Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 15

Quasikohärente Moduln auf projektiven Schemata

Graduierte Moduln zu einem graduierten Ring R führen zu quasiprojektiven Moduln auf $\operatorname{Proj}(R)$.

Lemma 15.1. *Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring und M ein $\mathbb{Z}$-graduierter R-Modul. Dann besitzt der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{M}$ auf $\operatorname{Spek}(R)$ die Eigenschaft, dass für jede offene Menge $U = D(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ zu einem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$ der $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modul $\Gamma\left(U, \widetilde{M}\right)$ eine $\mathbb{Z}$-Graduierung besitzt, die mit den Restriktionsabbildungen verträglich ist.*

Beweis. Die Aussage bedeutet zunächst für $M = R$, dass die Strukturgarbe auf den offenen Mengen zu homogenen Idealen eine Graduierung besitzt. Dies ist für die $D(f)$ zu homogenem f klar und folgt daraus für beliebige $D(\mathfrak{a})$ zu einem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$. Ebenso ergibt sich der Modulfall. □

Es ergibt keinen Sinn, zu sagen, dass $\widetilde{M}$ als Ganzes graduiert ist, da dies auf beliebigen offenen Mengen, die nicht von einem homogenen Ideal herrühren, nicht definiert ist. Allerdings erlaubt es die Graduierung auf den homogenen Teilmengen, auf dem zu R gehörenden projektiven Spektrum eine Modulgarbe zu definieren.

Definition 15.2. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring und M ein $\mathbb{Z}$-graduierter R-Modul. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu R. Die $\mathcal{O}_Y$- *Modulgarbe* $\widehat{M}$ zu M wird folgendermaßen festgelegt: Zu jeder offenen Menge $V = D_+(\mathfrak{a}) \subseteq Y$ zu einem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$ setzt man

$$\Gamma\left(V, \widehat{M}\right) := \Gamma\left(D(\mathfrak{a}), \widetilde{M}\right)_0$$

und versieht dies mit den natürlichen Restriktionsabbildungen und der natürlichen $\mathcal{O}_Y$-Modulstruktur.

Für einen graduierten R-Modul M und ein homogenes Primideal $\mathfrak{p}$ setzen wir $M_{(\mathfrak{p})} = (M_{h \text{ homogen}, h \notin \mathfrak{p}})_0$.

Lemma 15.3. *Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring und M ein $\mathbb{Z}$-graduierter R-Modul. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu R und $\widehat{M}$ der zugehörige $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann gelten folgende Eigenschaften*

(1) *$\widehat{M}$ ist ein quasikohärenter Modul.*

(2) *Zu einem homogenen Element $f \in R_+$ ist*

$$\Gamma\left(D_+(f), \widehat{M}\right) = \left(M_f\right)_0.$$

Ferner ist $\widehat{M}$ eingeschränkt auf $D_+(f)$ gleich der affinen Vergarbung von $\left(M_f\right)_0$ auf $D_+(f) = \operatorname{Spek}\left(\left(R_f\right)_0\right)$.

(3) *Zu einem homogenen Primideal $R_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$ ist*

$$\widehat{M}_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}.$$

(4) *Es ist*

$$\Gamma\left(Y, \widehat{M}\right) = \left(\Gamma\left(D(R_+), \widetilde{M}\right)\right)_0.$$

Beweis. (1) Die Garbeneigenschaft ergibt sich aus der Garbeneigenschaft von $\widetilde{M}$. Für die Quasikohärenz siehe Teil (2).

(2) Für homogenes $f \in R_+$ ist

$$\Gamma\left(D_+(f), \widehat{M}\right) = \Gamma\left(D(f), \widetilde{M}\right)_0 = (M_f)_0$$

nach Lemma 14.5. Somit stimmt die Garbe $\widehat{M}|_{D_+(f)}$ global auf $D_+(f)$ mit der Garbe $\widetilde{(M_f)_0}$ überein. Für die offenen Teilmengen $D(g) \subseteq D(f)$ gelten die entsprechenden Gleichheiten, und diese Identifizierungen sind mit den Restriktionen verträglich. Daher stimmen die Garben überhaupt überein und es liegt Quasikohärenz vor.

(3) Folgt aus (2) über

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_{\mathfrak{p}} &= \operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D_+(f)} \Gamma\left(D_+(f), \widehat{M}\right) \\
&= \operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D_+(f)} \left(M_f\right)_0 \\
&= \left(\operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D_+(f)} \left(M_f\right)\right)_0 \\
&= \left(M_{R \setminus \mathfrak{p} \cap H}\right)_0 \\
&= M_{(\mathfrak{p})}.
\end{aligned}$$

(4) Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Definition.

□

Die letzte Aussage bedeutet, dass im Allgemeinen der globale Schnittmodul von $\widehat{M}$ auf Y nicht unmittelbar aus M berechnet werden kann.

