Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 24

Abelsche Kategorien

Das Konzept einer abelschen Kategorie wird abstrakt durch eine Liste von Axiomen beschrieben, die wir in einem Anhang zusammengestellt haben. Für uns sind die folgenden vier Hauptbeispiele wichtig.

• Die Kategorie der kommutativen Gruppen mit den Gruppenhomomorphismen.

• Die Kategorie der R-Moduln über einem kommutativen Ring mit den R-Modulhomomorphismen.

• Die Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen über einem topologischen Raum X mit den Garbenhomomorphismen.

• Die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit den $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen.

In diesen Kategorien ist jeweils klar, was kurze exakte Sequenzen bzw. die Exaktheit von Komplexen bedeutet. Ferner kann man in diesen Kategorien jedes Objekt in ein injektives Objekt der Kategorie einbetten und somit auch injektive Auflösungen konstruieren, siehe Korollar 23.8 und Lemma 23.13. Diese Eigenschaft verdient sogar einen eigenen Namen.

Definition 24.1. Man sagt, dass eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ *genügend viele injektive Objekte* enthält, wenn es zu jedem Objekt $M \in \mathcal{A}$ ein injektives Objekt I und einen Monomorphismus $M \to I$ gibt.

Linksexakte additive Funktoren

Definition 24.2. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Ein kovarianter Funktor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *additiv*, wenn für Objekte $G, H \in \mathcal{A}$ die Abbildungen

$$\operatorname{Mor}(G,H) \longrightarrow \operatorname{Mor}(F(G),F(H)),\, \varphi \longmapsto F(\varphi),$$

Gruppenhomomorphismen sind.

Definition 24.3. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Ein kovarianter Funktor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *linksexakt*, wenn er additiv ist und wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{A}$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

in $\mathcal{B}$ exakt ist.

Für uns werden zwei Funktoren mit diesen beiden Eigenschaften wichtig sein.

Beispiel 24.4. Es sei R ein kommutativer Ring und A ein fixierter R-Modul. Dann ist die Zuordnung, die jedem R-Modul M den Homomorphismenmodul $\operatorname{Hom}_R(A, M)$ zuordnet, linksexakt, siehe Aufgabe 24.1.

Beispiel 24.5. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\mathcal{A}$ die Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf X, also die Zuordnung $\mathcal{G} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{G})$. Es sei

$$\mathcal{B} = \text{ABEL}$$

die Kategorie der abelschen Gruppen und F sei die globale Auswertung auf X. Dann besitzt $\mathcal{A}$ genügend Injektive und F ist ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Die Linksexaktheit beruht auf Lemma 6.8, die Existenz von hinreichend vielen injektiven Garben auf Lemma 23.13.

In den vorstehenden Beispielen sind die Zuordnungen nicht rechtsexakt, siehe Aufgabe 24.2 und Beispiel 6.6. Die Kohomologietheorien, die wir betrachten werden, werden unter anderem diese fehlende Rechtsexaktheit theoretisch erfassen.

Abgeleitete Funktoren

Definition 24.6. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei

$$F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Der n-te *rechtsabgeleitete Funktor*

$$R^nF\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

($n \in \mathbb{N}$) ist folgendermaßen definiert: Für ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ nimmt man eine injektive Auflösung $I^\bullet$ von M und setzt

$$R^nF(M) := H^n(F(I^\bullet)),$$

und für einen Homomorphismus $\varphi\colon M \to N$ in $\mathcal{A}$ nimmt man eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}\colon I^\bullet \to J^\bullet$ (wobei $J^\bullet$ eine injektive Auflösung von N ist) und setzt

$$R^nF(\varphi) := (H^n(\tilde{\varphi}) : H^n(F(I^\bullet)) \to H^n(F(J^\bullet)))$$

mit dem induzierten Homomorphismus auf der Homologie im Sinne von Lemma Anhang 8.5.

Satz 24.7. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor und es bezeichne R^nF die rechtsabgeleiteten Funktoren. Dann gelten folgende Eigenschaften*

(1) *Die R^nF sind wohldefinierte additive Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.*
(2) *Es liegt ein natürlicher Isomorphismus $R^0F \cong F$ vor.*
(3) *Zu jeder kurzen exakten Sequenz*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{A}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es natürliche Verbindungshomomorphismen

$$\delta^n\colon\ R^nF(C) \longrightarrow R^{n+1}F(A)$$

derart, dass ein exakter Komplex

$$\ldots \longrightarrow R^{n-1}F(C) \xrightarrow{\delta^{n-1}} R^nF(A) \longrightarrow R^nF(B) \longrightarrow R^nF(C) \xrightarrow{\delta^n} \\ R^{n+1}F(A) \longrightarrow R^{n+1}F(B) \longrightarrow \ldots$$

in $\mathcal{B}$ vorliegt.
(4) *Zu einem Homomorphismus von exakten Sequenzen*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^nF(C) & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1}F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^nF(C') & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1}F(A') \,. \end{array}$$

