#3

426214

解析數學講義

古爾薩著
王尚濟譯

第一册

導來式及微分，積分，級數

國立北平研究院出版部印行

序

巴黎大學教授古爾薩(E. Goursat)氏所著之解析數學講義(Cours d'Analyse mathématique)一書,爲古氏在巴黎大學理學院所用之講義.自1902年出版以來,今已五版,每版多修訂改善之處.英德文均有譯本,凡治高等微積分及函數論者,或用作教本,或訂爲參考書,風行各國,幾三十年.是書包羅宏富,理解明析,誠近代數學界之名著也.

北平研究院出版部鑒於我國科學書籍之缺乏,因有編譯高等教科書及研究用參考書之議.適吾友王海帆君,譯成此書,遂由本院出版部印行問世,以供國內研究數學者之參考;卽不諳西文者,得此亦可獲得高深之解析數學知識,而盡窺其秘奧矣.王君昔遊法國,曾從學於古氏.今本其既往教授之經驗,積數年賡續不斷之精力,就法文原書第五版,而譯成中文.將來國中數學發達,解析進步,則皆此書及王君之所賜也.此書排印旣竣,因樂誌數語以爲序.

民國十九年八月李書華序于北平研究院總辦事處.

序

德國數學家哈爾納克(Harnack)嘗分數學爲二大類,曰解析學曰幾何學,近雖有非之者然巴斯嘉爾新編之高等數學提要(Pascal, Repertorium der Höheren Mathématik)仍宗其說,哈氏之是非姑置不論,解析在數學所佔地位之重要,當無疑義矣.自高失(Cauchy),拉葛耶謝(Lagrange),亞伯爾(Abel)倡明解析後,嗣響者多出於德法,故斯學之盛,自昔推此兩國.顧德人著書常喜分而不喜合,故對一解析而分爲集合論,微分學,積分學,微分方程式,函數論,積分方程式,變分法等等,甚至一函數論,而再分爲實數函數論,虛數函數論,橢圓函數論,球函數論,橢模函數論等等,分而又分,析而又析,在作者固自欲精益求精,在讀者則不免煩不勝煩.如遊五都之市,珍貨山積,難於擇取.法國數學家則不然雖亦著有專門撰述,然常匯萃諸門合成一書,所謂解析學教程者(Cours d'Analyse)自高失後之大家如羅蘭(Laurant),愒爾密特(Hermite)等,幾於人著一編,迨至今日雖已汗牛充棟,然世所

稱爲精深宏博者不外柔爾當(Jordan),畢加爾(Picard),古爾薩(Goursat)三氏之書每書各三巨册,而材料之豐富,證法之精確,思想之新穎,文筆之明暢尤以古氏爲最.是以其書甫出(1902)卽騰譽於美國數學界(見 Bulletin of the American Mathematical Society, 1903).而阿斯姑德(Osgood)患英文高等微積乏善本,慫恿赫德利克(Hedrick)譯成英文.余於民國二年在北大創辦數學系,卽取是書第一册爲高等微積分課本,第二册爲函數論課本,用之迄今十六七年,不但無人反對,且國內有名大學如廣州之中山,湖北之武漢,遼寧之東北,河南之中州等多相率而和之,故赫氏之書暢行於中國.實則其書缺點甚多,因其第一册爲原書初版,第二册爲原書再版,原書有無窮積(produits infinis)一卷初版在第二册之首,再版則移置於第一册無窮級數之末,英譯本自然遺漏於無形之中,以致講懷爾斯托辣斯(Weierstrass)整函數定理時失所依據,況古氏書今已五版,每版修訂,使趨時宜,英譯本則仍守其二十八年前之舊文,如陰函數之存在定理,古氏新說發明於 1903 年,後又屢次

改善,而是書之初版出於 1902 年,當然僅能用的尼(Dini)之舊法,他如先後照應之失宜,譯名之不一,皆因初版再版及時間倉卒之故,非可以深咎赫氏,惟是書通行幾三十年,而其書公司因見銷路之廣,迄今尙未聞有改版之說,似不得辭其責耳.德文近亦有譯本(Schwarz 所譯)雖較赫氏完美,惜我國學子習德法文者鮮,不得不奉赫氏書爲圭臬.幸吾友王海帆君毅然將古氏書之最新版譯成漢文,豈非我數學界一大快事哉.王君留學於巴黎,曾親炙於古氏,歸國後又在北大講授是書幾十載,今所出版者,蓋其曩日授諸生之講義,因習以崇之,賡續以終之,日積月累,聚而爲册,視赫氏所譯,其精粗固不待智者而後辨也.然欲版以行世,遍詢於諸書公司,初尙莫有應者,豈非惟曲高和寡,而獲利不厚歟,何中外書公司之見解之殊途同歸也.今幸北平研究院欲提倡高等科學,助王君付其譯稿於剞劂氏,印成而囑叙於余,余因爲我國學子慶曰,是書不但漢文舊有之微積分學無其匹儔,即求之西文亦不多得,我國學子讀漢文當易於英文,王君所譯又勝於赫

氏，異日我國數學進步，月異而歲不同，浸假而追及德法諸國則是書當大有功焉.

民國十九年九月馮祖荀叙於北陵之東北大學.

譯者自序

是書爲法國巴黎大學古爾薩氏所作,即該氏所授解析數學講義.各國大學多有採用爲課本者.全書共三册,第一册爲微分,積分,級數及關於幾何的應用;第二册爲解析函數,常微分方程式及第一級偏微分方程式;第三册爲極近積分,第二級偏微分方程式,積分方程式及變分法.近數年來,余在北京大學所授高等微積分及函數通論即譯用此書第一册及第二册爲課本.

原書第一册及第二册均有英文譯本,但所譯者第一册係原書第一版,第二册係第二版,距今垂三十年,較之最近新出第五版不但章節的次第教材的增減多有不同,即理論方面亦有重要的改革,如關於陰函數的存在的證明及解析的延長等等.

余於民國十一年始譯此書由北大印刷所印製講義,每遇原書出一新版卽據以改正,閱數年將原書第一册及第二册前半悉依最新版本譯印.是項講義拘於價格之低廉及時

間的迫促,印刷不免有訛誤支離之憾,僅足以輔助學生筆記而已,然而我國各大學亦有購用爲課本者.

現在高等科學書籍出版最感困難,經濟方面,則譯著者類皆寒畯無力自辦,而營書業者以其無利可圖不願投資;技術方面,則手民無科學知識及經驗難於勝任.卽以此書而論,亦曾與某某書局某某印刷所訂約已非一次,但皆不克履行,卽此之故.

民國十八年北平研究院成立,當局者鑒於中文科學書籍之重要,對於上述出版之困難擬有以救濟之.爰有編譯高等科學書籍之議,而允將余所譯是書由研究院印行問世,由十八年十月起閱十月書成,中國數理學會會長馮君漢叔,北平研究院副院長李君潤章慨允爲之序;是書得二君之言益當見重無疑,而余亦借以掩其謭陋於萬一,抑何幸也.姻姪杜君宏遠肄數學業於北大,擔任校對,備極詳盡,余並於此深致謝意.

中華民國十九年七月王尙濟書於溫泉.

原書第一版著者自序

此書差不多就是我在理學院所用講義的概要.因為要將凡關於實數函數的理論除微分方程式外都彙在一册.所以有若干處我稍微變更教授時所遵的次序.微分的記法不在特別數學班(classe de Mathèmatiques spéciales)課程以內,我將這個記法從首陳述,但是假定閱者已知導來式(dérivée)的運算.

解析數學顯然是連續(continu)的科學,似乎凡一個解析講義當始於無理數(nombre irrationnels)的研究.然而我假定閱者已經具此觀念.因為不可通度數(incommensurables)的理論載在許多知名的著作,至為詳備,我以為無須復述.至於其牠根本觀念,為解析的基礎,如上限(limite supérieure),有定積分(intégrate définie),二重積分(intégale double)等等,我盡力以嚴密的理論將此等加入,自然這些理論仍是初級的(élémentaire),並未要達到一個教科書範圍外所無須的普遍性(généralité).

在此書中有些節字體較小,或是推廣的

舉例,或是補充正文,閱者在初讀時可以越過並無窒礙.在每章之末附有若干個習題.其中大半能直接應用該章所陳的方法,都是考試時所曾經作爲試題的.此外每一題前加有星點的,都是較爲難作,多數的是採自專集,閱者可自己尋閱.

師範學校(E'cole Normale)我的兩個舊生耶密爾葛冬(Emile Cotton)及若望克來蘭(Jean Clairin)助我校對,我於此深致感謝.

一千九百二年一月二十七日　古爾薩.

原書第二版著者自序

此次再版較初版多所變更,茲將其最重要者畧爲舉出.

有理函數及幾個其牠的普通函數的積分法,一個平曲線的曲度(courbure)及閉縮線(développée)的研究,現已列入特別數學班的課程中,我以爲删去此等初級問題絕無窒礙.在初版中,連續函數的普通性質及自集合論(théorie des ensembls)中所取的概念是散見於各章.我覺得將這些理論彙爲第一章作爲緒論(introduction)更容易理會此精密的連屬性.初讀此緒論時或者感覺過於抽象(abstrait),然此緒論對於讀以後各章時並非不能離卻的.我簡直請閱者初次研究解析數學時,在此第一章中只取其定義及定理,若是以後感到有嚴格的需要時,再回讀其證明法.

各爾奴布爾(Grenoble)的理科教授耶密爾葛冬及里爾的理科教授若望克來蘭仍助我校對;我再致我的誠懇的感謝.

一千九百十年五月二十一日.

古謝薩.

原書第四版著者自序

此一版和前版無大區別.關於兩曲面上點的相應法我增加數頁,其中多半是關於能合曲面(surface applicables)的理論.牠一方面,爲不增加書的篇幅計,我删去幾個附帶問題,例如數 e 的超越性,假橢圓積分 (intégrale pseudo-elliptique)等等,這些問題雖關重要,但非肄學士業者所必不可少的.爾內高斯繼續助我校對,我並於此深致謝意.

一千九百二十三年九月十六日.

古爾薩.

例言

(一)是書原本共三册,第一册共十二章,前九章爲微積分及級數,後三章爲關於幾何的應用;現在所出此册卽其第一册之前九章,其後三章及原書第二册之前半現已脫稿正籌付印.至於原書第二册後半及第三册正在續譯.

(二)原書有大小兩種字體,示讀者在第一次讀此書時可以略去小字部分,註解及習題亦均用小字.現在譯本對於原文係用小字部分一律加框以別之.

(三)原書凡令人注目之處均用斜字體,現在譯本則加橫綫於每字之下.

(四)所有專門名詞均於首見時兼書原文於譯名之下.

(五)爲印刷之便,將每頁下所有註解均移在每章之末,加〔註一〕,〔註二〕,…等號,以便檢查.

目　錄

第　一　章

緒　論

第　二　章

導來式及微分

第 三 章

陰函數.最大及最小.變數的更換.

第四章

有定積分

第五章

有定積分的計算法

第 六 章

二 重 積 分

第七章

複積分.全微分的積分法

第　八　章

級數及無限積

第九章

整級數.三角級數

解析數學講義

第一章

緒論

I.——極限 (limite.).——集合 (ensemble).

自整數的觀念逐漸達於有理數,無理數及代數數的觀念.我們假定閱者已經有了這些觀念,並假定閱者已知道代數運算的理論,以及數在具體量(grandeurs concrétes)的度量上的應用.〔註一〕

1. **極限.**—— 設有一個變數 x 及一個定數 a,若是差數 $x-a$ 的絕對值 (valeur absolue) 終至於小於且永久小於一個預定的已知正數,我們說變數 x 的極限是 a,或說變數 x 漸近於 a. 在 $a=0$ 時,變數 x 叫做<u>無限小</u> (infiniment petit). 所以說 x 的極限是 a 或是說差數 $x-a$ 是無限小是一樣的.要証明一個數 x 的極限是一個數 a,通常的是分差數 $x-a$ 為許多部分,譬如是三部分罷,我們証明此每一部分都終至於永久小於 $\frac{\varepsilon}{3}$, ε 是一個任意正數.

此類的証法是我們以後所常用的,也叫做<u>ε 的証法.</u>

有時也常用一個不通而甚便利的成語,說 x 的極限是 $+\infty$ 或 $-\infty$, 或說 x 漸近於 $\pm\infty$. 譬如說 x 的極限是 $+\infty$, 就是說終至大於且永久大於一個預定的任意正數 A,並非是說差數 $(+\infty-x)$ 漸近於零,因為如此說法是毫無意義的.

同樣,一個幾何形 (figure géométrique) 牠的形狀或位置是能

變化的,我們也常說這個幾何形的極限是某一個定形(figure fixe).在每一場合,若要將以上所宣告的更加確實,就必須用一個或多個變數表此定形及此變形的差,以上的宣告就是說在一定條件內這些變數都漸近於零.茲舉一例,在一個曲線 C 上我們取相鄰二點 M 及 M',在 M' 點沿曲線 C 向 M 點無限接近時,我們說弦 MM' 的極限位置是在 M 點的切線 MT,此二直線 MM' 及 MT 既相交於定點 M,自然當取此二直線所作的銳角 α 爲牠們的相差的量.用解析的術語,以上所宣告的命題就是說若是 MM' 的距離小於一個適宜選擇的長度 η 時,角 α 將小於一個任何已知角 ε

2. 隔 (coupures).—— 我們假定不論用何方法,已將正數及負數的集合分爲兩類 A 及 B,可是這個分類法必能滿足以下的條件:

1° 兩類中的數都是存在的;

2° 凡一個正數或負數必屬於兩類中的一個;

3° A 類中的任一數必小於 B 類中的任一數.

由此最後條件可見若是一個數 a 屬於 A 類,凡小於 a 的數也都屬於 A 類,反之,若是一個數 b 屬於 B 類,凡大於 b 的數也都屬於 B 類.所以這兩類都含有無限的有理數 (nombres rationnels) 及無限的無理數 (nombres irrationnels).

我們將証明有一個數 L 存在,牠具有以下的兩個性質:

1° 凡小於 L 的數都屬於 A 類;

2° 凡大於 L 的數都屬於 B 類.

這一個分開數 L 的存在是無理數的觀念的一個結果.誠然,

在 A 及 B 兩類中我們但注意於有理數,如此,有理數的全體就分爲兩類 (α) 及 (β),凡一個有理數必屬於兩類中的一個,(α) 類的一個有理數必小於 (β) 類的任一有理數.有許多場合可以發生,我們將以次加以考慮.

I. (α)類中能沒有一個有理數 $\frac{p}{q}$ 大於同類中一切別的有理數.這就是此有理數 $\frac{p}{q}$ 牠是此分開數 L. 誠然, $\frac{p}{q}$ 既是 A 類,所以凡小於 $\frac{p}{q}$ 的數 a 都是 A 類,凡大於 $\frac{p}{q}$ 的數 b 都是 B 類.若是 b 是有理數這就是顯而易見的;若是 b 是無理數,我們就在 $\frac{p}{q}$ 及 b 中間取一個有理數 r. 這個有理數 r 當是 B 類,所以 b 也是 B 類.

II. 若是(β) 類中有一個有理數 $\frac{p'}{q'}$ 小於同類中其牠的一切有理數,同樣可見凡小於$\frac{p'}{q'}$的數都是 A 類,凡大於$\frac{p'}{q'}$的數都是 B 類.$\frac{p'}{q'}$是此分開數 L.

III. 也能夠是(α) 類中沒有一個有理數能大於同類中其牠的一切有理數,(β) 類中也沒有一個有理數能小於同類中其牠的一切有理數.在此時,這個將有理數分爲(α)及(β)兩類這個分法定出一個無理數 l,牠大於(α)類中一切有理數,小於(β)類中一切有理數.這是這個無理數 l 牠是分開數 L. 誠然,依此無理數的定義,凡小於 l 的一切有理數都屬 A 類,凡大於 l 的一切有理數都屬 B 類.現在我們取一個無理數 $l' < l$, 設 r 是在 l' 及 l 中間的一個數; r 既是 A 類,所以 l' 也是 A 類,同樣可見一切大於 l 的無理數都是 B 類.

我們方纔所證明那個存在的數 L 也叫做一個隔.牠能夠屬於 A 類,也能夠屬於 B 類.在我們所考慮的第一場合牠是 A 類,在

第二場合是 B 類,在第三場合牠或是 A 類或是 B 類.

這個隔的觀念常發現在許多普通數學的問題中.例如一個級數牠的公項是 $n^{-\mu}$;若是將使此級數是開發的一切數 μ 歸入 A 類,將使此級數是收斂的一切數 μ 歸入 B 類,我們即能分所有數為兩類,這個分類法自然能滿足所要的條件,此處 $L=1$, 牠屬於 A 類.

3. 限制集合(ensembles bornés).——我們已經屢次用集合這個名詞,集合的意義除了舉幾個例子外也無須再給牠甚麼定義,凡一組的事物數目是有限或無限都成為一個集合;例如整數的集合,有理數的集合,一個平面上的直線的集合等等.此時我們只論數的集合.若有一個數 a 大於一個集合 (E) 的一切數,我們說這個集合 (E) 是上面限制的;若是有這麼一個數,自然就有這麼無限的數;凡有此性質的一個數都叫做集合 (E) 中的數的上限(limite supérieure). 同樣若有一個數 b 小於一個集合 (E) 中的一切數,我們說這個集合 (E) 是下面限制的;凡有此性質的一個數都叫做此集合的下限 (limite inférieure). 一個集合上下都有限制的叫做限制集合.正數的集合是下面有限制的;負數的集合是上面有限制的;在 O 及 1 間的數的集合是兩方都有限制的;正負數的集合是兩方都沒限制的.

設 (E) 是上面有限制的一個集合,關於此集合 (E) 我們能將一切的正負數分列在 A 及 B 兩類中.今有一個數 x, 若是 (E) 中有一個數或許多數大於 x, 我們就說 x 是 A 類;若是 (E) 中沒有一個數能大於 x 的,我們說 x 是 B 類.集合 (E) 既是上面限制,可見這兩類的數都存在,又可見 A 類中任一數都小於 B 類中任一

數.設M是此兩類間的分開數.此數M具有以下的兩個性質:

1° 集合(E)中沒有一個數大於M;

2° 無論正數ε如何,集合(E)中總有一個數大於$M-\varepsilon$.

誠然,我們假定(E)中有一個數

$$M+h \qquad (h>0)$$

大於M,那麽,$M+\frac{h}{2}$牠當屬於A類這是不合理的.牠一方面,ε旣是一個任何正數,$M-\varepsilon$當是A類,所以(E)中至少有一個數大於$M-\varepsilon$.

如此所定的數M叫做集合(E)的精確的上限 (borne supérieure précise), 或簡稱爲上限.此數M牠自己能夠屬於集合(E);此集合若是由n個數所成,這個事實是必然的(n是有限).然若是(E)包有無限的數,這個上限就不一定在此集合內.例如平方不過於2的一切有理數的集合;上限是無理數$\sqrt{2}$,就不在集合內.反之,平方不過於2的有理數及無理數的集合,上限仍是$\sqrt{2}$,然此數就在集合內.我們須注意,M不在集合(E)內時,無論ε如何小,(E)中總有無限的數大於$M-\varepsilon$.這是因爲若只有有限的數大於$M-\varepsilon$,這就是這些數中最大的一個牠是(E)的上限了.

在集合(E)下面限制時,同法能證明有一個數m具有以下的兩個性質:

1° (E)中沒有一個數小於m;

2° 設ε是一個正數,(E)中總有一個數小於$m+\varepsilon$.

此數m是集合的下限.

這是很顯明的,只能有一個數具有m的這兩個徵象性質 (propriétés caractéristques), 對於M也是如此.

4. **最大極限** (la plus grande des limites).——設(E)是一個限制集合,具有無限的數,關於此集合我們能用另一方法將一切的正負數分爲A'及B'兩類.若是(E)中有無限的數大於一個數x,我們就說此數x是A'類.在相反的場合,我們說x是B'類.集合(E)既是限制的,又具有無限的數,可見有兩類的數存在,又可見A'類中的任何數必小於B'類中的任何數.設Λ是A'及B'二類間的分開數;依高失(Cauchy),這個數Λ叫作(E)中的數的最大極限.設ε是一個任何正數依Λ的定義,$\Lambda+\varepsilon$是B'類,$\Lambda-\varepsilon$是A'類,所以(E)中總有無限的數在$\Lambda-\varepsilon$及$\Lambda+\varepsilon$中間,然只有有限的數(或是零)大於$\Lambda+\varepsilon$.

> 此數Λ附屬在一個重要問題上.
>
> 爲便於講明,對於一個數a我們在一個直線$x'x$上取一點和牠相應,此點的橫坐標是a,我們用同一字母表軸上的一點及此點的橫線.如此,凡數的一個集合,都有點的一個集合在直線上和牠相應.這個集合也可叫做直線集合(ensemble linéaire).一個限制集合的所有點都在軸的一個線分(segment)上,此線分的長度是有限的.設有一個直線集合(E),若是在一點l附近,集合中有無限的點存在,或用更加嚴密的術語說:若是ε是一個任何正數,集合中總有無限的數在$l-\varepsilon$及$l+\varepsilon$中間,此點l就叫極限點(point limite)或凝集點(point d' accumulation).
>
> 我們方纔所定這個橫線是Λ的點顯然是集合(E)的一個極限點;我們將見凡一個直線的限制集合若有無量數的點,至少有一個極限點.

這是一個普通命題的一個特殊場合,這個普通命題叫作包羅薩奴 (Bolzano) 的定規,這個定規說凡一個限制集合,若有無量數的點在一個任有若干度(dimension)的空間內,至少要有一個凝集點,就是說無論 ε 如何小,集合 (E) 中總有無量數的點牠們到此凝集點的距離都小於 ε. 在直線集合所用的証明法能推廣在此普通場合上;我們現在略述對於一個平面集合的証法.

設 (E) 是在一個平面上的無量數的點的一個集合,這些點的坐標都在兩個定數 A 及 B 中間,若(x,y)是此集合中一點的坐標;這些數 x,y 成為兩個限制的直線集合 (E_x), (E_y). 若兩個集合中有一個由有限的各別的價值所成,譬如是 (E_x) 罷,集合 (E) 中就有無量數的點都有相同的橫坐標,結果,這些點成為一個直線集合,牠必有一個極限點,若 (E_x), (E_y) 都由無量數的點所成,譬如 X 是(E_x)的最大極限;由 X 的定義,無論 ε 如何小,(E) 中總有無量數的點牠的橫坐標都在 $X-\varepsilon$ 及 $X+\varepsilon$ 中間,直線 $x=X$ 上的點又可以分為兩類;設 ε 是一個任何小數,此直線上一點縱坐標是 y, 若集合 (E) 中有無量數的點橫坐標在 $X-\varepsilon$ 及 $X+\varepsilon$ 中間,縱坐標又都大於 y, 我們就說此點是第一類的;若 ε 有充分小時,集合 (E) 中沒有無量數的點橫坐標在 $X-\varepsilon$ 及 $X+\varepsilon$ 中間,縱坐標又都大於 y, 我們就說此點屬於第二類,設 Y 是此二類的分開數,η 是一個任何正數,ε 是一個有充分小的又一正數,(E) 中總有無量數的點縱坐標在 $Y-\eta$ 及 $Y+\eta$ 中間,橫坐標 $X-\varepsilon$ 及 $X+\varepsilon$ 中間,這是很

明瞭的無論正數 ε, η 如何都是一樣,(X, Y) 誠然是集合 (E) 的一個凝集點.

集合 (E) 的凝集點所成的集合叫做導來集合 (ensemble dérivé), 表以 (E').

5. 收歛叙列 (suites convergentes).——設有一叙列 (suite) 含有無限的數

(1) $$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \ldots, \quad s_n, \ldots,$$

每一數都佔有一個確定的行列;若是 n 增長無限時, s_n 漸近於一個極限,這個叙列就說是收斂的.凡非收斂的叙列叫做開發的 (divergente). 一個開發的叙列或者是因爲 $|s_n|$ 永久大於一個任何預定的數,或者是因爲 s_n 的絕對值雖非增長無限,然 s_n 並不漸近於任何極限.

凡一個升叙列 (suite croissante) 若是牠的公項 (terme général) 非增加無限,就是收斂的.

這是誠然,叙列 (1) 中的一切數成爲一個限制集合 (E). 設 M 是此集合的上限, ε 是一個任何正數,叙列 (1) 中總有一個數 s_m 大於 $M-\varepsilon$. 對於 n 大於 m 的一個價值,都是 $s_n \geqq s_m$, 因而 $M-\varepsilon < s_n \leqq M$.所以若是 $n>m$, 差數 $M-s_n$ 就小於 ε; 這等於說在 n 增加無限時, s_n 的極限是 M. 同法可証明凡一個降叙列 (suite dècroiss-ante) 若是牠的公項永久大於一個定數,就是收斂的.〔註二〕

一個叙列的收斂性的總標準 (critérium gènèral) 很容易由最大極限的注意演出.

欲使敘列(1)是收斂的,必須要然只須要對於任一正數ε,必能求得一個相應的數n,使差數$s_{n+p}-s_n$無論整數p如何,牠的絕對值都小於ε.

這個條件是必要的.誠然,若是n增長無限時,s_n的極限是S,我們能夠求得一個數n有充分的大,使一切差數$S-s_n$, $S-s_{n+1}$, $\cdots$, $S-s_{n+p}$的絕對值都小於$\frac{\varepsilon}{2}$ 所以差數$s_{n+p}-s_n$的絕對值無論p如何都小於$2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

這個條件是充足的.誠然設ε是一個任何正數,由假定,有一個整數n能使不論p如何$s_{n+p}-s_n$的絕對值都小於ε.因此,所以敘列(1)的各項自s_n起都是在$s_n-\varepsilon$及$s_n+\varepsilon$中間;那麼,敘列(1)只有有限的項不在區域$(s_n-\varepsilon, s_n+\varepsilon)$以內,所以此集合的最大極限$S$不能小於$s_n-\varepsilon$,也不能大於$s_n+\varepsilon$.所以$|s_n-S|\leqq\varepsilon$;自恒等式

$$s_{n+p}-S=(s_{n+p}-s_n)+(s_n-S),$$

可見$s_{n+p}-S$的絕對值不論p如何都小2ε,但是ε是一個任意正數,所以s_n的極限是S.

若是敘列(1)只含有k個相異的數,欲此敘列是收斂的,顯而易見的是自某項以後所有各項都相等,所以此特別場合也含在此總標準以內.

設有一個無限敘列,牠的公項是u_n,又有一個級數,(série)

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots \tag{2}$$

若是由此級數各項的和所成的敘列

$$s_0=u_0,\quad s_1=u_0+u_1,\cdots,\quad s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

是收斂的,此級數也就是收斂的.設S是此第二個敘列的極限,就

是說在 n 增加無限時,和數 s_n 所漸近的極限;S 叫做上面的級數的和,我們用等式

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{\nu=0}^{+\infty} u_\nu$$

表此關係.

非收斂的一個級數叫做開發級數.

所以辨認一個級數是收斂的或開發的就在於辨認由連續和所成的敍列 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ 是收斂的或是開發的.倒過來說,欲知一個任何無限敍列

$$s_0,\ s_1,\ s_2, \cdots$$

是否是收斂的,只須考慮級數

$$s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) + \cdots,$$

這是因爲此級數的 $(n+1)$ 個初項的和等於上面的敍列的公項 s_n.這個注意是常常應用的.

一個無限敍列的收斂性的標準應用在級數上,產出高失的收斂性的定規.欲使一個級數是收斂的,必須要然只須要對於任何正數 ε,能求得一個整數 n,使自 u_{n+1} 以後任取若干項的和的絕對值必小於 ε.

誠然,差數 $s_{n+p} - s_n$ 是級數(2)自 u_{n+1} 以後 p 個連續項的和.同樣,關於升敍列的定理應用在級數上,產出以下的命題,在研究級數時極爲有用:

欲使一個正項級數是收斂的,必須要且只須要一切和數 s_n 都小於一個定數.

注意.——取一個敍列(1)不論是收斂的或開發的,但是牠的

項成爲一個限制集合(E),我們總有無量數的方法自此敍列中取一個收歛部分敍列.誠然,設S'是集合(E)的一個極限點.試取一列的下降的正數$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_n$和$\frac{1}{n}$同時漸近於零.對於此敍列中一個數$\varepsilon_n$,我們能夠取所設敍列中一個數$s'_n$和牠相連使$|S'-s'_n|$小於$\varepsilon_n$及$|S'-s'_{n-1}|$如此卽得一個新敍列爲第一個敍列所包含,因爲牠的極限是S',所以牠是收歛的.這是很明瞭的,若級數(2)是收歛的,凡自(1)中所取的部分敍列就也是收歛的,牠的極限相同.

這個推理不但可應用在線的集合的所有點上,並且可以應用在一任何限制集合的所有點上.設(E)是在平面上的一個限制集合,M是此集合的一個極限點,我們有無量數的方法在(E)中選些點$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,使距離$MA_n$和$\frac{1}{n}$同時漸近於零.

我們將最大極限的名稱給Λ(n°4)這個理由可自己徵實;我們不能在一個線的限制集合中取一個數的收歛敍列使牠的極限是$\Lambda+h$ $(h>o)$,這是因爲在這個集合中只有有限的數大于$\Lambda+\frac{h}{2}$的緣故.

II 函數 fonction.——概論

6. 定義—— 函數這個名詞近世的定義是高失及黎曼(Riemann)所定,對於x的一個價値,若是y有一個價値和牠相應,y就說是x的函數.我們用等式$y=f(x)$表此關係.以後所研究的函數多半是由解析法(alytiquement)定的,就是將自x的價値求y的價値時所須要的運算指明.然而在推理上,通常的和這個情形不相干.設a及b是兩個定數$(a<b)$;對於x在a及b間的一個數,若y有一個數相應,我們說函數$f(x)$是確定在區域(a,b)

內的,差數 $b-a$ 是區域的廣度 (amplitude),a 及 b 是區域的限 (limites)或界 (frontières). 關於此二數 a 及 b 可以有許多假說 (hypothése); 此二數可以看做區域 (a,b) 的一部分,此區域就叫做閉區域.此二數中的一個或兩個可以看做不屬區域 (a,b) 以內,此區域就叫做開區域.例如 x 的一切價值能滿足條件 $o\leqq x\leqq o$ 的所成的集合就是一個閉區域;若條件是 $o<x<1$,或 $o<x\leqq 1$,x 的一切價值所成的集合就是開區域.自此以後,凡說一個函數確定在區域 (a,b) 內除有特別標明的不計外,都是指閉區域而言,就是對於 a 及 b 二數的自身,y 也有兩個數 $f(a)$ 及 $f(b)$ 相應.

設 (E) 是函數 $f(x)$ 在 (a,b) 區域內的一切價值所成的集合;若是此集合是限制的,函數 $f(x)$ 也就說在此區域內是限制的.以上所定的二數 M 及 m 也說是 $f(x)$ 在此區域內的上限及下限;差數 $\triangle=M-m$ 叫做限差 (oscillation).

這些定義產出幾個注意.若要一個函數在 (a,b) 區域內是限制的,若但是對於 x 的每一價值,牠的相應價值都是有限的,這不是充足的條件.例如一個函數 $f(x)$ 在 0 及 1 中間牠的定法是

$$f(o)=o,\quad f(x)=\frac{1}{x},\qquad \text{對於}\ x>o,$$

牠對於 x 的每一價值都有一定的價值,然而依我們所定限制這名詞的定義,此函數就不是限制的,這是因為若取 $o<x<\dfrac{1}{A}$,即得 $f(x)>A$.

一個限制函數在 (a,b) 區域內,牠的價值能彀和上限 M 或下限 m 相差極少,然而牠並不一定達於 M 或 m 的價值.例如函數 $f(x)$ 在 $(o,1)$ 區域內為以下的條件所定:

$$f(o)=o,\quad f(x)=1-x,\quad o<x\leqq 1$$

此函數的上限是 $M=1$，然而牠永不能達到這個價值.

7. **連續性**(continuite').—— 連續性的近世定義也是高失所創.〔註三〕

設 $y=f(x)$ 是定在 (a,b) 區域內的一個函數;在此區域內,我們取一個價值 x_0 及一個相隣的價值 x_0+h. 在 h 的絕對值漸近於零時,若是差數 $f(x_0+h)-f(x)$ 漸近於零,函數 $f(x)$ 就說對於 $x=x_0$ 是連續的.依極限的定義,我們又可以說:對於任何小的正數 ε,若能求得牠一正數 η, 凡 h 的絕對值小於 η 時,必能得着

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

此函數對於 $x=x_0$ 就是連續的.若是一個函數 $f(x)$ 對於 x 在 (a,b) 區域內的一切價值都是連續的,又若是 h 由正值漸近於零時,差數 $f(a+h)-f(a)$, $f(b-h)-f(b)$ 都漸近於零,我們就說此函數 $f(x)$ 在 (a,b) 區域內是連續的.

代數學內證明多項式,有理函數,指函數,對函數,三角函數及反函數除對於變數的某某特別價值外都是連續的.從定義上可見任有若干連續函數的和或積也都是連續函數;兩個連續函數的商也是如此,但是對於變數的價值令分母爲零時是例外.然而所當注意的,兩個連續函數的商,對於分母的一個根能夠是不連續 (discontinue), 可是仍能夠是有限制的 (borne'). 例如除式 $\frac{|\sin x|}{x}$ 隨着 x 由正值或由負值漸近於零時,此函數漸近於 ± 1.

在一個平面中作兩個坐標軸 Ox 及 Oy, 及一個連續線 C, 此線是作爲沒有厚的;若是 Cy 的一個平行線和此線相遇不能多於一點, C 上一點 M 的縱坐標 y 就是此點 M 的橫坐標的連續函數.設 $y=f(x)$ 是此連續函數;我們說曲線 C 表函數 $f(x)$. 然而反

過來說,凡連續函數不能盡爲此類的圖解所表.有人已經證明有些連續函數具有無限的最大及最小 (maxima et minima) 在一切區域內.這是很明瞭的,我們不能畫出一個連續線表無量數次的上升下降在兩個縱坐標之間,此兩個縱坐標相去如何近不論.由此可見對於發現連續函數的性質,圖解是一個直覺的良法,然而牠不能給此等性質一個嚴密的証明.

8. **連續函數的性質.**——專據連續性的定義得着關於連續函數幾個定理.這些定理是以後常援用的.

設 $f(x)$ 是區域 (a,b) 中一個連續函數.依連續的定義,x 既是此區域內一個確定的點,對於任一正數 ε, 我們能夠取牠一個正數 θ, 和牠相連,使 $|h|<\theta$ 時

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon,$$

$x+h$ 這個數是假定在區域 (a,b) 內的.

這是很明瞭的,有無量數的數都能滿足這個條件.我們用 $\theta(x,\varepsilon)$ 表這些 θ 的上限.

如此,設 ε 是一個確定的正數,對於 x 在區域 (a,b) 內每個價值都有一個正數 $\theta(x,\varepsilon)$ 相應.

定理 I.——這些數 $\theta(x,\varepsilon)$ 的下限是一個正數.

這是很明瞭的,我們只須證明這個下限不能成爲零.誠然,我們若假定這個下限是零,因爲對於 x 的任何價值這個下限總是不能達到的,我們就在此區域 (a,b) 以內求得無量數各別的點 x'_1, $x'_2,\cdots$, $x'_n,\cdots$, 使 $\theta(x'_n,\varepsilon)$ 和 $\frac{1}{n}$ 同時爲零,這些點 x'_n 的集合 (E) 既是限制的,至少有一個極限點 λ, 牠也在 (a,b) 區域以內,對於 $x=\lambda$, 函數 $f(x)$ 既是連續的,設 k 是一個正數,在 $|h|<k$ 時,

$$|f(\lambda+h)-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

設 x' 是區域 $(\lambda-\frac{k}{2},\lambda+\frac{k}{2})$ 內一個任何數,也在區域 (a,b) 內,我們很容易驗明這個數 $\theta(x',\varepsilon)$ 至少等於 $\frac{k}{2}$. 誠然若正數 h 小於 $\frac{k}{2}$. 我們有

$$|x'+h-\lambda|<k, \qquad |x'-\lambda|<k,$$

$$|f(x'+h)-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(x')-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因而 $|f(x'+h)-f(x')|<\varepsilon$ 所以集合 (E) 中不能有無量數的點在區域 $(\lambda-\frac{k}{2},\lambda+\frac{k}{2})$ 內,由此看來,若假定 $\theta(x',\varepsilon)$ 的下限是零,我們就有了矛盾,所以這個下限是一個正數 η, 這個定理又有宣告如下:

<u>對於任一正數 ε, 我們有一個正數 η 相應,設 x' 及 x'' 是區域 (a,b) 內任何二數,只要 $|x'-x''|<\eta$, 我們必有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$</u>

為表明這個性質,我們說 $f(x)$ 在區域 (a,b) 內是均一連續的.

系.——如前所論,這個數 η 既已確定,若差數 $|x'-x''|$ 小於 $p\eta$, 這是很明瞭的我們也必有 $|f(x')-f(x'')|<p\varepsilon$. 所以凡在區域 (a,b) 內的一個連續函數,都是此區域內一個限制函數.

<u>定理 B.——在 (a,b) 區域內一個連續函數,對於 x 在 a 及 b 間的一個價值,至少將 $f(a)$ 及 $f(b)$ 間的任何價值取得一次.</u>

我們先取一個特別場合,假定 $f(a)$ 及 $f(b)$ 的符號相反,譬如 $f(a)<0$, $f(b)>0$. 我們將証明在 a 及 b 間 x 至少有一個價值能令 $f(x)=0$. 誠然,在 a 的附近, $f(x)$ 是負,在 b 的附近, $f(x)$ 是正; x 在 a 及 b 間的一切價值中,我們注意能令 $f(x)$ 為正的那些價值所成的集合;設 λ 是此集合的下限 $(a<\lambda<b)$. 依下限的定義,若 h 是正數, $f(\lambda-h)$ 就是負或零; $f(\lambda)$ 也是 $f(\lambda-h)$ 的極限,所以也是

負或零.他一方面,$f(\lambda)<o$是不合理的.我們假設$f(\lambda)=-m$,m是正數,函數$f(x)$對於$x=\lambda$既是連續的,我們必能求得一個數η,在$|x-\lambda|<\eta$時,就得着$|f(x)-f(\lambda)|<m$;如此,對於x在λ及$\lambda+\eta$間的價值$f(x)$就成爲負了,λ就不是x能令$f(x)$爲正的一切價值的下限.所以$f(\lambda)=o$.

現在設N是$f(a)$及$f(b)$間的一個數.函數$\varphi(x)=f(x)-N$對於$x=a$及$x=b$有相反的符號.依方纔所考慮的特別場合,$\varphi(x)$在(a,b)區域內至少有一次成爲零.

定理C.——在(a,b)區域內的一個連續函數至少有一次達於牠的上限及下限.

在前已經証明一個連續函數若常常是有限的,牠必有一個上限M及一個下限m.我們試証明至少對於x在(a,b)區域內的一個價值我們得$f(x)=M$.

誠然,若函數$f(x)$對於x在(a,b)區域內一個價值不能取得價值M,那麼,無論ε如何小,$f(x)$必能取得無量數各別的價值都大於$M-\varepsilon$ (n°3).因而在區域(a,b)內有無量數各別的點$x_1, x_2,\cdots, x_n,\cdots$,成爲一個級列在$n$增加無限時$f(x_n)$漸近於$M$.自這個級列中,我們能取得一個收歛級列$x'_1, x'_2,\cdots, x'_n,\cdots$,在$n$增加無限時$x'_n$漸近於一個極限$\lambda$.函數$f$對於$x=\lambda$既是連續的,$f(\lambda)=\lim f(x'_n)=M$.

將此定理和以上的定理合而觀之,我們決定在區域(a,b)內一個連續函數至少將牠的上限及下限間一切價值經過一次.定理A也可以宣告如下:設有在(a,b)區域內的一個連續函數,我們能求得一個數η有充分的小一個區域的廣度小於η時,函數f

的限差能小於一個任意選擇的正數.誠然,一個連續函數的限差就是此函數對於變數兩個特殊價值所取得的兩個價值的差.

注意.——我們所設的區域(a,b),總是假定是閉區域.這個條件是最緊要.例如函數$f(x)=1-x$,確定在開區域$(o<x\leqq 1)$,此區域不包有極限$x=o$,此函數對於x在此區域內的一切價值都是連續的.上限是$M=1$,然$f(x)$不能達於這個價值.

9. **不連續函數** (fonction discontinue).——設$y=f(x)$是定在(a,b)區域內的一個函數.若是這個函數對於a及b間的一個價值x_0不是連續的,x_0點就叫做不連續點.在正數ε漸近於零時,此二數$f(x_0+\varepsilon)$及$f(x_0-\varepsilon)$至少有一個不漸近於$f(x_0)$.若是ε漸近爲零時,$f(x_0+\varepsilon)$及$f(x_0-\varepsilon)$各漸近於一個極限,我們就說x_0是第一類的不連續點.我們用$f(x_0+o)$及$f(x_0-o)$表此兩個極限.若是此兩個極限相等,x_0必是在此極限價值不等於$f(x_0)$時方爲不連續點;在此場合我們必須變易$f(x)$在x_0時的價值,即能免除此不連續.然若是無論$f(x_0)$的價值如何,二數$f(x_0+o)$,$f(x_0-o)$總是不同的,x_0點一定是一個不連續點.在第一類的不連續點,若是

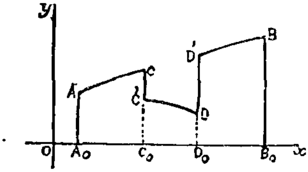
$$f(x_0)=\frac{f(x_0+o)+f(x_0-o)}{2},\tag{3}$$

此不連續點就叫做規則的(regulier);大家可以注意對於x_0函數是連續的時候,這個等式也是存在的.以後可見(n^o30)有些級數所表的函數,抱們有些此類的不連續點.

設$y=f(x)$,此函數在(a,b)區域內只有有限數的不連續點都是第一類的,又只有有限數的最大及最小,方程式$y=f(x)$所表的曲線是由許多連續線分所成,這些線分都不相接合,如

AC', $C'D$, $D'B$;

圖 一



不連續點 C_0 及 D_0 的橫坐標是 c 及 d, y 和此等點相應的價值能設是任何的.若是此等不連續點都是規則的,線分 CC', DD' 的中點當看作是曲線的一部分.前面所舉的函數 $y=\frac{|\sin x|}{x}$ 當爲兩個連續線所表,此二線各達於 Oy 軸上的 $+1$ 及 -1 二點.

若是 x_0 是第二類的不連續點,在正數 ε 漸近於零時, $f(x_0+\varepsilon)$ 及 $f(x_0-\varepsilon)$ 二數中至少有一個不漸近於任何極限.譬如 $f(x_0+\varepsilon)$ 不漸近於一個極限罷,依着 $f(x_0+\varepsilon)$ 的絕對值是否增加無限仍有兩種可能的場合.

設有一個由解析法所定的一個函數 $f(x)$, 譬如是由有限數的普通數學式 (symboles élémentaires) 所定的罷.這個函數通常的是一個連續函數.然有時對於變數的某某價值,這個定義成爲虛妄.例如函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 對於一切價值 $x_0\neq o$ 都是連續的;對於 $x=o$, 這個算式是無意義的.然在 x 漸近於零時, $f(x)$ 漸近於 1, 我們當然令 $f(o)=1$.

反之,我們取函數 $f(x)=\frac{1}{x-a}$, 對於 x 的任何不等於 a 的價值 x_0, 此函數都是連續的.若是 x 等於 a, 這個函數所示由 x 的價值求 y 的價值的運算法是無意義的.然而我們注意在 x 的價值甚近於 a 時, y 的絕對值成爲極大,抑或正或負視 x 大於 a

或小於a而定.差數 $x-a$ 逐漸減小,y的絕對值增加無限以至大於任何預定的數.人們用簡單的方法講明這個事實,說是函數$\frac{1}{x-a}$對於$x-a$是無限(infinie).這是很顯明的,無論令$f(a)$等於任何數,對於$x=a$,函數的連續性是無從恢復的.

再取一個函數$y=\sin\frac{1}{x}$. x漸近於零時,$\frac{1}{x}$增加無限,y不漸近於任一極限,然總在 -1 及 $+1$ 中間.方程式 $\sin\frac{1}{x}=A$, 其中 $|A|<1$, 無論ε如何小,此方程式總有無限的根在o及ε中間.若令$x=o$,無論給y一個如何價值,函數y對於$x=o$總是不連續的,牠在此點有一個顯著的不連續性(discontinuitè essentielle).

由以上的例子,直接可見在x的奇異價值 (valeur singulière) 附近, $f(x)$ 成爲若何狀態,然而並不是常能如此的.爲確定人的觀念,我們假定一個函數 $F(x)$, 對於x大於一個定數a的一切價值,是由牠的解析式 (expression analytique) 定的,我們求辨認在x漸近於 $+\infty$ 時此函數$F(x)$是否漸近於一個極限.若是 $F(x)$的解析式不能使我們直接辨認出來,在許多場合均可用以下的命題(proposition)解决這個困難:

<u>欲使$F(x)$在x漸近於$+\infty$時漸近於一個極限,必須要然只須要差數$F(p)-F(q)$在p及q彼此獨立的增長無限時漸近於零.</u>

用嚴密的術語換言之,欲使$F(x)$有一極限,必須要然只須要對於任一正數ε,能夠求得他一正數A,使p及q二數每一個都大於或等於A時,差數$F(p)-(q)$必小於ε.

這個條件是必要的.若是 $F(x)$ 漸近於一個極限L,就必有一個數A存在,凡x的價值$\geqq A$時,差數$F(x)-L$的絕對值就小於$\frac{\varepsilon}{2}$. 所以p及q若是大於A的任何二數,差數$F(p)-F(q)$就

必小於ε.

這個條件是充足的.設有一個叙列

$$F(a),\ F(a+1),\cdots,\ F(a+n),\cdots,$$

n是一個正整數.這個叙列是收斂的,因爲差數 $F(a+n+k)-F(a+n)$ 在 $a+n>A$ 時,不論正數 k 如何此差數的絕對值都小於 ε (n^o5). 所以整數 n 增長無限時, $F(a+n)$ 漸近於一個極限 L.現在設一個任何數 x,n 是一個正整數,牠的條件是 $a+n$ 至多等於 x,然大於 $x-1$;我們可寫出

$$F(x)-L=F(x)-F(a+n)+[F(a+n)-L];$$

在 x 增長無限時,$a+n$ 也是如此,上式第二端的兩個差數都漸近於零所以 $F(x)$ 的極限是 L.

同樣,在 x 漸近於 a 時假定 x 大於 a,欲使一個函數 $F(x)$ 漸近於一個極限,必須要然只須要此大於 a 的二數 p 及 q 彼此獨立的漸近於 a 時,差數 $F(p)-F(q)$ 漸近於零.

10. **一致函數** (fonctions monotones).——設有定在區域 (a,b) 內的一個函數 $f(x)$,設 x_1 及 x_2 是在此區域內的任何二數,若是積數

$$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]$$

常有同一的符號,此函數在此區域內就說是<u>一致的</u>.若不論 x_1 及 x_2 如何此積都是正或零,此函數就是上升的 (croissante); 若不論 x_1 及 x_2 如何此積都是負或零,此函數就是下降 (décroissante).

若是假定 $x_2>x_1$, 對於一個升函數,差數 $f(x_2)-f(x_1)$ 就是正或零,對於一個降函數,此差數就是負或零.一個一致函數對於 $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 若是有相同的價值,此函數在 (x_1,x_2) 區域內就常

保有這個價值.一個一致函數在區域(a,b)內能夠有任何數的不連續點,然這些不連續點都是第一類的.這是誠然,我們取一個升函數,設x_0是一個不連續點,在ε由正值漸近於零時,$f(x_0-\varepsilon)$不能下降;然而總常$\leqq f(b)$.所以$f(x_0-\varepsilon)$有一個極限$f(x_0-o)$;同樣可見$f(x_0+\varepsilon)$有一個極限$f(x_0+o)$.設x_0是一個任何點,因爲$f(x_0-\varepsilon)\leqq f(x_0-\varepsilon)$,我們決定$f(x_0-o)\leqq f(x_0+o)$.若是$f(x_0-o)=f(x_0+o)$,我們必能得$f(x_0)=f(x_0-o)$,此函數在$x_0$點就是連續的.然若是$f(x_0-o)$小於$f(x_0+o)$,$f(x_0)$就能夠是一個任何數在$f(x_0-o)$及$f(x_0+o)$中間.

注意.——有時須分別一個升函數和一個常上升的函數.我們所稱的常上升的函數是一個函數$f(x)$:若是$x_2>x_1$,必得着$f(x_2)>f(x_1)$,符號$=$是除外的.一個常下降的函數也是相同的定法.

11. 限制變分的函數(fonctions à variation bornée,).——設$f(x)$是在(a,b)區域內的一個限制函數$(a<b)$.用些上升的數$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

將(a,b)區域分爲許多部分區域.我們令

(4) $v=|f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(b)-f(x_{n-1})|.$

如此,對於(a,b)區域的每一個分法,都有一個v相應,$v\geqq o$,此數v叫做函數$f(x)$對於此分法的變分(variation).對於一切可能的分法,有許多數v相應.若是由這些數v所成的集合是一個限制集合,我們就說$f(x)$在(a,b)區域內是一個限

制變分的函數.此集合的上限 V 叫做函數 $f(x)$ 在 (a,b) 區域內的全變分 (variation totale). 函數的這個重要類別是柔當(Jordan)創的.

一切的一致函數都是限制變分的,這是因為所有的差數 $f(x_i)-f(x_{i-1})$ 都是同符號的緣故.由定義可見兩個限制變分的函數的和仍是一個限制變分的函數.若是 $f(x)$ 在 (a,b) 區域內是一個限制變分的函數,牠在 (a,b) 區域所含的任何區域 (a_1,b_1) 內就也是限制變分的,特別的就是在 (a,x) 區域內 x 是在 a 及 b 間的任何數.

設 p 是差數 $f(x_i)-f(x_{i-1})$ 為正的一切差數的和, $-n$ 是差數 $f(x_i)-f(x_{i-1})$ 為負的一切差數的和.顯然可見

$$v=p+n,\quad f(b)-f(a)=p-n,$$

因而

$$v=2p+f(a)-f(b),\quad v=2n+f(b)-f(a).$$

若是函數 $f(x)$ 是限制變分的,對於區域 (a,b) 的所有可能的分法,這些 p 所成的集合及 n 所成的集合都當是限制集合.設 P 及 N 是此兩個集合的上限,我們也叫牠們做正全變分 (variation totale positive) 及負全變分 (variation totale négative). 同前法,在 V, P, N 間有兩個關係

$$V=2P+f(a)-f(b),\quad V=2N+f(b)-f(a).$$

命 $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ 是在區域 (a,x) 內的三個全變分, x 是在 a 及 b 間的任何數.由牠們的定義,這三個函數 $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ 都是升函數.這是因為在 x 漸增時, $P(x)$ 及 $N(x)$ 決不

能下降的緣故.無論 x 如何,在函數 $f(x)$, $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ 間總有以下的兩個關係:

(5) $V(x)=2P(x)+f(a)-f(x)$, $V(x)=2N(x)+f(x)-f(a)$,

因得

(6) $$f(x)=f(a)+P(x)-N(x).$$

因爲這兩個函數 $f(a)+P(x)$ 及 $N(x)$ 都是升函數,所以決定凡一個限制變分的函數都是兩個升函數的差.這個性質可以取爲限制變分的函數的定義.誠然,兩個升函數的差等於一個升函數及一個降函數的和,就是兩個限制變分的函數的和,所以牠自己也是一個限制變分的函數.

若在兩個升函數 $P(x)$, $N(x)$ 上各加以一個升函數 $\varphi(x)$,如此所得的兩個函數 $P_1(x)$, $N_1(x)$ 也都是升函數,牠們的差並未改變.可見凡一個限制變分的函數,都有無窮的方法看作兩個升函數的差.一個一致函數既是只有第一類的不連續點,兩個一致函數的和當然也是如此;所以凡限制變分的函數只有第一類的不連續點.

作爲無限制變分的函數的例子,我們取函數 $f(x)=\operatorname{Sin}\frac{1}{x}$,我們適意的令 $f(o)=o$. 一個區域在二數 $\frac{\pi}{2}$ 及 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ 的倒數中間,對於此一區域,此函數的全變分等於 $2n$, 這是容易看出的,所以此函數在區域 $\left(o,\frac{2}{\pi}\right)$ 內是無限制變分的 (à variation illimitee),這個事實也是因爲 $x=o$ 是一個第二類的不連點.

現在特別的取一個限制變分的連續函數 $f(x)$ (註四)在 n 增長無限使差數 x_i-x_{i-1} 中的最大限 λ 漸近於零時, v 的

<u>極限就是全變分V.</u>

這個證明法根據的是以下的注意.假定用許多新點將每一部分區域(a,x_1),(x_1,x_2),…分爲更小的區域,設

$$a, y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \cdots, y_{l-1}, x_2, y_{l+1}, \cdots, b$$

是一個新叙列;這個新分法說是第一個分法的<u>繼續分法</u>.設v'是對此新分法和v相類的數,顯然可見

$$|f(x_1)-f(a)| \leqq |f(x_1)-f(y_{k-1})|+\cdots+|f(y_1)-f(a)|,$$

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqq |f(x_2)-f(y_{l-1})|+\cdots+|f(y_{k+1})-f(x_1)|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

所以$v \leqq v'$.

