1 + \tan^2 a$$

$$7. \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}$$

$$4. \quad \operatorname{cosec}^2 a = 1 + \cot^2 a$$

$$8. \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$$

$$5. \quad \tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$9. \quad \sin(a \pm \beta) = \sin a \cos \beta \pm \cos a \sin \beta$$

$$10. \quad \cos(a \pm \beta) = \cos a \cos \beta \mp \sin a \sin \beta$$

$$11. \quad \tan(a \pm \beta) = \frac{\tan a \pm \tan \beta}{1 \mp \tan a \tan \beta}$$

$$12. \quad \sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(a + \beta) \cos \frac{1}{2}(a - \beta)$$

$$13. \quad \sin a - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(a + \beta) \sin \frac{1}{2}(a - \beta)$$

$$14. \quad \cos a + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(a + \beta) \cos \frac{1}{2}(a - \beta)$$

$$15. \quad \cos a - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(a + \beta) \sin \frac{1}{2}(a - \beta)$$

16.  $\sin a \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(a - \beta) - \frac{1}{2} \cos(a + \beta)$

17.  $\cos a \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(a - \beta) + \frac{1}{2} \cos(a + \beta)$

18.  $\sin a \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(a + \beta) + \frac{1}{2} \sin(a - \beta)$

19.  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

20.  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

21.  $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

29.  $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos \theta$

30.  $\tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan \theta$

22.  $\sin \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$

31.  $\sin(-x) = -\sin x$

32.  $\cos(-x) = \cos x$

23.  $\cos \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$

33.  $\tan(-x) = -\tan x$

34.  $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$

24.  $\tan \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$

35.  $\sec(-x) = \sec x$

36.  $\cot(-x) = -\cot x$

25.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos \theta$

37.  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

38.  $\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

26.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \sin \theta$

39.  $\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

40.  $\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

27.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \cot \theta$

41.  $\cos 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

28.  $\sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin \theta$

42.  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

## 三 角 形

43.  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

46.  $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}$

44.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

47.  $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}$

45.  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$

設  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$  :

$$48. \quad \sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad 49. \quad \cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$50. \quad \tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

設  $r =$  內切圓之半徑 :

$$51. \quad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad 52. \quad \tan \frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a}$$

$$53. \quad \tan \frac{1}{2}B = \frac{r}{s-b} \quad 54. \quad \tan \frac{1}{2}C = \frac{r}{s-c}$$

$$55. \quad \text{三角形面積} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$56. \quad \text{外接圓之直徑} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$





表 VI

重要常數及其對數



	常 數		常用對數	
$\pi$ .....	3.14	159 6	0.49	715 0
1 半徑弧角 = $\frac{180^\circ}{\pi}$ .....	57.29	577 9	1.75	812 2
1 度 = $\frac{\pi}{180}$ 半徑弧角.....	0.01	745 3	$\bar{2}.24$	187 7
e(訥氏對數底).....	2.71	828 2	0.43	429 4
m(常用對數率 = $\log e$ ).....	0.43	429 4	1.63	778 4
$\frac{1}{m}$ .....	2.30	258 5	0.36	221 6
1 哩.....	1.60	934 7	0.20	665 0
1 碼.....	0.91	440 2	$\bar{1}.96$	113 7
1 呎.....	0.30	480 1	$\bar{1}.48$	401 6
1 吋.....	25.40	005 公釐	1.40	483 5
1 公尺.....	39.37	吋	1.59	516 5
	1.09	361 1 碼	0.03	<del>886</del> 3
	3.28	083 3 呎	0.51	598 4
1 海哩.....	6080.290	呎	3.78	392 4
1 公里.....	0.62	137 0 哩	$\bar{1}.79$	335 0
1 磅(常衡).....	7000.克	令	3.84	509 8
	453.59	242 8 公分	2.65	666 6
1 盎司(常衡).....	28.34	953 公分	1.45	254 6
1 盎司(金衡).....	31.10	348 公分	1.49	280 9
1 盎司(金衡).....	0.06	479 9 公分	$\bar{2}.81$	156 8
1 公克.....	2.20	462 2 磅(常衡)	0.34	333 4
1 公分.....	15.43	235 6 克	1.18	843 2
1 公升.....	1.05	668 美國 夸脫	0.02	394 4
	0.26	417 美國 加倫	$\bar{1}.42$	188 4
	33.814	美國 量流 買益	1.52	910
1 美 國 夸 脫.....	0.94	636 公升	$\bar{1}.97$	605 6
1 美 國 加 倫.....	3.78	544 公升	0.57	811 6
1 美 國 量 流.....	0.02	957 3 公升	$\bar{2}.47$	090
1 美 國 加 倫.....	231	立 方 吋	2.36	361 2
1 美 國 加 倫.....	4.54	346 公升	0.65	788 7
1 英 國 加 倫.....	36.34	77 公升	1.56	047 7



表 VII  
度分秒化法



○	半徑弧角	'	半徑弧角	"	半徑弧角
1	0.01 745 33	1	0 00 029 09	1	0.00 000 48
2	0 03 490 66	2	0.00 058 18	2	0.00 000 97
3	0.05 235 99	3	0.00 087 27	3	0.00 001 45
4	0.06 981 32	4	0.00 116 36	4	0.00 001 94
5	0 08 726 65	5	0.00 145 44	5	0.00 002 42
6	0 10 471 98	6	0.00 174 53	6	0.00 002 91
7	0.12 217 30	7	0.00 203 62	7	0.00 003 39
8	0.13 962 63	8	0.00 232 71	8	0.00 003 88
9	0.15 707 96	9	0.00 261 80	9	0.00 004 36
10	0 17 453 29	10	0.00 290 89	10	0 00 004 85
20	0.34 906 59	15	0 00 436 33	15	0.00 007 27
30	0.52 359 88	20	0.00 581 78	20	0 00 009 70
40	0.69 813 17	25	0 00 727 22	25	0.00 012 12
50	0 87 266 46	30	0 00 872 66	30	0.00 014 54
60	1 04 719 76	35	0.01 018 11	35	0.00 016 97
70	1 22 173 05	40	0.01 163 55	40	0.00 019 39
80	1.39 626 34	50	0.01 454 44	50	0.00 024 24
90	1 57 079 63	60	0.01 745 33	60	0.00 029 09

化分數爲度數之表

0' = 0°000	10' = 0°166	20' = 0°333	30' = 0°500	40' = 0°666	50' = 0°833
1' .016	11' .183	21' .350	31' .516	41' .683	51' .850
2' .033	12' .200	22' .366	32' .533	42' .700	52' .866
3' .050	13' .216	23' .383	33' .550	43' .716	53' .883
4' .066	14' .233	24' .400	34' .566	44' .733	54' .900
5' .083	15' .250	25' .416	35' .583	45' .750	55' .916
6' .100	16' .266	26' .433	36' .600	46' .766	56' .933
7' .116	17' .283	27' .450	37' .616	47' .783	57' .950
8' .133	18' .300	28' .466	38' .633	48' .800	58' .966
9' .150	19' .316	29' .483	39' .650	49' .816	59' .983
		30' = 0°500			60' = 1°000

化秒數爲度數之表

6'' = 0°00166	10'' = 0°00277	35'' = 0°00970
7'' = 0°00194	15'' = 0°00416	40'' = 0°01111
8'' = 0°00222	20'' = 0°00555	45'' = 0°01250
9'' = 0°00250	30'' = 0°00833	50'' = 0°01388