Beweis. (1) Die Wohldefiniertheit, also die Unabhängigkeit von der gewählten injektiven Auflösung, zeigen wir den Fall, dass $\mathcal{A}$ die Kategorie der R-Moduln ist, der Formulierungsaufwand im allgemeinen Fall ist etwas größer. Es seien

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \ldots$$

und

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \ldots$$

injektive Auflösungen zu einem Modul N. Dann gibt es nach Lemma 23.11 Homomorphismen von Kettenkomplexen

$$\varphi\colon\ L_\bullet \longrightarrow I_\bullet$$

und

$$\psi\colon\ I_\bullet \longrightarrow L_\bullet.$$

Dabei sind die Hintereinanderschaltungen $\psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi$ nach Lemma 23.12 homotop zur Identität auf $L_\bullet$ bzw. auf $I_\bullet$. Dies gilt nach

Lemma Anhang 8.9 auch für die zugehörigen Homomorphismen auf den Komplexen $F(L_\bullet)$ bzw. $F(I_\bullet)$. D.h. für die induzierten Homomorphismen auf den Homologien gilt, dass die Verknüpfung

$$H_nF(L_\bullet) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_nF(I_\bullet) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_nF(L_\bullet)$$

die Identität ist. Somit sind die $H(\varphi)$ kanonische Isomorphismen.

Die Additivität gilt nach Lemma Anhang 8.5 stets in der Homologie.

(2) Es sei $I^\bullet$ eine injektive Auflösung des Objektes M. Die 0-te Homologie des Komplexes

$$0 \longrightarrow F(I^0) \longrightarrow F(I^1) \longrightarrow F(I^2) \longrightarrow \dots$$

ist einfach der Kern des Homomorphismus

$$F(I^0) \longrightarrow F(I^1).$$

Wegen der Linksexaktheit von F ist dieser Kern aber gleich $F(M)$.

(3) Nach Lemma Anhang 9.9 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & J^0 & \longrightarrow & K^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & K^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

mit exakten Zeilen und Spalten. Da die einzelnen Zeilen (bis auf die Ausgangssequenz) spalten, erhält man für jedes $n \geq 0$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F(I^n) \longrightarrow F(J^n) \longrightarrow F(K^n) \longrightarrow 0\,.$$

Es liegt somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(I^{n-1}) & \longrightarrow & F(J^{n-1}) & \longrightarrow & F(K^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F(I^n) & \longrightarrow & F(J^n) & \longrightarrow & F(K^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F(I^{n+1}) & \longrightarrow & F(J^{n+1}) & \longrightarrow & F(K^{n+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen vor. In einer solchen Situation gibt es nach Lemma Anhang 8.6 einen Homomorphismus vom Kern von $F(K^{n-1}) \to F(K^n)$ in den Kern von $F(I^n) \to F(I^{n+1})$ und somit auch nach $R^nF(A)$. Dabei geht das Bild von $F(K^{n-2})$ auf 0 und somit induziert dies einen Homomorphismus

$$R^{n-1}F(C) \longrightarrow R^nF(A).$$

(4) Siehe Aufgabe 24.5.

□

Die Abbildung δ nennt man auch den *verbindenden Homomorphismus*

SATZ 24.8. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Dann gilt für jedes injektive Objekt I aus $\mathcal{A}$ und $n \geq 1$ für die rechtsabgeleiteten Funktoren $R^n F(I) = 0$.*

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar, da wir mit der injektiven Auflösung

$$I_0 = I \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

arbeiten können. □

DEFINITION 24.9. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Ein Objekt Z aus $\mathcal{A}$ heißt *azyklisch* (bezüglich F), wenn für jedes $n \geq 1$ für die rechtsabgeleiteten Funktoren die Beziehung $R^n F(Z) = 0$ gilt.

Nach Satz 24.8 ist ein injektives Objekt azyklisch.

KOROLLAR 24.10. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor. Es sei A ein Objekt aus $\mathcal{A}$ und es sei*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Z$$

exakt mit einem azyklischen Objekt Z. Dann ist

$$R^1 F(A) = F(Z/A)/\operatorname{bild}(F(Z))$$

und

$$R^n F(A) = R^{n-1} F(Z/A)$$

für $n \geq 2$.

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Z \longrightarrow Z/A \longrightarrow 0\,.$$

Die Behauptungen folgen aus der langen exakten Sequenz, da ja die mittleren Terme $R^n F(Z) = 0$ nach Voraussetzung sind. □

DEFINITION 24.11. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Dann nennt man den rechtsabgeleiteten Funktor zum Funktor $N \mapsto \operatorname{Hom}_R (M,N)$ (von der Kategorie der R-Moduln in sich) den *Ext-Funktor*. Er wird mit $\operatorname{Ext}^n(M,N)$ bezeichnet.

Zur Berechnung der Ext-Moduln muss man nach Definition eine injektive Auflösung des hinteren Moduls nehmen, also

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots$$

und dann die Homologie des Komplexes

$$\mathrm{Hom}\,(M, I_{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M, I_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M, I_{n+1})$$

ermitteln.

Abbildungsverzeichnis