Definition 15.4. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring und $R(n)$ der um n verschobene graduierte Ring. Dann bezeichnet man mit

$$\mathcal{O}_Y(n) := \widehat{R(n)}$$

den zugehörigen $\mathcal{O}_Y$-Modul auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$. Man spricht von den *getwisteten Strukturgarben.*

BEISPIEL 15.5. Zum Polynomring $K[X_0, X_1, \ldots, X_d]$, $d \geq 1$, mit der Standardgraduierung ist

$$\Gamma\Big(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(\ell)\Big) \;=\; K[X_0, X_1, \ldots, X_d]_\ell,$$

also die Polynome vom Grad ℓ in $d+1$ Variablen. Für negatives ℓ ist dies der Nullraum, für $\ell = 0$ (die Strukturgarbe) ist dies gleich K, für $\ell = 1$ besteht es aus allen Linearformen, u.s.w. Für die offenen Mengen $D_+(X_i)$ gilt

$$\begin{aligned} \Gamma\Big(D_+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(\ell)\Big) &= (K[X_0, X_1, \ldots, X_d]_{X_i})_\ell \\ &= K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_d}{X_i}] \cdot X_i^\ell. \end{aligned}$$

Für den projektiven Raum haben wir schon in Beispiel 13.19 gesehen, dass diese Garben invertierbar sind. Dies gilt auch allgemein.

LEMMA 15.6. *Es sei R ein standard-graduierter kommutativer Ring. Dann sind die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_Y(n)$ auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ invertierbar.*

Beweis. Es sei $R = R_0[x_1, \ldots, x_d] = R_0[X_1, \ldots, X_d]/\mathfrak{a}$ mit x_i vom Grad 1. Dann erzeugen die x_i auch das irrelevante Ideal und daher liegt eine offene affine Überdeckung

$$\operatorname{Proj}(R) \;=\; \bigcup_{i=1}^{d} D_+(x_i)$$

vor. Sei x eines der x_i. Nach Lemma 15.3 (2) ist

$$\mathcal{O}_Y(n)|_{D_+(x)} \;=\; \mathcal{L},$$

wobei $\mathcal{L}$ die affine Vergarbung des $(R_x)_0$-Moduls $L = (R_x(n))_0 = (R_x)_n$ auf

$$D_+(x) \;=\; \operatorname{Spek}\left((R_x)_0\right)$$

bezeichne. In dieser Situation ist aber

$$(R_x)_0 \longrightarrow (R_x)_n,\; h \longmapsto hx^n,$$

ein $(R_x)_0$-Modulisomorphismus, und daher liegt ein $\mathcal{O}_Y|_{D_+(x)}$-Modulisomorphismus

$$\mathcal{O}_Y|_{D_+(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_Y(n)|_{D_+(x)}$$

vor. $\square$

Die getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y(n)$ sind für das projektive Schema $Y = \operatorname{Proj}(R)$ charakteristische, allerdings vom graduierten Ring R abhängige invertierbare Garben.

LEMMA 15.7. *Es sei R ein standard-graduierter kommutativer Ring, sei M ein graduierter R-Modul und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es eine natürliche $\mathcal{O}_Y$-Isomorphie*

$$\widehat{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(n) \longrightarrow \widehat{M(n)}$$

auf $Y = \mathrm{Proj}\,(R)$, *wobei* $M(n)$ *den um* n *verschobenen Modul zu* M *bezeichnet.*

Beweis. Zu einem homogenen Element $f \in R_+$ gibt es einen $(R_f)_0$-Modulhomomorphismus

$$(M_f)_0 \otimes_{(R_f)_0} (R_f)_n \longrightarrow (M_f)_n,\ \frac{m}{f^k} \otimes \frac{r}{f^\ell} \longmapsto \frac{rm}{f^{k+\ell}},$$

der unmittelbar von der (homogenen) Modulmultiplikation $M \times R \to M$ herrührt. Diese Homomorphismen induzieren für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathrm{Proj}\,(R)$ einen Modulhomomorphismus

$$\mathrm{colim}_{U \subseteq D_+(f)} \left((M_f)_0 \otimes_{(R_f)_0} (R_f)_n\right) \longrightarrow \mathrm{colim}_{U \subseteq D_+(f)} (M_f)_n,$$

der insgesamt ein Homomorphismus von Prägarben ist. Wegen $(M(n)_f)_0 = (M_f)_n$ ist die Vergarbung der Prägarbe rechts gleich $\widehat{M(n)}$. Die Vergarbung der linken Seite (in zwei Schritten) ist $\widehat{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,(R)}} \mathcal{O}_Y(n)$, so dass ein Homomorphismus von Moduln

$$\widehat{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,(R)}} \mathcal{O}_Y(n) \longrightarrow \widehat{M(n)},$$

vorliegt.