<b>0°00</b> = 0'	<b>0°30</b> = 18'	<b>0°60</b> = 36'	<b>0°90</b> = 54'
.01 0'36"	.31 18'36"	.61 36'36"	.91 54'36"
.02 1'12"	.32 19'12"	.62 37'12"	.92 55'12"
.03 1'48"	.33 19'48"	.63 37'48"	.93 55'48"
.04 2'24"	.34 20'24"	.64 38'24"	.94 56'24"
<b>0°05</b> = 3'	<b>0°35</b> = 21'	<b>0°65</b> = 39'	<b>0°95</b> = 57'
.06 3'36"	.36 21'36"	.66 39'36"	.96 57'36"
.07 4'12"	.37 22'12"	.67 40'12"	.97 58'12"
.08 4'48"	.38 22'48"	.68 40'48"	.98 58'48"
.09 5'24"	.39 23'24"	.69 41'24"	.99 59'24"
<b>0°10</b> = 6'	<b>0°40</b> = 24'	<b>0°70</b> = 42'	<b>1°00</b> = 60'
.11 6'36"	.41 24'36"	.71 42'36"	
.12 7'12"	.42 25'12"	.72 43'12"	
.13 7'48"	.43 25'48"	.73 43'48"	
.14 8'24"	.44 26'24"	.74 44'24"	
<b>0°15</b> = 9'	<b>0°45</b> = 27'	<b>0°75</b> = 45'	<b>0°000</b> = 0'
.16 9'36"	.46 27'36"	.76 45'36"	.001 3'6"
.17 10'12"	.47 28'12"	.77 46'12"	.002 7'2"
.18 10'48"	.48 28'48"	.78 46'48"	.003 10'8"
.19 11'24"	.49 29'24"	.79 47'24"	.004 14'4"
<b>0°20</b> = 12'	<b>0°50</b> = 30'	<b>0°80</b> = 48'	<b>0°005</b> = 18'
.21 12'36"	.51 30'36"	.81 48'36"	.006 21'6"
.22 13'12"	.52 31'12"	.82 49'12"	.007 25'2"
.23 13'48"	.53 31'48"	.83 49'48"	.008 28'8"
.24 14'24"	.54 32'24"	.84 50'24"	.009 32'4"
<b>0°25</b> = 15'	<b>0°55</b> = 33'	<b>0°85</b> = 51'	<b>0°01</b> = 36'
.26 15'36"	.56 33'36"	.86 51'36"	
.27 16'12"	.57 34'12"	.87 52'12"	
.28 16'48"	.58 34'48"	.88 52'48"	
.29 17'24"	.59 35'24"	.89 53'24"	
<b>0°30</b> = 18'	<b>0°60</b> = 36'	<b>0°90</b> = 54'	



# 中西名詞索引

(數字指節數非指頁數)

(節數)

Abridged division, 省略除法 .....	139
Abridged multiplication, 省略乘法 .....	138
Addition theorems for sine and cosine, 兩角和之正弦 餘弦 .....	195
Angles: cosine of, 角之餘弦 .....	32
in general, 一般之角 .....	29
polyedral, 多面角 .....	320
sine of, 角之正弦 .....	32
spherical, 球面角 .....	332
tangent of, 角之正切 .....	32
triedral, 三面角 .....	321
Area: of an oblique triangle, 斜三角形之面積 .....	192
of the surface of a sphere, 球之面積 .....	280
Arithmetical means, 算術中項 .....	214
Arithmetical progression, 算術級數 .....	211
Axis of a circular cone, 圓錐之軸 .....	250
Bernoulli James, 裴奴利極姆士(人名) .....	5
Bernoulli John, 裴奴利約翰(人名) .....	5
Bézout, 裴紹脫 .....	72
Binomial theorem, 二項定理 .....	206
Cauchy, 可西(人名) .....	72
Cavalieri's theorem, 賈法利利氏定理 .....	302
Characteristic, 指標 .....	147
Circle: 圓 .....	226
equation of, 圓之方程 .....	226
Circular cone, 圓錐 .....	250
axis of, 圓錐之軸 .....	250
frustum of, 平截圓錐 .....	267
lateral area of (right), 正圓錐之側面積 .....	272
oblique, 斜圓錐 .....	250

of revolution, 旋轉圓錐體 .....	250
right, 正圓錐 .....	250
sections of, 圓錐之截面 .....	268
similar, 相似圓錐 .....	275
volume of, 圓錐之體積 .....	306
Circular cylinder, 圓柱 .....	252
lateral area of (right), 正圓柱之側面積 .....	272
oblique, 斜圓柱 .....	252
of revolution, 旋轉圓柱體 .....	252
right, 正圓柱 .....	252
similar, 相似圓柱 .....	274
volume of, 圓柱之體積 .....	298, 299
Cologarithms, 餘對數 .....	188
Common logarithms, 常用對數 .....	146
Complex fractions, 複分數 .....	104
Complex numbers, 複數 .....	89
Cone: 曲面錐 .....	248
altitude of, 曲面錐之高 .....	248
base of, 曲面錐之底 .....	248
circular, 圓錐 .....	250
oblique circular, 斜圓錐 .....	250
right circular, 正圓錐 .....	250
Conical surface, 曲面錐之側面 .....	248
directrix of, 曲面錐之準線 .....	248
elements of, 曲面錐之元素 .....	248
generatrix of, 曲面錐之母線 .....	248
vertex of, 曲面錐之頂 .....	248
Constant, 常數 .....	2
Cosines, law of, 餘弦之定則 .....	181
Cramer, 葛蘭茂(人名) .....	72
Cube, 立方體 .....	263
Cylinder, 曲面柱 .....	251
altitude of, 曲面柱之高 .....	251
base of, 曲面柱之底 .....	251
circular, 圓柱 .....	252

elements of, 曲面柱之元素 .....	251
oblique circular, 斜圓柱 .....	252
right circular, 正圓柱 .....	252
Denominator, rationalizing, 有理化分母 .....	129
Determinant, 行列式 .....	75
solution by, 用行列式解方程法 .....	76
Diameter of circumscribed circle, 外接圓之半徑 .....	180
Difference of sines and cosines, 正弦, 餘弦之差 .....	197
Direct variation, 正變 .....	11
Directrix of a conical surface, 曲面錐之準線 .....	248
Discriminant, 判別式 .....	92
Division : abridged, 省略除法 .....	139
synthetic, 綜合除法 .....	16
Dodecaedron, 十二面體 .....	245
Elements of a progression, 級數之元素 .....	212
Ellipse, equation of, 橢圓之方程 .....	228
Equations : equivalent, 同值方程 .....	73
exponential, 指數方程 .....	162
formation of, 方程之構成 .....	93
fractional, 分數方程 .....	238
homogeneous, 齊次方程 .....	236
inconsistent, 矛盾方程 .....	73
irrational, 無理方程 .....	132, 238
linear, 直線方程 .....	67, 68, 70
of quadratic form, 二次形狀之方程 .....	81
quadratic, in one unknown, 含一元之二次方程 ..	81, 83
solution by factoring, 用劈因數法解方程 .....	22
solution by graph, 方程系之圖線解法 .....	71
trigonometric, 三角方程 .....	88, 134, 202
with imaginary roots, 含虛根之方程 .....	89
Evaluation of functions, 函數之值 .....	6, 21
Excess, spherical, 球面餘度 .....	340
Exponents : law of, 指數定則 .....	117
fractional, 分數指數 .....	116
negative, 負指數 .....	115

zero, 零指數.....	114
Exponential equations, 指數方程 .....	162
Factor theorem, 因數定理.....	22
Factorial notation, 階乘記法 .....	208
Factoring, 劈因數法 .....	94-102
Fractional equations, 分數方程 .....	238
Fractions, complex, 複分數 .....	104
Frustum : of a circular cone, 平截圓錐 .....	267
of a pyramid, 平截角錐.....	265
slant height of, 平截角錐之斜高 .....	266
Function, 函數 .....	1, 4
cubic, 立方函數或三次函數.....	14
evaluation of, 函數之值 .....	6
graph of linear, 一次函數之圖線 .....	8
inverse, 反線數.....	37
linear, 一次函數或直線函數.....	7, 9
line — representation of, 以線代表角函數 .....	39
of $\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right)$ 之函數 .....	60
of $\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \pm a\right)$ , $\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \pm a\right)$ 之函數 .....	62
of double an angle, 倍角之函數 .....	198
of half an angle, 半角之函數.....	200
of negative angles, 負角之函數.....	57
quadratic, 二次函數.....	12, 13
trigonometric, 三角函數.....	32
Functional notation, 函數之記法.....	5
Gauss, 哥斯(人名).....	72
General quadratic equation, 普通二次方程.....	225
Generatrix : of a conical surface, 曲面錐之母線 .....	248
of a cylindrical surface, 曲面柱之母線.....	251
Geometrical means, 幾何中項 .....	218
Geometrical progression, 幾何級數 .....	215
elements of, 幾何級數之元素 .....	216
infinite, 無限幾何級數 .....	220

