中華文庫

初中第一集

因子分解法

雷君粹編

中華書局印行

因子分解法目次

因子分解法

第一章　復習整式的基本算法

1.. 關於代數式的幾個重要名詞　數字和表數的文字，用運算符號聯結起來，便成代數式．一式裏用 $+$、$-$ 號隔開的部分叫做項．如果一項是數字和文字的乘積，就能分做兩部分，任一部分叫做他一部分的係數．通常用一個文字或幾個文字爲主，叫他爲元，或未知數，其餘的乘積，就是這項的係數．如這幾項所含的元完全相同的，叫做同類項．

例　在代數式 $3ax^2-2by+c$ 裏，a、b、c、x、y 都是表數的文字，習慣上用 a、b、c、……表已知數，x、y、z、……表未知數．就 $3ax^2$ 一項而論，用 x 做元，$3a$ 是 x^2 的係數，3 是數字係數，a 是文字係數，用 a 和 x 做元，3 是 ax^2 的係數．$3ax^2$ 和 $2bx^2$，用 x 做元是同類項；若用 a、b、x 做元便是異類項．

代數式化簡以後，各項除係數外，只含乘積和乘方的，叫做有理整式，也稱多項式．只有一項的，叫做單項式．有二項、三項的，便叫二項式、三項式．

一數自乘的積，叫這數的冪或乘方．記冪的次數的數，叫

做指數．一項中未知數指數的和，叫項的次數．一式中最高次項的次數，叫式的次數．各項次數相同的，叫同次式；不相同的，可依一元的次數高低排列，先高後低的，叫降冪式，先低後高的，叫升冪式．式中不含未知數的項，叫絕對項，也叫零次項．

例　用 x 和 y 做元，ax^2，bxy，$3y^2$ 都是二次項．$ax^2+bxy-3y^2$ 是 x 和 y 的二次整式，又是二次同次式．又 $x^4-3x^3+x^2-2x+5$ 是 x 的降冪式；如果排列為 $5-2x+x^2-3x^3+x^4$，便是 x 的升冪式．上式中 x^4 是最高次項，所以這式叫做四次式，5 是他的絕對項．

注意　不寫數字係數的項，他的係數是 1；不寫指數的文字，他的指數是 1．如 x^2y 項的係數是 1，y 的指數是 1，但不必寫做 $1x^2y^1$．

2.式的值、恆等式　代數式中文字，用數值或其他文字去代，依所示算法，求出結果，就是這式的值．

例題一　設 $a=3$，$b=2$，$x=-1$，$y=-\frac{1}{2}$，

求 $ax^2+bxy-3y^2$ 的值．

解　$ax^2+bxy-3y^2$

$$=3\times(-1)^2+2\times(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=3+1-\frac{3}{4}=3\frac{1}{4}.$$

例題二　設 $x=a$，$y=2b$，

求 $bx^3-bx^2y+axy^2-xy+3bx-2ay$ 的值．

解　$bx^3-bx^2y+axy^2-xy+3bx-2ay$

$$=a^3b-2a^2b^2+4a^2b^2-2ab+3ab-4ab=a^3b+2a^2b^2-3ab.$$

兩個算式中間用等號聯結起來，表示相等關係的，叫做等式. 算術裏的等式，如

$$3\times2+10\div5-8\div4=6+2-2.$$

等號左右兩個算式，是永久相等的，叫做數字的恆等式. 代數裏的等式，如

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3.$$

不拘 x、y 代表什麼數值，兩邊相等，恆能成立的，叫做文字的恆等式，簡稱恆等式.

註 恆等式中間常用恆等號"$\equiv$"，但不注重表示"恆等"的時候，仍舊可用普通等號.

3.整式的加減法 整式相加，須服從下面的符號律和運算律：

$$\text{加法符號律}\begin{cases}(1)\text{同號}:(+a)+(+b)=a+b,\\ \qquad\qquad (-a)+(-b)=-a-b.\\ (2)\text{異號}:(+a)+(-b)=a-b,\\ \qquad\qquad (-a)+(+b)=-a+b.\end{cases}$$

注意 兩數的和或差，都可寫成兩數和的形式，叫做代數和.

$$\text{加法運算律}\begin{cases}(1)\text{可易律}:a+b+c=a+c+b=c+a+b.\\ (2)\text{可羣律}:a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c.\end{cases}$$

減法是加法的逆運算，也可以不拘任何順序去減，不過須服從下面的符號律：

減法符號律 $\begin{cases} (1)\text{同號}: (+a)-(+b)=a-b, \\ \qquad\qquad (-a)-(-b)=-a+b. \\ (2)\text{異號}: (+a)-(-b)=a+b, \\ \qquad\qquad (-a)-(+b)=-a-b. \end{cases}$

法則: 同類項加減,將各項係數加減的結果,附以公共文字.異類項相加,用+號聯結;相減,變減式的符號,再加上.

註 下面各例題用 x 和 y 做元,其餘文字都當做係數.

例題一 求 ax、bx 的和同差.

解 $ax+bx=(a+b)x$, $\quad ax-bx=(a-b)x$.

例題二 求 $(a-b)x$,$(c-d)x$ 的和同差.

解 $(a-b)x+(c-d)x=[(a-b)+(c-d)]x=(a-b+c-d)x$.

$(a-b)x-(c-d)x=[(a-b)-(c-d)]x=(a-b-c+d)x$.

例題三 求在 $3a^2x^2-2abxy+4b^2y^2$ 上加 $-2a^2x^2+3abxy-3b^2y^2$.

解 $3a^2x^2-2abxy+4b^2y^2+(-2a^2x^2+3abxy-3b^2y^2)$

$=(3a^2-2a^2)x^2-(2ab-3ab)xy+(4b^2-3b^2)y^2$

$=a^2x^2+abxy+b^2y^2$.

例題四 求從 $-abx-cdy$ 減去 $-2abx+3cdy$.

解 $-abx-cdy-(-2abx+3cdy)$

$=(-ab+2ab)x-(cd+3cd)y=abx-4cdy$.

例題五 求 $3x^4-2x^3+x+1$,x^4+6x^2-3x-4 的和同差.

解 $3x^4-2x^3+x+1+(2x^4+6x^2-3x-4)$

$$=5x^4-2x^3+6x^2-2x-3.$$

$$3x^4-2x^3+x+1-(2x^4+6x^2-3x-4)$$

$$=x^4-2x^3-6x^2+4x+5.$$

習　題　一

1. 舉例說明係數和指數的區別.

註　以下各題,(1)把式中各文字都視爲元,(2)把 x、y、z 當做元.

2. 下列各項是幾次項?　那幾項是同類項?

$3a^2bx$, $2ab^2y$, $3xyz$, $abxy$, $acxy^2$, bcx^2y, $abcxyz$, $3cxy^2$, bc^2y^6, acx^5, $5x^2y^2$, cz^4.

3. 下列各式是幾次式?　有沒有同次式?

(1) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+abcd$.

(2) $x^6y^2+x^5y^3+x^3y^5+x^4y^4$.

(3) $(a+b)x^3+(a-b)x^2-ax+bx-ab$.

(4) $x^5-2x^4-3x^3+5x^2-x+1$.

4. 整列下面各式爲降冪式和升冪式:

(1) $x+x^4-3x^3+4-2x^2$.

(2) $a^4+a^3x+bx^5-bx^3-a^2b^2+cx^4-bcx^2$.

(3) $y^2x^2-yx^3+y^3x+3x-2y+1$.

(4) $5y-4y^3+2y^4-y^2+3$.

5. 設 $a=2$, $b=3$, $c=-1$, $x=1\frac{1}{2}$, $y=1$,求下列各式的值:

(1) $x^3-by^2+cxy-ax+y^3-cy$.

(2) $(a+b)x^3+(a^2-b^2)y^2-(a-b)xy$.

(3) $(a-b)(x+y)-(a+b)(x-y)+2(x^2-y^2)$.

(4) $a^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^3+c^3+abc$.

6. 證明x、y可爲任何數值,都能使下式兩邊相等·

(1) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

(2) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$.

7. 求$ax+by$, $cx-dy$的和.

8. 求$ax+by-cz$, $-bx+cy+az$, $cx-ay-bz$的和.

9. 求$(3a+b)x+(a-3b)y$, $(a-3b)x-(3a+b)y$的差.

10. 求$(a^2+2ab+b^2)x^2-(a^2-ab+b^2)y^2$,

$(a^2-2ab+b^2)x^2+(a^2+ab+b^2)y^2$的和及差.

11. 在$(2ac^2-b^2d)x$上加什麼式,可得$(ac^2+2b^2d)x$?

12. 從$(6ab-2ac-5bc)y$減去什麼式,可得$(4ab+3ac-5bc)y$?

4.整式的乘法 求幾個整式的乘積,須遵守下面各律:

符號律:
(1)同號: $(+a)\times(+b)=+ab$,
$(-a)\times(-b)=+ab$.
(2)異號: $(+a)\times(-b)=-ab$,
$(-a)\times(+b)=-ab$.

運算律:
(1)可易律: $ab=ba$.
(2)可羣律: $(ab)c=a(bc)$.
(3)分配律: $a(b+c)=ab+ac$.

$$\text{指數律}\begin{cases}(1)\text{同文字}: a^m a^n = a^{m+n}.\\(2)\text{同指數}: a^n b^n = (ab)^n.\\(3)\text{乘方}: (a^m)^n = a^{mn}.\end{cases}$$

注意一　上面各式中 m 和 n 都表正整數.

設 $2n$ 表偶數，$2n+1$ 表奇數，從符號律推出負數冪的結果如下：　$(-a)^{2n}=+a^{2n}$，$(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$.

特例：$(-1)^{2n}=1$，$(-1)^{2n+1}=-1$.

法則一：　單項式相乘，先求數字係數的積，次將不同文字做乘積，相同文字求出指數的和.

法則二：　單項式乘多項式，卽以單項式徧乘多項式各項.

法則三：　多項式相乘，在一式中順次每取一項，徧乘他式的各項.

例題一　求 $2ab^2$，$-3x^2y$，$-a^3bx^2y^4$ 的連乘積.

解　$(2ab^2)(-3x^2y)(-a^3bx^2y^4)=6a^{1+3}b^{2+1}x^{2+2}y^{1+4}$

$$=6a^4b^3x^4y^5.$$

例題二　求 ax^3y^2 乘 $2x^2+3xy-5y^2$ 的積.

解　$(2x^2+3xy-5y^2)(ax^3y^2)$

$=(2x^2)(ax^3y^2)+(3xy)(ax^3y^2)-(5y^2)(ax^3y^2)$

$=2ax^5y^2+3ax^4y^3-5ax^3y^4$.

例題三　求 $(a^2+ab+b^2)(a-b)$ 的積.

解　$(a^2+ab+b^2)(a-b)=(a^2+ab+b^2)a-(a^2+ab+b^2)b$

$$=a^3-b^3.$$

注意二 單項式乘多項式，或多項式相乘，都用分配律做主要根據，再用單項式乘法去乘，求各部分積的代數和，但實際運算時，兩多項式相乘，照下題裏的算法爲便．

例題四 求 $(a+b)x^2-(a-b)y^2$， $-(a-b)x^2+(a+b)y^2$ 的積．

解

$$\begin{array}{r l}
 & (a+b)x^2-(a-b)y^2 \\
 & -(a-b)x^2+(a+b)y^2 \\
\hline
 & -(a^2-b^2)x^4+(a^2-2ab+b^2)x^2y^2 \\
 & \qquad +(a^2+2ab+b^2)x^2y^2-(a^2-b^2)y^4 \\
\hline
\text{積}= & -(a^2-b^2)x^4+2(a^2+b^2)x^2y^2-(a^2-b^2)y^4
\end{array}$$

5.乘法公式 從上節整式的乘法，直接求得下面幾個重要公式，學者務必熟記．

（1）$a(b+c+d)=ab+ac+ad$.

（2）$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

（3）$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

（4）$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

（5）$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

（6）$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$.

（7）$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

（8）$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

（9）$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

（10）$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

（11）$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

上面的乘法公式，都是恆等式，因爲各式中文字，不拘代以什麼數值，或其他文字，或任何式，兩邊總是相等的.

例題一　求$(2x-3)(4x-5)$的積.

解　$(2x-3)(4x-5)$

$=8x^2+[(-3)\times4+2\times(-5)]x+(-3)\times(-5)$

$=8x^2-22x+15.$

例題二　求$(a+b+c)^2$的積.

解　$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

例題三　求$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$的積.

解　$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)-xy]=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=x^4+x^2y^2+y^4.$

6.整式的除法　除法是乘法的逆運算，符號律和指數律就從乘法裏的這兩律推出，除的時候，也須一一遵守.

符號律
- (1)同號：$(+ab)\div(+b)=+a,$
  - $(-ab)\div(-b)=+a.$
- (2)異號：$(+ab)\div(-b)=-a,$
  - $(-ab)\div(+b)=-a.$

分配律：$(ax-bx+cx)\div x=ax\div x+(-bx)\div x+cx\div x$

$=a-b+c.$

指數律 $\begin{cases}(1)\ m>n,\ a^m\div a^n=a^{m-n}.\\(2)\ m=n,\ a^m\div a^n=a^{m-n}=a^0=1.\\(3)\ m<n,\ a^m\div a^n=a^{m-n}=\dfrac{1}{a^{n-m}}.\end{cases}$

注意一　$a^3\div a^3=1$，$a^3\div a^3=a^{3-3}=a^0$，$\therefore a^0=1$，可知任何文字的次數是一必等於 1.

法則一：　單項式相除，先求數字係數的商，再求文字的商，記在數字商的後面.

法則二：　單項式除多項式，卽以單項式徧除多項式的各項，所得商的代數和是所求的商.

法則三：　多項式相除，（1）先將兩式依某文字排列爲降冪式，（2）用除式的第一項除被除式的第一項，得商的第一項，（3）用商的第一項徧乘除式的各項，從被除式減去這積，（4）所得餘式當做新被除式，照前法繼續演算，到最後餘式次數低於除式爲止.

兩整式相除，能除盡時，商是整式，便說能整除；不能除盡時，商是分式，便說不能整除.

設 A 表被除式，B 表除式，Q 表商式，R 表餘式，兩整式不能整除時，便有　$\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$，或 $A=QB+R$.

注意二　用 B 除 A，A 的次數比 B 低，便記做分式，被除式 A 做分子，除式 B 做分母；若 A 的次數不低於 B，就能求出另一多項式 Q，和一個次數低於 B 的整式 R.

例題一　求 $-2a^2x^3y^2$ 除 $10a^3bx^5y^2$，$a^4b^2xy^3$ 的商.

解　$10a^3bx^5y^2\div(-2a^2x^3y^2)=-5a^{3-2}bx^{5-3}y^{2-2}=-5abx^2$.

$$a^4b^2xy^3\div(-2a^2x^3y^2)=-\frac{a^4b^2xy^3}{2a^2x^3y^2}=-\frac{a^{4-2}b^2y^{3-2}}{2x^{3-1}}$$

$$=-\frac{a^2b^2y}{2x^2}.$$

例題二　求 a^2x^3 除 $a^2x^5-2a^3x^4+3a^4x^3$, ax^3+bx^2+cx+d 的商.

解　$(a^2x^5-2a^3x^4+3a^4x^3)\div a^2x^3$

$=a^2x^5\div a^2x^3-2a^3x^4\div a^2x^3+3a^4x^3\div a^2x^3$

$=x^2-2ax+3a^2$.

$(ax^3+bx^2+cx+d)\div a^2x^3$

$$=\frac{ax^3}{a^2x^3}+\frac{bx^2}{a^2x^3}+\frac{cx}{a^2x^3}+\frac{d}{a^2x^3}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2x}+\frac{c}{a^2x^2}+\frac{d}{a^2x^3}.$$

例題三　用 $a+b+c$ 除 $a^3+b^3+c^3-3abc$.

解　被除式依文字 a 整列爲 $a^3-3bca+b^3+c^3$.

$$\begin{array}{l|l}
a^3-3bca+b^3+c^3 & a+(b+c) \\
\cline{2-2}
\underline{a^3+(b+c)a^2} & a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2) \\
\quad -(b+c)a^2-3bca & \\
\quad \underline{-(b+c)a^2-(b^2+2bc+c^2)a} & \\
\qquad\qquad (b^2-bc+c^2)a+b^3+c^3 & \\
\qquad\qquad \underline{(b^2-bc+c^2)a+b^3+c^3} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

例題四　用 $x-a$ 除 px^3+qx^2+mx+n.

解

$$
\begin{array}{l|l}
px^3+qx^2+mx+n & x-a \\
\underline{px^3-apx^2} & px^2+(q+ap)x+(m+aq+a^2p) \\
\quad (q+ap)x^2+mx & \\
\quad \underline{(q+ap)x^2-(aq+a^2p)x} & \\
\qquad (m+aq+a^2p)x+n & \\
\qquad \underline{(m+aq+a^2p)x-(am+a^2q+a^3p)} & \\
\qquad\qquad n+am+a^2q+a^3p &
\end{array}
$$

$$\frac{px^3+qx^2+mx+n}{x-a}$$

$$=px^2+(q+ap)x+(m+aq+a^2p)+\frac{n+am+a^2q+a^3p}{x-a}.$$

注意三 整除的時候，$R=0$，$A=QB$，要上面例題四能整除，必令 $n+am+a^2q+a^3p=0$.

7.綜合除法 兩整式相除，除式是一次式時，如 $x-a$ 形狀，用綜合除法最簡便，不過演算的式，須依下法：

（一）將被除式排列為 x 的降冪式；

（二）將被除式各項係數連項前符號，順次寫在同一橫行上，遇有缺 x 的某次項，寫 0 補這位置；

（三）變除式裏的絕對項 a 符號，寫在被除式左邊；

（四）用 a 乘首項係數，寫在第二係數的下面，將兩數的和，寫在第三橫行上，再將 a 乘所得的和，寫在第三係數的下面，將兩數相加，寫在第三橫行上；

（五）照此繼續演算，到末項為止，並將首項係數寫在第三橫行的首項，就是商式的最高次項係數，他的次數比被除式的次數低一次，依 x 的降冪可以順次寫出商式的各項，末項是 0，就

是兩整式能整除；不是 0，就是餘式.

注意一　除式中絕對項 a 前面的符號，影響於部分積的符號，變 $-a$ 爲 $+a$，就可以變減爲加，本來要從被除式中減去各部分積，現在就可以相加了.

注意二　除式是一次式，餘式的次數比他低，所以不含 x.

例題一　用 $x-2$ 除 $2x^4-x^3-10x^2+5x+6$.

解
$$\begin{array}{r|l} 2 & 2-1-10+5+6 \\ & \quad\ 4+\ 6-8-6 \\ \hline & 2+3-\ 4-3+0 \end{array}$$

末項是 0，就是能整除.　一次式除四次式，商是三次式.

$\therefore Q=2x^3+3x^2-4x-3.$

例題二　用 $x+3$ 除 x^4-2x^3+4x+1.

解
$$\begin{array}{r|l} -3 & 1-2+\ 0+\ 4+\ \ 1 \\ & \quad -3+15-45+123 \\ \hline & 1-5+15-41+124 \end{array}$$

被除式中缺 x^2 項，用 0 補足.

$\therefore Q=x^3-5x^2+15x-41,$

$R=124.$

一次除式中 x 的係數，如果不是 1，就用這係數除絕對項，先依法演算，再用這係數除所得的商.

例題三　用 $2x-1$ 除 $6x^4-7x^3+3x-2$.

解
$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{2} & 6-7+0+3-2 \\ & \quad\ 3-2-1+1 \\ \hline 2 & 6-4-2+2-1 \\ \hline & 3-2-1+1 \end{array}$$

$2x-1=2(x-\frac{1}{2}).$

第一次只用 $\frac{1}{2}$ 去除，所以再用 2 除，才是所求商式的係數.

$\therefore Q=3x^3-2x^2-x+1,\ \ R=-1.$

例題四　用 $x+2$，$3x-1$ 連續去除 $3x^4+x^3-11x^2+4$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
-2 & 3+1-11+0+4 \\
 & \quad -6+10+2-4 \\
\hline
\frac{2}{3} & 3-5-\ 1+2+0 \\
 & \quad\ 2-\ 2-2 \\
\hline
3 & 3-3-\ 3+0 \\
\hline
 & 1-1-\ 1
\end{array}
\qquad \therefore Q=x^2-x-1,\quad R=0.
$$

例題五 用 $x-2y$ 除 $2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 2-1-7+7-10 \\
 & \quad 4+6-2+10 \\
\hline
 & 2+3-1+5+\ 0
\end{array}
$$

除式和被除式是 x、y 的四次同次式，並且依 x 的降冪 y 的升冪排列，求得的商，也是這樣整列的.

$$\therefore Q=2x^3+3x^2y-xy^2+5y^3,\quad R=0$$

習 題 二

1. 求下面各組單項式相乘的積:

(1) $a^5x^2y^3z,\ -x^3y^2z^4$;

(2) $7a^3x^2y,\ -5b^2y^3z,\ 2a^2b^3x^3y^4z^5$;

(3) $-a^3b^2,\ -a^{n-1}b^m,\ -a^nb^{m+2}$;

(4) $-a^2x^3y^4,\ 3y^2z^3,\ -2a^3x^2y^3z^4$;

(5) $3a^2b^3,\ -5ac^3,\ 2b^5c^2,\ -4a^3b^2c$.

2. 化簡下列各乘冪:

$(a^2x)^3,\ (x^2y^n)^4,\ (-ab^3c^2x^4)^2,\ (ab^2x^3)^n(-ab^2cy^3)^8,\ \{[(xy)^n]^2\}^m,\ (xyz)^m(xyz)^n$.

3 求下面各題用後式除前式的商:

(1) $15a^3b^2c^4, -10ab^2c^3$;　(2) $-21x^{2m}y^n, 14x^my^{m+n}$;

(3) $-54[(ab^2)c]^5, -18[a(b^2c)^2]^3$.

4. 求下面各題的積:

(1) $(2ab+3ac+5bc)(-abc)$;

(2) $(a^2-ab+b^2)(a-2b)$;

(3) $(3+x^2-x)(x^4-2x+5x^2-x^3)$;

(4) $(x^{n-2}-x^{n-3})(2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3})$.

5. 用乘法公式,直接求下面各題的積:

(1) $(2a+b^2)(2a-b^2)$;　(2) $(3a^2+2b)(3a^2-2b)$;

(3) $(b+x)(b-x)(b^2+x^2)$;　(4) $(a-2b)^2(a+2b)^2$;

(5) $(a^2+ab-3b^2)(a^2-ab+3b^2)$;

(6) $(x-3y+2z)(x+3y-2z)$;

(7) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$;

(8) $(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$;

(9) $(x^2+xy+y^2+x-y+1)(x-y-1)$;

(10) $[x^2-(m+n)x+m^2-mn+n^2][x+(m+n)]$;

(11) $(2a+3b)^3$;　(12) $(2a-3b)^3$;

(13) $(4x-3y)^3$;　(14) $(a+b+c)^3$.

6. 求下面各題的商:

(1) $(30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7)\div(-5ab^2c^3)$;

(2) $[3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2]\div(y-x)^2$;

(3) $(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4\div(b-a)(c-b)^2(a-c)^3$;

(4) $[x^3-(a+p)x^2+(q+ap)x-aq]\div(x-a)$;

(5) $(2x^2+5xy+3y^2+7x+11y-4)\div(x+y+4)$;

(6) $[x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac-bc)x-abc]\div(x+a)$.

7. 用$x-y$, 或 $y-z$, 或 $z-x$ 去除 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$,求商式.

8. 被除式爲$2x^3+xy^2+y^3$, 除式爲$2x+y$, (1)依x的降冪排列, (2)依x的升冪排列,各求商式和餘式.

9. 從乘法公式,可以直接求出下面兩題的商式麽?

(1) $[(2a)^3+(3b)^3]\div(2a+3b)$;

(2) $[(4x)^3-(5y)^3]\div(4x-5y)$.

10. 用綜合除法,求下面各題的商式和餘式:

(1) $(5x^5-6x^4-8x^3+7x^2+6x+3)\div(x-3)$;

(2) $(3x^4+x^2-1)\div(x+2)$;

(3) $(3x^3-6x^2+x+2)\div(3x-1)$;

(4) $(3x^3+16x^2-13x-6)\div(3x+1)$.

11. 用綜合除法,證明$2x^3+3x^2-2x-3$能被$x-1$,$x+1$,$2x+3$整除.

12. 用$x-1$除$3x^3-4x^2-x+2$,再繼續除所得商式,求第三次的商式和餘式.

復習題一

1. 從 $a^4+a^3b+2a^2b^2-b^4$ 同 $a^3b+3a^2b^2-ab^3$ 兩式的和減去

$2a^3b+8a^2b^2-6ab^3-2b^4$.

2. 從 $x^3+y^3-6x-5y$ 減去 $-2x^2-6x+7y$ 同 x^3-2x^2-5y+9 兩式的和.

3. $(a^2+b^2)(a+b)$減去什麽式可得 a^3+b^3?

4. $(a^2+b^2)(a-b)$加上什麽式可得 a^3-b^3?

5. 某式同 x^2+x+1 相乘得 $x^4+5x^3+8x^2+7x+3$,求某式.

6. 某式用 x^2-xy+y^2 及 x^2+xy+y^2 去連除,得商式 $x+y$,求某式.

7. 設 a、b、x、y 爲任意數値,下面兩題裏各式的值是不是相等?