Dass ein Isomorphismus vorliegt kann auf einer affinen Überdeckung gezeigt werden. Wenn f homogen ist, so ist der obige $(R_f)_0$-Modulhomomorphismus

$$(M_f)_0 \otimes_{(R_f)_0} (R_f)_n \longrightarrow (M_f)_n$$

nach Lemma 14.10 und Lemma 15.3 (2) gleich der Auswertung des vergarbten Homomorphismus. Wenn f den Grad 1 besitzt (und die zugehörigen offenen Mengen $D_+(f)$ überdecken Y), so liegt ein Isomorphismus vor. Nach Aufgabe 12.2 ist $(R_f)_0 \cong (R_f)_n$ (über $1 \mapsto f^n$) so dass links ein zu $(M_f)_0$ isomorpher Modul steht. Mit dieser Identifizierung ist die Abbildung durch $\frac{m}{f^k} \mapsto f^n \cdot \frac{m}{f^k}$ gegeben, und diese ist bijektiv, da f eine Einheit ist. $\square$

Definition 15.8. Es sei R ein standard-graduierter Ring, es sei $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter Modul auf $Y = \mathrm{Proj}\,(R)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann nennt man

$$\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(n)$$

den n-ten *Twist* von $\mathcal{F}$.

Die Modulgarbe $\widehat{M(n)}$ stimmt also mit dem n-ten Twist von $\widehat{M}$ überein.

Globale Erzeugtheit

Definition 15.9. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und es sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf X. Man sagt, dass $\mathcal{M}$ *von globalen Schnitten erzeugt* wird, wenn es eine Familie $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ ($i \in I$) derart gibt, dass für jeden Punkt $x \in X$ der Halm $\mathcal{M}_x$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul von den (Einschränkungen der) s_i erzeugt wird.

PROPOSITION 15.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ wird von globalen Schnitten erzeugt.*
(2) *Ein quasikohärenter Modul $\mathcal{M}$ wird genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn es einen surjektiven Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{M}$ gibt.*
(3) *Auf einem affinen Schema wird jeder quasikohärente Modul von globalen Schnitten erzeugt.*
(4) *Wenn $\mathcal{M}$ von globalen Schnitten erzeugt wird und $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ surjektiv ist, so wird auch $\mathcal{N}$ von globalen Schnitten erzeugt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.16. □

LEMMA 15.11. *Auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}_R^d$ über einem kommutativen Ring R werden die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(k)$ bei $k \geq 0$ von globalen Schnitten erzeugt werden und bei $k < 0$ und $d \geq 1$ nicht.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.17. □

SATZ 15.12. *Es sei $\mathbb{P}_R^d$ der projektive Raum über einem noetherschen Ring R und sei $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}_R^d$. Dann gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}_+$ derart, dass $\mathcal{G}(\ell)$ von globalen Schnitten erzeugt wird.*

Beweis. Es ist $\mathcal{G}|D_+(X_i) \cong \widetilde{M_i}$ mit einem endlich erzeugten Modul M_i über dem zu $D_+(X_i)$ gehörenden Polynomring R_i. Für die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(1)$ ist der Invertierbarkeitsort zum globalen Schnitt X_i nach Aufgabe 13.21 gleich $D_+(X_i)$. Für ein endliches R_i-Modulerzeugendensystem s_{ij}, $j \in J_i$, von M_i gibt es nach Satz 14.13 (2) einen (gemeinsamen) Exponenten n derart, dass die $X_i^n s_{ij}$ von globalen Elementen aus $\Gamma\big(\mathbb{P}_R^d, \mathcal{G}(n)\big)$ herrühren. Dies kann man für jedes i machen und erhält somit ein ℓ derart, dass die globalen Schnitte aus $\Gamma\big(\mathbb{P}_R^d, \mathcal{G}(\ell)\big)$ die Moduln auf der offenen affinen Überdeckung erzeugen. Dies gilt dann auch in allen Halmen und somit liegt globale Erzeugtheit vor. □

SATZ 15.13. *Es sei $\mathbb{P}_R^d$ der projektive Raum über einem noetherschen Ring R und sei $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}_R^d$. Dann gibt es eine endliche direkte Summe $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(\ell_j)$ und einen surjektiven Modulhomomorphismus*

$$\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}(\ell_j) \longrightarrow \mathcal{G}.$$

Beweis. Nach Satz 15.12 gibt es ein ℓ derart, dass $\mathcal{G}(\ell)$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt wird. Nach Proposition 15.10 (2) liegt also ein surjektiver Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^d}^r \longrightarrow \mathcal{G}(\ell)$$

vor. Wir tensorieren mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-\ell)$ und erhalten eine Surjektion

$$\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-\ell)\right)^r \longrightarrow \mathcal{G}.$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis