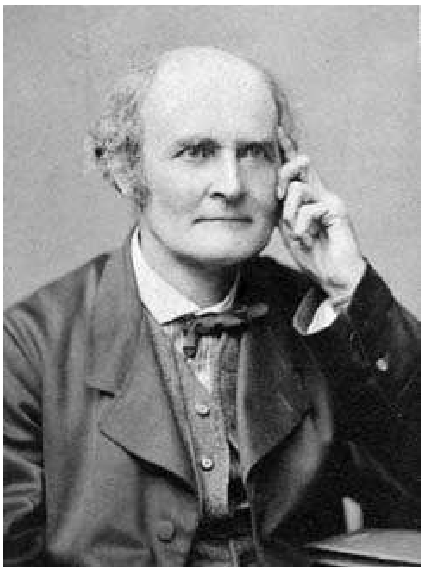
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 24

> Das Lernen und der Orgasmus finden letztlich im Kopf statt

Der Satz von Cayley-Hamilton



Arthur Cayley (1821-1895)

William Hamilton (1805-1865)

Einer der Höhepunkte dieses Kurses ist der Satz von Cayley-Hamilton. Um ihn formulieren zu können erinnern wir daran, dass man in Polynome quadratische Matrizen einsetzen kann, siehe die 20. Vorlesung. Dabei ersetzt man an jeder Stelle die Variable X durch die Matrix M und muss die Potenzen M^i als das i-te Matrixprodukt von M mit sich selbst verstehen und die Addition als die (komponentenweise) Addition von Matrizen interpretieren. Ein Skalar a wird dabei als das a-fache der Einheitsmatrix interpretiert. Für das Polynom

$$P = 3X^2 - 5X + 2$$

und die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\begin{aligned}
P(M) &= 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 40 & 16 \\ 12 & 36 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zu einer fixierten Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gibt es also eine *Einsetzungsabbildung*

$$K[X] \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(K),\ P \longmapsto P(M).$$

Dies ist - ebenso wie die Einsetzungsabbildung zu $a \in K$ - ein Ringhomomorphismus, d.h. es gelten die Beziehungen

$$(P+Q)(M) = P(M)+Q(M),\ (P\cdot Q)(M) = P(M)\circ Q(M) \text{ und } 1(M) = E_n\,.$$

Der Satz von Cayley-Hamilton beantwortet nun die Frage, was passiert, wenn man eine Matrix in ihr charakteristisches Polynom einsetzt.

Satz 24.1. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Es sei*

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0$$

das charakteristische Polynom zu M. Dann gilt

$$\chi_M(M) = M^n + c_{n-1}M^{n-1} + \cdots + c_1M + c_0 = 0.$$

Das heißt, dass die Matrix das charakteristische Polynom annulliert.

Beweis. Wir fassen die Matrix $XE_n - M$ als eine Matrix auf, deren Einträge im Körper $K(X)$ liegen. Die adjungierte Matrix

$$\mathrm{Adj}\,(XE_n - M)$$

liegt ebenfalls in $\mathrm{Mat}_n(K(X))$. Die einzelnen Einträge der adjungierten Matrix sind nach Definition Determinanten von $(n-1)\times(n-1)$-Untermatrizen von $XE_n - M$. In den Einträgen dieser Matrix kommt die Variable X maximal in der ersten Potenz vor, so dass in den Einträgen der adjungierten Matrix die Variable maximal in der $(n-1)$-ten Potenz vorkommt. Wir schreiben

$$\mathrm{Adj}\,(XE_n - M) = X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} + \cdots + XA_1 + A_0$$

mit Matrizen

$$A_i \in \mathrm{Mat}_n(K)\,,$$

d.h. man schreibt die einzelnen Einträge als Polynom und fasst dann zu X^i die Koeffizienten zu einer Matrix zusammen. Aufgrund von Satz 17.9 gilt

$$\begin{aligned}
\chi_M E_n &= (XE_n - M)\circ \mathrm{Adj}\,(XE_n - M) \\
&= (XE_n - M)\circ (X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} \\
&\quad + \cdots + XA_1 + A_0) \\
&= X^nA_{n-1} + X^{n-1}(A_{n-2} - M\circ A_{n-1}) \\
&\quad + X^{n-2}(A_{n-3} - M\circ A_{n-2})
\end{aligned}$$

$$+\cdots + X^1(A_0 - M \circ A_1) - M \circ A_0.$$

Wir können auch die Matrix links nach den Potenzen von X aufteilen, dann ist

$$\chi_M E_n \,=\, X^n E_n + X^{n-1} c_{n-1} E_n + X^{n-2} c_{n-2} E_n + \cdots + X^1 c_1 E_n + c_0 E_n.$$

Da diese zwei Polynome übereinstimmen, müssen jeweils ihre Koeffizienten übereinstimmen. D.h. wir haben ein System von Gleichungen

$$\begin{array}{ccc} E_n & = & A_{n-1} \\ c_{n-1}E_n & = & A_{n-2} - M \circ A_{n-1} \\ c_{n-2}E_n & = & A_{n-3} - M \circ A_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 E_n & = & A_0 - M \circ A_1 \\ c_0 E_n & = & -M \circ A_0\,. \end{array}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen von links von oben nach unten mit $M^n, M^{n-1}, M^{n-2}, \ldots, M^1, E_n$ und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} M^n & = & M^n \circ A_{n-1} \\ c_{n-1}M^{n-1} & = & M^{n-1} \circ A_{n-2} - M^n \circ A_{n-1} \\ c_{n-2}M^{n-2} & = & M^{n-2} \circ A_{n-3} - M^{n-1} \circ A_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 M^1 & = & M A_0 - M^2 \circ A_1 \\ c_0 E_n & = & -M \circ A_0\,. \end{array}$$

Wenn wir die linke Spalte dieses Gleichungssystem aufsummieren, so erhalten wir gerade $\chi_M(M)$. Wenn wir die rechte Seite aufsummieren, so erhalten wir 0, da jeder Teilsummand $M^{i+1} \circ A_i$ einmal positiv und einmal negativ vorkommt. Also ist $\chi_M(M) \,=\, 0$. □

Satz 24.2. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann gilt für das charakteristische Polynom die Beziehung

$$\chi_f(f) \,=\, 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 24.1. □

Minimalpolynom und charakteristisches Polynom

Korollar 24.3. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist das charakteristische Polynom χ_f ein Vielfaches des Minimalpolynoms μ_f zu f.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 24.2 und Korollar 20.12. □

Insbesondere ist der Grad des Minimalpolynoms zu $\varphi\colon V \to V$ durch die Dimension des Vektorraums V beschränkt. Minimalpolynom und charakteristisches Polynom stimmen in verschiedener Hinsicht überein, beispielsweise besitzen sie die gleichen Nullstellen.

LEMMA 24.4. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ und es sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Dann ist

$$(P(f))(v) \,=\, P(\lambda)v.$$

Insbesondere ist v ein Eigenvektor von $P(f)$ zum Eigenwert $P(\lambda)$. Der Vektor $v \neq 0$ gehört genau dann zum Kern von $P(f)$, wenn λ eine Nullstelle von P ist.

Beweis. Es ist

$$(f^k)(v) \,=\, \lambda^k v.$$

Daher folgt alles daraus, dass die Zuordnung $P \mapsto P(f)$ mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträglich ist. □

LEMMA 24.5. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann besitzen das charakteristische Polynom χ_f und das Minimalpolynom μ_f die gleichen Nullstellen.

Beweis. Dass die Nullstellen des Minimalpolynoms auch Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, folgt direkt aus Cayley-Hamilton. Umgekehrt sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms und sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, den es nach Satz 23.2 gibt. Das Minimalpolynom schreiben wir als

$$\mu_f \,=\, (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_k)^{m_k} Q,$$

wobei Q nullstellenfrei sei. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_f(f) \\ &= \left((X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_k)^{m_k} Q\right)(f) \\ &= (f-\lambda_1 \operatorname{Id}_V)^{m_1} \cdots (f-\lambda_k \operatorname{Id}_V)^{m_k} Q(f). \end{aligned}$$

Wir wenden dies auf v an. Nach Lemma 24.4 bilden die Faktoren den Vektor v auf $(\lambda-\lambda_i)^{m_i} v$ bzw. auf $Q(\lambda)v$ ab. Insgesamt wird somit v auf

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{m_k} Q(\lambda)v$$

abgebildet. Da die Gesamtabbildung die Nullabbildung und $Q(\lambda) \neq 0$ ist, muss ein $\lambda_i = \lambda$ sein. □

Weitere Beispiele

Den folgenden Begriff werden wir im Moment ausschließlich für (invertierbare) Matrizen anwenden.

Definition 24.6. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element. Dann nennt man die kleinste positive Zahl n mit $g^n = e_G$ die *Ordnung* von g. Man schreibt hierfür $\operatorname{ord}(g)$. Wenn alle positiven Potenzen von g vom neutralen Element verschieden sind, so setzt man $\operatorname{ord}(g) = \infty$.

Wir betrachten lineare Abbildungen

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

mit der Eigenschaft, dass eine Potenz davon die Identität ist, sagen wir

$$\varphi^k = \mathrm{Id}_V,$$

dass φ also endliche Ordnung besitzt. Typische Beispiele sind Drehungen um einen Winkel der Form $\frac{360}{k}$ oder Permutationsmatrizen. Das Polynom $X^k - 1$ annulliert dann diesen Endomorphismus und ist daher ein Vielfaches des Minimalpolynoms.

Definition 24.7. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann heißen die Nullstellen des Polynoms

$$X^n - 1$$

in K die n-ten *Einheitswurzeln* in K.

Lemma 24.8. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Die Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ über $\mathbb{C}$ sind*

$$e^{2\pi \mathrm{i} k/n} = \cos \frac{2\pi k}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

In $\mathbb{C}[X]$ gilt die Faktorisierung

$$X^n - 1 = (X-1)(X - e^{2\pi \mathrm{i}/n}) \cdots (X - e^{2\pi \mathrm{i}(n-1)/n}).$$

Beweis. Der Beweis verwendet einige Grundtatsachen über die komplexe Exponentialfunktion. Es ist

$$\left(e^{2\pi \mathrm{i} k/n}\right)^n = e^{2\pi \mathrm{i} k} = \left(e^{2\pi \mathrm{i}}\right)^k = 1^k = 1.$$

Die angegebenen komplexen Zahlen sind also wirklich Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$. Diese Nullstellen sind alle untereinander verschieden, da aus

$$e^{2\pi \mathrm{i} k/n} = e^{2\pi \mathrm{i} \ell/n}$$

mit $0 \leq k \leq \ell \leq n-1$ sofort durch betrachten des Quotienten $e^{2\pi \mathrm{i}(\ell - k)/n} = 1$ folgt, und daraus

$$\ell - k = 0.$$

Es gibt also n explizit angegebene Nullstellen und daher müssen dies alle Nullstellen des Polynoms sein. Die explizite Beschreibung in Koordinaten folgt aus der eulerschen Formel. $\square$

Definition 24.9. Zu einer Permutation π auf $\{1,\ldots,n\}$ nennt man die $n \times n$-Matrix
$$M_\pi = (a_{ij}),$$
für die
$$a_{\pi(j),j} = 1$$
ist und sonst alle Einträge 0 sind, eine *Permutationsmatrix*.

Wir wollen das charakteristische Polynom zu einer Permutationsmatrix bestimmen. Dabei verwenden wir, dass eine Permutation ein Produkt von Zykeln ist. Zu einem Zykel der Form $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto k \mapsto 1$ gehört die Permutationsmatrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Jeder Zykel kann (durch Umnummerierung) auf diese Gestalt gebracht werden.

Lemma 24.10. *Das charakteristische Polynom einer Permutationsmatrix M_ρ zu einem Zykel $\rho \in S_n$ der Ordnung k ist*
$$\chi_M = (X-1)^{n-k}(X^k - 1).$$

Beweis. Wir können von einem Zykel der Form $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto k \mapsto 1$ ausgehen. Die zugehörige Permutationsmatrix M_ρ ist bezüglich $e_{k+1},\ldots,e_n$ die Einheitsmatrix und hat bezüglich der ersten k Standardvektoren die Gestalt
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Die Determinante zu $XE_n - M_\rho$ ist $(X-1)^{n-k}$ multipliziert mit der Determinante von
$$\begin{pmatrix} X & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & X \end{pmatrix}.$$
Die Entwicklung nach der ersten Zeile liefert
$$X^k + (-1)^{k+1}(-1)(-1)^{k-1} = X^k - 1.$$
□

Lemma 24.11. *Zu einer Permutationsmatrix M_ρ über $\mathbb{C}$ zu einem Zykel $\rho \in S_n$ mit $\rho : i_1 \mapsto i_2 \mapsto \ldots \mapsto i_k \mapsto i_1$ und einer k-ten Einheitswurzel ζ sind die Vektoren*

$$v_\zeta := \zeta^{k-1} e_{i_1} + \zeta^{k-2} e_{i_2} + \cdots + \zeta e_{i_{k-1}} + e_{i_k}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert ζ. Insbesondere ist eine Permutationsmatrix zu einem Zykel über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} M_\rho(v_\zeta) &= M_\rho(\zeta^{k-1} e_{i_1} + \zeta^{k-2} e_{i_2} + \cdots + \zeta e_{i_{k-1}} + e_{i_k}) \\ &= \zeta^{k-1} M_\rho(e_{i_1}) + \zeta^{k-2} M_\rho(e_{i_2}) + \cdots + \zeta M_\rho(e_{i_{k-1}}) + M_\rho(e_{i_k}) \\ &= \zeta^{k-1} e_{i_2} + \zeta^{k-2} e_{i_3} + \cdots + \zeta e_{i_k} + e_{i_1} \\ &= e_{i_1} + \zeta^{k-1} e_{i_2} + \zeta^{k-2} e_{i_3} + \cdots + \zeta e_{i_k} \\ &= \zeta(\zeta^{k-1} e_{i_1} + \zeta^{k-2} e_{i_2} + \cdots + \zeta e_{i_{k-1}} + e_{i_k}) \\ &= \zeta v_\zeta . \end{aligned}$$

Da es k verschiedene k-te Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ gibt, sind diese Vektoren nach Lemma 22.3 linear unabhängig und erzeugen einen k-dimensionalen Untervektorraum U von K^n, und zwar gilt

$$U = \langle e_{i_j},\, j = 1, \ldots, k \rangle .$$

Da die Vektoren e_i, $i \neq i_j$, Fixvektoren sind, bilden die v_ζ zusammen mit den e_i, $i \neq i_j$, eine Basis aus Eigenvektoren von M_ρ und daher ist M_ρ diagonalisierbar. □

Satz 24.12. *Eine Permutationsmatrix ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 24.26. □

Abbildungsverzeichnis