(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$, $(ax-by)^2+(bx+ay)^2$, $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$;

(2) $(a^2-b^2)(x^2-y^2)$, $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$, $(ax-by)^2-(bx-ay)^2$.

8. 用乘法公式直接求出下面的結果:

(1) $(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$;

(2) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$;

(3) $[(x+a)^3+(y-a)^3]\div(x+y)$;

(4) $[(a^2-b^2)+c(a+b)]\div(a+b)$;

(5) $[(x+y)^3+z^3]\div(x+y+z)$;

(6) $[(3x-4y)^3-(4x-3y)^3]\div[-(x+7y)]$;

(7) $[(a^2-bc)^3+27b^3c^3]\div(a^2+2bc)$;

(8) $[(x^2+xy+y^2)^3-(x^2-xy+y^2)^3]\div 2xy$;

(9) $[(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3]\div 2(x^2+y^2)$;

(10) $(a^3+8b^3+27c^3-18abc)\div(a+2b+3c)$;

(11) $(x^3-8y^3+z^3-6xyz)\div(x^2+4y^2+z^2+2yz-zx+2xy)$。

9. 要使 $x-a$ 能整除 $x^4-x^3+2x^2-2x+5$,必令 $a^4-a^3+2a^2-2a+5=0$,求證.

10. 用綜合除法求下面各題的結果:

(1) $(x^4-7x-2)\div(x+2)$;

(2) $(3x^4+2x^3-21x-14)\div(3x+2)$;

(3) $(3x^4-8x^3-17x^2+7x-12)\div(x-4)$;

(4) $(2x^5+2x^4y+3x^3y^2+3x^2y^3+4xy^4+4y^5)\div(x+y)$.

(5) 用 $x+1$, $x-2$ 連除下面兩式,再除兩式的差:

$2x^4-4x^3-3x^2+5x+2$, $2x^4-5x^3+x^2+4x-4$.

(6) 用 $2x-1$, $x-1$ 連除下面兩式,再除兩式的和:

$2x^4+x^3-9x^2+8x-2$, $2x^4-7x^3+11x^2-8x+2$.

(7) 用 $x-1$ 連除 $x^5-10x^2+15x-6$ 三次.

(8) 要 $2x+3$ 能整除 $10x^4+5x^3-17x^2-3x+k$, 令 k 等於什麽數?

第二章　應用乘法公式分解因子

8. 因子和公因子　兩個以上代數式相乘的結果，叫做乘積，乘式和被乘式，叫做這乘積的因子．　已知乘積和一因子，用除法可以求出其他因子，所以兩整式能整除的時候，除式和商式就是被除式的因子．

例一　$(2x)(-3y)=-6xy$，$2x$ 和 $-3y$ 是 $-6xy$ 的因子．

$(x+1)(x-1)=x^2-1$，$x+1$ 和 $x-1$ 是 x^2-1 的因子．

例二　$4a^2b^3\div(-2ab^2)=-2ab$，

$-2ab^2$ 和 $-2ab$ 是 $4a^2b^3$ 的因子．

$(x^3-8a^3)\div(x-2a)=x^2+2ax+4a^2$，

$x-2a$ 和 $x^2+2ax+4a^2$ 是 x^3-8a^3 的因子．

一式是兩式以上公有的因子，叫做公因子；換句話說，一整式能整除兩個以上的整式，這一整式是那幾個整式的公因子．

例三　$2x$ 是 $2a^2x$，$-4b^2x^2$，$-6cx^3$ 的公因子．

$x-1$ 是 x^3-1，x^2-1，$x-1$ 的公因子．

9. 質式和複式　一整式除自身和 1 以外，沒有其他整式能整除的，叫做質式；有其他整式能整除的，叫做複式．　因子是質式時，叫做質因子．　複式必是兩個以上質式的乘積．

例　$x-1$，$x+1$ 是質式，x^2-1 是複式．

10. 因子分解的意義　已知乘積，求出原來的乘式和被乘式，

是乘法的逆運算．這種逆算法，叫做因子分解法．將一式分解成因子，各因子必須是有理整式．有了這樣限制，因子分解的意義，可以確定．不過分解的時候，須將式中所含有理因子，完全分解出來，就是最後求得的因子，都是質式．

例 $x^4y^2-x^3y^3=xxxyy(x-y)$，$x^4y^2-x^3y^3$ 的質因子是 x、x、x、y、y、$x-y$，其中相異的是 x、y、$x-y$，用相異質因子乘冪的積表原式，只有一種方法，就是 $x^3y^2(x-y)$．

註 質因子中有相同的，便成乘方因子，如上例中 x^3、y^2．

11．因子分解的困難 因子分解是乘法的逆算法，乘法有兩種主要步驟：(一)先求部分積，(二)再求各積的代數和．部分積相加的時候，將同類項合併或相消，求得的乘積，已經變形．要逆行這程序，從前合併的，須再分開，已經消去的，還要加入，初學的人，感覺因子分解的困難，就在這一步．譬如

$$(x+a)(x-a)=x^2+ax-ax-a^2=x^2-a^2.$$

$$(x+a)(x+2a)=x^2+ax+2ax+2a^2=x^2+3ax+2a^2.$$

逆序算去，上一式右邊必須先加上 ax 和 $-ax$ 兩項，下一式右邊必須先分 $3ax$ 一項爲 ax 和 $2ax$ 兩項，才能用乘法分配律，還到原式．

因子分解，不像其他算法，有一定的法則，每遇一題，常覺得無從着手，歷來爲教學的難關，進修的障礙，編者以爲熟記乘法公式，多演習題，熟能生巧，困難自除．以下各節就是根據乘法公式，專講整式的因子分解方法．

12. 各項有公因子的式 預習：注意下面求得的各乘積，都有公因子．

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

$$3x(x^2-2x+4)=6x^3-6x^2+12x.$$

$$(a+b)(x-y+1)=(a+b)x-(a+b)y+(a+b).$$

公式分解法： $ab+ac+ad=a(b+c+d)$.

整式各項有公因子 a，將 a 除原式，得 $b+c+d$，故 a 和 $b+c+d$ 是所求兩因子．

例題一 分解 $3a^4x^3-6a^3b^2x^2+3a^2x$ 的因子．

解 原式各項都被 $3a^2x$ 整除，就是有公因子 $3a^2x$.

$(3a^4x^3-6a^3b^2x^2+3a^2x)\div 3a^2x=a^2x^2-2ab^2x+1$.

$\therefore$ $3a^4x^3-6a^3b^2x^2+3a^2x=3a^2x(a^2x^2-2ab^2x+1)$.

注意一 本題的結果不可寫做 $3a^2x(a^2x^2-2ab^2x)$.

例題二 分解 $(a+b)(x+y)-(b-c)(x+y)+(c+a)(x+y)$ 的因子．

解 各項有公因子 $x+y$.

$\therefore$ $(a+b)(x+y)-(b+c)(x+y)+(c+a)(x+y)$

$=(x+y)[(a+b)-(b-c)+(c+a)]$

$=(x+y)(2a+2c)=2(x+y)(a+c)$.

例題三 分解 $a(x-y)+b(x-y)+c(y-x)$ 的因子．

解 因為 $y-x=-(x-y)$，所以各項看做有公因子 $x-y$，注意用 $x-y$ 除 $y-x$ 得 -1.

$\therefore$ $a(x-y)+b(x-y)+c(y-x)=(x-y)(a+b-c)$.

注意二　上面第二因子不可寫做 $a+b+c$.

例題四　分解 $(x+y)(x+y-z)-(x-y)(z-y-x)$ 的因子.

解　$z-y-x=-(x+y-z)$,兩項就是有公因子 $x+y-z$.

$\therefore\ (x+y)(x+y-z)-(x-y)(z-y-x)$

$=(x+y-z)[(x+y)+(x-y)]=2x(x+y-z)$.

習　題　三

分解下列各題的因子:

1. $x^2(x-a)+bx(x-a)$.　　2. $2a(a+b)-c(a+b)$.

3. $(x+y)(x+2)-2(x+y)$.

4. $(x+y)(b+c)+(x+y)(b-c)$.

5. $(x-y)^2+3(x+y)x$.

6. $(x+y)^2(b+c)-(x+y)(b+c)^2$.

7. $(x+y)(b+c-a)-(x+y)(a+b+c)$.

8. $(a-b)c+(b-a)c^2$.　　9. $ax^2(b-c)-3x(c-b)$.

10. $(a+b-c)(x-y-z)+(c-b-a)(y+z-x)$.

11. $(b-c)^3+(c-b)^3$.

12. $(b-c)(c-a)-(c-b)(a-c)$.

13. $2^{n+1}+2$.　　14. $4^{n+2}-16$.

15. $x^my^3z^2-2x^4y^mz^n+5xy^pz^q$.　　但 $m>4$, $n>2$, $p>3$, $q>2$.

13.**完全平方式**　預習:下面是二項式和三項式的完全平方,注意各項有怎樣關係.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

$$(6x+5y)^2=(6x)^2+2(6x)(5y)+(5y)^2$$
$$=36x^2+60xy+25y^2.$$

$$(7x-3y)^2=(7x)^2-2(7x)(3y)+(3y)^2$$
$$=49x^2-42xy+9y^2.$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

$$(x^2-3x+5)^2=(x^2)^2+(-3x)^2+5^2+2(x^2)(-3x)$$
$$+2(-3x)(5)+2\cdot5(x^2)$$
$$=x^4-6x^3+19x^2-30x+25.$$

注意一　二項式 $a+b$ 或 $a-b$ 的平方是 $a^2+2ab+b^2$ 或 $a^2-2cb+b^2$，叫做完全三項平方式，因文字 a 和 b 可用任何代數式去代，譬如 $-b$ 代 b，兩項差的平方，就變做兩項和的平方，$b+c$ 代 b，便可得三項式的平方，所以不拘任何多項式的平方，總是各項平方的和，加每兩項相乘所得的積兩倍.

注意二　二項式的平方必是三項式，三項式的平方通常是六項式，但有同類項合併以後，往往少去一項. 如上面末一個乘積中 $19x^2$ 一項，是 $9x^2$ 和 $10x^2$ 兩項合併而成的.

公式分解法：　$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2.$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$

如果三項式的兩項是平方（項前符號是正），第三項是這兩項平方根相乘積的兩倍，便是完全三項平方式. 分解這種形狀的整

式，是將兩項的平方根，用第三項符號聯結，得兩個全同因子，記做一因子的平方.

例題一 分解 $25x^2+30xy+9y^2$ 的因子.

解 $25x^2+30xy+9y^2=(5x)^2+2(5x)(3y)+(3y)^2$

$$=(5x+3y)^2.$$

例題二 分解 $16a^4b^4-56a^2b^2+49$ 的因子.

解 $16a^4b^4-56a^2b^2+49=(4a^2b^2)^2-2(4a^2b^2)(7)+7^2$

$$=(4a^2b^2-7)^2.$$

例題三 分解 $(x-y)^2-4(x-y)(y-z)+4(y-z)^2$ 的因子.

解 將 $x-y$ 和 $y-z$ 當做單項式看.

$$(x-y)^2-4(x-y)(y-z)+4(y-z)^2=[(x-y)-2(y-z)]^2$$

$$=(x-3y+2z)^2.$$

例題四 分解 $8a^4b^2x^2-24a^3b^2x+18a^2b^2$ 的因子.

解 $8a^4b^2x^2-24a^3b^2x+18a^2b^2=2a^2b^2(4a^2x^2-12ax+9)$

$$=2a^2b^2[(2ax)^2-2(2ax)(3)+3^2]=2a^2b^2(2ax-3)^2.$$

例題五 分解 $4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16zx$ 的因子.

解 原式 $=(2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(4z)$ $+2(4z)(2x)=(2x+3y+4z)^2.$

例題六 分解 $a^2+9b^2+x^2+6ab-6bx-2ax$ 的因子.

解 末兩項是負項，b 和 x，a 和 x 必是異號，設 x 是負，則 b 和 a 都是正.

原式 $=(a)^2+(3b)^2+(-x)^2+2a(3b)+2(3b)(-x)+2a(-x)$

$=(a+3b-x)^2$.

注意　設 x 是正,則 b 和 a 都是負,得 $(-a-3b+x)^2$ 也適合本題,但通常因子的第一項是正,宜記做 $(x-a-3b)^2$.

例題七　分解 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ 的因子.

解　原式是五項式,如果是三項式的平方,必有一項是兩項合併起來的,學者注意那一項可以分做兩項,使和三項式平方的公式同形. 原式中只有 x^4 和 1 兩項是完全平方,應該還有一項,如果將 $3x^2$ 分做 x^2 和 $2x^2$ 兩項,便不缺少,并且和公式同形.

$$\text{原式}=(x^4+2x^3+x^2)+(2x^2+2x)+1=(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1$$
$$=(x^2+x+1)^2.$$

注意　分 $3x^2$ 為 $2x^2$ 同 x^2,也得同樣的結果,如下:

$$x^4+(2x^3+2x^2)+(x^2+2x+1)=x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2$$
$$=(x^2+x+1)^2.$$

分解完全平方式為因子的平方,如例題七這一類的整式,初學往往感覺分解困難,務必特別注意例題七、八裏的解法.

例題八　分解 $x^4-2x^3-x^2+2x+1$ 的因子.

解　仿前題解法,將 $-x^2$ 化做 x^2-2x^2.

$$\text{原式}=x^4-2x^3+x^2-2x^2+2x+1=(x^2-x)^2-2(x^2-x)+1$$
$$=(x^2-x-1)^2.$$

習　題　四

分解下列各式的因子:

1. $144x^2+24x+1$.
2. $9-6x+x^2$.
3. $4x^2y^2-28xy+49$.
4. $a^2b^2-2abc+c^2$.
5. $25a^2-10ax^2+x^4$.
6. $49a^2x^2y^2+70a^2xy^2+25a^2y^2$.
7. $9x^4+25(y+z)^2-30(y+z)x^2$.
8. $a^2+b^2+9c^2+2ab+6bc+6ac$.
9. $x^2+4a^2+9b^2-12ab-6bx+4ax$.
10. $4x^2+9y^2+16z^2+12xy-16xz-24yz$.
11. $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab$.
12. $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2(x-y)(y-z)$
$+2(y-z)(z-x)+2(z-x)(x-y)$.
13. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.
14. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
15. $x^4+2x^3-x^2-2x+1$.
16. $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$.
17. $x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9$.
18. $4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$.

14.**配方法** 一式加上適當的項，使成完全平方式，這法叫做配方法．應用這種方法，二次式可以配成完全三項平方式．譬如 a^2+2ab 加上 b^2，得 $a^2+2ab+b^2$；又 x^2-3x 加上$\left(\frac{3}{2}\right)^2$，得 $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2$，都配成完全平方．可見 x^2+px 形狀的二次式，不拘 p 是正值或負值，只須加上 x 的係數折半平方，便得完全三項平方式 $x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$．總括說起來，因為中項是首末兩項平方根相乘積的二倍，就是中項的平方等於首末兩項相乘

積的四倍，所以末項等於首項的四倍除中項的平方，如 x^2+px 加 $\frac{(px)^2}{4x^2}$ 即 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$，得 $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$；又 a^2x^2+bx 加 $\frac{(bx)^2}{4a^2x^2}$ 即 $\frac{b^2}{4a^2}$；得 $\left(ax+\frac{b}{2a}\right)^2$，都是一次因子的平方，和上節分解出來的因子同形.

有兩平方和，要配成二項式平方，只須加上或減去兩平方根相乘積的兩倍，如 a^2+b^2 加上或減去 $2ab$，便得 $(a+b)^2$ 或 $(a-b)^2$.

注意　用上法配成的完全平方式，和原式不等.

例題一　使 x^2+8x+q 成爲完全平方，q 的值怎樣？

解　末項應該是 $\left(\frac{8}{2}\right)^2$ 即 16，所以 $q=16$，代入原式，得

$x^2+8x+16=(x+4)^2$.

例題二　在 $4x^2-12x$ 上加什麼數，可成完全平方式？

解　末項 $=\frac{(12x)^2}{4(4x^2)}=\frac{144x^2}{16x^2}=9$，所以原式加上 9，得

$4x^2-12x+9$，便是完全平方.

例題三　要配成 $49x^2+25$ 爲完全平方，應該補上怎樣的項？

解　$49x^2+25=(7x)^2+(5)^2$，缺少中項，應該補上，就是加上或減去 $2(7x)(5)$，即 $70x$，得 $49x^2+70x+25$，或 $49x^2-70x+25$，都是完全平方.

例題四　如果 $x^2+px+64$ 是完全平方，p 的值應該等於什麼數？

解　$p^2=4\times64=256$，　　$p=\pm16$.

註　複號 $\pm$ 讀做加或減，又 $\mp$ 讀做減或加，上題中 p 的值

是 $+16$ 或 -16 都可，因爲 $x^2+16x+64$ 或 $x^2-16x+64$ 都是完全平方.

習 題 五

1. 試就下列各式，配成完全平方：

(1) x^2-12x; (2) x^2+12x; (3) x^2+ax;

(4) $9x^2-24x$; (5) $4x^4-8(a-b)x^2$;

(6) $(a+b)^2x^2-x$; (7) $x^6-5a^2x^3$; (8) $4a^2+9b^2$.

(9) x^4+y^4; (10) $16+a^8b^2c^4x^2$.

2. 設下列各式是完全平方，求 p 的值：

(1) $81x^2-px+3b$; (2) $25x^4+10x^2+p$;

(3) $px^6-28x^3y^2+4y^4$.

3. 化 $2(a^2+b^2+c^2-bc+ca-ab)$ 爲三個完全平方的和.

4. 化 $a^2x^2+b^2y^2-b^2x^2-a^2y^2$ 爲兩個完全平方的差.

5. 若 $(x+a)(x+2b)+(x+2a)(x+b)$ 是完全平方，則 $9a^2+14ab+9b^2=0$，求證.

6. 如果 x^2+px+q 是完全平方，p 和 q 就有怎樣關係?

7. 如果 ax^2+bx+c 是完全平方，a、b 和 c 就有怎樣關係?

15. 兩平方差式 預習：兩式和同差的積，等於兩式平方的差，如果兩式的各項兩兩相同，項前符號有相異的，要求出乘積，就將各式同項中符號相同和相異的分列爲兩項，相乘便得兩平方的差.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

$$(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x^2-a^2)=(x^4+a^4)(x^4-a^4)=x^8-a^8.$$

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)^2-xy]$$
$$=x^4+x^2y^2+y^4.$$

公式分解法： $a^2-b^2=(a+b)(a-b).$

$$x^2+2ax+a^2-b^2=(x+a)^2-b^2$$
$$=(x+a+b)(x+a-b).$$

凡兩平方的差，能化成這種形狀的，都可分解爲兩式的和同差的兩因子．

例題一 分解 $36x^2-49a^2$ 的因子．

解 $36x^2-49a^2=(6x)^2-(7a)^2=(6x+7a)(6x-7a).$

例題二 分解 $81a^4b^4-256c^4$ 的因子．

解 $81a^4b^4-256c^4=(9a^2b^2)^2-(16c^2)^2$

$$=(9a^2b^2+16c^2)(9a^2b^2-16c^2)$$

上面的第二因子，可以再分解爲兩因子，如下：

$$9a^2b^2-16c^2=(3ab)^2-(4c)^2=(3ab+4c)(3ab-4c).$$

$\therefore$ $81a^4b^4-256c^4=(9a^2b^2+16c^2)(3ab+4c)(3ab-4c).$

例題三 分解 $1+12xy-4x^2-9y^2$ 的因子．

解 $1+12xy-4x^2-9y^2=1-(4x^2-12xy+9y^2)$

$$=1-(2x-3y)^2=(1+2x-3y)(1-2x+3y).$$

有時三項式的兩項各是完全平方，其他一項的指數是偶數，依上節的配方法加上適當的項，使成完全平方式，要和原式相

等，再減去所加的項，便成兩平方差式，用上法可分解爲因子.

例題四　分解 $x^4+6x^2y^2+25y^4$ 的因子.

解　原式的中項如果是 $10x^2y^2$，便成完全平方式. 所以原式應該加上 $4x^2y^2$，同時再減去 $4x^2y^2$，可以化做兩平方的差，和原式仍舊相等.

$$x^4+6x^2y^2+25y^4=x^4+10x^2y^2+25y^4-4x^2y^2$$

$$=(x^2+5y^2)^2-(2xy)^2=(x^2+5y^2+2xy)(x^2+5y^2-2xy).$$

例題五　分解 $28a^2x^2-4x^4-9a^4$ 的因子.

解　$28a^2x^2-4x^4-9a^4=16a^2x^2-(4x^4-12a^2x^2+9a^4)$

$$=(4ax)^2-(2x^2-3a^2)^2$$

$$=(4ax+2x^2-3a^2)(4ax-2x^2+3a^2).$$

例題六　分解 $x^2+3x-10$ 的因子.

解　原式只有一項是完全平方，但應用配方法，也可化爲兩平方的差，依上法分解因子.

$$x^2+3x-10=x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-10$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-10=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\right)=(x+5)(x-2).$$

例題七　分解 $8x^2-26x+15$ 的因子.

解　$8x^2-26x+15=8\left(x^2-\frac{26}{8}x+\frac{15}{8}\right)$

$$=8\left[x^2-\frac{26}{8}x+\left(\frac{13}{8}\right)^2-\left(\frac{13}{8}\right)^2+\frac{15}{8}\right]$$

$$=8\left[\left(x-\frac{13}{8}\right)^2-\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]$$

$$=8\left(x-\frac{13}{8}+\frac{7}{8}\right)\left(x-\frac{13}{8}-\frac{7}{8}\right)$$

$$=8\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)=\left[4\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]\left[2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right]$$

$$=(4x-3)(2x-5).$$

註 因子的數係數限於有理數時，許多三項式不能分解爲因子，若沒有這限制，可用無理數，就是數字有平方根號的，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$等，則整式可以分解爲因子的較多. 譬如 x^2-8x+4，$4x^4+2x^2y^2+y^4$ 等不受因子係數是有理數的限制，便能分解.

$$x^2-8x+4=x^2-8x+16-16+4=(x-4)^2-12$$

$$=(x-4)^2-(2\sqrt{3})^2=(x-4+2\sqrt{3})(x-4-2\sqrt{3}).$$

$$4x^4+2x^2y^2+y^4=4x^4+4x^2y^2+y^4-2x^2y^2$$

$$=(2x^2+y^2)^2-(\sqrt{2}xy)^2$$

$$=(2x^2+y^2+\sqrt{2}xy)(2x^2+y^2-\sqrt{2}xy).$$

習 題 六

分解下列各式的因子：

1. $49x^2-81y^4$.
2. $5-20x^4$.
3. $4x^2y^4-16x^4y^2$.
4. $(3x-2)^2-(2x-3)^2$.
5. $(ax+by)^2-(ax-by)^2$.
6. $(x^2+6x+7)^2-(x+3)^2$.
7. $x^2-y^2+2yz-z^2$.
8. $a^2+2ab+b^2-x^2+2xy-y^2$.
9. x^4+64y^4.
10. x^4+x^2+1.
11. x^4+12x^2+64.
12. $x^2+4xy-12y^2$.

13. $x^4+(2-m^2)x^2y^2+y^4$. 14. $x^4-(2+m^2)x^2y^2+y^4$.

15. $a^3-4a^2b+4ab^2-9ax^2$. 16. $x^7-x^5y^2+2x^4y^3-x^3y^4$.

17. $a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$.

18. $a^2x^4-(b^2-2ac)x^2+c^2$ 19. $x^4-16a^2x^2+32a^3x-16a^4$.

20. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$. 21. $2x^2+x+1$.

22. $3x^2+2x-1$. 23. $6x^2-13x+6$.

24. $15x^2+19x-56$. 25. $60x^2-4x-45$.

26. $7x^3+96x^2-103x$. 27. $75x^2-35x^3-10x^4$.

28. $21x^2+26xy-15y^2$. 29. $24a^2x^2-14ax^3-3x^4$.

30. $11x^2-54xy^2+63y^4$.

16.**完全立方式** 預習：兩項和或差的立方，由乘法直接求得，如下：

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

二項式的立方叫做完全四項立方式，注意各項的指數、係數、正負號.

$$(2x+3y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$$
$$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3.$$

$$(3x-2a)^3=(3x)^3-3(3x)^2(2a)+3(3x)(2a)^2-(2a)^3$$
$$=27x^3-54ax^2+36a^2x-8a^3.$$

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3b^2c+3c^2b$$

$+3c^2a+3a^2c+6abc.$

注意一　負數的偶次冪是正，奇次冪是負，所以第二公式中$3ab^2$是正項，$3a^2b$和b^3是負項.

注意二　$-b$代b，上面第一公式，就變做第二公式，用$a+b$代a，或$b+c$代b，便得三項式立方公式，如果其中有負項，乘積中含這項的奇次冪，仍舊是負項.　譬如

$$(a-b+c)^3=a^3-b^3+c^3-3a^2b+3b^2a+3b^2c-3c^2b+3c^2a+3a^2c-6abc.$$

公式分解法：

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^3.$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)(a-b)(a-b)=(a-b)^3.$$

四項式依某文字整列以後，兩項是兩數的立方，其他兩項是一數和他數平方相乘積的三倍，如果各項都是正，必是兩數和的完全立方；若正負相間，就是兩數差的完全立方.

例題一　分解$(x+2)^3+3(x+3)^2(x+2)+3(x+3)(x+2)^2+(x+2)^3$的因子.