這一層既已說明,設V是一切v的上限,ε是一個任何正數.依V的定義,必有一個叙列的上升數

$$a<a_1<a_2<\cdots<a_{p-1}<b$$

能使此數

$$v_0=|f(a_1)-f(a)|+|f(a_2)-f(a_1)|+\cdots+|f(b)-f(a_{p-1})|$$

大於$V-\dfrac{\varepsilon}{2}$.設λ是一個正數,小於一切的差a_1-a, a_2-a_1,…, $b-a_{p-1}$.我們用些上升數$a, x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, b$將區域$(a,b)$分爲小於$\lambda$的部分區域,設$v$是此一分法的相應變分.現在將此一切的數$x_i$及$a_j$由小而大以次排列,我們得區域$(a,b)$的一個新分法.這一個新分法和以上兩個分法都是繼續(consécutive).所以和此新分法相應的變分v'必大於或至少等於v_0及v.

我們求$v'-v$的一個最大限.我們自和v看應的分法變爲和v'相應的分法,是用$a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$諸點將若干的部分區域

(x_{i-1}, x_i)部分爲兩個更小的區域,這些被分爲二的部分區域的總數至多等於$p-1$,所以

$$v'-v=\Sigma[|f(x_i)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|]$$

符號Σ是擴充在凡含有一點a_k的所有區域(x_{i-1}, x_i).設ω是$f(x)$在部分區域$(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots$內的限差的最大價值,這是很顯明的,差數

$$|f(x_i)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

至多等於2ω,因而$v'-v$至多等於$2(p-1)\omega$.函數$f(x)$既是連續的,設η是怎麼一個正數,在廣度小於η的一切區域內,$f(x)$的限差都小於$\frac{\varepsilon}{4(p-1)}$.如此,若是差數$x_1-a_1, x_2-x_1, \cdots, b-x_{n-1}$的最大價值$\lambda$小於$\eta$,即得着$v'-v<\frac{\varepsilon}{2}$.

他一方面,我們可將差數$V-v$寫爲

$$V-v=V-v_0+(v'-v)-(v'-v_0),$$

結果$V-v<\varepsilon$因爲v不能大於V,所以v的極限是V.

由這個定理能證明<u>$f(x)$在(a, x)區域內的全變分$V(x)$是x的一個連續函數.</u>

設x_0是x在a及b間的一個價值,$a, y_1, y_2, \cdots, y_n, x_0$是一個敘列的上升數;$V(x_0)$是變分

$$v=|f(y_1)-f(a)|+|f(y_2)-f(y_1)|+\cdots$$
$$+|f(y_n)-f(y_{n-1})|+|f(x_0)-f(y_n)|$$

的極限.$V(x)$既是一個升函數,上式中除末項不計外,其餘各項的和不能大於$V(y_n)$,也就不能大於$V(x_0-o)$.所以

$$v\leqq V(x_0-o)+|f(x_0)-f(y_n)|;$$

又因爲$f(x)$是連續函數,所以$f(x_0)-f(y_n)$漸近於零,所以v的極限$V(x_0)$不能大於$V(x_0-o)$;$V(x)$既是一個升函數,所以$V(x_0)=V(x_0-o)$.

欲證明$V(x_0)=V(x_0+o)$,命

$$b-x=y,\ V_1(y)=V(b)-V(x);$$

$V_1(y)$表函數$f(b-y)$在區域(o,y)內的全變分,由方纔所證明的,得$V_1(y_0)=V_1(y_0-o)$,因而$V(x_0)=V(x_0+o)$.

函數$V(x)$及$f(x)$既都是連續函數,所以函數

$$P(x)=\frac{V(x)+f(x)-f(a)}{2},\quad N(x)=\frac{V(x)-f(x)+f(a)}{2}$$

也都是連續函數,所以凡限制變分的一個連續函數都是兩個連續升函數的差.

例.——一個連續函數在區域(a,b)內只有有限數的最大及最小時,即可見此函數在此區域內是限制變分的.爲確定人的觀念,我們設一個函數$f(x)$,此函數自a至a_1是上升的,自a_1至a_2是下降的,自a_2至b又是上升的.我們取兩個函數$f_1(x)$,$f_2(x)$,牠們的定法如下:

1^0 在區域(a,a_1):$f_1(x)=f(x),f_2(x)=o$

2^0 在區域(a_1,a_2):$f_1(x)=f(a_1),f_2(x)=f(a_1)-f(x)$;

3^0 在區域(a_2,b):$\begin{cases} f_1(x)=f(x)-f(a_2)+f(a_1); \\ f_2(x)=f(a_1)-f(a_2). \end{cases}$

很容易看出這兩個函數$f_1(x)$及$f_2(x)$在(a,b)全區域內都是連續且上升的,牠們的差數等於$f(x)$.若是$f(x)$在(a,b)區域有任何數的最大及最小,我們仍用此一方法分$f(x)$爲兩

個連續升函數的差.

一般設 $f(x)$ 是怎麼一個函數;我們能將區域 (a,b) 分爲 p 個部分區域,在每一區域內此函數都是一致的;又此函數只有有限數的規則不連續點.以上的方法能將此函數 $f(x)$ 用兩個升函數的差來表牠,此兩個函數也都只有規則的不連續點.

12. **多自變數的函數.**——若是對於 $x,y,z,\cdots,t$ 的一組的價值, ω 必有一個價值相應,我們就說 ω 是 $x,y,z,\cdots,t$ 的函數.爲確定人的觀念,我們假定有兩個自變數 x 及 y 又將 x 及 y 看做一個平面上一點的坐標 (coordonnées).對於 x 及 y 的一組的價值,有一點 M 相應,反之也是如此.若在平面上的一部分內任取一點 M, ω 都有一個價值相應,我們就說函數 $\omega=f(x,y)$ 是定在此部分內的,通常稱此部分爲一個領域 (domaine) 或一個場 (champ).

一個領域 A 是平面的一部分,此部分或者是一個閉曲線 C 所限,或者是許多閉曲線所限,一個曲線 C 在外及許多曲線 C',C'', $\cdots$ 在內,這些曲線 $C,C',C'',\cdots$ 成爲此領域的界 (froutiere).通常的我們假定界線也是領域的一部分,就是在界線上 (譬如C) 每一點,函數 ω 都有一個確定的價值.如此的領域叫做閉領域.在此領域中任取二點,若能將此二點用一個全在領域內的折線連合之,此領域就叫做連合的 (connexe).

設有一個函數 $\omega=f(x,y)$, 若是對於一個領域 A 的一切點, ω 的價值的集合成爲一個限制集合,此函數 ω 就是限制的.至於 M,m 及限差的定法都和前相同.(n^o6)

設 (x_0,y_0) 是在平面上此部分內一點 M_0 的坐標.設有一個函數 $f(x,y)$,若是對於任一正數 ε,必能求得一個相應的正數 η,凡在 $|h|<\eta,|k|<\eta$ 時,即連帶得着

$$|f(x_0+h,y+k)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

我們就說此函數 $f(x,y)$ 對於一組的價值 x_0,y_0 是連續的.

連續性的定義可以解釋如下:

我們假想在 xy 平面上作一個正方形中心是 M,邊長等於 2η,各邊都平行於軸.設有一點 M',牠的坐標是 (x_0+h,y_0+k),若是 $|h|<\eta,|k|<\eta$,此點 M,就在此正方形內.說函數對於 $x=x_0$,$y=y_0$ 是連續的,就等於說我們能够取此方形的邊有充分的小,使此函數在 M_0 點的價值,和在此方形內任意牠一點的價值的差的絕對值小於 ε.如此,我們可以將此方形用一個中心在 (x_0,y_0) 的圓周替代,這是因為以上的條件若是對於方形內的所有點是滿足的,牠對於內切圓內的所有點也必是滿足的.反而言之,此條件若是對於圓周內的所有點是滿足的,牠對於圓周的內接方形內的所有點也必是滿足的.所以我們可以定這個連續性,說是能够在二正數 ε 及 η 間作出如此的相應法:不等式 $\sqrt{h^2+k^2}<\eta$ 必連帶着不等式

$$|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

同樣,若 m 是界線上一點,m' 是領域 A 內一個隣近的點,若距離 mm' 漸近於零時,ω 在 m' 點的價值漸於牠在 m 點的價值,我們就說函數 $f(x,y)$ 在界線上 m 點是連續的.

一個函數 $f(x,y)$ 若是在領域 A 內及界線上任何點都是連續的,我們就說牠在領域 A 是連續的.

一個函數在一個周圍 C 所限的領域 A 是連續的,我們有些定理和以前所證定理相似(n^o8).

正數 ε 若已確定,對於領域 A 內任一點 (x,y), 有一個正數 $\theta(x,y,\varepsilon)$ 相應,牠是一切數 θ 的上限,這些數 θ 的性質是若兩點 $(x,y),(x',y')$的距離小於θ, 必能得着

$$|f(x',y')-f(x,y)|<\varepsilon,$$

第 8 節的證法在此處仍能應用,只須表明在 (x,y) 點未出領域 A 時,這些數 $\theta(x,y,\varepsilon)$ 的下限不能等於零.

那麼,這個下限是一個正數 η, 所以對於一個任何正數 ε, 必有一個別的正數相應,只要在領域 A 內或圍線 C 上所取兩點 $(x,y),(x',y')$ 的距離小於 η, 就得着

$$|f(x',y')-f(x,y)|<\varepsilon.$$

換言之:若兩個變數的函數在領域內及界限上都是連續的,就是均一連續的.

自以上的命題,和前相同(n^o8)可以推得在 A 內的一個連續函數在 A 內也必是有限的,由第八節的推理能夠證明函數 ω 對於圍線 C 內或 C 上的所有點,必能將 M 及 m 的價值至少都達到一次.設在 a 點 $\omega=m$,在 b 點 $\omega=M$. 用全在 C 內的一個多角折線 (ligne polyganale) 將 a 及 b 連結,若是一點 (x,y) 未出此線時, ω 是此線在 a 及 (x,y) 點間的長度的連續函數;所以牠必將 m 及 M 間的一切價值 μ 至少經過一次 (n^o8). 因為 a 及 b 間能作無限的折線,可見函數 $f(x,y)$ 對於圍線內無限的點都能達到 m 及 M 間的一個價值 μ.

這是很明瞭的,二自變數的一個連續函數 $f(x,y)$, 若在此二

自變數中單取一個,牠也是此一個自變數的連續函數,然而這個逆定理是不確實的。

欲明其例,我們取一個函數 $f(x,y)$,在 x 及 y 的價值有一個不等於零時,此函數等於 $\frac{2xy}{x^2+y^2}$,我們又介 $f(o,o)=o$. 如此所定的函數在 $y=$ 常數時是 x 的連續函數,反之亦然.然而對於一組的價值 $x=y=o$,牠不是二自變數 x 及 y 的連續函數,這是因為若是 (x,y) 點漸近於原點時常在直線 $y=mx$ 上,此函數的極限是 $\frac{2m}{1+m^2}$,此極限是隨着 m 的價值變化的.在這個例子,很容易看出不能選擇一個價值給 $f(o,o)$ 使函數 $f(x,y)$ 在原點成為連續的.以下的函數則不然,設此函數 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\neq o$ 時是 $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;若是介 $f(o,o)=o$, 如此所定的函數對於 $x=y=o$ 是連續的,這是因為 $f(x,y)$ 的絕對值小於 $|x|$ 的緣故。

這一切的命題,都很容易的推廣在任何數目的多自變數的函數上。

13. **連續曲線** (courbes continues).——在以前各節中,我們已經默認一個閉平曲線 C 分平面為兩個領域:一個內領域 D_i 及一個外領域 D_e, 若用一個折線連結 D_i 的一點及 D_e 的一點,此折線不能和 C 無一個公共點.這個性質適合於我們對於幾何上所見的曲線的直觀 (notion intuitive), 這個性質對於由一個幾何性質所定的曲線也很容易證明,譬如是一個橢圓。

然而欲使推理精確,必須將此稍涉模糊的幾何直觀代以純粹的解析上的定義.設 $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是一個變數 t 的三個連續函數若是一個點的坐標都由以下的公式所定

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t), \tag{7}$$

在 t 變化時,此一切相應的點成爲一個連續曲線 Γ,或簡稱之爲曲線.假定這三個函數 $f(\ )$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 有一個週期 ω,就是說無論 t 如何,我們必得着

$$(8)\qquad f(t+\omega)=f(t),\quad \varphi(t+\omega)=\varphi(t),\quad \psi(t+\omega)=\psi(t);$$

只須令 t 在廣度等於 ω 的一個區域 $(a,a+\omega)$ 內變化,即盡得曲線的所有點.此曲線叫做一個閉曲線 (courbe fermée). 自然我們能假定此 ω 是一個正數;我們又可以假定牠是能滿足方程式(8)的最小正數.若是對於兩個不同的價值 t', t'',同時能得着

$$(9)\qquad f(t')=f(t''),\quad \varphi(t')=\varphi(t''),\quad \psi(t')=\psi(t''),$$

而差數 $t'-t''$ 並不是 ω 的倍數,曲線 Γ 上和此相應的點是一個二重點 (point double). 若是能滿足關係式(9)的兩個價值 t' 及 t'' 牠們的差 $t'-t''$ 沒有不是 ω 的倍數的,曲線 Γ 就沒有二重點.欲應用這些定義在平曲線上,只須令 $\psi(t)=0$.

柔當(Jordan)曾經嚴密的證明一個沒有二重點的閉平曲線 C,分平面爲兩部分,一個在內,一個在外,在同一部分的兩點必能爲一個不通過 C 的折線所連結,至於連結內部一點和外部一點的連續線必通過曲綫 C. (參觀 Jordan 的解析學講義).

關於此一點,我們的推理只能夠堅定幾何上的直觀,可是並不可深信這是常常如此的.比亞奴 (Peano) 曾作一個極奇的例子,顯明一個平曲綫具有以下的一個奇異性質:有一個點,牠的坐標的式子是 $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, 在 t 變化時,此點逐漸佔盡一個方形內的所有的點.〔註五〕

我們只述明這個結果,以見曲綫的解析意義較之通常意義何等複雜.自此以後,我們所常論的曲綫只限於能滿足以下的條

件的,這些條件都是我們通常所取的閉線(contours)所能滿足的.設 $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ 是定曲線 C 的兩個方程式,又設 (a,b) 是一個區域,在此區域內須令 t 變化以盡得曲綫上的所有點.我們假定能將 (a,b) 分爲有限的部分區域,在每一區域中,函數 f 及 φ 每一個都是常上升的或是常下降的.譬如函數 $x=f(t)$ 在 (α,β) 區域內是常上升的,由反函數(fonctions inverses)的理論,我們能求出 t 爲 x 的連續函數,因而相應的弧能爲一個方程式 $y=G(x)$ 所表.同樣,若是函數 $\varphi(t)$ 在一個部分區域內是常上升的或是常下降的,相應的弧也能爲一個方程式 $x=H(y)$ 所表.

凡以後所論的曲綫都是由若干個此類的弧首尾相接所成.我們特別的設一個閉閉綫(contour fermé) C, 沒有二重點,我們在 C 上取和 x 是最大或最小相應的所有點(內中閉綫 C 若含有 Oy 的平行直綫,此等直綫上的所有點就都在內),設 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是此等點的橫坐標依着大小的升序排列的.設 α 是在任一部分區域 (x_i,x_{i+1}) 中間的一個數,凡 Oy 的平行綫 $x=\alpha$ 只和曲綫 C 有偶數的交點,這些交點的縱坐標(ordonnées)是 $(y_1,y_2,\cdots,y_{2p})$; 在區域 (x_{i-1},x_i) 內,y_h 是連續函數 $\varphi_h(x)$, 我們假定

$$\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\cdots<\varphi_{2p-1}<\varphi_{2p}.$$

凡在二直綫 $x=x_{i-1}$, $x=x_i$ 所限的長條以內的點,若是介在曲綫 $y_1=\varphi_1$ 及 $y_2=\varphi_2$ 中間,就是在閉綫 C 內;反之,此長條內的點若是介在 $y_2=\varphi_2$ 及 $y_3=\varphi_3$ 中間,就是在閉綫 C 外,餘仿此.總結如此,可見閉綫 C 的內領域能分爲有限數的部分領域,每一領域都由兩個平行綫 $x=a$, $x=b$ 及兩個曲線 $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ 所限,φ_1 及 φ_2 都是在區域 (a,b) 的連續函數.

習 題

(1) 兩個限制變分的函數的積也是限制變分的.

(2) 若$f(x)$是一個限制變分的函數,$|f(x)|$就也是限制變分的函數.

(3) 若要一個函數是限制變分的,必須要也只須要在每一個部分區域內的限差的和常為有限.

(4) 若一個函數$f(x,y)$在一個領域內關於每一個變數都是均一連續的,此函數在此區域內關於兩個變數的集合就也是連續的.

〔註一〕 我們假定一個無理數是依某某條件將有理數的集合分為兩類所定.一個長度B和一個取為單位的長度A沒有一個共同量(commune mesure),對於此長度B有一個無理數i相應,i叫作長度B在以A為單位時的量.反之,對於算術上所定的一個無理數i,有一個長度B相應,他和取為單位的長度沒有一個共同量.若要證明此要點,必須依據吾人由直綫的直觀上所生的一個公準(postulat).此公準宣告時可以有許多不同的形狀,雖然在實際上都是同值.

〔註二〕 同一推理能證明一般的一個變數x永不下降,又常小於一個定數,他必漸近於一個極限;或證明一個變數x永不上升,又常大於一個定數,他必漸近於一個極限.

〔註三〕 奈端(Newton)及來伯尼(Leibniz)時代,一個函數當時所習用的運算的符號所表明就說是連續函數,譬如是算術的,對數的或三角的運算.此種的連續性的定義不甚適宜,稱為

由列氏的連續性 (continuité eulérienne).

〔註四〕 一個連續函數,非必是限制變分的.以後所述的連續函數(第31節)在任何區域內都是無限制變分的.

〔註五〕 Peano, Sur une courbe qui remplit une aire plane (Math. Annalen, t. XXXVI),並參觀 Hilbert (Ibid, t. XXXVIII).

第二章

導來式及微分

Dèrivèes et différentielles

1. 定義.——一般通性.

14. 導來式.——設有一個連續函數$f(x)$;在x不變,h減小無限時,比

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

的兩項同時漸近於零.若是此比漸近於一個極限,我們說這個極限是函數$f(x)$的導來式.依拉格郎熱(Lagrange)的記法,我們用y'或$f'(x)$來表牠.

在導來式的解析的意義上,附有一個幾何上的重要意義.設$y=f(x)$是在區域(a,b)內的一個連續函數;在一個平面上我們取一點,牠的坐標(coordonnées)是(x,y).x自a變至b時,此點畫出一個曲線弧AMB,此弧表函數$f(x)$在區域(a,b)內的姿勢.設M及M'是此弧上的相鄰二點,牠們的橫坐標(abscisses)是x及$x+h$.直線MM'的角係數等於

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

在h漸近於零時,M'點來和M點無限相近;若是函數$f(x)$有一個導來函數,直線MM'的角係數就漸近於一個極限y'.直線MM'就漸近於一個極限位置MT,我們稱牠為曲線的切線(tangente).由此看來,切線的方程式是

$$Y-y=y'(X-x),$$

X及Y是流行坐標 (coordonnées courantes).

一般在空間設有一個任何曲線,

(1)　　$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)$

是曲線上一點的坐標式(expressions des coordonnées),牠們都是一個變率 (parametre variable) t 的函數.在此曲線上取兩點 M 及 M' 和變率的兩個價值 t 及 $t+h$ 相應.弦 MM' 的方程式是

$$\frac{X-f(t)}{f(t+h)-f(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi(t+h)-\varphi(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi(t+h)-\psi(t)}.$$

若是將這兩個比俱用 h 除,再令 h 漸近於零,就可見弦 MM' 漸近於一個極限位置,牠的方程式是

$$\frac{X-f(t)}{f'(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi'(t)};$$

自然這是假定此三個函數 $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 都是有導來式的.如此,一個曲線的切線的定法,由解析法變爲一個導來式的計算.

凡具有導來式的函數一定是連續的,然而這個逆定理並不確實.我們很容易舉出些例子,表明連續函數往往對於變數的一個特別價值沒有導來式.譬如函數 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=o$ 時, x 漸近於零, y 也漸近於零,函數實在是連續的.然而比 $\dfrac{y}{x}=\sin\dfrac{1}{x}$ 並不漸近於任何極限(n^o9).

又如 $y=x^{\frac{2}{3}}$;這個函數對於 x 的任何價值都是連續的.在 $x=o$ 時, $y=o$, 然而比 $\dfrac{y}{x}=x^{-\frac{1}{3}}$ 在 x 近於零時增加無限.我們簡單說是導來式在 $x=o$ 時是無限;表此函數的曲線切 y 軸於原點(origine).

函數 $y=x\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 在 $x=o$ 時爲零,然而隨着 x 漸近於零時爲正

爲負，$\frac{y}{x}$漸近兩個不同的極限.若是x爲正而極小，$e^{\frac{1}{x}}$就也爲正而極大；此$\frac{y}{x}$漸近於1；反之，若是x爲負而絕對値極小，$e^{\frac{1}{x}}$漸近於零，此$\frac{y}{x}$的極限就爲零.如此，隨着x漸近於零的方法不同，導來式有兩個各別的價値；表此函數的曲線有一尖點 (point anguleux) 在原點.

一般，凡一個折線，若和 Oy 的一個平行線只有一交點，此折線定一個連續函數，牠的導來式在每一項點上都有兩個各別的價値.

自這些例子看起來，我們甚易作成些連續函數，對於變數的某某特別價値沒有導來函數.然而微積分的創造者和牠們的相續者並沒有想到一個連續函數能彀常沒有導來式，甚至於有些人希望證明這個定理，牠們的証明法當然是不充足的.後來危伊特拉斯 (Weierstrass) 作出幾個連續函數對於變數的任何價値都沒有導來式，這個問題總算解決.〔註一〕這些函數直到現在尙沒有應用，我們不必管牠.以後我們若說一個函數$f(x)$在區域(a,b)內有一個導來式，除有特別聲明不計外，就是說這個函數有一個導來式，對於變數在 a 及 b 間的每一價値，此導來式都是惟一的且有限的.

15. 累次導來式.——函數$f(x)$的導來式，牠自己也是x的函數$f'(x)$；若是$f'(x)$有一個導來式，我們就稱這個新函數爲$f(x)$ 的二次導來式，牠的記號是y'' 或$f''(x)$.我們定三次導來式y''' 或 $f'''(x)$ 和二次相同，餘仿此；一般，第 n 次的導來式 $y^{(n)}$ 或

$f^{(n)}(x)$是$(n-1)$次導來式的導來式.若是依此方法取累次導來式,終不能得着一個沒有導來式的函數,我們可以假定這些運算是沒有止期;這一列的導來式是無盡的.凡有經實用的函數多半屬於此類.

以上所舉的導來式的記法是拉格郎熱的記法;有時亦用$D_n y$或$D_n f(x)$來表n次的導來式,這是高失(Cauchy)用的.以後我們可見來本尼(Leibniz)的記法.

16. **洛兒(Rolle)的定理.**——用導來式來研究方程式,所根據的是以下的命題,此命題叫做洛兒定理:

設a及b是方程式$f(x)=o$的二根.若函數$f(x)$是連續的,並且在(a,b)區域內有一個導來式,方程式$f'(x)=o$就至少有一個根在a及b中間.

誠然,由假定,$f(x)$在$x=a$及$x=b$時都為零;若在(a,b)區域內$f(x)$恆等於零,牠的導來式當然也是如此,這個定理是不證自明的.若是在(a,b)區域內$f(x)$不恆等於零,牠的價值或是正或是負;我們假設牠是正的罷;那麽x有一個價值x_1在a及b中間,對於這個價值,$f(x)$達於最大價值M($n^{\circ}8$;定理C).設h為一個正數,比

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

若不等於零必為負數;此比的極限$f'(x_1)$決不能是正數;所以$f'(x_1)\leqq o$.同樣將$f'(x_1)$看做比

$$\frac{f(x_1-h)-f(x_1)}{-h}$$

的極限,我們可見當然是$f'(x_1)\geqq o$.比較這兩個結果,即可見$f'(x_1)=o$.

17. 有限增長 (accroissements finis) 公式.—— 設 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 是在 (a,b) 區域內的兩個連續函數,又在此區域內,對於 x 的一切價值 (極限不在內), $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 都有一個導來式.

我們能彀決定三個常數係數 A,B,C 使輔助函數 (fonction auxiliaire)

$$\psi(x)=Af(x)+B\varphi(x)+C$$

在 $x=a$ 及 $x=b$ 時都成爲零.如此必須要然只須要

$$Af(a)+B\varphi(a)+C=o,\quad Af(b)+B\varphi(b)+C=o;$$

二式相減,即得

$$A[f(a)-f(b)]+B[\varphi(a)-\varphi(b)]=o.$$

因爲以上的關係式只能定出係數 A,B,C 的比,我們可以令

$$A=\varphi(a)-\varphi(b),\quad B=f(b)-f(a),$$

C 的價值即可直接得出.係數 A,B,C 如此決定以後,輔助函數 $\psi(x)$ 就在 $x=a$ 及 $x=b$ 時都成爲零;況且在 (a,b) 區域內牠對於 x 的一切價值都有一個導來式和 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 相同.那麼,在 a 及 b 間必有一個數 c 能令導來式

$$\psi'(x)=Af'(x)+B\varphi'(x)$$

成爲零.用 A,B 的價值代 A,B,得

$$[\varphi(a)-\varphi(b)]f'(c)+[f(b)-f(a)]\varphi'(c)=o,$$

用 $\varphi'(c)[\varphi(a)-\varphi(b)]$ 除,得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{2}$$

在此公式中令 $\varphi(x)=x$,我們可以宣告以下的定理:

<u>若 $f(x)$ 是在 (a,b) 區域內的一個連續函數,又對於 x 在此區域內的一切價值都有一個導導式,我們必得着關係式</u>

(3) $$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),$$

c是在a及b間的一個數.

公式(3)是有限增長公式或平均值公式 (formule de la moyenne). 可注意的是這個證明法並未假定導來式的連續性;在極限價值$x=a$及$x=b$時也沒有假定此導來式的存在.幾何上的說明是人所共知,此處不加復述.

自這個公式中可見若是導來式 $f'(x)$ 在 (a,b) 區域內恆等於零,函數 $f(x)$ 在此區域內就是一個常數;這是因為若將此公式應用在 (a,b) 區域內的兩個價值 x_1 及 x_2 上,就得着關係式$f(x_1)=f(x_2)$. 因此,若是兩個函數有相同的導來式,牠們的差就是一個常數;這個逆定理是很顯明的.幾時我們得着一個函數$F(x)$, 牠的導來式是一個已知函數$f(x)$, 我們在 $F(x)$ 上加以一個任意常數,所得的一切函數都有相同的導來式.〔註二〕

公式(3)又有一個結果往往有用.假定導來函數在 (a,b) 區域內是有限制的,對於x在a及b間的一切價值,都是$|f'(x)|<K$, K是不關於x的一個正數.如此若x_1及x_2是a,b間任意二數,我們必得着

$$|f(x_2)-f(x_1)|<K|x_2-x_1|.$$

我們稱此不等式為李普 (Lipschitz) 的條件,K是一個定數,x_1及x_2是在某區域的兩個任何數.

公式(2)有時亦稱為平均值公式的推廣式.侯必達爾 (Hospital) 關於不定形的定理可以由此演出.假定$f(a)=\varphi(a)=0$; 用x代b,公式(2)就成為

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

x_1是在a及x間的一個數.由此關係式,可見在x漸近於a時,若是比$\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$漸近於一個極限,那麼,若是

$$f(a)=\varphi(a)=o,$$

$\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$也必漸近於同一的極限.

18. 戴勞(Taylor)公式.——函數$f(x)$是一個n次的多項整式時,若依$x-a$的升冪將此多項式展開,即得公式

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a); \tag{4}$$

因爲自第$(n+1)$次以後所有的導來式都等於零,所以此展開式自然終了.

現在設一個非多項式的函數,無論整數n如何增加,公式(4)都不能應用在此函數上.我們試將此函數$f(x)$用多項式

$$P_n(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

來代替,我們計算如此所留的差誤.

對於函數$f(x)$我們作以下的假說:在區域(a,b)內,此函數和牠的導來式$f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x)$都是連續的,並且第$n$次的導來式$f^{(n)}(x)$對於$x$在$a,b$間的一切價值都有一個導來式.多項式$P_n(x)$滿足以下的條件:

$$P_n(a)=f(a),\quad P'_n(a)=f'(a),\quad \cdots,\ P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a);$$

因此,差數$f(x)-P_n(x)$和牠的累次導來式以至於n次,在$x=a$時都成爲零.那麼,無論常數C如何,輔助函數

$$\varphi(x)=f(x)+C(x-a)^{n+1}-P_n(x)$$

在$x=a$時也必爲零.但是我們能夠選擇這個常數C使$\varphi(x)$在$x=b$時也成爲零;爲此,只須要

$$f(b)-P_n(b)+C(b-a)^{n+1}=o. \tag{5}$$

常數C既如此決定,輔助函數$\varphi(x)$和牠在前的n個導來式在(a,b)區域內都是連續的,並且$\varphi^{(n)}(x)$對於x在a及b間的一切價值都有一個導來式.不但如此,我們又有n個關係式

$$\varphi(a)=o,\quad \varphi'(a)=o,\quad \cdots,\quad \varphi^{(n)}(a)=o,\quad \varphi(b)=o.$$

逐漸應用洛見定理在函數$\varphi(x)$和牠的累次導來式上.函數$f(x)$既在$x=a$及$x=b$時都成為零,方程式$\varphi'(x)=o$必有一個根c_1在a及b間.這個函數$\varphi'(x)$既在$x=a$及$x=c_1$時都成為零,方程式$\varphi''(x)=o$必有一個根在a及c_1間,也就是有一個根在a及b間.如此漸推至n次導來式,可見方程式$\varphi^{(n)}(x)=o$有一個根a及一個根c_n在a及b間.所以導來式$\varphi^{(n+1)}(x)$也有一個根在a及b間.但是多項式$P_n(x)$至多是n次,所以此導來式的式子是

$$\varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)+1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)C;$$

由此可見常數C滿足以下的關係

$$f^{(n+1)}(c)+(n+1)!\,C=o,$$

c是在a及b間的一個未知數.

現在用C及$P_n(b)$的價值代入關係式(5);我們自所得的等式取出$f(b)$的價值:

$$(6)\qquad f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\cdots$$
$$+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

這是戴勞公式的總式;我們用$a+x$代b,用$a+\theta x$代c,θ是在o及1間的一個數.公式(6)變為

$$(7)\qquad f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1}f'(a)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

餘數R_n的式子是

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x).$$

R_n所表的是用多項式$P_n(a+x)$代$f(a+x)$所作的差誤.若是z自a變至$a+x$時,$|f^{(n+1)}(z)|$常小於一個常數M,此餘數R_n的絕對值必小於$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$,我們由此可以察知將此餘數略去時所得$f(a+x)$的近似值的程度如何.

注意.——若是導來式$f^{(n+1)}(x)$是連續的,我們又可寫為

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(a)+\varepsilon\right],$$

ε在x近於零時是一個無限小.若將x看做主無限小(infiniment petit principal),R_n就至少是關於x的$n+1$級無限小.逐漸令$n=1$, $n=2$, $n=3,\cdots$,即得許多多項式,牠們和$f(a+x)$所差的都是無限小,可是這些無限小的級數逐漸增加.在公式(7)中令$a=o$,所得的公式亦稱馬克樓蘭(Maclaurin)公式.

例一.——應用公式(7)在函數$f(x)=\log(1+x)$, log的記號表訥氏對數,假定$a=o$, $n=1$,$x>-1$;我們得

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2};$$

若在此公式中用一個整數n的倒數代x即得

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta_n}{2n^2},$$

θ_n是小於1的一個正因子.

由此可以推知一個級數(série)若公項是$\frac{1}{p}-\log\left(1+\frac{1}{p}\right)$,此級數就是一個收斂級數,這是因為此公項小於$\frac{1}{2p^2}$的緣故.

但是這個級數最初的n項等於

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)=\Sigma_n-\log n+\log\left(\frac{n}{n+1}\right);$$

因此,差數 $\Sigma_n-\log n$ 在 n 增加無限時有一極限,這個極限是由列(Euler)的常數 C,牠的價值用20位小數是

$$C=o,57721566490153286060.$$

例二.——若是三個導來式 $f'(t),\varphi'(t),\psi'(t)$,在 $t=t_0$ 時同時為零,公式(1)所表曲線的切線的方程式就成為恆等式.要免除這個困難,我們仍用求切線的方程式的推理.設 M 是曲線 C 上一點,M' 是牠的一個隣點,t_0+h 是變率的相應價值;

$$\frac{X-f(t_0)}{f(t_0+h)-f(t_0)}=\frac{y-\varphi(t_0)}{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}.$$

為普及一般,我們假設函數 $f(t),\varphi(t),\psi(t)$ 的低於 p 級的導來式在 $t=t_0$ 時,都成為零,$(p>1)$ 然而 p 級的導來式至少有一個不等於零,我們就假定 $f^{(p)}(t_0)$ 不等於零罷,用 h^p 除上式的分母,並應用公式(7),這些方程式可寫為

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)+\varepsilon}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)+\varepsilon'}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)+\varepsilon''},$$

$\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''$ 是三個無限小.現在若令 h 漸近於零,在極限時這些方程式成為

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)},$$

這些方程式並無不定的形狀.

若是曲線上的點有了此種情形,普通的都是奇點 (point singulier),在此等點上,曲線現出奇異形狀.例如方程式 $x=t^2,y=t^3$ 所表的平曲線從原點經過,在此點上,$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=o$.曲線在原點現出第一類的逆退點 (poînt de rebroussement),牠的切線合于 x 軸.

19. 偏導來式 (dérivées partielles) —— 設 $\omega=f(x,y)$ 是兩個自變數 x,y 的函數,這個函數是定在某一區域 D 內的.若是令牠的一個變數爲常數,譬如是 y 罷,這就等於在區域 D 內令 (x,y) 點在 x 軸的一個平行線上移動,這個函數就成爲一個變數 x 的函數;如果牠有一個導來函數,我們用 $f'_x(x,y)$ 或 ω'_x 來表牠;同樣,令 x 等於常數但令 y 變化,我們用 $f'_y(x,y)$ 或 ω'_y 表如此所得的 $f(x,y)$ 的導來式;$f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 俱是 $f(x,y)$ 的偏導來式.這些偏導來式牠們也是 x,y 的函數;若是再取牠們的偏導來式,即得 $f(x,y)$ 的第二級偏導來式.那麼第二級偏導來式共有四個 $f'_{x^2}, f'_{xy}, f'_{yx}, f'_{y^2}$, 同樣可定第三級,第四級等等的導來式;一般,若有任何數的自變數的一個函數 $\omega=f(x,y,z,\cdots,t)$, 一個 n 級的偏導來式是在此函數上關於牠的某某變數依某種次序連取導來式 n 次所得的結果.我們將證明這個結果對於累次取導來式的次序無關係.

我們先證明以下的補題 (lemme):

設 $\omega=f(x,y)$ 是兩個自變數 x,y 的一個函數;我們必得着 $f'_{xy}=f'_{yx}$, 但是必須此兩個偏導來式都是連續的.

爲此,我們根據和洛兒定理相似的一個預定理,一個直方形 $ABCD$, 牠的頂點的坐標是 (x_0,y_0), (x_0+h,y_0), (x_0+h,y_0+k), (x_0,y_0+k), 設有一個函數 $F(x,y)$ 牠在此直方形內及邊線上是連續的,但在四個頂點上爲零,又假定牠有一個導來式 $F'_x(x,y)$ 在此領域內也是連續的,此導來式又有關於 y 的導來式 $F''_{xy}(x,y)$,我們將證明此導來式 $F''_{xy}(x,y)$ 至少對於此直方形一點成爲零.誠然,一個輔助函數 $\Phi(x)=F(x,y_0+k)-F(x,y_0)$ 在 $x=x_0$, $x=x_0+h$

時成爲零,所以導來式$\Phi'(x)$或$F'_x(x,y_0+k)-F'_x(x,y_0)$對於$x_0$及$x_0+h$中間一個價值$x_0+\theta h$必成爲零.這個數$\theta$如此選定,$y$的一個函數$F'_x(x_0+\theta h,y)$對於$y=y_0,y=y_0+k$取得相同的價值,所以導來式$F''_{xy}(x_0+\theta h,y)$對於$y$在$y_0$及$y_0+k$中間一個價值成爲零,我們有

$$F''_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta' k)=o,\ o<\theta<1,\ o<\theta'<1.$$

現在設$f(x,y)$是一個函數,牠在直方形$ABCD$內和$F(x,y)$滿足同樣的條件,但在頂點上的價值是任何的,我們能選擇四個常數λ,μ,ν,ρ使輔助函數

$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda(x-x_0)(y-y_0)-\mu(x-x_0)-\nu(y-y_0)-\rho$$

在四個頂點上成爲零.特殊的我們得

$$\lambda=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk}=\frac{U}{hk}.$$

牠一方面,$F''_{xy}=f''_{xy}-\lambda$,應用以上的預定理,在函數$F(x,y)$上,即得關係式

$$U=hkf''_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta' k),\ o<\theta<1,\ o<\theta'<1.$$

因爲函數U關於x_0,y_0,h,k爲對稱,同樣得

$$U=hkf''_{yx}(x_0+\theta'_1 h,y_0+\theta_1 k),\ o<\theta_1<1,\ o<\theta'_1<1.$$

令U的這兩個價值相等,除以hk,去下標,得

$$f''_{xy}(x+\theta h,y+\theta' k)=f''_{yx}(x+\theta'_1 h,y+\theta_1 k);$$

導來式f''_{xy},f''_{yx}既假定是連續的,若令h及k漸近於零,在上的等式的兩邊各漸近於f''_{xy}及f''_{yx},即得所要證明的等式.

可注意的是以上的證明並未將其牠的第二級導來式f''_{x^2}及f''_{y^2}作一點假定;若是函數$f(x,y)$於x,y之外仍關係其牠的自變數,以上的定理仍爲確實,這是因爲在以上的導來法(dérivation) 中其餘的自變數都看作爲常數的緣故.

這些既已證明,現在設 $\omega=f(x,y,z,\cdots,t)$ 是任何數自變數的函數,Ω 是此函數的第 n 級的一個偏導來式.我們若將求 Ω 時所用導來法的次序中任意作一個排列 (permutation), 這個排列可由一組的二個相續導來法的交換得來,由以上所證明,這些運算並未改變所得的結果,所以我們任意所作的排列也不至改變所得的結果.那麼,若要作一個記號來表明一個 n 級的偏導來式,我們只須指出對於每一自變數所作的導來法的次數.例如三個自變數的一個函數 $\omega=f(x,y,z)$, 牠的偏導來式是爲以下的兩個記號中的任一個所表

$$f^{(n)}_{x^py^qz^r}(x,y,z),\quad D^{(n)}_{x^py^qz^r}f(x,y,z),$$

其中 $p+q+r=n$. 這兩個記號都是表明關於 x 導來 p 次,關於 y 導來 q 次,關於 z 導來 r 次,但是這些運算的次第是任意的.函數 ω 有三個第一級偏導來式 f'_x, f'_y, f'_z; 有六個第二級偏導來式 $f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{yz}, f''_{zx}, \cdots$.

一般,p 個自變數的一個函數,牠的 n 級的偏來式的數等於 p 個自變數的 n 級同質多項式(polynome homogêne)的項數,就是

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdots(p-2)(p-1)}$$

這是由組合法(combinaison)的理論上可見的.

對於多自變數的函數,也有和平均值公式相類的公式.例如兩個自變數 x 及 y 的一個函數 $f(x,y)$, 差數

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)$$

可以寫爲

$$[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)]+[f(x,y+k)-f(x,y)];$$

應用平均值公式在每一個差數上,我們得

(8) $$f(x+h,y+k)-f(x,y)$$
$$=hf'_x(x+\theta h,y+k)+kf'_y(x,y+\theta' k),$$

θ 及 θ' 都是大於零小於一.

這個證明法並未假定 f'_x 及 f'_y 是連續的.θ 及 θ' 都是未定數.我們能將此公式用一個同類的公式替代,此後者只含有一個因子 θ.假定 x, y, h, k 都有確定的價值,設 $\varphi(t)$ 是一個輔助函數

$$\varphi(t)=f(x+ht,y+k)+f(x,y+kt),$$

顯然可見

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=\varphi(1)-\varphi(o)=\varphi'(\theta),(o<\theta<1),$$ 此式可以寫爲

(9) $$f(x+h,y+k)-f(x,y)$$
$$=hf'_x(x+\theta h,y+k)+kf'_y(x,y+\theta k).$$

公式(8)及(9)都和平均值公式(2)相類,這些公式自然可以推廣到任何數的自變數的函數上.

若是偏導來式 f'_x, f'_y 都是連續的,我們仍可將 f 的增長寫作

(10) $$f(x+h,y+k)-f(x,y)=h[f'_x(x,y)+\varepsilon]+k[f'_y(x,y)+\varepsilon'],$$

ε 及 ε' 都和 h 及 k 同時成爲零.這一個式 $f(x+h,y+k)-f(x,y)$ 是常常有用的;在代數學中,總用以成立求合成函數 (fonction composée) 的導來式的公式.

注意——若要將 $f(x,y)$ 的增長寫爲 (10) 的形狀, $f(x,y)$ 有偏導來式不是充足的條件.例如函數 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 在

x,y不都等於零時,牠是確定的,在$x=y=o$,牠等於零。

這個函數是連續的,在原點上也是如此,對於 x,y 的一組任何價值,偏導來式f'_x, f'_y都有確定的價值,特別的

$$f'_x(x,o)=o,\quad f'_y(o,y)=o,$$

這是因爲函數$f(x,y)$在每一坐標軸上都等零的緣故,對於$x=y=o$,公式(10)不能應用在此函數上,若是用此公式,將得

$$f(h,k)=h\varepsilon+k\varepsilon',$$

ε,ε'和h,k同時爲無限小,但是若令$k=h$,我們有$f(h,k)=\dfrac{h}{\sqrt{2}}$而不等於$h\eta$,$\eta$是一個無限小。

20. **一個曲面上的切平面** (plan tangent.)——一個自變數的函數的導來式顯明曲線的切線;和此相類,兩個自變數的函數的的偏導來式關係在曲面的切平面的求法上。

設

$$z=F(x,y) \tag{12}$$

是曲面S的方程式;我們假定函數F及牠的偏導來式在平面xy的一點(x_0,y_0)上都是連續的,對於此一點,z有一個價值z_0和牠相應,曲面有一點$M_0(x_0,y_0,z_0)$和牠相應,在曲面S上取一經過M_0點的任一曲線,設

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t) \tag{13}$$

是曲線上一點的坐標,牠們都是一個變率t的函數;$f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$是變率t的連續函數,在t的特別價值t_0時,這些函數各成爲x_0, y_0, z_0,曲線上在此M_0點的切線(n^o14)是爲以下的方程式所表,

$$\frac{X-x_0}{f'(t_0)}=\frac{Y-y_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{Z-z_0}{\psi'(t_0)}. \tag{14}$$

他一方面,曲線C既在曲面S上,所以無論t如何,關係式

$$\psi(t)=F[f(t),\varphi(t)]$$

都是當滿足的,那麼,方程式的兩端當恆等;我們依合成函數的導來法,取第二端的導來式,又令$t=t_0$,得

$$(15)\qquad \psi'(t_0)=f'(t_0)F'_{x_0}+\varphi'(t_0)F'_{y_0}.$$

在方程式(14)及(15)中消去$f'(t_0)$,$\varphi'(t_0)$及$\psi'(t_0)$,得

$$(16)\qquad Z-z_0=(X-x_0)F'_{x_0}+(Y-y_0)F'_{y_0};$$ 這個方程式表一個平面,這是曲面上過M_0點的所有曲線的切線的軌迹.我們稱他爲曲面的切平面.(*cf.* 習題18)

21. 自差數求導來式.——累次導來式我們是逐漸求出的,n級的導來式是自$n-1$級的導來式得來.我們當然可以設想能否直接定n級的偏導來式不從低級的導來式經過.對於f''_{xy}我們已如此作過(參觀$n^\circ 19$),因爲這個證明法表明f''_{xy}是比

$$\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)}{\Delta x\Delta y}$$

在Δx及Δy漸近於零時的極限.同樣,f''_{x^2}是比

$$\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)-f(x+h_2)+f(x)}{h_1h_2}$$

在h_1及h_2漸近於零時的極限.這是誠然,若是令

$$f_1(x)=f(x+h_1)-f(x),$$

這個比就可寫爲

$$\frac{f_1(x+h_2)-f_1(x)}{h_1h_2}=\frac{f'_1(x+\theta h_2)}{h_1},\quad 0<\theta<1,$$

或

$$\frac{f'(x+h_1+\theta h_2)-f'(x+\theta h_2)}{h_1}=f''(x+\theta' h_1+\theta h_2),\quad 0<\theta'<1$$

所以此比的極限是二次導來式f''_{x^2},但必須這個導來式是連續的.

現在我們論普通場合.為確定人的觀念,設

$$\omega=f(x,y,z)$$

是三個自變數的一個函數.我們令

$$\Delta_x^h\omega=f(x+h,y,z)-f(x,y,z),$$

$$\Delta_y^k\omega=f(x,y+k,z)-f(x,y,z),$$

$$\Delta_z^l\omega=f(x,y,z+l)-f(x,y,z);$$

Δ_x^h, Δ_y^k, Δ_z^l是ω的第一差數.若將h, k, l看作常數,這三個第一差數也是x, y, z的函數,我們又可取牠們關於變數的增長h_1, k_1, l_1的差數,如此,我們卽得第二差數$\Delta_x^{h_1}\Delta_x^h\omega$, $\Delta_x^{h_1}\Delta_y^k\omega,\cdots$.這個方法可以延長無限:第$n$級的一個差數可以作為$n-1$級的差數的第一差數.因以上的運算可以顛倒任何兩個的次序所以只須指明每一變數的叠次增長.一個n級的差數是用以下的記號表明:

$$\Delta^{(n)}\omega=\Delta_x^{h_1}\Delta_x^{h_2}\cdots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\cdots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\cdots\Delta_z^{l_r}f(x,y,z),$$

在其中$p+q+r=n$.增長h_i, k_i, l_i能彀是相等的或不相等的.這個差數可以用n級的偏導來式表牠;牠等於積數

$$h_1h_2\cdots h_pk_1\cdots k_ql_1\cdots l_r$$

$$\times f^{(n)}_{x^py^qz^r}(x+\theta_1h_1+\cdots+\theta_ph_p,y+\theta'_1k_1+\cdots+\theta'_qk_q,z+\theta''_1l_1+\cdots+\theta''_rl_r),$$

這一切的θ都是大於零小於一.對於第一及第二差數這個公式已經是證明的了.若要證明這個公式是一般的,我們可以先

承認這個公式對於 $n-1$ 級的差數是確實的,設這個差數是

$$\varphi(x,y,z)=\Delta_x^{h_2}\cdots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\cdots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\cdots\Delta_z^{l_r}f;$$

由假設

$$\varphi(x,y,z)=h_2\cdots h_pk_1\cdots k_ql_1\cdots l_rf^{(n-1)}_{x^{p-1}y^qz^r}(x+\theta_2h_2+\cdots+\theta_ph_p,y+\cdots)$$

然而我們所設的 n 級的差數等於

$$\varphi(x+h_1,y,z)-\varphi(x,y,z),$$

只須再應用有限增長公式在此差數上,即可得我們所要證明的公式.

翻轉過來,偏導來式 $f^{(n)}_{x^py^qz^r}$ 是一切增長 h,k,l 漸近於零時,比

$$\frac{\Delta_x^{h_1}\Delta_x^{h_2}\cdots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\cdots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\cdots\Delta_z^{l_r}f}{h_1h_2\cdots h_pk_1\cdots k_ql_1\cdots l_r}$$

的極限,這是很有興味的,我們若是注意對於高級偏導來式,這個定義有時比尋常定義較為普徧,例如函數

$$\omega=f(x,y)=\varphi(x)+\psi(y),$$

$\varphi(x)$ 及 $\psi(y)$ 是沒有導來式的,ω 自然也沒有第一級偏導來式;所以先天的就論不到第二級導來式上.但是我們若取新定義,在求 f''_{xy} 時,就必須求以下的比的極限:

$$\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{hk},$$

此比等於

$$\frac{\varphi(x+h)+\psi(y+k)-\varphi(x+h)-\psi(y)-\varphi(x)-\psi(y+k)+\varphi(x)+\psi(y)}{hk}.$$

此比的分子恒等於零;他的極限自然是零,於是我們可以寫為 $f''_{xy}=0$.〔註三〕

II——微分記法

微分的記法,是所用記法中最古的,爲來本尼所創.雖是這個記法不是不能離卻的,然而牠在普通公式中現出對稱的利益,這個利益實甚顯著,而對於多自變數的函數的研究上爲尤甚,這個記法的起原是因爲無限小(infininents petits)的注意.

22. 微分.——設$y=f(x)$是一個連續函數,牠有一個導來式$f'(x)$,我們給x一個增長Δx,用Δy表y的相應增長,由導來式的定義,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon,$$

ε和Δx同時漸近於零.若將Δx看做主無限小,Δy也就是無限小,牠的主部分(partie principale)是$f'(x)\Delta x$,但是必須假定$f'(x)$不等於零.這是這個主部分叫做y的微分,我們用dy來表牠

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

在$f(x)$收縮爲x時,上面的公式收縮爲$dx=\Delta x$;爲對稱起見,我們寫爲

$$dy=f'(x)dx,$$

但是自變數的增長dx,當看作一個任意常數.

圖 2

在方程式 $y=f(x)$ 所表的曲線 C 上,取兩點 M 及 M', 牠們的橫線是 x 及 $x+dx$. 在三角形 MTN 中,得

$$NT=MN\operatorname{tang}\widehat{NMT}=dxf'(x);$$

所以 NT 表微分 dy, 而 Δy 等於 NM'. 由圖很容易看出 M' 和 M 無限相近時, $M'T$ 比較 NT 是無限小.

疊次微分是順次定出的,和疊次導來式一樣,所以第一級微分的微分叫做第二級微分, dx 常常是看作常數,這個第二級微分是 d^2y

$$d^2y=d(dy)=[f'(x)dx]dx=f''(x)dx^2$$

同樣,第三級微分是

$$d^3y=d(d^2y)=[f''(x)dx^2]dx=f'''(x)dx^3,$$

餘仿此.一般,第 n 級的微分是第 $n-1$ 級的微分的微分,牠的算式是

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n.$$

導來式 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ 可以倒轉來用微分來表明,於是導來式又有一種新記法.

$$y'=\frac{dy}{dx},\ y''=\frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots,\ y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n},\ \cdots.$$

凡計算一個導來式的定規,都有計算一個微分的定規相應.現在我們暫時停留在函數的函數的場合.設 $y=f(u)$, u 是自變數 x 的函數.我們得

$$y'_x=f'(u)u'_x$$

用 dx 乘其兩端,得

$$y'_xdx=f'(u)u'_xdx,$$

或

$$dy=f'(u)du,$$

由此看去,表dy的公式好像是u是自變數似的,這就是微分的記法的一個利益,用導來式的記法則不然隨着y直接是x的函數,或是由函數u的媒介間接是x的函數,我們表y關於x的導來式有兩個不同的公式

$$y'_x=f'(x),\quad y'_x=f'(u)u_x.$$

用微分的記法,一個公式可以應用在此兩種場合.

若是$y=f(u,v,w)$是一個合成函數(fonction composée),我們得

$$y'_x=u'_xf'_u+v'_xf'_v+w'_xf'_w,$$

用dx乘,

$$y'_xdx=u'_xdxf'_u+v'_xdxf'_v+w'_xdxf'_w$$

或

$$dy=f'_udu+f'_vdv+f'_wdw.$$

例如

$$d(uv)=udv+vdu,\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

同樣的定規可以計算疊次微分.例如求函數的函數$y=f(u)$的疊次微分;我們已經得着

$$dy=f'(u)du.$$

欲計算d^2y,當注意的是du不能當作常數,這是因爲u不是自變數的緣故.所以我們所要計算的是一個合成函數$f'(u)du$的微分,其中u及du都是居間的函數(fonctions intermédiaires),我們得

$$d^2y=f''(u)du^2+f'(u)d^2u.$$

欲計算d^3y,必須將d^2y看做一個合成函數牠函有三個居間

函數 u, du, d^2u;從得

$$d^3y = f'''(u)du^3 + 3f''(u)dud^2u + f'(u)d^3u,$$

餘仿此.我們可以注意,因爲 $d^2u, d^3u, \cdots$ 諸項,表微分 $d^2y, d^3y, \cdots$ 的公式亦和 u 是自變數時的公式不同.