Graph : of cubic function, 立方函數之圖線 .....	14
of linear function, 一次函數之圖線 .....	8
of logarithmic function, 對數函數之圖線 .....	148
of quadratic function, 二次函數之圖線 .....	13
of trigonometric functions, 三角函數之圖線 .....	50
Graphical solution : of a linear system of equations, 一次 方程系之圖線解法 .....	71
of a quadratic system in two variables, 含兩變數之 二次方程系之圖線解法 .....	233
Hyperbola, 雙曲線 .....	229
Icosaedron, 二十面體 .....	245
Imaginary numbers, 虛數 .....	89
Infinite geometrical series, 無限幾何級數 .....	220
Intercepts, 截部 .....	10
Inverse functions, 反函數 .....	37
Inverse variation, 倒變 .....	24
Irrational equations, 無理方程 .....	132, 238
Irrational numbers, 無理數 .....	90
Joint variation, 聯變 .....	26
Lagrange, 拉果蘭諾(人名) .....	72
Laplace, 辣潑來斯(人名) .....	72
Lateral area : of a right circular cone and cylinder, 正圓 錐及正圓柱之側面積 .....	272
of a frustum of a right circular cone, 平截正圓錐之 側面積 .....	273
of a prism, 角柱體之側面積 .....	269
of a regular pyramid, 正角錐之側面積 .....	270
Law of cosines, 餘弦定則 .....	181
of sines, 正弦定則 .....	179
of tangents, 正切定則 .....	183
Laws of exponents, 指數定則 .....	117
Leibnitz, 來本之(人名) .....	5, 72
L'Hôpital, 羅畢德爾(人名) .....	72
Linear equations in one unknown, 含一個未知量之直線 方程 .....	67, 68

Linear function, 一次函數或直線函數 .....	7, 9
Line representation of functions, 以綫代表角函數 .....	39
Logarithms, 對數 .....	143
common, 常用對數 .....	146
of a power, 冪之對數 .....	158
of a product, 積之對數 .....	156
of a quotient, 商之對數 .....	157
of a root, 根之對數 .....	159
table of, 對數表 .....	152, 170
Lune, 月形 .....	351
Mantissa, 假數 .....	147
Means: arithmetical, 算術中項 .....	214
geometrical, 幾何中項 .....	218
Measure, radian, 徑度法 .....	46
Measurement, precision of, 測度之精密度 .....	137
Mollweide's equations, 莫爾維特氏方程 .....	184
Multiplication, abridged, 省略乘法 .....	138
Napier, 訥白爾(人名) .....	145
Notation, functional, 函數之記法 .....	5
Oblique triangle: area of, 斜三角形之面積 .....	192
solution of, 斜三角形之解法 .....	187
Octaedron, 八面體 .....	245
Parabola, 拋物綫 .....	13
Paralleopiped: 平行六面體 .....	263
rectangular, 矩形面體 .....	263
right, 長方體或正平行六面體 .....	263
volume of, 平行六面體之體積 .....	291
volume of rectangular parallelopiped, 矩形面體之 體積 .....	286
Polar triangles, 極三角形 .....	336
Polyedral angle, 多面角 .....	320
Polyedrons, 多面體 .....	245
regular, 正多面體 .....	325
Polygon, spherical, 球面多邊形 .....	323
Precision of measurement, 測度之精密度 .....	137

Prism : 角柱 .....	253
altitude of, 角柱之高 .....	253
bases of, 角柱之底 .....	253
lateral area of, 角柱之側面積 .....	269
lateral edges of, 角柱之側稜 .....	253
lateral faces of, 角柱之面 .....	253
oblique, 斜角柱 .....	254
right, 正角柱 .....	254
truncated, 截角柱 .....	264
volume of, 角柱之體積 .....	294
Progression : arithmetical, 算術級數 .....	211
geometrical, 幾何級數 .....	215
Pyramid, 角錐 .....	247
altitude of, 角錐之高 .....	247
base of, 角錐之底 .....	247
frustum of, 平截角錐 .....	265
inscribed, 內接角錐 .....	295
lateral area of, 角錐之側面積 .....	270
lateral edges of, 角錐之側稜 .....	247
lateral faces of, 角錐之側面 .....	247
regular, 正角錐 .....	248
vertex of, 角錐面之頂 .....	247
volume of, 角錐體之體積 .....	304
Quadrant, 象限 .....	31
Quadratic equation, 二次方程 .....	81
graph of quadratic in two unknowns, 含兩元之二次 方程之圖線 .....	227
in two unknowns, 含二元之二次方程 .....	225
nature of the roots of, 二次方程之根之性質 .....	92
solution by completing square and by formula, 用配 方法或用公式法以解二次方程 .....	83
solution of simultaneous quadratics, 聯立二次方程 之解法 .....	232
Quadratic function, 二次函數 .....	12, 13
Radian measure, 徑度法 .....	46

Radical, 根數 .....	120
reduction of, 根數化法 .....	121
Rationalizing denominator, 有理化分母 .....	129
Regular polyedrons, 正多面體 .....	325
Relation between the roots and coefficients of a quadratic, 二次方程之根與係數之關係 .....	93
Remainder theorem, 餘數定理 .....	19, 20
Right section, 正截面 .....	256
Roots of a quadratic equation, 二次方程之根 .....	93
square root of a polynomial, 多項式之平方根 .....	84
square root of a radical expression, 根數式之平 方根 .....	131
Section, 截面 .....	255
of a circular cone, 圓錐之截面 .....	268
right, 正截面 .....	256
Segment, spherical, 分球體 .....	310
Signs of functions, 函數之符號 .....	33
Similar circular cones, 相似圓錐 .....	275
Similar circular cylinders, 相似圓柱 .....	274
Simultaneous quadratics, 聯立二次方程 .....	232
Sines, law of, 正弦定則 .....	180
Slant height, of a frustum of a pyramid, 平截角錐之 斜高 .....	266
Slide rule, 計算尺 .....	163
Solution : of oblique triangles, 三角形之解法 .....	187
of right triangles, 直三角形之解法 .....	174
Sphere, surface of, 球之面積 .....	280
volume of, 球之體積 .....	309
Spherical cone, 球面錐 .....	313
Spherical excess, 球面餘度 .....	340
Spherical polygon, 球面多邊形 .....	323
Spherical sector, 中空球面錐 .....	315
Spherical segment, 分球體 .....	310
Spherical triangle, 球面三角形 .....	335
Square root: of polynomials, 多項式之平方根 .....	84



of a radical expression, 根數式之平方根 .....	191
Subtraction theorems for sine and cosine, 兩角差之正 弦餘弦 .....	196
Sums of sines and cosines, 正弦餘弦之和 .....	197
Symmetrical polyedral angles, 對稱多面角 .....	342
Symmetrical polygons, 對稱多邊形 .....	343
Synthetic division, 綜合除法 .....	16
Table of logarithms, 對數表 .....	152, 170
Tangent: of angle, 角之正切 .....	32
of half-angle, 半角之正切 .....	185
law of, 正切定則 .....	183
Tetraedron, 四面體 .....	245
Triangle: birectangular, 二直角三角形 .....	335
polar, 極三角形 .....	336
spherical, 球面三角形 .....	335
solution of right, 直三角形之解法 .....	174
triectangular, 三直角三角形 .....	335
Triedral angle, 三面角 .....	321
Trigonometric equations, 三角方程 .....	88, 134, 202
Trigonometric functions, 三角函數 .....	32
Truncated prism, 截角柱 .....	264
Variable, 變數 .....	3
Variation: direct, 正變 .....	11
direct and inverse, 正變與倒變 .....	27
inverse, 倒變 .....	24
joint, 聯變 .....	26
Volume: of a circular cone, 圓錐之體積 .....	306
of a circular cylinder, 圓柱之體積 .....	298
of a prism, 角柱之體積 .....	294
of a pyramid, 角錐之體積 .....	304
of a sphere, 球之體積 .....	309
of a frustum of a cone, 平截圓錐之體積 .....	307
Zone, 球帶 .....	281