解　原式$=[(x+3)+(x+2)]^3=(2x+5)^3.$

例題二　分解$64x^3-144ax^2+108a^2x-27a^3$的因子.

解　$64x^3-144ax^2+108a^2x-27a^3$

$$=(4x)^3-3(4x)^2(3a)+3(4x)(3a)^2-(3a)^3=(4x-3a)^3.$$

例題三　分解$8x^3+12x^2+6x+1$的因子.

解 $8x^3+12x^2+6x+1=(2x)^3+3(2x)^2\times 1+3(2x)\times 1^2+1^3$

$=(2x+1)^3.$

例題四 分解 $x^3+3x^2y+xy^2-y^3$ 的因子.

解 $x^3+3x^2y+xy^2-y^3=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-(2xy^2+2y^3)$

$=(x+y)^3-2y^2(x+y)=(x+y)[(x+y)^2-2y^2]$

$=(x+y)(x^2+2xy-y^2).$

例題五 求證 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$

$+3(b+c)(c+a)(a+b).$

證 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3b^2c+3c^2b$

$+3c^2a+3a^2c+6abc$

$=a^3+b^3+c^3+(3a^2b+3a^2c)$

$+(3ab^2+6abc+3ac^2)+(3b^2c+3c^2b)$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+3bc(b+c)$

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)[a^2+a(b+c)+bc]$

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)[a(a+b)+c(a+b)]$

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$

習題七

分解下列各題的因子:

1. $8x^3-36x+54x-27.$
2. $x^6+15x^4+75x^2+125.$
3. $x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6.$
4. $a^3x^3-3a^2x^2y^2+3axy^4-y^6.$
5. $(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x+y)^2(x-y).$

6. $y^3-3xy^2+2x^3$.　　7. $x^3-3x^2y-xy^2+3y^3$.

8. 求證 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)$
$$+3c^2(a+b)+6abc.$$

9. 求證 $(x-y-z)^3=x^3-y^3-z^3-3(y+z)(x-z)(x-y)$.

7. **兩立方的和或差式**　預習：兩數的和或差同兩數的平方和減去或加上兩數的積相乘的結果，如下：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

從上式可以推出兩數的和或差，必能整除兩數的立方和或差，就是
$$(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2,$$
$$(a^3-b^3)\div(a-b)=a^2+ab+b^2.$$

已知 $2a$ 是 $(a+b)^3+(a-b)^3$ 的因子，怎樣直接求出其他因子？

$$[(a+b)^3+(a-b)^3]\div 2a=[(a+b)^3+(a-b)^3]\div[(a+b)+(a-b)]$$
$$=(a+b)^2-(a+b)(a-b)+(a-b)^2$$
$$=a^2+3b^2.$$

已知 a^2-2bc 是 $(a^2+bc)^3-27b^3c^3$ 的因子，求其他因子．

$$[(a^2+bc)^3-27b^3c^3]\div(a^2-2bc)$$
$$=[(a^2+bc)^3-27b^3c^3]\div[(a^2+bc)-3bc]$$
$$=(a^2+bc)^2+(a^2+bc)\times 3bc+9b^2c^2$$
$$=a^4+5a^2bc+13b^2c^2.$$

公式分解法：　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

例题一 分解 $27x^3+8y^3$ 的因子.

解 $27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3$

$=(3x+2y)[(3x)^2-(3x)(2y)+(2y)^2]$

$=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$.

例题二 分解 $125x^3-64$ 的因子.

解 $125x^3-64=(5x)^3-(4)^3=(5x-4)[(5x)^2+5x\times4+(4)^2]$

$=(5x-4)(25x^2+20x+16)$.

例题三 分解 $x^3+y^3+z^3+3xy(x+y)$ 的因子.

解 $x^3+y^3+z^3+3xy(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+z^3$

$=(x+y)^3+z^3=(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2]$

$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)$.

例题四 分解 x^6-y^6 的因子.

解 $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=(x+y)(x-y)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=(x+y)(x-y)[(x^2+y^2)^2-x^2y^2]$

$=(x+y)(x-y)(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$.

或 $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

例题五 分解 $x^3+ax^2+ax+a-1$ 的因子.

解 $x^3+ax^2+ax+a-1=(x^3-1)+a(x^2+x+1)$

$=(x-1)(x^2+x+1)+a(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x-1+a)$.

例题六 分解 x^3+x^2+x-3 的因子.

解 $x^3+x^2+x-3=(x^3-1)+(x^2-1)+(x-1)$

$=(x-1)[(x^2+x+1)+(x+1)+1]=(x-1)(x^2+2x+3).$

習 題 八

1. 求$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$的積.

2. 求$(x-y+z)(x^2+y^2+z^2-2xy-xz+yz)$的積.

3. 已知x^2+yz是$(x^2-yz)^3+8y^3z^3$的因子,求其他因子.

4. 已知$x-7y$是$(4x-3y)^3-(3x+4y)^3$的因子,求其他因子.

分解下列各式的因子:

5. $x^3+8.$

6. $a^3b^3-1.$

7. $64x^6-27y^3.$

8. $343a^4+512ab^3.$

9. $(a+b)^3-a^3-b^3.$

10. $(a-b)^3-a^3+b^3.$

11. $(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z).$

12. $(x-y)^3-z^3+3xy(x-y-z).$

13. $b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a).$

14. $b(x^3-a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x-a).$

15. $x^3-y^3+2x(x^2-y^2)+3y^2(x-y).$

16. $x^3-27y^3+6y(x^2+3xy+9y^2).$

17. $x^3+x^2y+xy^2+y^3.$

18. $x^4-2x^3y+3xy^3.$

19. $(x+1)^6-1.$

20. $(a-c)^3-(b-d)^3.$

21. $x^4-2xy^3+y^4.$

22. $x^6-7x^3y^3-8y^6.$

23. $x^6+x^3-2.$

24. $x^9+x^6+x^3-3.$

25 $(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$.

26. $(x^2+xy+y^2)^3-(x^2-xy+y^2)^3$.

18. **三次特別積** 預習：最簡的三次多項式，除上節裏講過的兩數立方的和或差外，還有三數立方的和或差，也是一次和二次兩個因子的特別積．從乘法直接求得，如下：

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

上式中各文字，可用其他文字或任何數去代，譬如用 $-b$ 代 b，便得 $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab)=a^3-b^3+c^3+3abc$.

並且在上兩式裏命 $c=0$，即化成

$$(a+b)(a^2+b^2-ab)=a^3+b^3,$$

$$(a-b)(a^2+b^2+ab)=a^3-b^3.$$

可見三次特別積的兩因子，總是一因子是各數的和，他一因子是各數的平方和減去每兩數的乘積．

公式分解法： $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

注意各項的符號，如果一數的立方是負，含這數一次冪的項都要變號，如

$$a^3+b^3-c^3+3abc=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab).$$

$$a^3-b^3-c^3-3abc=(a-b-c)(a^2+b^2+c^2-bc+ca+ab).$$

例題一 已知 $a-2b-1$ 是 $a^3-8b^3-6ab-1$ 的因子，求其餘因子．

解 $(a^3-8b^3-6ab-1)\div(a-2b-1)$

$$=[a^3+(-2b)^3-1^3-3a(-2b)\times(-1)]\div(a-2b-1)$$

$$=[(a-2b-1)(a^2+4b^2+1-2b+a+2ab)]\div(a-2b-1)$$

$$=a^2+4b^2+1-2b+a+2ab.$$

例題二　分解 $27x^3-8y^3-27z^3-54xyz$ 的因子.

解　$27x^3-8y^3-27z^3-54xyz$

$$=(3x)^3+(-2y)^3+(-3z)^3-3(3x)(-2y)(-3z)$$

$$=(3x-2y-3z)[(3x)^2+(-2y)^2+(-3z)^2-(-2y)(-3z)$$
$$-(-3z)(3x)-(3x)(-2y)]$$

$$=(3x-2y-3z)(9x^2+4y^2+9z^2-6yz+9xz+6xy).$$

例題三　設 $x+y=1$，則 $x^3+y^3+3xy=1$，求證.

證　$x^3+y^3-1+3xy=(x+y-1)(x^2+y^2+1+y+x-xy)$.

因 $x+y=1$，卽 $x+y-1=0$.　上式右邊的一個因子等於 0，就是左邊等於 0，所以　$x^3+y^3-1+3xy=0$，　卽 $x^3+y^3+3xy=1$.

習　題　九

1. 求 $(x+y-1)(x^2-xy+x+y^2+y+1)$ 的積.

2. 求 $a^2-2ab-3ac+4b^2-6bc+9c^2$ 除 $a^3-18abc+8b^3+27c^3$ 的商.

分解下面各題的因子:

3. $a^3-8b^3+c^3+6abc$.　　4. $1-x^3+27y^3+9xy$.

5. $a^3-8b^3-27c^3-18abc$.　　6. $125x^3+27y^3+90xy-8$.

7. $x^3+8y^3+8z^3-12xyz$.　　8. $27a^3-b^3+8c^3+18abc$.

9. 求證 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z+x)^2].$$

10. 設 $x+y+z=0$,則 $x^3+y^3+z^3=3xyz$,求證.

11. 設 $3x=a+b+c$,

則 $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.

12. 求證 $(b-c)^3+(a-b)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)=(a-c)^3$.

19.兩同次冪的和或差式 預習:在§§15、17裏講過怎樣應用乘法公式來分解兩平方差式,兩立方和或差式,這些都是分解兩同次冪因子的特例. 現在要進一步研究他的普遍性,就是兩數任何次的同次冪,總是幾個整式的相乘積嗎? 換句話說,都可以分解爲整係數的因式嗎? 由乘法求得二次以上的兩數同次冪,如下:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4.$$

$$(a+b)(a^3+a^2b+ab^2-b^3)=a^4-b^4.$$

$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5.$$

$$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=a^5+b^5.$$

觀察上面各式,可見乘積是兩數同次冪的差:(1)不拘次數是偶是奇,必有一因子是兩數的差;(2)是偶次時,必有一因子是兩數的和. 乘積是兩數奇次同次冪的和,必有一因子是兩數的和. 由此得結論如下:

設 n 表任何正整數，

（一）n 是奇數或偶數，

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n.$$

（二）n 是偶數時，

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})=a^n-b^n.$$

（三）n 是奇數時，

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n+b^n.$$

例如　$(2x-3y)(8x^3+12x^2y+18xy^2+27y^3)=16x^4-81y^4.$

$$(4x+a)(256x^4-64ax^3+16a^2x^2-4a^3x+a^4)$$
$$=1024x^5+a^5.$$

公式分解法： 從上面 n 次同次冪的乘法公式，可以直接求出各次同次冪的因子，如下：

（1）a^n-b^n 必能被 $a-b$ 整除，所以有一因子 $a-b$.

（2）n 是偶數時，a^n-b^n 必能被 $a+b$ 整除，所以有一因子 $a+b$.

（3）n 是奇數時，a^n+b^n 必能被 $a+b$ 整除，所以有一因子 $a+b$.

（4）整除時的商式，就是其餘因子的積，各項都是

$$a^{n-1},\ a^{n-2}b,\ a^{n-3}b^2,\cdots\cdots,\ a^2b^{n-3},\ ab^{n-2},\ b^{n-1}$$

形狀，一文字是遞降冪，他文字是遞升冪．除式是 $a-b$ 時，各項都用"＋"號聯結；除式是 $a+b$ 時，用"＋"號同"－"號交錯聯結．

例題一 求 $x+2$ 除 $(3+x)^4-1$ 的商.

解 $x+2=(3+x)-1$,

$$[(3+x)^4-1]\div(x+2)=[(3+x)^4-1]\div[(3+x)-1]$$

$$=(3+x)^3+(3+x)^2+(3+x)+1=x^3+10x^2+34x+40.$$

例題二 分解 $32x^5+243$ 的因子.

解 $32x^5+243=(2x)^5+(3)^5$

$$=(2x+3)[(2x)^4-(2x)^3(3)+(2x)^2(3)^2-(2x)(3)^3+(3)^4]$$

$$=(2x+3)(16x^4-24x^3+36x^2-54x+81).$$

例題三 分解 $a^5+b^5+ab(a^3+b^3)+a^2b^2(a+b)$ 的因子.

解 $a^5+b^5+ab(a^3+b^3)+a^2b^2(a+b)$

$$=(a+b)[a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+ab(a^2-ab+b^2)+a^2b^2]$$

$$=(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)=(a+b)[(a^2+b^2)^2-a^2b^2]$$

$$=(a+b)(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab).$$

n 是複數時,n 次同次冪,如果先分解出一個一次因子,再分解其餘因子的積,常感不便. 譬如設 $n=6$,

則 $x^6-y^6=(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)$.

將第二因子再分解成三個因子,非常麻煩,但從(1)、(2)、(3)的整除情形,可以推出其他的分解法,如下:

1. n 是正整數 m 的倍數時,a^n-b^n 必能被 a^m-b^m 整除.

例 設 $n=6$, 6 是 2 的 3 倍,

則 $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$.

2. n 是正整數 m 的偶倍數時,a^n-b^n 必能被 a^m+b^m 整除

例 設$n=6$，6是3的2倍，

則 $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$.

3. n是正整數m的奇倍數時，不拘n是奇數或偶數，a^n+b^n必能被a^m+b^m整除.

例 設$n=6$，6是2的3倍，

則 $x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

當n是複數時，能將a^n-b^n或a^n+b^n分解爲次數相近的兩因子，是最好的方法. 因爲這樣所得的因子，其中最少有一因子，再能分解.

例 分解x^6-y^6的因子，方法有三種，但用第二法最爲簡便，就是先分解爲兩個三次因子，再把各因子繼續分解.

$$x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

當n和m是一正整數的倍數時，a^n+b^m或a^n-b^m也可以應用同次冪的整除性來分解因子.

例 $x^9+y^6=(x^3)^3+(y^2)^3=(x^3+y^2)(x^6-x^3y^2+y^4)$.

$x^4-y^6=(x^2)^2-(y^3)^2=(x^2+y^3)(x^2-y^3)$.

注意 兩平方和的整式，不能分解爲一次有理因子，就是兩同次冪的和，在次數是2的乘冪時，雖然可以應用兩平方差的公式來分解爲二次因子，但因子係數往往是無理數，如

$$x^8+y^8=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4$$

$$=(x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2).$$

又　$$x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy)(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy);$$

$$x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(2+\sqrt{2})x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy)(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy).$$

或　$$x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2=(x^2-y^2)^2-(\sqrt{2}-2)x^2y^2$$

$$=(x^2-y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy)(x^2-y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy).$$

例題四　分解 x^8-1 的因子.

解　先將原式分解爲次數相同的兩因子，再將所得一因子，照此方法繼續分解.

$$x^8-1=(x^4+1)(x^4-1)=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$$

$$=(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

例題五　分解 $576x^6y^3-9y^{15}$ 的因子.

解　$576x^6y^3-9y^{15}=9y^3(64x^6-y^{12})=9y^3[(8x^3)^2-(y^6)^2]$

$$=9y^3(8x^3+y^6)(8x^3-y^6)$$

$$=9y^3[(2x)^3+(y^2)^3][(2x)^3-(y^2)^3]$$

$$=9y^3(2x+y^2)(4x^2-2xy^2+y^4)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4).$$

例題六　求證 24 能整除 $5^{2n}-1$，n 是正整數.

證　$5^{2n}-1=(5^2)^n-1$，不拘 n 是偶數或奇數，$(5^2)^n-1$ 必能被 5^2-1 整除，所以 24 能整除 $5^{2n}-1$.

習　題　十

求下列各題用前式除後式的商:

1. $x-2$, x^4-16.

2. x^2+5, x^6+125.

3. $x-1$, x^4-1.

4. x^2-2, x^6-8.

5. x^4+y^4, $x^{12}+y^{12}$.

6. $x+y-2$, $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4-16$.

7. $(a+b)^2(c+d)^2$, $(a+b)^6+(c+d)^6$.

8. $a-b+c+d$, $(a+c)^4-(b-d)^4$.

9. 設 n 是正整數，求證（1）8 能整除 $7^{2n+1}+1$，（2）100 能整除 $99^{2n+1}+1$.

10. 化下式爲最簡整式：

$$\frac{x^7+1}{x+1}-\frac{x^6-1}{x-1}+\frac{x^5+1}{x+1}-\frac{x^4-1}{x-1}+\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{x^2-1}{x-1}.$$

分解下列各式的因子：

11. x^5+1.

12. a^9+b^9.

13. x^9-y^9.

14. $x^{10}+y^{10}$.

15. $x^{12}-y^{12}$.

16. x^7+y^{14}.

17. $32a^3b^3-4b^9$.

18. $x^{15}+1024y^{10}$.

19. $(x+y)(x-y)^3-x^4+y^4$.

20. $(x+y)(x-y)^5-x^6+y^6$.

21. $(x+y)^5-x^5-y^5$.

22. $(x+y)^7-x^7-y^7$.

23. $4a^4x^2-4a^2x^4+x^6-a^6$.

24. $a^5+b^5+3ab(a^3+b^3)+a^2b^2(a+b)$.

25. $x^6+y^6+2x^2y^2(x^2+y^2)$.

26. $x^6+y^6+x^2(x^4-y^4)$.

27. 求證 $(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})=a^{63}-a^{62}b+a^{61}b^2+\cdots\cdots+ab^{62}-b^{63}$.

復習題二

1. 化下列各式為乘方因子:

(1) $64x^2y^6+160x^2y^3z+100z^2$.

(2) $x^2+2(a-b)x+a^2-2ab+b^2$.

(3) $4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$.

(4) $x^3y^6-3ax^2y^4+3a^2xy^2-a^3$.

(5) $(x+y-z)^2+(z+x-y)^2+(y+z-x)^2$
$+2(x+y-z)(z+x-y)+2(z+x-y)(y+z-x)+2(y+z-x)(x+y-z)$.

(6) $(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)(x^2-y^2)$
$+3(x+y)(x^2-y^2)$.

2. 求證 $(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$

$=(y+z)^3+3(y+z)^2x+3(y+z)x^2+x^3$

$=(z+x)^3+3(z+x)^2y+3(z+x)y^2+y^3$.

3. 設 $a-b=2$, $ab=-2$, 求 a^2+b^2 的值.

4. 設 $x=a+1$, 求 x^3-3x^2+3x-1 的值.

5. 化 $(a^2+b^2)(b^2+c^2)$ 為兩平方和.

6. 求證下面兩題能整除(不用多項式除法):

(1) $(x^4-13x^2+36)\div(x^2+5x+6)$.

(2) $(a^2b^2+2abc^2-a^2c^2-b^2c^2)\div(ab-bc+ca)$.

7. 分解下列各式的因子:

(1) $(x+y)(a+b-c)-(x-y)(c-a-b)$.

(2) $4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$.

(3) $1+2xy-x^2-y^2$.　　(4) $x^4-27x^2y^2+y^4$.

(5) $x^4-23x^2y^2+y^4$.　　(6) $(a^2-bc)^3+27b^3c^3$.

(7) $x^5-4a^2x^4+4a^4x^2-a^6$.　(8) x^8-y^8.

(9) $x^3-3abx-(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

8　設 $x=b+c$，$y=c+a$，$z=a+b$，

則　$(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(a^3+b^3+c^3-3abc)=2$. 求證。

第三章 視察分解因子法

20.一元二次三項式一(二次項係數是1) 預習：兩個一元一次全同因子$(x+a)(x+a)$的積，是完全三項平方式$x^2+2ax+a^2$，已經在§13裏講過. 如果兩因子的絕對項是不相同的，由乘法求得結果如下：

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

觀察上式的兩邊，可見二次三項式裏一次項的係數是兩因子裏絕對項的代數和，三項式裏絕對項是兩因子裏絕對項的積.

式中已知數a和b，可用任何正負數去代，演算結果，一次項和絕對項，有時變做一正一負，有時都變做負，但兩邊的關係，不因數值正負而變化，所以學者熟記上式，不必用多項式乘法，便能直接寫出兩因子的積.

(1) $(x+3)(x+4)=x^2+(3+4)x+(3\times4)=x^2+7x+12.$

(2) $(x-3)(x-4)=x^2+(-3-4)x+(-3)(-4)=x^2-7x+12.$

(3) $(x+3)(x-4)=x^2+(3-4)x+3\times(-4)=x^2-x-12.$

(4) $(x-3)(x+4)=x^2+(-3+4)x+(-3)\times4=x^2+x-12.$

仿此寫出下面各式的積：

(5) $(x+5)(x+6)$. (6) $(x+7)(x+8)$.

(7) $(x+6)(x+9)$. (8) $(a-7)(a-1)$.

(9) $(a-3)(a+1)$. (10) $(x-3)(x+1)$.

(11) $(x+4)(x-1)$.　　(12) $(6+x)(5+x)$.

(13) $(x-7)(x-9)$.　　(14) $(a+3)(a-10)$.

(15) $(x-3a)(x+7a)$.　　(16) $(xy-7)(xy-2)$.

(17) $(a^2+7)(a^2-8)$.　　(18) $(ac+7b)(ac-9b)$.

(19) $(a+3b)(a-5b)$.　　(20) $(abc-5d)(abc-6d)$.

練習純熟以後，第二步驟也能省却，可以直接寫出結果，毫不困難.

根據上面各式演算的結果，得兩因子和他的乘積裏正負號關係如下:

(一)兩因子的絕對項是同號，積的絕對項是正，一次項是和因子的絕對項同號.

(二)兩因子的絕對項是異號，積的絕對項是負，一次項是和因子絕對項的絕對值大者同號.

註　凡有號數值不連正負號而講，叫做絕對值.　如 $+3$ 和 -3 的絕對值都是 3，有時記做 $|3|$.　又負數必比正數小，但講到絕對值時 -4 的絕對值是 4，比 3 大.

視察分解法: 一元二次三項式，就二次項係數的大小來區別，可以分做兩類，第一類二次項係數是 1 的，他的範式通常寫做

$$x^2+px+q,$$

和乘法公式　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

右邊相比較，得關係式　$p=a+b$,　$q=ab$.

可見這類二次式能否分解為因子，只要看絕對項分解為兩因數

的代數和，有沒有等於一次項的係數．但初學的時候，不能一看絕對項的數目，便判斷出有沒有這樣的兩因數．a 和 b 的值，本書以整數爲限．q 是質數時，兩因數就是 1 和本數．若 q 是複數，常常有幾種分解法，並且 q 的值，或正或負，那末兩因數可以都是正，或都是負，或一正一負，或大數正小數負，或小數正大數負，所以分解出來的兩因數，種類很多，但適用的只有一種，應該怎樣取捨，初學常感困難．現在將各種情形，分別舉例說明於下：

（一）一次項和絕對項都是正　將絕對項分解爲兩個正因數，如果兩因數相加等於一次項係數，就取這兩數做兩因子的絕對項．

例題一　分解 $x^2+8x+15$ 爲兩個一次因子．

解　絕對項 15 同一次項係數 8 都是正，15 就應該分解爲兩個正因數，如 1×15 或 3×5．但 1 同 15 的和不等於 8，是不適用的；3 同 5 的和恰等於 8，可知兩個一次因子的絕對項，一個是 3，一個是 5，所以

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5).$$

注意一　設上題的中項是 $16x$，15 就要分解爲 1×15，

$$x^2+16x+15=(x+1)(x+15).$$

如果首末兩項不變，中項係數是 8 和 16 以外的數，便不能分解爲整係數因子．

（二）一次項是負，絕對項是正　這和（一）不同的地方，就是絕對項要分解爲兩個負因數，兩負數相加當然也要等於一次項

的係數.

例題二　分解 $x^2-7x+12$ 爲兩個一次因子.

〔解〕　絕對項 12 是正,看一次前面的號,便知 12 應該分解爲兩個負因數,如 $(-1)\times(-12)$, $(-2)\times(-6)$, $(-3)\times(-4)$,容易看出 -7 是 -3 同 -4 的和,所以

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4).$$

注意二　設上題的首末兩項仍舊,中項改做 $-13x$ 或 $-8x$,也能分解爲兩個一次因子,此外便不能分解.

（三）一次項和絕對項都是負　絕對項是負,只能分解爲一正一負的兩因數,要正負兩因數的和是負數,才能和一次項是同號,所以負因數的絕對值必須大於正因數.

例題三　分解 $x^2-6x-16$ 爲兩個一次因子.

解　分解 -16 爲一正一負的兩因數,因爲一次項是負,負因數的絕對值要比正因數大,所以從兩項正負號關係,便知 -16 決不是分解爲 $(-1)\times16$,或 $(-2)\times8$,或 $(-4)\times(-4)$,此外只有分解爲 $1\times(-16)$ 或 $2\times(-8)$,一看便知 2 同 -8 的和是 -6.

$$\therefore\ x^2-6x-16=(x+2)(x-8).$$

注意三　兩個異號數的代數和就是相減,負數的絕對值比正數大,差是負;比正數小,差是正.

（四）一次項是正,絕對項是負　這和（三）不同的地方,就是分解絕對項爲正負兩因數時,要負因數的絕對值比正因數小.

例題四　分解 $x^2+10x-24$ 爲兩個一次因子.

解　分解 -24 爲正負兩因數，計共有八種，要兩因數的代數和是正數，負因數的絕對值必比正因數小，就只有四種分解法，如 $(-1)\times24$，$(-2)\times12$，$(-3)\times8$，$(-4)\times6$，兩因數的代數和是 10，必取 $(-2)\times12$ 一種.

$$\therefore\quad x^2+10x-24=(x-2)(x+12).$$

例題五　分解 $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$ 的因子.