多自變數的一個函數的偏導來式也有和此相類的記法.所以 $f(x,y,z)$ 的 n 級的偏導來式,在拉格郎熱的記法是用 $f^{(n)}_{x^py^qz^r}$ 表的,然用來本尼的記法是

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}.$$

這個記法純粹是一個符號,並不是表一個商像一個自變數的函數的場合似的.〔註四〕

23. **全微分** (différentielles totales).——設 $\omega = f(x,y,z)$ 是三個變數 x, y, z 的函數,牠有第一級的偏導來式,並且都是連續的.若是變數 x, y, z 有了增長 dx, dy, dz, ω 也就有一個增長 $\Delta\omega$ 相應,牠的式是

$$\Delta\omega = (f'_x + \varepsilon)dx + (f'_y + \varepsilon')dy + (f'_z + \varepsilon'')dz,$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ 和 dx, dy, dz 同時漸近於零.

我們稱

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

爲全微分,此式是在 $\Delta\omega$ 中略去 $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ 得來的.這三個積數 $\frac{\partial f}{\partial x}dx, \frac{\partial f}{\partial y}dy, \frac{\partial f}{\partial z}dz$ 都是偏微分.

第二級的全微分是第一級的全微分的全微分,凡自一個微分求高級的微分時,增長 dx, dy, dz 都當看作常數並且是常常相同的.所以

$$d^2\omega=d(d\omega)=\frac{\partial d\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial d\omega}{\partial y}dy+\frac{\partial d\omega}{\partial z}dz,$$

展開,得

$$\begin{aligned}d^2\omega&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dz\right)dx\\&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dz\right)dy\\&+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2\\&+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}dzdx.\end{aligned}$$

在方程式的第二端,若是用∂f^2代$\partial^2 f$,即得$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$的平方的展開式所以我們可以將此方程式寫為符號的等式:

$$d^2\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(2)},$$

此式展開以後,我們當將其中的∂f^2換作$\partial^2 f$.這個定律是一般的;若是我們將$n-1$級的全微分的全微分,稱為n級的全微分,不論n如何,我們都得着

$$d^n\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)},$$

展開以後,∂f^n都當代以$\partial^n f$.這個定律對於$n=1$及$n=2$,都是已經徵實的了.現在我們只須證明此定律若是對於$d^n\omega$是確實的,牠對於$d^{n+1}\omega$也就是確實的.對於$d^n\omega$我們已承認這個定律,展開,得

$$d^n\omega=\Sigma A_{pqr}\frac{\partial^n f}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}dx^p dy^q dz^r,$$

其中$p+q+r=n$.係數A_{pqr}是和

$$(dx+dy+dz)^n$$

的展開式中的 $dx^p dy^q dz^r$ 的係數相同,就是

$$A_{pqr}=\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots p\cdot 1\cdot 2\cdots q\cdot 1\cdot 2\cdots r}.$$

由上式演出

$$d^{n+1}\omega=\Sigma A_{pqr}\Big(\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{p+1}\partial y^q\partial z^r}dx^{p+1}dy^q dz^r+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^{q+1}\partial z^r}dx^p dy^{q+1}dz^r+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^q\partial z^{r+1}}dx^p dy^q dz^{r+1}\Big);$$

現在若將 $\partial^{n+1}f$ 代以 ∂f^{n+1},第二端可以寫爲

$$\Sigma A_{pqr}\frac{\partial f^n}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}dx^p dy^q dz^r\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\Big),$$

或

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\Big)^n\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\Big),$$

所以由同一的規約,得

$$d^{n+1}\omega=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\Big)^{(n+1)}$$

注意——假令無論用何方法,已經得着 $d\omega$ 的全微分式

(17) $$d\omega=Pdx+Qdy+Rdz,$$

P, Q, R 都是 x, y, z 的函數,因爲由定義

$$d\omega=\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy+\frac{\partial\omega}{\partial z}dz,$$

從而得

$$\Big(\frac{\partial\omega}{\partial x}-P\Big)dx+\Big(\frac{\partial\omega}{\partial y}-Q\Big)dy+\Big(\frac{\partial\omega}{\partial z}-R\Big)dz=o;$$

但是由規約,dx, dy, dz 是任意常數,所以必須

(18) $$\frac{\partial\omega}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial\omega}{\partial z}=R;$$

方程式 (17) 和 (18) 的三個方程式同價,我們由此可以同時知道第一級的三個偏導來式.一般,不論用何方法,若是已得着 n 級的全微分式

$$d^n\omega=\Sigma C_{pqr}dx^p dy^q dz^r;$$

除邻數目的因子相差外,係數 C_{pqr} 都等於 ω 的 n 級的偏導來式.如此,我們就同時得着同級的一切偏導來式;以後我們可見此注意的應用.

24. **一個合成函數的疊次微分**——設有一個合成函數 $\omega=F(u,v,w)$, u,v,w 都是自變數 x,y,z,t 的函數.我們寫出第一級偏導來式的式子;

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

將此四個方程式各乘以 dx, dy, dz, dt, 再相加,第一端即成爲全微分 $d\omega$, 至於 $\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v},\frac{\partial F}{\partial w}$ 的係數就各等於 du, dv, dw,我們得

$$(19)\qquad d\omega=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw.$$

由此可見一個合成函數的第一級全微分式,好像這些居間函數都是自變數似的.此處現出微分記法的一個主要利益,關係式(19)不關於自變數的數目和選擇,有幾個自變數,牠就和幾個關係式同價.

欲計算 $d^2\omega$, 我們注意公式 (19) 的第二端有六個居間函數; u, v, w, du, dv, dw, 然後用方纔對於 $d\omega$ 所成立的定規.所以

$$
\begin{aligned}
d^2\omega = & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} du dw + \frac{\partial F}{\partial u} d^2 u \\
& + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w} dv dw + \frac{\partial F}{\partial v} d^2 v \\
& + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} du dw + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w} dv dw + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} dw^2 + \frac{\partial F}{\partial w} d^2 w,
\end{aligned}
$$

簡約以後,並用符號的記法得

$$
d^2\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial F}{\partial v} d^2 v + \frac{\partial F}{\partial w} d^2 w
$$

此公式較複雜於u, v, w都是自變數的場合,這是因d^2u, d^2v, d^2w諸項的存在的緣故;此諸項在u, v, w爲自變數時都自行消滅.欲得$d^3\omega$,我們仍可應用對於$d^2\omega$的定規,但須注意於$d^2\omega$關係於九個居間函數:$u, v, w, du, dv, dw, d^2u, d^2v, d^2w$;餘仿此.這些微分的公式逐漸加繁;$d^n\omega$是$u, v, w$的微分以至於$n$級的整函數(fonction entiere)對於$n>2$,祂含n及$n-1$級微分的各項的集合是

$$
\frac{\partial F}{\partial u} d^n u + \frac{\partial F}{\partial v} d^n v + \frac{\partial F}{\partial w} d^n w + n\left\{ d\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) d^{n-1} u + \cdots \right\}.
$$

若是在$d^n\omega$中將$u, v, w, du, dv, dw, \cdots$代以祂的關於自變數的價值,$d^n\omega$就成爲$dx, dy, dz$的整多項式(polynome entier),其各項的係數都等於ω的n級的偏導來式乘以某某等數字的因子(參觀$n^0$23).如此,我們卽將n級的所有偏導來式一次求出.

例如欲計算合成函數$\omega = f(u)$的第一及第二級的偏導來式,u是兩個自變數的函數$u = \varphi(x, y)$.若是分別計算這些偏導來式我們就先得着第一級的兩個偏導來式

$$
(20) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y},
$$

再關於x及y取此二方程式的導來式,我們卽得三個各別的關係式以定第二級的偏導來式:

$$
(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \end{cases}
$$

(21)的第二個關係式是關於y微分(20)的第一方程式得來,或關於x微分(20)的第二方程式得來.若是用全微分式,這五個關係式(20)及(21)能為兩個關係式所替代:

$$
(22)\qquad \begin{cases} d\omega=\dfrac{\partial\omega}{\partial u}du, \\ d^2\omega=\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}du^2+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}d^2u; \end{cases}
$$

若在此二公式中用$\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$代$du$,又用

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$代$d^2u$,第一公式中$dx,dy$的係數定$\omega$的第一級偏導來式,第二公式中$dx^2$, $2dxdy$, dy^2的係數定ω的第二級偏導來式.

25. **一個積的微分**——表一個合成函數的n級的全微分,在應用上的某某場合成為簡單.例如計算兩個因子的積的n級的全微分.設$\omega=uv$,我們得

$$d\omega=vdu+udv,\ d^2\omega=vd^2u+2dudv+ud^2v,$$

一般,由以上的微分的構成的定律,可見

$$d^n\omega=vd^nu+c_1dvd^{n-1}u+c_2dv^2d^{n-2}u+\cdots+ud^nv,$$

C_1, C_2,⋯ 都是正整數.我們本可以逐漸證明這些係數都等於$(a+b)^n$的展開式的係數.然而關於此我們有一個較為美麗的方法,這個方法在此類的許多問題上都能應用.我們注意$C_1,C_2,\cdots,C_p$,

和函數 u 及 v 的性質無關係;所以可以任意選擇幾個特別函數以決定這些係數.為此,我們取 $u=e^x$, $v=e^y$, x 及 y 是兩個自變數;因得

$$\omega=e^{x+y},\ d\omega=e^{x+y}(dx+dy),\cdots,\ d^n\omega=e^{x+y}(dx+dy)^n,$$

$$du=e^x dx,\ d^2u=e^x dx^2,\cdots,$$

$$dv=e^y dy,\ d^2v=e^y dy^2,\cdots,$$

因而總公式成為

$$(dx+dy)^n=dx^n+c_1 dy dx^{n-1}+c_2 dy^2 dx^{n-2}+\cdots+dy^n.$$

因為 dx 及 dy 都是任意的,所以當得

$$C_1=\frac{n}{1},\ C_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\cdots,C_p=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots p},\cdots,$$

結果,總公式成為

$$d^n(uv)=vd^nu+\frac{n}{1}dvd^{n-1}u+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2vd^{n-2}u+\cdots+ud^nv. \tag{23}$$

無論自變數的數目如何,此公式都能應用.若是 u 及 v 都是一個變數 x 的函數,用 dx^n 除,即得二數的積的 n 級導來式.對於任何數的因數的積也有和(23)相類的公式,其證法亦同.

若是居間函數 u, v, w 都是自變數 x, y, z 的一次整函數,定 $d^n\omega$ 的公式也成為簡單.設

$$u=ax+by+cz+f,$$

$$v=a'x+b'y+c'z+f',$$

$$w=a''x+b''y+c''z+f'',$$

係數 $a, a', a'', b, b', \cdots$ 都是常數.我們得

$$du=adx+bdy+cdz,$$

$$dv=a'dx+b'dy+c'dz,$$

$$dw=a''dx+b''dy+c''dz,$$

凡$n>1$的微分$d^n u$, $d^n v$, $d^n w$都等於零,所以定$d^n\omega$的公式就和u, v, w都是自變數一樣,

$$d^n\omega=\left(\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw\right)^{(n)}.$$

26. 同質函數(fonction homogène).——一個函數$\varphi(x,y,z)$,若是

$$\varphi(tx,ty,tz)=t^m\varphi(x,y,z),$$

此函數就叫做同質函數,牠的次數是m.

我們暫時將x,y,z看作常數,將t看作自變數,上面的方程式可以寫爲

$$\varphi(u,v,w)=t^m\varphi(x,y,z),$$

在此式中,$u=tx$, $v=ty$, $w=tz$.

令此式兩端的n級的微分相等,因爲u, v, w都是t的一次函數,

$$du=xdt,\ dv=ydt,\ dw=zdt,$$

依上節的注意,將兩端的公因子dt^n除去,得

$$\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial u}+y\frac{\partial\varphi}{\partial v}+z\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)t^{m-n}\varphi(x,y,z).$$

現在若令t等於1, u,v,w就都成爲x,y,z,在第一端的展開式中的任一項

$$A_{pqr}\frac{\partial^n\varphi}{\partial u^p\partial v^q\partial w^r}x^py^qz^r$$

都成爲

$$A_{pqr}\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}x^py^qz^r;$$

從而得符號的等式

$$\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)\,\varphi\,(x,y,z),$$

在$n=1$時此式即成爲最著的公式

$$m\varphi(x,y,z)=x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot$$

各種記法——總而言之,我們有三種記法,以表多自變數的函數的各級的偏導來式,就是來本尼的記法,拉格郎熱的記法,高失(Cauchy)的記法,這各種記法都失之繁雜,於是大家又生出許多較簡的記法,這些記法中最常用的是孟然(Monge)所創,但是此記法僅對於二自變數的函數的第一級及第二級偏導來式有之;設 z 是自變數 x 及 y 的函數,命

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

全微分 dz, d^2z 的式子是

$$dz=pdx+qdy,$$

$$d^2z=rdx^2+2sdxdy+tdy^2$$

27. 關於多自變數的戴勞公式——為確定人的觀念,我們設三自變數的一個函數 $\omega=f(x,y,z)$;對於自變數的增長 h,k,l,此函數有相應的增長,我們能得此函數的展開式和公式(6)相類($n^\circ 18$),為此,只須用高失所創的技術如下:將 x,y,z,h,k,l 看作有確定的價值,命

$$\varphi(t)=f(x+ht,y+kt,z+lt),$$

t 是一個輔助變數,函數 φ 只關係於一個變數 t;若應用總公式(6),此函數就成為

$$\varphi(t)=\varphi(o)+\frac{t}{1}\varphi'(o)+\frac{t^2}{1\cdot 2}\varphi''(o)+\cdots \tag{24}$$

$$+\frac{t^n}{1\cdot 2\cdots n}\varphi^{(n)}(o)+\frac{t^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\varphi^{(n+1)}(\theta t),$$

$\varphi(o),\varphi'(o),\cdots,\varphi^{(n)}(o)$ 是 $t=o$ 時 $\varphi(t)$ 及牠的導來式的價值,$\varphi^{(n+1)}(\theta t)$ 是 $n+1$ 級的導來式對於 θt 的價值,θ 是在零及一間的一個數.

但是$\varphi(t)$可以看做t的一個合成函數，$\varphi(t)=f(u,v,w)$，居間函數

$$u=x+ht,\ v=y+kt,\ w=z+lt$$

都是t的一次函數.由以前所證,第m級的微分式$d^m\varphi$是和u,v,w都是自變數時一樣的,因得

$$d^m\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw\right)^{(m)}=dt^m\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)},$$

此式仍可寫爲

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)}.$$

對於$t=o$, u,v,w各收縮爲x,y,z;仍用符號的記法,上面的等式就成爲

$$\varphi^{(m)}(o)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(m)},$$

同樣,

$$\varphi^{(m+1)}(\theta t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(m+1)}$$

此式展開以後,x,y,z當各代以

$$x+\theta ht,\ y+\theta kt,\ z+\theta lt.$$

現在在公式(24)中令$t=1$,得

$$(25)\qquad f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{1\cdot2\cdots n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n)}+R_n,$$

這個餘項(terme compl'ementaire)的式子是

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)}$$

此項展開以後,當將偏導來式中的x,y,z代以$x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$.

若是略去餘項R_n,公式(25)的第二端即成爲含h,k,l的n次多項式$P_n(h,k,l)$;若是函數$f(x,y,z)$的第$(n+1)$級的偏導來式都

是有限制的,那麼,函數 $f(x+h,y+k,z+l)$ 及此多項式 P_n 的差就是含 h,k,l 的一個 $(n+1)$ 次的同質多項式.此式的係數仍關係於 h,k,l,可是都是有限制的.

在求函數的極限時,若是遇着不定形,公式 (25) 是很效用的.我們在第三章可見此公式的應用.設 $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ 是兩個函數,牠們在 $x=a$ 及 $y=b$ 時都成爲零,但是在 $x=a$ 及 $y=b$ 的點的附近,此二函數及牠們的偏導來式以至於某級都是連續的;我們求除式

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$$

在 x 及 y 各近於 a 及 b 時的極限.爲此,先假定這四個第一級的偏導來式 $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial \varphi}{\partial a}, \frac{\partial \varphi}{\partial b}$ 不同時爲零;我們可以寫爲

$$\frac{f(a+h,b+k)}{\varphi(a+h,b+k)} = \frac{h\left(\frac{\partial f}{\partial a} + \varepsilon\right) + k\left(\frac{\partial f}{\partial b} + \varepsilon'\right)}{h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \varepsilon_1\right) + k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} + \varepsilon_1'\right)}$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_1'$ 和 h 及 k 同時漸近於零,幾時 (x,y) 點漸近於 (a,b), h 及 k 都漸近於零;我們假定 $\frac{h}{k}$ 漸近於一個極限 α,這就是說 (x,y) 點所畫的曲線在 (a,b) 點有一個切線.用 h 除上面的比的兩項,可見分數式 $\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$ 的極限是

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a} + \alpha\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial b}};$$

此極限通常的關係於 α,就是關係於 x 及 y 漸近於極限 a 及 b 時的情形.欲使此極限不關係於 α,必須要

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = o.$$

通常的這個關係是不能滿足的.若是這四個導來式$\frac{\partial f}{\partial a},\frac{\partial f}{\partial b},\frac{\partial \varphi}{\partial a},\frac{\partial \varphi}{\partial b}$都等於零,我們就取展開式中含$h$及$k$的二次各項;餘仿此.

III.——極限(limites)所定的函數

28. **定些新函數的方法** —— 以上所研究的函數都是些有理函數及無理函數,指函數及對函數,圓函數及反函數,以及由這些函數所組成的函數,這一切函數都有無窮的導來式,這一切的導來式都能由代數學上所立的定規計算.現在我們又能用極限的法定出無限的新函數來.

設$f_n(x)$是變數x的函數,此函數在(a,b)區域內是確定的,又另外的關係一個整數n在(a,b)區域內,我們給x一個任何確定的價值;若是在n增長無限時,$f_n(x)$的相應值漸近於一個極限.這個極限價值普通的是隨着所給x的價值變的,所以就是x的函數,我們用$F(x)$表此函數,寫爲

$$F(x)=\lim_{n=\infty} f_n(x) \tag{26}$$

或簡寫爲$F(x)=\lim f_n(x)$.

最要注意的,$f_n(x)$能夠不論n如何都是x的連續函數,而極限$F(x)$並不是連續函數.例如$f_n(x)=x^n$,假定$o\leq x\leq 1$.這個函數在區域$(0,1)$內是連續的,n如何不論;n增加無限時,若$x<1$,我們有$\lim x^n=o$,若$x=1$,我們有$\lim x^n=1$.所以極限函數$F(x)$對於$x=1$是不連續.

再取

$$f_n(x)=\frac{1-x^n}{1+x^n},x\geq o;$$

對於$x<1$,$F(x)$的極限是$+1$,對於$x>1$,$F(x)$的極限是-1,對

於 $x=1$ $F(x)=o$, 同樣,若 x 不等於零, $(1+x^2)^{-n}$ 的極限是零,若 $x=o$, 牠就等於1.

設 $f_n(x)$ 是一個連續函數,牠的極限也是一個連續函數 $F(x)$. 若 $f_n(x)$ 有一個導來式 $f'_n(x)$, 自等式

$$\lim f_n(x)=F(x),$$

不能決定

$$\lim f'_n(x)=F'(x),$$

例如 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, 極限 $F(x)$ 等於 $|x|$. 但是不論 n 如何, 對於 $x=o$, 導來式 $f'_n(x)$ 都等於零,然而對於 x 這個價值, $F(x)$ 沒有導來式.同樣,函數 $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ 牠的極限 $F(x)=o$; 導來式 $F'(x)$ 也是如此.然而 $f'_n(x)=\cos nx$ 在 n 無限大時沒有極限.由幾何表示法,可得這些結果的直觀.〔註五〕

29. **均一收歛.** (convergence uniforme)——

設 $f_n(x)$ 是在區域 (a,b) 內一個函數,在 n 增加無限時,漸近於一個極限 $F(x)$. 差數 $\delta_n(x)=F(x)-f_n(x)$ 和 $\frac{1}{n}$ 同時爲零.若是對於任一正數 ε, 我們能求得一個正整數 N,只要 n 大於或等於 N 時,必得着

$$|\delta_n(x)|<\varepsilon,$$

這個不等式對於 x 在 (a,b) 區域內一切價值都是存在的.如此,我們就說 $f_n(x)$ 均一的漸近於 $F(x)$, 或說是均一的向 $F(x)$ 收斂.

在這個定義之中,數 N 不關係 x 只關係 ε, 這個條件最爲緊要.對於 x 在區域 (a,b) 內一個價值,自然有一個整數 N_x 存在,只要 $n\geqq N_x$, $|\delta_n(x)|$ 就小於 ε. 然而無論 N 如何大,這並不能表明這一個數 N 對於 x 的一切價值都能滿足這個條件.要證明不是常

常如此,只須取以前所舉的一個函數作爲例子,譬如是函數 x^n,假定 $o\leqq x<1$. 差數 $\delta_n(x)$ 的絕對値等於 x^n.若要 $\delta_n(x)$ 均一的漸近於零,必須要不論 ε 如何,有一個數 N 存在,只要 x 及 n 能滿足條件 $o<x<1, n\geqq N$, 不等式 $x^n<\varepsilon$, 就常能滿足.特殊的必要 $x^n<\varepsilon$, 或 $x<\varepsilon^{\frac{1}{N}}$, 對於 x 在零及 1 間一切價値都是如此.但是若假定 $\varepsilon<1$, 無論 N 如何總有些數在 $\varepsilon^{\frac{1}{N}}$ 及 1 中間.同樣可見 x 在零及 1 中間的時候函數 $\frac{1-x^n}{1+x^n}$ 也不是均一的漸近於 1, 這是因爲差數 $\delta_n(x)$ 大於 x^n 的緣故.

再取一個式

$$f_n(x)=nxe^{-nx^2}$$

在 n 無限時,牠的極限 $F(x)=o$. 在一個包有零的任何區域內,此式不是均一的漸近於零.譬如在區域 $(o,1)$ 能.誠然,對於 $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$, 這個式等於 $\frac{\sqrt{n}}{e}$; 所以不論 h 如何小,在區域 (o,h) 內,牠總有些價値和 n 同時增加無限.

由以下的命題可見均一收斂這個意義的重要:

<u>*A*. 若是一個連續函數 $f_n(x)$ 在一個區域內均一的漸近於一個極限 $F(x)$, 這個函數 $F(x)$ 就也是此區域內的一個連續函數.</u>

設 x 及 $x+h$ 是變數在所取區域 (a,b) 內的兩個價値;自不等式

$$F(x)=f_n(x)+\delta_n(x),\ F(x+h)=f_n(x+h)-\delta_n(x+h),$$

由減法,得

$$F(x+h)-F(x)=[f_n(x+h)-f_n(x)]+\delta_n(x+h)-\delta_n(x).$$

$f_n(x)$ 既是均一的漸近於 $F(x)$, 我們可取 n 有充分的大,不

論x在(a,b)區域內如何,使$\delta_n(x)$的絕對值小於一個預定的任何小的正數ε.這個數n如此選定;$f_n(x)$既是連續的,我們又能得一個正數η,只要$|h|<\eta$,必得着不等式

$$|f_n(x+h)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

x及$x+h$是區域(a,b)內兩個數,$F(x+h)-F(x)$是三項的和,每一項的絕對值都小於ε.所以

$$|F(x+h)-F(x)|<3\varepsilon,$$

只要$|h|<\eta$;ε既是一個任意正數,所以$F(x)$在區域(a,b)內是連續函數.

B.若是一個連續函數$f_n(x)$有一個極限$F(x)$,又若是導來式$f'_n(x)$均一的漸近於一個函數$\Phi(x)$,這個函數$\Phi(x)$就是$F(x)$的導來式.

為簡便計,令$f_{n+p}(x)-f_n(x)=\Delta(x)$,$n$及$p$是兩個正整數.我們先證明能選擇$n$有充分的大,對於$x$在$(a,b)$區域內一切價值,不論$p$如何,都能使$\Delta'(x)$的絕對值小於一個已知正數$\varepsilon$.誠然,我們有

$$\Delta'(x)=f'_{n+p}(x)-f'_n(x)=[\Phi(x)-f'_n(x)]-[\Phi(x)-f'_{n+p}(x)];$$

$f'_n(x)$既是均一的漸近於$\Phi(x)$,設N是一個正整數,對於$n\geqq N$,$\Phi(x)-f'_n(x)$的絕對值在全區域內都小於$\dfrac{\varepsilon}{2}$.因而$\Phi(x)-f'_{n+p}(x)$的絕對值也是如此,正數p如何不論,所以在全區域(a,b)內,$\Delta'(x)$的絕對值都小於ε.

整數n既依以上的條件選定,用x及$x+h$表區域(a,b)內兩個價值,我們又可寫為

$$f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)=f_n(x+h)-f_n(x)+\Delta(x+h)-\Delta(x),$$

或應用平均值定理在 $\Delta(x+h)-\Delta(x)$ 上,

$f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)=f_n(x+h)-f_n(x)+h\Delta'(x+\theta h),(o<\theta<1)$.

在這個關係式中,我們假定 n 不變而 p 增加無限;第一邊的極限是 $F(x+h)-F(x)$. 至於 $\Delta'(x+\theta h)$, 依選擇 n 時的條件,牠的極限的絕對值不能大於 ε. 所以,用 h 除,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}+\lambda(x,h),$$

$\lambda(x,h)$ 的絕對值 $\leqq\varepsilon$; 因而取得

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\Phi(x)$$

$$=\left[\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f'_n(x)\right]+\left[f'_n(x)-\Phi(x)\right]+\lambda(x,h).$$

差數 $f'_n(x)-\Phi(x)$ 的絕對值既小於 $\frac{\varepsilon}{2}$, 即小於 ε, 他一方面, $f'_n(x)$ 是 $f_n(x)$ 的導來式,我們能求得一個正數 η, 使

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f'_n(x)\right|<\varepsilon,$$

只要 $|h|<\eta$, x 是區域 (a,b) 內一個確定價值,所以對於 h 的這些價值,我們有

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\Phi(x)\right|<3\varepsilon.$$

所以 $F(x)$ 的導來式是 $\Phi(x)$.

30. **均一收歛的級數.** ——依以前的一個注意($n^\circ 5$), 一個收歛序的極限能爲一個收歛級數的和所定,反之也是如此. 所以一個函數 $F(x)$, 由函數 $f_n(x)$ 所成的序在 n 無限時的極限所定,或是由一個收歛級數的和所定是一樣的.誠然,關係式 $F(x)=\lim f_n(x)$ 同價於等式

(27) $F(x)=f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+\cdots+[f_n(x)-f_{n+1}(x)]+\cdots,$

此式表明第二端的級數是收歛的,牠的和是 $F(x)$. 翻轉來,設有

一個收斂級數

$$(28)\qquad u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,$$

牠的和$F(x)$是和

$$S_n(x)=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

在n無限時的極限.所以由以上所舉的函數$f_n(x)$,我們能作出些級數,牠們的各項都是連續的,但是牠們的和是不連續.例如級數

$$(29)\qquad x+x(x-1)+\cdots+x^n(x-1)+\cdots,$$

牠在區域$(o,1)$內是收斂的,在$x=1$時是不連續,同樣,級數

$$(30)\ F(x)=\frac{1-x}{1+x}+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\right)+\cdots+\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}-\frac{1-x^{n-1}}{1+x^{n-1}}\right)+\cdots$$

在$x=1$時有一個規則不連續(discontinuite' régulière),誠然,我們有$F(1+O)=-1, F(-0)=1, F(O)=O$,級數

$$(31)\qquad \frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots,$$

牠的公項可寫爲

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

牠現出另一類的不連續這是因爲對於$x=o$,牠的和爲零,對於x其他的價值,牠的和都是1.級數

$$x+x(1-x^2)+\cdots+x(1-x^2)^n+\cdots$$

在區域$(-1,+1)$內是收斂的,對於$x=o$,牠的和爲零,對於x不爲零時,牠的和等於$\frac{1}{x}$.

收斂級數(28)的和$F(x)$及牠的$(n+1)$個初項的和$S_n(x)$的差等於級數$R_n(x)$的和,$R_n(x)$是自原級數中刪去這些$(n+1)$初項得來

$$(32)\qquad R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots.$$

一個級數在區域(a,b)若是牠的和$S_n(x)$均一的漸近於$F(x)$

就是說若是對於一個正數 ε, 能夠應以一個整數 N, 對於 $n \geqq N$ 的所有價值, $R_n(x)$ 的絕對價值在 (a,b) 區域內都小於 ε, 這個級數就說是均一收斂的.由定理 A 得以下的命題:

一個級數在區域 (a,b) 是均一收斂的,牠的各項都是此區域內的連續函數,牠的和也就是此區域內的連續函數.〔註六〕

誠然,若級數的所有項都是連續的,牠的任意若干項的和 $S_n(x)$ 也是一個連續函數.

應用定理 B 在級數上,同樣的得着一個新命題:

若是一個級數在一個區域內是收斂的,各項都是連續的,又若是由牠的各項的導來式所成的級數在此區域也是均一收斂的,第二級數的和就表第一級數的和的導來式.

誠然,設 $F(x)$ 及 $\Phi(x)$ 是兩個級數的和

$$F(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

$$\Phi(x) = u'_0(x) + u'_1(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots$$

第二級數在前 $(n+1)$ 項的和是第一級在前 $(n+1)$ 項的和 $S_n(x)$ 的導來式,所以

$$F(x) = \lim S_n(x),\ \Phi(x) = \lim S'_n(x);$$

然而由假定第二級數是均一收斂的, $S'_n(x)$ 均一的漸近於 $\Phi(x)$. 所以依定理 B,

$$\Phi(x) = F'(x).$$

由此可見均一收斂級數至關重要.在許多場合由以下所常用的定規能辨認一個級數具此性質.設

$$u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{33}$$

是一個變數級數,再設

(34)　　$$v_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots$$

是又一個收斂級數,牠的各項都是正常數.若不論 n 如何,對於 x 在一個區域 (a,b) 內一切價值,都有 $|u_n|\leqq v_n$, 第一個級數 (33) 在此區域內就是均一收斂的.誠然,顯而易見的對於 x 在此區域內任何價值,我們有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots|<v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots$$

就是說

$$|R_n(x)|<R'_n,$$

R'_n 表級數 (34) 除去在前 $(n+1)$ 項所成的級數.級數 (34) 既是收斂的,必能夠求得一個數 N 有充分的大,在 $n\geqq N$ 時,必得着 $R'_n<\varepsilon$. 所以對於 n 的這些價值,在全區內都得着 $|R_n(x)|<\varepsilon$.

例如一個級數

$$v_0+v_1\sin x+\cdots+v_n\sin(nx)+\cdots$$

$v_0, v_1,\cdots, v_n$ 和以上的意義相同,在任何區域內都是均一收斂的.

注意.——定一個級數的均一收斂,有時用一個和此稍異的方法.若是對於任何正數 ε, 能夠有一個整數 n 相應,使自 $u_{n+1}(x)$ 項以後任取若干項的和

$$u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x),$$

不論 p 如何,也不論 x 在區域內的價值如何,此和的絕對值都小於 ε, 這個級數在此區域內就說是均一收斂的.這兩個定義的相合很容易証明.先假定由以前的定義一個級數是均一收斂的.設 n 是一個正數,餘數 $R_n(x), R_{n+1}(x),\cdots, R_{n+p}(x)$ 的絕對值在全區域 (a,b) 內都小於 $\frac{\varepsilon}{2}$, 這是很明瞭的,和數

$$u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)=R_{n+p}(x)-R_n(x)$$

的絕對值在此同一區域內也小於 ε.反過來,假定 $u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)$ 的絕對值,在一個區域內,不論 p 如何,都小於 $\frac{\varepsilon}{2}$ 和數

$$u_{p+1}(x)+\cdots+u_{p+q}(x)$$

就不論 q 如何,只要 $p\geqq n$, 都小於 ε. 令 p 不變令 q 增加無限,因而決定只要 $p\geqq n, R_p(x)$ 的絕對值在區域 (a,b) 內就小於 ε, 所以此級數依第一個定義也是均一收斂的.

31. **沒有導來式的連續函數.** ——為此章的結束我們舉一個連續函數,牠對於變數的任何價值都沒有導來式這個例子是採取危伊特拉斯(Weierstrass)的.設 b 是小於一的一個正整數,a 是一個奇整數,一個斂級數的和所成的函數 $F(x)$

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos (a^n\pi x) \tag{35}$$

對於 x 的一切價值都是連續的,這是因為這個級數在一切區域內都是均一收斂的緣故.若是積數 ab 小於 1, 由導來式所成的級數就也是如此,所以函數 $F(x)$ 有一個導來式,此導來式也是一個連續函數.我們將證明若是積數 ab 超過某一極限時,就完全不是如此的了.

設 m 是一個任意整數,我們可寫為

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=S^m+R^m, \tag{36}$$

在此式中,是令

$$S_m=\frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n\left\{\cos\left[a^n\pi(x+h)\right]-\cos(a^n\pi x)\right\},$$

$$R_m=\frac{1}{h}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n\left\{\cos\left[a^n\pi(x+b)\right]-\cos(a^n\pi x)\right\}.$$

將有限增長定理應用在函數 $\cos(a^n\pi x)$ 上，可見差數 $\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)$ 的絕對值小於 $\pi a^n|h|$。所以 S_m 的絕對值小於

$$\pi\sum_{n=0}^{m-1}a^nb^n=\pi\frac{a^mb^m-1}{ab-1},$$

所以若是 $ab>1$，S_m 必小於 $\pi\dfrac{(ab)^m}{ab-1}$。現在給 h 一個特別價值，我們求 R_m 的絕對值的最小限。(limite inférieure) 因爲

$$a^mx=\alpha_m+\xi_m,$$

α_m 是一個整數，ξ_m 是在 $-\dfrac{1}{2}$ 及 $+\dfrac{1}{2}$ 中間，我們令

$$h=\frac{e_m-\xi_m}{a^m},$$

e_m 等於 ±1；這是很明瞭的，h 是和 e_m 同符號，牠的絕對值小於 $\dfrac{3}{2a^m}$。由此條件選擇 h，我們得

$$a^n\pi(x+h)=a^{n-m}a^m\pi(a+h)=a^{n-m}\pi(\alpha_m+e_m);$$

a 是奇數，$e_m=\pm1$，積數 $a^{n-m}(\alpha_m+e_m)$ 的奇偶性 (parité) 是和 α_m+1 的奇偶性相同的，因而

$$\cos[a^n\pi(x+h)]=(-1)^{\alpha_m+1}.$$

又因

$$\cos(a^n\pi x)=\cos(a^{n-m}a^m\pi x)=\cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m+\xi_m)]$$
$$=\cos(a^{n-m}\alpha_m\pi)\cos(a^{n-m}\xi_m\pi);$$

$a^{n-m}\alpha_m$ 的奇偶性是和 α_m 相同的，我們又得

$$\cos(a^n\pi x)=(-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\xi_m\pi).$$

所以我們可以寫爲

$$R_m=\frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{+\infty}b^n[1+\cos(a^{n-m}\xi_m\pi)];$$

因爲ξ_m是在$-\frac{1}{2}$及$+\frac{1}{2}$的中間,此級數的各項都是正,所以此數的和大於他的第一項,就是大於b^m,從得

$$|R_m|>\frac{b^m}{|h|},$$

或是計算着h的價值

$$|R_m|>\frac{2}{3}(ab)^m.$$

我們假定

$$\frac{2}{3}(ab)^m>\frac{\pi(ab)^m}{ab-1},$$

這只要

(37)　$$ab>1+\frac{3\pi}{2};$$

關係式(36)就表明

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|>|R_m|-|S_m|>\frac{2}{3}(ab)^m\frac{ab-1-\frac{3\pi}{2}}{ab-1}.$$

在整數m增長無限時,此式也是如此,至於h的絕對值就減縮爲零.所以無論ε如何小,我們必能求得一個增長h牠的絕對值小於ε使$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$的絕對值大於任何預定在先的數.如此看來,若是關係式(37)是能滿足的,函數$f(x)$就對於x的任何價值都沒有導來式.

習　題

1. 設$\rho=f(\omega)$是一個平曲線的極坐標方程式,自極O引一直線垂直於帶徑OM,取此直線和切線MT及法線MN的交點,求將線分OT, ON, MN, NT爲$f(\omega)$及$f'(\omega)$的函數所表明.求一切曲線牠們的這些線分中有一個是常數的.

2. 求定出一個七次的整多項式$f(x)$,知$f(x)+1$能爲$(x-1)^4$所除,$f(x)-1$能爲$(x+1)^4$所除.推廣此問題.

3. 設 P 及 Q 是 x 的兩個整多項式,知

$$\sqrt{1-P^2}=Q\sqrt{1-x^2};$$

求証

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}}=\frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

n 是整數.

解.自關係式

(a) $$1-P^2=Q^2(1-x^2),$$

的微分法取得

(b) $$-2PP'=Q[2Q'(1-x^2)-2Qx];$$

關係式(a)表明 Q 和 P 為互素式,(b)表明 Q 能除盡 P'.

4.* 設 $R(x)$ 是一個四次多項式只有單根,$x=\dfrac{U}{V}$ 是 t 的一個有理函數知,

$$\sqrt{R(x)}=\frac{P(t)}{Q(t)}\sqrt{R_1(t)}$$

$R_1(t)$ 是 t 的四次式,$\dfrac{P}{Q}$ 是一個有理函數.求証此函數,$\dfrac{U}{V}$ 能滿足以下的關係式

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{k\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}$$

k 是一個常數. [Jacobi],

解.方程式 $R\left(\dfrac{U}{V}\right)=o$ 的根不能令 $R_1(t)$ 為零的必能令 $UV'-VU'$ 為零,即是能令 $\dfrac{dx}{dt}$ 為零.

5. 戴勞公式的擴張.——設 $f(x)$ 是在 (a,b) 區域內的一個連續函數,$f'(x)$, $f''(x)$,…, $f^{(n)}(x)$ 都是如此,導來式 $f^{(n+1)}(x)$ 在此區域內也是存在的.設 $\wp(x)$ 是一個 n 次的多項式能滿足 $n+1$ 個條件

$$\varphi(x_i)=f(x_i),\ \varphi'(x_i)=f'(x_i),\cdots,\ \varphi^{(m_i)}(x_i)=f^{(m_i)}(x_i)$$

$$i=1,2,\cdots,q,$$

$x_1,x_2,\cdots,x_q$是x在此區域內的q個價值,和數$m_1+m_2+\cdots+m_q$等於$n+1$。

若令

$$P(x)=\prod_{i=1}^{q}(x-x_i)^{m_i},$$

則有

$$f(c)=\varphi(c)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}P(c)$$

c是在(a,b)區域內的一個價值,ξ是在同區域內的又一價值。

解。應用洛兒定理在函數$f(x)-\varphi(x)-CP(x)$及其累次導來式上選擇常數C使此函數在$x=C$時成為零。

6.* 若令$x=\cos u$,則

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}{m}\sin mu.$$

〔Olinde Rodrigue〕.

7. 列讓得(Legendre)多項式

$$X_n=\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

能滿足微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2}-2x\frac{dX_n}{dx}+n(n+1)X_n=o;$$

由此演出此多項式的係數。

8. 以下的四個函數

$$y_1=\sin(n\arcsin x),\qquad y_3=\sin(n\arccos x),$$

$$y_2=\cos(n\arcsin x),\qquad y_4=\cos(n\arccos x).$$

能滿足微分方程式

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=o.$$

在這些函數縮減為多項式時,由上式演出其係數.

9. 証明哈爾方(Halphen)的公式

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

此公式可自 $e^{\frac{1}{x}}$ 的展開式演出或用一般公式(Beman)

$$x^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{n-1}f(x)\right\}=(-1)^n\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{(n)}f(x).$$

10. 函數 $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ 不論 φ 及 ψ 如何都能滿足關係式

$$rx^2+2sxy+ty^2=o.$$

11. 函數 $z=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$ 不論 φ 及 ψ 如何都能滿足關係式

$$r-2s+t=o.$$

12. 函數 $z=f[x+\varphi(y)]$ 不論 f 及 φ 如何都能滿足關係式 $ps=qr$.

13. 函數 $z=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ 不論 φ 及 ψ 如何都能滿足關係式

$$rx^2+2sxy+ty^2+px+qy=n^2z.$$

14. 設有一個函數 $z=f(x_1,u)$, 其中 $u=\varphi(x_2,x_3)$, x_1,x_2,x_3 是三個自變數, f 及 φ 是兩個任何函數,試求 f 及牠的第一及第二級導來式間一個關係式.

15. 設 $f(x)$ 是 x 的一個任何函數, $f'(x)$ 是牠的導來式.若命

$$u=[f(x)]^{-\frac{1}{2}},\quad v=f(x)[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$$

則有

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}.$$

16.* 有一個函數的函數$u=\varphi(y)$，其中$y=\Psi(x)$，其第n級的導來式之形狀是

$$D_x^n\varphi=\sum\frac{n!}{i!j!\cdots k!}D_y^p\varphi\left(\frac{\Psi'}{1}\right)^i\left(\frac{\Psi''}{1\cdot2}\right)^j\left(\frac{\Psi'''}{1\cdot2\cdot3}\right)^h\cdots\left(\frac{\Psi^{(l)}}{1\cdot2\cdots l}\right)^k,$$

符號Σ擴充在方程式$i+2j+3h+\cdots+lk=n$的所有的正整根上，$p=i+j+\cdots+k$.

[Fad de Bruno, Quaterly Joural of Mathematics, *t*. *I*, *p*, 359.].

17. 証明公式

$$\frac{1}{1\cdot2\cdots n}\frac{d^n}{dx^n}[x^n(\log x)^n]$$
$$=1+S_1\log x+\frac{S_2}{1\cdot2}(\log x)^2+\cdots+\frac{S_n}{1\cdot2\cdots n}(\log x)^n,$$

其中S_p是在最初n個數中每次取p個數的積所作的和[Murphy].

解. 自公式

$$x^{n+\alpha}=x^n\left[1+\alpha\log x+\frac{\alpha^2(\log x)^2}{1.2}+\cdots+\frac{\alpha^n(\log x)^n}{1.2\cdots n}+\cdots\right]$$

起,關於x連積取導來式n次.

18. **切平面及全微分.**——一個曲面S的切平面能由以下的性質所定:一個平面P說是切一個曲面S於M點,如果此平面P和連合M點及S的另一點M'的直線MM'所作的角和距離MM'同時爲無限小

方程式$z=f(x,y)$所表的曲面S有一個切平面,如果函數

$f(x,y)$ 有數個全微分,就是說如果和增長 Δx, Δy 相應的增長 Δz 的形狀是 $\Delta z = \Delta x[A(x,y) + \varepsilon] + \Delta y[B(x,y) + \varepsilon']$, ε 及 ε' 和 Δx 及 Δy 同時漸近於零.

19. 求定一個幾何級數

$$x + x\ (x) + \cdots + x[q(x)]^n + \cdots$$

在 $x \leqq o$ 時其和數是一個函數 $\varphi(x)$. 對於 x 的如何價值此級數是收斂的?

〔註一〕 Note lue a l'Acadeniie des Sciences de Berlin, le 8 juillet 18,2, on trouvera d' autres exemples dans le mémoire de Darboux, sur les fonctious dis continues (Annale de l'E'cole Normale supe'rieure, 2^{e} se'rie, t. IV). 在此章之末有危伊特拉斯的一個例子.

〔註二〕 有時應用此公式並未注意及這一切的條件.例如 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 是兩個連續函數在 (a,b) 區域內,並且有導來式 $f'(x)$, $\varphi'(x)$.若在此四個函數間有關係式

$$f'(x)\varphi(x) - f(\ )\varphi'(x) = o,$$

由此決定函數 $\dfrac{f}{\varphi}$ 的導來式爲零,因而決定此 $\dfrac{f}{\varphi}$ 在 (a,b) 區域內是一個常數.然這個結論必須函數 $\varphi(x)$ 在此區域內不成爲零方爲正確.爲確定人的觀念,假定 $\varphi(x)$ 及 $\varphi'(x)$ 對於 x 在 a 及 b 間一個價值 c 同時爲零.一個函數 $f(x)$ 在 a 及 c 間等於 $C_1\varphi(x)$, 在 c 及 b 間等於 $C_2\varphi(x)$ C_1 及 C_2 是兩個不同的常數,此函數在 (a,b) 區域內是連續的並且有一個連續的導來式.對於 x 在此區域內的任何價值以上的關係式是恒能滿足的.幾何的

解释是很容易的。

〔註三〕　對於一個變數的函數也可作同樣的注意.例如函數$f(x)=x^3\cos\frac{1}{x}$的導來式是

$$f'(x)=3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x},$$

$f'(x)$在$x=o$時沒有導來式.但是比

$$\frac{f(2\alpha)-2f(\alpha)+f(o)}{\alpha^2}\text{或}8\alpha\cos\frac{1}{2\alpha}-2\alpha\cos\frac{1}{\alpha}$$

在α漸近於零時也漸近於零.

〔註四〕　用字母∂表偏導來式是 Jacobi 所規.

〔註五〕　設 $f_n(x)=[\cos(m!\pi x)]^{2n}$, m 是正整數.我們有$\varphi_m(x)=\lim f_n(x)=1$, 如果積$m!x$是一個正整數$N$; $\varphi^m(x)=o$, 如果此積不是整數.一切點$x=\frac{N}{m!}$都是$\varphi_m(x)$的不連績點.$\varphi_m(x)$的極限是 Dirichlet 的函數$\psi(x)$

$$\psi(x)=\lim_{m=\infty}\left\{\lim_{n=\infty}\left[\cos(m!\pi x)\right]^{2n}\right\},$$

牠在x是有理數時爲一,在x是無理數時爲零.

〔註六〕　這個條件只是一個充足的條件.若要一個連績項級數表一個連績函數. Arzela 有一個必要且充足的條件(參觀 E.Borel, Lecon sut les fonction de variables reelles, P 42)

第　三　章

陰函數。—最大及最小。—變數的更換。

I. 陰函數 (fonctions implicites).

32. **特別場合.**——我們所遇的函數往往不是牠的陽函數式,牠是由一個未解的方程式所定,我們先研究一個方程式所定的一個函數,爲確定人的觀念,試假定有兩個自變數,

設 $F(x,y,z)$ 是變數 x,y,z 的一個函數,牠滿足以下的條件:1^0 在一組的價値 x_0,y_0,z_0 附近牠是連續的,並且有一個連續的偏導來式 F'_z; 2^0 $F(x_0,y_0,z_0)$ 等於零,然 $F'_z(x_0,y_0,z_0)$ 不等於零,在這些條件之下方程式

$$(1) \qquad F(x,y,z)=0$$

有一個根而止有一個根,在 x,y 各漸於近 x_0,y_0 時牠漸近於 z_0.

函數 F 及 F'_z 既在 x_0,y_0,z_0 附近是連續的,我們取三個正數 a,b,c 有充分的小,使此兩個函數在不等式

$$|x-x_0|\leqq a,\ |y-y_0|\leqq b,\ |z-z_0|\leqq c$$

所定領域 D 內是連續的,並且使 F'_z 在此領域保有固定的符號,譬如是正罷,那麽若在以上的極限以內各給 x,y 一個確定的價值,令 z 由 z_0-c 變至 z_0+c 時如此所得的 z 的一函數就是 z 的升函數,特別的,$F(x_0,y_0,z)$ 在此區域內是上升的,對於 $z=z_0$ 時,牠既等於零,牠在 z_0 及 z_0+c 中間是正,在 z_0-c 及 z_0 中間是負,設 h 是小於 c 的一個正數,我們有

$$F(x_0, y_0, z_0+h)>o,\quad F(x_0, y_0, z_0-h)<o.$$

然而這兩個 x, y 的函數 $F(x, y, z_0-h)$, $F(x, y, z_0+h)$ 對於 $x=x_0$, $y=y_0$ 都是連續的,對於 x, y 這一組的價值又都不成爲零,所以能夠取一個正數 η, 至多等於 a,b 二數中的最小者,使此二函數 $F(x, y, z_0+h)$, $F(x, y, z_0-h)$ 在差數 $x-x_0$, $y-y_0$ 的絕對值小於 η 時各保有固定的符號,因而對於 x, y 的一組的價值能滿足條件

$$|x-x_0|<\eta,\quad |y-y_0|<\eta,$$

我們必也得着

$$F(x, y, z_0+h)>o,\quad F(x, y, z_0-h)<o.$$

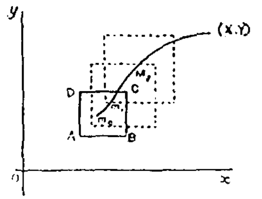
在方程式(1)中給 x, y 在以上的極限內的任何價值,將 z 看作未知數,此方程式就至少有一個根在 z_0-h 及 z_0+h 中間;在此區域內牠也不能有多個的根,這是因爲變數 z 的函數 $F(x, y, z)$ 在此區域內是上升的緣故,這個數 h 旣是能取爲任何小,即此可証所宣告的定理.

設 h 及 η 是一組的兩個正數能滿足方纔所定的條件.一個正方形 R,中心在 M 點,牠的坐標是 (x_0, y_0),各邊平行於坐標軸(假定是直交坐標),邊長爲 2η, 方程式(1)中我們証明存在的那個根在此方形內是確定的.設 M_1 是此方形內的又一點,坐標是 (x_1, y_1); 由以前所證方程式 $F(x_1, y_1, z)=o$ 有一個根 z 而只有一個根在 z_0-h 及 z_0+h 中間,可見 $F'_z(x_1, y_1, z_1)$ 是正,所以前面所用的推理仍能用在 (x_1, y_1) 點上;在 x 及 y 各漸近於 x_1 及 y_1 時,方程式(1)有一個根而只有一個根牠漸近於 z_1. 這一個根自然也在 z_0-h 及 z_0+h 中間,所以和前者相合,所以這個根在正方形 R 內任一點上

都是連續的.

這個根只定在領域 R 以內,如此我們只有了陰函數的一個原質.要定這個函數在領域 R 以外,我們遂漸用以下的方法.設 L 是一個連續的道路自 (x_0,y_0) 點起達於 (X,Y) 點,此後者在領域 R 以外,假想變數 x 及 y 同時變化使坐標是 (x,y) 的這個點畫出道路 L.若是自 (x_0,y_0) 點起,對於此點,z 的價值是 z_0,只要未出領域 R 以外,這個根 z 的價值都是確定的.設 M_1 (x_1,y_1) 是此道路上

圖 三



在 R 以內的一點,z_1 是 z 的相應價值;普通定理所要求的條件,對於 $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ 仍是能滿足的,所以又有一個領域 R_1, 中心在 M_1,在此領域內,那個對於 $x=x_1$, $y=y_1$ 時成 z_1 的那個根仍是確定的,這個新領域通常的有些點在 R 以外;再在 R 以外 R_1 以內自道路 L 取一點 M_2, 仍用同一的方法,則又得一個新領域 R_2, 在此領域內,方程式 (1) 的那個根是確定的.餘仿此.只要未遇着 x, y, z 的一組的價值能使 $F'_z=0$, 這個運算都能繼續進行;我現在暫將此指明,在他章相似的問題上再詳論之.

33. 用逐漸近似法在根的計算上.—— 我們總能將方程式(1)寫爲一個特別的形狀,在這個形狀,能用逐漸近似法 (approximations successives) 以計算牠的根,設

$$m=F'_z(x_0,y_0,z_0)$$

由假定 m 不等於零,方程式(1)和方程式

$$z=z_0+\left[z-z_0-\frac{1}{m}F(x,y,z)\right]$$

同價,這個方程式的形狀是

(2) $$z=z_0+f(x,y,z)$$

在價值 x_0, y_0, z_0 附近, $f(x,y,z)$ 及 $f'_z(x,y,z)$ 都是連續的,對於這一組的價值又都成爲零.

依普通定理,這個方程式有一個根牠在 x 及 y 各漸近於 x_0 及 y_0 時漸近於 z_0.這個根能由逐漸近似法計算,這個方法和代數學上對於二次方程式的一個根的絕對值極小時所用的方法相似.

設 a, b, c 是三個正數,在和以前相同的不等式所定領域內, $f(x,y,z)$ 及 $f'_z(x,y,z)$ 都是連續的;我們又假定取 a, b, c 有充分的小使在此領域內 f'_z 的絕對值小於一個正數 $K<1$.因爲 $f'_z(x_0,y_0,z_0)=o$, 所以這個新條件是必能滿足的.此刻已經說明,逐漸介

$$z_1=z_0+f(x,y,z_0),\quad z_2=z_0+f(x,y,z_1), \text{一般},$$

(3) $$z_n=z_0+f(x,y,z_{n-1}),\quad (n=1,2,3,\cdots,\infty).$$

我們要先證明若是差數 $x-x_0$, $y-y_0$ 有充分的小,差數 z_n-z_0 的絕對值就永遠小於 c, 所以此一組的運算能延長無

限,設 z 是在 z_0-c 及 z_0+c 中間的一個數;我們令

$$f(x,y,z)=f(x,y,z_0)+f(x,y,z)-f(x,y,z_0),$$

應用平均值的公式,並計算着條件(2),得

$$|f(x,y,z)|<|f(x,y,z_0)|+K|z-z_0|. \tag{4}$$

現在我們取一個正數 h,至多等於 a,b 二數中的最小的一個,由以下的條件

$$x_0-h\leqq x\leqq x_0+h,\quad y_0-h\leqq y\leqq y_0+h$$

作出一個領域 D',我們所選 h 的價值,能令 (x,y) 點在領域 D' 內時 $f(x,y,z_0)$ 的價值小於 $(1-K)c$,不等式(4)表明

$$|f(x,y,z)|<(1-K)c+Kc=c.$$

如此,若是 (x,y) 是領域 D' 的一個點,卽可逐漸看出所有的差數 $z_1-z_0,\ z_2-z_0,\cdots,\ z_n-z_0,\cdots$ 的絕對值都小於 c,因而我們得一組的無限數的函數,這些函數都是由(3)的循環律(loi de recurrence)所定,牠們在領域 D' 內都是連續的,又都介於 z_0-c 及 z_0+c 中間。

在 n 增加無限時,函數 $z_n(x,y)$ 漸近於一個極限,誠然,由關係式

$$z_n=z_0+f(x,y,z_{n-1}),\quad z_{n-1}=z_0+f(x,y,z_{n-2}),$$

並計算着條件 $f'_z<K$,

$$|z_n-z_{n-1}|<K|z_{n-1}-z_{n-2}|,$$

因而

$$|z_n-z_{n-1}|<K^{n-1}|z_1-z_0|<K^{n-1}(1-K)c.$$

所以級數

(5) $$z_0+(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\cdots+(z_n-z_{n-1})+\cdots$$

在領域 D' 內是均一連續的,牠的和是一個函數 $Z(x,y)$, 在此領域內是連續的,這個函數 Z 能滿足方程式(1),這是因爲 n 增加無限時,方程式(3)的極限成爲

(6) $$Z=z_0+f(x,y,Z)$$

的緣故.牠一方面,對於 $x=x_0$, $y=y_0$, 一切的函數 $z_1, z_2, \cdots$ 都縮爲 z_0, 所以 $Z(x_0,y_0)=z_0$, 函數 $Z(x,y)$ 能滿足所宣告的一切條件.

這是能滿足這些條件的惟一的一個根.再精密的說,就是 (x,y) 點在領域 D' 內時,方程式(1)除卻 Z 以外並無別的根在 z_0-c 及 z_0+c 中間.試然,設 Z 是這麼一個根;自關係式

$$Z_1=z_0+f(x,y,Z_1),\quad z_n=z_0+f(x,y,z_{n-1})$$

得

$$Z_1-z_n=f(x,y,Z_1)-f(x,y,z_{n-1}),$$

卽

$$|Z_1-z_n|<K|Z_1-z_{n-1}|.$$

我們也得着 $|Z_1-z_n|<K^{n-1}|Z_1-z_{n-1}|$. 所以在 n 增加無限時,差數 Z_1-z_n 漸近於零,所以 Z_1 等於 Z.

所要注意的是這個方法直接顯明此根的存在及牠的惟一性.

34. **陰函數的導來式.** —— 上節定理的證明並未假定偏導來式 F'_x, F'_y 的存在.我們甚易理會這些導來式的存在並非是必要的.茲舉一例,設 $\varphi(x)$ 是一個沒有導來式的連續函數,在 $x=a$ 時,此函數的價值是 b. 方程式 $y^2=\varphi(x)$ 有兩個根,在 x 漸

近於a時,此兩個根各漸近於$\pm\sqrt{b}$,牠們又都是x的連續函數.

然若是函數$F(x,y,z)$有連續的偏導來式F'_x,F'_y,方纔所定的陰函數就有第一級的偏導來式.誠然,我們令y為常數,但給x一個增長Δx,z就有一個增長Δz和牠相應;我們得

$$F(x+\Delta x,y,z+\Delta z)-F(x,y,z)$$
$$=\Delta xF'_x(x+\theta\Delta x,y,z+\Delta z)+\Delta zF'_z(x,y,z+\theta'\Delta z)=o,$$

從而得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta\Delta x,y,z+\Delta z)}{F'_z(x,y,z+\theta'\Delta z)};$$

z既是x的連續函數,Δx漸近於零時,Δz也是如此;所以方程式的第二端漸近於一個極限,z就有關於x的一個偏導來式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z};\tag{7}$$

同法可證明公式

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.\tag{8}$$

注意.——若方程式$F=o$關於z是m次,假定此m個根都是實的,此方程式就定出x及y的m個函數.對於x及y的每一組的價值,偏導來式$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$都有$m$個價值;以上的公式也能定出此等偏導來式並不相混,但必須將公式第二端的z用我們求導來式的那個函數的價值更換.

例如方程式

$$x^2+y^2+z^2-1=o$$

定出兩個函數$+\sqrt{1-x^2-y^2}$及$-\sqrt{1-x^2-y^2}$,但在$x^2+y^2<1$時,此兩個函數都是連續的.前者的偏導來式是

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

後者的偏導來式只須將符號變換.若是自公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

起,我們逐漸用 z 的兩個定法 (déterminations) 更換 z,也得相同的結果.

35. **關於曲面的應用.**——若將 x, y, z 看作空間一點的直線坐標,凡一個方程式

(9) $$F(x,y,z)=o$$

都表一個曲面 (surface) S. 設 (x_0, y_0, z_0) 是此曲面上一點 A 的坐標;若在 x_0, y_0, z_0 的價值附近,函數 F 和牠的第一級偏導來式都是連續的,而此三個導來式在 A 點不同時為零,曲面 S 就有一個切平面(plan tangent)在 A. 假定對於 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$, 導來式 F'_z 不等於零.依普通定理,曲面的方程式在 A 點附近可以假定已本 z 解開,寫為

$$z=\varphi(x,y),$$

$\varphi(x,y)$ 是一個連續函數,在 A 點的切平面的方程式是

$$Z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0(Y-y_0);$$

用以前的公式所得的價值代 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, 切平面的方程式成為

(10) $$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=o.$$

若是 $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=o$, 而 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\neq o$, 我們可以將 y 及 z 看作自變數,將 x 看作此二自變數的函數;如此,對於切平面,仍得着方程式 (10), 這是由方程式第一端的對稱可以<u>先天的</u> (a priori) 看出的.同法,可見在 $F(x,y)=o$ 所表的平曲線上,一點 (x_0, y_0) 的切線的

方程式是

$$(X-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+(Y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=o.$$

若是同時

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=o,$$

A 點就是一個奇點 (point singulier); 在曲面上,經過 A 點的一切曲線的切線普通的成爲一個圓錐,而不成爲一個平面.我們以後再研究這個場合.

關於陰函數的普通定理的證法,我們曾假定導來式 F'_z 不等於零.依幾何的直觀可以看出爲甚麼這個條件是緊要的.誠然,若是 $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=o,\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\neq o,$ 曲面 S 的切平面就平行於 z 軸;在直線 $x=x_0$ $y=y_0$ 附近, z 軸的一個平行線,普通的過曲面於兩點在接觸點 (point de contact) 附近.那麼, x 及 y 漸近於 x_0 及 y_0 時,方程式 (9) 就有兩個根漸近於 z_0.

例如用直線 $y=o,\ x=1+\varepsilon$ 切開球面 $x^2+y^2+z^2-1=o$, z 就有兩個價值和 ε 同時爲零;若 ε 是負,此兩個價值就是實的;若 ε 是正,此兩個價值就是虛的.

36. **疊次導來式.**——在定第一級導式的公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

中,我們可將第二端看做合成函數 (fonctions compose'es), z 是居間函數 (fonction intermédiaire). 所以用合成函數的微分法的定規可以逐漸計算疊次導來式.這些疊次導來式的存在也是附屬在函數 $F(x,y,z)$ 的各級的偏導來式的存在中的.

求此等導來式又有一個較簡的方法,此法是應用以下的命

題得來：一個自變數的許多函數若滿足一個關係式 $F=o$, 依合成函數的微分法取第一端的導來式,令此導來式等於零則得一關係式,此關係式必能為此等函數的導來式所滿足.這是很明瞭的,將 F 所關係的變數用自變數的函數更換,若 F 恆等於零,自然牠的導來式也是如此.若是關係式 $F=o$ 所連合的許多函數都關係於許多自變數,這個定理仍然存在.

此層既已說明,先假定 y 是一個自變數 x 的陰函數,為關係式

$$F(x,y)=o$$

所定,求此陰函數的疊次導來式;我們順次得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=o,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=o,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}y'^2+3\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y''+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'y''+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=o,$$

如此,即逐漸求得 $y', y'', y''', \cdots$.

例.——已知一個函數 $y=f(x)$, 我們可以倒轉來將 y 看做自變數,將 x 看做 y 的函數,為方程式 $y=f(x)$ 所定.一個價值 x_0 定出 $y_0=f(x_0)$, 若對於 x_0, 導來式 $f'(x)$ 不等於零,依普通定理,有一個 y 的函數存在而只有一個,此函數能滿足關係式 $y=f(x)$, 對於 y_0 牠必取得價值 x_0. 這叫作 $f(x)$ 的反函數.(註一)欲計算此函數的疊次導來式 $x'_y, x''_{y^2}, x'''_{y^3}, \cdots$ 只須將 y 看作自變數,將此關係式逐次微分之,得

$$1 = f'(x)(x'_y),$$

$$o = f''(x)(x'_y)^2 + f'(x)x''_{y^2},$$

$$o = f'''(x)(x'_y)^3 + 3f''(x)x'_y x''_{y^2} + f'(x)x'''_{y^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

從得

$$x'_y = \frac{1}{f'(x)}, \quad x''_{y^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}, \quad x'''_{y^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}, \cdots$$

我們可注意若互換x'_y及$f'(x)$, x''_{y^2}及$f''(x)$, x'''_{y^3}及$f'''(x)$,…,此一組的公式不變,這是因爲兩個函數$y=f(x)$及$x=\varphi(y)$間的關係明明是相互的.

爲應用這些公式,我們假定滿足關係式

$$y'y''' - 3y''^2 = o$$

的一切函數;若取y爲自變數,x爲函數,此方程式就成爲$x'''_{y^3} = o$. 然第三導來式等於零的一切函數都是多項式,次數最多不過於二,所以此函數x的式子是

$$x = c_1 y^2 + c_2 y + c_3,$$

c_1, c_2, c_3,都是任意常數;將此方程式關於y解開,因而決定能滿足以上條件的一切函數$y=f(x)$都包在以下的公式內:

$$y = a \pm \sqrt{bx + c},$$

a, b, c是三個任意常數,此方程式表一個拋物線,牠的軸平行於x軸.

37. 偏導來式.—— 設有兩個自變數的陰函數爲以下的方程式所定:

(11) $$F(x, y, z) = o;$$

我們已見第一級的偏導來式由關係式

$$(12)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=o,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=o$$

直接得來,欲得第二級偏導來式,只須關於 x 及 y 微分方程式 (12) 因爲第一式關於 y 的導式恒等於第二式關於 x 的導來式,所以由這個微分法只能得三個各別的關係式:

$$(13)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=o,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=o,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=o,
\end{aligned}\right.$$

同樣也可以計算第三級及更高級的偏導來式.

用全微分也能同時定出同級的一切偏導來式.爲此,只須依據以下的定理:設有任何數的自變數 $x, y, z, \cdots$ 若是牠們的許多函數 $u, v, w, \cdots$ 能滿足一個關係式 $F=o$, 若將 F 所含的變數都看作自變數以取 F 的全微分,即得關係式 $dF=o$. 此等函數的全微分必能滿足此關係式.爲此我們假定有一個關係式 $F(u,v,w)=o$, u, v, w 都是自變數 x, y, z, t 的函數. u, v, w 的偏導來式滿足以下的四個方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=o,\\
&\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=o,\\
&\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=o,\\
&\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}=o;
\end{aligned}$$

各乘以dx, dy, dz, dt,再相加,即得

$$\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=dF=o.$$

此處我們仍可見微分記法的利益,這是因爲以上的關係式是不論自變數的選擇及數目的.欲得第二級微分間的關係,只須將關係式 $dF=o$ 看做含 u, v, w, du, dv, dw 的一個方程式,再應用普通定理在此方程式上;餘仿此,但必須將選擇的自變數的所有高級微分都代以零.

應用此定規以求計算方程式(11)所定的陰函數的疊次全微分,x及 y是自變數;我們得

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=o,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=o,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

這些方程式中的前二個能代替(12)及(13)的五個關係式;自 dz 的式子中可以得第一級的兩個導來式,自 d^2z 的式子中可以得第二級的三個導來式,….例如方程式

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2=1,$$

微分二次,得

$$Axdx+A'ydy+A''zdz=o,$$

$$Adx^2+A'dy^2+A''dz^2+A''zd^2z=o;$$

自第一式得

$$dz=-\frac{Axdx+A'ydy}{A''z};$$

將此價值代入第二式,得

$$d^2z=-\frac{A(Ax^2+A''z^2)dx^2+2AA'xydxdy+A'(A'y^2+A''z^2)dy^2}{A''^2z^3}.$$

所以用孟然的記法即得

$$p=-\frac{Ax}{A''z},\qquad q=-\frac{A'y}{A''z},$$

$$r=-\frac{A(Ax^2+A''z^2)}{A''^2z^3},\quad s=-\frac{AA'xy}{A''^2z^3},\quad t=-\frac{A'(A'y^2+A''z^2)}{A''^2z^3},$$

這個方法自然是普通的,自變數的數目及所要計算的導來式的次數俱不論.

例.——設 $z=f(x,y)$ 是兩個變數 x 及 y 的函數,在此關係式中我們將 y 及 z 看作自變數,將 x 看作此二自變數的一個陰函數;我們求計算第一級及第二級的微分 dx 及 d^2x. 由微分法,先得

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

因 y 及 z 是被取爲自變數,所以必須假定 d^2y 及 d^2z 爲零,再微分一次,得

$$o=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial x}d^2x.$$

用孟然的記法來表函數 $f(x,y)$ 的第一第二兩級的偏導來式,以上的兩個方程式可以寫爲

$$dz=pdx+qdy,$$

$$o=rdx^2+2sdxdy+tdy^2+pd^2x;$$

自第一式得

$$dx=\frac{dz-qdy}{p},$$

將此價值代入第二式,得

$$d^2x=-\frac{rdz^2+2(ps-qr)dydz+(q^2r-2pqs+p^2t)dy^2}{p^3}.$$

所以將 x 看作 y 及 z 的函數,即得牠的第一第二兩級的偏導

式如下:

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{p},\qquad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{q}{p},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-\frac{r}{p^3},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}=\frac{qr-ps}{p^3},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\frac{2pqs-p^2t-q^2r}{p^3}.$$

作爲此等公式的應用,我們求滿足方程式$q^2r+p^2t=2pqs$的一切函數$f(x,y)$.若是在關係式$z=f(x,y)$中,將x看做兩個自變數y及z的一個函數,以上的條件就成爲$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$.此式表明$\frac{\partial x}{\partial y}$不關係於$y$,故$\frac{\partial x}{\partial y}=\varphi(z)$, $\varphi(z)$是z的任一函數.這個新方程式可以寫爲

$$\frac{\partial}{\partial y}[x-y\varphi(z)]=0,$$

此式表明$x-y\varphi(z)$不關係於y.所以復得

$$x=y\varphi(z)+\psi(z),$$

$\psi(z)$是z的另一任意函數.本z解此方程式,即得和問題相應的一切函數$z=f(x,y)$.此方程式表一個常和xy平面平行的直線所產的一個曲面.

38. **聯立方程式.**——我們先定出一個定準式(déterminant)牠將負有重要的任務.設$F_1, F_2,\cdots, F_n$是一組的n個函數,含有n個變數$y_1, y_2,\cdots, y_n$,這些函數也可以另外的關係別的變數.由一切第一級偏導來式$\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$所成的定準式

$$(14)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

叫作n個函數$F_1, F_2, \cdots F_n$關於n個變數$y_1, y_2, \cdots, y_n$的沙勾扁(jacobien)或函數定準式(déterminant fonctionnel)。我們表以

$$\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}.$$

此層已經說明陰函數的存在的一般定理可以宣告如下:

設(E)是一組的n個方程式含有$n+p$箇變數$x_1, x_2, \cdots, x_p, y_1, y_2, \cdots, y_n$

(E)　$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_p; y_1, y_2, \cdots, y_n) = o, (i=1, 2, \cdots, n)$

對於一組的價值$x_1 = x_1^0, \cdots, x_p = x_p^0, y_1 = y_1^0, \cdots, y_n = y_n^0$,這些方程式的第一邊都爲零,若是對於這一組的價值,這些函數F_i都是連續的,又關於變數y_k有第一級的偏導來式,也是連續的,並且沙勾扁$\dfrac{D(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}$在$x_1 = x_1^0, \cdots, y_n = y_n^0$時不等於零,在這些條件之下,有一組的函數而只有一組

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_p), \cdots, y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_p)$$

能滿足方程式(E),對於$x_1 = x_1^0, \cdots, x_p = x_p^0$時牠們各成爲$y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0$並且在這一組的附近是連續的。

這個定理對於$n=1$時已經證明,現在只要證明若是牠對於一組的$n-1$個方程式含有$n-1$個未知函數是確實的,牠就對於一組的n個方程式含有n個未知函數也是確實的。由假定上面所寫的定準式對於價值x_i^0, x_k^0,不成爲零,所以牠的各原質不能都成爲零,那麼我們能假定$\left(\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\right)_0$不等於零,在不然的時候,我們只要更換下標(indices)的次序,依32節的定理,方程式

(15)　$$F_n(x_1, x_2, \cdots, x_p; y_1, y_2, \cdots, y_n) = o$$

定出一個函數

(16) $$y_n = f(x_1, x_2, \cdots, x_p; y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$$

關係 $n+p-1$ 個變數,對於 $x_1=x_1^0, \cdots y_{n-1}=y_{n-1}^0$, 牠等於 y_n^0, 並且在這些價值附近牠是連續的.在 (E) 的居前的 $n-1$ 個方程式中用這個函數 f 代 y_n,即得另一組的 $n-1$ 個方程式,含有 $n-1$ 個未知數 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$,

(17) $$\Phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_p, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) = 0, \cdots, \Phi_{n-1} = 0.$$

(16) 及 (17) 所成一組的方程式自然和 (E) 的一組的方程式同價,我們將證明函數 Φ_i 的沙勾局

$$\delta = \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})}$$

對於 $x_1=x_1^0, \cdots, y_{n-1}=y_{n-1}^0$ 時不等於零.誠然,這個定準式

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \end{vmatrix}$$

是 2^{n-1} 個定準式的和,其中有些兩行的原質成為比例的,結果等於零,將這些除去得

$$\delta = \frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_{n-1})}{D(y_n, y_2, \cdots, y_{n-1})}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \cdots, y_{n-2}, y_n)}.$$

他一方面,導來式 $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ 都為關係式

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_i} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

所定(n^037).所以在上的方程式用$\frac{\partial F_n}{\partial y_n}$乘其兩邊,可寫爲

$$\delta\frac{\partial F_n}{\partial y_n}=\frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_{n-1})}{D(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})}\frac{\partial F_n}{\partial y_n}-\frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_{n-1})}{D(y_n,y_2,\cdots,y_{n-1})}\frac{\partial F_n}{\partial y_1}$$
$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_{n-1})}{D(y_1,y_2,\cdots,y_{n-2},y_n)}\frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}};$$

這個新關係式的第二邊等於Δ關於末一橫行的展開式.所以

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{D(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_{n-1})}{D(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})}=\frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{D(y_1,y_2,\cdots,y_n)}.\tag{18}$$

結果,對於價值

$$x_1=x_1^0,\ \cdots,\ y_{n-1}=y_{n-1}^0$$

沙勾局δ不等於零.

我們所宣告的命題既是對於$n-1$個方程式是確實的,方程式(17)定出變數$x_1,x_2,\cdots,x_p$的一組的函數$y_1=\varphi_1,\cdots,y_{n-1}=\varphi_{n-1}$,代入函數$f(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_{n-1})$,即得$y_n$的價值.

和一個方程式的場合同,仍能設用逐漸近似法計算這些根.爲簡單計,我們假定用$x_i^0+x_i$代x_i,用$y_k^0+y_k$代y_k,使初價值x_i^0,y_k^0成爲零.設a_{jk}是$\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$對於這些初價值的相應價值;由假定,定準式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

不等於零,方程式(E)顯然和以下的方程式同值:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}y_1+\cdots+a_{1n}y_n=a_{11}y_1+\cdots+a_{1n}y_n-F_1=\varphi_1,\\ a_{21}y_1+\cdots+a_{2n}y_n=a_{21}y_1+\cdots+a_{2n}y_n-F_2=\varphi_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ a_{n1}y_1+\cdots+a_{nn}y_n=a_{n1}y_1+\cdots+a_{nn}y_n-F_n=\varphi_n,\end{array}\right.\tag{19}$$

對於$x_i=o, y_k=o$,函數$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$及牠們的偏導來式$\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}$都等於零.關於$y_1, y_2,\cdots, y_n$解此組的方程式,因爲$\Delta$不等於零,所以這是必可能的,因得一組新方程式

(20) $$y_1=f_1,\quad y_2=f_2,\cdots,\quad y_n=f_n,$$

$f_1, f_2,\cdots, f_n$都是關於$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$的直線方程式,係數是常數,所以對於$x_i=o, y_k=o$,這些函數$f_i$都等於零.我們能發用逐漸近似法解此一組的方程式,爲此,我們取零爲根的第一近似值,再令(註二)

$$(y_i)^m=f_i[x_1,\cdots,x_p;(y_1)^{m-1},\cdots,(y_n)^{m-1}],\ (m=1,2,\cdots,\infty)$$

39. **導來式的計算法.**——函數F_j若是有些連續的偏導來式$\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$,方程式$(E)$所定的陰函數就有關於$x_i$的第一級偏導來式.我們取一組的兩個方程式作爲一個例子:

(21) $$F_1(x,y,z,u,v)=o,\quad F_2(x,y,z,u,v)=o,$$

將y及z看作常數,給x一個增長Δx,設Δu及Δv是函數u及v相應的增長,方程式(21)可以寫爲

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)=o,$$

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)=o,$$

在$\Delta x, \Delta u, \Delta v$漸近於零時,$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$都漸近於零.由此得

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=-\frac{\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial u}+\eta\right)}{\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)};$$

在 Δx 漸近於零時，Δu 及 Δv 也是如此，結果 $\varepsilon'\ \varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$ 都漸近於零.所以比 $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ 有一個極限,就是說 u 有關於 x 的一個偏導來式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{\partial F_2}{\partial v}-\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\dfrac{\partial F_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial u}\dfrac{\partial F_2}{\partial v}-\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\dfrac{\partial F_2}{\partial u}}.$$

同樣可見比 $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ 漸近於一個有限的極限 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$，此極限為和上相類的一個公式所定;實用上,此等導來式可由以下的的兩個方程式計算:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=o,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=o;$$

由同樣的方法可以得關於變數 y 及 z 的偏導來式.

累次導來式的計算法和在一個方程式的場和同.仍當注意,在有多個自變數時,若先計算全微分從而取同級的偏導式,較有利益.例如有三個自變數 x, y, z 的兩個函數 u 及 v，牠們的方程式為(21)所定;第一級的全微分 du 及 dv 可自以下的兩個方程式求出:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz+\frac{\partial F_1}{\partial u}du+\frac{\partial F_1}{\partial v}dv=o,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz+\frac{\partial F_2}{\partial u}du+\frac{\partial F_2}{\partial v}dv=o.$$

再由以下的兩個方程式可以得 d^2u 及 d^2v:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial F_1}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_1}{\partial v}d^2v=o,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\cdots+\frac{\partial F_2}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial F_2}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_2}{\partial v}d^2v=o.$$

餘倣此.在定 $d^n u$ 及 $d^n v$ 的方程式中,此等微分的係數的定準式無論 n 如何都是等於沙勾局 $\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}$, 牠是由假定不等於零的.

40. 逆法 (inversion).—— 設 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是 n 個自變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 個函數,牠們的沙勾局 $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ 是假定不恒等於零的.此 n 個方程式

$$
(22) \qquad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \\ \qquad u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}
$$

倒轉來能定 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的函數〔註三〕.誠然,我們只須取一組的價値 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$, 對於這些價値,沙勾局不等於零;設 $u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0$ 是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的相應價値,依普通定理,必有一組的函數

$$
x_1 = \psi_1(u_1, \cdots, u_n), \quad x_2 = \psi_2(u_1, \cdots, u_n), \cdots,
$$
$$
x_n = \psi_n(u_1, \cdots, u_n),
$$

能滿足關係式 (22), 並且在 $u_1 = u_1^0$, $u_2 = u_2^0, \cdots$, $u_n = u_n^0$ 時,都取得價値 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$. 這都是函數 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 的反函數;實行定出這些函數叫做一個逆法.

欲計算反函數的導來式,只須應用普通定規.例如在兩個函數的場合

$$
u = f(x,y), \quad v = \varphi(x,y);
$$

若倒轉來將 u 及 v 看做自變數,將 x 及 y 看做函數,即得兩個關係式

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

$$dv=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy,$$

因得

$$dx=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}du-\frac{\partial f}{\partial y}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},\qquad dy=\frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}du+\frac{\partial f}{\partial x}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

所以終得公式:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

41. **一個屈曲線 (courbe gauche) 的切線.**——設有一個曲線 C 為一組的兩個方程式所表:

$$(23)\qquad \begin{cases} F_1(x,y,z)=o,\\ F_2(x,y,z)=o; \end{cases}$$

設 x_0, y_0, z_0 是此曲線上一點 M_0 的坐標,用 x_0, y_0, z_0 代 x, y, z, 以下的三個沙勾扁

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial y},\qquad \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z},\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

至少有一個不等於零.爲確定人的觀念,我們假定對於 M_0 點的坐標,$\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}$ 不等於零;那麼,自方程式(23)可以取得

$$y=\varphi(x),\quad z=\psi(x),$$

φ 及 ψ 是 x 的兩個連續函數,對於 $x=x_0$,此兩個函數各成爲 y_0 及 z_0. 曲線 C 在 M_0 點的切線爲兩個方程式所表

$$\frac{X-x_0}{1}=\frac{Y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{Z-z_0}{\psi'(x_0)},$$

至於導來式 $\varphi'(x)$ 及 $\psi'(x)$ 是由兩個關係式得來:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial F_1}{\partial z}\psi'(x)=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial F_2}{\partial z}\psi'(x)=0.$$

在此二式中,令 $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$,又用 $\dfrac{Y-y_0}{X-x_0}$ 及 $\dfrac{Z-z_0}{X-x_0}$ 代 $\varphi'(x_0)$ 及 $\psi'(x_0)$;切線的方程可寫爲

$$(24)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0, \\ \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0, \end{cases}$$

或

$$\frac{X-x_0}{\left[\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}\right]_0}=\frac{Y-y_0}{\left[\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}\right]_0}=\frac{Z-z_0}{\left[\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}\right]_0}.$$

這個結果的幾何上的解說是很容易的.方程式(23)表兩個曲面 S_1 及 S_2,曲線 C 是此二曲面的互斷線;方程式(24)表二曲面在 M_0 點的兩個切平面,曲線 C 在 M_0 點的切線,是此兩個切平面的互斷直線.

若是以上的三個沙勾扁對於坐標 x_0, y_0, z_0 同時爲零,這些公式就成爲虛幻.若是有此情形,(24)的兩個方程式就簡縮爲一個

方程式,此兩個曲面 S_1 及 S_2 在 M_0 點相切,在此場合,此兩個曲面的互斷線普通的有許多的枝經過 M_0, 我們以後可以見此.

II.——奇點.——最大及最小.

24. **一個平曲線的二重點** (point double).——一點 M_0 的坐標 (x_0,y_0) 若能令函數 $F(x,y)$ 及牠的兩個偏導來式 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ 等於零,此點 M_0 就是方程式 $F=o$ 所表的曲線 C 上一個奇點.

欲在一個奇點附近研究一個平曲線,我們假定已將原點移在此點,並且函數 $F(x,y)$ 有第二級的導來式在原點附近是連續的,又有第三級的導來式在此領域內也是有限制的,又假定此三個第二級的導來式對於 $x=y=o$ 不等於零.

如此,曲線 C 的方程式成爲以下的形狀

$$ax^2+2bxy+cy^2+Q(x,y)=o, \tag{25}$$

a, b, c 都是常數不同時爲零, $Q(x,y)$ 是一個函數,牠和牠的第一級,第二級導來式都在原點上成爲零,牠又有第三級導來式對於 x 及 y 近於零的價值是有限制的.

應用戴劳公式在此函數 $Q(x,y)$ 上,可是牠的形狀成爲,

$$Q(x,y)=\alpha x^3+3\beta x^2y+3\gamma xy^2+\delta y^3 \tag{26}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 都是 x 及 y 的函數,對於 x 及 y 的價值近於零時,這些函數的價值都是有限的.

依着 b^2-ac 的符號,我們分別許多場合.若 b^2-ac 是正,方程式 $ax^2+2bxy+cy^2=o$ 表經過原點的兩個直線,此二直線都是實的且各別的,我們假定已取此二直線爲坐標軸,這就等於將變數實行一個直線的更換法 (changement linéaire); 方程式 (25) 的形

狀成爲

(25)′ $$xy+R(x,y)=o,$$

函數 $R(x,y)$ 能和函數 $Q(x,y)$ 滿足相同的條件,所以牠也可以寫爲 (25) 的形狀.

在方程式 (26) 中令 $y=ux$, 得

(27) $$u=-\frac{R(x,ux)}{x^2};$$

$R(x,y)$ 既可以寫爲 (26) 的形狀,自然 $R(x,ux)$ 能爲 x^3 所除,所以方程式 (27) 的第二端在 $x=o$ 時等於零.

$R(x,ux)$ 關於 u 的導來式在 $x=o$ 時也等於零.誠然,由假定,$R'_y(x,y)$ 有第一級的導來式在原點爲零,又有第二級的導來式是有限制的;所以應用戴勞公式,得

$$R'_y(x,y)=lx^2+2mxy+ny^2,$$

l, m, n 都是 x 的函數,在 x 及 y 漸近於零時,這些函數都保有有限的價值.

又因爲 $R'_u(x,ux)=xR'_y(x,y)$, 所以 $R'_u(x,ux)$ 能爲 x^3 所除,我們能應用 n^o32 的定理在方程式 (27) 上;此方程式有一個根而只有一個根 $u=\xi(x)$ 和 x 同時漸近於零,所以自原點有曲線 C 的一枝經過,牠的方程式是 $y=x\xi(x)$, 此枝在原點切於 x 軸.交換 x 及 y 的地位,同樣可見自原點有曲線的第二枝經過,在此點和 y 軸相切.

原點 o 是具有各別切線的二重點.〔註四〕

若 b^2-ac 是負,原點是一個孤立的二重點(point double isolé).以原點 o 爲心,畫一個半徑極小的平圓,方程式 (25) 的第一端 $F(x,y)$ 只能在 o 點成爲零.誠然,x 及 y 既是原點附近一點的坐

標,我們令 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 得

$$F(x,y)=\rho^2(a\cos^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi+\rho L),$$

L 是 ρ 及 φ 的一個函數,在 ρ 漸近於零時,此函數是有限制的.設 H 是在 ρ 小於 r 時函數 $|L|$ 的上限.

令 φ 自零變至 2π, 三項式

$$a\cos^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi$$

常保有固定的符號,這是因爲假定 $b^2-ac<o$ 的緣故.設 m 是此三項式的絕對值的最小.一個平圓中心在原點,半徑小於 r 及 $\frac{m}{H}$, 在此平圓內的所有點上, ρ^2 的係數不能成爲零;所以方程式 $F(x,y)=o$ 在此平圓內不能有別的解只是 $\rho=o$.

在 $b^2-ac=o$ 時,在二重點的兩個切線合而爲一,曲線通常的有兩枝都切在同一直線上,此兩枝作成一個逆退狀 (rebroussement). 欲詳細研究這個場合,須有極精確的討論,我們已後再作這個討論.此時我們但注意在此場合,曲線的形狀的變化,較之在前已經考慮的兩個場合倍形複雜,觀以下的例子即可見此.

曲線 $y^2=x^3$ 在原點現出一個<u>第一類的逆退狀</u>,有二枝切於 x 軸,此二枝各居此切線的一邊,又都在 Oy 軸的右邊.

曲線 $y^2-2x^2y+x^4-x^5=o$ 現出一個<u>第二類的逆退狀</u>.曲線切於 x 軸的二枝都在此切線的一邊.誠然,本 y 將方程式解開,得

$$y=x^2\pm y^{\frac{5}{2}},$$

在 x 的價值極小時, y 的兩個價值同符號,然惟在 x 爲正時,這兩個價值總是實.

曲線 $x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2=o$ 現在兩枝毫無特別,在原點都切於 x 軸.誠然,解開方程式,得

$$y=\frac{3x^2\pm x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2},$$

依次取根號的兩個符號,所得二枝在原點上毫無特別.

曲線也能夠由於相合的二枝所成,這就是方程式

$$F(x,y)=y^2-2x^2y+x^4=o$$

所表的曲線的場合;(x,y)點在平面上移動時,第一端 $F(x,y)$ 能成爲零然不換符號.

最後,一點 (x_0,y_0)能夠是一個孤立的二重點;曲線$y^2+x^4+y^4=o$就是如此,原點是一個孤立的二重點.

43. **曲面上的圓錐點**(point conique).—— 一個方程式 $F(x,y,z)=o$ 表一個曲面 S,若是其上一點 M_0 的坐標 x_0, y_0, z_0 能令三個第一級導來式 F'_x, F'_y, F'_z 同時爲零,此點 M_0 就是曲面上一個奇點.我們假定已將坐標軸的原點移置在此點上,對於 $F(x,y,z)$ 的第二第三級導來式,在原點附近我們仍保留上節的假說.曲面的方程式的形狀成爲

$$F(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2 \qquad (28)$$
$$+2b_1yz+2b_2zx+2b_3xy+Q(x,y,z)=o,$$

$a_1, a_2, \cdots, b_3$ 都是些不等於零的常數,$Q(x,y,z)$ 是含 x,y,z 的三次同質多項式,此多項式的各項的係數也都是 x,y,z 的函數,但是這些函數在原點領域內都是有限的.

奇點的種類關係於方程式

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2b_1yz+2b_2zx+2b_3xy=o \qquad (29)$$

所表的圓錐(T).

先假定此圓錐是實且不能分解,設 G 及 G' 是此圓錐的兩

個任意母線.若是作一個坐標的更換法,用此二母線作爲坐標軸 Ox 及 Oy, 方程式(28)即爲一個形狀相同的方程式所替代;在此新方程式中,係數 a_1 及 a_2 必等於零,新係數 b_3 不等於零〔如果不是如此,圓錐 (T) 就分成兩個平面了〕.

曲面 S 爲此新的 xy 平面所成的截線 (section) 爲一個類於 (25′) 的方程式所表;由以前所見,此截線有兩個曲線枝經過原點且各切於母線 G 及 G'.所以在奇點附近,曲面的形狀就和一個圓錐在頂點附近所現的兩段 (nappe) 相似;因此,所以此奇點有圓錐點的名稱.

若是方程式(29)表一個不可分解的虛圓錐, O 點就是曲面 S 的孤立奇點.若以此點爲心用一個有充分小的半徑作一個球面,在此球面內,方程式 $F(x,y,z)=o$ 除 $x=o,\ y=o,\ z=o$ 外沒有別的解.設 M 是原點的一個鄰點 ρ 是此點至原點的距離, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 是直線 OM 的方向餘弦 (cosinus directeurs). 用 $\alpha\rho,\ \beta\rho,\ \gamma\rho$ 代 $x,\ y,\ z$, 函數 $F(x,y,z)$ 成爲

$$F(x,y,z)=\rho^2(a_1\alpha^2+a_2\beta^2+\cdots+2b_3\alpha\beta+\rho L),$$

ρ 漸近於零時,因數 L 保有一個有限的價值.方程式 (29) 所表的既是一個虛圓錐,所以一點 (α,β,γ) 畫出半徑爲 1, 心在原點的球面時,多項式

$$a_1\alpha^2+a_2\beta^2+\cdots$$

不能成爲零;我們用 m 表此多項式的絕對值的下限.他一方面,設 H 是在 O 點附近 L 的絕對值的上限.若是以此點爲心,以小於 $\frac{m}{H}$ 的一個長度爲半徑畫出一個球面,在此球面內, $F(x,y,z)$ 的算式中 ρ^2 的係數就不能等於零.所以方程式(28)除 $\rho=o$ 外沒有別的

解.

若是方程式(29)表兩個各別的實平面,曲面就有兩段從 O 點經過,且各和此二平面中的一個相切.有某某曲面現出一個線由二重點所成,在此線上的切線所成的圓錐分為兩個平面,此線是曲面上的一個二重線 (ligne double),在其上,曲面有各別的兩段互相通過.例如方程式 $z=o, x^2+y^2=1$ 所表的平圓是方程式

$$z^4+2z^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2-1)^2=o$$

所表曲面的二重線.

若是方程式(29)表兩個共軛虛平面(plans imagmaires conjugués)或是一個二重平面(plan double),欲知曲面在 o 點附近形狀,必須對於每一特別場合都加以特別討論.以上我們所作的討論,以後仍見於關於最大及最小的研究中.

44. 一個自變數的函數的最大及最小.——設 $f(x)$ 是在 (a,b) 區域內的一個連續函數, c 是此區域內的一點.若能求得一個有充分小的正數 η, 使 h 自 $-\eta$ 變至 $+\eta$ 時 $f(c+h)-f(c)$ 保有一個固定的符號.函數 $f(x)$ 對於 $x=c$ 就是最大或最小.若差數 $f(c+h)-f(c)$ 是正,函數 $f(x)$ 對於 $x=c$ 時就小於牠對於 x 在 c 附近的價值;所以牠是最小.反之,差數 $f(c+h)-f(c)$ 是負時,函數對於 $x=c$ 是最大.

若是函數 $f(x)$ 對於變數的價值 c 有一個導來式,這個導來式當成為零.誠然,因為在 h 漸近於零時,此兩個商

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \qquad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

有相同的極限 $f'(c)$ 然符號相反;所以必須此共公的極限 $f'(c)$ 等於零.反之,設 c 是方程式 $f'(x)=o$ 的一個根在 a 及 b 中間;我們

假定在普通場合,對於$x=c$,第一個不等於零的導來式是n級,又假定這個導來式在價值c附近是連續的.截勢的普通公式在此處成爲

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot2\cdots n}f^{(n)}(c+\theta h),$$

此式又可寫爲

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot2\cdots n}[f^{(n)}(c)+\varepsilon],$$

ε和h爲同時無限小.設η是如此的一個正數:x自$c-\eta$至$c+\eta$時,ε的絕對值小於$|f^{(n)}(c)|$;對於x的這些價值$f^{(n)}(c)+\varepsilon$必和$f^{(n)}(c)$同符號,因而$f(c+h)-f(c)$必和$h^nf^{(n)}(c)$同符號.若n是奇數,可見此差數必和h同時改變符號;即在$x=c$時沒有最大及最小.若n是偶數,$f(c+h)-f(c)$必和$f^{(n)}(c)$同符號,h正負俱不論;若$f^{(n)}(c)$是正,函數$f(x)$是最小;若$f^{(n)}(c)$是負,$f(x)$是最大.約而言之,欲函數對於$x=c$成爲最大或最小,必須要然只須要對於$x=c$,第一個不等於零的導來式的級數是偶數.

用幾何學的術語說來,以上的條件就是:曲線$y=f(x)$有一點A,牠的橫坐標是c,曲線在此點的切線平行於ox軸,此點又不是一個彎曲點.

45. **二自變數的函數.**——設$z=f(x,y)$是二自變數x,y的函數;一點M,牠的坐標是x,y,假定此點M在閉線C所限的面積Ω內,此函數$f(x,y)$是連續的.設(x_0,y_0)是面積Ω內的一點;若是能求得一個正數η,凡h及k的絕對值小於η時,必能得着

$$\Delta=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\geq o,$$

此函數$f(x,y)$就說是在(x_0,y_0)點是最小;同法可定$f(x,y)$的最大.〔註五〕若暫時將y看作常數y_0,z就成爲一個自變數x的函

數,依上節研究的場合,必須$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在$x=x_0, y=y_0$時成爲零,差數

$$f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)$$

在h極小時方能保有一定的符號;同法可證明這些價值x_0, y_0當能令$\dfrac{\partial f}{\partial y}$等於零,所以$x, y$能令$f(x, y)$成爲最大或最小的價值當自解連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

得來.

設$x=x_0, y=y_0$是此二方程式的一個解,我們假定$f(x, y)$的第二級偏導來式在x_0, y_0附近是連續的,對於$x=x_0, y=y_0$,此等導來式不都等於零,並假定第三級導來式是存在的,依<u>泰勞</u>公式

(30) $$\Delta=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right)+\frac{1}{6}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}_{\substack{x_0+\theta h;\\ y_0+\theta k}}$$

對於h及k的價值漸近於零時,此式的第二端顯然是三項式

$$h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$$

的符號,我們可見此三項式的符號的討論最關重要.

欲對於$x=x_0, y=y_0$有一個最大或最小,必須要然只須要(x_0+h, y_0+k)點在一個中心在(x_0, y_0)點的極小方形內時,差數Δ保有一個固定的符號,所以(x_0+h, y_0+k)點在一個中心在(x_0, y_0)點的極小圓周內時,此差數Δ也保有一個固定符號,反之亦然;這是因爲我們可以將正方形用一個圓周更換,反之亦然.設C是一個圓周,中心在(x_0, y_0)點,半徑爲r;

令

$$h=\rho\cos\varphi, \quad k=\rho\sin\varphi$$

令 φ 自 o 變至 2π, ρ 自 $-r$ 變至 $+r$ 即得此圓周內的所有點.我們本可以但令 ρ 的價值爲正,然因爲下面的關係,此處以不設此制限爲便.將 h 及 k 的價值代入 Δ,得

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}(A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi)+\frac{\rho^3}{6}L,$$

在此式中

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2},\qquad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0},\qquad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2},$$

L 是一個函數,此處也無須寫出牠的展開式,但是在 (x_0, y_0) 點附近牠的價值是有限的.此層既已說明,依 B^2-AC 的符號,我們可分爲許多場合.

<u>第一場合.</u>—— 設 $B^2-AC>o$. 方程式

$$A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi$$

有 $\tan g\varphi$ 的兩個實根,牠的第一端是兩個平方的差,所以可以寫爲

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\Big[\alpha(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2-\beta(a'\cos\varphi+b'\sin\varphi)^2\Big]+\frac{\rho^3}{6}L,$$

其中

$$\alpha>o,\quad \beta>o,\quad ab'-ba'\neq o.$$

若是給 φ 角一個價值,使

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=o,$$

如此,若 ρ 的價值極小,Δ 就是負;反之,若是給 φ 一個角度,使

$$a'\cos\varphi+b'\sin\varphi=o,$$

Δ 對於 ρ 的價值極小時就是正.所以不能求得一個數 r, 使不論 φ 如何,但 ρ 的絕對值小於 r 時 Δ 都保有一定符號.函數 $f(x,y)$ 對於 $x=x_0, y=y_0$ 不是最大或最小.

<u>第二場合.</u>—— 設 $B^2-AC<o$. φ 自 o 變至 2π 時;三項式

$$A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi$$

不能成爲零.設m是牠的絕對値的一個下限;牠一方面,設H是函數L在某一圓周內的絕對値的一個上限,圓周的半徑爲R,中心在(x_0,y_0).命r表一個小於R及$\frac{3m}{H}$的正數;在以r爲半徑的圓周內,差數Δ必和r^2的係數同符號,就是和A或C同符號.所以函數$f(x,y)$對於$x=x_0$, $y=y_0$是最大或最小.

約而言之,在(x_0,y_0)點,若是

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>o,$$

沒有最大及最小.若是

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}<o,$$

依此二導來式$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$的符號,函數是最大或最小.若此二導來式都是負,函數是最大;若此二導來式都是正,函數是最小;我們可注意這個最大或最小是狹義的.(sens strict)

46. **不定的場合.**—— $B^2-AC=o$ 的場合是上節所未曾討論的.由幾何學可以察知這個最大最小問題爲甚麼在此特別場合特形困難.設S是方程式$z=f(x,y)$所表的曲面;若函數$f(x,y)$在一點(x_0,y_0)是最大或最小,在此點附近,函數及牠的導來式都是連續的,我們必當得着

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=o,\qquad \frac{\partial f}{\partial y_0}=o,$$

這是表明曲面S在$M_0(x_0,y_0,z_0)$點的切平面當平行於xy平面.欲使此點和一個最大或最小相應,又必須在M_0點附近曲面S完全在此切平面的一邊,所以必須在切平面的接觸點附近研究此曲面及切平面的相關形狀.

我們假定已將原點移在此接觸點上,又取切平面爲xy平面曲面的方程式的形狀是

(31) $$z=ax^2+2bxy+cy^2+\alpha x^3+3\beta x^2y+3\gamma xy^2+\delta y^3,$$

a,b,c都是常數,$\alpha,\beta,\gamma,\delta$都是$x$及$y$的函數,在$x$及$y$都漸近於零時,這些函數都是有限的.

欲知曲面S在原點附近是否完全在平面xy一邊,必須研究此曲面和平面xy的互隨線 (intersection). 但是這個互隨線是爲方程式

(32) $$ax^2+2bxy+cy^2+\alpha x^3+\cdots=o$$

所表明,她現出一個二重點在坐標的原點上.若b^2-ac是負,原點是一個孤立的二重點(n^o42),若是以原點爲心,用有充分小的半徑r畫一個平圓C,(x,y)點在此圓內時,方程式(32)除$x=y=o$外,就沒有別的解.(x,y)點在此圓內移動時,方程式(32)的第一端常保有一個固定符號,所以曲面S射影在C圓內的所有點除原點外,都在xy平面的一邊,這是函數$f(x,y)$有最大或最小的場合,曲面S近於原點的部分,彷彿球面或橢圓面的一部分.

若b^2-ac是正,曲面S和切平面的互隨線現出兩個各別的曲線枝C_1及C_2從原點經過;這兩個曲線枝在原點的切線都爲方程式

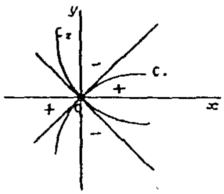
$$ax^2+2bxy+cy^2=o$$

所表.

我們懸想有一個動點(x,y)在原點附近;此動點通過一個曲線枝C_1或C_2時,方程(32)的第一端成爲零並換符號,所以若是在原點附近將平面的每一部分都給以方程式(32)的第一端的

符號,我們就得着一個圖解如第 4 圖.若以原點爲心在 xy 平面上畫一個圓周,曲面上射影在此圓周內的所有點中,總有些在 xy 平面上面,又總有些在 xy 平面下面,此圓周如何小俱不論.

圖 4



曲面 S 對於牠的切平面,類似一個一段雙曲面(hyperboloïde à une nappe),或是一個雙曲拋物面 (paraboloïde hyperbolique). 對於原點,函數 $f(x,y)$ 也不是最大,也不是最小.

$b^2-ac=o$ 的場合,曲面和切平面的互斷線現出一個逆退點 (point de rebroussement) 這正是我們保留未加研究的場合.若是互斷線由各別的兩枝所成都從原點經過,就沒有最大或最小,這是因爲曲面通過牠的切平面的緣故.然而若原點是一個孤立的二重點,或若是互斷線由相合的兩枝所成,函數 $f(x,y)$ 就是最大或最小,但是在此最後的場合,我們所得的是廣義的最大或最小.

欲分辨這兩個場合,必須計算着第三級及第四級導來式的價值,有時甚至於必須計算更高級的導來式,以下的討論在實用上是常常具足的,但只能應用在最普通的情形上.在 $b^2-ac=o$ 時,我們可將曲面的方程式用戴勞公式展開至第四級,寫爲

(33) $z=f(x,y)=A(x\sin\omega-y\cos\omega)^2+\varphi_3(x,y)+\frac{1}{24}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(4)}_{\theta x,\theta y}$,

爲確定人的觀念,我們假定 $A>o$. 在原點附近,若是要曲面 S 完全在 xy 平面的一邊,必須要曲面 S 和經過 oz 的平面所成的一切互斷線,在原點附近處都在於 xy 平面的一邊.然若是我們用平面

$$y=x\,\text{tang}\,\varphi$$

將曲面 S 切開,互斷線的方程式卽可在方程式(33)中令

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi$$

得來,(坐標軸是 oz 及割平面在 xoy 上的迹),如此即得

$$z=A\rho^2(\cos\varphi\sin\omega-\cos\omega\sin\varphi)^2+K\rho^3+L\rho^4,$$

K 表不關於 ρ 的一個係數;若是 $\text{tang}\,\omega\gtrless\text{tang}\,\varphi$ 在 ρ 的價值極小時, z 就是正.所以在原點附近這一切的截線都在 xy 平面上邊.現在用平面

$$y=x\,\text{tang}\,\omega$$

將曲面切開;若 K 的相應價值不等於零, z 的展開式的形狀就是

$$z=\rho^3(K+\xi),$$

此式和 ρ 同時改變符號.所以曲面和此平面所成的互斷線現出一個彎曲點 (point d'inflexion) 在原點,又在此點上通過 xy 平面;所以在原點上函數 $f(x,y)$ 不是最大或最小.曲面和牠的切平面的互斷線現出第一類的逆退點時,就是這個場合.例如曲面

$$z=y^2-x^3.$$

若是用平面

$$y = x\,\mathrm{ang}\,\omega$$

切開曲面時，$K=o$，我們就將展開式取至第四級諸項,即得 z 的算式的形狀成為

$$z = \rho^4(K_1 + \varepsilon'),$$

K_1是一個常數,牠的算式很容易自第四級導來式求出;我們假定這個係數不等於零.ρ 的價值極小時,z 帶的是 K_1 的符號;若 K_1 是負,在原點附近,截線是在 xy 平面下邊,z 仍沒有最大或最小;例如曲面 $z=y^2-x^4$ 就是這個場合,此曲面和 xy 平面的互斷線由兩個拋物線 $y=\pm x^2$ 所成.我們可見若是不能同時得着 $K=o$, $K_1>o$,就無須更加多求,即可決定曲面在原點附近通過牠的切平面.

若是同時得着 $K=o$, $K_1>o$, 曲面和經過 oz 的平面所成的一切截線,在原點附近,都居於 xy 平面上邊.然而如此尚不足決定曲面不通過牠的切平面.觀以下的曲面即可將此層證明:曲面

$$z = (y - x^2)\,(y - 2x^2)$$

即沿兩個拋物線和牠的切平面相割.欲使曲面不通過牠的切平面,我們取一個經過 oz 的圓柱 (cylindre) 牠的母線都和 oz 平行,必須此圓柱和曲面相割的曲線都在 xy 平面上邊.設 $y=\varphi(x)$ 是圓柱在 xy 平面上的迹 (trace) 的方程式,函數 $\varphi(x)$ 在 $x=o$ 時成為零;函數 $F(x)=f[x,\varphi(x)]$, 無論 $\varphi(x)$ 如何,當然對於 $x=o$ 成為最小.為便於計算起見,我們假定所取坐標軸的方法能使曲面的方程式的形狀成為

$$\approx Ay^2+\varphi_3(x,y)+\cdots,$$

A是正數.用此一系的坐標軸,在原點上我們得

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=o,\quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=o,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=o,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}=o,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>o.$$

函數$F(x)$的各級的導來式是

$$F'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x),$$

$$F''(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'^2(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi''(x),$$

$$F'''(x)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\varphi'(x)+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\varphi'^2(x)+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^3(x)$$

$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\varphi''(x)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'(x)\varphi''(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'''(x),$$

$$F^{\mathrm{IV}}(x)=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\varphi'(x)+6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\varphi'^2(x)+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\varphi'^3(x)+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\varphi'^4(x)$$

$$+6\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\varphi''(x)+12\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\varphi'(x)\varphi''(x)+6\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^2\varphi''(x)$$

$$+4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\varphi'''+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4\varphi'\varphi'''+3\varphi''^2)+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi^{\mathrm{IV}}(x);$$

對於$x=y=o$,這些公式定出

$$F'(o)=o,\quad F''(o)=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi'(o)]^2.$$

若是$\varphi'(o)$不等於零,函數$F(x)$對於$x=o$現出一個最小,這是自以上的討論中容易看出的.若假定$\varphi'(o)=o$,即得

$$F'(o)=o,\ F''(o)=o,\ F'''(o)=\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3},$$

$$F^{\mathrm{IV}}(o)=\frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4}+6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2\partial y_0}\varphi''(o)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(o)]^2;$$

欲使$F(x)$是最小,必須$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}$成為零,又必須$\varphi''(o)$的二次三項式

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4}+6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2\partial y_0}\varphi''(o)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(o)]^2$$

不論$\varphi''(o)$如何都是正.

我們很容易驗明這些條件對於方纔所取的函數 $z=y^2-3x^2y+2x^4$ 是不能滿足的,然對於函數 $z=y^2+x^4$ 是能滿足的此最後的曲面顯然是全在 xy 平面上邊.

這個討論暫止於此,若要再加嚴密,即須要極其精微的考究;閱者如欲詳究這個問題,請參觀 Mémoire de M Ludwig Scheffer, dans le Tome XXXV des Mathematische Annalen.

47. 三個自變數的函數.——設有三個自變數 x, y, z 的一個連續函數 $u=f(x,y,z)$. 取差數

$$\Delta=f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)-f(x_0,y_0,z_0)$$

在 h, k, l 的絕對值小於一個有充分小的正數 η 時,若是此差數保有一個固定符號,我們就說這個函數對於一組的價值 x_0, y_0, z_0 是最大或最小.

我們但將三個自變數 x, y, z 中的一個作爲受了一個增長,將其牠的兩個作爲常數,和前相同,我們可見必須同時得着

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=o,\quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=o,\quad \frac{\partial f}{\partial z_0}=o$$

u 纔能夠是最大或最小,自然是承認這些導來式在 x_0, y_0, z_0 附近都是連續的.假定對於這三個連立方程式我們已得了一組的解,設 M_0 是空間一點,牠的坐標是 (x_0,y_0,z_0). 若是能求得一個以 M_0 爲心的球,凡 (x,y,z) 點在此球內時,差數

$$f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)$$

常保有一個固定的符號,函數就是最大或最小.我們用

$$x=x_0+\rho\alpha,\quad y=y_0+\rho\beta,\quad z=z_0+\rho\gamma$$

表 M_0 的一個隣點的坐標,α,β,γ 間有一關係 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.依戴勞公式將函數 $f(x,y,z)$ 展開,在此展開式中用 $\rho\alpha,\rho\beta,\rho\gamma$ 代 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 差數 Δ 成為

$$\Delta=\rho^2[\varphi(\alpha,\beta,\gamma)+\rho L],$$

$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ 表一個函 α,β,γ 的二次式,牠們的係數是 $f(x,y,z)$ 的導來式,L 是一個函數,牠在 M_0 點附近是有限的.這個二次式,除却牠的判別式 (discriminant) 等於零的場合不計外,牠都可以分解為含 α,β,γ 的三個各別的一次式的平方各乘以一個常數係數.設

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=aP^2+a'P'^2+a''P''^2;$$

若是這三個係數 a, b, c 都同符號,(α,β,γ) 點在一個心在原點半徑等於 1 的球面上移動時,二次式 $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ 的絕對值常大於某一個最小,所以 ρ 的價值小於某一極限時,Δ 就保有 a,a',a'' 的符號,所以函數 $f(x,y,z)$ 是最大或最小.

若是此三個係數 a,a',a'' 不同符號,就沒有最大或最小.假定 $a>o$, $a'<o$; 我們取 α,β,γ 的價值使滿足關係式 $P'=o$, $P''=o$. 這些價值不能令 P 成為零,所以對於 ρ 的價值極小時,Δ 是正.反之,若是取 α,β,γ 的價值使滿足關係式 $P=o$, $P''=o$, 對於 ρ 的價值極小時,Δ 就是負.

這個方法是一般的,至於自變數的數目如何俱不論;這全是一個二次式的討論負有重大任務.在三個自變數的場合 $u=f(x,y,z)$, 我們可見這個問題在於在一個奇點附近研究曲面的性質.誠然,設有一個曲面 Σ, 牠的方程式是

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)=o$$

這個曲面自然是從 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 點經過;如果函數 $f(x,y,z)$ 是最大或最小,這個 M_0 點就是曲面 Σ 的一個奇點,此層既已說明,若是在 M_0 點的切線所成的圓錐是虛圓錐,我們可見 $F(x,y,z)$ 在以 M_0 為心的一個極小球面內時,常保有一個符號;$f(x,y,z)$ 就實在有最大或最小.然若是這個圓錐是實圓錐,或分解為兩個各別的實平面,曲面就有許多的段從 M_0 點經過,(x,y,z) 點通過此曲面的一段時,$F(x,y,z)$ 就換符號.

48. **一點至一曲面的距離.**——設有一定點 (a,b,c) 及一個曲面 S,此曲面的方程式是 $F(x,y,z)=o$,求此定點和此曲面的距離的最大及最小.若是由方程式 $F=o$ 將 z 作為 x 及 y 的函數,所求的距離的平方

$$u=d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

就只是兩個自變數 x 及 y 的函數,對於曲面上一點 (x,y,z),如果 u 是最大或最小,在此點上我們當得着

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=(x-a)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=o$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=(y-b)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial y}=o$$

他一方面,自方程式 $F=o$,得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=o,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=o,$$

在前的兩個關係式成為

$$\frac{x-a}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{y-b}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{z-c}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

這是表明曲面在(x,y,z)點的法線(normale)經過(a,b,c)點,所以除曲面上的奇點不計外,所求的點都是自(a,b,c)點向曲面S所引垂線的足.欲考慮這些點中的一個是否實在和一個最大或最小相應,我們取此點為原點,取在此點的切平面為xy平面,如此,定點(a,b,c)就在Oz軸上,那麼,所要研究的函數u就成為

$$u=x^2+y^2+(z-c)^2,$$

z是一個函數$f(x,y)$,牠和牠的第一級的導來式在$x=y=o$時都成為零.我們用r,s,t表z的第二級偏導來式,在原點上,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2(1-cr),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2cs,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2(1-ct),$$

所以這個問題在於研究多項式

$$\Delta(c)=c^2s^2-(1-cr)(1-ct)=c^2(s^2-rt)+(r+t)c-1$$

的符號,因為恆等式

$$(r+t)^2+4(s^2-rt)=4s^2+(r-t)^2,$$

所以方程式$\Delta(c)=o$的根總常常是實的,此層既已說明,我們依s^2-rt的符號分為數個場合.

第一場合.——$s^2-rt<o$.方程式$\Delta(c)=o$的兩個根c_1及c_2都同符號,我們可寫為$\Delta(c)=(s^2-rt)(c-c_1)(c-c_2)$.在$Oz$軸上取兩點$A_1$及$A_2$,牠們的坐標各等於$c_1$及$c_2$,這兩個點都在原點的一邊;若假定$r$及$t$是正,這是常能夠的,此兩點就都在$Oz$是正的一邊.若是定點$A(o,o,c)$在線分$A_1A_2$之外,$\Delta(c)$就是負,距離$OA$就是最大或最小.欲辨別這兩個場合,必須計算$1-cr$的符號,這個係數只在$c=\frac{1}{r}$時成為零,因為$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{s^2}{r^2}$,

所以這個價値 c 在 c_1 及 c_2 中間.但是對於 $c=o$, $1-cr$ 是正;所以若是 A 點和原點都在線分 A_1A_2 的一邊 $1-cr$ 就是正,距離 OA 是最小.反之,若 A 和原點分居於線分 AA_1 的兩邊,距離 OA 是最大;若是 A 點在 A_1 及 A_2 中間,距離也不是最大也不是最小,對於 A_1 及 A_2 的自身都是不定的場合.

第二場合.——$s^2-rt>o$.方程式 $\Delta(c)=o$ 的兩個根一個是正,一個是負,A_1 及 A_2 兩點各在原點的一邊.若是 A 點不在 A_1 及 A_2 中間,$\Delta(c)$ 是正,就沒有最大或最小.若是 A 點在 A_1 及 A_2 中間,$\Delta(c)$ 是負,$1-cr$ 是正,距離 OA 是最小.

第三場合.——$s^2-rt=o$,在此場合,$\Delta(c)=(r+t)(c-c_1)^2$ 和上相同,若是 A 點和原點都在 $A_1(o,o,c_1)$ 的一邊,就可見距離 OA 是最小;若是 A_1 在原點及 A 點中間,就沒有最大或最小.

這兩點 A_1 及 A_2 在研究曲度 (courbure) 上負有重大責任;牠們是曲面 S 在 o 點的主曲度 (courbures principaux) 的心.

49. **陰函數的最大及最小.**——有時須求一個多變數的陰函數的最大或最小,這些變數是爲一個或多個關係式所連合.例如 $\omega=f(x,y,z,u)$ 是四個變數 x,y,z,u 的函數,這些變數,又必須滿足兩個關係式

$$f_1(x,y,z,u)=o,\quad f_2(x,y,z,u)=o.$$

爲確定人的觀念,我們將 x 及 y 看作兩個自變數,將 z 及 u 看做 x 及 y 的函數,這兩個函數爲上面的兩個關係式所定. ω 的最大及最小的條件是

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=o,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=o;$$

牠一方面,這些偏導來式$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$都是由以下的關係式所定:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=o,\quad \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=o,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=o,\quad \frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=o.$$

消去$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}$, 得兩個關係式

$$(34)\qquad \frac{D(f,f_1,f_2)}{D(x,z,u)}=o,\ \frac{D(f,f_1,f_2)}{D(y,z,u)}=o,$$

再加以兩個關係 $f_1=o$, $f_2=o$, 此四個關係式定出x, y, z, u和一個最大或最小相應.但是關係式 (34) 表明能夠求得λ及μ的價值,使滿足以下的關係,

$$(35)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial x}=o, & \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial y}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial y}=o,\\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial z}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial z}=o, & \frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial u}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial u}=o.\end{cases}$$

所以我們能夠將 (34) 的兩個條件用 (35) 的四個方程式替代,其中λ及μ是輔助未知數.

這個証明法當然是一般的,我們可以宣告以下實用定規:設有一個函數

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

含有n個變數,這些變數爲h個各別的關係式所連絡

$$\varphi_1=o,\quad \varphi_2=o,\cdots,\quad \varphi_h=o,$$

欲得$x_1,x_2,\cdots,x_n$能令此函數成爲最大或最小的價值,必須令輔

助函數

$$f+\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_h\varphi_h$$

的偏導來式等於零,此式中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_h$是看作常數的.

由某種的注意,能使一般定規在應用上較爲容易,尤其對於幾何上最大最小問題,這個性質最爲著明.例如一個三角形$M_1M_2M_3$,牠的頂點各在三個閉平曲線C_1,C_2,C_3上這三個平面曲線是各別的或否皆可,求此三角形的最大面積.我們假定C_i上一點的坐標爲一個變率$t_i(i=1,2,3)$的函數;這是很明瞭的,此三角形的面積是三個自變數t_1,t_2,t_3的函數$F(t_1,t_2,t_3)$.條件$\frac{\partial F}{\partial t_1}=o$表明若是$M_2,M_3$點不動,$M_1$自牠的初位置(position initiale)變位時,面積是最大或最小.爲此,必須曲線C_1在M_1點的切線平行於邊線M_2M_3;同一理由,曲線C_2,C_3在M_2,M_3的切線各當平行於所對的邊.若是曲線C_1,C_2,C_3是一個橢圓線,就有無限的最大面積的三角形;那末,在此場合我們有廣義的最大.

50. 關於絕對的最大及最小的一般注意.——設有一個函數在一個定領域內及界線上都是連續的,欲定此函數的絕對最大最小,必須作幾個注意,這些注意的關係重要是很容易看出的.例如一個一自變數的函數$f(x)$確定在(a,b)區域內;牠能夠對於此區域內一點c達到牠的最大或最小價值,然而牠的導來式並未成爲零.若是導來式$f'(x)$對於$x=c$時是不連續,只要此導來式在此處改變符號,函數就有一個最大或最小;例如

函數 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=o$ 時是最小,然而導來式 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ 對於 x 的這個價值成爲無限.這個注意當然可以推廣在任何數的自變數的函數上.爲確定人的觀念,設 $\omega=f(x,y)$ 是二自變數 x 及 y 的一個函數,牠在一個領域 D 內是連續的.對於領域內一點 (x_0,y_0),欲審定牠是否和一個最大或最小相應,我們所立的定規是假定 f 的導來式以至於第三級,在此點 (x_0,y_0) 附近都保有一個有限價值.然而能夠時函數 ω 對於領域 D 內一點 (x_0,y_0),ω 達到牠的最大或最小,但是這些條件並沒有滿足,例如在一個點上 f'_x,f'_y 都是不連續.〔註六〕

一個函數也能夠在領域的界線上達到牠的最大或最小,在這個場合,一般定規顯然不適用.例如有一個定點 P,牠的坐標是 (a,o),又有一個平圓 C,半徑是 R,中心在原點,求此點至此平圓的最小距離.我們取平圓 C 上一點 M 的橫坐標 x 爲自變數,得

$$d^2=\overline{PM}^2=R^2+a^2-2ax.$$

應用一般定規,我們就須求方程式 $2a=o$ 的根,這是不合理的.這個結果甚易說明,依此問題的性質,可見變數 x 只能自 $-R$ 變至 $+R$,若 a 是正,d^2 對於 $x=R$ 是最小,對於 $x=-R$ 是最大.

如此,關於領域的界限,對於每一個特別場合,似乎都須有一個特別的討論.然若是所取的領域沒有界限,這個討論是無用的.凡一個閉曲面 (surface fermée) 都可以看做具有兩度 (dimension) 的一個沒有界線的領域.爲確定人的觀念,我們取半徑是 R 的一個球面,又假定此球面上一點的直交坐標都是由地理坐標(coordomées géographiques)所表明,

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\ y=R\sin\theta\sin\varphi,\ z=R\cos\theta$$

若是一個函數對於球面上每一點都有一個惟一的價值,我們就得着二自變數 θ 及 φ 的一個函數 $\omega=f(\theta,\varphi)$, 此函數對於此兩個變數都有一個週期 2π.

若是對於 θ 及 φ 的一切價值,此函數及牠的偏導來式都是連續的,那麽, θ 及 φ 的價值能使此函數是最大及最小的,當然是方程式 $\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=0$, $\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}=0$ 的一個解.

51. **一個定準式的最大及最小**——設有一個定準式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & l_n \end{vmatrix}$$

知道牠每一列的元素的平方和,求牠的最大及最小.這個問題就是求 n^2 個變數 a_i, b_i, c_i 的函數 Δ 的最大及最小,這些變數間有 n 個關係式

(37) $$a_i^2+b_i^2+c_i^2+\cdots+l_i^2=H_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

這些 H_i 都是已知的正數.如此所定的領域是一個沒有界線的領域,這是因為我們能將 $a_i,b_i,\cdots,l_i$ 看做在 n 度的空間一個過球面(hypersphere)的坐標,此球面的半徑是 $\sqrt{H_i}$.

假定此定準式已依牠的第 i 列的元素展開

(38) $$\Delta=A_ia_i+B_ib_i+\cdots+L_il_i;$$

我們就須求 n 個變數 $a_i,b_i,\cdots,l_i$ 的函數 Δ 的最大最小,此等變

數間有一個關係式(37).應用 ($n^{\circ}49$) 的助乘式 (multiplicateur) 即直接得關係式

(39) $$\frac{a_i}{A_i}=\frac{b_i}{B_i}=\cdots=\frac{l_i}{L_i}.$$

設 $a_k,b_k,\cdots,l_k$ 是 Δ 的另一行的元素,即得

$$A_ia_k+B_ib_k+\cdots+L_il_k=o,$$

因而依關係式(39),得

(40) $$a_ia_k+b_ib_k+\cdots+l_il_k=o,\ (i\neq k).$$

因此我們決定定準式惟在垂直 (orthoganale)時方能有最大或最小.

若是條件(40)能滿足,Δ 的平方就是一個定準式,牠的所有元素都是零,惟有主對角線(diaganale principale)上的元素存在,此後者各等於 $H_1,H_2,\cdots,H_n$.在此場合,所以

$$\Delta^2=H_1H_2\cdots H_n,$$

Δ 的絕對值的最大是

$$\sqrt{H_1H_2\cdots H_n}.$$

注意.—— 在 $n=3$ 的場合,Δ 表三個直線 OA_1,OA_2,OA_3 上所建的一個平行六面體,這三個直線是自原點連合 $A_1(a_1,b_1,c_1)$, $A_2(a_2,b_2,c_2)$, $A_3(a_3,b_3,c_3)$ 三點的直線.所以上面所得的結果,只是此幾何定理的推廣:在三個定長的稜上所建的一切平行六面體中,惟直平行六面體的體積最大.

不變頂點 O,此平行六面體能在空間佔據無限數的位置,可見所得的 Δ^2 的最大是一個廣義的最大.

設 Δ 第 n 級的任何定準式;我們用 $a_i,b_i,\cdots,l_i$ 表第 i 列的元素,依上面所得,可見

(41) $$|\Delta| \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2+\cdots+l_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+\cdots+l_2^2}\cdots\sqrt{a_n^2+b_n^2+\cdots+l_n^2}$$

若 Δ 的一切元素的絕對值都不能大於一個正數 M, 我們可寫爲〔註七〕

(42) $$|\Delta| \leq \sqrt{n^n}\, M^n.$$

III——函數定準式

(déterminants fonctionnels).

52. **根本性質.** (propriété fondamentale).——在陰函數的理論上,我們已見函數定準式負有重大的任務.一切的證明法都是假定某一個沙勾局不等於零.設有 n 個自變數的 n 個函數,都是連續的,又都有第一級的偏導來式也是連續的,這些函數的沙勾局有些性質和導來式的性質相似.導來式的性質是:欲使一個自變數的一個函數成爲常數,必須要然只須要牠的導來式恒等於零,關於沙勾局,有一個和此相應的定理如下:

設 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n$ 是 n 自變數 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的 n 個函數,欲使在此 n 個函數間有一個關係式不含有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 必須要然只須要函數定準式 $\dfrac{D(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ 恒等於零.

1° 這個條件是必要的.——爲確定人的觀念,我們取三個自變數的三個函數

(43) $$X=f_1(x,y,z),\quad Y=f_2(x,y,z),\quad Z=f_3(x,y,z),$$

這三個函數都是連續的,又都有偏導來式也是連續的,假定沙勾局

(44) $$\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x,y,z)}$$

不恆等於零.設 (x_0,y_0,z_0) 是 x,y,z 的一組的價值,對於此一組的價值,定準式不等於零;設 X_0,Y_0,Z_0 是 X,Y,Z 的相應價值.依 $n^{0}38$ 的普通定理,我們能選出一個正數 h,凡 X,Y,Z 的價值能滿足條件

(45)　$X_0-h\leqq X\leqq X_0+h,\ Y_0-h\leqq Y\leqq Y_0+h,\ Z_0-h\leqq Z\leqq Z_0+h$

時,x,y,z 必有一組的價值相應能滿足方程式 (43). 在以上的區域內,函數 f_1,f_2,f_3 既能任意選擇,所以在此等函數間不能有一個關係 $F(X,Y,Z)=o$.

注意.——同樣的推理可見若是此三個涉勾碥

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)},\quad \frac{D(X,Y)}{D(y,z)},\quad \frac{D(X,Y)}{D(z,x)},$$

不同時爲零,就不能有一個關係在函數 X,Y 間.一般,欲使 $(n+p)$ 個自變數 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+p}$ 的 n 個函數 $u_1u_2,\cdots,u_n$ 爲一個關係式所連絡,必須要一切的函數定準式

$$\frac{D(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{D(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\cdots,x_{\alpha_n})}$$

恆等於零 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 是 $(n+p)$ 個最初的整數中任何 n 個.

2^0 這個條件是充足的.——我們取四個自變數的四個函數

$$(46)\qquad \begin{cases} X=f_1(x,y,z,t), \\ Y=f_2(x,y,z,t), \\ Z=f_3(x,y,z,t), \\ T=f_4(x,y,z,t), \end{cases}$$

牠們的定準式

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial t} \end{vmatrix}$$

恒等於零.先假定第一級子式(mineurs)中有一個不恒等於零,譬如是$\delta=\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x,y,z)}$罷.我們將(46)的首三個方程式本$x, y, z$解開,得

(47) $$x=\varphi_1(X,Y,Z,t),\ y=\varphi_2(X,Y,Z,t),\ z=\varphi_3(X,Y,Z,t),$$

因此,得

(48) $$T=f_4(x,y,z,t)=F(X,Y,Z,t).$$

我們將証明這個函數F不含有變數t,或是証明$\frac{\partial F}{\partial t}$恒等於零.

誠然,

(49) $$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial t};$$

他一方面,除函數$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$的導來式$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$是為三個關係式所定

(50) $$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t}=o, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t}=o, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial t}=o. \end{cases}$$

關係式(49)及(50)成為含$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}$的四個一次式.我們

注意若將Δ的第一行的元素乘以$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$,將第二行的元素乘以$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$,將第三行的元素乘以$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}$,然後都加在第末行的元素上,又計算着關係式(50)卽得$\Delta=\delta\frac{\partial F}{\partial t}$. δ既不等於零,所以F不含有變數t,因而可見此四個函數X,Y,Z,T間有一個關係式,其形狀爲

$$T=F(X,Y,Z).$$

我們可以注意,在此四個函數間除此關係外,再沒有不含x, y,z,t的其牠的關係式,如果不然,我們就能夠在X,Y,Z間得着一個關係式,子式δ就不能成爲零了.

若是Δ的第一級的子式都恒等於零,然總有一個第二級的子式不恒等於零,這個子式譬如是$\delta'=\frac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}$罷.

自(46)的前二個方程式中得

$$x=\varphi_1(X,Y,z,t),\quad y=\varphi_2(X,Y,z,t),$$

因而

$$Z=f_3(x,y,z,t)=F_1(X,Y,z,t),\quad T=F_2(X,Y,z,t)$$

我們先証明$\frac{\partial F_1}{\partial t}=o$. 自三個關係式

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}=\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial t},$$

$$o=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t},$$

$$o=\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t},$$

依方綫的計算法,得關係式

$$\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x,y,t)}=\delta'\frac{\partial F_1}{\partial t},$$

所以$\frac{\partial F_1}{\partial t}=o$.同樣可見$\frac{\partial F_1}{\partial z}=o$, $\frac{\partial F_2}{\partial z}=o$, $\frac{\partial F_2}{\partial t}=o$;在此場合,此四個函數$X, Y, Z, T$間有兩個各別關係式

$$Z=F_1(X,Y),\quad T=F_2(X,Y);$$

以外就沒有各別於此兩個的關係式了,這是因爲如果不然,我們就能夠在X及Y間演出另一關係,就必須$\frac{D(X,Y)}{D(xy)}=o$,這是和我們的假定相矛盾的.

最後,若是沙勾局的所有第二級的子式都等於零,然而此四個函數X, Y, Z, T尙不成爲常數,我們就可見此四個函數中的三個必都爲牠一個的函數.我們所作的這個推理自然是一般的;設有n個函數$F_1, F_2, \cdots, F_n$含有n自變數$x_1, x_2, \cdots, x_n$,若是牠們的沙勾局以及關於$(n-r+1)$列的一切子式都等於零,然關於$(n-r)$列的子式中至少有一個不等於零,在此n個函數間就有r個的各別的關係式,於是牠們r個能設爲其餘的$(n-r)$個函數所表明,在此$(n-r)$函數中更無任何關係式.

我們留以下的定理請閱者自行証明,此証明法和上相同.設有n個函數,含有$(n+p)$個自變數,欲使此n個函數間有一個不關於此等自變數的關係式,必須要然只須要此n個函數關於任何n個自變數的沙勾局都成爲零.特別的,欲使兩個函數$F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$此一個爲牠一個的函數,必須要然只須要牠們的相應的導來式$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \frac{\partial F_2}{\partial x_i}$都成比例.

注意.——上段所說的函數$F_1, F_2, \cdots, F_n$能夠在變數$x_1, x_2, \cdots, x_n$以外,又關係別的變數$y_1, y_2, \cdots, y_m$.若是沙勾局$\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$恆等於零,函數$F_1, F_2, \cdots, F_n$就爲一個或多個關係式所連合,

這些關係式不含有變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 然而通常的仍含有變數 $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

這是誠然,這個沙勾畐等於定準式

$$\frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_n,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n)}.$$

應用.——以上的定理在解析學上最關重要,例如用此定理能夠証明對數的基本性質,並無須援用對數在算術上的定義.這是誠然,以後在積分學開始處,我們証明有一個函數,對於變數的一切正值都是確定的,對於 $x=1$, 此函數成爲零,牠的導來式是 $\frac{1}{x}$ 現在假定 $f(x)$ 是這個函數;我們令

$$u=f(x)+f(y),\quad v=xy;$$

得

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix}$$

所以必有一個關係式存在,牠的形狀是

$$f(x)+f(y)=\varphi(xy);$$

欲決定函數 φ, 只須令 $y=1$, 如此即得 $f(x)=\varphi(x)$; x 既是任意的,所以

$$f(x)+f(y)=f(xy)$$

由此可見若是對數的發明在積分學以後,就可見由以上的定義如何引導我們到對數的基本特性上.

關於求函數的函數的導來式的公式,也可以推廣在沙勾畐上,設 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 是一組的 n 個函數,含有變數 $u_1, u_2, \cdots, u_n$, 假定 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 又是 n 自變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函數,我們得公式如

下:

$$(51)\qquad \frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{D(u_1,u_2,\cdots,u_n)}\,\frac{D(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

這個証明法是應用定準式的乘法及合成函數的導來式的公式.誠然,我們寫出此兩個定準式,並互換第二式的行及列,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2}\cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

積數的第一個元素等於

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

就是 $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$,對於其他的元素都是如此.

合成函數的導來式的公式也能夠推廣在函數定準式上.

例如兩個函數 X 及 Y 含有三個變數 x,y,z, 此三個變數又都是兩個自變數 u 及 v 的函數,我們得

$$\frac{D(X,Y)}{D(u,v)}=\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}+\frac{D(X,Y)}{D(y,z)}\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+\frac{D(X,Y)}{D(z,x)}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}.$$

這個公式是容易証明和推廣的.

IV. 變數的變換

53. **概論.**—— 在解析學許多問題中,往往須變換自變數.那麼,我們必須能夠將關於原自變數的導來式,用關於新自變數的導來式來表明.在反函數中我們已經研究過一個此類的問題.此類的一般問題的解,並沒有新原則,只須應用求合成函數及陰函數的導來式的定規.在有許多自變數時,依據以下的注意,用全微分式能將這些運算簡約許多.爲確定人的觀念,我們假定有三個自變數 x,y,z 今將這些注意宣告如下:

1^0 設 u, v, w 是 x, y, z 的三個各別的函數(就是說在此函數間沒有一個關係式);在牠們的全微分 du, dv, dw 間,不能夠有一個關係存在如以下的形狀

$$\lambda du+\mu dv+\nu dw=o, \tag{52}$$

如其有之,係數 λ, μ, ν 必同時爲零.誠然,在上式中令 dx, dy, dz 的係數等於零,即得三個一次式關於 λ, μ, ν 爲同質 (homogene), λ, μ, ν 的係數的定準式恰是沙勾扁

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}.$$

2^0 設 ω, u, v, w 是自變數 x, y, z 的四個函數,假定沙勾扁 $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ 不等於零.我們能倒轉來表明 x, y, z 爲 u, v, w 的函數;將 x, y, z 的這些價值代入 ω, 即得 u, v, w 的一個函數

$$\omega=\Phi(u,v,w).$$

<u>不論用何方法,若是在關於自變數 x, y, z 所取的全微分 du, dv, dw 間得了一個關係如</u>

$$d\omega=Pdu+Qdv+Rdw$$

<u>的形狀,係數 P, Q, R 就各等於 $\Phi(u,v,w)$ 的偏導來式,</u>

$$P=\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad Q=\frac{\partial\Phi}{\partial v},\quad R=\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

誠然,依據求一個合成函數的全微分的定規($n^0 24$), 我們得

$$d\omega=\frac{\partial\Phi}{\partial u}du+\frac{\partial\Phi}{\partial v}dv+\frac{\partial\Phi}{\partial w}dw,$$

除此之外, $d\omega, du, dv, dw$ 間並沒有另外的一個關係,因爲如其不然,我們就可以演出一個等式如 (52) 的形狀,牠的係數 λ, μ, ν 將不等於零;依第一個注意,這是不合理的.

我們試應用這些一般原則,將我們所常遇的問題一一考慮.

54. 問題I.——**設y是自變數x的一個函數.我們取一個新自變數t,牠和x有一個關係,$x=\varphi(t)$ 我們求將y關於x的累次導來式用t及y關於t的累次導來式來表明.**

設$y=f(x)$是我們所取的函數,

$$F(t)=f[\varphi(t)]$$

是將x代以$\varphi(t)$以後此函數所成的形狀.依據求函數的函數的導來式的定規得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\varphi'(t),$$

故

$$y'_x=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\varphi'(t)}=\frac{y'_t}{\varphi'(t)};$$

如此,我們可以說:**欲得y關於x的導來式,須取此函數關於t的導來式除以x關於t的導來式.**

應用此定規在方纔所得的第一次導來式上,卽得第二次導來式$\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}(y'_x)}{\varphi'(t)}=\frac{y''_{t^2}\varphi'(t)-y'_t\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3};$$

再應用此定規在此式上,即得第三級導來式

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\dfrac{d}{dt}(y''_{x^2})}{\varphi''(t)},$$

完行計算,即得

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{y'''_{t^3}[\varphi'(t)]^2-3y''_{t^2}\varphi'(t)\varphi''(t)+3y'_t[\varphi''(t)]^2-y'_t\varphi'(t)\varphi'''(t)}{[\varphi'(t)]^5}$$

其餘的累次導來式都可用此同一定規逐漸求出;一般y關

x的第n級導來式,都爲$\varphi'(t),\varphi''(t),\cdots,\varphi^{(n)}(t)$及$y$關於$t$的累次導來式所表,這些累次導來式直至於$n$級.我們可將以上的公式變爲對稱(symétriques)的形狀;用$dx, dy, d^2x, d^2y, \cdots, d^nx, d^ny$表$x$及$y$關於$t$的累次微分式,用$y', y'', \cdots, y^{(n)}$表$y$關於$x$的累次導來式,以上的公式可以寫爲

$$(53)\qquad \begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx}, \\ y'' = \dfrac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}, \\ y''' = \dfrac{d^3y dx^2 - 3d^2y dx d^2x + 3dy(d^2x)^2 - dy d^3x dx}{dx^5} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

這些公式第二端的一切微分式所關的自變數t是絕對任意的;欲自一個導來求高一級的導來式,可用循環定律(loi de récurrence)

$$y^{(n)} = \frac{d[y^{(n-1)}]}{dx},$$

此式的第二端是兩個微分式的商.

55. 應用.—— 一個平曲線若是牠的一點的坐標爲一個輔助自變數t所表,

$$x = f(t),\ y = \varphi(t),$$

即可應用這些公式以研究此曲線;欲在此曲線一點的附近研究此曲線,必須知y關於x的累次導來式$y', y'',\cdots$在此點的值值,然而由以上的公式,我們就能得這些導來式爲函數$f(t)$及$\varphi(t)$的累次導來式所表明,並不須要知道y爲x的陽函數式,這一層或者是實際上不可能的.例如自第一公式

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)},$$

得切線的角係數 (coefficient angulaire); y'' 的價值發現在幾何學的一個重要元素上,就是曲度半徑 (rayon de courbure), 牠的式子是

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

我們以後再將此証明.

在坐標 x 及 y 都為一個變率 (parametre) t 的函數時,欲得 R 的價值,只須將 y' 及 y'' 用以上的公式代入,即得

$$R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{|dxd^2y - dyd^2x|};$$

此式的第二端只含有 x 及 y 關於 t 的第一級及第二級導來式.

關於這個問題,有一個極有興味的注意(Bertrand 的微積分學第二冊第170頁).設有一個平曲線,牠的一點的坐標 x 及 y 都是一個變率 t 的函數,假想我們計算牠的一個幾何元素,得着一個算式

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \cdots, d^nx, d^ny),$$

這一切的微分式都是關於變率 t 取的,旣是由假定這個元素有一個幾何意義,牠的價值當然不關於變率 t 的選擇,若是令 $x=t$, 就當令 $dx=dt$,

$$d^2x = d^3x = \cdots = d^nx = o,$$

上式就成為

$$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)});$$

假定我們已預先將曲線的方程式本y解開，$y=\Phi(x)$，求此曲線的幾何元素時，所得的就是以上的結果。自此特別場合，要回復到任何自變數的場合，只須將$y', y'', \cdots, y^{(n)}$代以牠們在公式(53)中的價値。實行這個換置法在

$$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}),$$

我們當仍得着我們所從起的原式

$$f(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \cdots)$$

如果所得的不是原式，就可決定其中必有錯誤。例如式

$$\frac{dxd^2y+dyd^2x}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

對於一個平曲線，就不能不關於變數的選擇具有一個幾何的意義。這是因爲令$x=t$，此式成爲

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

然而用公式(53)的價値代y'及y''，就不能復得原式。

公式(53)也常用在微分方程式的研究上。例如一個關係式

(54) $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0,$$

n是一個常數。求自變數x能滿足此式的一切函數y。

我們取一個新自變數t，令$x=\cos t$；得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2}-\cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t},$$

換置以後，方程式(54)成爲

$$(55)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=o.$$

我們很容易求得滿足此式的一切t的函數,這是因爲若用$2\dfrac{dy}{dt}$乘此式可寫爲

$$2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2n^2y\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2\right]=o;$$

所以

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2=n^2a^2,$$

a是任何常數,因而

$$\frac{dy}{dt}=n\sqrt{a^2-y^2},$$

或

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{a^2y^2}}-n=o.$$

第一端是 $\arcsin\dfrac{y}{a}-nt$ 的導來式;所以這個差數當等於一個新的常數b,因得

$$y=a\ \sin\ (nt+b),$$

這又可寫爲

$$y=A\sin nt+B\cos nt.$$

再回復到原自變數x上,我們決定能滿足關係式 (54) 的x的一切函數,都包含在以下的公式內:

$$y=A\ \sin(n\arccos x)+B\cos(n\arccos x),$$

A及B表兩個任意常數.

56. 問題 II.——由變形法 (transformation) 的公式$x=f(t,u)$, $y=\varphi(t,u)$, 凡x及y間的一個關係式,必有t及u間的一個關係式相應求將y關於x的導來式用t, u及u關於t的導來式表明

這個問題立即可改爲第一問題:若是假想在變形法公式

$$x=f(t,u),\ y=\varphi(t,u)$$

中,已將 u 用牠的 t 的函數換置,此二公式就使我們得爲原變數 x 及 y 爲變數 t 所表明.所以對於這個問題只須應用普通方法,但是必須將 x 及 y 看做 t 的合成函數 (fonction composée),字母 u 負的是居間函數的任務.我們先得着

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}},$$

既而得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right):\frac{dx}{dt},$$

實行演算得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=$$

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial t}\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2}\right]-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\cdots\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)^3}$$

一般,第 n 級的導來式 $y^{(n)}$ 爲 t, u 及導來式 $\frac{du}{dt},\frac{d^2u}{dt^2},\cdots,\frac{d^nu}{dt^n}$ 所表明.

例如一個平曲線,牠的極坐標 (coordonnées polaire) 方程式是 $\rho=f(\omega)$. 自極坐標改爲直交坐標的公式是

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega;$$

我們將 ω 看作自變數,設 $\rho',\rho'',\cdots$ 是 ρ 關於 ω 的累次導來式,自以上的公式得

$$dx=\cos\omega\,d\rho-\rho\sin\omega\,d\omega,$$

$$dy=\sin\omega\,d\rho+\rho\cos\omega\,d\omega,$$

$$d^2x=\cos\omega d\rho^2-2\sin\omega d\omega d\rho-\rho\cos\omega d^2\omega,$$

$$d^2y=\sin\omega d^2\rho+2\cos\omega d\omega d\rho-\rho\sin\omega d^2\omega,$$

故

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2d\omega^2,$$

$$dxd^2y-dyd^2x=2d\omega d\rho^2-\rho d\omega d\rho^2+\rho^2d\omega^3.$$

在前所得曲度半極的算式成爲

$$R=\pm\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$$

57. **平曲線的變形法.**——假想依一個一定的建造法(construction),對於一個平面上每一點 m,都有在此同一平面上另一點 M 相應用 (x,y) 表 m 點的坐標,用 (X,Y) 表 M 點的坐標,在此等坐標間我們有兩個關係式

(56) $$X=f(x,y),\quad Y=\varphi(x,y).$$

這兩個公式定出一個點的變形法(transformation ponctuelle);幾何學上供給不少的例子,如相似變形法 (transformation homographique),帶徑相互的變形法(transformation par les rayons vecteurs réciproques)等等.m 點畫出曲線 c 時,M 點也畫出另一曲線 C,此後者的性質能自曲線 c 的性質及所用的變形法的性質中演出.設 $y',y'',\cdots$ 是 y 關於 x 的累次導來式,$Y',Y'',\cdots$ 是 Y 關於 X 的累次導來式欲研究曲線 C,必須能夠將 $Y',Y''\cdots$ 用 $x,y,y',y'',\cdots$ 來表明,這正是我們方纔所考慮的場合;我們先得着

$$Y'=\frac{\dfrac{dY}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'},$$

$$Y''=\frac{\frac{dY'}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\cdots\right)-\cdots}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)^3},$$

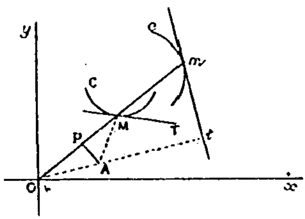
餘仿此.我們可見Y'只關係於x, y, y';所以若是應用變形法(56)在兩個曲線c及c_1上,此兩個曲線若相切於(x,y)點,那麽兩個變形曲線C, C_1必也相切於相應點(X,Y).由此看來,若是但欲求變形曲線C的切線,我們可將曲線c用牠一個和牠相切的曲線更換.

例如公式

$$X=\frac{h^2x}{x^2+y^2},\quad Y=\frac{h^2y}{x^2+y^2}$$

所定的變形法,只是一個帶徑相互的變形法或逆法,極在原點.設m是曲線c上一點,M是曲線C上的相應點,欲得此曲線C的切線,只須應用普通幾何學

圖　五



上的結果,就是一個直線的反形(figure inverse)是一個平圓從反形的極(pôle)經過.

我們若是將曲線c用牠的切線mt替代,mt的反形就是一個平圓從M及O點經過,中心A在自原點所引mt的垂線上.此平圓的切線MT垂直於AM,角Mmt及mMT都是角mot的餘

角所以相等.切線 mt 及 MT 關於帶徑都是反平行 (antiparalléles)

58. **接觸變形法** (transformation de contact).——上節所舉的變形法不是兩個相切曲線化為別的兩個相切曲線的普通場合.懸想自一個曲線 c 上 m 點作出一個相應點 M,所用的建造法能夠是不但關係於 m 點並且關係於在 m 點的切線.那麼,定此變形法的公式是

$$X=f(x,y,y'),\quad Y=\varphi(x,y,y');\tag{57}$$

變形曲線 (courbe transformée) 的切線的角係數 Y' 的算式是

$$Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'+\dfrac{\partial f}{\partial y'}y''}.$$

一般,Y' 關係四個變數 x,y,y',y'';若是將變形法 (57) 應用在相切於 (x,y) 點的兩個曲線 c、c' 上,相應曲線 C 及 C' 必有一個公點 (X,Y),然若是 y'' 對於曲線 c 及 c_1 沒有相同的價值,此二曲線 C 及 C_1 就不能相切.欲使 C 及 C_1 相切常和 c 及 c_1 相同,必須要然只須要 Y' 不關係於 y'',就是說函數 $f(x,y,y')$ 及 $\varphi(x,y,y')$ 滿足條件

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right);$$

如此,我們說此變形法是一個接觸變形法.這是很明瞭的,點的變形法是接觸變形法的一個特別場合.

例如列讓得 (Legendre) 的變形法,是對於一個曲線 c 的一點 (x,y),作出一點 M 相應,M 點的坐標是

$$X=y',\qquad Y=xy'-y;$$

由此二公式得

$$Y'=\frac{dX}{dY}=\frac{xy''}{y''}=x,$$

可見這是一個接觸變形法,同樣得着

$$Y''=\frac{dY'}{dX}=\frac{dx}{y''dx}=\frac{1}{y''},$$

$$Y'''=\frac{dY''}{dX}=-\frac{y'''}{y''^3},$$

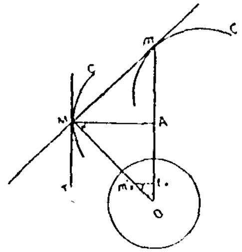
餘仿此,自以上的公式得

$$x=Y', \quad y=XY'-Y, \quad y'=X,$$

可見這個變形法是相互的.這一切的性質很容易解釋;我們可以注意 $X=y'$, $Y=xy'-y$ 所表的一點,恰是曲線 c 上 (x,y) 點的切線關於拋物線 $x^2-2y=o$ 的極,但是在一般場合,若是取曲線 c 上一點 m 的切線關於一個錐線 Σ 的極 M, M 點的軌迹是一個曲線 C, 牠在 M 點的切線恰是 m 點關於 Σ 的對極線 (polaire); 所以曲線 c 及 C 有相互性;不但如此,若是將曲線 c 用一個和 c 切於 m 的曲線 c_1 更換,相互曲線 C_1 就在 M 點和曲線 C 相切.

極線 (podaire).——設有一個平曲線 c, 自牠的平面中,我們取一定點 O, 引直線 OM 垂直於此曲線在 m 點的切線,這個垂線的足 M 的軌迹 C 叫作曲線 c 的極線.由計算很容易得此 M 點的坐標,並驗明這個變形法是一個接觸變形法;然而這個結果可用以下方法得來:我們取一個平圓 r, R 為半徑, O 點為心,設 m_1 是 OM 上的一點, $Om_1\times OM=R^2$, m_1 點是切線 mt 關於平圓 r 的極,如此,則由 c 變至 C 所用的變形法,就是一個對極線相互 (polaires réciproque) 的變形法隨着一個逆法, m 點畫

圖　六



出曲線c時，mt的極m_1也畫出一個曲線c_1，c_1和m點關於平圓P的對極線相切就是切於Om的垂線m_1t_1。曲線C的切線MT及曲線c_1的切線m_1t_1和帶徑Om_1M作成相等的角；所以我們若引法線MA，角AMO及AOM都是兩個相等角的餘角，所以相等，A點就是Om的中點。由此決定連結M及Om的中點即得極線的法線。

59. 一般變形法.——若是公式(57)不成為點的變形法，兩個函數f及φ中至少有一個函有y'。我們假定f含有y'；自(57)第一關係式中取出y'代入第二關係式，我們可將此二式寫為

(58)　　$$X=f(x,y,y'),\quad Y=\Phi(x,y,X).$$

由此得

$$\frac{dY}{dX}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'\right)\frac{dx}{dX}+\frac{\partial\Phi}{\partial X}.$$

但是

$$\frac{dX}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y'',$$

此式關係 y''; 欲使 $\dfrac{dY}{dX}$ 只關係於 x, y, y', 必須公式(57)所定 X 及 Y 的價值又能滿足關係式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y} y'=o,$$

因為此式只函有 x, y, y', X, said當和(58)的第一式恆同.

反之,設 $F(x,y\ X,Y)$ 是兩偶的變數 $(x,y),(X,Y)$ 的一個函數,若是此兩個方程式

(59) $$F(x,y,X,Y)=o, \quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y} y'=o$$

能夠本 X, Y 解開,所得的公式

$$X=f(x,y,y'), \quad Y=\varphi(x,y,y')$$

就定出一個接觸變形法.誠然,自(59)的第一式得

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx+\frac{\partial F}{\partial y} dy+\frac{\partial F}{\partial X} dX+\frac{\partial F}{\partial Y} dY=o,$$

算計着第二式,此式成為

$$\frac{\partial F}{\partial X} dX+\frac{\partial F}{\partial Y} dY=o;$$

可見此 $\dfrac{dY}{dX}$ 只關係於 x, y, y'

60. 問題 III.——設 $\omega=f(x,y)$ 是一自變數 x 及 y 的一個函數;取兩個新自變數 u, 及 v, 牠們和原自變數間有兩個關係式

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v),$$

求將 ω 關於變數 x 及 y 的偏導來式,用 u, v 及 ω 關於 u 及 v 的偏導來式來表明.

設 $\omega=F(u,v)$ 是換置以後函數 $f(x,y)$ 所成的形狀;由合成函數的導來法 (dérivation) 的定規,得

$$\frac{\partial \omega}{\partial u}=\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v};$$

自此兩個方程式我們能夠取出 $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial\omega}{\partial y}$,這是因爲如果定準式 $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$ 恒等於零,這個變數更換法就是毫無意義的了.所以自以上的方程式,得

$$(60)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial x}&=A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v},\\ \frac{\partial\omega}{\partial y}&=C\frac{\partial\omega}{\partial u}+D\frac{\partial\omega}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

A, B, C, D 都是 u 及 v 的確定函數,這些公式已將問題中關於第一級導來式的部分解決,牠們表明欲得函數關於 x 的導來式,必須用 A 乘關於 u 的導來式,用 B 乘關於 v 的導來式,再將此二積數相加;同樣,欲得關於 y 的導來式,也是如此運算,但須將 A 及 B 各代以 C 及 D.

欲計算第二級導來式,只須對於第一級導來式實行以上公式所表的定規;如

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)$$

$$=A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)$$

展開此演算,得

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right),$$

同法得 $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ 及以後的諸導來式,在這一切的導來法中,

只須將運算 $\frac{\partial}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial}{\partial y}$ 代以運算

$$A\frac{\partial}{\partial u}+B\frac{\partial}{\partial v},\quad C\frac{\partial}{\partial u}+D\frac{\partial}{\partial v};$$

所以這些運算都歸結到計算係數 A, B, C, D 上.

例一.——取方程

$$a\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=o, \tag{61}$$

係數 a, b, c 都是常數;我們求將此方程式變爲最簡的形狀.先注意若是 $a=c=o$, 就無須求將此方程式變爲更簡了;所以我們可以先假定 c 不等於零.此層既已說明,我們取兩個新自變數 u 及 v,

$$u=x+\alpha y,\quad v=x+\beta y$$

α 及 β 是兩個未定的常數係數.由此得

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\alpha\frac{\partial\omega}{\partial u}+\beta\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

所以在此場合, $A=B=1$, $C=\alpha$, $D=\beta$, 繼而由一般方法得

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$

所取的方程式成爲

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2[a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta]\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}$$

$$+(a+2b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=o.$$

我們可區別出許多場合:

第一場合.——設 $b^2-ac>0$,取方程式

$$a+2br+cr^2=0$$

的二根爲 α 及 β 的價值,方程式就成爲

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}=0.$$

因爲此式可寫爲 $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)=0$,可見 $\frac{\partial\omega}{\partial u}$ 只是變數 u 的函數,設此函數爲 $f(u)$.用 $F(u)$ 表 u 的另一函數,牠是導來式 $F'(u)=f(u)$ $\omega-F(u)$ 關於 u 的導來式等於零,這個差數不關係 u,所以 $\omega=F(u)+\Phi(v)$.這個相互關係是直接的,回復到變數 x 及 y 上,因而決定能滿足方程式(61)的一切函數 ω 都是以下的形狀

$$\omega=F(x+\alpha y)+\Phi(x+\beta y),$$

函數 F 及 Φ 都是任意的.例如關於弦的顫動 (cordes vibrantes) 的理論中有一個方程式

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},$$

牠的普通積分(intégrale générale)是

$$\omega=F(x+ay)+\Phi(x-ay).$$

第二場合.——設 $b^2-ac=0$,命 α 等於方程式

$$a+2br+cr^2=0$$

的二重根,命 β 不等於 α,$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}$ 的係數就成爲零,這是因爲牠等於 $a+b\alpha+\beta(b+c\alpha)$ 的緣故,方程式就成爲 $\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0$.由此可見 ω 當是 v 的一次函數,$\omega=vf(u)+\wp(u)$,函數 $f(u)$ 及 $\wp(u)$ 都是任意的;再回復到變數 x 及 y 上,ω 的式子是

$$\omega=(x+\beta y)f(x+\alpha y)+\wp(x+\alpha y).$$

此式又可寫爲

$$\omega=[x+\alpha y+(\beta-\alpha)y]f(x+\alpha y)+\varphi(x+\alpha y),$$

或

$$\omega=yF(x+\alpha y)+\Phi(x+\alpha y).$$

第三場合.——若是 $b^2-ac<o$, 以上的變形法就不適用,不然就須加入虛數的自變數.在此場合,我們可用條件

$$a+2b\alpha+c\alpha^2=a+2b\beta+c\beta^2,$$

$$a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta=o$$

以決定 α 及 β, 由此得

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{c},\quad \alpha\beta=\frac{2b^2-ac}{c^2};$$

這是說然,以 α 及 β 爲根的二次方程式

$$r^2+\frac{2b}{c}r+\frac{2b^2-ac}{c^2}=o$$

有兩個實根,所設的方程式成爲

$$\Delta_2\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=o;$$

這個方程式 $\Delta_2\omega=o$ 名爲拉布拉斯 (Laplace) 的方程式,牠負有重要任務在解析學上及數學的物理上.

例二.——令 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 求以上的方程式所變成的形狀.我們得

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\cos\varphi,$$

本 $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ 解開,得

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}.$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}.$$

再求導來式得

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\cos^2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho\partial\varphi}$$

$$+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho};$$

對於$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$也有和此相似的式子,相加,得

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

61. **另一方法.**——我們求一個函數的偏導來式,若是此函數不是一個已知的函數,以上所用的方法最合實用,然在某某問題上,用以下的方法更爲便利:

設 $z=f(x,y)$ 是二自變數 x 及 y 的一個函數;若是假定 x, y 及 z 都爲兩個輔助自變數 u 及 v 所表明,在全微分 dx, dy, dz 間就有一個關係式

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

此式和兩個各別的關係式同價:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

由此取出$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$爲 u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ 的函數,和第一方法相同,然

對於計算以後的導來式,我們仍繼續用此同一定規,例如欲計算 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,我們自恒等式

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy$$

起,此式和兩個關係式同價:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial v},$$

在此式中 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是假定已用祂的計算所得的式子替代.同樣自恒等式

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy$$

得 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$;如此所得 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 的兩個價值當是相同,此一層可以作爲演算的一個驗明.對於更高級的導來式,也是此相同的計算法.

<u>關於曲面的應用</u>.——以上的計算法,可以用在曲面的研究上.假定一個曲面 S 上一點的坐標爲兩個變率(parametre variables) u 及 v 所表明,祂們的公式是

(62) $x = f(u,v)$, $y = \varphi(u,v)$, $z = \psi(u,v)$; 假使自此三個方程式中消去 u 及 v, 我們就得着曲面 S 的方程式,然而我們要即此三個方程式直接研究曲面 S 的性質,並不實行這個消去法,這個消去法在實際上或者是不可能的.我們先注意這三個沙勾届

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(\psi,f)}{D(u,v)}$$

不能同時為零,這是因為若是如此,消去u及v就得着x,y,z間的兩個各別的關係式,(x,y,z)點就畫出一個曲線而不是一個曲面.為確定人的觀念,設

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\neq o;$$

我們可以假想已自(62)的首二方程式中取出u及v,代入第三方程式得曲面的方程式$z=F(x,y)$.欲在一點附近研究此曲面,必須能夠由變率u及v計算出此函數的導來式$p,q,r,s,t\cdots$,由關係式

$$dz=pdx+qdy$$

卽得第一級的偏導來式p及q,此式分為兩個方程式

$$(63)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial u}&=p\frac{\partial f}{\partial u}+q\frac{\partial\varphi}{\partial u},\\ \frac{\partial\psi}{\partial v}&=p\frac{\partial f}{\partial v}+q\frac{\partial\varphi}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

由此兩式能實行算出p及q.將p及q的價值代入方程式

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

卽得切平面的方程式,牠的形狀是

$$(64)\qquad(X-x)\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+(Y-y)\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+(Z-z)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=o.$$

關係式(63)有一個幾何上的意義,很容易記憶;若是令v為常數,令u變化,再令u為常數,令v變化,則得畫在曲面上的兩個曲線,關係式(63)表明曲面的切平面包含有此兩曲線的切線.〔註九〕

既得p及q,$p=f_1(uv)$,$q=f_2(u,v)$,我們再由兩個關係式

$$dp=rdx+sdy,$$

$$dq=sdx+tdy,$$

牠們每一個都又分爲兩個各別的方程式以定出 r, s, t, 餘類推.

62. 問題 IV.——若是令

$$x = f(u,v,w),\ y = \varphi(u,v,w),\ z = \psi(u,v,w), \tag{65}$$

對於 x, y, z 的任一關係式,都有在 u, v, w 間的一個新關係式相應,求將 z 關於 x, y 的偏導來式用 u, v, w 及 w 關於 u, v 的偏導來式所表明

這個問題可變爲方纔所研究的問題.誠然,若是假定在公式 (65) 中,已將 w 代以一個 u 及 v 的函數,x, y, z 的式子就都是一個變率 u 的函數,我們只須用以前的方法將 f, φ, ψ 看做 u 及 v 的合成函數,將 w 看做 u 及 v 的居間函數.例如欲計算第一級導來式 p 及 q,我們得兩個關係式

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}=p\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=p\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

對於更高級的導來式也是同一方法.

用幾何的術語,以上的問題可以宣告如下:設 m 是空間的一點,牠的坐標是 (x, y, z), 由一個一定的建造法,使另外一點 M 相應,M 的坐標是 (X, Y, Z). 在 m 畫出一個曲面 S 時,M 也畫出一個曲面 Σ,求由曲面 S 的性質,研究曲面 Σ 的性質.

這個變形法的公式的形狀是

$$X = f(x,y,z),\ Y = \varphi(x,y,z),\ Z = \psi(x,y,z);$$

設

$$z = F(x,y),\ Z = \Phi(X,Y)$$

是二曲面 S 及 Σ 的方程式,這個問題就是求將函數 $\Phi(X,Y)$ 的

偏導來式$P,Q,R,S,T,\cdots$用函數$F(x,y)$的偏導來式$p,q,r,s,t,\cdots$來表明,除却記法(notation)有些不同,這正是我們方纔所研究的問題.

第一級導來式P及Q只關係於x,y,z,p,q,所以由這個變形法,兩個相切曲面仍成爲兩個相切曲面.然而這仍不是具此性質的普通變形法,由以下的例子可將此證明.

63. 列讓得(Legendre)的變形法.——設$z=f(x,y)$是曲面S的方程式;對於此曲面上一點$m(x,y,z)$,我們作一點M相應,M的坐標是X,Y,Z,此相應法是

$$X=p,\ Y=q,\ Z=px+qy-z;$$

設$Z=\Phi(X,Y)$是M點所畫的曲面S,若是假定已將z,p,q代以$f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$,我們卽得$M$點的三個坐標式爲兩個自變數$x$及$y$的函數.

我們仍用P,Q,R,S,T表函數$\Phi(X,Y)$的偏導來式;由關係式

$$dZ=PdX+QdY$$

得

$$pdx+qdy+xdp+ydq-dz=Pdp+Qdq,$$

或

$$xdp+ydq=Pdp+Qdq.$$

我們假定對於所考的曲面,p及q不是此一個爲彼一個的函數,如此即不能夠有一個恒等式$\lambda dp+\mu dq=o$,而λ及μ並不同時等於零.那麼,自以上的方程式得

$$P=x,\ Q=y.$$

欲得R,S,T,我們自關係式

$$dP=RdX+SdY,$$

$$dQ=SdX+TdY$$

起,將X,Y,P,Q用牠們的價值替代,得

$$dx=R(rdx+sdy)+S(sdx+tdy)$$

$$dy=S(rdx+sdy)+T(sdx+tdy);$$

由此得

$$Rr+Ss=1,\ Rs+St=o,$$

$$Sr+Ts=o,\ Ss+Tt=1,$$

結果,

$$R=\frac{t}{rt-s^2},\quad S=\frac{-s}{rt-s^2},\quad T=\frac{r}{rt-s^2}.$$

自以上的公式,倒轉來得

$$x=P,y=Q,z=PX+QY-Z,p=X,q=Y,$$
$$r=\frac{T}{RT-S^2},\ r=\frac{-S}{RT-S^2},\ t=\frac{R}{RT-S^2},$$

由此可見這個變形法是相互的.不但如此,因為X,Y,Z,P,Q只關係於x,y,z,p,q,所以這是一個接觸變形法.我們若注意這個變形法是關於拋物面(parabloide)

$$x^2+y^2-2z=o$$

的一個對極線相互的變形法,以上的性質就成為直觀的了.

注意.——若是在m所畫的曲面的每一點上,都能得着關係式$rt-s^2=o$,R,S,T的式子就成為無限;在此場合,M點畫出的是一個曲線而不是一個曲面,這是因為

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=\frac{D(p,q)}{D(x,y)}=rt-s^2=o;$$

同樣,

$$\frac{D(X,Z)}{D(x,y)}=\frac{D(p,px+qy-z)}{D(x,y)}=y(rt-s^2)=0.$$

這恰是我們將牠除外的場合.

64. 安倍耳(Ampère)的變形法.——仍用上例的記法,命

$$X=x, Y=q,\ Z=qy-z;$$

關係式

$$dZ=Pdx+Qdy$$

成為

$$qdy+ydq-dz=Pdx+Qdy,$$

或

$$ydq-pdx=Pdx+Qdy;$$

所以

$$P=-p,\ Q=y;$$

倒轉來,

$$x=X, y=Q, z=QY-Z, p=-P, q=Y,$$

由此可見這是一個接觸變形法又是相互的.關係式

$$dP=RdX+SdY$$

成為

$$-rdx-sdy=Rdx+S(sdx+tdy),$$

就是

$$R+Ss=-r, St=-s,$$

自此得

$$R=\frac{s^2-rt}{t},\quad S=-\frac{s}{t};$$

同樣,自關係式

$$dQ=SdX+TdY,$$

得

$$T=\frac{1}{t}.$$

作爲此等公式的應用,試求能滿足關係式 $rt-s^2=o$ 的一切函數 $f(x,y)$.

設 S 是方程式 $z=f(x,y)$ 所表的曲面,Σ 是變形曲面,牠的方程式是

$$Z=\Phi(X,Y).$$

依 R 的公式,我們當得着

$$R=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}=o,$$

Φ 當是 X 的一次式

$$Z=X\varphi(Y)+\psi(Y),$$

φ 及 ψ 都是 Y 的任意函數,由此得

$$P=\varphi(Y),\ Q=X\varphi'(Y)+\psi'(Y);$$

倒轉來,由公式

$$x=X,\ y=X\varphi'(Y)+\psi'(Y),\ z=Y[X\varphi'(Y)+\psi'(Y)]-X\varphi(Y)-\psi(Y),$$

曲面 S 上一點的坐標 (x,y,z) 都是兩個變數 X 及 Y 的函數;欲得此曲面的方程式,只須消去 X 及 Y,或是由兩個方程式

$$z=\alpha y-x\varphi(\alpha)-\psi(\alpha),$$

$$o=y-x\varphi'(\alpha)-\psi'(\alpha)$$

消去 α;這第一個方程式表一個關係變率 α 的動平面,第二個

是關於 α 取第一個的微分得來的.如此所得的是一個能展曲面 (surface développable), 我們以後再研究牠.

15. 位能 (potentiel) 的曲線坐標方程式.——在許多場合,能用各種技術使一個變數更換法所須的運算成爲單簡.作爲例子,我們取位能關於直交曲線坐標(coordonnées curvilignes orthogonales) 的方程式.設

$$F(x,y,z)=\rho,$$

$$F_1(x,y,z)=\rho_1,$$

$$F_2(x,y,z)=\rho_2$$

是三類的曲面的方程式,成爲三重垂直系,關於各別的兩類的任何二曲面都是直角相交;若解此三個方程式取 x,y,z 爲 ρ, ρ_1,ρ_2 的函數,

$$\text{(66)}\qquad \begin{cases} x=\varphi(\rho,\rho_1,\rho_2), \\ y=\varphi_1(\rho,\rho_1,\rho_2), \\ z=\varphi_2(\rho,\rho_1,\rho_2); \end{cases}$$

ρ,ρ_1,ρ_2 成爲一組的直交曲線坐標.

這三個曲面既是互相垂直,牠們每兩個所成的互斷曲線的切線當成爲一個直交三面角;所以我們有

$$\text{(67)}\qquad S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}=0,\quad S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0,\quad S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0,$$

符號 S 表明當逐漸用 φ_1,φ_2 代 φ 再相加.這些垂直的條件又能設寫成同值的形狀

$$\text{(68)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial x}+\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial y}+\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial x}+\cdots=0,\quad \dfrac{\partial\rho_1}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial x}+\cdots=0. \end{cases}$$

此屑已經說明,現在取 ρ,ρ_1,ρ_2 爲變數,我們求位能的方程式

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=o$$

所成的形狀.我們先得着

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x},$$

再得着

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)^2$$

$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial \rho_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial \rho_2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2}.$$

將此三個相似的方程式相加,計算着關係式 (68), 第二級導來式如 $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial \rho_1}$ 一類的消滅於和數中,只餘

$$(69)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\Delta_1(\rho)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\Delta_1(\rho_1)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}+\Delta_1(\rho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2}$$

$$+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial \rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial \rho^2}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial \rho_2}$$

Δ_1,Δ_2 表拉梅 (Lamé) 的微分變率 (parametres differentiels),

$$\Delta_1(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,\quad \Delta_2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z}.$$

第一級的微分變率 $\Delta_1(\rho)$, $\Delta_1(\rho_1)$, $\Delta_1(\rho_2)$ 很容易計算.自關係式 (66) 得

$$\frac{\partial \wp}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \wp}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \wp}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=1,$$

$$\frac{\partial \wp_1}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \wp_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \wp_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=o,$$

$$\frac{\partial \wp_2}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \wp_2}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \wp_2}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=o,$$

用$\frac{\partial\wp}{\partial\rho}$，$\frac{\partial\wp_1}{\partial\rho}$，$\frac{\partial\wp_2}{\partial\rho}$乘此三方程式,相加,得

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial\wp}{\partial\rho}}{\left(\dfrac{\partial\wp}{\partial\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\wp_1}{\partial\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\wp_2}{\partial\rho}\right)^2}$$

同樣計算$\frac{\partial\rho}{\partial y}$及$\frac{\partial\rho}{\partial z}$，得

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial\wp}{\partial\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\wp_1}{\partial\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\wp_2}{\partial\rho}\right)^2}.$$

若令

$$H=S\left(\frac{\partial\wp}{\partial\rho}\right),\quad H_1=S\left(\frac{\partial\wp}{\partial\rho_1}\right),\quad H_2=S\left(\frac{\partial\wp}{\partial\rho_2}\right),$$

符號S仍是表明用$\wp_1$及$\wp_2$代$\wp$再相加,得

$$\Delta_1(\rho)=\frac{1}{H},\quad \Delta_1(\rho_1)=\frac{1}{H_1},\quad \Delta_1(\rho_2)=\frac{1}{H_2}.$$

在計算$\Delta_2(\rho)$，$\Delta_2(\rho_1)$，$\Delta_2(\rho_2)$為ρ,ρ_1,ρ_2的函數時,拉梅所用的運算頗形困難,可略述如下.在恒等式(69)

$$\Delta_2V=\frac{1}{H}\frac{\partial^2V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2V}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2V}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial\rho_2}.$$

逐漸令$V=x$，$V=y$，$V=z$我們得三個關係式

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\wp}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\wp}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\wp}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\wp}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\wp}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\wp}{\partial\rho_2}=o,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\wp_1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\wp_1}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\wp_1}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\wp_1}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\wp_1}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\wp_1}{\partial\rho_2}=o,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\wp_2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\wp_2}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\wp_2}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\wp_2}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\wp_2}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\wp_2}{\partial\rho_2}=o,$$

我們只須本$\Delta_2(\rho)$，$\Delta_2(\rho_1)$，$\Delta_2(\rho_2)$解此三方程式.譬如各乘以$\frac{\partial\wp}{\partial\rho}$，$\frac{\partial\wp_1}{\partial\rho}$，$\frac{\partial\wp_2}{\partial\rho}$，相加,得

$$\Delta_2(\rho)H+\frac{1}{H}S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_2}S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}=o.$$

此外,我們有

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial\rho},$$

關於ρ_1微分(67)的第一關係式,得

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}=-S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial\rho_1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1}{\partial\rho},$$

同樣,

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho}.$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta_2(\rho)&=-\frac{1}{2H^2}\frac{\partial H}{\partial\rho}+\frac{1}{2HH_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}+\frac{1}{2HH_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho}\\&=-\frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\log\left(\frac{H}{H_1H_2}\right)\right].\end{aligned}$$

令$H=\frac{1}{h^2}$, $H_1=\frac{1}{h_1^2}$, $H_2=\frac{1}{h_2^2}$,此公式成爲

$$\Delta_2(\rho)=h^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\log\frac{h}{h_1h_2}\right),$$

同樣,

$$\Delta_2(\rho_1)=h_1^2\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\log\frac{h_1}{hh_2}\right),\quad \Delta_2(\rho_2)=h_2^2\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\log\frac{h_2}{hh_1}\right)$$

公式(69)變成爲

$$\begin{aligned}(70)\qquad \frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}&=h^2\frac{\partial^2V}{\partial\rho^2}+h_1^2\frac{\partial^2V}{\partial\rho_1^2}+h_2^2\frac{\partial^2V}{\partial\rho_2^2}\\&+h^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\log\frac{h}{h_1h_2}\right)+h_1^2\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\log\frac{h_1}{hh_2}\right)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\\&+h_2^2\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\log\frac{h_2}{hh_1}\right)\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\end{aligned}$$

或用更加緊密的公式

$$\Delta_2V=hh_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{h}{h_1h_2}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_1}{hh_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{h_2}{hh_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)\right].$$

應用這個公式在極坐標上,用 θ 及 φ 代 ρ_1 及 ρ_2,變形法的公式是

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta,$$

係數 h, h_1, h_2 的價值如下:

$$h=1,\ h_1=\frac{1}{\rho},\ h_2=\frac{1}{\rho\sin\theta};$$

普通公式成為

$$\Delta_2V=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right];$$

展開,

$$\Delta_2V=\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}+\frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial\theta},$$

此公式甚易直接驗明.

習題

1. 命 $u=x^2+y^2+z^2,\ v=x+y+z,\ w=xy+yz+zx,$ 則得 $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=0$,求連合 u, v, w 的關係式.

2. 設

$$u_1=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}},\cdots,\quad u_n=\frac{x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}};$$

則有

$$\frac{D(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{1}{(1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)^{1+\frac{n}{2}}}.$$

3. 若令

$$x_1=\cos\varphi_1,$$

$$x_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$x_3=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_n=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,$$

則有

$$\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)}=(-1)^n\sin^n\varphi_1\sin^{n-1}\varphi_2\sin^{n-2}\varphi_3\sin^2\varphi_{n-1}\sin\varphi_n.$$

4. 方程式

$$z=\alpha x+yf(\alpha)+\varphi(\alpha),$$

$$o=x+yf'(\alpha)+\varphi'(\alpha)$$

定出函數 $z=F(x,y)$，α 是一個輔助變數;直接驗明不論函數 $f(\alpha)$ 及 $\varphi(\alpha)$ 如何,此函數 z 都能滿足關係式 $rt-s^2=o$.

5. 驗明方程式

$$y=x\varphi(z)+\psi(z)$$

所定的陰函數 $z=F(x,y)$ 不論函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 如何都能滿足關係式

$$rq^2-2pqs+tp^2=o$$

6. 方程式

$$z\varphi'(\alpha)=[y-\varphi(\alpha)]^2,\ (x+\alpha)\varphi'(\alpha)=y-\varphi(\alpha),$$

α 是一個輔助變數,所定的函數 $z=F(x,y)$ 不論 $\varphi(\alpha)$ 如何都能滿足關係式 $pq=z$.

7. 方程式

$$[z-\varphi(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2),\ [z-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)=\alpha x^2$$

所定的函數 $z=F(x,y)$ 必能滿足關係式 $pq=xy$.

8. 令 $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, 函數 $f(u,v)$ 及 $\varphi(u,v)$ 若滿足條件

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial v},\ \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

則有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

9. 若是函數$V(x,y,z)$能滿足方程式$\Delta_2 V=o$,函數

$$\frac{1}{r}V\left(k^2\frac{x}{r^2},\ k^2\frac{y}{r^2},\ k^2\frac{z}{r^2}\right)$$

就也是如此,k是常數,$r^2=x^2+y^2+z^2$. (Lord Kelvin)

10. 設$V(x,y,z)$及$V_1(x,y,z)$是方程式$\Delta_2 V=o$的兩個積分函數

$$U=V(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)V_1(x,y,z)$$

必滿足方程式

$$\Delta_2\Delta_2 U=o.$$

11. 若是作變數更換法$x=\sqrt{1-t^2}$,則方程式

$$(x-x^3)y''+(1-3x^2)y'-xy=o$$

成爲如何.

12. 同樣問題對於方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=o$$

作變數更換法$x=uv,\ y=\dfrac{1}{v}$.

13. 設$X=f(x,y,z)$, $Y=\varphi(x,y,z)$, $Z=\psi(x,y,z)$是在空間定出點的變形法的方程式.對於一點$m(x,y,z)$所出的一個方向直線δ有自$M(X,Y,Z)$所出的一個方向直線Δ相應.對於由m點所出的三個方向率是(a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), (a_3,b_3,c_3)有M點所出的三個方向相應方向率是(A_1,B_1,C_1), (A_2,B_2,C_2), (A_3,B_3,C_3).證明此九個係數A_i, B_i, C_i所成的定準式等於九個係數a_i, b_i, c_i依同法所成的定準式乘以沙勾厲$\dfrac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)}$.

由此證明這兩個三面角位置法相同或相反依沙勾局的符號而定.(兩系的坐標軸假定位置法相同.)

14. 若對於$x=y=z=o$上題中的函數f, φ, ψ皆等於零,證明在普通場合有三個也只有三個直交方向出自原點,其相應的三個方向也是直交的出自原點.

15. 自一個曲面S每一點M引法線MN,取此法線和一個定平面P的交點N,再在過N而垂直於P的直線上取長度$Nm=NM$,求m點所畫曲面的切平面.

此變形法是一個接觸變形法,試研究其逆變形法.

16. 自一個曲面S的各點在其法線上取一個定長l;求如此所得點的軌迹所成曲面Σ的切平面.

對於平曲線作同樣的問題.

*17. 有一個已知曲面S及一個定點O,連結O點及S的任一點M;由帶徑OM及曲面在M點的法線MN作平面OMN在此平面內由O點引一直線垂直於帶徑OM,在此直線上取長度$OP=OM$,P點畫出一個曲面Σ叫作第一曲面的apsidale.求此曲面Σ的切平面.此變形法是一個接觸變形法.在曲面S及Σ間有相互性.若取橢圓面為曲面S,中心點為O點則曲面Σ為光波曲面(surface des ondes).

*18. Invariants différentiels d' Halphen.——對於xy施以任何相似變形法則方程式

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}-45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4}+40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3=o$$

的形狀不變.

19. 設P, Q, R是x, y, z的任何函數,在算式

$$Pdx+Qdy+Rdz$$

中令$x=f(u,v,w)$, $y=\varphi(u,v,w)$, $z=\psi(u,v,w)$, u, v, w是新變數,此式變爲一個形狀相同的算式

$$P_1du+Q_1dv+R_1dw,$$

P_1, Q_1, R_1是u, v, w的函數,驗明恒等式

$$H_1=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}H,$$

其中

$$H=P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

$$H_1=P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w}-\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)+Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial u}-\frac{\partial P_1}{\partial w}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}-\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right)$$

20. 仍同上題記法,驗明微分方程式

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial y}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial R}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial z}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}$$

變爲形狀相同的方程式,但x, y, z, P, Q, R各爲u, v, w, P_1, Q_1, R_1所代.

21. Schwarzien.——若令$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, x是t的一個函數,a, b, c, d都是常數,則有

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2,$$

$x', x'', x''', y', y'', y'''$表關於$t$的導來式.

22.* 設u及v是自變數x及y的兩個任何函數,令

$$U=\frac{au+bv+c}{a''u+b''v+c''},\quad V=\frac{a'u+b'v+c'}{a''u+b''v+c''},$$

$a, b, c, \cdots, c''$都是常數,証明公式

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{(u,v)}=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial x}}{(U,V)},$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)}{(u,v)}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial y}+2\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)}{(U,V)}.$$

及互換 x 及 y 所得的相似公式;其中

$$(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},\quad (U,V)=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}.$$

(Goursat et Painlev', comptes rendus, 1887)

23. 求一點至一個平曲線或扇曲線,兩個曲線上的兩點,兩個曲面上的兩點的距離的最大及最小.

24. 有一個曲面 S 及 n 個定點,自此 n 定點各作直線交曲面 S 於一點,曲面上所有點能令這些線分的平方和成爲最大最小者都是由此 n 點的平均距離 (distances moyennes) 的心向曲面所作法線的足.

25. 在已知的四邊所能作的四邊形中其面積最大的必爲一圓周的內接形,推廣在 n 邊的多邊形上.

26. 求橢圓面內一個直方體的最大體積.

27. 將頂點看作至中心的距離的最大或最小的點求一個有心二次曲面的軸.

28. 同樣問題用以求橢圓面的中心剖線的軸.

29. 求過一個三角形的三個頂點的面積最小與橢圓及

過一個四面體的四個頂點的最小體積的橢圓面.

30. 求一個平面及空間一個直線的最近距離.

31*. 一個虛數元的定準式 D 的模 (module) 的平方至多等於同行各元的模的平方和的積的平方根.

32. 設 $F(x,y,z;X,Y,Z)$ 是 6 個變數的函數.方程式

$$F=o,\quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=o,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q=o$$

本 X, Y, Z 解開定出一個接觸變形法. ($cf\ n^o 59$)

33. 設 $F(x,y,z;X,Y,Z)$, $\Phi(x,y,z;X,Y,Z)$ 是六個變數的兩個函數.三個方程式

$$F=o,\qquad \Phi=o,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}p & \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}p \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}q & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\quad\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}q \end{vmatrix}=o$$

定出一個接觸變形法.

〔註一〕若是一個函數 $f(x)$ 在一個區域內是常上升的或常下降的,証明此函數的存在至爲簡易.例如 $y=f(x)$ 是一個連續函數.在 x 由 a 增至 b 時,牠由 A 增 B 對於 y 在 A 及 B 間一個價值,x 在 a 及 b 間有一個價值而只有一個價值相應 ($n^o 8$). x 的這個價值是一個函數 $\wp(y)$, 牠在 (A, B) 區域內是上升的. <u>這是一個連續函數</u>.誠然,設 (x_0, y_0) 是一偶的相應價;η 值是一個正數限定 $x_0-\eta$ 及 $x_0+\eta$ 都在 a 及 b 中間,設 $y_0-\varepsilon$ 及 $y_0+\varepsilon'$ 是 y 的相應價值;若是 $y-y_0$ 的絕對價值小於二數 $\varepsilon, \varepsilon'$ 中的最小者, x-x_0 的絕對價值就小於 η. 在 x 由 $-\infty$ 變至 $+\infty$ 時若函數 $f(x)$

常上升自 $-\infty$ 至 $+\infty$ 或是下降由 $+\infty$ 至 $-\infty$，對於 y 的一個價值，x 有一個價值而只有一個價值相應.函數 x^n 就是這個場合，n 是一個奇正數.

〔註二〕對於近似值的收斂性的証法，參觀 Bulletin de la Société mathématique, t. XXXI, 1903.

〔註三〕如此我們只在一組的特別價值 u_i^0 附近定出反函數來；對於 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的任意一組的價值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有一組而只有一組相應的場合曾爲許多幾何家所研究〔參觀 Hadamard, Sur les transformations ponctuelles (Bulletin de la Société mathématique, t. XXXIV, 1906)〕.

〔註四〕經過一個二重點不能有兩個以上的分枝存在.誠然，假定曲線的方程式爲 (25) 的形狀，係數 c 假定不等於零；若適宜選擇坐標軸這個條件是必能滿足的.若是這個方程式有三個根 y_1, y_2, y_3 和 x 同時漸近於零，依洛兒定理，則方程式 $F'_y(x,y)=o$ 至少有兩個根也和 x 同時漸近於零.但是這個方程式的形狀是 $2bx+2cy+\varphi(x,y)=o$ 這兩個函數 $\varphi(x,y)$ 及 $\varphi'_y(x,y)$ 在 $x=y=o$ 時是等於零的.所以此方程式有一個根而只有一個根和 x 同時漸近於零 (n^o32).

〔註五〕在條件 $\Delta\geqq o$ 或 $\Delta\leqq o$，若是將符號 $=$ 除外，就說是有一個狹義的最大或最小；設 η 是任何小的正數，若對於 h 及 k 的某某價值其絕對值小於 η，等式 $\Delta=o$ 能設存在，則爲廣義的最大或最小.試取一個曲面 S 爲方程式 $z=f(x,y)$ 所表，假定 oz 軸是堅直線；$f(x,y)$ 的最大最小和曲面的頂及底相應.一個狹

義的最大和一個孤立的頂點相應,然而這些點能成爲曲面上的些線,例如一個圓環其軸爲豎線,其兩極端的緯線成爲廣義的最大及最小的線.

條件 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=o,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=o$ 對於和廣義的最大或最小相應點 (a,b) 也是必要條件.

〔註六〕例如 $f=\sqrt{x^2+y^2}+\varphi(x,y)$,在原點附近函數 φ 及牠的偏導來式以至於第二級都是連續函數,偏導來式 f'_x,f'_y 對於 $x=y=o$ 既是不連續,不能應用普通定規以辨認 f 是否在原點上成爲最大或最小.假在原點附近

$$\varphi=ax+by+\cdots,$$

其未書各項至少是二次.若依 n^045 命

$$x=\rho\cos\omega,\ y=\rho\sin\omega,$$

則得

$$f=\rho(1+a\cos\omega+b\sin\omega)+\rho^2P(\rho,\omega),$$

函數 P 在原點領域內常爲有限.和在 n^045 相同,可見若 $a^2+b^2<1$, ρ 的係數就常大於一個正的最小, f 在原點就是最小.若是 $a^2+b^2>1$, ρ 的係數能換符號,在原點上就沒有最大最小. $a^2+b^2=1$ 的場合是不定的場合.玆舉一個極有興味的例子:求一個平面上一點 M 使至平面內三定點的距離的和 $MA+MB+MC$ 爲最小.若是三角形 ABC 的角都小於 120^0,此點 M 是如此的一點:自此點視 AB,BC,CA 三邊皆作 120^0 的角;若有一個角大於 120^0,譬如是 A 角,則 M 點就是 A 點自身,在此點上函數的偏導式都是不連續.若取 A 爲原點甚易驗明以上的定規.

〔註七〕此定理是Hadamard所創(Bulletin des Sciences mathématiques, 2ᵉ serie, t XVII, 1893) 正文中的証法是 Wirtinger的(Ibid 1908)。

〔註八〕Legendre及Ampere曾作這些變形法的許多的例子. Sophus Lie 在各種著述上有關於一般理論的推求.(特別的參觀 Geometrie der Berührungs transformationen; 並參觀 Jacobi, Vorlesungen über Dynamik.)

〔註九〕由直接推理也能得到切平面的方程式.凡在曲面上的曲線,都是由u及v的一個關係式所定,譬如是$v=\Pi(u)$,此曲線的切線的方程式是

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\Pi'(u)}=\frac{Y-y}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\Pi'(u)}=\frac{Z-z}{\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\Pi'(u)}.$$

消去$\Pi'(u)$,得切平面的方程式(64).

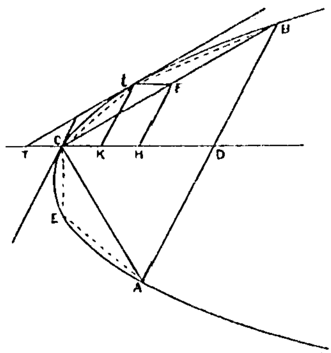
第　四　章

有 定 積 分

I.—面積術(quadrature)的各種方法.

66. **拋物線的面積術.**——一個平曲線所限的面積的定法,是幾何學家最費心靈的一個問題,前人所遺最著名的例子,就是亞基默特(Archimêde)所創拋物線的面積術;我們說明他的一個方法.

圖　七



求定一個拋物線弧 ACB 及弦 AB 所限的面積,連結 AB 的中點 D 作直徑 CD 達於 C,拋物線在 C 點的切線平行於 AB,引 AC 及 BC 弦,又取兩點 E 點 E',在此兩點,拋物線的切線各平行於 BC 及 AC 弦,我們先將三角形 BEC 的面積和三角形 ABC 的面積比較,引切線 ET 交 CD 於 T 點,引直徑 EF 交 CB 於 F,又引

AB弦的平行線EK及FH，依拋物線的性質得$TC=CK$；又$CT=EF=KH$，故$EF=\frac{CH}{2}=\frac{CD}{4}$。三角形$BCE$及$BDC$既有一個公共的底$BC$，牠們的面積的比等於牠們的高的比，就是直線$EF$及$CD$的比，所以三角形$BCE$的面積等於三角形$BCD$的面積的四分之一，就是等於三角形$ABC$的面積$S$的八分之一；三角形$ACE'$自然也有相同的面積，對於每一個弦$BE$，$CE$，$CE'$，$E'A$都用此法作去，卽得四個新三角形，牠們的面積都等於$\frac{S}{8^2}$，餘類推，由第 n 次的運算，得 2^n 個三角形，牠們的面積都等於$\frac{S}{8^n}$。在n增加無限時，拋物線的弓形面積自然是這些三角形的面積的和的極限，就是此幾何級數

$$S+\frac{S}{4}+\frac{S}{4^2}+\cdots+\frac{S}{4^n}+\cdots$$

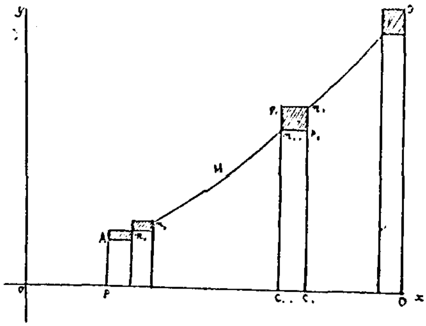
的和，牠的價值是$\frac{4S}{3}$。由此可見<u>所求的面積等於在AB及CD所建平行四邊形的面積的</u>$\frac{2}{3}$。

以上所用的方法是一個<u>漸竭法</u> (méthode d'exhaustion)：所求的面積是為一個收斂級數所表明。對於這個問題，<u>亞基默特</u>用的又有一個方法，和近世所用的方法極其相近，就是將面積分為無量數的極小部分。在積分學未發明以前，幾何學者都是用和此相類的方法，以計算面積，曲線弧及體積〔註一〕這些方法雖屬工巧，然至現在僅屬於歷史上的興趣，所以我們快回復到分解 (de'composition) 的普通方法上，由此方法自然引導我們到積分學上。

67. **普通方法**。——設$y=f(x)$是在(a,b)區域內的一個連續函數，牠在此區域是正並且是上升的；對於此函數有一個曲

線弧 AMB 相應,此弧在 ox 軸上邊.我們試計算 AMB 弧及兩個縱線 AP, BQ, 及線分 PQ 所限的面積(圖八).為此,我們作許多點,牠們的橫坐標是 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 將線分 PQ 分為更小線分,這些許多點的橫坐標都是順着下指標的次序漸增的;在此等分點上各引 oy 的平行線.如此即將所要計算的面積分為若干混合直線(mixtiiigne)的梯形.

圖 八



我們考混合梯形 $c_{i-1}\,m_{i-1}\,m_i\,c_i$; 此梯形的面積顯然在長方形 $c_{i-1}\,m_{i-1}\,p_i\,c_i$ 及長方形 $c_{i-1}\,q_i\,m_i\,c_i$ 中間,用 r_i 表第一個長方形,用 R_i 表第二個長方形,用 $\mathcal{A}$ 表所求的面積,即得一個雙不等式

$$\sum r_i < \mathcal{A} < \sum R_i.$$

然而 R_i 及 r_i 是容易計算的.

$$s = \sum r_i = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}),$$

$$S = \sum R_i = f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(b)(b - x_{n-1}).$$

$S - s$ 的式子是

$$S-s=(x_1-a)[f(x_1)-f(a)]+(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]+\cdots$$
$$+(b-x_{n-1})[f(b)-f(x_{n-1})];$$

設 η 是差數 $(x_1-a),(x_2-x_1),\cdots,$ 中的最大價值,我們若將這些差數通同代以 η,上式的第二端的價值當然較原式為大,所以

$$S-s<\eta[f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(b)-f(x_{n-1})]$$

或結果

$$S-s<\eta[f(b)-f(a)].$$

所以在 n 增加無限,差數 x_i-x_{i-1} 的最大價值漸近於零時,差數 $S-s$ 也漸近於零.再進一步,對於此同一條件,差數 $S-\mathcal{A}$, $\mathcal{A}-s$ 都漸近於零,$\mathcal{A}$ 是 S 及 s 的公共極限,我們可以作為

$$(1)\quad \mathcal{A}=\lim[(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})].$$

若是在 (a,b) 區域內函數 $f(x)$ 是下降的,這個推理仍是相同.若是在此區域內,函數有若干個的最大及最小,我們可以用和最大最小相應的縱線分全面積為部分面積.試舉費而馬 (Fermat) 所作的一個例子.

設求曲線 $y=Ax^{\mu}$,x 軸及兩個直線 $x=a$, $x=b$ $(o<a<b)$ 所限的面積,冪指數 μ 是任何的.為此,我們在 a 及 b 間加入 $n-1$ 個幾何中項,因得一個級列

$$a,\ a(1+\alpha),\ a(1+\alpha)^2,\cdots,\ a(1+\alpha)^{n-1},\ b,$$

α 滿足條例: $a(1+\alpha)^n=b$ 我們用以上的這些數作為線分 ab 上諸分點的橫坐標,和此等點相應的縱坐標的價值是

$$Aa^{\mu},\ Aa^{\mu}(1+\alpha)^{\mu},\ Aa^{\mu}(1+\alpha)^{2\mu},\cdots,\qquad \mu,p$$

第 p 個長方形的面積是

$$[a(1+\alpha)^p-a(1+\alpha)^{p-1}]Aa^{\mu}(1+\alpha)^{(p-1)\mu}=Aa^{\mu+1}\alpha(1+\alpha)^{(p-1)(\mu+1)},$$

這一切長方形的面積的和是

$$Aa^{\mu+1}\alpha[1+(1+\alpha)^{\mu+1}+(1+\alpha)^{2(\mu+1)}+\cdots+(1+\alpha)^{(n-1)(\mu+1)}];$$

若 $(\mu+1)$ 不等於零,這正是我們原來假定的,括弧內的和等於 $\dfrac{(1+\alpha)^{n(\mu+1)}-1}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}$,用 $a(1+\alpha)^n$ 代以 b,卽可將上式寫爲

$$A(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}.$$

在 α 漸近於零時,商 $\dfrac{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}{\alpha}$ 的極限是 $(1+\alpha)^{\mu+1}$ 關於 α 的導來式在 $\alpha=o$ 時的價值,就是等於 $\mu+1$;所以所求的面積等於

$$\frac{A(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})}{\mu+1}.$$

在 $\mu=-1$ 時,這個計算法不能應用,這些內切長方形的和等於 $nA\alpha$,我們須求積 $n\alpha$ 的極限,n 及 α 有一個關係

$$a(1+\alpha)^n=b.$$

自此式中得

$$n\alpha=\log\frac{b}{a}\frac{\alpha}{\log(1+\alpha)}=\log\frac{b}{a}\frac{1}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

log 表納氏對數;在 α 漸近於零時,$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 的極限是 e,積 $n\alpha$ 的極限是 $\log\dfrac{b}{a}$.所以所求面積是 $A\log\dfrac{b}{a}$.

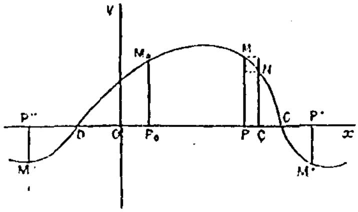
68. **原函數** (fonction primitive).——積分學的發明將平面積的計算法變爲求一個函數,牠的導來式是一個已知函數.設 $y=f(x)$ 是一個曲線關於直交坐標軸的方程式,函數 $f(x)$ 是已知的.我們取曲線,x 軸,一個定縱線 M_0P_0 及一個動縱線 MP 所限的面積;將此面積看作動縱線的橫坐標 x 的函數.若是函數 $f(x)$ 是連續的,這個面積當然也是 x 的連續函數.欲括盡一切可能的場合,我們用 $\mathfrak{A}$ 表曲線,x 軸及兩個直線 M_0P_0, MP 所限的

各部分面積的代數和,每一個部分面積都有一個符號,對於在 M_0P_0 右方及 ox 上方的面積用 $+$ 號,對於在 M_0P_0 右方及 ox 下方的面積用 $-$ 號,對於在 M_0P_0 左方的面積,規約和此相反,如此,MP 來至 $M'P'$ 時,我們將面積 $\mathscr{A}$ 看作兩個面積的差

$$M_0P_0C-M'P'C;$$

同樣,若 MP 在 $M''P''$,我們得 $\mathscr{A}=M''P''D-M_0P_0D$.

圖　九



由這個規約,我們將證明這個連續函數 $\mathscr{A}$ 的導來式是 $f(x)$. 如圖,我們取兩個相鄰縱線 MP, NQ,牠們的橫坐標是 x 及 $x+\Delta x$. 增長 $\Delta\mathscr{A}$ 顯然在兩個長方形中間,這兩個長方形都以 PQ 爲底,牠們的高一個是 MN 弧間的最大縱線 H,一個是 MN 弧間的最小縱線 h,我們可寫爲

$$h\Delta x<\Delta\mathscr{A}<H\Delta x,$$

用 Δx 除,得 $h<\dfrac{\Delta\mathscr{A}}{\Delta x}<H$. 在 Δx 漸近於零時,函數 $f(x)$ 既是連續的,H 及 h 有一個公共極限 MP 或說是 $f(x)$; 所以函數 $\mathscr{A}$ 的導來式是 $f(x)$. 閱者可以驗明無論 M 點的位置如何,這個結論都是一樣.

若是已知 $f(x)$ 的一個原函數,就是說已知一個函數 $F(x)$

牠的導來式是 $f(x)$, 差數 $F(x)-\mathfrak{A}$ 的導來式既等於零,所以此差數是常數 C(n°17). 欲决定此常數 c, 只須注意面積 $\mathfrak{A}$ 在縱線 MP 的橫坐標 $x=a$ 時為零,因得

$$\mathfrak{A}=F(x)-F(a).$$

以上的推理,一方面表明一個平面積的定法變為求一個原函數,牠一方面,(這個結果對於我們尤關重要) 表明凡一個連續函數 $f(x)$ 都是牠一函數的導來式.這個基本定理,由此稍涉模糊的幾何方法已經成立.這個證明,前人已是極為滿意,然在今日牠不是充足的.欲得積分學的堅固基礎,必須給此定理一個純粹的解析證明法,不依賴少許的幾何直觀,這是因為一個連續函數不是都能用圖解表明的緣故 (n°7 及 31). 我所以述這個證明法的意思,不但是因為牠在歷史上的關係,也是因為牠在新證明法上供給一的重要個解析原素.這是誠然,和 (1) 相類的和數及較為普通的和數的研究以後將有重要的任務〔註二〕.

II. 有定積分(intégrales définies)及附屬的幾何觀念.

69. 和數 S 及 s. ——設 $f(x)$ 是在 (a,b) 區域內的一個限制函數,連續或不連續 $(a<b)$. 假想將 (a,b) 區域分為更小的部分區域 (a,x_1), (x_1,x_2), $\cdots$, (x_{n-1},b), x_1, x_2, $\cdots$, x_n 都是些依次上升的數;用 M 及 m 表函數 $f(x)$ 在全區域內的上限及下限,用 M_i 及 m_i 表此函數在區域 (x_{i-1},x_i) 的上限及下限,命

$$S=M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_n(b-x_{n-1}),$$

$$s=m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\cdots+m_n(b-x_{n-1}).$$

對於分 (a,b) 為更小區域的每一個分法,有一個和數 S 及一個和數 s 相應, $s<S$. 這一切和數 S 顯然都大於 $m(b-a)$, 這是因為一

切的數 M_i 都大於 m 的緣故,所以這些和數 S 有一個下限 I.同樣,這些和數 s 有一個上限 I'.我們將證明 I' 至大等於 I.為此,只須證明用兩個方法將 (a,b) 分為更小區域,對於相應的和數 S 及 s, S' 及 s',必能得 $s<S'$, $s'<S$.〔註三〕

先假定將每一個部分區域 (a,x_1), (x_1,x_2),⋯分為更小的區域,由這些新分點的坐標成為一個新敍列

$$a, y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \cdots, y_{l-1}, x_2, y_{l+1}, \cdots, b;$$

這個新分法說是第一個分法的繼續分法.用 Σ 及 σ 表和此新分法相應的和數.試比較 S 及 Σ, s 及 σ. 我們任取一個部分區域 (a,x_1). 設 M'_1 及 m'_1 是 $f(x)$ 在區域 (a,y_1) 的上限及下限, M'_2 及 m'_2 是 $f(x)$ 在區域 (y_1,y_2) 內的上限及下限, M'_k 及 m'_k 是 $f(x)$ 在區域 (y_{k-1},x_1) 內的上限及下限.所以和數 Σ 由區域 (a,x_1) 所成的部分等於

$$M'_1(y_1-a)+M'_2(y_2-y_1)+\cdots+M'_k(x_1-y_{k-1}),$$

因為 M'_1, M'_2, M'_3, ⋯, M'_k 都不能大於 M_1,所以以上的和數至大等於 $M_1(x_1-a)$; 同樣, Σ 由區域 (x_1,x_2) 所成的部分至大等於 $M_2(x_2-x_1)$,餘類推.將這些不等式相加,即得 $\Sigma\leqq S$,同法可見 $\sigma\geqq s$.

現在我們任意取兩個分法,得相應的和數 S 及 s, S' 及 s'.再取此兩個分法的分點作為第三個分法的分點.此第三分法都和前二者的每一個是繼續的.設 Σ 及 σ 是由此輔助分法所得的和.由以上所見,得不等式

$$\Sigma\leqq S,\ \sigma\geqq s,\ \Sigma\leqq S',\ \sigma\geqq s';$$

因 $\Sigma>\sigma$,所以 $s'<S$, $s<S'$.

一切和數 S 都大於一切和數 s, 極限 I 不能小於極限 I'; 所以

$I \geqq I'$.

70. 達面布(Darboux)的定理.——在 n 增加無限,差數 $x_i - x_{i-1}$ 的最大量漸近於零時,和數 S 及 s 各漸近於 I 及 I'.

要將此證明,譬如是對於和數 S 罷.爲簡單計,我們假定函數 $f(x)$ 在區域 (a,b) 內是正;這個條件總可以實現,因爲我們能彀在 $f(x)$ 上加一個適宜的常數,這就等於將和數 S 加一個常數量.設 ε 是一個任意正數,I 既是 S 的下限,必有一個敘列的上升數

$$a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{p-1} < b,$$

將區域 (a,b) 分爲更小區域,和此分法相應的和數 Σ 小於 $I + \frac{\varepsilon}{2}$.現在任取一個正數 η,小於差數

$$a_1 - a,\ a_2 - a_1,\ \cdots,\ b - a_{p-1}$$

中的最小者,再取一個敘列的上升數

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

差數 $x_i - x_{i-1}$ 都小於 η,設 S 是和 (a,b) 區域的新分法的相應和數,我們將證明若 η 有充分的小,此和數 S 就小於 $I + \varepsilon$.

爲此,假想將這些數 x_i 及 a_k 依上升的次序排列,設 S' 是和此第三個分法相應的大和,因爲此第三分法能看作前者的繼續分法,所以 $S' \leqq S$, $S' \leqq \Sigma$, 所以 $S' < I + \frac{\varepsilon}{2}$.欲得差數 $S - S'$ 的最大限,我們可以注意自取得 S 的分法改至取得 S' 的分法時,是將某某區域 (x_{i-1}, x_i) 各分爲兩個部分區域,這些分點是 $a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$. 這些被分爲二的區域 (x_{i-1}, x_i) 的總數至多等於 $p-1$, 差數 $S - S'$ 惟一的自這些部分區域得來,至多等於 S 的和這 $(p-1)$ 個區域的相應部分,就是至多等於 $(p-1)H\eta$; H 表 $|f(x)|$ 在區域 (a,b) 內的上限,所以更讓一步,也得著

$$S < I + \frac{\varepsilon}{2} + 2(p-1)H\eta,$$

若是 η 小於諸數 $\frac{\varepsilon}{4(p-1)H}$, a_1-a, a_2-a_1, $\cdots$, $b-a_{p-1}$, 無論用何法將 (a,b) 區域分爲小於 η 的部分區域時,相應的和數 S 必小於 $I+\varepsilon$; 這是我們所要証明的.

注意.—— 在 (a,b) 區域內,對於有限數的點,若任意將一個限制函數的價值更換;對於同一分法,若是所分的部分區域的最大者漸近於零,差數 $S-S'$ 及 $s-s'$ 都漸近於零,所以 I 及 I' 對於此二函數是相同的.

71. 能積分函數 (*fonctions intégrables*). —— 設有在 (a,b) 區域內的一個限制函數,將此區域分爲部分區域,在此等部分區域的數目增大,而最大的廣度漸近於零時,若是兩個和數 S 及 s 漸近於一個公共極限,我們就說此函數在 (a,b) 區域內是能積分的.

若要一個函數在一個 (a,b) 區域內是能積分的,必須要也只須要 $I'=I$. 這個條件能爲以下的條件所替代:

在 (a,b) 區域內的一個限制函數,若要牠在此區域內是能積分的,必須要然只須要在部分區域的數增加無限,牠們的最大廣度漸近於零時,差數 $S-s$ 也漸近於零.〔註四〕

誠然,差數 $S-s$ 的極限是 $I-I'$. 若是 $S-s$ 漸近於零,這就是 $I=I'$, 所以 S 及 s 有一同的極限 I.

我們仍可將這個條件更換如下:

若要函數 $f(x)$ 在 (a,b) 區域內是能積分的,必須要然只須

要對於一個任意正數 ε，必能求得 (a,b) 區域的一個分法，使差數 $S-s$ 小於 ε.

誠然，差數 $S-s$ 大於 $I-I'$，若是 $S-s<\varepsilon$，即是 $I-I'<\varepsilon$，然 ε 是任意數，所以 $I=I'$

凡連續函數都是能積分的.——誠然，差數 $S-s$ 小於或至多等於 $(b-a)\omega$，ω 表函數 $f(x)$ 在每一部分區域內的限差的一個上限，但是我們能選擇一個數 η，使凡一個區域小於 η 時，函數的限差必小於一個任何預定數 ($n^{\circ}8$)。現在我們若是選擇 η，使限差小於 $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$，差數 $S-s$ 就必小於 ε。

凡一致函數都是能積分的.——誠然，假定函數 $f(x)$ 是上升的，

$$f(a)\leqq f(x_1)\leqq f(x_2)\leqq\cdots\leqq f(x_{n-1})\leqq f(b).$$

對於一個分法 $(a,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},b)$，我們得

$$S=f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(b)(b-x_{n-1}),$$

$$s=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}).$$

依以前所証 ($n^{\circ}67$)，若是這些差數 $x_1-a, x_2-x_1,\cdots$ 都小於一個數 η，即能得着

$$S-s<\eta[f(b)-f(a)],$$

欲使 $S-s<\varepsilon$，只須使 η 小於 $\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

設 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 是在 a,b 間的上升的數；若是一個限制函數 $f(x)$ 在每一部分區域 $(a,\alpha_1),(\alpha_1,\alpha_2),\cdots,(\alpha_p,b)$ 內都是能積分的，此函數在 (a,b) 全區域內也就是能積分的。誠然，我們將每一個部分區域 (α_i,α_{i+1}) 都分爲更小區域，若是由此分法對於每一部分區域 (α_i,α_{i+1})，都得着 $S-s$ 小於 ε，則在 (a,b) 全區域內這個相應

的差數必小於$p\varepsilon$

一個限制函數$f(x)$對於(a,b)區域內,有任何數的不連續點,若是此等不連續點都在有限數的部分區域內,此等部分區域的和小於一個任何預定數,這個函數就是能積分的.誠然,設ε是一個任意正數,H是$|f(x)|$的一個上限;由假定,我們能將$f(x)$的不連續點包在有限數的部分區域內,我們能令這些區域的廣度的和小於$\frac{\varepsilon}{4H}$.$S-s$由此等區域所成的部分必小於$\frac{\varepsilon}{2}$.他一方面,函數$f(x)$在其餘區域內既都是連續的,我們能將這些區域分爲更小的區域,使$S-s$的相應部分小於$\frac{\varepsilon}{2}$所以在全區域(a,b)內$S-s<\varepsilon$.在特別場合,一個限制函數,在(a,b)區域內若是只有有限數的不連續點,這個函數在此區域內就是能積分的.

由定義,若一個函數$f(x)$是能積分的,$cf(x)$也就是能積分的,常數C如何不論.若是函數$f_1(x)$, $f_2(x)$俱是能積分的,函數$f_1(x)+f_2(x)$也就是能積分的.誠然,設對於(a,b)的一個分法,S及s, S'及s', Σ及σ是三個函數$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x)+f_2(x)$的相應和數;我們可見$\Sigma-\sigma\leqq S-s+S'-s'$.特別場合,一個限制變分的函數($n^o 11$)是兩個一致函數的和,所以是能積分的.

我們仍能証明兩個能積分函數的積也是能積分的.先假定函數$f_1(x)$, $f_2(x)$都是正;設M_i, m_i, M'_i, m'_i, $\mathfrak{M}_i$, μ_i是三個函數$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$在區域(x_{i-1}, x_i)內的上下限;S, s, S', s', Σ, σ是對於(a,b)的某一分法的相應和數,顯然可見

$$\mathfrak{M}_i\leqq M_iM_i',\ \mu_i\geqq m_im_i',$$

所以

$$\mathfrak{M}_i-\mu_i\leqq M_iM'_i-m_im_i'=M_i(M'_i-m'_i)+m'_i(M_i-m_i),$$

更讓一步

$$\mathfrak{M}_i-\mu_i\leq M(M'_i-m'_i)+M'(M_i-m_i),$$

M 及 M' 是 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 在 (a,b) 區域內的上限,用 x_i-x_{i-1} 乘此不等式,再將這些相似的不等式相加,即得

$$\Sigma-\sigma<M(S'-s')+M'(S-s).$$

所以差數 $\Sigma-\sigma$ 漸近於零.

若是函數 $f_1(x)$, $f_2(x)$, 的符號是任何的,我們總能各加以一個常數 C,使 $f_1(f)+c_1$, $f_2(x)+c_2$ 都是正.積數

$$[f_1(x)+c_1][f_2(x)+c_2]=f_1f_2+c_1f_2+c_2f_1+c_1c_2$$

既是能積分的,所以 f_1f_2 也是能積分的.

將這一切命題組合起來,可見若是 $f_1, f_2,\cdots, f_p$ 都是能積分函數,凡合 $f_1, f_2,\cdots, f_p$ 的多項整式也都是能積分函數.

72. **有定積分.**——設 $f(x)$ 是在 (a,b) 區域內的一個能積分函數,積數 S 及 s 的公共極限叫作一個有定積分,牠的記法是

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

以表明牠的根源,牠讀作積分自 a 至 b $f(x)dx$. 設有 (a,b) 的一個任何分法,兩個相應的和數是 S 及 s, 由有定積分的定義看來, I 當然常在 S 及 s 中間;若將 S 及 s 中間的一個任意數作為 I 的近似值,所作的差誤常小於差數 $S-s$.

在積分的定義中,我們可以將和數 S 及 s 用兩個較為普通的式子更換.設有 (a,b) 區域的一個分法

$$a,\ x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{i-1},\ x_i,\cdots,\ x_{n-1},\ b,$$

設 $\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_i$ 是在每一個部分區域中的任何價值,和數

(2)
$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

顯然在 S 及 s 中間,這是因爲 $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$ 的緣故;若是函數 $f(x)$ 是能積分的,這個和數的極限就也是 I. 特別的,若假定 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 各合於 $a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, 我們就復得着 ($n^o$67) 的和數 (1). 積數

$$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

叫做積分的一個原素 (élément).

依積分的定義,直接得着幾個結果.在以上理論上我們假定 $a<b$; 現在若是互換這兩個極限 a 及 b, 這一切因數 (x_i-x_{i-1}) 都換符號,S 及 s 的極限也須換符號;所以

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

由積分的定義,又得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

若是 c 在 a 及 b 中間,這是很明瞭的.然若是 b 在 a 及 c 中間,這個公式也必存在,但須要函數 $f(x)$ 在 a 及 c 間也是能積分的,這是因爲我們可以寫爲

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx;+\int_b^c f(x)dx.$$

一般,設 $c, d, \cdots, l$ 是些任意數,我們得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\cdots+\int_l^b f(x)dx;$$

在一個區域 (a,b) 內,若是函數 $f(x)$ 有些不連續點,或是不是一個相同的解析式,在計算此等積分時,即用以上的分解法.

若是 $f(x)=A\varphi(x)+B\psi(x)$, A 及 B 是兩個常數,我們得

$$\int_a^b f(x)dx=A\int_a^b \varphi(x)dx+B\int_a^b \psi(x)dx.$$

若函數 $f(x)$ 是許多函數的和時,所得結果也和此相同.

我們能在公式(2)中,將 $f(\xi_i)$ 用一個更為普通的式子更換.區域 (a,b) 既是分為部分區域 $(a,x_1),(x_1,x_2),\cdots$,對於每一部分區域,我們都附屬一個數 ζ_i,這個數<u>均一的</u> (uniformément) 和差數 x_i-x_{i-1} 漸近於零.這個意思是說對於一個任何正數 ε,我們必能選出一個正數 η,這個數 η 不關係於 x_i 及 x_{i-1},凡 $|x_i-x_{i-1}|<\eta$ 時必連帶着 $|\zeta_i|<\varepsilon$.我們將證明和數

$$T=\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+\zeta_i\right](x_i-x_{i-1}) \tag{3}$$

的極限是有定積分 $\int_a^b f(x)dx$,但必須 ζ_i 均一的漸近於零.誠然,假定我們取 η 有充分的小,在每一個數 $|x_i-x_{i-1}|$ 小於 η 時,同時得着

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon,\ |\zeta_i|<\varepsilon.$$

因為我們能寫為

$$T-\int_a^b f(x)dx$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n} \Sigma f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right]+\sum_{i=1}^{n} \zeta_i(x_i-x_{i-1}),$$

可見在此等條件之下,必能得

$$\left|T-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon+\varepsilon(b-a).$$

這就將定理證明.

在實用上,有定積分往往是和數 (3) 的極限,所以我們常常

應用這個特性,並且推廣到二重積分 (intégrale double) 及三重積分 (intégrale triple) 上.

73. **第一平均値公式** (formule de la moyenne).——設 $f(x)$ 及 $\psi(x)$ 是 (a,b) 區域內的兩個能積分函數,在此區域內總是 $f(x)\leqq\psi(x)$.爲確定人的觀念,我們假定 $a<b$, 積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的任一原素都小於積分 $\int_a^b \psi(x)dx$ 的一個相應原素,結果,

$$\int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b \psi(x)dx.$$

若這兩個函數都是連續的,欲此兩個積分相等,必須 $f(x)$ 常常等於 $\psi(x)$; 若是 $b<a$, 上式的不等號當換方向.

這些旣經說明,假定應積分的函數的形狀是 $f(x)\varphi(x)$, $\varphi(x)$ 有一個固定的符號,譬如 $a<b$, 在 (a,b) 區域內 $\varphi(x)>o$. 設 M 及 m 是 $f(x)$ 在此區域內的上下限,將以下的雙不等式

$$m\leqq f(x)\leqq M$$

乘以正因數 $\varphi(x)$, 得

$$m\varphi(x)\leqq f(x)\varphi(x)\leqq M\ \varphi(x),$$

因而

$$m\int_a^b \varphi(x)dx<\int_a^b f(x)\varphi(x)dx<M\int_a^b \varphi(x)dx,$$

所以我們得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\mu\int_a^b \varphi(x)dx, \tag{4}$$

μ 是在 M 及 m 中間的一個數,這個等式成爲<u>第一平均値公式</u>.

不論極限 a 及 b 如何,只要 $\varphi(x)$ 有一個固定符號,這個公式都能應用,若函數 $f(x)$ 是連續的,牠對於 a 及 b 中間的一個數 ξ 取

得價値μ,我們可將平均値公式寫爲

$$(5)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx,$$

ξ是在a及b中間的一個數.若特別的假定$\varphi(x)=1$,由積分的定義$\int_a^b dx$等於$(b-a)$,所以

$$(6)\qquad \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

74. 第二平均値公式.——包內(Bonnet)發明一個定理,這個定理是自阿伯耳(Abel)的一個預定理(lemme)得來的.

預定理.——設$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$是些下降的正數,$u_0, u_1, \cdots, u_p$是些正或負的數,$u$的數目和$\varepsilon$的數目相等.若是一切和數$s_0=u_0,\ s_1=u_0+u_1, \cdots,\ s_p=u_0+u_1+\cdots+u_p$都在兩個數$A$及$B$中間,和數

$$S=\varepsilon_0 u_0+\varepsilon_1 u_1+\cdots+\varepsilon_p u_p$$

也必在$A\varepsilon_0$及$B\varepsilon_0$中間.

誠然,我們可寫爲

$$u_0=s_0,\quad u_1=s_1-s_0,\quad \cdots,\quad u_p=s_p-s_{p-1}.$$

和數S等於

$$s_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1)+s_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\cdots+s_{p-1}(\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p)+s_p\varepsilon_p.$$

一切差數$\varepsilon_0-\varepsilon_1,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2, \cdots,\ \varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p$既都是正數,若將$s_0, s_1, \cdots, s_p$用牠們的上限$A$替代,即得

$$S<A(\varepsilon_0-\varepsilon_1+\varepsilon_1-\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p+\varepsilon_p)=A\varepsilon_0,$$

若將$s_0, s_1, \cdots, s_p$用牠們的下限B替代,同樣得$S>B\varepsilon_0$.

此樹已經說明,設$f(x)$及$\varphi(x)$是兩個能積分函數,假定x自

a 變至 b 時, $\varphi(x)$ 是正且下降的.積分 $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ 是和數

$$I=f(a)\varphi(a)(x_1-a)+f(x_1)\varphi(x_1)(x_2-x_1)+\cdots,$$

的極限,這個和數是在兩個數

$$I'=\sum_i M_i\varphi(x_{i-1})\ (x_i-x_{i-1})\ \text{及}\ I''=\sum_i m_i\varphi(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$

中間, M_i 及 m_i 表 $f(x)$ 在區域 (x_i-x_{i-1}) 內的上下限.因差數 $I'-I''$ 小於

$$\varphi(a)\sum_i(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}),$$

$f(x)$ 又是能積分的,所以 $I'-I''$ 漸近於零.所以所取的有定積分是和數 I' 及 I'' 的公共極限,結果,也就是和數

$$I_1=\sum_i\mu_i\varphi(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$

的極限, μ_i 是 M_i 及 m_i 中間的一個數.

我們選擇這些數 μ_i, 使

$$\mu_i(x_i-x_{i-1})=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx,$$

依第一平均值公式這是可能的. $\varphi(a),\varphi(x_1),\cdots$ 既都是正數又是下降的,依阿伯耳的預定理,此最後的和數必在 $A\varphi(a)$ 及 $B\varphi(a)$ 中間, A 及 B 表 c 自 a 變至 b 時積分

$$\int_a^c f(x)dx$$

的最大及最小.因爲這個函數顯然是 c 的連續函數,所以在極限時,可以寫爲

$$(7)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,\quad (a<\xi<b).$$

若是在 (a,b) 區域內函數 $\varphi(x)$ 是下降的,然不常是正數,我們可以應用危伊特拉斯(Weierstrass)的一個更爲普通的公式.介

$\varphi(x)=\varphi(b)+\psi(x)$，函數$\psi(x)$是正的且下降的應用公式(7)，得

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx=[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^\xi f(x)dx.$$

由此得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\int_a^b f(x)\varphi(b)dx+[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^\xi f(x)dx,$$

或

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

若是函數$\varphi(x)$是上升的,亦得和此相類的公式.

75. **回溯到原函數上.**——以前的普通定理,對於一切能積分函數都能應用.在以後的應用上,應積分的函數通常的都是連續函數,或是在積分區域 (intervalle d' intégration) 內至多現出有限數的不連續點.我們要注意一個積分的價值只關係於應積分的函數的性質及極限,記號

$$\int_a^b f(x)dx,\int_a^b f(z)dz,\int_a^b f(t)dt$$ 的意義都是相同.

若是將極限中的一個 (例如下限a) 看作固定,將他一個看作變數,這個積分就是這個極限的函數,我們寫爲

$$F(x)=\int_b^a f(t)dt,$$

若是不至有別的誤會時,我們就簡直寫爲

$$\int_a^x f(x)dx.$$

函數$f(x)$既是有限制的,$F(x)$是x的一個連續函數.

若函數$f(x)$是連續的,$F(x)$的導來式就是$f(x)$.誠然,

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt,$$

應用平均值公式(6),得

$$F(x+h)-F(x)=hf(\xi),$$

ξ是在x及$x+h$中間的一個數.在h漸近於零時,$f(\xi)$的極限是$f(x)$;所以函數$F(x)$的導來式是$f(x)$;積分學的根本定理至此成立,並不依據絲毫的幾何直觀〔註五〕.

若在$F(x)$上加一個任意常數c,即得以$f(x)$爲導來式的一切函數.這一切函數中有一個然只有一個,牠對於$x=a$時取得一個預定數y_0;這個函數是

$$y_0+\int_a^x f(t)dt.$$

凡以$f(x)$爲導來式的函數都是$f(x)$的一個無定積分,牠的記號是

$$\int f(x)dx,$$

在其中不將極限指明.依方纔所見,得

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(x)dx+c.$$

反之,無論由何方法,若是得着一個函數$F(x)$牠的導來式是$f(x)$,我們就可寫爲

$$\int_a^x f(x)dx=F(x)+C;$$

欲決定這個常數C,只須注意方程式第一端在$x=a$時成爲零所以當取$C=-F(a)$,因得基本公式

$$\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a). \tag{8}$$

在此公式中用$F'(x)$代$f(x)$,得

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(x)dx;$$

應用平均值公式得

$$F(x)-F(a)=(x-a)F'(\xi),$$

ξ是在a及x間的一個數.於是我們復得着有限增長定理,然而証明法沒有前者(n^o17)普通,因爲這個証明法假定導來式$F'(x)$是連續的.

基本定理(8)的成立是假定函數$f(x)$在a及b間是連續的.若不注意這個條件就難免無謬誤的結果.例如取$f(x)=\frac{1}{x^2}$,由公式(8)得

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b},$$

方程式第一端直到現在惟a及b同符號時始有意義,然第二端即在a及b異符號時也有確定的價值.我們以後在研究虛數極限間的有定積分時,可見這個謬誤的解說.

在一切場合,$f(x)$的絕對值的對數是$f'(x):f(x)$的一個原函數;然依以上的注意,相應的等式

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{f(x)}=\log\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|$$

惟$f(x)$在a及b中間不等於零並且是有限及連續方有效;在這些條件之下,我們可將$\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|$代以$\frac{f(b)}{f(a)}$.我們以後再論此公式.

公式(8)又能發生一種誤會若是取

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

由公式得

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctang} b-\operatorname{arctang} a.$$

第一端的意義極其確定,然第二端現出無限的定法.欲免除這個不定,我們令

$$F(x)=\int_{0}^{x}\frac{dx}{1+x^2};$$

這個函數 $F(x)$ 在全區域內是連續的,牠和 x 同時爲零.牠一方面,用 $\operatorname{arctang} x$ 表在 $-\frac{\pi}{2}$ 及 $+\frac{\pi}{2}$ 間的弧.這兩個函數有相同的導來式,又都在 $x=o$ 時成爲零,所以相等.我們可以寫爲

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{o}^{b}\frac{dx}{1+x^2}-\int_{o}^{a}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctang} b-\operatorname{arctang} a,$$

$\operatorname{arctang} x$ 的價值總是在 $-\frac{\pi}{2}$ 及 $+\frac{\pi}{2}$ 中間.

同樣,得

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin b-\arcsin a,$$

在此式中,根號是取絕對值,a 及 b 在 -1 及 $+1$ 中間,$\arcsin x$ 表在 $-\frac{\pi}{2}$ 及 $+\frac{\pi}{2}$ 中間的弧.

一般方法.在原函數 $F(x)$ 有許多定法時,我們選一個初價值 $F(a)$,對於 x 自 a 變至 b 再追隨此定法的變分.有時先將公式 (8) 推廣,加入一個不連續的原函數較爲便利.公式 (8) 的成立是假定在區域 (a,b) 內函數 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都是連續的,並且假定在此區域內任一點上都是 $F'(x)=f(x)$. 現在我們作些較爲普通的假定.設 $F(x)$ 及 $f(x)$ 能滿足以上的條件,除卻在區域 (a,b) 內有限數的點上不是如此,我們叫這些點爲例外點.我們又假定在此區域內 $f(x)$ 是限制函數,$F(x)$ 只有第一類的不連續點.在此場合,欲知公式(8)當如何變化,先假定在區域 (a,b) 內只有一個例外點 c;用 ε 表一個極小正數,設 $a<c<b$,我們可寫爲

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

在a及$c-\varepsilon$間及$c+\varepsilon$及b間旣都沒有例外點,我們又可寫爲

$$\int_a^b f(x)dx=F(c-\varepsilon)-F(a)+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx+F(b)-F(c+\varepsilon).$$

在ε漸近於零時,積分$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx$也是如此,到了極限,成爲

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)-\Delta_c,$$

Δ_c表差數$F(c+\varepsilon)-F(c-\varepsilon)$,或說表$F(x)$關於$c$點的不連續性 (discontinuité).

若在區域(a,b)內有許多例外點,可將此區域分爲部分區域使在每一部分區域內只有一個例外點,用同一推理在每一個部分區域上,將所得的結果相加,得

(9) $$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)-\Sigma\Delta,$$

$\Sigma\Delta$表$F(x)$在區域(a,b)內的不連續性的和.

在$F(x)$是連續時,公式 (9) 就縮簡爲公式 (8); 所以限制函數$f(x)$在(a,b)內有有限數的不連續點,公式(8)仍能應用但必須原函數是連續的.這個注意以後仍可推廣在非限制函數的場合.

76. **指數** (indice). —— 作爲普通公式(9)的應用,我們取有定積分

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)}=\int_a^b \frac{P'Q-PQ'}{P^2+Q^2}dx,$$

其中$f(x)=\dfrac{P}{Q}$, P及Q在區域(a,b)內都是連續函數,不同時

爲零,又都有連續的導來式,一個原函數是$F(x)=\text{Arctang}[f(x)]$.若在區域$(a,b)$內函數$f(x)$不成爲無限,這個原函數就是連續函數,依公式(8)我們有

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)}=\text{Arctang } f(b)-\text{Arctang } f(a).$$

若在a,b中間,$f(x)$成爲無限,這個公式普通的是不能應用.設$f(x)$在一點c上自$+\infty$變爲$-\infty$,$F(c-o)=\frac{\pi}{2}$,$F(c+o)=-\frac{\pi}{2}$,所以$\Delta_c=-\pi$.若是$f(x)$在$x=c$時由$-\infty$變爲$+\infty$,牠的不連續性成爲π.若$f(x)$在$x=c$時成爲無限然不變符號,$\Delta_c=o$.所以在一切場合,$\text{Arctang}[f(x)]$的不連續性等於$-(K-K')\pi$,K表$f(x)$自$+\infty$變爲$-\infty$的次數,K'表$f(x)$自$-\infty$變爲$+\infty$的次數.

$K-K'$叫作$f(x)$在區域(a,b)內的指數(indice),表以$I_a^b[f(x)]$.因得一般公式

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)}=\text{Arctang } f(b)-\text{Arctang } f(a)+\pi I_a^b[f(x)].$$

若是$f(x)$是一個有理函數$\frac{V_1}{V}$,我們可用普通運算求出牠的指數並不須知道V的根.顯然可見能假定V_1和V是互素數,並且V_1的次數小於V的次數,這是因爲若除去一個多項式,指數並不生變化的緣故.此層已經說明.設想用一列的除法和求V及V_1的最大公因數所用的除法相似,但每次都換餘數的符號.先用V_1除V,得商Q_1及餘數$-V_2$,再用V_2除V_1,得商Q_2及餘數$-V_3$,繼續如此,終至一個常數餘數$-V_{n+1}$.由這些運算,得一叙列的等式

$$V=V_1Q_1-V_2,\ V_1=V_2Q_2-V_3,\cdots,\ V_{n-1}=V_nQ_n-V_{n+1}$$

這些多項式

(10) $$V,V_1,V_2,\cdots,V_{r-1},V_r,V_{r+1},\cdots,V_n,V_{n+1}$$

具有一個司土而母的敍列 (suite de Sturm) 的主要性質;第一,兩個相續的多項式不能同時為零,這是因為如果如此,我們逐漸可見 x 這個價值必令其牠的多項式全等於零,特殊的 V_{n+1} 也必等於零;第二,若是居間的多項式 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 中有一個成為零,敍列(10)所現出的變分(variation)的數不變,這是因為若 V_r 在 $x=c$ 時成為零,V_{r-1} 及 V_{r+1} 對於 $x=c$ 時必異符號的緣故.那麼,敍列(10)的變分的數只能在 x 經過 $V=o$ 的一個根時生變化,若 $\frac{V_1}{V}$ 自 $+\infty$,變為 $-\infty$,此數增加一個單位;和此相反,$\frac{V_1}{V}$ 自 $-\infty$ 變為 $+\infty$,此數減少一個單位;所以指數等於敍列(10)在 $x=a$,及 $x=b$ 間的變分數的差.

77. **一個平曲線的面積.**——凡一個有界的平面領域(domaine plan),若是牠的界線由有限數部分直線所成,就叫作多角領域 (domaine polygonal);這個領域能夠由許多多角形所成,這些多角形的界線沒有一個公共點.一個多角領域的面積是在普通幾何中講明的.〔註六〕現在我們取一個沒有二重點曲線 C (n^o13),此曲線分平面為兩部分:一個內領域 D 及一個外部.我們若給領域 D 一個面積,實際上就是承認以下的公準(postulat):

有一個數而只有一個數牠大於表領域 D 內的任何多角領域的面積的數,牠小於表包容領域 D 的任何多角形的面積的數.

若是曲線 C 能滿足一個極普通的條件,這個條件也就是通

常所見曲線所恒能滿足的,在此場合,能滿足以上兩個條件的這個惟一的數的存在能夠嚴格證明.

設P是包容D的一個多角領域,p是在D內的一個多角領域,A及a是此二領域的面積.無論這兩個領域P及p如何,我們必得着$A>a$.這些數A有一個下限$\mathcal{A}$,這些數p有一個上限$\mathcal{A}'$;還有一層,$\mathcal{A}'\leq\mathcal{A}$.若是$\mathcal{A}'=\mathcal{A}$,領域$D$就說是能方的(quarable),$\mathcal{A}$就表領域$D$的面積.〔註七〕這是能滿足條件$I$的惟一的一個數.

若要一個領域D是能方的,必須要然只須要不論正數ε如何,必能求得一個包容D的多角領域P及在D內的一個多角領域p,使P及p的面積的差$A-a$小於ε.

由定義,可見這個條件是必要的.這個條件也是充足的,這是因為差數$A-a$不能小於差數$\mathcal{A}-\mathcal{A}'$的緣故.因此可見若領域D是能方的,若是牠的面積是$\mathcal{A}$,我們必能求得兩個多角領域P及p,一個包容D,一個在D內,使差數$A-\mathcal{A}$,$\mathcal{A}-a$小於任何正數ε.以上的條件仍可宣告如下:若要領域D是能方的,必須要然只須要界線C能為一個多角領域所包含,這個領域的面積能小於一個任何已知數.這是因為凡包含C的多角領域都是兩個多角領域的差,一個包容D,一個在D內.

假想已將一個曲線C所限的領域D,分為兩個領域D_1及D_2,譬如是在D內用一個弧C'連結C的兩點罷.若D_1及D_2都是能方的,D也就是能方的,D的面積是D_1及D_2的面積的和.

設P_1及p_1是兩個多角領域,一個包容D_1,牠一個在D_1內,A_1及a_1是牠的面積.設P_2及p_2是包容D_2及在D_2內的兩個多角

領域，A_2及a_2是牠們的面積，這是很明瞭的，p_1及p_2連合所成的多角領域是在D內，所以$a_1+a_2<\mathcal{A}'$。他一方面，P_1及P_2連合所成的多角領域包容領域D，因爲牠們有一個公共部分，所以$A_1+A_2>\mathcal{A}$；由此，$\mathcal{A}-\mathcal{A}'<(A_1-a_1)+(A_2-a_2)$。領域$D_1$及$D_2$既是能方的，差數$A_1-a_1, A_2-a_2$能成爲任何小數，所以$\mathcal{A}=\mathcal{A}'$，由雙不等式$a_1+a_2<\mathcal{A}<A_1+A_2$可見$D$的面積等於$D_1$及$D_2$的面積的和。倒轉來，若$D$及$D_1$是能方的，$D_2$也是如此，誠然，$D$及$D_1$既是能方的，我們能將這兩個領域的界線盡包含在一個多角領域以內，此多角領域的面積能小於任何已知小數。所以對於D_2的界線也是如此；D_2既是能方的，由第一個特性，可見牠的面積是D及D_1的面積的差。

這個推理可以推廣：一個領域D牠的界線由任何數的閉曲線所成，若是此領域D能分解爲許多能方領域的和或差，這個領域D也就是能方的，牠的面積是這些領域的面積的和或差。

78. **一個平面積的計算法.**——我們所論的平面領域，只限於以通常所習見的曲線爲界的領域，我們很容易證明這些領域都是能方的。

我們先取一個領域和$n^\circ 67$作爲起點的那一個領域相似，牠的界線是曲線弧AB，兩個縱線AP，BQ及ox軸的一部分PQ；這個曲線弧AB只能和oy的一個平行線相遇於一點，設a及b是P及Q點的橫坐標$(a<b)$，$y=f(x)$是AB弧的方程式，在(a,b)區域內，$f(x)$是一個連續函數且是正的，我們在a,b中間取一列的上升數$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，設$m_i$及$M_i$是$f(x)$在區域$(x_{i-1}, x_i)$中的最小及最大價值，我們取兩組的長方形$r_i$及$R_i$，$r_i$的界線一方

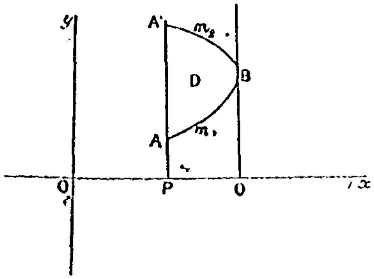
面是直線 $y=o$, $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, $y=m_i$; R_i 的界線是直線 $y=o$, $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, $y=M_i$. 顯然可見這些長方形 r_i 成爲一個多角領域在 D 內,這些長方形 R_i 成爲一個多角領域包容 D. 這兩個領域的面積各等於

$$\Sigma r_i=\Sigma m_i(x_i-x_{i-1}),\ \Sigma R_i=\Sigma M_i(x_i-x_{i-1});$$

Σr_i 的上限及 ΣR_i 的下限相等;所以領域 D 是能方的,牠的面積表以有定積分 $\int_a^b f(x)dx$. 這個結果是和幾何學上所定面積的直觀相合的.我們注意在 (a,b) 區域內不論 $f(x)$ 的符號如何,有定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 都可以看作表一個面積,但必須採取 n^0 68 所作的定規,所以人們保留面積術的名稱以表一個有定積分的計算法.

再設一個領域爲兩個平行直線 AA', BB' 及兩個曲線 Am_1B, $A'm_2B'$ 所限,這兩個曲線弧彼此不相交,且和 AA' 的一個平行直線只能相交於一點(圖 10) 我們取

圖 十



AA' 的一個平行直線爲 oy 軸,取 AA' 的一個垂直線爲 ox 軸,總使

所設的領域完全在ox上方,在圖上所作的場合,部分直線BB'縮爲一點B;設$y_1=\psi_1(x)$,$y_2=\psi_2(x)$是曲線弧Am_1B及$A'm_2B'$的方程式。

領域D是兩個能方領域Am_1BQPA及$A'm_2BQPA'$的差;所以此領域D也是能方的,牠的面積是兩個積分

$$\int_a^b \psi_2(x)dx, \quad \int_a^b \psi_1(x)dx$$

的差。

所以凡一個領域若能分解爲部分領域如以上的形狀,都是能方的,牠的面積爲些有定積分的代數和所表,若是坐標軸不是直交的,牠們彼此間的角度是θ,這些有定積分都當乘以$\sin\theta$。

計算一個面積有時用極坐標較爲便利。設有兩個部分直線OA,OB和極軸(axe polaire)Ox所作的角度是ω_0及Ω,又有一個曲線弧AMB在AOB角內,這個弧和AOB角內一個半直線只能相遇於一點,試求直線OA,OB及弧AMB所限領域的面積。設$\rho=f(\omega)$是此AMB弧的極坐標方程式,我們用些帶徑(rayons vecteurs)分AOB角爲更小的角,這些帶徑和Ox所作的角是$\omega_1,\omega_2,\cdots$。設OM_i,OM_{i+1}是兩個相隣帶徑,牠們和Ox所作的角是ω_i,ω_{i+1},設r'_i及r''_i是$f(\omega)$在(ω_i,ω_{i+1})區域內的最小及最大。一方面我們作一個二等邊三角形t_i,頂點在O,其牠二頂點在OM_i及OM_{i+1}上,牠們和O的距離等於r'_i;牠一方面,作一個直角三角形T_i,頂點在O,其直角的頂點在OM_i上,牠和O的距離等於r''_i,其第三頂點在OM_{i+1}上。我們可見這些三角形t_i的集合成爲一個多角領域在D內,這些三角形T_i的集合成爲一個多角領域包容D。這兩個領域的面積各等於

$$\frac{1}{2}\Sigma(\rho'_i)^2\sin(\omega_{i+1}-\omega_i),\quad \frac{1}{2}\Sigma(\rho''_i)^2\mathrm{tang}(\omega_{i+1}-\omega_i),$$

牠們的極限都是$\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega}\rho^2d\omega$.誠然,譬如第一個面積可見寫爲

$$\frac{1}{2}\Sigma(\rho'_i)^2(1-\varepsilon_i)(\omega_{i+1}-\omega_i),$$

ε_i均一的和$(\omega_{i+1}-\omega_i)$同時漸近於零,所以領域D的面積等於有定積分

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega}\rho^2d\omega;$$

$\frac{1}{2}\rho^2d\omega$是面積在極坐標中的元素,牠在幾何上的意義是很明瞭的.

在普通場合,一個領域爲一個普通形狀的圍線(contour)所限,我們若將這個領域看作許多和上相似的領域的和或差,就可將普通場合歸納在此特別場合以內.

注意I.——表一個閉曲線所限領域的面積的這個數,是將牠看作正數集合的一個隔來定的.自這個定義發生許多性質,這些性質也可以作爲定義,今將較近於面積的觀念的特舉一個.設C是一個平閉曲線,牠限出一個能方領域D,面積是$\mathcal{A}$,我們取包含D的一個多角領域P,牠的面積小於$\mathcal{A}+\varepsilon$,再取一個在D內的多角領域p,牠的面積大於$\mathcal{A}-\varepsilon$.這兩個領域P及p的差成爲一個多角領域K,這個多角領域K又可以代以另一個多角領域K_1包有曲線C在內,面積小於4ε,牠的界線L和C沒有一個公共點.誠然,圍繞K的在外的多角折線l可以代以另一個多角折線,此後者由前者的邊的平行直線所成,這些直線和前者的邊充分相近,使在此兩個多角折線間的面積小於ε,對於在K內多角

折線 l' 也用同樣的作法.

此刻已經說明,我們用許多直交平行線,兩線間的距離是 ρ, 將領域 D 的平面作一個方格 (carrelage) 得三種的正方形: 1^0 在 D 內的正方形就是方形內的所有點都在 D 內; 2^0 在 D 外的正方形,牠們和 D 沒有一個公共點; 3^0 混合正方形,牠們同時有些點在 D 內,又有些點在 D 外.若是 ρ 減損無限時,顯然可見這些混合正方形漸近於零.誠然設 δ 是 C 上一點至 K_1 的閉線 L 上一點的最小距離,若取 $\rho<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$, 所有混合方形就都在 K_1 內,這是因爲牠們每一個都和 C 有一個公共點的緣故.所以這些混合方形的面積的和小於 4ε, ε 既是一個任意正數,結果,這個面積和 ρ 同時漸近於零.同樣可見在 ρ 減小無限時內部方形的面積的和漸近於領域 D 的面積.誠然,這個和小於 $\mathcal{A}$,然內部方形及混合方形的面積的和大於 $\mathcal{A}$,又因混合方形的面積小於 4ε, 由此決定領域 D 的面積 $\mathcal{A}$ 及內部方形的面積的和的差小於 4ε.

注意II.——特別取一個領域爲一個閉線

$$ACC'DD'BB_0A_0A$$

所限,如圖 1 (n^09).曲線 $ACC'DD'B$ 上一點的縱坐標是橫坐標的函數 $f(x)$, 這個曲線有些第一類的不連續點.這個領域的面積自然是等於領域 ACC_0A_0, $C'DD_0C_0$, $D'BB_0D_0$ 的面積的和,就是等於積分

$$(11)\qquad \int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

的和.

若是將縱線BB_0代以一個動縱線,有定積分$F(x)=\int_a^x f(x)dx$仍是x的一個連續函數.在一點x,若$f(x)$是連續的,我們仍得$F'(x)=f(x)$.對於一個不連續點,例如$x=c$,我們得

$$F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(x)dx=h(c+\theta h),\quad o<\theta<1;$$

依h是正或負,比$\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h}$的極限是$f(c+o)$或$f(c-o)$.這個例子顯明若$f(x)$是一個能積分的不連續函數,積分$F(x)=\int_a^x f(x)dx$不必以$f(x)$爲導來式.

79. 一個曲線弧的長度.——設

$$(12)\qquad x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t)$$

是在區域(a,b)內t的連續函數$(a<b)$.令t自a變至b,以(x,y,z)爲坐標的點畫出一個曲線弧AB,能够是閉口的或開口的,又能够有任何數的二重點.我們在a及b間取一列的上升的數$(a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b)$,設$P_0,P_1,\cdots,P_{n-1},P_n$是弧上相應的點,$P_0$合於$A$,$P_n$合於$B$.這些點$P_0,P_1,\cdots,P_n$是$AB$弧的內接多角折線的相續頂點.這個折線的長度是$L$.若$n$增加無限,使一切差數$t_i-t_{i-1}$都漸近於零,這個折線的各邊也都漸近於零,若是長度$L$漸近於一個極限$S$,我們就說這個曲線是能直的(rectifiable),極限S表曲線弧AB的長度.

我們將證明在(a,b)區域內函數$f(t),\varphi(t),\psi(t)$若有連續的導來式$f'(t),\varphi'(t),\psi'(t)$,這個曲線就是能直的.〔註八〕

設x_i,y_i,z_i是頂點P_i的坐標,c_i是$P_{i-1}P_i$邊的長度:

$$c_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2+(z_i-z_{i-1})^2},$$

應用有限增長定理在 $x_i-x_{i-1},\cdots$ 上,得

$$c_i=(t_i-t_{i-1})\sqrt{[f'(\xi_i)]^2+[\varphi'(\eta_i)]^2+[\psi'(\zeta_i)]^2},$$

ξ_i,η_i,ζ_i 是在 t_{i-1} 及 t_i 中間的數.區域 (t_{i-1},t_i) 極小時,以上的根號和

$$\sqrt{[f'(t_{i-1})]^2+[\varphi'(t_{i-1})]^2+[\psi'(t_{i-1})]^2}$$

相差極少;欲得這個差數的極限,我們將牠寫為

$$\frac{[f'(\xi_i)-f'(t_{i-1})][f'(\xi_i)+f'(t_{i-1})]+\cdots}{\sqrt{f'^2(\xi_i)+\varphi'^2(\eta_i)+\psi'^2(\zeta_i)}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\varphi'^2(t_{i-1})+\psi'^2(t_{i-1})}}$$

但是

$$|f'(\xi_i)|+|f'(t_{i-1})|\leqq\sqrt{f'^2(\xi_i)+\cdots}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\cdots},$$

所以

$$\left|\frac{f'(\xi_i)+f'(t_{i-1})}{\sqrt{f'^2(\xi_i)+\cdots}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\cdots}}\right|\leqq 1.$$

這三個函數 $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 既是連續的,對於任一正數 ε,我們必有一個正數 η,凡區域的廣度小於 η 時,函數 $f'(t)$ $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 的限差必小於 $\frac{\varepsilon}{3}$.所以我們有

$$c_i=(t_i-t_{i-1})[\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\varphi'^2(t_{i-1})+\psi'^2(t_{i-1})}+\rho_i],$$

ρ_i 均一的和 t_i-t_{i-1} 同時漸近於零.結果,邊線 (pèrimetre) $L=\Sigma c_i$ 有一個極限 ($n^\circ 72$) 是積分

$$(13)\qquad S=\int_a^b\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}\,dt.$$

若是導來式 f', φ', ψ' 對於 AB 弧上有限的點成為不連續,曲線有些尖點 (points anguleux) 時就是如此,在此場合,以上的證明仍然適用.我們只須分 AB 弧為許多部分,對於每一部分,f', φ', ψ' 都是連續的.

自公式 (13) 可見在一個定點 A 及和 t 相應的一個動點 M

間的弧是 t 的函數,牠的導來式是

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}\ ;$$

方程式的兩端自乘,又各乘以 dt^2 得

$$(14)\qquad dS^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

這個公式不論自變數如何都能應用.依幾何的意義是很容易記憶的;牠表明 dS 是一個直方體的對角線,牠的三個稜是 dx, dy, dz.

注意.——一個弧 M_0M_1 牠的兩端和變率 t 的兩個價值 t_0, t_1 相應 $(t_1>o)$,應用平均值的定理在表此弧的有定積分上,得

$$s=\text{弧}\,M_0M_1=(t_1-t_0)\sqrt{f'^2(\theta)+\varphi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)},$$

θ 是在區域 (t_0, t_1) 間的數.我們用 c 表弦 M_0M_1,得

$$c^2=[f(t_1)-f(t_0)]^2+[\varphi(t_1)-\varphi(t_0)]^2+[\psi(t_1)-\psi(t_0)]^2;$$

應用有限增長公式在每一個差數 $f(t_1)-f(t_0), \cdots$ 上,得

$$c=(t_1-t_0)\sqrt{f'^2(\xi)+\varphi'^2(\eta)+\psi'^2(\zeta)}\ ,$$

這三個數 ξ, η, ζ 都是在區域 (t_0, t_1) 內.依以前所計算,但只要函數 $f'(t), \varphi'(t), \psi'(t)$ 的限差在 (t_0, t_1) 區域內小於 $\frac{\varepsilon}{3}$,這兩個根號的差就小於 ε.所以

$$s-c<\varepsilon(t_1-t_0),$$

因而

$$1-\frac{c}{s}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{f'^2(\theta)+\varphi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)}}\ .$$

若弧 M_0M_1 成爲無限小,t_1-t_0 就漸近於零;ε 也是如此,$1-\frac{c}{s}$ 亦然.所以一個無限小弧和牠的弦的比的極限等於1.

例.——已知一個平曲線的極坐標方程式 $\rho=f(\omega)$,求弧的長度.我們取 ω 爲自變數,曲線就爲三個方程式所表

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega,\quad z=o,$$

由此得

$$ds^2=dx^2+dy^2=(\cos\omega d\rho-\rho\sin\omega d\omega)^2+(\sin\omega d\rho+\rho\cos\omega d\omega)^2,$$

或

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\omega^2.$$

例如心形線(cardioïde)的方程式是

$$\rho=R+R\cos\omega.$$

由以上的公式得

$$ds^2=R^2d\omega^2[\sin^2\omega+(1+\cos\omega)^2]=4R^2\cos^2\frac{\omega}{2}d\omega^2;$$

我們令 ω 自 o 變至 π,得

$$ds=2R\cos\frac{\omega}{2}d\omega,$$

弧的長度的式子是

$$\left(4R\sin\frac{\omega}{2}\right)_{\omega_0}^{\omega}.$$

曲線的全長是 $8R$.

80. **方向餘弦** (cosinus directeurs).——研究一個曲線的特質,往往取曲線弧為自變數.那麼,在所研究的曲線上定出一個正方向,用 s 表在一個定點 A 及一個動點 M 間的弧 AM,依自 A 向 M 的方向是正是負,s 的符號是十或一.自此曲線上任一點 M,引切線的方向直線,這個方向和弧的漸增方向相合;設 α,β,γ 是這個方向和直交坐標軸 Ox, Oy, Oz 所作的角,我們得

$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{\pm 1}{ds};$$

欲知這個符號,我們假定切線的正方向和 Ox 作一個銳角;x 和 s 同時漸增,所以當取符號 +.若 α 是鈍角,$\cos\alpha$ 是負,s 漸增時 x 漸

減,$\frac{dx}{ds}$是負,所以仍當取符號+,可見在一切場合,都是

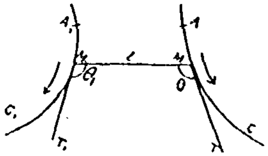
$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \cos\beta=\frac{dy}{ds},\ \cos\gamma=\frac{dz}{ds}, \tag{15}$$

dx, dy, dz, ds是關於自變數的微分,這個自變數是任意的.

81. **一個部分直線的變分.**——設MM_1是一個部分直線,他的兩端畫出兩個曲線C, C_1. 在兩個曲線上,我們各取一點為原點,又各取一個方向為正方向.

設s是弧AM, s_1是弧A_1M_1,這兩個弧都是帶有符號的,l是MM_1的長度,θ是MM_1和切線MT的正向所作的角.θ_1是M_1M和切線M_1T的正向所作的角.我們求θ, θ_1及微分ds, ds_1, dl間的一個關係

圖十一



令M及M_1點的坐標為x, y, z及x_1, y_1, z_1, MT和三軸所作的角為α, β, γ, M_1T_1和三軸所作的角為$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.我們得

$$l^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2;$$

由此得

$$ldl=(x-x_1)(dx-dx_1)+(y-y_1)(dy-dy_1)+(z-z_1)(dz-dz_1),$$

計算着公式(15)及對於C_1的相類公式,上式可以寫為

$$dl=\left(\frac{x-x_1}{l}\cos\alpha+\frac{y-y_1}{l}\cos\beta+\frac{z-z_1}{l}\cos\gamma\right)ds$$

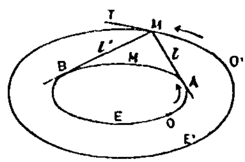
$$+\left(\frac{x_1-x}{l}\cos\alpha_1+\frac{y_1-y}{l}\cos\beta_1+\frac{z_1-z}{l}\cos\gamma_1\right)ds_1.$$

然而 $\frac{x-x_1}{l}$, $\frac{y-y_1}{l}$, $\frac{z-z_1}{l}$ 是 M_1M 的方向餘弦,所以 ds 的係數是 $-\cos\theta$. 同樣, ds_1 的係數是 $-\cos\theta_1$, 因得關係式

(16) $$dl=-ds\cos\theta-ds_1\cos\theta_1$$

82. 格拉夫(Graves)及沙耳(Chasles)的定理.——設 E, E' 是兩個同焦點的橢圓(圖十二); 自外橢圓 E' 一點 M 上引內橢圓 E 的兩個切線 MA, MB; 在 M 點畫出橢圓 E' 時差數 $MA+MB-ANB$ 弧爲常數.

圖十二



命弧 OA 及 OB 爲 s 及 s', AM 及 BM 的長度爲 l 及 l', MB 和切線 MT 的正向所作的角爲 θ; 依焦點特性, MA 和 MT 所作的角等於 $\pi-\theta$. 再注意 AM 和在 A 點的切線的正向相合, BM 和在 B 的切線的正向相反,由公式(16),得

$$dl=-ds+d\sigma\cos\theta,$$

$$dl'=ds'-d\sigma\cos\theta,$$

相加,得

$$d(l+l')=d(s-s')=dMNB弧,$$

即此可證明宣告的命題.

這些定理是英國幾何學者格拉夫所創.同一方法可證沙耳所創以下的定理:設有一個橢圓及一個同焦點的雙曲線相交於N,自雙曲線過N點的一枝上取一點M,引橢圓的兩個切線MA,MB,弧$NA-NB$的差必等於切線$MA-MB$的差.

III.——變數更換法.——部分積分法.

許多不能直接求得的有定積分可由兩個普通方法計算.試依次說明.

83. **變數更換法.**——一個有定積分$\int_a^b f(x)dx$,若是將變數x代以一個新自變數t,$x=\varphi(t)$,就成為一個新有定積分.我們假定函數$\varphi(t)$在α及β間是連續的,又假定t自α變至β時,$\varphi(t)$常向一個方向變化.

將區域(α,β)用些居間數α, t_1, t_2, $\cdots$, t_{n-1}, β分為更小區域,設a, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1} b是$x=\varphi(t)$的相應價值.依有限增長定理得

$$x_i-x_{i-1}=(t_i-t_{i-1})\varphi'(\theta_i),$$

θ_i是在t_{i-1}及t_i中間的數.設$\xi_i=\varphi(\theta_i)$是x的相應價值,此價值在x_{i-1}及x_i中間.和數

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})$$

的極限是我們所設的有定積分.然而這個和數又可寫為

$$f[\varphi(\theta_1)]\varphi'(\theta_1)(t_1-\alpha)+\cdots+f[\varphi(\theta_i)]\varphi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1})+\cdots,$$

在這個形狀,可見牠的極限是一個新有定積分$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

因得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \tag{17}$$

這是<u>變數更換的公式</u>.

由此可見在$f(x)dx$中將x及dx代以$\varphi(t)$及$\varphi'(t)dt$即得積分號下的新微分式,至於新極限就是t和舊極限的相應價值.若是選擇一個適當的函數$\varphi(t)$,這個新積分或者比第一個容易計算;然而關於此並沒有一個定規.

例.——設a及b是兩個正數;我們有

$$\int_1^{ab}\frac{dx}{x}=\int_1^a\frac{dx}{x}+\int_a^{ab}\frac{dx}{x},$$

在最後積分中令$x=ay$,

$$\int_a^{ab}\frac{dx}{x}=\int_1^b\frac{dy}{y}=\int_1^b\frac{dx}{x},$$

因得等式

$$\int_1^{ab}\frac{dx}{x}=\int_1^a\frac{dx}{x}+\int_1^b\frac{dx}{x}.$$

我們復得對數的基本性質(n^o52).

成立公式(17)時我們所作的一切假定並不是必不可缺的.譬如t自α變至β時,函數$\varphi(t)$並不必須向一個方向變化.為確定人的觀念,假定t自α增至γ時$(\gamma<\beta)$,$\varphi(t)$自a漸增至c $(c<b)$,既而t自γ增至β時,$\varphi(t)$自c漸減至b.若是函數$f(x)$在區域(a,c)中是連續的,我們可將公式應用在每一個區域(a,c),(c,b),這就成為

$$\int_a^c f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

$$\int_c^b f(x)dx=\int_\gamma^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

相加得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

和此相反，x 在 a 及 b 間的一個價值至少須有 t 在 α 及 β 間的一個價值相應.這是極爲緊要.若是不注意這個條件,就難免不合理的結果.例如令 $x=t^{\frac{3}{2}}$，將公式(17)應用在積分 $\int_{-1}^{+1} dx$ 上,就可寫爲

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_1^1 \frac{3}{2}\sqrt{t}\ \ dt,$$

第二積分成爲零,這個結果是不合理的.

若要妥協的應用這個公式,必須將區域 $(-1,+1)$ 分爲兩個區域 $(-1,0)$, $(0,1)$. 在第一區域令 $x=-\sqrt{t^3}$, 然後令 t 由 1 變至 o; 在第二區域令 $x=\sqrt{t^3}$, 然後令 t 由 o 變至 $+1$. 如此,即得正確的結果

$$\int_{-1}^{+1} dx = 3\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \left(2t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1 = 2.$$

注意.——若在公式(17)中將極限 b 及 β 代以變化極限 x 及 t, 就成爲

$$\int_a^x f(x)dx = \int_\alpha^t f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

這表明一個函數 $F(x)$ 牠的導來式是 $f(x)$, 若是令 $x=\varphi(t)$, 此函數就變爲 $\Phi(t)$, 牠的導來式是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. 這也就是自函數的函數的導來式的公式中直接所得的結果.所以我們可以寫爲一般形狀

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

這是對於無定積分的變數更換的公式.

84. **部分積分法** (intégration par parties).——設 u 及 v 是在 a 及 b 間的兩個連續函數,牠們的導來式 u' 及 v' 也是連續的.我們有

$$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx},$$

積分此等式的兩端,

$$\int_a^b\frac{d(uv)}{dx}dx=\int_a^b u\frac{dv}{dx}dx+\int_a^b v\frac{du}{dx}dx,$$

此式又可寫為

$$(18)\qquad \int_a^b udv=\left[uv\right]_a^b-\int_a^b vdu,$$

一般,$\left[F(x)\right]_a^b$ 表差數 $F(b)-F(a)$.若將極限 b 代以一個變化極限 (limite variable) x,將 a 仍看作固定的,那麼,這就等於所設的是無定積分而不是有定積分,我們同樣的得

$$(19)\qquad \int udv=uv-\int vdu.$$

如此,即將積分 $\int udv$ 的計算法變為積分 $\int vdu$ 的計算法,此後者或者較為容易.例如求計算有定積分 $\int_a^b x^m\log x\,(m+1\neq o)$;我們令 $u=\log x$, $v=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$,由公式(18),得

$$\int_a^b\log x\cdot x^m dx=\left[\frac{x^{m+1}\log x}{m+1}\right]_a^b-\frac{1}{m+1}\int_a^b x^m dx$$

$$=\left[\frac{x^{m+1}\log x}{m+1}-\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\right]_a^b.$$

若是 $m+1=o$,此公式就不能適用在此場合,我們有

$$\int_a^b \log x \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_a^b.$$

公式(18)能够推廣.用$u', u'', \cdots, u^{(n+1)}, v', v'', \cdots, v^{(n+1)}$表$u$及$v$的累次導來式.應用公式(18)在積分$\int u dv^{(n)}$, $\int u' dv^{(n-1)}$,上,即得以下的等式:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \int_a^b u dv^{(n)} = \left[uv^{(n)}\right]_a^b - \int_a^b u'v^{(n)}dx,$$

$$\int_a^b u'v^{(n)}dx = \int_a^b u' dv^{(n-1)} = \left[u'v^{(n-1)}\right]_a^b - \int_a^b u''v^{(n-2)}\, dx,$$

……………………………………………………………

$$\int_a^b u^{(n)}v'dx = \int_a^b u^{(n)}dv = \left[u^{(n)}v\right]_a^b - \int_a^b u^{(n+1)}v dx.$$

將這些等式輪流乘以$+1$及-1,再相加,得

$$(20)\quad \int_a^b uv^{(n+1)}dx = \left[uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v\right]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v dx,$$

這個公式將積分$\int uv^{(n+1)}dx$的計算法變爲積分$\int u^{(n+1)}vdx$的計算法.

若是積分號下是兩個因子的積,一個是一個多項式u,次數至多是n,牠一個是一個已知函數v的第$(n+1)$級的導來式,以上的公式尤爲適用.誠然,在此場合,$u^{(n+1)}=o$,公式第二端不含有積分號.例如求計算有定積分

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x) dx,$$

$f(x)$是一個n次的多項式;命$u=f(x)$, $v=\dfrac{e^{\omega x}}{\omega^{n+1}}$,由公式(20),得

$$(21)\qquad \int_a^b e^{\omega x} f(x)dx = \left\{e^{\omega x}\left[\frac{f(x)}{\omega} - \frac{f'(x)}{\omega^2} + \cdots + (-1)^n\frac{f^{(n)}(x)}{\omega^{n+1}}\right]\right\}_a^b$$

同法,能計算有定積分

$$\int_a^b \cos mx f(x)dx,\ \int_a^b \sin mx f(x)dx,$$

$f(x)$ 是一個多項式.

85. **戴勞公式.**——在公式(20)中用$(b-x)^n$代u,用一個函數$F(x)$代v,$F(x)$及牠的導來式以至於$(n+1)$級在a及b間都是連續的,此式成爲

$$\int_a^b (b-x)^n F^{(n+1)}(x)dx$$

$$=\Big[(b-x)^n F^{(n)}(x) + n(b-x)^{n-1}F^{(n-1)}(x) + \cdots$$

$$+ n!(b-x)F'(x) + n!\,F(x)\Big]_a^b.$$

由此得

$$F(b) = F(a) + \frac{b-a}{1}F'(a) + \cdots$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx;$$

假定x自a變至b時,因子$(b-x)^n$保有一個固定符號,我們可以應用平均值公式在第二端的積分上,得

$$\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx = F^{(n+1)}(\xi)\int_a^b (b-x)^n dx$$

$$= \frac{1}{n+1}(b-a)^{n+1}F^{(n+1)}(\xi),$$

ξ是在a及b中間,將這個價值代入以上的等式中,我們適得戴勞公式,連帶着拉格郎熱的餘數.

86. 來讓得(Legendre)的多項式.——我們試求定一個n級的多項式$P_n(x)$,使積分

$$\int_a^b QP_n dx$$

恆等於零,Q是一個任何的多項式次數小於n. P_n可以看作一個$2n$次多項式R的第n級的導來式,但是這個多項式R非完全確定,這是因爲若在R上加一個任何$n-1$次多項式,牠的n級的導來式不變的緣故,所以我們總可假定$P_n=\frac{d^nR}{dx^n}$,多項式R和牠在前的$n-1$個導來式都在$x=a$成爲零.牠一方面,部分積分法公式給我們

$$(22)\quad \int_a^b Q\frac{d^nR}{dx^n}dx=\left(Q\frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}}-Q'\frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}}+\cdots\pm R\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right)_a^b;$$

旣是由假定

$$R(a)=o,\ R'(a)=o,\cdots,\ R^{(n-1)}(a)=o,$$

若要積分爲零,又必須要

$$Q(b)R^{(n-1)}(b)-Q'(b)R^{(n-2)}(b)+\cdots\pm Q^{(n-1)}(b)R(b)=o,$$

$n-1$次多項式Q旣是任何的,數量$Q(b),Q'(b),\cdots,Q^{(n-1)}(b)$的自身也是任何的,所以必須

$$R(b)=o,\ R'(b)=o,\cdots,\ R^{(n-1)}(b)=o.$$

所以除一個常數係數外,多項式$R(x)$等於積數$(x-a)^n(x-b)^n$,因而所求的多項式P_n也是除一個常數係數外完全確定,

$$(23)\qquad P_n=c\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n].$$

若是極限a及b是-1及$+1$,多項式P_n就是列讓得多項

式.依列讓得選擇常數 c 的方法,我們令

(24) $$X_n=\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

若再適宜的令 $X_0=1$,得

$$X_0=1,\ X_1=x,\ X_2=\frac{3x^2-1}{2},\ X_3=\frac{5x^3-3x}{2}$$

X_n 是一個 n 次的多項式,其中 x 的羃指數都和 n 的奇偶性相同.依來伯尼關於兩因數的積的第 n 級導來式公式,可見

(25) $$X_n(1)=1,\ X_n(-1)=(-1)^n.$$

依我們方纔所成立的一般性質,設 $\wp(x)$ 是一個任何多項式次數小於 n,我們有

(26) $$\int_{-1}^{+1}X_n\wp(x)\,dx=o;$$

特殊的若 m 及 n 是兩個各別的整數,總得着

(27) $$\int_{-1}^{+1}X_mX_n\,d\ \ =o.$$

此公式能在三個連續多項式 X_n 間作出一個簡單的循環公式.我們先注意一個 n 次的多項式能彀由 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ 的直線函數所表明,係數是常數,所以我們可寫爲

$$xX_n=C_0X_{n+1}+C_1X_n+C_2X_{n-1}+C_3X_{n-2}+\cdots,$$

$C_0,C_1,C_2,\cdots$,都是常數係數.譬如要定 C_3,用 X_{n-2} 乘此等式的兩邊,再在極限 -1 及 $+1$ 間積分,依公式(26)及(27),

$$C_3\int_{-1}^{+1}X_{n-2}^2\,dx=o,$$

因而 $C_3=o$,同樣可證 $C_4=o,\ C_5=o,\cdots$, C_1 也等於零,這是因爲 xX_n 不含有 x^n 項的緣故.要決定 C_0 及 C_2,我們只須令 x^{n+1} 的係數相等,再令等式的兩邊在 $x=1$ 時相等.如此,即得循環關係

式

(28) $$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=o,$$

由此式能逐漸算出 X_n.

關係式(28)顯明多項式所成的敍列

(29) $$X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n$$

具有司土面母(Sturm)敍列的性質;x 由 -1 連續的變至 $+1$ 時,此敍列所現變分的數只在 x 經過 $X_n=o$ 的一個根時方生變化.但是公式(25)表明對於 $x=-1$,敍列(29)現出 n 個變分,對於 $x=o$,沒有變分;所以 $X_n=o$ 有 n 個實根在 -1 及 $+1$ 中間.此一層也很容易由洛兒定理求出.

IV.——積分觀念的各種擴張.

曲面積分(intégrales curvilignes).

我們仍將有定積分的定義更加推廣.直到現在,我們都是假定函數是有限制的,積分區域(intervalle d' intégration)也是有限制的.然在某某場合能將這些假定免除.

87. **極限中有一個成爲無限.**——設 $f(x)$ 是在 (a,l) 區域內一個限制的且能積分的函數,a 是一個定數,l 是大於 a 的一個任何數,積分 $\int_a^l f(x)dx$ 有一個確定價值,l 如何大俱不論;若是 l 增加無限時,這個積分漸近於一個極限,我們將此極限表以 $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

若是已知 $f(x)$ 的一個原函數,就很容易看出此積分是否有一個極限,例如

$$\int_0^l \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctang} l$$

在 l 增加無限時,第二端的極限是 $\frac{\pi}{2}$,我們可以寫爲

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

同樣,設 a 是一個正數,$\mu-1$ 不等於零,

$$\int_a^l \frac{kdx}{x^\mu} = \frac{k}{1-\mu}\left(\frac{1}{l^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right);$$

若 μ 大於 1,在 l 增加無限時,此式的第二端就漸近於一個極限,我們可寫爲

$$\int_a^\infty \frac{kdx}{x^\mu} = \frac{k}{(\mu-1)a^{\mu-1}}.$$

反之,若 μ 小於 1,此積分就和 l 同時增加無限.μ 等於 1 時也是如此,因爲在此場合,此積分是爲一個對數表明的.

在一般場合,欲知一個函數

$$F(l) = \int_a^l f(x)dx$$

在 l 增加無限時是否有一個極限,依以前所得的結果($n^\circ 9$),若要 $F(l)$,有一個極限,必須要然只須要二數 p 及 q 獨立的增加無限時差數

$$F(p) - F(q) = \int_p^q f(x)dx$$

漸近於零.

這個條件內不含有 a,這是因爲我們能夠取任何大於 a 的數爲積分的下限的緣故.這個條件是很容易用方纔所舉的例驗明的,在此例中 $f(x) = kx^{-\mu}$.

若 q 大於 p,我們有

$$\left|\int_p^q f(x)dx\right| \leqq \int_p^q |f(x)|dx,$$

結果,若是積分$\int_a^l |f(x)|dx$有一個極限,積分$\int_a^l f(x)dx$也就有一個極限,然而這個逆定理是不確實的.

我們注意以上的定規和級數的收斂性的普通定規相同 ($n^\circ 5$).然在普通場合,若函數$f(x)$是任何形狀,這個普通定規極不易應用.我們試將幾個常遇的特別場合一一考慮,在這些場合,積分是否有一個極限是可以辨認的.

假定函數$f(x)$的形狀是$x^{-\alpha}\psi(x)$,在x增加無限時$\psi(x)$是有限制的.依第一平均值定理,得等式

$$\int_p^q x^{-\alpha}\psi(x)dx = \mu\int_p^q x^{-\alpha}dx, \tag{30}$$

μ是在M及m中間,M及m是$\psi(x)$對x大於一個定數A而小於p及q時的上限及下限.

由此公式,在以下的兩個場合可以得一個確絕的判定:

第一,若α大於1,積分$\int_a^l f(x)dx$就有一個極限,這是因為μ是有限數,至於因數$\int_p^q x^{-\alpha}dx$在p及q增加無限時又漸近於零的緣故.

第二,若$\alpha \leqq 1$,又若M及m同符號,積分就沒有極限.

