Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück SS 2016

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 5

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. Zeige mit Hilfe des Auswahlaxioms, dass es zu jeder Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen gibt.

Aufgabe 5.2. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Menge M der echten natürlichen Teiler von 100 (dabei gelte 1 als echter Teiler, 100 nicht). Was sind die maximalen, die minimalen Elemente, gibt es ein größtes und ein kleinstes Element, was sind die total geordneten Teilmengen?

Aufgabe 5.3. Besitzt die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ eine obere Schranke? Wie sieht das in anderen angeordneten Körpern aus?

Aufgabe 5.4. Es sei M eine Menge und I die Menge der echten Teilmengen von M, also

$$I = \{T \subseteq M | T \neq \emptyset \text{ und } T \neq M\} .$$

Diese Menge ist durch die Inklusion eine geordnete Menge. Bestimme die minimalen und die maximalen Elemente von I.

Aufgabe 5.5. Es sei A eine endliche total geordnete Menge. Es sei $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge. Definiere auf der Produktmenge

$$A^I = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-\text{mal}}$$

die „lexikographische Ordnung“, und zeige, dass es sich dabei ebenfalls um eine totale Ordnung handelt.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es seien $(M_1, \leq_1)$ und $(M_2, \leq_2)$ zwei Mengen, auf denen jeweils eine Ordnung definiert ist. Eine Abbildung

$$F \colon M_1 \longrightarrow M_2, \, x \longmapsto F(x),$$

heißt *ordnungstreu* (oder *monoton*), wenn für alle $x, x' \in M_1$ mit $x \leq_1 x'$ stets auch $F(x) \leq_2 F(x')$ gilt.

Aufgabe 5.6. Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Zeige, dass die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ x \longmapsto \{y \in M \mid y \leq x\},$$

ordnungstreu und injektiv ist, wobei die Potenzmenge mit der Inklusion versehen ist.

Aufgabe 5.7. Zeige, dass in $\mathbb{Z}$ die maximalen Ideale genau die von Primzahlen p erzeugten Ideale $\mathbb{Z}p = \{kp \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sind.

Aufgabe 5.8. Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal in R. Zeige, dass I genau dann ein maximales Ideal ist, wenn der Restklassenring R/I ein Körper ist.

Aufgabe 5.9. Es sei X ein topologischer Raum und F ein topologischer Filter auf X mit $\emptyset \notin F$. Zeige, dass es einen Ultrafilter $G \supseteq F$ gibt.

Wenn man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie versieht, so dass also jede Teilmenge offen ist, so ist ein topologischer Filter auf $\mathbb{N}$ einfach eine Teilmenge $F \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ mit

(1) $\mathbb{N} \in F$.
(2) Mit $U \in F$ und $U \subseteq V$ ist auch $V \in F$.
(3) Mit $U \in F$ und $V \in F$ ist auch $U \cap V \in F$.

Aufgabe 5.10. Ein Filter $F \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ entweder $T \in F$ oder $\mathbb{N} \setminus T \in F$ gilt

Die einfachen Ultrafilter in $\mathbb{N}$ werden in folgender Aufgabe beschrieben.

Aufgabe 5.11. Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fixierte Zahl. Dann ist

$$F = \{T \subseteq \mathbb{N} \mid n \in T\}$$

ein Ultrafilter.

Aufgabe 5.12. Zeige, dass es in $\mathbb{N}$ Ultrafilter gibt, die keine endlichen Teilmengen enthalten.

Aufgabe 5.13. Wir betrachten den Folgenring $R = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zu einer Folge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R$ sei

$$Z(x) \, = \, \{n \in \mathbb{N} | \, x_n = 0\} \, .$$

Zeige, dass über die Zuordnungen

$$I \longmapsto \{T \subseteq \mathbb{N} | \, T = Z(x) \text{ für ein } x \in I\}$$

und

$$F \longmapsto \{x \in R | \, Z(x) \in F\}$$

sich die Ideale aus R und die Filter aus $\mathbb{N}$ entsprechen.

Aufgabe 5.14. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{G} = \left\{ T \subseteq \mathbb{N}_+ | \, \sum_{n \in T} \frac{1}{n} \text{ ist eine divergente Reihe} \right\} .$$

Ist $\mathcal{G}$ ein Filter?

Aufgabe 5.15. Man mache sich an den folgenden Beispielen klar, dass der Satz von Hamel keineswegs selbstverständlich ist.

(1) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum betrachtet.
(2) Die Menge der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \, = \, \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \, | \, x_n \in \mathbb{R} \right\} .$$

(3) Die Menge aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5.16.*

Betrachte die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\ln p$, wobei p durch die Menge der Primzahlen läuft, linear unabhängig ist. Tipp: Verwende, dass jede positive natürliche Zahl eine eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen besitzt.

Aufgabe 5.17. Beweise durch Induktion, dass die natürliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Wohlordnung ist.

Aufgabe 5.18. Zeige, dass die natürliche Ordnung auf den ganzen Zahlen keine Wohlordnung ist.

Aufgabe 5.19. Zeige, dass die natürliche Ordnung auf den reellen Zahlen keine Wohlordnung ist.

Die folgenden beiden Aussagen ergeben zusammen einen konstruktiven Beweis für den Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik in der Version von Korollar 5.20, d.h. für eine semantische Tautologie α weiß man nicht nur die Existenz einer Ableitung $\vdash \alpha$, sondern man kann prinzipiell eine Ableitung angeben.

Aufgabe 5.20.*

Es sei α eine aussagenlogische Aussage und es seien $p_1, \ldots, p_n$ die darin vorkommenden Aussagenvariablen. Es sei

$$\gamma = \pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$$

eine fixierte Konjunktion dieser (negierten) Aussagenvariablen. Zeige, dass dann

$$\vdash \gamma \rightarrow \alpha \text{ oder } \vdash \gamma \rightarrow \neg\alpha$$

gilt.

Aufgabe 5.21.*

Skizziere einen konstruktiven Beweis für die Tautologieversion der Vollständigkeit der Aussagenlogik.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.22. (2 Punkte)

Beweise das Lemma von Zorn für eine total geordnete Menge.

Aufgabe 5.23. (3 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} = \left\{ T \subseteq \mathbb{N}_+ | \sum_{n \notin T} \frac{1}{n} \text{ ist eine konvergente Reihe} \right\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist.

Aufgabe 5.24. (3 Punkte)

Zeige, dass sich bei der in Aufgabe 5.13 beschriebenen Korrespondenz maximale Ideale und Ultrafilter entsprechen.

Aufgabe 5.25. (3 Punkte)

Definiere eine Wohlordnung auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5.26. (5 Punkte)

Es sei $(M, \preccurlyeq)$ eine total geordnete Menge, die sowohl nach unten als auch nach oben wohlgeordnet ist. Zeige, dass M endlich ist.

Aufgabe 5.27. (2 Punkte)

Beweise den *Endlichkeitssatz für die Aussagenlogik*: Wenn die Aussage α aus der Aussagenmenge $\Gamma \subseteq L^V$ folgt, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, aus der diese Aussage folgt.