解　括號裏的式，不拘有幾項，可以當做一項看，所以本題和上面例題二同形，分解因子方法，也是一樣的，就是分解 24 爲兩個負因數，取兩因數的和是 -14 一種，如 $(-2)\times(-12)$，所以

$$(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=[(x^2+x)-2][(x^2+x)-12]$$
$$=(x^2+x-2)(x^2+x-12).$$

求得兩因子，都和例題四同形，視察各絕對項，都要分解爲一正一負兩因數，並且兩因數的代數和，都要等於一次項係數，就是 1，如

$$-2=(-1)\times2,\qquad -12=(-3)\times4.$$

所以　$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$，　$x^2+x-12=(x-3)(x+4)$.

$$\therefore\quad (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4).$$

例題六　分解 $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$ 的因子.

解　x^2+3x 當做一項看.

$$[(x^2+3x)-2][(x^2+3x)+4]-16=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-24.$$

上式和例題四同形，容易分解爲兩因子:

$$(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-24=(x^2+3x-4)(x^2+3x+6).$$

第一因子的絕對項　4 分解爲 $(-1)\times4$，得　$(-1)+4=3$;

所以　$$x^2+3x-4=(x-1)(x+3).$$

第二因子的絕對項 6，可以分解為兩個正因數的，只有 1×6，2×3，沒有兩因數的和等於一次項係數 3 的，可知不能分解為整係數一次因子．

$$\therefore\quad (x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16=(x-1)(x+3)(x^2+3x+6).$$

例題七　分解 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9$ 的因子．

解　原式中有四個一次因子，兩兩相乘，便得兩個二次三項式的因子，不過要注意怎樣配合去乘，可使兩因子裏一次項相同．

因為　$$(x-1)(x-7)=x^2-8x+7,$$

$$(x-3)(x-5)=x^2-8x+15,$$

所以　$$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-9.$$

上式右邊和例題六同形，仿照他的乘法，再分解因子，如

$$(x^2-8x)^2+22(x^2-8x)+96=(x^2-8x+6)(x^2-8x+16).$$

上式右邊前一因子，不能再行分解，後一因子是完全三項平方式，

$$x^2-8x+16=(x-4)^2.$$

$$\therefore\quad (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9=(x-4)^2(x^2-8x+6).$$

注意四　本節所講分解因子方法，就是從聯立方程式 $a+b=p$，$ab=q$，視察出 a、b 的值．　當 p 和 q 是簡單的數，a 和 b 又限於整數時，解法非常簡便，熟習以後，必能立即寫出因子，但 q 的值，如果是很大的數目，如 $x^2+30-1296$，初學要視察出兩因子是 $(x-24)(x+54)$，常常感覺困難．　又一次項和絕對項是分數時，如 $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$，也不容易分解為因子，因為 $-\frac{1}{6}$ 須分解為 $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)$，然後 $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{6}$，決不能一看便知 $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$．倘使遇到這一類的問題，看不出怎樣分解因子，可用後面所講一元二次三項式的一般因子分解法去求．

習 題 十 一

分解下列各題的因子：

1. $x^2+18x+32$.
2. $x^2-10x+16$.
3. x^2-2x-8.
4. $x^2-7x-30$.
5. $x^2+7x-30$.
6. $a^2-13a+30$.
7. $a^2+13a+30$.
8. x^2+x-56.
9. x^2-x-56.
10. x^2-7-44.
11. $m^2+17m+30$.
12. m^6+17m^3+72.
13. $x^2-4x-32$.
14. $1-4x-32x^2$.
15. x^2+x-12.
16. x^2-x-[illegible]0.
17. $x^2+19x-20$.
18. $y^2-16y+64$.
19. $1+18x+32x^2$.
20. $x^2+3x-18$.
21. $(a+b)^2+8(a+b)+15$.
22. $(x+y)^2+x+y-20$.
23. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$.
24. $(x^2-2x+3)^2-13(x^2-2x+3)+22$.
25. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.
26. $(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$.
27. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$.

28. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

29. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$.

30. $x(x-1)(x-2)(x-3)+120$.

21. 一元二次三項式二（二次項係數是 1 以外整數）　預習：設有兩個一元一次式 $lx+k$ 和 $mx+n$，依多項式乘法，求得乘積如下：

$$\begin{array}{r} lx+k \\ mx+n \\ \hline lmx^2+kmx \\ lnx+kn \\ \hline lmx^2+(km+ln)x+kn \end{array}$$

$$\begin{array}{c} lx \quad + \quad k \\ mx \quad + \quad n \\ \hline lmx^2+\left(\begin{array}{cc} l & k \\ m & n \end{array}\right)x+kn \end{array}$$

上面左邊是多項式乘法演算式，右邊示應該怎樣交叉相乘．　二次項 lmx^2 和絕對項 kn 叫做兩端乘積，　一次項 kmx 和 lnx 叫做交叉乘積．　看上面演算式，便明白乘積裏一次項係數，是從因子裏一次項係數和絕對項交叉相乘的代數和．　熟記乘法公式，可以直接寫出兩因子的積．　初學時宜多加練習，並注意交叉乘積和兩端乘積的符號關係．

（1） $(2x+3)(4x+5)=2\times4x^2+\left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{array}\right)x+3\times5$

$=8x^2+(10+12)x+15=8x^2+22x+15$.

(2) $(2x-3)(4x-5)=2\times4x^2+\left(\begin{array}{ccc}2 & & -3\\ & \times & \\ 4 & & -5\end{array}\right)x+(-3)\times(-5)$

$$=8x^2+(-10-12)x+15=8x^2-22x+15.$$

(3) $(2x+3)(4x-5)=2\times4x^2+\left(\begin{array}{ccc}2 & & 3\\ & \times & \\ 4 & & 5\end{array}\right)x+3\times(-5)$

$$=8x^2+(-10+12)x-15=8x^2+2x-15.$$

(4) $(2x-3)(4x+5)=2\times4x^2+\left(\begin{array}{ccc}2 & & -3\\ & \times & \\ 4 & & 5\end{array}\right)x+(-3)\times5$

$$=8x^2+(10-12)x-15=8x^2-2x-15.$$

照上法寫出下面各式的積:

(5) $(3x+4)(5x+2)$.　　(6) $(3x-4)(5x-2)$.

(7) $(3x+4)(5x-2)$.　　(8) $(3x-4)(5x+2)$.

(9) $(2x+1)(x+3)$.　　(10) $(2x-1)(x+3)$.

(11) $(2x+1)(x-3)$.　　(12) $(2x-1)(x-3)$.

心算下面兩因子的積,直接寫出結果:

(13) $(5x+2)(7x+3)$.　　(14) $(5x-2)(7x+3)$.

(15) $(9x+2)(7x-3)$.　　(16) $(9x-2)(7x-3)$.

(17) $(x-2)(5x+4)$.　　(18) $(6x+1)(x-5)$.

(19) $(7x-3)(2x+5)$.　　(20) $(5x+4)(x+4)$.

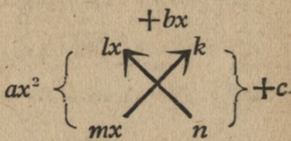
改變因子裏絕對項的正負,影響於乘積裏的符號,上節裏所

說的關係，本節也可以應用，不必再述.

視察分解法：　一元二次三項式的第二類，就是二次項係數是 1 以外的整數，通常寫做　　ax^2+bx+c，

和乘法公式　　$(lx+k)(mx+n)=lmx^2+(km+ln)x+kn$

比較起來，便知分解這類二次式為兩個一次因子，第一步將 a 分解為兩因數 l 和 m，c 分解為兩因數 k 和 n.　在數字式裏，每一複數，常常可分解為幾種因數，所以第二步要看四因數交叉乘積的代數和 $km+ln$，是不是等於一次項係數 b.　初學的人，當然不能一看便得適用的因數，只好將 a、c 可能分解的因數，一一交叉試乘，等到兩乘積相加的結果是等於 b 為止.　倘使得不到等於 b 的數，原式必是不能分解為整係數因子的.　這種試探方法，雖然麻煩，但初步練習，不得不照這樣着手，熟練以後，視察一式的各項，心中好像就會想出如右面的分解，可以正確無誤.　下面例題解法，示基本的研究分解方法.



例題一　分解 $8x^2+22x+15$ 為兩個一次因子.

解　二次項係數總是分解為兩個正因數，不問後面兩項的符號怎樣，原式中一次項和絕對項都是正，15 必分解為兩個正因數.

$$8=1\times8,\text{或 }2\times4;\qquad 15=1\times15,\text{或 }3\times5.$$

每一數只能分解為兩種因數，配合起來，已有八種.　原式能分解為整係數一次因子的，必是八種裏面的一種.

$\begin{array}{ccc} x & & +1 \\ & \times & \\ 8x & & +15 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} x & & +15 \\ & \times & \\ 8x & & +1 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} x & & +3 \\ & \times & \\ 8x & & +5 \end{array}$

$8x^2+(8+15)x+15$ $8x^2+(120+1)x+15$ $8x^2+(24+5)x+15$

$\begin{array}{ccc} x & & +5 \\ & \times & \\ 8x & & +3 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 2x & & +1 \\ & \times & \\ 4x & & +15 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 2x & & +15 \\ & \times & \\ 4x & & +1 \end{array}$

$8x^2+(40+3)x+15$ $8x^2+(4+30)+15$ $8x^2+(60+2)x+15$

$\begin{array}{ccc} 2x & & +3 \\ & \times & \\ 4x & & +5 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 2x & & +5 \\ & \times & \\ 4x & & +3 \end{array}$

$8x^2+(12+10)x+15$ $8x^2+(20+6)x+15$

兩因子相乘的積，只有第三排左邊第一式，交叉乘積的和是 $22x$,

$$\therefore \quad 8x^2+22x+15=(2x+3)(4x+5).$$

注意一 分解二次三項式的因子，首末兩項分解後再相乘，沒有不同於原有的兩項，所難的是交叉乘積的代數和恰等於中項，以後只要將四因數交叉試乘，其餘不必全部寫出.

例題二 分解 $6x^2-25x+14$ 爲兩個一次因子.

解 一次項是負，絕對項是正，便知絕對項應該分解爲兩個負因數.

$$6=1\times6,\text{或 } 2\times3;\quad 14=(-1)\times(-14),\text{或 }(-2)\times(-7).$$

$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ & \times & \\ 6 & & -14 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & & -14 \\ & \times & \\ 6 & & -1 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & & -2 \\ & \times & \\ 6 & & -7 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & & -7 \\ & \times & \\ 6 & & -2 \end{array}$

$$\begin{array}{cccc} -6 & -84 & -12 & -42 \\ -14 & -1 & -7 & -2 \\ \hline -20 & -85 & -19 & -44 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & -1 \\ & \times & \\ 3 & & -14 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & & -14 \\ & \times & \\ 3 & & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & & -2 \\ & \times & \\ 3 & & -7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & & -7 \\ & \times & \\ 3 & & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -3 & -42 & -6 & -21 \\ -28 & -2 & -14 & -4 \\ \hline -31 & -44 & -20 & -25 \end{array}$$

試乘結果，末一種交叉乘積的和，恰等於原式中一次項係數.

$$\therefore\ 6x^2-25x+14=(2x+7)(3x-2)$$

例題三　分解 $5x^2+7x-6$ 爲兩個一次因子.

解　絕對項是負，只能分解爲異號兩因數，不過和上一節裏的情形不同，不能因爲一次項是正，只取絕對值大於負因數的正因數來試算，現在要兼顧到二次係數分解出來的兩因數.　譬如絕對值小於負因數的正因數和較大的正因數相乘，結果的絕對值可以大於其他正負兩因數相乘的積，就是交叉乘積的代數和，也可以得正數，和三項式裏一次項同號，所以 -6 可能分解爲一正一負的兩因數，都要試算.

$5=1\times5$;　$-6=(-1)\times6$，或 $1\times(-6)$，或 $(-2)\times3$，或 $2\times(-3)$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ & \times & \\ 5 & & +6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & +6 \\ & \times & \\ 5 & & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & +1 \\ & \times & \\ 5 & & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & -6 \\ & \times & \\ 5 & & +1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -5 & +30 & +5 & -30 \\ +6 & -1 & -6 & +1 \\ \hline +1 & +29 & -1 & -29 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & +3 \\ & \times & \\ 5 & & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & -2 \\ & \times & \\ 5 & & +3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & -3 \\ & \times & \\ 5 & & +2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & +2 \\ & \times & \\ 5 & & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +15 \\ -\ 2 \\ \hline +13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -10 \\ +\ 3 \\ \hline -\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -15 \\ +\ 2 \\ \hline -13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +10 \\ -\ 3 \\ \hline +\ 7 \end{array}$$

看上面八種交叉乘積的代數和，只有末一種是等於三項式裏一次項係數. $\therefore\ 5x^2+7x-6=(x+2)(5x-3)$.

例題四 分解 $10x^2-7x-12$ 爲兩個一次因子.

解 仿上題解法將 $10, -12$ 各分解爲因數，如下:

$10=1\times10$，或 2×5; $-12=(-1)\times12$，或 $1\times(-12)$，或 $(-2)\times6$，或 $2\times(-6)$，或 $(-3)\times4$，或 $3\times(-4)$.

$$\begin{array}{ccc} 2 & & -3 \\ & \times & \\ 5 & & +4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -15 \\ +\ 8 \\ \hline -\ 7 \end{array}$$

學者將上面各因數配合起來，一一交叉試乘，乘到如右邊的式，是不是所求因子已經可以分解出來? 沒有試乘以前，能否看出有幾種因數交叉乘積的代數和一定得不到負數?

$\therefore\ 10x^2-7x-12=(2x-3)(5x+4)$.

注意二 三項式裏的絕對項是負時，交叉乘積絕對值大者和一次項同號.

例題五 分解 $(m-n)x^2-(2m+n)x-3m$ 爲兩個一次因子.

解

$$\begin{array}{ccc} m-n & & -3m \\ & \times & \\ 1 & & +1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -3m \\ +(m-n) \\ \hline -(2m+n) \end{array}$$

$\therefore\ (m-n)x^2-(2m+n)x-3m=[(m-n)x-3m](x+1).$

習 題 十 二

分解下面各題的因子:

1. $2x^2+5x+3.$
2. $7x^2+36x+5.$
3. $2x^2-7x+3.$
4. $2x^2-5x+3.$
5. $5x^2-9x-2.$
6. $3x^2-7x+2.$
7. $3x^2-5x+2.$
8. $5x^2+17x+6.$
9. $7x^2-19x-6.$
10. $35x^2+x-12.$
11. $12x^2-x-20.$
12. $6x^2-11x-2.$
13. $15x^2-7x-2.$
14. $14x^2-37x+5.$
15. $16x^2+43x+27.$
16. $16x^2-62x+27.$
17. $16x^2-104x-27.$
18. $16x^2+431x-27.$
19. $16x^2y^2z^2+39xyz-27.$
20. $16a^2b^2c^2+147abc+27.$
21. $abx^2-(ac-bd)x-cd.$
22. $ax^2+(a-b)x-b.$
23. $abx^2-(a^2-b^2)x-ab.$
24. $abx^2+c(a-b)x-c^2.$
25. $4abx^2-2(a^2+b^2)x+ab.$
26. $(a+b)x^2+(a+2b)x-3b.$
27. $(a^2-b^2)x^2+4abx+b^2-a^2.$
28. $(a^2-b^2)x^2+2(a^2+b^2)x+a^2-b^2.$

29. $(b+c-a)x^2+2cx+c+a-b.$

30. $a(a-1)x^2+(2a^2-1)x+a(a-1).$

22. 一元二次三項式的一般分解法　預習：在§15裏說過不是完全平方的三項式，用配方法可以化做兩平方差式，再分解爲因子．從上面兩節看來，二次三項式裏已知數如果是很大的數目，要觀察出適合的因數，不是容易的事．爲學者解決困難起見，應用上述方法來分解因子．看下面各例，便可明白演算的步驟，再從特例求出一般解法的公式．

(1) $x^2+10x-24=x^2+10x+5^2-5^2-24=(x+5)^2-49$

$=(x+5)^2-7^2=(x+5+7)(x+5-7)=(x+12)(x-2).$

(2) $x^2-7x+12=x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+12$

$=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\left(x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=(x-3)(x-4).$

(3) $8x^2+22x+15=8\left(x^2+\frac{22}{8}x+\frac{15}{8}\right)$

$=8\left[x^2+\frac{22}{8}x+\left(\frac{11}{8}\right)^2-\left(\frac{11}{8}\right)^2+\frac{15}{8}\right]$

$=8\left[\left(x+\frac{11}{8}\right)^2-\frac{1}{64}\right]=8\left[\left(x+\frac{11}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right]$

$=8\left(x+\frac{11}{8}+\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{11}{8}-\frac{1}{8}\right)$

$=8\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)=\left[2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right]\left[4\left(x+\frac{5}{4}\right)\right]$

$=(2x+3)(4x+5).$

(4) $10x^2-7x-12=10\left(x^2-\frac{7}{10}x-\frac{12}{10}\right)$

$=10\left[x^2-\frac{7}{10}+\left(\frac{7}{20}\right)^2-\left(\frac{7}{20}\right)^2-12\right]$

$=10\left[\left(x-\frac{7}{20}\right)^2-\frac{529}{400}\right]=10\left[\left(x-\frac{7}{20}\right)^2-\left(\frac{23}{20}\right)^2\right]$

$=10\left(x-\frac{7}{20}+\frac{23}{20}\right)\left(x-\frac{7}{20}-\frac{23}{20}\right)$

$=10\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=\left[5\left(x+\frac{4}{5}\right)\right]\left[2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]$

$=(5x+4)(2x-3)$.

注意一　配方時，一次項係數是奇數時，折半不得整數，就用 2 做分母；如果原來是分數，將分子折半，或用 2 乘分母.

注意二　二次項係數是 1 以外整數時，先將這數括出，等到括號裏的式分解成因子，再將這括號外的數，分解為適當兩因數，各乘一因子，使因子裏的絕對項化成整數.

公式求法：　一元二次三項式都可化為下面兩種範式：

$$x^2+px+q,\ \text{或}\ ax^2+bx+c.$$

式中已知數 p、q、a、b、c 是簡單的整數時，用上兩節裏的視察分解法，也不很困難，數目一大，就非常麻煩．這是因為分解因數，是因題而異，沒有定法．現在利用兩個乘法公式

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

求一元二次三項式的因子分解公式，如下：

公式一：　$x^2+px+q=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right).$$

公式二： $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

應用上面兩種公式，一元二次三項式，都可分解爲兩個一次因子，但本書求得的因子，以有理整式爲限，並且不能含無理數，所以根式裏 p^2-4q 和 b^2-4ac 必須都是完全平方數，或各等於 0.

例題一 用公式分解 $x^2-37x-2520$ 爲因子.

解 原式和範式 x^2+px+q 同形，$p=-37$，$q=-2520$.

$x^2-37x-2520$

$$=\left(x+\frac{-37+\sqrt{(-37)^2-4(-2520)}}{2}\right)$$

$$\left(x+\frac{-37-\sqrt{(-37)^2-4(-2520)}}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{-37+\sqrt{11449}}{2}\right)\left(x+\frac{-37-\sqrt{11449}}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{-37+107}{2}\right)\left(x+\frac{-37-107}{2}\right)=(x+35)(x-72).$$

例題二　用公式分解 $24x^2-179x-420$ 爲因子.

解　在範式 ax^2+bx+c 裏,令 $a=24,\ b=-179,\ c=-420$.

$$24x^2-179x-420=24\left(x+\frac{-179+\sqrt{(-179)^2-4\times24\times(-420)}}{48}\right)$$

$$\left(x+\frac{-179-\sqrt{(-179)^2-4\times24\times(-420)}}{48}\right)$$

$$=24\left(x+\frac{-179+\sqrt{72361}}{48}\right)\left(x+\frac{-179-\sqrt{72361}}{48}\right)$$

$$=24\left(x+\frac{-179+269}{48}\right)\left(x+\frac{-179-269}{48}\right)$$

$$=24\left(x+\frac{15}{8}\right)\left(x-\frac{28}{3}\right)=\left[8\left(x+\frac{15}{8}\right)\right]\left[3\left(x-\frac{28}{3}\right)\right]$$

$$=(8x+15)(3x-28).$$

例題三　怎樣判别下列三式的因子,有沒有含無理數?

（1）$x^2-22x-203$;　　（2）$2x^2-52x+338$;

（3）$5x^2-3x-7$.

解　(1) 和 x^2+px+q 同形的式,若 p^2-4q 的值是完全平方數或等於 0,分解出來的因子,必不含無理數.

$p^2-4q=(-22)^2-4\times(-203)=1296=36^2$,所以(1)式的兩因子不含無理數.

(2) 和 ax^2+bx+c 同形的式,若 b^2-4ac 的值是完全平方數或等

於 0，求得的因子也不含無理數.

$b^2-4ac=(-52)^2-4\times2\times338=2704-2704=0$，可知(2)式的因子不含無理數.

(3)和(2)同類，$b^2-4ac=(-3)^2-4\times5\times(-7)=9+140=149$，這不是完全平方數，就是不能求得整數平方根，所以兩因子裏的絕對項含無理數.

注意三　p^2-4q 或 b^2-4ac 叫做二次式的判別式，因爲等於完全平方數時，兩因子裏的絕對項必是有理數，不是完全平方數時，便是無理數；等於 0 時，兩因子全同，原式是完全平方式；等於負數時，兩因子都含負數的平方根，這種數叫做虛數.

注意四　用公式來求因子，雖然是機械的算法，但可以救濟視察分解法的窮. 分解二次三項式的因子，遇到很大的數目，已經視察極難，若含無理數或虛數，非用配方法或公式，更難於分解.

習題十三

用配方法分解下面各題的因子(1－8)：

1. $x^2+19x+60$.
2. $x^2-29x+100$.
3. $x^2+9x-36$.
4. $x^2-5x-84$.
5. $12x^2-83x+143$.
6. $18x^2+21x-19$.
7. $42x^2-13x-42$.
8. $35x^2+59x+14$.

用公式求下面各題的因子：

9. $x^2-31x+240$.　　10. $12x^2-37x-144$.

11. $x^2+30x-1296$.　　12. $6x^2-73x-703$.

13. $x^2-223x+12432$.　　14. $2340x^2-27x-35$.

23. **二元二次同次式**　預習：　各項都是二次的整式，叫做二次同次式.　如乘法公式

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,\ (x+y)(y-y)=x^2-y^2,$$

右邊的乘積都是二元二次同次式；左邊的各因子都是二元一次同次式.　兩邊的關係和一元二次式相同，看下例便可明白.

$$(x+3)(x+4)=x^2+(3+4)x+(3\times4),$$

$$(x+3y)(x+4y)=x^2+(3+4)xy+(3\times4)y^2.$$

$$(2x+5)(3x-4)=2\times3x^2+\left(\begin{array}{ccc}2&&+5\\&\times&\\3&&-4\end{array}\right)x+5\times(-4)$$

$$=6x^2+(15-8)x-20,$$

$$(2x+5y)(3x-4y)=2\times3x^2+\left(\begin{array}{ccc}2&&+5\\&\times&\\3&&-4\end{array}\right)xy+5\times(-4)y^2$$

$$=6x^2+(15-8)xy-20y^2.$$

視察分解法：　分解二元二次同次式，倘使一元當做已知數看，視察因子的方法，便和 §§20，21 裏所說的完全一樣，不過分解出來的因子，兩項都附一文字，就是二元一次同次式.

例題一　分解 $x^2+3xy-28y^2$ 爲因子.

解　分解首末兩項係數爲因數的時候，不必顧及兩項所含的文字代表未知數或已知數.　原式第三項是負，分解爲異號兩因數.　第二項的

係數是 $+3$,可知正因數比負因數的絕對值大 3,這樣就容易看出

$$-28y^2=(-4y)(+7y),\quad (-4y)+(+7y)=+3y.$$

$$\therefore\quad x^2+3xy-28y^2=(x-4y)(x+7y).$$

例題二 分解 $10x^2-53xy+63y^2$ 爲因子.

解 首項係數通例都分解爲兩個正因數,中項是負,$+63$ 必分解爲兩個負因數.

$10=1\times10$, 或 2×5;

$63=(-1)\times(-63)$, 或$(-3)\times(21)$,

或$(-9)\times(-7)$.

$$\begin{array}{cc} 2 & -7 \\ 5 & -9 \end{array}$$

上下兩組因數交叉相乘的和是不是等於 -53,熟練以後,容易視察出來,不必全部一一試乘,如右邊的式,可用心算求得.

$$\begin{array}{r} -35 \\ -18 \\ \hline -53 \end{array}$$

$$\therefore\quad 10x^2-53xy+63y^2=(2x-7y)(5x-9y).$$

公式分解法: 一元二次三項式因子分解的公式,對於二元二次同次式,也可以應用.

例題三 分解 $6x^2-55xy+100y^2$ 爲因子.

解 設 $a=6$, $b=-55y$, $c=100y^2$,則從 §22 裏的公式,得

$$6x^2-55xy+100y^2=6\left[x+\frac{-55y+\sqrt{(-55y)^2-4\times6\times100y^2}}{2\times6}\right]$$

$$\left[x+\frac{-55y-\sqrt{(-55y)^2-4\times6+100y^2}}{2\times6}\right]$$

$$=6\left[x+\frac{-55y+25y}{12}\right]\left[x+\frac{-55y-25y}{12}\right]$$

$$= 6\left[x+\frac{5y}{2}\right]\left[x-\frac{20y}{3}\right]$$

$$=\left[2\left(x-\frac{5y}{2}\right)\right]\left[3\left(x-\frac{20y}{3}\right)\right]$$

$$=(2x-5y)(3x-20y).$$

注意　上題從視察也容易分解成因子，不一定用公式可求，現在不過舉例說明一元二次三項式和二元二次同次式因子的一般分解法是一樣的。

24. 三元二次同次式　含三元的兩個一次同次式 $ax+by+cz$ 和 $mx+ny+pz$ 相乘積，各項都是二次，所以叫做三元二次同次式。仿兩個二項式相乘的演算式，便得

$$ax+by+cz$$

$$mx+ny+pz$$

$$amx^2+\begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix}xy+bny^2+\begin{pmatrix} b & c \\ n & p \end{pmatrix}yz+cpz^2+\begin{pmatrix} a & c \\ m & p \end{pmatrix}xz$$

就是同元乘積加不同兩元交叉乘積的和。

（1）求 $(2x+3y+7z)(5x+y-2z)$ 的積。

$$(2x+3y+7z)(5x+y-2z)$$

$$=10x^2+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}xy+3y^2+\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}yz-14z^2+\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}xz$$

$$=10x^2+(15+2)xy+3y^2+(7-6)yz-14z^2+(35-4)xz$$

$$=10x^2+17xy+3y^2+yz-14z^2+31xz.$$

（2）求$(5x-y+3z)(4x-y-2z)$的積.

$$(5x-y+3z)(4x-y-2z)$$

$$=20x^2+(-4-5)xy+y^2+(-3+2)yz-6z^2+(12-10)xz$$

$$=20x^2-9xy+y^2-yz-6z^2+2xz.$$

仿上法求下面各式的積:

（3）$(x+y+3z)(2x+y+4z)$.

（4）$(5x-y+3z)(4x+y-3z)$.

（5）$(2x-2y+3z)(5x+5y+z)$.

（6）$(4x-y+2z)(5x-y-2z)$.

（7）$(x-2y-3z)(4x-5y-6z)$.

（8）$(3x-2y-5z)(3z-5y-2x)$.

視察分解法:　設有三元二次同次式

$$amx^2+(mb+an)xy+bny^2+(cn+bp)yz+cpz^2+(ap+cm)xz,$$

要從視察分解成因子$(ax+by+cz)(mx+ny+pz)$，是很不容易的事，我們將原式分組來視察，每取二元三項式爲一組，用§21裏的方法來分解因子，再將各因子連合起來，就是所求因子，不過是否正確，驗算後才能決定.

（1）分解$amx^2+(mb+an)xy+bny^2$爲兩個一次因子.

am和bn各分解爲兩因數，使交叉乘積的代數和等於xy項的係數，如右式.

$$\begin{array}{cc} ax & +by \\ mx & +ny \\ \hline & +bmxy \\ & +anxy \\ \hline & +(bm+an)xy \end{array}$$

（2）分解$bny^2+(cn+bp)yz+cpz^2$

爲兩個一次因子.

y^2 的係數分解爲兩因數須完全依照第一組裏已經分成的。現在只要注意 z^2 的係數分解出來的兩因數，使交叉乘積的代數和等於 yz 項的係數，如右式.

$+by \quad +cz$

$+ny \quad +pz$

$+cnyz$

$+bpyz$

$+(cn+bp)yz$

（3）將上面兩組分解出來的因子連合起來，是 $ax+by+cz$ 和 $mx+ny+pz$，好像已得所求兩因子，不必再去演算. 但原式的末項在上面分解因子的時候，還沒有用到，究竟 $ax+cz$ 和 $mx+pz$ 交叉乘積的代數和是不是等於 $(ap+cm)xz$，未能確定，所以再驗算一次，如右式.

$ax \quad +cz$

$mx \quad +pz$

$+cmxz$

$+apxz$

$+(ap+cm)xz$

三元二次同次式，如果能分解爲因子，用上面分組法，都可以求出兩因子，看下面例題解法，便明白演算時應該注意的地方.

例題一　分解 $4x^2-11xy+6y^2-3yz-45z^2-11xz$ 爲因子。

解　將原式分爲兩組，如下式裏曲綫所括的三項.

$$4x^2-11xy+6y^2-3yz-45z^2-11xz.$$

先將第一組 $4x^2-11xy+6y^2$ 分解爲因子.

$4=1\times4$，　或 2×2；

$6=(-1)\times(-6)$，　或 $(-2)\times(-3)$.

$x \quad -2y$

$4x \quad -3y$

次將第二組 $6y^2-3yz-45z^2$ 分解爲因子.

首項係數須照前組裏分解出來的兩因數，就是 $(-2)\times(-3)$．現在只要將末項係數分解爲適當兩因數．

$$\begin{array}{cc} -2y & -5z \\ -3y & +3z \end{array}$$

$-45=(-1)\times 45$，　或 $1\times(-45)$，

　　或 $(-3)\times 15$，　或 $3\times(-15)$，

　　或 $(-9)\times 5$，　或 $9\times(-5)$．

再將兩組裏求得的因子連接起來，看首末兩項交叉乘積的代數和是不是等於 $-11xz$．這樣驗算以後，求得的兩因子，才算正確．

$$\begin{array}{c} x-2y-5z \\ 4x-3y+9z \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -20xz \\ +\ 9xz \\ \hline -11xz \end{array}$$

$\therefore\ 4x^2-11xy+6y^2-3yz-45z^2-11xz=(x-2y-5z)(4x-3y+9z)$．

例題二　分解 $6x^2+4y^2+10z^2-14xy+19xz-13yz$ 爲因子．

解　仿上題將原式重行排列，再分爲兩組，如下所示：

$$6x^2-14xy+4y^2-13yz+10z^2+19xz.$$

$$6x^2-14xy+4y^2=2(3x^2-7xy+2y^2)=2(3x-y)(x-2y).$$

從上式可得兩種不同的因子 $(6x-2y)(x-2y)$ 或 $(3x-y)(2x-4y)$．如果用前一種，分解第二組 $4y^2-13yz+10z^2$ 爲因子時，也只可將 $4y^2$ 分解爲 $(-2y)(-2y)$．但 $10z^2=z\times 10z$，或 $2z\times 5z$，兩因數儘可能的配合起來，交叉乘積的和沒有等於 $-13yz$，可知前一種因子是不適用的．若用後一種，得 $4y^2=(-y)(-4y)$，第二組就可分解如下面左式，連合起來驗算，也適合的，如下面右式．

$$\begin{array}{cc} -y & +2z \\ -4y & +5z \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3x-y+2z \\ 2x-4y+5z \\ \\ +4xz \\ +15xz \\ \hline +19xz \end{array}$$

$\therefore\ 6x^2+4y^2+10z^2-14xy+19xz-13yz=(3x-y+2z)(2x-4y+5z).$

用分組法分解三元二次同次式,倘使第一組含有公因子,便得不同的幾種因子,到分解第二組時,一一試算,才能決定取捨,時間上太不經濟,所以首先分解的三項式,能取沒有公因數的最好. 上題照下面分組,就能避免.

$$6x^2+19xz+10z^2-13yz+4y^2-14xy.$$

$$\begin{array}{cc} 3x & +2z \\ 2x & +5z \end{array} \qquad \begin{array}{cc} +2z & -y \\ +5z & -4y \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3x+2z-y \\ 2x+5z-4y \\ \\ -2xy \\ -12xy \\ \hline -14xy \end{array}$$

結果和上面求得的一樣,可以減省試算手續.

三元二次同次式裏,有時各項不全,缺少那一項,這項的係數,就當做 0 看,視察因子的方法,仍舊和前一樣.

例題三　分解 $21x^2-9xy-41xz+24yz-40z^2$ 為因子.

解　原式缺 y^2 項,用 $0y^2$ 補足,仍舊可仿前法,分為兩組三項式.

$$21x^2-41xz-40z^2+24yz+0y^2-9xy.$$

$$\begin{array}{cc} 7x & +5z \\ 3x & -8z \end{array} \qquad \begin{aligned} &-40z^2+24yz \\ &=-8z(5z-3y) \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} 7x+5z-3y \\ 3x-8z+0y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9xy \\ +\ \ 0 \\ \hline -9xy \end{array}$$

$$\therefore\ 21x^2-9xy-41xz+24yz-40z^2=(7x+5z-3y)(3x-8z).$$

習 題 十 四

分解下列各題的因子:

1. $x^2-20xy+75y^2$.
2. $x^2-32xy-105y^2$.
3. $x^2-25xy-116y^2$.
4. $m^2-3mn-180n^2$.
5. $6x^2+37xy+6y^2$.
6. $6a^2-37ab+6b^2$.
7. $6x^2+5ax-6a^2$.
8. $6m^2-5mn-6n^2$.
9. $10x^2+13xy-3y^2$.
10. $15x^2+4xy-35y^2$.
11. $30x^2+xy-20y$.
12. $50x^2-5ax-a^2$.
13. $-187a^2-6ab+b^2$.
14. $42x^2-113xy+35y^2$.
15. $x^2+29xy-1512y^2$.
16. $270x^2+21xy-980y^2$.
17. $(a^2+ab+b^2)x^2+2(a^2+b^2)xy+(a^2-ab+b^2)y^2$.
18. $(a^2+ab+b^2)x^2-2abxy-(a^2-ab+b^2)y^2$.
19. $a(a-1)x^2+(2a^2-1)xy+a(a+1)y^2$.
20. $(a-1)(a-2)x^2+(2a^2-4a+1)xy+a(a-1)y^2$.

21. $2x^2-3xy-2y^2+5yz-z^2+xz$.

22. $3x^2-2y^2+5z+xy-3yz-8xz$.

23. $6x^2+5xz-4z^2+7yz+15y^2+19xy$.

24. $35y^2-11yz-10z^2+3xz+x^2-12xy$.

25. $4z^2-8xz+4x^2-16xy+15y^2+16yz$.

26. $2x^2-8xy+6y^2+11yz-10z^2-xz$.

27. $6x^2+3xy-3y^2+7yz-2z^2+4xz$.

28. $10x^2-14xy-25xz-15yz-12y^2$.

29. $x^2-12y^2-8z^2+20yz-2xz+4xy$.

30. $40x^2-21z^2-24xy+41xz+9yz$.

25.一元三次式 預習：在§16裏的完全立方式和§17裏的兩立方和或差式，將一文字當做已知數看，就是一元三次式的特例，現在推廣到一般的三次式，如下面的乘積：

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc,$$

或 $$(x+a)(x^2+px+q)=x^3+(a+p)x^2+(ap+q)x+aq.$$

一元三次式，如果是複式，必是含同元的三個一次式連乘積，或一個一次式和一個二次式的乘積.

(1) $(x+2)(x+4)(x+6)$

$=x^3+(2+4+6)x^2+(2\times4+2\times6+4\times6)x+2\times4\times6$

$=x^3+12x^2+44x+48$.

(2) $(x+1)(x-3)(x-5)$

$=x^3+(1-3-5)x^2+[1\times(-3)+1\times(-5)+(-3)\times(-5)]x$

$+1\times(-3)\times(-5)$

$=x^3-7x^2+7x+15.$

(3) $(x+2)(x^2+3x+4)=x^3+(2+3)x^2+(2\times3+4)x+2\times4$

$=x^3+5x^2+10x+8.$

(4) $(x-3)(x^2-2x+5)$

$=x^3+(-3-2)x^2+[(-3)\times(-2)+5]x+(-3)\times5$

$=x^3-5x^2+11x-15.$

當 x 的係數是 1 以外整數時，得一元三次式如下：

$(mx+a)(nx+b)(px+c)$

$=mnpx^3+(anp+bmp+cmn)x^2+(abp+acn+dcm)x+abc,$

或 $(mx+n)(ax^2+bx+c)$

$=amx^3+(an+bm)x^2+(bn+cm)x+cn.$

(5) $(2x+1)(3x-4)(5x-3)$

$=30x^3+[1\times3\times5+(-4)\times2\times5+(-3)\times2\times3]x^2$

$+[1\times(-4)\times5+1\times(-3)\times3+(-4)\times(-3)\times2]x$

$+1\times(-4)\times(-3)$

$=30x^3-43x^2-5x+12.$

(6) $(2x-1)(3x^2-5x+4)$

$=6x^3+[3\times(-1)+(-5)\times2]x^2+[(-5)\times(-1)+4\times2]x$

$+4\times(-1)$

$=6x^3-13x^2+13x-4.$

仿照上法，求出下面各式的積：

(7) $(x+1)(x+2)(x-3)$.　　(8) $(x-3)(x-5)(x-7)$.

(9) $(x-4)(x+4)(x+5)$.　　(10) $(x-2)(x^2-x+2)$.

(11) $(x+3)(x^2-x+2)$.　　(12) $(3x+2)(x^2-x+1)$.

(13) $(x-2)(3x+1)(3x-2)$.　(14) $(3x-1)(5x-1)(7x-1)$.

視察分解法:　一元三次式,除特別積以外,要從視察分解成因子,非常困難,初學不易了解,現在將簡單的式,說明視察的途徑,以導後日進修的先路.

看上面三次式裏的二次項和一次項都是幾項同類項合併而成的.　逆序算去,須再一一分開,照分配律還到原式,雖然是可能的事,但初學代數的人,沒有這樣經驗,能夠湊合出來.　其他有效方法,只能從積的絕對項着想.　因爲因子裏絕對項,必是積裏絕對項的一因數.　根據這種關係來試探三次式的因子,往往求出一個整係數一次因子.　舉例說明如下:

例題一　分解 x^3+2x^2-2x-3 爲因子.

解　$-3=1\times(-3)$, 或 $(-1)\times3$, 所以原式如果能分解成因子,必有一因子是 $x+1, x-1, x-3, x+3$ 裏的一式, 就是最少有其中一式能整除原式.

除式是一次式, x 的係數是 1 時,可用下面的簡便除法.

將被除式各項係數連同符號寫一橫行,除式只用絕對項, 並變號.

$$\begin{array}{r|l} -1) & 1+2-2-3 \\ & \underline{\;\;-1-1+3} \\ & \;\;0+1+1 \end{array}$$

現在先取 $x+1$ 來試除,演算式如左.

將 -1 除被除式末項 -3 得 $+3$, 和一次項係數 -2 相加得 $+1$, 次用 -1 除 $+1$

得 -1，和二次係數相加得 $+1$，再用 -1 除 $+1$ 得 -1，和三次項係數相加得 0，便是整除． 第二橫行各數變號後就是商式各項係數． 一次式除三次式，商是二次式，所以得 x^2+x-3． 這二次式不能再分解爲整係數一次因子． $\therefore\ x^3+2x^2-2x-3=(x+1)(x^2+x-3)$．

別解　將絕對項分解出來的因數代原式中 x，當原式的值是 0 時，x 減去這數就是原式的一因子．本題絕對項 -3 的因數是 $+1,-1,+3,-3$，先將 $+1$ 代 x，得　$1^3+2\times1^2-2\times1-3=1+-2-3=-2\neq0$，

便知 $x-1$ 不是原式的因子． 再將 -1 代 x，得

$$(-1)^3+2\times(-1)^2-2\times(-1)-3=-1+2+2-3=0,$$

可知 $x+1$ 是原式的一因子，用除法求出其他一因子是 x^2+x-3． 或用下面的分解法，卽原式減去 -1 代 x 的式，再括出公因子．

$$\begin{aligned}x^3+2x^2-2x-3&=x^3+2x^2-2x-3-[(-1)^3+2\times(-1)^2\\&\qquad-2\times(-1)-3]\\&=x^3-(-1)^3+2x^2-2\times(-1)^2-2x+2\times(-1)\\&=(x^3+1)+2(x^2-1)-2(x+1)\\&=(x+1)[(x^2-x+1)+2(x-1)-2]\\&=(x+1)(x^2+x-3).\end{aligned}$$

例題二　分解 x^3-2x^2-x+2 爲因子．

解　$2=1\times2$，或 $(-1)\times(-2)$，將各因數照上題的簡便除法來試除，如右式． $x+1$ 能整除原式，得商式 x^2-3x+2． 這是二次三項式，用 §20 裏的方法，可以直接視察出因子，不必再用 $+1,+2$ 去試除．

$$\begin{array}{r|l}-1) & 1-2-1+2\\ & \underline{\quad-1+3-2}\\ & \quad 0+1-3\end{array}$$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

$$\therefore\quad x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x^2-3x+2)=(x+1)(x-1)(x-2).$$

注意一 例題一、二裏的簡便除法，是從末項向左逆除，照普通多項式除法算式寫出，如右式. 除式中絕對項的符號影響於部分積的符號. 變 $+1$ 爲 -1，本來要從被除式中減去各部分積，現在就可以相加了.

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-2x-3 & x+1 \\
-3x-3 & \overline{x^2+x-3} \\
\hline
+x & \\
+x^2+x & \\
\hline
+x^2 & \\
x^3+x^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

注意二 例題二也可以照例題一的第二種解法求出因子.

有時三次項係數是 1 以外的整數，要從視察求出因子，當然更難. 但方法也是將首末兩項的係數各分解爲因數，再配合起來去試除，能整除時，除式就是一個因子. 或將原式化做上面兩題的形狀，用同法去求因子.

例題三 分解 $2x^3+5x^2-5x+1$ 爲因子.

解 x^3 的係數 2 分解爲 1×2，絕對項 1 分解爲 1×1，或 $(-1)\times(-1)$，如果原式能分解爲整係數因子，必有一因子是 $x-1, x+1, 2x-1, 2x+1$ 中的一式. 試除以後，得 $2x-1$ 能整除原式，商是 x^2+3x-1，不能再分解爲有理係數的因子，所以

$$2x^3+5x^2-5x+1=(2x-1)(x^2+3x-1).$$

別解 將 x^3 的係數平方乘原式各項.

$$2^2\times(2x^3+5x^2-5x+1)=(2x)^3+5\times(2x)^2-10\times(2x)+4.$$

令 $2x=y$， 上式就變做 $y^3+5y^2-10y+4.$

絕對項 4 的因數是 $1, -1, 2, -2, 4, -4$，上式的因子應該是 $y+1, y-1, y+2, y-2, y+4, y-4$ 中的一式．用 $y+1$ 去除，不能除盡，再用 $y-1$ 去除，沒有剩餘，商是 y^2+6y-4，所以

$$\begin{array}{r|rrrr} -1) & 1+ & 5- & 10+ & 4 \\ & & -1 & 9+14 & -4 \\ \hline & & -1 & 8+19 & -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} +1) & 1+ & 5- & 10+ & 4 \\ & & -1- & 6+ & 4 \\ \hline & & 0- & 1- & 6 \end{array}$$

$$y^3+5y^2-10y+4=(y-1)(y^2+6y-4)=(2x-1)(4x^2+12x-4).$$

再用 2^2 去除，才和原式相等．

$$\therefore\ 2x^3+5x^2-5x+1=(2x-1)(x^2+3x-1).$$

一元三次式各項係數的代數和等於 0 時，必有一個因子是 $x-1$.

例題四 分解 $3x^3+x^2-3x-1$ 爲因子．

解 原式各項的係數是 $3, 1, -3, -1$，相加等於 0，就有因子 $x-1$。用他除原式，得商式 $3x^2+4x+1$.

這二次式可以再分解爲 $(x+1)(3x+1)$.

$$\therefore\ 3x^3+x^2-3x-1=(x-1)(x+1)(3x+1).$$

注意三 含 x 的二次以上多項式，不拘次數高低，各項係數的代數和等於 0 時，必有因子 $x-1$.

習題十五

分解下列的三次式爲因子：

1. x^3+2x^2+3x-6.
2. x^3-2x^2+1.
3. $x^3-2x^2-5x+10$.
4. x^3+5x-6.

5. $x^3-10x^2-40x-3$.

6. x^3+4x^2+5x+2.

7. x^3+2x^2-x-2.

8. $2x^3-7x^2-14x-5$.

9. $3x^3+x^2-5x+21$.

10. $4x^3-4x^2-9x+9$.

11. $4-2x-3x^2+3x^3$.

12. $6x^3+29x^2+26x-21$.

復 習 題 三

分解下列各式爲一次因子：

1. $x^2+2x-63$.

2. $x^2-2x-63$.

3. $5x^2+14x-3$.

4. $5x^2-14x-63$.

5. $14x^2-29x-15$.

6. $54x^2-21x+2$.

7. $x^2-13xy+36y^2$.

8. $x^2+2xy-143y^2$.

9. $49x^2-49xy-44y^2$.

10. $12x^2+20xy-8y^2$.

11. $x^2-2xy-120y^2$.

12. $16x^2+72xy-63y^2$.

13. $x^3-x^2-14x+24$.

14. $x^3-2x^2-25x+50$.

15. $2x^3+3x^2-23x-12$.

16. $3x^3-2x^2-7x-2$.

17. $x^2+28y^2-6z^2-11xy+xz-2yz$.

18. $6x^2+11xy+3y^2-10z^2-13yz-4xz$.

19. $9z^2-30xy+27x^2-36xz+16yz+7y^2$.

20. $xy-12y^2+11x^2-15z^2-4xz+27yz$.

21. $35x^2+27y^2-66xy+14xz-18yz$.

22. $27x^2y^2-39x^2+91-128y^2+45y^4$.

第四章　分羣分解因子法

26.整式分羣的意義　一個整式的各項，雖然沒有公因子，但取幾項合併爲一羣，每羣各自分解爲因子，有時得相同的因子，就將這公因子括出，原式便分解成因子.

例　在 $ac+bd+ad+bc$ 一式裏，將 ac 和 ad，bc 和 bd 各合併爲一羣，得二項式 $a(c+d)+b(c+d)$，各項有公因子 $c+d$，用 §12 裏的方法，分解爲 $(c+d)(a+b)$.

27.集合一文字的一次項　預習：　整式分羣的目的，是探求公因子，前節中已經說過，究竟怎樣分羣，容易發見公因子，我們可以從兩個多項式相乘的方法和演算步驟來研究.　譬如求 $(x^2-bx+b^2)(x+a)$ 的積，用乘法分配律，得 $x(x^2-bx+b^2)+a(x^2-bx+b^2)$，這式就是兩羣各分解爲因子後有一公因子的形狀.　再用分配律，得 $(x^3-bx+b^2x)+(ax^2-abx+ab^2)$，這是 a 的一次式，含 a 和不含 a 的項，各分做一羣.　可見整式分羣，用分配律逆算法，是最有效的方法.

分羣分解法：　含幾個文字的多項式中，倘使有一文字是一次冪的，就將含這文字的項，合爲一羣，其餘各項，另做一羣.　看兩羣有沒有公因子；沒有，這式便不能分解爲因子.

例題一　分解 $a^2bx-a^2c-b^2cx+bc^2$ 爲因子.

解　原式含 a、b、c、x 四文字，只有 x 是一次冪，就將含 x 項和不含

x項分爲兩羣.

$$a^2bx-a^2c-b^2cx+bc^2=(a^2bx-b^2cx)-(a^2c-bc^2)$$
$$=(a^2-bc)bx-(a^2-bc)c$$
$$=(a^2-bc)(bx-c).$$

例題二　分解 $ax^3+x+a+1$ 爲因子.

解　集含 a 項和不含 a 項爲兩羣.

$$ax^3+x+a+1=(ax^3+a)+(x+1)=a(x^3+1)+(x+1)$$
$$=(x+1)[a(x^2-x+1)+1]$$
$$=(x+1)(ax^2-ax+a+1).$$

例題三　分解 $x^2+(a+b+c)x+ab+ac$ 爲因子.

解　原式中 a、b、c 都是一次冪，集合含 a 項爲一羣最簡便.

$$x^2+(a+b+c)x+ab+ac=(x^2+bx+cx)+(ax+ab+ac)$$
$$=(x+b+c)x+(x+b+c)a$$
$$=(x+b+c)(x+a).$$

例題四　分解 $a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc$ 爲因子.

解　本題是 a、b、c 的二次同次式，可用 §24 裏的方法分解爲因子，但用本節分羣法，更覺簡便.　因爲原式是 c 的一次式，所以分爲含 c 項和不含 c 項爲兩羣.

$$a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc=(a^2+2ab-3b^2)-(2ac-2bc)$$
$$=(a+3b)(a-b)-2c(a-b)$$
$$=(a-b)(a+3b-2c).$$

一個多項式裏所含文字，各是二次冪以上的，取一文字是二

次冪的，用他文字一次冪去代，仍舊可用前面所說的方法來分解.

例題五 分解 $x^3-a^2x^2-b^2x+a^2b^2$ 爲因子.

解 原式中 a 和 b 都是二次冪，可任取一文字來分羣，爲顯明而合於本節範圍以內起見，令 $a^2=A$.

$$\begin{aligned}x^3-a^2x^2-b^2x+a^2b^2&=x^3-Ax^2-b^2x+Ab^2\\&=(x^3-b^2x)-(Ax^2-Ab^2)\\&=(x^2-b^2)x-(x^2-b^2)A\\&=(x^2-b^2)(x-A)\\&=(x-b)(x+b)(x-a^2).\end{aligned}$$

注意 分羣時注意各羣須有相同的項數.

例題六 分解 $a^2+ab+ac-ad-bd-cd$ 爲因子.

解 原式中 b、d、c 都是一次冪，取含 b 或 c 的兩項合併爲一羣，其餘各項須再分爲兩羣，然後各羣的項數相同. 若取含 d 的三項爲一羣，則只要分做兩羣.

$$\begin{aligned}a^2+ab+ac-ad-bd-cd&=(a^2+ab+ac)-(ad+bd+cd)\\&=a(a+b+c)-d(a+b+c)\\&=(a+b+c)(a-d).\end{aligned}$$

習題十六

用分羣法分解下列各題的因子：

1. $abx^2+(b-a)xy-y^2$.　　2. $a^2cx-abdx-abcy+b^2dy$.

3. $2x^2+4ax+66x+12ab$.　　4. $abxy+acx+bcy+b^2y^2$.

5. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$.　　6. $10xy+5y^2+6x+3y$.

7. $mx-nx-mn+n^2$.　　8. $x^2+2ax+3bx+6ab$.

9 $8x^2+12ax+10bx+15ab$.　　10. $2a^3-a^2b+4abx-2b^2x$.

11. $(2a^2+3y^2)x+(2x^2+3a^2)y$.

12. $(2a^2-3y^2)x+(2x^2-3a^2)y$.

13. $ax^3+(a+b)x^2+(a+b)x+a$.

14. $x^3-(2a-b)x^2-(2ab-a^2)x+a^2b$.

15. $x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$.

16. $x^3+(a-b+c)x^2-(bc-ca-ab)x-abc$.

17. $(ax+by)^2-(a-b)(x+z)(ax+by)+(a-b)^2xz$.

18. $(ax-by)^2-(a+b)(x+z)(ax-by)+(a+b)^2xz$.

19. $a^3y-a^2x(1+y)+ax^2(1+xy)-x^4$.

20. $a^2+cd-ab-bd+ac+ad$.

28. **集合一文字的二次項及一次項**　預習：含幾個文字的兩個多項式相乘，如果兩式裏有一相同文字是一次冪，視這文字爲元，其餘文字當做已知數，求得的乘積就是這元的二次式，如

$$(a+2b-c)(a-b+2c)$$

$$=a^2+[(2b-c)+(-b+2c)]a+(2b-c)(-b+2c)$$

$$=a^2+(b+c)a-(2b^2-5bc+2c^2),$$

是 a 的二次式．§24 裏的三元二次同次式，或不是同次的，都可化成上式的形狀．

分羣分解法： 在含幾個文字的多項式裏，一文字有二次項和一次項，就合併爲一羣，其餘各項，再合併爲一羣，用配方法能化兩羣爲兩平方差式，便可分解爲兩因子，或用 §§20、21 裏的方法分解爲因子.

例題一 分解 $a^2+3b^2-c^2-4ab+2bc$ 爲因子.

解 將含 a 的二次項和一次項，依降羃排列，合併一羣，其餘三項，再合併爲一羣.

$$\begin{aligned}
a^2+3b^2-c^2-4ab+2bc &= (a^2-4ab)+(3b^2+2bc-c^2)\\
&= (a^2-4ab+4b^2)-(4b^2-3b^2-2bc+c^2)\\
&= (a-2b)^2-(b-c)^2\\
&= (a-2b+b-c)(a-2b-b+c)\\
&= (a-b-c)(a-3b+c).
\end{aligned}$$

例題二 分解 $x^2+2ax-bx-3a^2+5ab-2b^2$ 爲因子.

解 依 x 的降羃整列分羣，化原式爲

$$\begin{aligned}
&[x^2+(2a-b)x]-(3a^2-5ab+2b^2)\\
&=\left[x^2+(2a-b)x+\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2+3a^2-5ab+2b^2\right]\\
&=\left(x+\frac{2a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{16a^2-24ab+9b^2}{4}\right)\\
&=\left(x+\frac{2a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{4a-4b}{2}\right)^2\\
&=\left(x+\frac{2a-b}{2}+\frac{4a-3b}{2}\right)\left(x+\frac{2a-b}{2}-\frac{4a-3b}{2}\right)\\
&=(x+3a-2b)(x-a+b).
\end{aligned}$$

别解 原式是 x 的二次式，可用 §20 裏的方法分解爲因子.

原式$=x^2+(2a-b)x-(3a^2-5ab+2b^2)$

$=x^2+(2a-b)x-(3a-2b)(a-b)$

$=x^2+[(3a-2b)-(a-b)]x-(3a-2b)(a-b)$

$=(x+3a-2b)(x-a+b).$

例題三　分解 $x^4+x^2-2ax+1-a^2$ 爲因子.

解　原式是 a 的二次式，依 a 的降冪整列，得

$-(a^2+2ax)+(x^4+x^2+1)=-(a^2+2ax+x^2)+(x^4+2x^2+1)$

$=-[(a+x)^2-(x^2+1)^2]=-(a+x+x^2+1)(a+x-x^2-1)$

$=(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1).$

例題四　分解 $2x^2-7xy-22y^2-5x+35y-3$ 爲因子.

解　依 x 的降冪整列，用 §21 裏的方法分解爲因子.

$2x^2-(7y+5)x-(22y^2-35y+3)$

$=2x^2-(7y+5)x-(11y-1)(2y-3)$

$=2x^2-[(11y-1)-2(2y-3)]x-(11y-1)(2y-3)$

$=(2x-11y+1)(x+2y-3).$

別解　將二次項和一次項分別集合，得

$(2x^2-7xy-22y^2)-(5x-35y)-3$

$=(x+2y)(2x-11y)-(5x-35y)-3$

$=(x+2y)(2x-11y)-[3(2x-11y)-(x+2y)]-3$

$=(x+2y-3)(2x-11y+1).$

例題五　分解 $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$ 爲因子.

解　集合 a 的二次項和一次項，得

$$a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+(b^2c+bc^2)$$
$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$
$$=(b+c)[a^2+a(b+c)+bc]=(b+c)(a+b)(a+c).$$

習題十七

用分羣法分解下列各題的因子：

1. $a^2b^2c^2-a^2cb^2c+1$.　　2. $x^2+xy-x+2y-6$.

3. $6a^2-20b^2-26ab+9a+40b-15$.

4. $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$.

5. $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$.

6. $x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz$.

7. $a^2b-ab^2+a^2c-ac^2-2abc+b^2c+bc^2$.

8. $a^2+4ax-1+2x^2-x^4$.

9. $x^2-2ax-2bx-a^2b^2-2ab^2+2a^2b-4ab$.

10. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

29.一元三次以上的整式　預習：一元二次式和三次式，可從首末兩項係數的因數視察出因子，前面已經詳細說過，四次以上的式，除各項係數的代數和等於0以外，用同法去求一次因子，往往很繁；並且偶次多項式，有時只能分解爲整係數二次因子，所以一元高次式，就是複式，也不容易分解出因子．現在用分配律逆算法，將多項式分做幾羣，使各羣有一公因子．這公因子就是全式的因子．

分羣分解法:　一元多項式的項數是偶數時,可以分做項數相同的幾羣,照下列情形做分羣的根據.

(一)這幾項係數是那幾項係數的倍數.

例題一　分解 $x^5+3x^3-8x^2-24$ 的因子.

解　第二第四兩項的係數,是其餘兩項係數的3倍,就依此分做兩羣.

$$x^5+3x^3-8x^2-24=(x^5-8x^2)+(3x^3-24)$$
$$=x^2(x^3-8)+3(x^3-8)=(x^3-8)(x^2+3)$$
$$=(x-2)(x^2+2x+4)(x^2+3).$$

(二)同係數的項,各有相同項數.

例題二　分解 $x^5+x^4-2x^3-2x^2-3x-3$ 的因子.

解　同係數的項有兩項,就依此分做三羣.

$$x^5+x^4-2x^2-3x-3=(x^5+x^4)-(2x^3+2x^2)-(3x+3)$$
$$=x^4(x+1)-2x^2(x+1)-3(x+1)$$
$$=(x+1)(x^4-2x^2-3)$$
$$=(x+1)(x^2+1)(x^2-3).$$

(三)有時多項式不能分做項數相同的幾羣,就將一項分做兩項.

例題三　分解 $x^4+x^3+2x^2+x+1$ 的因子.

解　原式有五項,將 $2x^2$ 分做 x^2 和 x^2 兩項,就成兩羣各有三項.

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)$$
$$=x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$

$$=(x^2+x+1)(x^2+1).$$

（四）有時多項式雖然可以分做項數相同的羣，但不能得公因子，就取兩項各分爲兩項.

例題四 分解 x^3-2x^2+3x-2 的因子.

解 如果將原式直接分做兩羣，不拘怎樣併合，總得不到相同因子，就將 $-2x^2$ 分爲 $-x^2$ 和 $-x^2$ 兩項，又分 $3x$ 爲 x 和 $2x$ 兩項，便可成兩項的三羣.

$$\begin{aligned}x^3-2x^2+3x-2&=(x^3-x^2)-(x^2-x)+(2x-2)\\&=x^2(x-1)-x(x-1)+2(x-1)\\&=(x-1)(x^2-x+2).\end{aligned}$$

注意 本題各項係數的代數和是 0，便知有因子 $x-1$.

例題五 分解 $x^4+5x^3+8x^2+7x+3$ 的因子.

解 $x^4+5x^3+8x^2+7x+3$

$$\begin{aligned}&=(x^4+x^3)+(4x^3+4x^2)+(4x^2+4x)+(3x+3)\\&=x^3(x+1)+4x^2(x+1)+4x(x+1)+3(x+1)\\&=(x+1)(x^3+4x^2+4x+3)\\&=(x+1)[(x^3+3x^2)+(x^2+3x)+(x+3)]\\&=(x+1)[x^2(x+3)+x(x+3)+(x+3)]\\&=(x+1)(x+3)(x^2+x+1).\end{aligned}$$

習題十八

用分羣法分解下列各題的因子：

1. x^3-2x^2-3x+6.
2. x^3-2x^2+2x-4.
3. x^3+2x^2+4x+8.
4. $2x^3-x^2-4x+2$.
5. $x^3-4x^2-9x+36$.
6. $2x^3-3x^2-2x+3$.
7. $x^3-6x^2+11x-6$.
8. $x^3-6x^2+3x+10$.
9. $2x^3+9x^2-131x-210$.
10. $3x^4+2x^3-21x-14$.
11. $x^4-x^3-3x^2-7x-6$.
12. $x^4+20x^3+99x^2+8x-16$.
13. $x^4+2x^3+4x^2+2x+3$.
14. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+5x-5$.
15. $2x^5+2x^4+3x^3+3x^2+4x+4$.
16. $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$.

復 習 題 四

分解下列各式的因子：

1. x^3+ax^2-x-a.
2. $a(a+c)-b(b+c)$.
3. $2x^2+xy+7x+3y+3$.
4. $acx^3+bcx^2+adx+bd$.
5. $2x^3-4x^2y-x^2z+2xyz-y^2z+2xy$.
6. $a^2bc+ac^2+acd-abd-cd-d^2$.
7. $a^3b+a^2+ab^3-ab+b^2-1$.
8. $a^2b^2-a^2-b^2+1$.
9. $b^2c^2-ab^2-a^2bc+a^3b-a^2c^2+a^3c$.
10. $x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2+z^4$.
11. x^3+x^2-4x-4.
12. $2x^3+3x^2-11x-6$.

13. $2x^3-7x^2+7x-2$、
14. $x^3+11x^2-7x-10$.
15. $8x^3+12x^2+6x+1$.
16. x^4+3x^3-3x-1.
17. $x^4-5x^3+20x-16$.
18. $2x^4+x^3-6x^2+x+2$.
19. $x^4-12x^3-13x^2-14x+24$.
20. $x^4-11x^3+41x^2-61x+30$.
21. $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9$.
22. $6x^6-25x^5+31x^4-31x^2+25x-6$.

第五章　分解因子的應用

30. 最高公因子　一整式同時能整除幾個整式，那一整式就是這些整式的公因子，幾個整式的公因子往往不只一個，其中次數最高的，叫做最高公因子，通常用英文縮寫 $H.C.F.$ 來記.

例　a、b、ab、a^2b 都是 $2a^3b$、$3a^2b^2$、$4a^4b$ 的公因子，a^2b 是 $H.C.F.$ 又 $x+1$，$x-1$，x^2-1 都是 x^4-1，$(x-1)^2(x+1)$，$(x-1)(x+1)^2$ 的公因子，x^2-1 是 $H.C.F.$

注意　代數中最高公因子和算術中最大公約數的意義相彷，不過幾個整式比較，就文字而論，只可看出次數高低，不能決定數值大小，所以只可說最高，不能稱最大.

31. 用因子分解法求最高公因子　因子係數，本書以有理數爲限，所以一個整式不能分解爲有理係數因子，就叫做質式，幾個質式當然沒有公因子，就是幾個複式，如果各式分解出來的因子，各不相同，也沒有公因子，就叫做互質式.

求幾個整式的最高公因子，方法如下：

(一) 將各整式分解爲質因子.

(二) 取各公因子次數最低的連乘起來.

例題一　求 $ax^3y^2z^4$，bx^4yz^3，$cx^5x^3z^2$ 的 $H.C.F.$

解　各單項式公有文字 x、y、z 就是公因子，次數最低的是 x^3、y、z^2，

所以
$$H.C.F.=x^3yz^2.$$

各式的數字係數，對於公因子的次數沒有關係，但習慣上恆取各數字係數的最大公約數做最高公因子的數字係數.

例題二 求 $8a^2bc^3$，$-12a^2b^3c^2$，$4ab^2c^4d$ 的 $H.C.F.$

解 求各項數字係數絕對值的最大公約數得 4，公有文字次數最低的是 a、b、c^2，所以 $H.C.F.=4abc^2$.

例題三 求 $x^2y(x-a)^3(x-b)^2$，$xy^2z(x-a)^2(x-b)^2$，$-5yz^2(x-a)(x-b)^3(x-c)$ 的 $H.C.F.$

解 括號內的式當做一個文字看，上面各式就和單項式的最高公因子求法一樣.

$$\therefore\ H.C.F.=y(x-a)(x-b)^2.$$

例題四 求 $4x^2-1$，$8x^3+1$，$6x^4+3x^3+2x+1$ 的 $H.C.F.$

解 將各式分解爲質因子.

$4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$， $8x^3+1=(2x+1)(4x^2-2x+1)$，

$6x^4+3x^3+2x+1=3x^3(2x+1)+(2x+1)=(2x+1)(3x^3+1)$.

$$\therefore\ H.C.F.=2x+1.$$

幾個多項式中有一式容易分解爲因子，就將這式的因子除其餘多項式，能整除的，就是公因子.

例題五 求 x^3-7x^2+10x，$4x^3+15x-62$，$x^4+x^3-7x^2+x+2$ 的 $H.C.F.$

解 三個多項式中第一式容易視察出因子.

$x^3-7x^2+10x=x(x^2-7x+10)=x(x-2)(x-5)$.

第二第三兩式很明顯的沒有因子 x，從他們的絕對項也容易看出沒有因

數 5，$x-5$ 就不能整除這兩式，現在只要用 $x-2$ 去試除，實行除算，都能整除．　$\therefore\ H.C.F.=x-2.$

兩個多項式次數相同時，將兩式相減或相加的結果分解爲因子，因爲分解和或差的因子，必比分解原式容易些，並且兩式的最高公因子，就可以從和或差分解出來因子的裏面去求．

例題六　求 $2x^4-4x^3-2x^2+5x-2$,

$$2x^4-5x^3+x^2+3x-2 \text{ 的 } H.C.F.$$

解　兩式都是四次式，把相減的結果分解爲因子．

$$2x^4-4x^3-2x^2+5x-2-(2x^4-5x^3+x^2+3x-2)=x^3-3x^2+2x$$
$$=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2).$$

原有兩式的公因子不出 $x, x-1, x-2$ 以外，但 x 明明不是公因子，所以只用 $x-1$ 和 $x-2$ 去試除各式，結果 $x-2$ 能整除兩式．

$$\therefore\ H.C.F.=x-2.$$

注意一　次數相同的兩式，最高次項的係數不同，可用適當的數去乘，化成同係數，然後相減，因爲數字因數的加入或移去，不致影響於公因子．

例題七　求 $2x^4+x^3-9x^2+8x-2$,

$$2x^4-7x^3+11x^2-8x+2 \text{ 的 } H.C.F.$$

解　兩式相加的結果分解爲因子．

$$2x^4+x^3-9x^2+8x-2+(2x^4-7x^3+11x^2-8x+2)$$
$$=4x^4-6x^3+2x^2=2x^2(2x^2-3x+1)=2x^2(2x-1)(x-1).$$

$2x^2$ 必不是兩式的公因子，用除法驗出 $2x-1$ 和 $x-1$ 都能整除兩式．

$$\therefore \quad H.C.F. = (2x-1)(x-1).$$

注意二　兩個次數相同的式子，宜加宜減，看那一種算法能夠多消去幾項來決定.

註　本書求最高公因子，以一元多項式爲限，二元以上的式，求法過於複雜，初學不易了解，故略之．若二元同次式，求法和一元多項式完全相同.

32. 用輾轉相除法求最高公因子　多項式不容易分解爲因子時，可用輾轉相除法求最高公因子，這是普遍方法，任何次數的幾個多項式，都可以應用，方法如下：

（一）兩式依降冪整列，先將次數較低的一式除較高的一式，得商式和餘式.

（二）用餘式做新除式，原除式做被除式再除．照此繼續進行，直到能整除的時候爲止．那時的除式，就是所求的最高公因子.

例題一　求 x^3+x^2-5x-2，$x^4+2x^3-x^2+2x+1$ 的 $H.C.F.$

解　第一式次數較低做除式，和第二式輾轉相除，詳細步驟如下：

$$\begin{array}{r}
x^3+x^2-5x-2)\,x^4+2x^3-x^2+2x+1\,(x+1 \\
\underline{x^4+x^3-5x^2-2x\quad} \\
x^3+4x^2+4x+1 \\
\underline{x^3+x^2-5x-2} \\
3\,|\,\underline{3x^2+9x+3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x^2+3x+1)\,x^3+x^2-5x-2\,(x-2 \\
\underline{x^3+3x^2+x\quad} \\
-2x^2-6x-2 \\
\underline{-2x^2-6x-2} \\
0
\end{array}$$

x^2+3x+1 是整除時的除式，就是所求最高公因子.

$$\therefore\ H.C.F.=x^2+3x+1.$$

上面演算式，排列如下，更爲簡便，以後可仿此演算.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x & x^3+x^2-5x-2 & x^4+2x^3-x^2+2x+1 & x \\
 & x^3+3x^2+x & x^4+x^3-5x^2-2x & \\
\hline
-2 & -2x^2-6x-2 & x^3+4x^2+4x+1 & 1 \\
 & -2x^2-6x-2 & x^3+x^2-5x-2 & \\
\cline{2-3}
 & & 3\ \big|\ 3x^2+9x+3 & \\
 & & x^2+3x+1 &
\end{array}
$$

求三個多項式的 $H.C.F.$，先求兩式的 $H.C.F.$，再將所得的 $H.C.F.$ 和第三式求 $H.C.F.$ 三式以上的求法，可照此依次推去.

例題二　求 x^3-2x^2-5x+6，$3x^3-x^2-12x+4$，$7x^3+19x^2+8x-4$ 的 $H.C.F.$

解　各式都是三次式，可任意取兩式先求 $H.C.F.$ 倘使有次數不同的式，則先取低次的爲便.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & x^3-2x^2-5x+6 & 3x^3-x^2-12x+4 & 3 \\
 & 5 & 3x^3-6x^2-15x+18 & \\
\hline
x & 5x^3-10x^2-25x+30 & 5x^2+3x-14 & 5x \\
 & 5x^3+3x^2-14x & 5x^2+10x & \\
\hline
 & -13x^2-11x+30 & -7x-14 & -7 \\
 & -5 & -7x-14 & \\
\cline{2-3}
13 & 65x^2+55x-150 & & \\
 & 65x^2+39x-182 & & \\
\cline{2-2}
 & 16\ \big|\ 16x+32 & & \\
 & x+2 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
x+2 & 7x^3 & +19x^2 & +8x & -4 & 7x^2 \\
 & 7x^3 & +14x^2 & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & +8x & -4 & 5x \\
 & & 5x^2 & +10x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -2x & -4 & -2 \\
 & & & -2x & -4 & \\
\cline{4-5}
\end{array}
$$

第一,二兩式的$H.C.F.$是$x+2$,以此除第三式,恰好除盡,所以$x+2$便是三式的$H.C.F.$

注意一　爲避免分數係數,使計算便利起見,所以用適當的整數去乘或除,對於公因子不生影響.

注意二　輾轉相除時,如果得出餘式,是一絕對項,不能再除,就是表示原式沒有公因子.

習 題 十 九

用因子分解法求下列各題的最高公因子(1—18):

1. $10a^3b^2c^5$, $4a^5bc^3$, $6a^4b^3c^5$, $8a^4b^4c^4d$.
2. $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$, $ab(a+b)(a-b)$.
3. x^5-y^5, x^4-y^4, x^3-y^3, x^2-y^2.
4. $(x-1)(x-2)$, $5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$.
5. $a^3+3a^2b+2ab^2$, $a^4+4a^3b+3a^2b^2$.
6. $a^2-5ab+4b^2$, $a^3-5a^2b+4b^3$.
7. $2x^2-5x+2$, $12x^3-8x^2-3x+2$.
8. $4x^3-22x^2+21x+12$, x^2-6x+8.
9. x^3-2x+1, x^3+2x-1.
10. $2x^4+x^3-6x^2-2x+3$, $2x^4-3x^3+2x-3$.
11. $11x^4-9x^3-x^2-1$, $13x^4-10x^3-2x^2-1$.

12. $21x^4+8x^3-45x^2$, $42x^5-82x^4+36x^3$.

13. x^2+5x+6, x^2+x-2, $x^2-14x-32$.

14. $7x^2+20x-3$, $5x^2+16x+3$, $x^3+3x^2+5x+15$.

15. $12x^2-x-20$, $15x^2-38x+24$, $21x^2-52x+32$.

16. $16x^2-1$, $x-4x^2$, $1-8x+16x^2$.

17. $3x^2+8x+4$, $3x^2+11x+6$, $3x^2-16x-12$.

18. x^3+1, x^4+x^2+1, x^3+2x^2+2x+1.

用輾轉相除法求下列各題的最高公因子：

19. $4x^4+9x^3+2x^2-2x-4$, $3x^3+5x^2-x+2$.

20. x^4+x^3-2x, x^4+2x^3-3x.

21. $x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3$, $x^5-x^4y+8x^2y^2-8xy^4$.

22. $x^4+x^3-9x^2-3x+18$, $x^5+6x^2-49x+42$.

23. $x^4-2x^3+5x^2-4x+3$, $2x^4-x^3+6x^2+2x+3$.

24. $x^4+3x^2+6x+35$, $x^4+2x^3-5x^2+26x+21$.

25. $21x^3-4x^2-15x-2$, $21x^2-32x^2-54x-7$.

26. $3x^3-4x^2-5x+2$, $6x^3-17x^2+11x-2$, $3x^3-x^2-12x+4$.

27. $y^3-5y^2+11y-15$, y^3-y^2+3y+5, $2y^3-7y^2+16y-15$.

28. x^3+2x^2-4x+1, $x^5+5x^4-7x^3-11x^2+2x+10$, x^6-3x^3-5x+7.

33. 最低公倍式　幾個整式各能整除一個整式，這整式就是那些整式的公倍式，幾個整式的公倍式可以有無窮無盡的多，因爲用任何整式去乘這公倍式，乘積的次數逐漸增高，但同樣的能

被那幾個整式整除，所以還是他們的公倍式． 許多公倍式中，必有一個次數最低的，並且只有一個，我們叫他是最低公倍式，常用英文縮寫 $L.C.M.$ 來記．

例 xyz^2 和 xy^2z 的最低公倍式是 xy^2z^2． 因為次數比他低的整式，就不能被 xyz^2 和 xy^2z 整除． 又 x^2-1 是 $x-1$ 和 $x+1$ 的最低公倍式，比 x^2-1 的次數再低的整式，就是一次式，必不能同時被 $x-1$ 和 $x+1$ 整除．

注意 算術裏的最小公倍數，是公倍數中最小的一個數目．代數裏不論式的數值，只講次數高低，所以公倍式不能稱最小，應該稱最低． 舊時這種名稱，不加區別，統稱最小公倍數，像最高公因子，也稱最大公約數，一樣的沒有分別，殊不適當．

34. 用因子分解法求最低公倍式 幾個整式的最低公倍式，也可應用因子分解法來求得． 因為各式分解為因子後，就能看出相同和不相同的因子，照下面方法去求，便得次數最低的公倍式．

（一）分解各整式為質因子．

（二）取不同因子和公因子次數最高的連乘起來．

例題一 求 ax^5yz， bxy^4z^3， cx^2yz^6 的 $L.C.M.$

解 各式的不同因子是 a,b,c，公因子次數最高的是 x^5,y^4,z^6，

所以 $$L.C.M.=abcx^5y^4z^6.$$

各式的數字係數，對於公倍式的次數，雖然沒有關係，但為整除起見，總是用各係數絕對值的最小公倍數，做最低公倍式的

數字係數.

例題二　求 $8(a+b)(x-a)^3(x+b)^2$，$6(a+b)(x-a)^2(x-b)^2$，$12(a-b)(x-a)^2(x-b)^2$ 的 $L.C.M.$

解　求8、6、12的最小公倍數得24. 括號內的式，當做一個文字看，照前題求法，得

$$L.C.M.=24(a+b)(a-b)(x-a)^3(x+b)^2(x-b)^2$$
$$=24(a^2-b^2)(x-a)^3(x^2-b^2)^2.$$

例題三　求 $6x^2-13x+6$，$3x^2+13x-10$，$2x^2+7x-15$ 的 $L.C.M.$

解　將各式分解爲因子，如下：

$6x^2-13x+6=(3x-2)(2x-3)$，　$3x^2+13x-10=(3x-2)(x+5)$，

$2x^2+7x-15=(2x-3)(x+5)$.

$$\therefore\ L.C.M.=(3x-2)(2x-3)(x+5).$$

例題四　求 $8x^3-18xy^2$，$8x^3+8x^2y-6xy^2$，$4x^2-8xy+3y^2$ 的 $L.C.M.$

解　各式都是二元同次式，照一元多項式分解因子法，得

$8x^3-18xy^2=2x(4x^2-9y^2)=2x(2x-3y)(2x+3y)$，

$8x^3+8x^2y-6xy^2=2x(4x^2+4xy-3y^2)=2x(2x-y)(2x+3y)$，

$4x^2-8xy+3y^2=(2x-y)(2x-3y)$.

$$\therefore\ L.C.M.=2x(2x+y)(2x-3y)(2x+3y).$$

35. 最高公因式和最低公倍式的關係　設 A,B 兩整式的 $H.C.F.$ 是 G，$L.C.M.$ 是 L，從他們的定義，就有

$$A=A'G,\quad B=B'G,\quad L=A'B'G.$$

其中 A',B' 是互質式，就是 A,B 兩式中不相同的因子．將前兩式代入第三式，得　　　$L=\dfrac{AB}{G}$．

可見兩整式的 $L.C.M.$ 等於 $H.C.F.$ 除兩式的乘積．運算時，宜先將 $H.C.F.$ 除次數較低的一式，再乘他式．

例題一　已知 $3x^2-5x+2$，$4x^3-4x^2-x+1$ 的 $H.C.F.$ 是 $x-1$，求 $L.C.M.$

解　$$L.C.M.=\frac{(3x^2-5x+2)(4x^3-4x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=(3x-2)(4x^3-4x^2-x+1)$$
$$=12x^4-20x^3+5x^2+5x-2.$$

例題二　求 $3x^2-5x-2$，$3x^2+5x-2$ 的 $L.C.M.$

解　$3x^2-5x-2=(3x+1)(x-2)$，

$3x^2+5x-2=(3x-1)(x+2)$．

兩式沒有公因子，$L.C.M.$ 就是兩式的乘積．

$\therefore\ L.C.M.=(3x+1)(x-2)(3x-1)(x+2)=(9x^2-1)(x^2-4)$．

36.先求最高公因式再求最低公倍式　幾個整式不容易分解為因子時，用輾轉相除法，求出 $H.C.F.$，再用上節方法，求 $L.C.M.$　這是普遍應用的方法，在不能求得 $H.C.F.$ 時，各式的乘積便是 $L.C.M.$

例題一　求 $6x^4+2x^3+9x^2-2x+6$，

$10x^4+4x^3+15x^2-3x+9$ 的 $L.C.M.$

解　先求兩式的 $H.C.F.$ 如下：

$$
\begin{array}{r|r|r|r}
3x & 6x^4+2x^3+9x^2-2x+6 & 10x^4+\ 4x^3+15x^2-\ 3x+\ 9 & \\
 & 6x^4 \qquad +3x^2-9x & 3 \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
1 & 2x^3+6x^2+7x+6 & 30x^4+12x^3+45x^2-\ 9x+27 & 5\\
 & 2x^3 \qquad +\ x-3 & 30x^4+10x^3+45x^2-10x+30 & \\
\hline
 & 3 \mid 6x^2+6x+9 & 2x^3 \qquad +\ x-\ 3 & x\\
 & 2x^2+2x+3 & 2x^3+\ 2x^2+\ 3x \qquad & \\
\hline
 & & -\ 2x^2-\ 2x-\ 3 & -1\\
 & & -\ 2x^2-\ 2x-\ 3 & \\
\hline
\end{array}
$$

$H.C.F.=2x^2+2x+3.$

$(6x^4+2x^3+9x^2-2x+6)\div(2x^2+2x+3)=3x^2-2x+2.$

$\therefore\ L.C.M.=(3x^2-2x+2)(10x^4+4x^3+15x^2-3x+9).$

求三個以上整式的 $L.C.M.$，先求兩式的 $L.C.M.$，將結果和第三式再求，照此繼續做去.

例題二　求例題一中兩式和 $15x^4-14x^3+22x^2-9x+6$ 的 $L.C.M.$

解　將前題中求得的 $L.C.M.$ 和本題的一整式，求 $H.C.F.$ 爲計算便利起見，將質因子 $3x^2-2x+2$ 試除 $15x^4-14x^3+22x^2-9x+6$，不能整除，便知不是他的因子，所以只須和 $10x^4+4x^3+15x^2-3x+9$ 求 $H.C.F.$ 用輾轉相除法求得這兩式的 $H.C.F.$ 是 $5x^2-3x+3$. 再用上節方法，將 $5x^2-3x+3$ 除 $15x^4-14x^3+22x^2-9x+6$，得 $3x^2-x+2$，所以三式的 $L.C.M.$ 是

$$(3x^2-x+2)(3x^2-2x+2)(10x^4+4x^3+15x^2-3x+9).$$

習　題　二　十

用因子分解法，求下列各題的 $L.C.M.(1-12)$：

1. $3a^2x^4y^3$, $6abx^3y^2$, $15b^2cx^2y^5$.

2. $(a-b)(a-c)(x-a)$, $(b-c)(b-a)(x-b)$,
$(c-a)(c-b)(x-c)$.

3. $4(x-a)(x+b)^3$, $5(x-a)^2(x+b)^2$, $10(x-a)^3(x+b)$.

4. $(x+3)^2$, x^2-x-12, $3x-12$.

5. x^3-x, $1-x^3$, x^3+1.

6. x^3+y^3, x^2-y^2, $x^4+x^2y^2+y^4$.

7. $4x^2-5xy+y^2$, $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$.

8. $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$, $(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)$.

9. $x^2-7x+12+$, $3x^2-6x-9$, $2x^3-6x^2-8x$.

10. x^2-6x+9, x^2-x-6, $3x^2-12$.

11. $x^2-7xy+12y^2$, $x^2-6xy+8y^2$, $x^2-5xy+6y^2$.

12. x^4-x^3+8x-8, $x^4+21x^3-8x^2+24x$.

求下列各题的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$(13—16):

13. $3x^3-13x^2+23x-21$, $6x^3+x^2-44x+21$.

14. $2x^2+4x-1$, $6x^3+26x^2+25x-7$.

15. $x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$, x^4-4x+3.

16. $2x^3+5x^2-x-1$, $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$.

求下列各题的 $L.C.M.$(17—20):

17. x^3-x^2-4x+4, x^3+4x^2+x-6, $x^3+3x^2-4x-12$.

18. x^4+5x^2+4x+5, $2x^4-x^3+10x^2+4x+5$,
$2x^4+x^3+7x^2+3x+3$.

19. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2$, $2x^4+3x^3-4x^2+13x-6$,

$x^4+3x^3+x^2+5x+8$.

20. x^3-x^2-4x+4, x^3+4x^2+x-6, $x^3+3x^2-4x-12$,

$2x^4+2x^3-20x^2-8x+48$.

37. 化簡分式　兩整式相除，將被除式做分子，除式做分母，就寫成分式．化簡分式的意思，就是約去分母分子的一切公因子，使成互質式，因爲用同式（不是 0）去除母子，分式的值不變，所以旣約分式，或叫做最簡分式，仍舊和原分式相等．看下面的例子，便可明白化簡分式，也須藉分解因子的助．

例題一　化簡 $\dfrac{2x^3y^2-x^2y^3}{2x^2y^3+x^3y^2}$.

解　$\dfrac{2x^3y^2-x^2y^3}{2x^2y^3+x^3y^2}=\dfrac{x^2y^2(2x-y)}{x^2y^2(2y+x)}=\dfrac{2x-y}{2y+x}$.

例題二　化簡 $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\times\dfrac{x-y}{x^2+xy}$.

解　$\dfrac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\times\dfrac{x-y}{x^2+xy}$

$=\dfrac{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)}{(x-y)^2}\times\dfrac{x-y}{x(x+y)}=\dfrac{x^2+y^2}{x}$.

例題三　化簡 $\dfrac{x^5-5x+6}{x^2+3x-4}\times\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+x-6}\div\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+7x+12}$.

解　原式$=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+4)}\times\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)(x+3)}\times\dfrac{(x+3)(x+4)}{(x-3)(x-5)}$

$=\dfrac{x+1}{x-1}$.

注意　除式的分母分子顚倒，變除爲乘．

例題四 化簡 $\dfrac{2x^2-4x-6}{x^4-x^3-3x^2-7x-6}$.

解 分母不容易分解爲因子,先將分子分解.

$$2x^2-4x-6=2(x^2-2x-3)=2(x+1)(x-3).$$

母子如有公因子,只能是 $x+1$、$x-3$. 將 $x+1$ 除分母,得 x^3-x^2-x-6, 再用 $x-3$ 除這商式,得 x^2+x+2. 所以

$$x^4-x^3-3x^2-7x-6=(x+1)(x-3)(x^2+x+2).$$

$$\frac{2x^2-4x-6}{x^4-x^3-3x^2-7x-6}=\frac{2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)(x^2+x+2)}=\frac{2}{x^2+x+2}.$$

例題五 化簡 $\dfrac{x^4+3x^3+6x+35}{x^4+2x^3-5x^2+26x+21}$.

解 分母分子都不容易視察出因子,就求他們的 $H.C.F.$ 用輾轉相除法,求得 $H.C.F.$ 是 x^2-3x+7.

$$\frac{x^4+3x^3+6x+35}{x^4+2x^3-5x^2+26x+21}=\frac{(x^4+3x^3+6x+35)\div(x^2-3x+7)}{(x^4+2x^3-5x^2+26x+21)\div(x^2-3x+7)}$$

$$=\frac{x^2+3x+5}{x^2+5x+3}.$$

習題二十一

化簡下列各分式:

1. $\dfrac{27x^3y^5+54x^5y^3-81x^2y^6}{9x^4y^4+18x^6y^2-27x^3y^5}$.

2. $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\times\dfrac{x+y}{x-y}$.

3. $\dfrac{(a+b)(a^3-b^3)-(a-b)(a^3+b^3)}{a^3-b^2}$

$\times\dfrac{(a+b)(a^2-b^2)+(a-b)(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

4. $(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\dfrac{x-y+z}{x-y-z}$.

5. $\dfrac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$.

6. $\dfrac{7x^4y^4-8x^2y^2+1}{28x^4y^4+3x^2y^2-1}$.

7. $\dfrac{2x^2-3x-9}{x^4+x^3-3x^2+7x-6}$.

8. $\dfrac{2x^3-5x\ \ +x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

9. $\dfrac{(2x+1)^2-10(2x+1)+16}{(2x+1)^3-8}$.

10. $\dfrac{2x^3+3x^2+2x+3}{4x^3+6x^2-2x-3}$.

11. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$.

12. $\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{(1+x)(1+y)}+\dfrac{(1-xy)^2-(x-y)^2}{(1-x)(1-y)}$.

13. $\dfrac{(x+y)^4+(x+y)^2+1}{(x-y)^4+(x-y)^2+1}\div\dfrac{(x+y)^2-(x-y)+1}{(x-y)^2+(x-y)+1}$.

38.**解二次以上方程式**　一個多項式中所含未知數，代以特別的值，能使這多項式的值是 0；換句話說，就是使一多項式等於 0 所成的等式，對於未知數的任意數值，不能都適合，像恆等式一樣． 這種等式，叫做方程式；那特別的值，叫做方程式的根；求方程式中未知數的值，叫做求方程式的根，也叫解方程式．

等於 0 的一個多項式，如能分解爲因子，其中最少有一因子等於 0，否則因子的積，必不等於 0，如 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$，必 $x-1=0$，或 $x-2=0$，或 $x-3=0$，才能合理；並且這些因子所成一次方程式的根是 1、2、3，就是原方程式的根． 由是得方程

式的解法，如下：

(一)將方程式各項都移在等號左邊.

(二)分解左邊的式爲因子.

(三)令各因子等於 0.

應用因子分解法來解方程式，是最簡便的方法，不過只能求出有理數的根. 因此解下面各種方程式，以有理根爲限.

(1)一元二次方程式 一元二次方程式都可化爲

$$x^2+px+q=0, \quad 或\ ax^2+bx+c=0$$

形狀，根是有理數時，應用一元二次三項式的因子分解法，立卽求得方程式的根.

例題一 解 $x^2+5x=24$.

解 移項， $x^2+5x-24=0$.

分解因子， $(x-3)(x+8)=0$.

令 $x-3=0$， 則 $x=3$.

令 $x+8=0$， 則 $x=-8$.

所以原方程式的根是 3 和 -8.

例題二 解 $2x(2x+1)=3(1-3x)$.

解 化原方程式爲 $4x^2+11x-3=0$.

分解因子， $(4x-1)(x+3)=0$.

令 $4x-1=0$，$x+3=0$，則 $x=\frac{1}{4}$，$x=-3$.

∴ 所求的兩根是 $\frac{1}{4}$ 和 -3.

（2）準二次方程式　高次方程式可用二次方程式解法去解的，叫做準二次方程式．

例題三　解 $x^4-13x^2+36=0$．

解　設一文字等於 x^2，則原方程式變爲一元二次式，或直接先分解左邊爲兩個二次因子，演算更覺便捷．

$$x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)=0.$$

令　$x-2=0,\quad x+2=0,\quad x-3=0,\quad x+3=0,$

則　$x=2,\ x=-2,\ x=3,\ x=-3.$

原方程式是四次式，有四個根 2、-2、3、-3．

例題四　解 $(x^2+x)^2+(x^2+x)-6=0$．

解　括號內的式，當做一文字看，就不必設他文字去代．

分解因子，　$[(x^2+x)+3][(x^2+x)-2]=0.$

令　$x^2+x+3=0,\quad x^2+x-2=0.$

前一個二次三項式，不能分解爲有理係數的一次因子，後一式可分解，如

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0.$$

令　$x-1=0,\quad x+2=0,$　則　$x=1,\quad x=-2.$

原方程式是四次式，應該有四個根，只有兩根是有理數 1、-2．

例題五　解 $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+8=0$．

解　四因子兩兩相乘，得兩個二次因子，該注意怎樣配合，可使兩因子裏二次項和一次項都各相同．

$$[(x-1)(x-6)][(x-3)(x-4)]+8=0,$$

$$(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+8=0,$$

$$(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+80=0.$$

分解因子， $[(x^2-7x)+8][(x^2-7x)+10]=0.$

令 $x^2-7x+8=0,\quad x^2-7x+10=0.$

後一式可再分解因子， $(x-2)(x-5)=0.$

令 $x-2=0,\ x-5=0,$ 則 $x=2,\ x=5.$

$\therefore$ 求得的兩個有理根是2、5.

(3)倒數方程式 方程式各項整列以後，前後兩相當項係數各相同的，叫做倒數方程式. 如

$$ax^3+bx^2+bx+a=0,$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

同係數的兩項，同號或異號都可. 這類方程式，可用分羣分解因子法去解.

例題六 解 $2x^3-3x^2-3x+2=0.$

解 將同係數的兩項，合併爲一羣，

$$(2x^3+2)-(3x^2+3x)=0.$$

分解因子， $(x+1)[2(x^2+x+1)-3x]=0.$

令 $x+1=0,$ 則 $x=-1.$

令 $2(x^2-x+1)-3x=0,$ 則 $2x^2-5x+2=0.$

分解因子， $(2x-1)(x-2)=0.$

令 $2x-1=0,\ x-2=0,$ 則 $x=\frac{1}{2},\ x=2.$

$\therefore$ 所求的根是 $-1,\ \frac{1}{2},\ 2.$

例題七　解 $9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0$.

解　　$9(x^4+1)-24x(x^2+1)-2x^2=0$.

將第一括號內的式,配成完全平方,

$$9(x^2+1)^2-24x(x^2+1)-20x^2=0.$$

分解因子,　$[3(x^2+1)+2x][3(x^2+1)-10x]=0$.

令　$3(x^2+1)+2x=0$,　則　$3x^2+2x+3=0$.

這二次式不能分解爲有理係數一次因子.

令　$3(x^2+1)-10x=0$,　則　$3x^2-10x+3=0$.

分解因子,　$(3x-1)(x-3)=0$.

令　$3x-1=0$,　$x-3=0$,　則　$x=\frac{1}{3}$,　$x=3$.

別解　集合係數相同的項,用 x^2 去除,原方程式化爲

$$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

因　$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-2$,所以上式可化爲

$$9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0.$$

分解因子,　$\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\right]\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right]=0$.

令　$3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$,　$3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$,

則　$3x^2+2x+3=0$,　$3x^2-10x+3=0$.

和上面解法求得的因子一樣,所以　$x=\frac{1}{3}$,　$x=3$.

注意　奇次倒數方程式裏前後同係數兩項若是同號,必有因子 $x+1$,異號必有因子 $x-1$.　偶次倒數方程式裏如果缺一中項,就是有偶數項,並且同係數項是異號,必有 $x-1$ 和 $x+1$

兩因子．除去因子 $x+1$，或 $x-1$，或 $(x+1)(x-1)$ 後的方程式，是偶次倒數方程式，並且同係數項是同號，分解爲二次因子，再解．倒數方程式的根必有兩根互爲倒數，如例題六裏有 2 和 $\frac{1}{2}$ 兩根，例題七裏有 3 和 $\frac{1}{3}$ 兩根．

（4）二項方程式　只含一元的任何次冪和絕對項的方程式，叫做二項方程式．如果絕對項可化爲有理數的冪和未知數同次的，就能應用兩同次冪和或差的因子分解法，求出有理根．

例題八　解 $x^3+27=0$．

解　$x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)=0$．

令　$x+3=0$，則　$x=-3$．

令　$x^2-3x+9=0$，這二次式不能分解爲有理係數一次因子，所以原方程式只有一個有理根 -3．

例題九　解 $x^6-1=0$．

解　$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)$

$$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

令　$x+1=0$，$x-1=0$，則　$x=-1$，$x=1$．

其餘兩個二次因子，都不能求得有理根．

習題二十二

解下列各方程式：

1. $x^2-3x-28=0$.　　2. $4x^2-4x=3$.

3. x^2+[illegible]$x=252$.　　4. $15x^2-8$[illegible]$x-64=0$.

5. $8x^2-82x+207=0.$

6. $x^3=x^2=6x.$

7. $x^4-16=0.$

8. $x^5+1=0.$

9. $x^4-2x^2-8=0.$

10. $x^6-x^3-72=0.$

11. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0.$

12. $(x+2)^2+8x(x+2)+15x^2=0.$

13. $(x^2+7x+5)^2-3(x^2+7x+5)-4=0.$

14. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24.$

15. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12.$

16. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2.$

17. $x^3-2x^2+2x-1=0.$

18. $2x^4-5x^3+5x-2=0.$

19. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1=0.$

20. $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0.$

復 習 題 五

求下列各題的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ (1—6):

1. x^2+x-6, x^2+5x+6, $x^2-4x-21$.

2. $7x^2+20x-3$, $5x^2+16x+3$, $x^3+3x^2+5x+15$.

3. x^4-11x^2+49, $7x^4-40x^3+75x^2-40x+7$.

4. $x^4+3x^2+6x+35$, $x^3-4x^2+10x-7$.

5. $x^3-6x^2+11x-6$, $x^4-11x^3+41x^2-61x+30$,
   $x^4+2x^3-13x^3-14x+20$.

6. $4x^4-5x^2+1$, $2x^3-x^2-5x-2$, $4x^3+8x^2+5x+1$.

$4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9.$

化簡下列各分式(7—13):

7. $\dfrac{(x^6-y^6)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^4-y^4)}.$

8. $\dfrac{(a+b)^3+(b+c)^3-(a+2b+c)}{(a+b)(b+c)(a+2b+c)}.$

9. $\dfrac{2x^3+3x^2+2x+3}{4x^3+6x^2-2x-3}.$ 10. $\dfrac{6x^4-5x^3-20x^2+1}{4x^4-7x^2-10x+3}.$

11. $\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left[1+\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)}{(a-b+c)(a+b-c)}\right].$

12. $\dfrac{a^2+b^2}{b}\div\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)\times\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}.$

13. $\dfrac{x+y+z}{xy+xz}\times\left(1+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)\div\dfrac{y+z-x}{xy+xz}.$

解下列各方程式:

14. $(2x-1)^3=1.$ 15. $(x-2)^4-81=0.$

16. $x^5+243=0.$ 17. $x^6-64=0.$

18. $x^8-1=0.$ 19. $(2x-3)^2=8x.$

20. $(2x^2-x-3)(3x^2+x-2)=0.$

21. $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6).$

22. $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2.$

23. $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0.$

24. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2=0.$

25. $(x^2+3x)^2+9(x^2+3x)+14=0.$

26. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=384.$

27. $x(x-1)(x-2)(x-3)=6\cdot7\cdot8\cdot9.$

28. $x^4+7x^3-7x-1=0.$　　29. $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0.$

30. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0.$

31. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0.$

32. $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0.$

33. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$

習題答案

習題一　第5面

1. 就$3a^2x^3$一項而論，視x爲元，$3a^2$是x^3的係數；視a和x爲元，3是a^2x^3的係數．a和x右角上小數字2和3是指數，表示自乘的次數．

2. (1) 視各文字爲元，四次項、四次項、三次項、四次項、五次項、五次項、六次項、四次項、九次項、七次項、四次項、五次項；(2) 視x、y、z爲元，一次項、一次項、三次項、二次項、三次項、三次項、三次項、三次項、六次項、五次項、四次項、四次項．

(1) 視各文字爲元，沒有同類項；(2) 視x、y、z爲元，$3xyz$和$abcxyz$，$acxy^2$和$3cxy^2$，都是同類項．

3. 視各文字爲元：(1)五次式，(2)八次式，(3)四次式，(4)五次式；

視x、y、z爲元：(1)四次式，(2)八次式，(3)三次式，(4)五次式．

(2) 爲八次同次式．

4. (1) $x^4-3x^3-2x^2+x+4$，$4+x-2x^2-3x^2+x^4$．

(2) $bx^5+cx^4-bx^3-bcx^2+a^3x-a^2b^2+a^4$，

$a^4-a^2b^2+a^3x-bcx^2-bx^3+cx^4+bx^5$．

(3) $-yx^3+y^2x^2+y^3x+3x-2y+1$，

$1-2y+3x+y^3x+y^2x^2-yx^3$．

(4) $2y^4-4y^3-y^2-5y+3$，$3-5y-y^2-4y^3+2y^4$．

5. (1) $-2\frac{1}{8}$; (2) $9\frac{5}{8}$; (3) $-2\frac{1}{2}$; (4) 55.

7. $(a+c)x+(b-d)y$.

8. $(a-b+c)x+(b+c-a)y+(a-b-c)z$.

9. $2(a+2b)x+2(2a-b)y$.

10. $2(a^2+b^2)x^2+2aby^2$, $4abx^2-2(a^2+b^2)y^2$.

11. $-(ac^2-3b^2d)x$. 12. $2ab-5ac$.

習題二 第14面

1. (1) $-a^5x^5y^5z^5$; (2) $-70a^4b^5x^5y^8z^6$;

(3) $-a^{2n+2}b^{2m+4}$; (4) $6a^5x^5y^7z^7$; (5) $120a^6b^{10}c^6$.

2. a^6x^3, x^8y^{4n}, $a^2b^6c^4x^8$, $-a^{n+4}b^{2n+6}c^3x^{3n}y^9$, $x^{2mn}y^{2mn}$, $x^{m+n}y^{m+n}z^{m+n}$.

3. (1) $-\frac{3}{2}a^2c$; (2) $-\frac{3x^m}{2y^m}$; (3) $-\frac{9a}{2b^2c}$.

4. (1) $-2a^2b^2c-3a^2bc^2-5ab^2c^2$; (2) $a^3-3a^2b+3ab^2-2b^3$;

(3) $x^6-2x^5+9x^4-10x^3+17x^2-6x$;

(4) $2x^{2n-2}-2x^{2n-3}-3x^{2n-4}+6x^{2n-5}-5x^{2n-6}$.

5. (1) $4a^2-b^4$; (2) $9a^4-4b^2$; (3) b^4-x^4;

(4) $a^4-8a^2b^2+16b^4$; (5) $a^4-a^2b^2+6ab^3-9b^4$;

(6) $x^2-9y^2-4z^2+12yz$; (7) x^8+x^4+1;

(8) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$;

(9) $x^3-y^3-3xy-1$; (10) $x^3-3mnx+m^3+n^3$;

(11) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$;

(12) $4a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$;

(13) $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$;

(14) $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3b^2c+3c^2b+3c^2a+3a^2c+6abc$.

6. (1) $-6abc+5a^2c^2-4a^3b^2c^4$; (2) $3(x-y)^2-2(x-y)+5$;

(3) $(a-b)(b-c)(c-a)$; (4) x^2-px+q; (5) $2x+3y-1$;

(6) $x^2+(b+c)x-bc$.

7. $(y-z)x-(yz-z^2)$, $x-y$, -1.

8. (1) $Q=x^2-\frac{1}{2}yx+\frac{3}{4}y^2$, $R=\frac{1}{4}y^3$;

(2) $Q=y^2-xy+x^2$, $R=-2x^3$.

9. (1) $4a^2-6ab+9b^2$; (2) $16x^2+20xy+25y^2$.

10. (1) $Q=5x^4+9x^3+19x^2+64x+198$, $R=597$;

(2) $Q=3x^3-6x^2+13x-26$, $R=51$;

(3) $Q=x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{9}$, $R=\frac{16}{9}$;

(4) $Q=x^2+5x-6$, $R=0$.

12. $Q=3$, $R=5$.

復習題一 第16面

1. $a^4-2a^2b^2+ab^3+b^4$. 2. $4x^2+y^2-7y-9$.

3. $ab(a+b)$. 4. $a(a-b)$.

5. x^2+4x+3. 6. $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4-y^5$.

7. (1) 相等; (2) 相等.

8. (1) $x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$;

(2) $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$;

(3) $x^2+y^2+3ax-3ay-xy+3a^2$; (4) $a-b+c$;

(5) $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$; (6) $37x^2-7xy+13y^2$;

(7) $a^4-5a^2bc+13b^2c^2$; (8) $3x^4+3y^4+7x^2y^2$;

(9) $x^4+5x^2y^2+y^4$; (10) $a^2+4b^2+9c^2-2ab-3ca-6bc$;

(11) $x-2y+z$.

10. (1) x^3-2x^2+4x-1; (2) x^3-7; (3) $3x^3+4x^2-x+3$;

(4) $2x^4-3x^2y^2+4y^4$; (5) $2x^2-2x-1$, $2x^2-3x+2$; $x-3$;

(6) x^2+2x-2, x^2-2x+2, $2x^2$; (7) x^2+3x+6; (8) $k=0$.

習 題 三　第 22 面

1. $x(x-a)(x+b)$.　　**2.** $(a+b)(2a-c)$.

3. $x(x+y)$.　　**4.** $2b(x+y)$.

5. $(x+y)(4x+y)$.　　**6.** $(x+y)(b+c)(x+y-b-c)$.

7. $-2a(x+y)$.　　**8.** $c(a-b)(1-c)$.

9. $x(b-c)(ax+3)$.　　**10.** $2(a+b-c)(x-y-z)$.

11. 0.　　**12.** 0.

13. $2(2^n+1)$.　　**14.** $16(4^n-1)$.

15. $xy^3z^2(x^{m-1}-2x^3y^{m-3}z^{n-2}+5y^{p-3}z^{q-2})$.

習 題 四　第 25 面

1. $(12x+1)^2$.　　**2.** $(3-x)^2$.　　**3.** $(2xy-7)^2$.

4. $(ab-c)^2$.　5. $(5a-x^2)^2$.　6. $a^2y^2(7x+5)^2$.

7. $[3x^2+5(y+z)]^2$.　8. $(a+b+3c)^2$.

9. $(x+2a-3b)^2$.　10. $(2x+3y-4z)^2$.

11. $(ab+bc+ca)^2$.　12. 0.

13. $(x^2+2x+3)^2$.　14. $(x^2-x+1)^2$.

15. $(x^2+x-1)^2$.　16. $(2x^2-x+3)^2$.

17. $(x^3-x+3)^2$.　18. $(2x^3+3x^2y-y^3)^2$.

習　題　五　　第 28 面

1. (1) $x^2-12x+36$; (2) $x^2+12x+36$; (3) $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$;
(4) $9x^2-24x+16$; (5) $4x^4-8(a-b)x^2+4(a-b)^2$;
(6) $(a+b)^2x^2-x+\frac{1}{4(a+b)^2}$;
(7) $x^6-5a^2x^3+\frac{25a^4}{4}$; (8) $4a^2+12ab+9b^2$;
(9) $x^4+2x^2y^2+y^4$; (10) $16+8a^4bc^2x+a^8b^2c^4x^2$.

2. (1) ± 108; (2) 1; (3) 49.

3. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c+a)^2$.

4. $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.　6. $p^2=4q$.

7. $b^2=4ac$.

習　題　六　　第 31 面

1. $(7x+9y^2)(7x-9y^2)$.　2. $5(1+2x^2)(1-2x^2)$.

3. $4x^2y^2(y+2x)(y-2x)$.　　4. $5(x+1)(x-1)$.

5. $4abxy$.　　6. $(x+2)(x+5)(x+4)(x+1)$.

7. $(x+y-z)(x-y+z)$.　　8. $(a+b+x-y)(a+b-x+y)$.

9. $(x^2+8y^2+4xy)(x^2+8y^2-4xy)$.

10. $(x^2+1+x)(x^2+1-x)$.　　11. $(x^2+8+2x)(x^2+8-2x)$.

12. $(x+6y)(x-2y)$.

13. $(x^2+mxy+y^2)(x^2-mxy-y^2)$.

14. $(x^4+mxy-y^2)(x^4-mxy-y^2)$.

15. $a(a-2b+3x)(a-2b-3x)$.

16. $x^3(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2)$.

17. $-(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

18. $(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)$.

19. $(x^2+4ax-4a^2)(x-2a)^2$.

20. $(x+y)(x-y)^3$.　　21. $(2x-1)(x+1)$.

22. $(3x-1)(x+1)$.　　23. $(2x-3)(3x-2)$.

24. $(3x+8)(5x-7)$.　　25. $(3x+5)(10x-9)$.

26. $x(x-1)(7x+103)$.　　27. $5x^2(3-2x)(5+x)$.

28. $(3x+5y)(7x-3y)$.　　29. $x^2(6a+x)(4a-3x)$.

30. $(x-3y^2)(11x-21y^2)$.

習　題　七　　第34面

1. $(2x-3)^3$.　　2. $(x+5)^3$.　　3. $(x+y)^3(x-y)^3$.

4. $(ax-y^2)^3$.　5. $8x^2$.　6. $(y-x)(y^2-2xy+2x^2)$.

7. $(x-y)(x+y)(x-3y)$.

習 題 八　第 37 面

1. $8a^3-27b^3$.　2. $x^3-y^3+z^3-3x^2y+3xy^2$.

3. $x^4-4x^2yz+7y^2z^2$.　4. $37x^2+7xy+13y^2$.

5. $(x+2)(x^2-2x+4)$.　6. $(ab-1)(a^2b^2+ab+1)$.

7. $(4x^2-3y)(16x^4+12x^2y+9y^2)$.

8. $a(7a+8b)(49a^2-56ab+64b^2)$.

9. $3ab(a+b)$.　10. $3ab(b-a)$.

11. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

12. $(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy-xz-yz)$.

13. $(a+b)(x+a)(x^2-ax+a^2)$.

14. $(a+b)(x-a)(x^2+ax+a^2)$.

15. $(x-y)(x^2+3xy+4y^2)$.　16. $(x+3y)(x^2+3xy+9y^2)$.

17. $(x+y)(x^2+y^2)$.　18. $x(x+y)(x^2-3xy+3y^2)$.

19. $x(x+2)(x^2+x+1)(x^2+3x+3)$.

20. $(a-b-c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2+ab-2ac-ad-bc+2bd+cd)$.

21. $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2-y^3)$.

22. $(x-1)(x-3)(x^2+x+1)(x^2+3x+9)$.

23. $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+2)$.

24. $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+2x^3+3)$.

25. $2(x^2+y^2)(x^4+y^4+5x^2y^2)$. 26. $2xy(3x^4+3y^4+7x^2y^2)$.

習題九 第39面

1. $x^3+y^3-1+3xy$.
2. $a+2b+3c$.
3. $(a-2b+c)(a^2+b^2+c^2+4bc-ca+4ab)$.
4. $(1-x+3y)(1+x^2+9y^2-3y+x+3xy)$.
5. $(a-2b-3c)(a^2+4b^2+9c^2-6bc+3ca+2ab)$.
6. $(5x+3y-2)(25x^2+9y^2+4+6y+10x-15xy)$.
7. $(x+2y+2z)(x^2+4y^2+4z^2-4yz-2zx-2xy)$.
8. $(3a-b+2c)(9a^2+b^2+4c^2+2bc-6ca+3ab)$.

習題十 第44面

1. x^3+2x^2+4x+8.
2. x^4-5x^2+25.
3. x^3+x^2+x+1.
4. x^4+2x^2+4.
5. $x^8-x^4y^4+y^8$.
6. $(x+y)^3+2(x+y)^2+4(x+y)+8$.
7. $(a+b)^4-(a+b)^2(c+d)^2+(c+d)^4$.
8. $(a+c)^3+(a+c)^2(b-d)+(a+c)(b-d)^2+(b-d)^3$.

10. $x^6-2x^5+x^4-4x^3+x^2-6x$.
11. $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$.
12. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$.
13. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^3+x^3y^3+y^6)$.
14. $(x\ +y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8)$.

15. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$(x^4-x^2y^2+y^4)$.

16. $(x+y^2)(x^6-x^5y^2+x^4y^4-x^3y^6+x^2y^8-xy^{10}+y^{12})$.

17. $4b^3(2a-b^2)(4a^2+2ab^2+b^4)$.

18. $(x^3+4y^2)(x^{12}-4x^9y^2+16x^6y^4-64x^3y^6+256y^8)$.

19. $-2xy(x-y)(x+y)$.

20. $-xy(x-y)(x+y)(4x^2-5xy+4y^2)$.

21. $5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$. 22. $7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

23. $(x+a)(x-a)(x^4-3a^2x^2+a^4)$.

24. $(a+b)(a^2+3ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

25. $(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

26. $(x^2-y^2)(2x^4+2x^2y^2+y^4)$.

復習題二 第 46 面

1. (1) $4x^2(4y^3+5z)^2$; (2) $(x+a-b)^2$; (3) $(2x^2-3x-1)^2$;
(4) $(xy^2-a)^3$; (5) $(x+y+z)^3$; (6) $8x^3$.

2. 各等於$(x+y+z)^3$. 3. 0.

4. a^3. 5. $(ab-bc)^2+(b^2+ac)^2$.

6. (1) x^2-5x+6; (2) $ab+bc-ca$.

7. (1) $2x(a+b-c)$;
(2) $(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(b+c+d-a)$;
(3) $(1+x-y)(1-x+y)$;

(4) $(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$;

(5) $(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$;

(6) $(a^2+2bc)(a^4-5a^2bc+13b^2c^2)$;

(7) $9y^3(2x-y^2)(2x+y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4)$;

(8) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$;

(9) $(x-a-b)(x^2+a^2+b^2+ax+bx-ab)$;

(10) $(x-a)(x+a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$.

習題十一　第54面

1. $(x+2)(x+16)$.
2. $(x-2)(x-8)$.
3. $(x+2)(x-4)$.
4. $(x+3)(x-10)$.
5. $(x-3)(x+10)$.
6. $(a-3)(a-10)$.
7. $(a+3)(a+10)$.
8. $(x-7)(x+8)$.
9. $(x+7)(x-8)$.
10. $(x+4)(x-11)$.
11. $(m+2)(m+15)$.
12. $(m^3+9)(m+2)(m^2-2m+4)$.
13. $(x+4)(x-8)$.
14. $(1+4x)(1-8x)$.
15. $(x-3)(x+4)$.
16. $(x+4)(x-5)$.
17. $(x-1)(x+20)$.
18. $(y-8)^2$.
19. $(1+2x)(1+16x)$.
20. $(x-3)(x+6)$.
21. $(a+b+3)(a+b+5)$.
22. $(x+y-4)(x+y+5)$.
23. $(x^2+x+6)(x-1)(x+2)$.
24. $(x-1)^2(x+2)(x-4)$.

25. $(x^2+x+5)(x-1)(x+2)$.
26. $(x^2+x-8)(x-2)(x+3)$.
27. $x(x+5)(x^2+5x+10)$.
28. $(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$.
29. $(x^2-5x+16)(x+1)(x-6)$.
30. $(x^2-3x+12)(x+2)(x-5)$.

習題十二 第61面

1. $(x+1)(2x+3)$.
2. $(x+5)(7x+1)$.
3. $(x-3)(2x-1)$.
4. $(x-1)(2x-3)$.
5. $(x-2)(5x+1)$.
6. $(x-2)(3x-1)$.
7. $(x-1)(3x-2)$.
8. $(x+3)(5x+2)$.
9. $(x-3)(7x+2)$.
10. $(5x+3)(7x-4)$.
11. $(3x-4)(4x+5)$.
12. $(x-2)(6x+1)$.
13. $(3x-2)(5x+1)$.
14. $(2x-5)(7x-1)$.
15. $(x+1)(16x+27)$.
16. $(2x-1)(8x-27)$.
17. $(4x+1)(4x-27)$.
18. $(x+27)(16x-1)$.
19. $(xyz+3)(16xyz-9)$.
20. $(abc+9)(16abc+3)$.
21. $(ax+d)(bx-c)$.
22. $(x++1)(ax-b)$.
23. $(ax+b)(bx-a)$.
24. $(ax-c)(bx+c)$.
25. $(2ax-b)(2bx-a)$.
26. $(x+1)[(a+b)x-3b]$.
27. $[(a+b)x-a+b][(a-b)x+a+b]$.
28. $[(a+b)x+a-b][(a-b)x+a+b]$.
29. $(x+1)[(b+c-a)x+c+a-b]$.
30. $[(a-1)x+a][(a-2)x+a-1]$.

習題十三　第 66 面

1. $(x+4)(x+15)$.
2. $(x-4)(x-25)$.
3. $(x-3)(x+12)$.
4. $(x+7)(x-12)$.
5. $(3x-11)(4x-13)$.
6. $3(2x+3)(3x-1)$.
7. $(6x-7)(7x+6)$.
8. $(5x+7)(7x+2)$.
9. $(x-15)(x-16)$.
10. $(3x-16)(4x+9)$.
11. $(x-24)(x+54)$.
12. $(2x-37)(3x+19)$.
13. $(x-111)(x-112)$.
14. $(39x-5)(60x+7)$.

習題十四　第 74 面

1. $(x-5y)(x-15y)$.
2. $(x+3y)(x-35y)$.
3. $(x+4y)(x-29y)$.
4. $(m+12n)(m-15n)$.
5. $(x+6y)(6x+y)$.
6. $(a-6b)(6a-b)$.
7. $(3x-2a)(2x-3a)$.
8. $(3m-2n)(2m-3n)$.
9. $(2x+3y)(5x-y)$.
10. $(3x+5y)(5x-7y)$.
11. $(5x-4y)(6x+5y)$.
12. $(5x-a)(10x+a)$.
13. $(-17a+b)(11a+b)$.
14. $(3x-7y)(14x-5y)$.
15. $(x-27y)(x+56y)$.
16. $(15x-28y)(14x-5y)$.
17. $(x+y)[(a^2+ab+b^2)x+(a^2-ab+b^2)y]$.
18. $(x-y)[(a^2+ab+b^2)x+(a^2-ab+b^2)y]$.
19. $[(a-1)x+ay][ax+(a+1)y]$.

20. $[(a-1)x+ay][(a-2)x+(a-1)y]$.

21. $(2x+y-z)(x-2y+z)$.
22. $(3x-2y-5z)(x+y-z)$.

23. $(3x+5y+4z)(2x+3y-z)$.
24. $(x-7y+5z)(x-5y-2z)$.

25. $(2x-3y-2z)(2x-5y-2z)$.
26. $(2x-2y-5z)(x-3y+2z)$

27. $(3x+3y-z)(2x-y+2z)$.
28. $(5x+3y)(2x-4y-5z)$.

29. $(x+6y-4z)(x-2y+2z)$.
30. $(8x-3z)(5x+7z-3y)$.

習題十五 第 80 面

1. $(x-1)(x^2+3x+6)$.
2. $(x-1)(x^2-x-1)$.
3. $(x-2)(x^2-5)$.
4. $(x-1)(x^2+x+6)$.
5. $(x+3)(x^2-13x-1)$.
6. $(x+1)^2(x+2)$.
7. $(x-1)(x+1)(x+2)$.
8. $(x+1)(x-5)(2x+1)$.
9. $(3x+7)(x^2-2x+3)$.
10. $(x-1)(2x+3)(2x-3)$.
11. $(1+x)(4-6x+3x^2)$.
12. $(x+3)(2x-1)(3x+7)$.

復習題三 第 81 面

1. $(x-7)(x+9)$.
2. $(x+7)(x-9)$.
3. $(x+3)(5x-1)$.
4. $(x-3)(5x+1)$.
5. $(2x-5)(7x+3)$.
6. $(6x-1)(9x-2)$.
7. $(x-4y)(x-9y)$.
8. $(x+13y)(x-11y)$.
9. $(7x+4y)(7x-11y)$.
10. $4(x+2y)(3x-y)$.
11. $(x+10y)(x-12y)$.
12. $(4x-3y)(4x+21y)$.

13. $(x-2)(x-3)(x+4)$.
14. $(x-2)(x-5)(x+5)$.
15. $(x-3)(x+4)(2x+1)$.
16. $(x+1)(x-2)(3x+1)$.
17. $(x+7y+3z)(x+4y-2z)$.
18. $(2x+3y+2z)(3x+y-5z)$.
19. $(3x-y-z)(9x-7y-9z)$.
20. $(x-y+z)(11x+12y-15z)$.
21. $(7x-9y)(5x-3y+2z)$.
22. $(13+9y^2)(7-3x^2-5y^2)$.

習題十六 第84面

1. $(ax+y)(bx-y)$.
2. $2(ax-by)(ac-bd)$.
3. $2(x+2a)(x+3b)$.
4. $(ax+bx)(by+c)$.
5. $(c-d)(c+d)(a-b)$.
6. $(5y+3)(2x+y)$.
7. $(m-n)(x-n)$.
8. $(x+2a)(x+3b)$.
9. $(4x+5b)(2x+3a)$.
10. $(2a-b)(a^2+2bx)$.
11. $(2x+3y)(a^2+xy)$.
12. $(2x-3y)(a^2+xy)$.
13. $(x+1)(ax^2+bx+c)$.
14. $(x-a)^2(x+b)$.
15. $(x+a)(x+b)(x+c)$.
16. $(x+a)(x-b)(x+c)$.
17. $b(x+y)[ax+by-(a-b)z]$.
18. $b(x+y)[(a+b)z-ax+by]$.
19. $(ay-x)(a^2-ax+x^3)$.
20. $(a-b+c)(a+d)$.

習題十七 第88面

1. $(a^2c-1)(b^2c-1)$.
2. $(x+y-3)(x+2)$.
3. $(2a+10b+5)(3a+2b-3)$.
4. $(y-2x-a)(2y-x+a)$.
5. $(a+b-3c)(a-3b+c)$.
6. $(x+y-3z)(x-y+z)$.

7. $(b+c)(a-b)(a-c)$.

8. $(a+2x+x^2+1)(a+2x-x^2-1)$.

9. $(x-2b+ab)(x-2a-ab)$.

10. $(b-c)(a-b((a-c)$.

習題十八　第 90 面

1. $(x-2)(x^2-3)$.

2. $(x-2)(x^2+2)$.

3. $(x+2)(x^2+4)$.

4. $(2x-1)(x^2-2)$.

5. $(x-3)(x+3)(x-4)$.

6. $(x-1)(x+1)(2x-3)$.

7. $(x-1)(x-2)(x-3)$.

8. $(x+1)(x-2)(x-5)$.

9. $(x+10)(2x^2-11x+21)$.

10. $(3x+2)(x^3-7)$.

11. $(x+1)(x-3)(x^2+x+2)$.

12. $(x^2+11x-4)(x^2+9x+4)$.

13. $(x^2+1)(x^2+2x+3)$.

14. $(x-1)(x^4-2x^2+5)$.

15. $(x+1)(2x^4+3x^2+4)$.

16. $(x-1)(x-4)(3x+2)(x^2+x+1)$.

復習題四　第 91 面

1. $(x-1)(x+1)(x+a)$.

2. $(a-b)(a+b+c)$.

3. $(x+3)(2x+y+1)$.

4. $(ax+b)(cx^2+d)$.

5. $(2x+z)(x-y)^2$.

6. $(ab+c+d)(ac-d)$.

7. $(ab+1)(a^2+b^2-1)$.

8. $(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$.

9. $(c-a)(b-a)(bc+ca+ab)$.

10. $(x-z)(x+z)(y+z)(y-z)$.

11. $(x+1)(x-2)(x+2)$.

12. $(x-2)(x+3)(2x+1)$.

13. $(x-1)(x-2)(2x-1)$.

14. $(x+1)(x-2)(x-3)(x-5)$.

15. $(2x+1)^3$.

16. $(x-1)(x+1)(x^2+3x+1)$.

17. $(x-1)(x-2)(x+2)(x-4)$.

18. $(x-1)^2(x+2)(2x+1)$.

19. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$.

20. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$.

21. $(x+1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.

22. $(x-1)(x+1)(x-2)(2x-1)(3x^2-5x+3)$.

習題十九　第98面

1. $2a^3bc^3$.

2. $(a+b)(a-b)$.

3. $x-y$.

4. $(x-1)(x-2)$.

5. $a(a+b)$.

6. $a-b$.

7. $2x-1$.

8. $x-4$.

9. x^2+x-1.

10. $(x+1)(2x-3)$.

11. $x-1$.

12. $x^2(7x-9)$.

13. $x+2$.

14. $x+3$.

15. $3x-4$.

16. $1-4x$.

17. $3x+2$.

18. x^2+x+1.

19. $x+2$.

20. $x(x+1)$.

21. $x^2-2xy+4y^2$.

22. $(x-2)(x+3)$.

23. x^2-x+3.

24. x^2-3x+7.

25. $7x+1$.

26. $3x^2-7x+2$.

27. y^2-2y+5.

28. $x-1$.

習題二十　第103面

1. $30a^2b^2cx^4y^5$.

2. $(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)$.

3. $20(x-a)^3(x-b)^3$.　　4. $(x+3)^2(x-4)$.

5. $x(x^6-1)$.　　6. x^6-y^6.

7. $(x-y)(4x-y)(3x^2+y^2)$.

8. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(2x-5)$.

9. $6x(x+1)(x-3)(x-4)$.　　10. $3(x-3)^2(x^2-4)^2$.

11. $(x-2y)(x-3y)(x-4y)$.

12. $x(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$.

13. $3x-7$, $(2x^2+5x-3)(3x^3-13x^2+23x-21)$.

14. $2x^2+4x-1$, $6x^3+26x^2+25x-7$.

15. x^2-2x+1, $(x^2+2x-3)(x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2)$.

16. x^2+3x+1, $(2x-1)(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)$.

17. $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$.

18. $(x^2+3)(x^2+x+1)(2x^4-x^3+10x^2+45x+5)$.

19. $(x+1)^2(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)$.

20. $2(x-1)(x+2)(x+3)(x-2)^2$.

習題二十一　第106面

1. $\dfrac{3y}{x}$.　　2. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

3. $\dfrac{4ab}{(a-b)^2}$.
4. $x^2-y^2+z^2-2xz$.
5. $\dfrac{3x-5}{2x-3}$.
6. $\dfrac{x^2y^2-1}{4x^2y^2+1}$.
7. $\dfrac{2x+3}{(x-1)(x^2-x+2)}$.
8. $\dfrac{2x+1}{x-3}$.
9. $\dfrac{2x-7}{4x^2+8x+7}$.
10. $\dfrac{x^2+1}{2x^2-1}$.
11. $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-3x+1}$.
12. $2(1-xy)$.
13. $\dfrac{(x+y)^2+(x+y)+1}{(x-y)^2-(x-y)+1}$.

習題二十二　第112面

1. $4, -7$.
2. $\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$.
3. $12, -21$.
4. $\dfrac{32}{5}, -\dfrac{2}{3}$.
5. $\dfrac{23}{4}, \dfrac{9}{2}$.
6. $0, 3, -2$.
7. $1, -1$.
8. -1.
9. $2, -2$.
10. $3, -2$.
11. $1, -2$.
12. $-1, -2$.
13. $-1, -6$.
14. $0, -5$.
15. $1, -2$.
16. $-4, -6$.
17. 1.
18. $1, -1$.
19. $-1, -1$.
20. 1.

復習題五　第113面

1. $x+3$, $(x-2)(x+2)(x+3)(x-7)$.

2. $x+3$, $(x+3)(5x+1)(7x-1)(x^2+5)$.

3. x^2-5x+7, $(x^2+5x+7)(7x^4-40x^3+75x^2-40x+7)$.

4. x^2-3x+7, $(x-1)(x^4+3x^2+6x+35)$.

5. x^2-4x+3, $x^6-5x^5-17x^4+97x^3-8x^2-308x+240$.

6. $2x^2+3x+1$, $8x^8-12x^7-90x^6+123x^5+174x^4-138x^3-110x^2$
$+27x+18$.

7. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$.

8. 3.

9. $\dfrac{x^2-1}{2x^2-1}$.

10. $\dfrac{3x^2+5x+1}{2x^2+5x+3}$.

11. 2.

12. $\dfrac{a(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$.

13. $\dfrac{(x+y+z)^2}{2yz}$.

14. 1.

15. 5, -1.

16. -3.

17. 2, -2.

18. 1, -1.

19. $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{9}{2}$.

20. -1, -1, -1, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{2}$.

21. 4, 4.

22. 2, -2.

23. 1, -1, $\dfrac{5}{3}$, $-\dfrac{1}{3}$.

24. -2, -4.

25. -1, -2.

26. -1, -9.

27. 9, -6.

28. 1, -1.

29. 1, 1.

30. 1, -1, -2, $-\dfrac{1}{2}$.

31. 1, 1, −1, −1, −1.　　32. 1.

33. −1.

民國三十七年二月發

（一三六七四）