誠然,μ的絕對值既在同符號的二數M及m中間,牠自然大於$|m|$,小於$|M|$.至於因數$\int_p^q x^{-\alpha}dx$,若是令$q=p^2$,牠就和p同時增加無限.

若是$\alpha \leqq 1$,又若M及m異符號,積分是否有一極限卽屬不定,這是因為積數(30)的第二因子不漸近於零,而對於第一因子

μ又不能判定的緣故.

例如積分$\int_0^l \frac{\cos ax}{1+x^2}dx$有一個極限,這是因爲積數$x^2f(x)$的絕對值常小於1的緣故.然直到現在我們對於積分$\int_0^l \frac{\sin x}{x}dx$仍不能加一點斷語.誠然,在此場合$\alpha=1, M=1, m=-1$.

我們若能求得一個正數α,在x增加無限時,積數$x^\alpha f(x)$漸近於一個不等於零的極限,以上的定規就能决定積分是否有一個極限.誠然,在此場合,二數M及m都和此積數的極限同符號.所以若α大於1,積分就有一個極限,若α小於或等於1,積分就沒有極限.

例如要一個有理分數的積分在積分的上限增加無限時有一個極限,必須要且只須要分母的次數超過分子的次數兩個單位再取

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

P及R是兩個多項式,次數各爲p及r;積數$x^{\frac{r}{2}-p}f(x)$在x無限時有一個極限不等於零.欲此積分有一個極限,必須要然只須要$p<\frac{r}{2}-1$.

88. **第二平均值公式的應用.**——以上的推理能夠推廣.若是函數$f(x)$的形狀是$f(x)=\varphi(x)\psi(x)$,函數$\psi(x)$是正,函數$\varphi(x)$在x增加無限時是有限制的,由第一平均值公式,得

$$\int_p^q f(x)dx=\mu\int_p^q \psi(x)dx,$$

μ在p及q增加無限時是一個有限制的數.若是$\int_a^l \psi(x)dx$漸近

於一個極限,積分$\int_p^q \psi(x)dx$就漸近於零,積分$\int_p^q f(x)dx$就也是如此,所以積分$\int_a^l f(x)dx$也有一個極限.

同樣,由第二平均值定理,能得收斂性的一個新條件.

若函數$f(x)$的形狀是$\varphi(x)\psi(x)$,$\varphi(x)$是一個下降的正函數,我們得($n^0 74$)

$$\int_p^q \varphi(x)\psi(x)dx=\varphi(p)\int_p^\xi \psi(x)dx,\ (p<\xi<q), \tag{31}$$

由此得以下的命題:

一個積分$\int_a^l \varphi(x)\psi(x)dx$, $\varphi(x)$是一個下降函數,牠在x增加無限時漸近於零,若是不論p及q如何,積分$\int_p^q \psi(x)dx$的絕對值都常小於一個定數,所設積分就有一個極限.

我們命$\psi(x)=\sin x$,即得一個簡單的例子,在此場合$\int_p^q \sin x dx$的絕對值至多等於2.設$\varphi(x)$是一個下降的正函數,牠在x增加無限時漸近於零,我們很容易直接證明積分$\int_a^l \varphi(x)\sin x dx$有一個極限,牠的收斂性和一個更迭級數(serie alternée)的收斂性相同.

為確定人的觀念,我們假定$a=o$,對於$x=o$時,積數$\varphi(x)\sin x$是有限制的.曲線$y=\varphi(x)\sin x$的形狀和一個正弦曲線(sinusoïde)相似,牠在$x=k\pi$諸點通過Ox軸.如此,我們只須研究此更迭級數

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots, \tag{32}$$

其中

$$a_n=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \varphi(x)\sin x dx\right|;$$

a_n 表一個面積,此面積爲曲線及 Ox 軸在 $x=n\pi$, $x=(n+1)\pi$ 中間的部分所限.令 $x=y+n\pi$,得

$$a_n=\int_0^{\pi}\varphi(y+n\pi)\sin\ y dy.$$

因 $\varphi(x)$ 是下降函數,可見 n 漸增時,積分號下的函數漸減,所以 $a_{n+1}<a_n$.從一方面,a_n 小於 $\pi\varphi(n\pi)$,所以 n 增加無限時 a_n 漸近於零.因而更迭級數(32)是收斂的.設 l 是在 $n\pi$ 及 $(n+1)\pi$ 中間的一個數;我們有

$$\int_0^{l}\varphi(x)\sin x dx=S_n\pm\theta a_n,\ (o\leqq\theta<1),$$

S_n 是級數(32)的 n 個初項的和.在 l 增加無限時,整數 n 也是如此,a_n 漸近於零,積分的極限是級數(32)的和 S.

在折光論 (théorie de diffration) 中有兩個積分 $\int_0^{\infty}\sin x^2 dx$, $\int_0^{\infty}\cos x^2 dx$, 用同一的方法能證明牠們有一個有限價值.曲線 $y=\sin x^2$ 的波折狀和一個正弦曲線相似,然而線波 (ondulation) 逐漸加狹,這是因爲 n 增加無限時,$\sin x^2$ 的相續的二根的差 $\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$ 漸近於零的緣故.若是令 $x^2=y$, 我們也可以將此二積分變爲以上的形狀.

> 注意.—— 這個最後的例子給我們一個極有興趣的注意;在 x 增加無限時,$\sin x^2$ 在 -1 及 $+1$ 中間擺動;所以積分能有一個極限而積分號下的函數並不必漸近於零,換言之,就是曲線 $y=f(x)$ 不必依 x 軸爲漸近線.現在又有一例也是如此,但其中函數 $f(x)$ 又常保有一定的符號.設

$$f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2x};$$

若x是正,這個函數就也是正,牠不漸近於零,這是因爲$f(k\pi)=k\pi$的緣故.要顯明積分有一個極限,和上相同,取級數

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots,$$

其中

$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{xdx}{1+x^6\sin^2x};$$

x自$n\pi$變至$(n+1)\pi$時x^6大於$n^6\pi^6$,

$$a_n<(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+n^6\pi^6\sin^2x};$$

一個原函數是

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}\ \mathrm{Arctang}(\sqrt{1+n^6\pi^6}\ \mathrm{tang}x);$$

x自$n\pi$變至$(n+1)\pi$, $\mathrm{tang}x$有一次成爲無限自$+\infty$變爲$-\infty$;所以積分等於$\frac{\pi}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}$(第76節).我們有

$$a_n<\frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}<\frac{n+1}{n^3\pi}.$$

級數Σa_n既是收斂級數,積分$\int_0^l f(x)dx$有一個極限.

這也是顯明的,若在x無限時, $f(x)$有一個極限不等於零,積分就不能有極限.誠然, $\int_p^q f(x)dx=\mu(q-p)$;若$f(x)$有一個極限$h\gtrless o$, μ有同一的極限h,積數$\mu(q-p)$不能漸近於零.

89. **應行積分的函數成爲無限.**——先設以下的特別場合.函數$f(x)$在區域$(a+\varepsilon,b)$內是有限制且能積分的,$(a<b,\varepsilon$是小於$b-a$的一個任何正數.)然而牠在$x=a$時成爲無限. $f(x)$

在極限 $a+\varepsilon$ 及 b 內的積分有一個有限價值，ε 如何小俱不論．若 ε 漸近於零時，此積分漸近於一個極限，我們適宜的用

$$\int_a^b f(x)dx$$

表此極限．

若是已知 $f(x)$ 的一個原函數，譬如是 $F(x)$，我們有

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = F(b) - F(a+\varepsilon),$$

我們只須研究 ε 漸近於零時，$F(a+\varepsilon)$ 是否有一個極限．例如

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{Mdx}{(x-a)^\mu} = -\frac{M}{\mu-1}\left[\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}\right], (\mu \neq 1)$$

若 $\mu>1$，在 ε 漸近於零時，$\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}$ 增加無限；反之，若 μ 小於 1，我們可寫爲 $\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}} = \varepsilon^{1-\mu}$，可見此項和 ε 同時漸近於零．所以此有定積分漸近於一個極限

$$\int_a^b \frac{Mdx}{(x-a)^\mu} = \frac{M(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu};$$

若 $\mu=1$，我們有

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{Mdx}{x-a} = M\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right),$$

ε 漸近於零時，此式的第二端增加無限．約而言之，若要所設積分有一個極限，必須要且只須要 μ 小於 1．

曲線

$$y = \frac{M}{(x-a)^\mu}$$

在 $\mu>o$ 時有一個漸近線(asymptote) $x=a$．然依以上所見，若 $\mu<1$，ox 軸，直線 $x=b$，曲線及牠近線間所限面積就有一個有限價值．

在普通場合，這個問題在於辨認 ε 由正值漸近於零時，函數

$$F(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

是否漸近於一個極限.爲此,必須要且只須要($n^{\circ}9$)正數 ε 及 ε' 獨立的漸近於零時,差數

$$F(\varepsilon)-F(\varepsilon')=\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon'} f(x)dx$$

漸近於零.

由此得些結果和在 $n^{\circ}87$ 相同;我們畧述如下.若函數 $f(x)$ 的形狀是

$$f(x)=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha}},$$

α 是一個正指數,$\psi(x)$ 是一個函數,牠在 a 點附近介在兩個定數 M 及 m 中間,我們有

$$\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon'} f(x)dx=\mu\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon'}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}},$$

μ 是在 M 及 m 中間的一個數.此層既經說明:

1° 若 α 小於1,積分就有一個極限;

2° 若 α 大於或等於1,又若 M 及 m 符號相同,積分就沒有極限.

若 $\alpha\geqq 1$,M 及 m 符號相反,就是不定的場合.

總而言之,若是有一個數 α,在 x 漸近於 a 時,積數 $(x-a)^{\alpha}f(x)$ 漸近一個極限 K 不等於零,欲積分有一個極限,必須要然只須要 α 小於1.

例.——設 $f(x)=\dfrac{P}{Q}$ 是一個有理函數;若 a 是分母的一個 m 級的複根,在 $x=a$ 時積數 $(x-a)^{m}f(x)$ 漸近於一個不等於零的極限.因爲 m 至少等於1,可見積分 $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 在 ε 漸近於零時增

加無限.反之,設

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

P 及 R 是兩個多項式,$R(x)$和牠的導來式是互素數;設 a 是 $R(x)$ 的一個根,對於 $x=a$, 積數 $(x-a)^{\frac{1}{2}}f(x)$ 有一個極限;所以積分有一個極限.例如

$$\int_{-1+\varepsilon}^{o}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

對於 $\varepsilon=o$, 牠的極限是 $\frac{\pi}{2}$.

再取一個積分 $\int_{\varepsilon}^{1}\log x dx$; 積數 $x^{\frac{1}{2}}\log x$ 的極限是零;在 x 的價值極小時,可寫爲 $|\log x|<Mx^{-\frac{1}{2}}$, M 是任意選擇的一個正數.所以積分有一個極限.

我們對於下限 a 所論的都可以移到上限 b 上,無須改變.若函數 $f(x)$ 在 $x=b$ 時成爲無限,我們將積分 $\int_{a}^{b}f(x)dx$ 看作積分 $\int_{a}^{b-\varepsilon'}f(x)dx$ 在 ε' 漸近於零時的極限.若 $f(x)$ 在上下限都成爲無限,我們將積分 $\int_{a}^{b}f(x)dx$ 看作積分 $\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'}f(x)dx$ 在 ε 及 ε' 獨立的各漸近於零時的極限.設 c 是在 a 及 b 間的一個數;我們可寫爲

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'}f(x)dx=\int_{a+\varepsilon}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b-\varepsilon'}f(x)dx,$$

第二端的每一個積分當有一個極限.最後,若 $f(x)$ 對於 a,b 中間的一個數 c 成爲無限,我們將積分 $\int_{a}^{b}f(x)dx$ 看作兩個積分 $\int_{a}^{c-\varepsilon'}f(x)dx$ 及 $\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ 的極限;無論 $f(x)$ 在 a,b 間有若干不連續點,我們都用這個方法研究牠的積分.

我們注意基本公式(8)的成立,是假定$f(x)$在a,b間是連續的,若是$f(x)$在此極限內成爲無限,但原函數$F(x)$仍是連續的,這個公式仍能應用.爲確定人的觀念,假定$f(x)$只對於a,b間一個價值c成爲無限.我們有

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon'=0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx+\lim_{\varepsilon=0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

設$F(x)$是$f(x)$的一個原函數,我們可寫爲

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon'=0} F(c-\varepsilon')-F(a)+F(b)-\lim_{\varepsilon=0} F(c+\varepsilon).$$

函數$F(x)$對於$x=c$既假定是連續的,$F(c+\varepsilon)$及$F(c-\varepsilon')$有一個公共極限$F(c)$,所以只餘

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

例如

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)_{-1}^{+1}=6.$$

若原函數$F(x)$在a及b間成爲無限,公式就不能應用,這是因爲第一端的積分,直至現在是沒有意義的.

變數更換公式及部分積分法公式同樣的推廣在此等新積分上,將此等積分看作尋常積分的極限.

90. 函數$\Gamma(a)$.——有定積分

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \tag{33}$$

有一個確定的價值,但須要a是正.

誠然,我們取兩個積分

$$\int_\varepsilon^1 x^{a-1}e^{-x}dx,\int_1^l x^{a-1}e^{-x}dx,$$

其中 ε 是一個極小正數，l 是一個極大正數.第二積分總有一個極限，這是因爲 x 自一個有充分大的價值以後，我們有 $x^{a-1}e^{-x}<\frac{1}{x^2}$，此式是由於 $e^x>x^{a+1}$.至於第一積分.在 x 漸近於零時，積數 $x^{1-a}f(x)$ 漸近於極限1;若要積分有一個極限，必須要也只須要 $1-a$ 小於1，或是說 a 是正.假定這個條件已經滿足:此兩個極限的和叫作函數 $\Gamma(a)$，他叫作第二類的尤列積分 (intégrale eulerienne).在 a 漸近於零時，這個函數 $\Gamma(a)$ 成爲無限;對於 a 的一切正數，牠都有一個正值並且和 a 同時增加無限.對於 $x=1,4616321\cdots$，牠成爲最小，和此相應的價值是 $o,8556032\cdots$,

假定 $a>1$，用部分積分法在公式 (33) 上;將 $e^{-x}dx$ 看作 $-e^{-x}$ 的微分，得

$$\Gamma(a)=-\left[x^{a-1}e^{-x}\right]_0^\infty+(a-1)\int_0^\infty x^{a-2}e^{-x}dx;$$

但是在兩個極限上，積數 $x^{a-1}e^{-x}$ 成爲零，這是因爲 $a>1$ 的緣故，只餘

(34) $$\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1).$$

連次應用此公式即將 $\Gamma(a)$ 的運算變成關係量(argument) a 在 o 及 1 中間的場合.若 a 是整數，很容易求出 $\Gamma(a)$ 的價值.我們先有

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=-\left[e^{-x}\right]_0^\infty=1;$$

逐漸令 $a=2,3,\cdots,n$，由以上的公式得

$$\Gamma(2)=\Gamma(1),\ \Gamma(3)=2\Gamma(2)=1,2$$

一般若n是一個正整數，

$$\Gamma(n)=123\cdots(n-1). \tag{35}$$

91. 曲線積分 (intégrales curvilignes). ——積分的觀念又有一種擴充法至關緊要.我們取一個曲線 c，牠爲兩個方程式 $x=f(t)$，$y=\varphi(t)$ 所表;令 t 自 a 變至 b，卽得此曲線的一個弧 AB.我們假定 $a<b$，在 a 及 b 間取一列的上升數 $(a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b)$，在每一部分區域 (t_{i-1},t_i) 中，任意取一個價值 $\theta_i(t_{i-1}\leqq\theta_i\leqq t_i)$.設 (x_i,y_i) 是曲線 c 上和 t_i 相應的點的坐標，(ξ_i,η_i) 是和 θ_i 相應點的坐標.設 $P(x,y)$ 是二變數 x 及 y 的一個函數,牠在 AB 弧上是連續的;我們取和數

$$P(\xi_1,\eta_1)(x_1-x_0)+P(\xi_2,\eta_2)(x_2-x_1)+\cdots+P(\xi_i,\eta_i)(x_i-x_{i-1})+\cdots, \tag{36}$$

此和數是擴充在所有部分區域內的.在 n 增加無限,牠增加的方法總使差數 t_i-t_{i-1} 漸近於零,以上的和數就漸近於一個極限,此極限叫作函數 $P(x,y)$ 取在 AB 弧上的曲線積分,牠的記法是

$$\int_{AB}P(x,y)dx,$$

牠讀作:積分在 AB 上 $P(x,y)dx$.

欲証明這個極限的存在,我們假定能够將區域 (a,b) 分爲有限數的部分區域,在每一部分區域中函數 $x=f(t)$ 都是常上升的,或是常下降的,或是成爲常數.我們先假定 t 自 a 增至 b 時,x 是常上升的,牠由 x_0 變至 X.

曲線弧 AB 和 Oy 的一個平行直線只能相遇於一點,牠能爲一個方程式 $y=\psi(x)$ 所表,函數 $\psi(x)$ 在 x_0,X 間是連續的.

在 $P(x,y)$ 中,用 $\psi(x)$ 代 y,所得結果是一個連續函數 $\Phi(x)=P[x,\psi(x)]$,我們有

$$P(\xi_i,\eta_i)=P[\xi_i,\psi(\xi_i)]=\Phi(\xi_i).$$

和數(36)可以寫爲

$$\Phi(\xi_1)(x_1-x_0)+\Phi(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+\Phi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+\cdots;$$

牠的極限是一個通常的有定積分

$$\int_{x_0}^{X}\Phi(x)dx=\int_{x_0}^{X}P[x,\psi(x)]dx,$$

因得等式

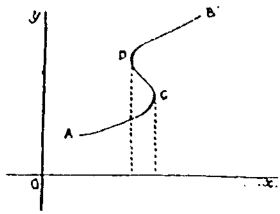
$$\int_{AB}P(x,y)dx=\int_{x_0}^{X}P[x,\psi(x)]dx.$$

我們再設一個曲線如 $ACDB$ (圖13),其上有兩點 C 及 D,牠們的橫坐標是最大或最小.這每一個弧 AC, CD, DB 都能滿足以上的條件,我們寫爲

$$\int_{ACDB}P(x,y)dx=\int_{AC}P(x,y)\,dx+\int_{CD}P(x,y)\,dx+\int_{DB}P(x,y)dx;$$

最要注意欲計算第二端的三個積分,必須在 $P(x,y)$ 中將 y 用變數 x 的三個各異的函數替代.

圖十三



若是在一個部分區域 (c,d) 內,函數 $f(t)$ 保有一個固定的價值,曲線 c 上的一部分就成爲 oy 的平行線,依曲線積分的定義,

在此部分的曲線積分 $\int P(x,y)dx$ 成爲零.

同一方法,可定曲線積分 $\int_{AB} Q(x,y)dy$;我們可見這些積分都立即變爲一個通常的有定積分,然而因爲牠的效用,所以有加入這些積分的必要.仍當注意,弧 AB 若是由許多各別的曲線線分所成,譬如是直線,圓周弧等等,必須分別計算由每一個線分所得的曲線積分.

在應用上最習見的一個場合是函數 $f(t)$, $\varphi(t)$ 在 (a,b) 區域內有一個連續導來式.在此場合,我們有

$$x_i - x_{i-1} = f'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

θ_i 是在 t_{i-1} 及 t_i 中間;若是取和此價值 θ_i 相應的點爲 (ξ_i, η_i) 點,即得

$$\sum P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum P[f(\theta_i), \varphi(\theta_i)]\varphi'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

進至極限,

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_a^b P[f(t), \varphi(t)]f'(t)dt.$$

同一方法,對於 $\int Qdy$ 也得着相同的公式;將此二公式相加,成爲

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b [Pf'(t) + Q\varphi'(t)]dt; \tag{37}$$

這是對於曲線積分變數更換的公式.若是曲線弧 AB 由許多各別曲線的線分所成,沿 AB 弧,函數 $f(t)$, $\varphi(t)$ 自然不能有相同的式子,我們當將公式分別應用在每一個線分上.〔註九〕

92. **曲線積分關於一個閉曲線的面積的應用.**—

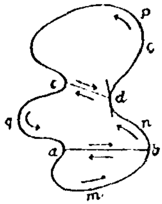
試舉一例以見曲線積分的効用.我們仍取定閉曲線 $Am_1Bm_2A'A$ (圖 10)所限面積的公式.這兩個積分 $\int_a^b \psi_2(x)dx$, $\int_a^b \psi_1(x)dx$ 各等於曲線積分 $\int_{A'm_2B} ydx$, $\int_{Am_1B} ydx$; 虵一方面,積分 $\int_{AA'} ydx$, 等於零,若將進行的方向改變,即改變曲線積分的符號.設想有一個觀察者立在此平面上,沿閉線 C 進行,見閉線 C 所限面積在他的左邊(坐標軸的位置仍和尋常相同,如圖 10) 〔註十〕我們適宜的說閉線 C 是依正方向畫的,所得結果可宣告如下:閉閉線所限面積 Ω 的價值是

$$(38) \qquad \Omega = -\int_{(c)} ydx,$$

此曲線積分是由正向沿閉線 C 上取的.將坐標軸的原點移動時,此積分不變,所以無論閉線 C 對於坐標軸的位置如何,此公式是永存的.

現在我們取一個任何形狀的閉線 C 假定連合 C 的兩點作些橫斷線 (transversales), 能得些部分閉線,這每一個部分閉線和 Oy 的一個平行線只能相遇於一點.圖十四中閉線 C 所限的區域就是這個場合,在此圖中是將區域用橫斷線 ab, cd 分爲三個區域,各爲閉線 $amba$, $abndeqa$, $adpc$ 所限,在虵們每一個中我們可以應用以上的公式,將所得的結果相加,由輔助線 ab, cd 所得的曲線積分各自相消,閉線 C 所限的面積仍等於由正向沿 C 上所取的積分 $-\int ydx$.

圖十四



同法證明

(39) $$\Omega=\int_{(c)} x\,dy,$$

合此兩個公式,得

(40) $$\Omega=\frac{1}{2}\int_{(c)} x\,dy-y\,dx,$$

這些積分都是由正方向取的.

例如一個橢圓爲公式

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

所表牠的面積的式子是

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_{o}^{2\pi} ab(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\pi ab.$$

由公式 $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$ 自直交坐標改爲極坐標時,即得關係式 $x\,dy-y\,dx=\rho^2 d\omega$, 所以曲線積分(40)和沿曲線 C 所取積分 $\frac{1}{2}\int\rho^2 d\omega$ 相同(n^o78).

注意.——凡依正方向取在一個閉圍線 C 的曲線積分 $\int Pdx+Qdy$ 都可以加入圍線的弧寫爲稍異的形狀.設 α 及 β 是切線的正方向和 ox 及 oy 所作的角(由 o 數至 π) α' 及 β' 是內法線和 ox 及 oy 所作的角.假定由 C 上一點 M 引兩個半直

線 Mx', My' 各平行於 ox 及 oy; 一個旋轉將 Mx' 合於切線的正向上,必將 My' 合於內法線上,所以 $\beta'=\alpha$, $\cos\beta'=\cos\alpha$. 依垂直的關係式

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'=o$$

得

$$\cos\beta=-\cos\alpha',$$

因而

$$dx=\cos\alpha ds=\cos\beta' ds,\quad dy=\cos\beta ds=-\cos\alpha' ds$$

所以曲線積分 $\int_C Pdx+Qdy$ 成爲

$$\int_C(P\cos\beta'-Q\cos\alpha')ds,$$

原素 ds 顯然是正.若閉線 C 現出些尖點,可將牠分爲許多弧,使在每一個弧上, α' 及 β' 都是 s 的連續函數,再作在每一個弧上所取積分的和.

例如一個領域 D 的面積爲以下兩個積分中任一個所表明

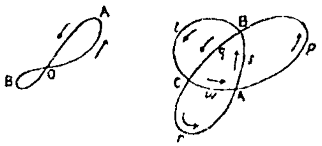
$$-\int_C x\cos\alpha' ds,\qquad -\int_C y\cos\beta' ds,$$

這個結果不關係坐標軸的位置.

93. 積分 $\frac{1}{2}\int xdy-ydx$ 的價值.——一個積分 $\frac{1}{2}\int xdy-ydx$ 取在一個閉口或開口的任何曲線上,自然要考慮牠所表究爲何物.作爲例子,我們取兩個閉曲線 $OAOBO$, $ApBqCrAsBtCuA$ (圖十五) 各有一個及三個二重點.這是很明瞭的兩個中每一個都可以看作兩個沒二重點的閉曲線的連合而成.即如圖線

$OAOBO$ 和兩個圈線 OAO, OBO 的連合同價,在全圈線上所取

圖十五



的積分等於環 (boucle) OAO 的面積減去環 OBO 的面積.同樣,第二圈線可以代以兩個閉圈線 $ApBqCrA$ 及 $AsBtCuA$,所以積分等於環 $ApBsA$, $BtCqB$, $ArCuA$ 的面積的和,增加環 $AsBqCuA$ 的面積的二倍,這個推理是一般的.一個閉圈線任有若干個二重點都定出若干個部分領域,面積是 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_p$,這些部分領域都為總圈線所限,且不為所通過,取在總圈線上的積分是一個和數形狀是.

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \cdots + m_p\sigma_p$$

$m_1, m_2, \cdots, m_p$ 是正或負的整數,由以下的定規所定:設有兩個相隣面積 σ_1, σ_2,為圈線 C 的一個弧 ab 所隔,假想有一個觀察者立在此平面上,依矢的方向在圈線上進行;在左的面積的係數比在右的面的係數高一個單位.我們令圈線外的面積的係數為零,再依次定出其他面積的係數.

若一個曲線弧 AB 不是閉口的,我們可以自原點連兩極端 A, B,變成一個閉曲線,再應用以上的定規在此圈線上;這是因為在帶徑 OA 及 OB 上所取的積分 $\int xdy - ydx$ 顯然為零的緣故.

V.——符號$\int$下的微分法及積分法.

94. **符號$\int$下的微分法.**——我們所研究的有定積分,往往所應行積分的函數不但關係積分變數(variable d' intégration),並且關係一個或多個看作變率(paramètre)的變數.設$f(x,\alpha)$是兩個變數x及α的函數,在x自x_0變至X,α自α_0變至α_1時,此函數是連續的.設有一個有定積分

$$F(\alpha)=\int_{x_0}^{X}f(x,\alpha)dx$$

其中α是假定有一個確定價值在α_0及α_1中間,極限x_0及X是假定不關係α,此有定積分是變數α的函數,我們試考慮牠的性質.

我們可以寫為

$$(41)\qquad F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_{x_0}^{X}[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx;$$

函數$f(x,\alpha)$既是連續的,我們能取$\Delta\alpha$有充分的小,使無論x如何,積分號下的差數的絕對值必小於一個預定的任何數ε.所以增長$\Delta F(\alpha)$的絕對值必小於$\varepsilon|X-x_0|$;這是表明$F(\alpha)$的連續性.

若是函數$f(x,\alpha)$有關於變數α的導來式,我們有

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha[f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon],$$

ε和$\Delta\alpha$同時為零.所以用$\Delta\alpha$除等式(41)的兩端,我們可寫為

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X}f'_\alpha(x,\alpha)+\int_{x_0}^{X}\varepsilon dx;$$

用η表ε的絕對值的一個上限,此最後的積分的絕對值就小於$\eta|X-x_0|$,進至極限得

$$(42)\qquad \frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X}f'_\alpha(x,\alpha)dx.$$

欲這個判定絕對精確,必須要能夠取$\Delta\alpha$有充分的小,使對於x在極限x_0及X內的一切價值,ε的絕對值必小於一個預定

的任何正數 η. 若是導來式 $f'_\alpha(x,\alpha)$ 是連續的,以上的條件就必能滿足.誠然,由有限增長定理得

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha),\quad o<\theta<1,$$

結果

$$\varepsilon=f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)-f'_\alpha(x,\alpha).$$

若函數 f'_α 是連續的,只須令 $|\Delta\alpha|$ 小於一個有充分小的正數 h (n^012), ε 的絕對值就不論 x 及 α 如何都能小於 η.

現在我們假定極限 X 及 x_0 都是 α 的函數,用 ΔX 及 Δx_0 表 X 及 x_0 和增長 $\Delta\alpha$ 相應的增長

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_{x_0}^{X}[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx$$
$$+\int_{X}^{X+\Delta X}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx,$$

用 $\Delta\alpha$ 除,又應用平均值定理在最後兩個積分上,得

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx$$
$$+\frac{\Delta X}{\Delta\alpha}f(X+\theta\Delta X,\alpha+\Delta\alpha)-\frac{\Delta x_0}{\Delta\alpha}f(x_0+\theta'\Delta x_0,\alpha+\Delta\alpha).$$

在 $\Delta\alpha$ 漸近於零時,第一個積分有一個極限如前所證,所以進至極限,得

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X}f'_\alpha(x,\alpha)dx+\frac{dX}{d\alpha}f(X,\alpha)-\frac{dx_0}{d\alpha}f(x_0,\alpha)\tag{43}$$

這是符號 $\int$ 下的微分法的普通公式.

凡曲線積分既是都能變為通常有定積分的和,所以此公式立可推廣在這些積分上,例如

$$F(\alpha)=\int_{AB}P(x,y,\alpha)dx+Q(x,y,\alpha)dy,$$

這個曲線積分是沿AB弧取的,這個弧不關係α;我們有

$$F'(\alpha)=\int_{AB}P'_\alpha(x,y,\alpha)dx+Q'_\alpha(x,y,\alpha)dy,$$

此積分仍是沿此曲線取的.

95. **符號$\int$的積分法.**——設$f(x,y)$是二變數x,y的函數,牠在條件$(a\leqq x\leqq b,\ c\leqq y\leqq d)$所定領域$D$內是連續的,$a,\ b,\ c,\ d$都是常數.算式

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

的意義是極明瞭的;x在a及b間既有一個確定的價值,積分$\int_c^d f(x,y)dy$是x的連續函數,此函數又當在極限a及b間積分.在此式中,<u>我們能變換積分的次序,並不改變所得結果</u>,換言之就是我們有等式

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx, \tag{44}$$

這是<u>符號$\int$下的積分法的公式</u>.

要證明此公式,先留a,c,d爲常數,將b代以a及b間一個變數t;此式成爲

$$\int_a^t dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dx. \tag{45}$$

此式的兩端都是t的函數,又都在$t=a$時成爲零;我們只須顯明牠們的導來式恆等,但是我們若命

$$\int_c^d f(x,y)dy=F(x),\ \int_a^t f(x,y)dx=\Phi(t,y),$$

關係式(45)可寫爲

$$\int_a^t F(x)dx=\int_c^d \Phi(t,y)dy, \tag{45$'$}$$

我們立可驗明此兩個關係 t 的導來式 $F'(t)$ 及 $\int_c^d \frac{\partial\Phi}{\partial t}dy$ 都等於 $\int_c^d f(t,y)dy$.

以上的證明是假定積分號下的函數是連續的,並且積分的極限是有限的.若是這些條件不能滿足,所得判定能發迥然不同,因而公式(43)及(44)的應用能得虛妄或不合理的結果.

例如

$$F(\alpha)=\int_0^1\frac{\alpha dx}{\alpha^2+x^2}=\left[Arctang\frac{x}{\alpha}\right]_0^1=Arctang\frac{1}{\alpha};$$

這個函數對於 $\alpha=o$ 時是不連續,我們有

$$F(+o)=\frac{\pi}{2},F(-o)=-\frac{\pi}{2};$$

此處,符號 $\int$ 下的函數在 $x=\alpha=o$ 是不連續再取積分

$$F(\alpha)=\int_o^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx;$$

令 $\alpha x=y$, 得

$$\int_o^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\pm\int_o^{\infty}\frac{\sin y dy}{y}$$

第二積分前的符號是 α 的符號,這是因為依 α 是正或負,此新積分的極限是 o 及 $+\infty$, 或 o 及 $-\infty$ 的緣故.在第88節已見 $\int_o^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy$ 是一個正數量 N.所以所設積分依 α 的符號等於 $\pm N$.應用公式(43)在此積分上,即得等式

$$F'(\alpha)=\int_o^{+\infty}\cos x dx,$$

第二邊是毫無意義的.

再取函數 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,應用公式(44),兩個積分的極限是 o 及 1;得等式

$$(46)\qquad \int_o^1 dx\int_o^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=\int_o^1 dy\int_o^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx,$$

由一個積分法得

$$\int_o^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)_o^1=\frac{1}{1+x^2}.$$

等式的第一邊的價値是 $\dfrac{\pi}{4}$; 依相反的次第積分,同樣得第二邊的價値 $-\dfrac{\pi}{4}$. 這個不合理的結果是因爲函數 $f(x,y)$ 對於 $x=y=o$ 點是不連續,此點正在所取的領域的界線上.(參閱以後 n^o130)

96. **均一收斂的積分** (intégrales uniformément convergentes). ——我們能應用公式 (43) 及 (44) 在許多場合,這些場合比證明這些公式時所定的場合較爲普通.設 $f(x,\alpha)$ 是二變數 x 及 α 的函數,在 x 大於一個數 a, α 在 α_0 及 α_1 中間時,此函數是連續的.若不論 α 如何,積分 $\displaystyle\int_a^l f(x,\alpha)dx$ 在 l 増加無限時漸近於一個極限,此極限

$$(47)\qquad F(\alpha)=\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$$

是 α 的一個函數,牠不定是連續的,已如上例所見.

若是對於任一正數 ε, 我們能夠求得另一數 L, 凡 $l\geqq L$ 時,我們必能有

$$(48)\qquad \left|\int_l^\infty f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon,$$

這個數 L 對於 α 在區域 (α_0,α_1) 內的一切價值都是相同的,如此,我們說積分(47)是均一收斂的.所以設 n 是一個正整數,函數

$$\Phi_n(\alpha)=\int_a^{a+n} f(x,\alpha)dx$$

在 n 增加無限時,均一的漸近於牠的極限 $F(\alpha)$,因而 $F(\alpha)$ 是 α 的一個連續函數.

現在假定由通常的符號 $\int$ 下的微分法所得積分

$$F_1(\alpha)=\int_a^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx \tag{49}$$

是有意義的,又在區域 (α_0,α_1) 內是均一收斂的.函數

$$\Psi_n(\alpha)=\int_a^{a+n}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx$$

均一的漸近於牠的極限 $F_1(\alpha)$;但是若 $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ 是連續的,不論 n 如何我們必有

$$\Psi_n(\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big[\Phi(\alpha,n)\Big].$$

結果,$F_1(\alpha)$ 是 $F(\alpha)$ 的導來式($n^\circ 29$).

所以我們能夠應用符號 $\int$ 下的微分法的普通公式在積分(47)上,但必須要由此方法所得積分是均一收斂的.

同樣,在 $f(x,\alpha)$ 對於積分極限 $x=a$ 成爲無限時,我們說積分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx \quad (a<b) \tag{50}$$

是均一收斂的,若是對於任一正數 ε,能够求得不關於 α 的又一正數 η,對於 h 的正數值小於 η 時,必能得

$$\left|\int_a^{a+h} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

我們仍能够應用符號$\int$下的微分法的公式在此積分(50)上,但必須要如此所得的積分是均一收斂的這個證明法和上相同.

同樣,符號$\int$下的積分法的公式能應用在一個極限成爲無限的場合.設$f(x,\alpha)$是二變數x及α的函數,在$x \geqq a$, $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$時是連續的.

若積分$\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$在區域$(\alpha_0,\alpha_1)$內是均一收斂的,我們有

$$\int_a^\infty dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^\infty f(x,\alpha)dx. \tag{51}$$

設l是大於a的任一正數,依公式(44),得

$$\int_a^l dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^l f(x,\alpha)dx. \tag{52}$$

在l增加無限時,此等式第二端的極限是

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^\infty f(x,\alpha)dx,$$

這是因爲此二式的差等於

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_l^\infty f(x,\alpha)dx,$$

在l大於L時,此差的絕對值小於$\varepsilon|\alpha_1-\alpha_0|$.所以方程式(52)的第一端也漸近於一個極限此極限是用記號

$$\int_a^\infty dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha$$

表的.

令這兩個極限相等,即得公式(51).

例.——第一,取積分 $F(\alpha)=\int_{o}^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$, 其中 $\alpha\geqq o$. 這個積分是均一收斂的,這是因爲依第二平均值公式,可以寫爲

$$\int_{l}^{q}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{e^{-\alpha l}}{l}\int_{l}^{\xi}\sin x dx,$$

其中 $l<\xi<q$, 因得

$$\left|\int_{l}^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|<\frac{2}{l};$$

若 $l>\frac{2}{\varepsilon}$, 只要 $\alpha\geqq o$, 此不等式的第一邊就不論 α 如何,都小於 ε. 所以 $F(\alpha)$ 對於 $\alpha\geqq o$ 時是連續的.

對於 α 大於一個正數 K 的一切價值,由微分法所得積分是均一收斂的誠然,

$$\left|\int_{l}^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x dx\right|<\int_{l}^{+\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha l},$$

在 α 大於 k 時,若要此積分的絕對值小於 ε, 只須取 l 有充分的大,使 $ke^{k\alpha}>\frac{1}{\varepsilon}$. 所以

$$F'(\alpha)=-\int_{o}^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x dx;$$

無定積分很容易求出,因得

$$F'(\alpha)=\left[\frac{e^{-\alpha x}(\cos x+\alpha\sin x)}{1+\alpha^2}\right]_{o}^{+\infty}=\frac{-1}{1+\alpha^2};$$

由此取得

$$F(\alpha)=C-\mathrm{Arctang}\,\alpha,$$

要決定常數 C, 可注意在 α 增加無限時有定積分 $F(\alpha)$ 漸近於零,如此即得 $C=\frac{\pi}{2}$. 所以最後得

$$(53)\qquad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx = Arc\tan g\frac{1}{\alpha}.$$

這個公式的成立是假定α是正,然而我們可注意$F(\alpha)$是連續函數,對於$\alpha=o$時也是如此.令α漸近於零,在極限上,

$$(54)\qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

第二,設

$$F(\alpha)=\int_o^{\alpha}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

函數$f(x)$及導來式$f'(x)$在區域(o,a)內是連續的,α也是在此區域內.微分法的普通公式引至一個虛妄的結果,因爲由此公式得到兩個無限的差.令$x=\alpha t$,

$$F(\alpha)=\int_o^1\frac{\sqrt{\alpha}\,f(\alpha t)dt}{\sqrt{1-t}};$$

由微分法所得積分

$$\int_o^1\frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}f(\alpha t)+t\sqrt{\alpha}f'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt$$

在任一區域(α_0,α_1)內是均一收斂的,α_0,α_1都是正且小於a,這是因爲這個積分可以和積分$\int_o^1\frac{M\,dt}{\sqrt{1-t}}$相比的緣故,$M$是一個定數.再回復到變數$x$上,得

$$F'(\alpha)=\int_o^{\alpha}\frac{f(x)+2xf'(x)}{2\alpha\sqrt{\alpha-x}}dx.$$

作爲應用,我們求決定函數$f(x)$使函數$F(\alpha)$不關係α.$F'(\alpha)$當成爲零,若要如此必須要函數$f(x)+2xf'(x)$恆等於零,若承認這個式子在原點附近沒有無量數的零點,這個條件可寫爲

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{2x}=o,$$

由此取得$f(x)=\frac{C}{\sqrt{x}}$。這個函數實在和所設問題相應，誠然，我們有

$$\int_0^a \frac{Cdx}{\sqrt{x(a-x)}}=C\pi;$$

用變數更換法令$x=a\sin^2\varphi$這是很容易看出的。

習　題

1. 証明在n增加無限時和數$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$的極限是$\log 2$。[証明此和數的極限是有定積分$\int_0^1\frac{dx}{1+x}$。]

2. 同樣將和數

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

附在有定積分上以求有極限。一般，在n無窮大時，若$\varphi(i,n)$是關於i及n的同質函數，次數是-1，則和數$\sum_{i=0}^{n}\varphi(i,n)$的極限等於一個有定積分。

3. 証明有定積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$。

[自三角公式$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$起，或依據以下的無待証明的公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx.]$$

4. 自上題演出有定積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\log x\,dx$的價值。

5. 証明$\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\log 2$。

〔命 $x=\operatorname{tang}\varphi$ 並分此積分爲三部分〕

6.* 求有定積分 $\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$.〔Poisson〕

分區域自 0 到 π 爲 n 等分,應用一個三角公式,即變爲求算式 $\frac{\pi}{n}\log\left[\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n}-1)\right]$ 在 n 無窮大時的極限;若 α 在 -1 及 $+1$ 之間此極限爲零;若 $\alpha^2>1$, 此極限爲 $\pi\log\alpha^2$

7. 設 α 是一個正數,有定積分

$$\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$$

在 $\alpha<1$ 時等於2, 在 α 大於1時等於 $\frac{2}{\alpha}$

8. 函數 $F(\alpha)=\int_0^1 \frac{\alpha x\,dx}{(x^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$, $F_1(x)=\int_{-1}^1 \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ 在 $\alpha=0$ 都是不連續.

9. 設 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 是在區域 (a,b) 內的兩個能積分函數,証明 Schwarz 的不等式

$$\left(\int_a^b f\varphi\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \times \int_a^b \varphi^2(x)\,dx,$$

其等號只在比 $\frac{f}{\varphi}$ 是常數時始能實現.

注意,積分 $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta\varphi(x)]^2dx$ 是關於 α 及 β 的一個正的有定二次同質式.

10. 設 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 是在區域 (a,b) 內的兩個連續函數, $(a, x_1, x_2, \cdots, b)$ 是此區域的一個分法,若在每一部分區域 (x_{i-1}, x_i) 內取兩個任何價值 ξ_i, η_i, 和數

$$\Sigma f(\xi_i)\varphi(\eta_i)\ (x_i-x_{i-1})$$

的極限是有定積分

$$\int_a^b f(x)\wp(x)dx$$

11. 設 $f(x)$ 是在區域 (a,b) 內的連續正函數,兩個有定積分 $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ 的積在 $f(x)$ 是常數時爲最小.

12. 設 $\mathrm{I}_{x_0}^{x_1}$ 是一個函數在 x_0 及 x_1 間的指標 (n^o76).我們有關係式

$$\mathrm{I}_{x_0}^{x_1} f(x) + \mathrm{I}_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

在 $f(x_0)>o$, $f(x_1)<o$ 時, $\varepsilon=+1$; 在 $f(x_0)<o$, $f(x_1)>o$ 時, $\varepsilon=-1$; 在 $f(x_0)$ 及 $f(x_1)$ 符號相同時, $\varepsilon=o$.

應用76節公式在函數 $f(x)$ 及 $\frac{1}{f(x)}$ 上.

13.* 設 U 及 V 是兩個互素多項式,次數是 n 及 $n-1$.設變數的極限爲 $-\infty$ 及 $+\infty$,有理分數 $\frac{V}{U}$ 的指標等於方程式 $U+iV=o$ 的 i 的係數是正的虛根及 i 的係數是負的虛根之差.

〔Hermite. Bulletin de la Société mathématique t. VII, p. 128.〕

14.* 用部分積分法証第二平均值公式.

設 $f(x)$ 及 $\wp(x)$ 是在區域 (a,b) 內的兩個連續函數,其第一個是常上升的或常下降的,又有一個連續導來式.命

$$\Phi(x)=\int_a^x \wp(x)dx,$$

並用部分積分法,則有

$$\int_a^b f(x)\wp(x)dx = f(b)\Phi(b) - \int_a^b f'(x)\Phi(x)dx;$$

導來式 $f'(x)$ 既有固定符號,只須應用第一平均值公式在新積分上.

15.* 設$f(x)$是在區域(a,b)內一個連續正函數,在n無限時,算式

$$I_n=\left\{\int_a^b [f(x)]^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}$$

漸近於$f(x)$在區域(a,b)內的最大限M.

解.証明此問題,可令$b-a=1$.這是很明瞭的$I_n<M$.牠一方面,若$f(x)$在區域(α,β)內大於$M-\varepsilon$,則$I_n>(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}$,如此若取$n$有充分的大,甚易決定$I_n>M-2\varepsilon$.

16. 設有兩個任何平曲線C,C',令兩曲線上的切線平行的點(x,y),(x',y')相應.設p及q是兩個已知常數,坐標是$x_1=px+qx'$, $y_1=py+qy'$的點畫出一個新曲線C_1;在於三個曲線的相應弧間有關係式

$$s_1=\pm ps\pm qs'.$$

17. 兩個曲線

$$C\begin{cases}x=tf''(t)-f'(t)+\varphi'(t),\\ y=f''(t)-t\varphi''(t)+\varphi(t),\end{cases}\qquad C'\begin{cases}x'=tf''(t)-f'(t)-\varphi'(t),\\ y'=f''(t)+t\varphi''(t)-\varphi(t)\end{cases}$$

的相應弧有相同的長度,函數$f(t)$及$\varphi(t)$如何不論.

18. 設C是一個合口曲線,C_1是牠關於一點A的極線(podaire),C_2是由A點向C的法線所引垂直線的足的軌迹.這三個曲線的面積間有關係式$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2$.

依極線的特性($n^0$58),若ρ及ω是C_1上一點的極坐標,則C_2的相應點的坐標是ρ'及$\omega+\frac{\pi}{2}$,C的相應點的坐標是

$r=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$及$\varphi=\omega+\text{arctang}\ \frac{\rho'}{\rho}$

19.* 一個線曲C在一個直線上為不滑的旋動,凡固定在

曲線C上一點A所畫曲線都稱爲輪線(roulette): 1°在輪線及底間的面積等於A點關於曲線C的極線的面積的二倍; 2°輪線的弧等於此極線的相應弧.〔Steiner〕

欲由解析法証明此定理,設X,Y是A點關於一系的動的坐標,此動軸是C上M點的切線及法線,s是由C上一點O起的弧OM,ω是C在O及M點的切線所作的角.先成立關係式

$$ds+dX=Yd\omega,\quad dY+Xd\omega=o,$$

由此演出以上的命題.

20. 積分$\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{x^n}dx$, $(n>1)$, $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$是否有確定的價值.

〔註一〕在 Traité de Duhamel, 有用舊法以計算面積,長度及體積的例子.

〔註二〕關於有定積分的重要著作,茲舉出

Mémoire de Riemann, Sur la possibilitè de representer une fonction par une série trigonométrique (*OE uvres* de Riemann, traduites par Langel, p.225); Mèmoire de Darboux Sur les fonctions discontinues (Annales de l' Ecole Normale supérieure, 2ᵉ série, *t*. IV) 我們所取有定積分的定義是 Riemann 所定. Lebesgue 曾提出一個更爲普通的定義 (Lecon sur l' intègration et la recherche des fonctions primitives; Gauthier-Villars, 1904). Denjoy 又給一個尤爲普通的定義.

〔註三〕這個結果可以不用運算得來.爲確定人的觀念,假定在區域(a,b)內$f(x)>o$. 設一個領域D爲以下的點的集合所

成:橫坐標x在a及b中間縱坐標y在x軸及$f(x)$中間,凡和數S都表一個包有領域D在內的一個多角領域P的面積,至於一個和數s'都表一個爲領域D所包的一個多角領域p'的面積,所以領域P包有領域p',因而$S>s'$

〔註四〕這個條件可不用達而布的定理得來.這個條件是必要的,因爲若是S及s有相同的極限,差數$S-s$必漸近於零.

這個條件是充足的,誠然,我們可寫爲

$$S-s=S-I+(I-I')+I'-s;$$

$S-I, I-I', I'-s$中沒有一個能是負的,欲令其和漸近於零,必須要每一個都漸近於零或等於零.特別的差數$I-I'$是一個定數,當等於零.其牠二數$S-I, I'-s$當漸近於零,所以S及s的極限都是I.

Stieltjes有一個積分的推廣式,在曲線積分與我們有用.(Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1re série, *t.* VIII, 1894, *p.* 1–122)設$f(x)$是在區域(a,b)內的一個連續函數,$\varphi(x)$是同區域的一個升函數,在和數S及s算式中將x_i-x_{i-1}代以$\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})$;由正文中的推理可見和數

$$S_\varphi=\Sigma M_i[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})],\quad s_\varphi=m_i[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]$$

各有一個下限I及一個上限I',並可見$I'\leqq I$.牠一方面

$$S_\varphi-s_\varphi<\omega[\varphi(b)-\varphi(a)],$$

ω是$f(x)$在每一部分區域內的限差的一個上限,因而決定和數$S_\varphi-s_\varphi$有一個相同極限表以記號$\int_a^b f(x)d[\varphi(x)]$.這是很明瞭的,在$\varphi(x)$是兩個升函數之差時,就是說是一個限制變分

的函數時,S_D及s_D仍有一個相同的極限.

〔註五〕在函數$f(x)$是連續時,求$f(x)$的一個原函數或計算有定積分$\int_a^x f(x)dx$只是一個問題.對於一個任何函數則不然.我們所能確定的是若一個能積分函數$f(x)$是一個函數$F(x)$的導來式,原函數$F(x)$除相差一個常數外等於有定積分$\int_a^x f(x)dx$此結果由關係式

$$F(b)-F(a)=(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\cdots+(b-x_{n-1})f(\xi_n)$$

直接得來,此關係式是有限增長公式的一個結果.但是一個能積分函數$f(x)$可以不是牠一函數的導來式,一個導來函數也可以不是能積分的(參觀以上所舉Lebesgue的著作.)

〔註六〕可參觀la note D des Lecons de Géométrie elementaire de Hadamard.

〔註七〕平面領域的面積的這個定義取自Baire的Lecons sur les théories générales de l' Analyse (*t*. *I*, *p*. 148);此定義可應用在方法更爲普通所定的領域上.

〔註八〕這是充足的條件,並非必要的.若Jordan曾定出必要且充足的條件:若要一個曲線C是能直的,必須要也只須要表曲線C的內接多角折線的邊長的數所成的集合是限制的.

這個條件是必要的.誠然,假在n無限而多角折線的邊的最大限λ漸近於零時,L漸近於一個極限S.C的內接多角折線不能有一個邊長L'大於S.誠然,如果有一個是如此的,那麼,將部分區域分爲更小的部分區域,這些新折線的邊長將更大於L',結果,不能漸近於S.

這個條件是充足的.其証法和以前兩次所用相同(n^{os}11及70).設 S 是這些數 L 的上限; ε 是預定的一個正數,有一個叙列的上升數存在

$$(a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_p=b),$$

和此相應的內接多角折線的邊長 Λ 大於 $S-\frac{\varepsilon}{2}$.再取一個任何叙列的上升數

$$(a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b)$$

所有區域 t_i-t_{i-1} 都小於一個正數 η, 此 η 小於差數 a_1-a_0, $a_2-a_1,\cdots,b-a_{p-1}$ 中的最小者;設 L 是和此相應的內接折線的邊長.我們將証明若 η 有充分的小, $S-L$ 就小於 ε.

爲此,設想將 t_i 及 a_k 依上升的次序排列,設 L' 是由此新分法所得輔助折線的長度. L' 大於或至少等於 L 及 Λ, 結果大於 $S-\frac{\varepsilon}{2}$.

自長度爲 L 的折線變爲長度爲 L' 的折線是將和含有一點 a_k 的區域 (t_{i-1},t_i) 相應的邊 c_i 代以和 t_{i-1}, a_k, t_i 相應點所成三角形的她二邊.這些邊的數至多爲 $p-1$.假定取 η 有充分的小,使不等式 $|t'-t''|<\eta$, 連帶得不等式

$$\sqrt{[f(t')-f(t'')]^2+[\varphi(t')-\varphi(t'')]^2+[\psi(t')-\psi(t'')]^2}<\frac{\varepsilon}{4(p-1)};$$

f,φ,ψ 既都是連續函數,這是必可能的;我們有 $L'-L<\frac{\varepsilon}{2}$; 因 $L'>S-\frac{\varepsilon}{2}$, L 故 $>S-\varepsilon$.所以 L 的極限是 S.

這個 L 至小等於三數

$$\Sigma|x_i-x_{i-1}|,\ \Sigma|y_i-y_{i-1}|,\ \Sigma|z_i-z_{i-1}|$$

中的一個.所以若要 L 是限制的,必須要這三個函數 $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$

是限制變分的,這些條件是充足的,因為他一方面

$$L \leqq \Sigma|x_i - x_{i-1}| + \Sigma|y_i - y_{i-1}| + \Sigma|z_i - z_{i-1}|.$$

總之,若要一個曲線是能直的,必須要也只須要這三個函數 $f(t), \varphi(t), \psi(t)$ 是限制變分的.

〔註九〕對於和數 (36) 甚易証明在一個較正文中所取的更為普通的場合亦有一個極限存在.誠然,這個和數可寫為

$$\Sigma\Phi(\theta_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})]$$

依71節的附註,可見若函數 $f(t)$ 是上升的,此和數就有一個極限.

這是很明瞭的,若 $f(t)$ 是兩個升函數的差,就是說是一個限制變分的函數,此和數也有一個極限.同樣,曲線積分 $\int_{AB} Q(x,y)dy$ 就有一個確定的價值,如果函數 $y=\varphi(t)$ 是限制變分的.應用這個注意在兩個曲線積分 $\int ydx$, $\int xdy$ 上,因之決定一個合口曲線 $C[x=f(t), y=\varphi(t)]$ 所限領域 D 是能方的,只要有一個直線式 $ax+by$ 是一個限制變分的函數.這是因為我們總能選擇坐標軸使橫坐標是一個限制變分的函數.

〔註十〕一般,不論坐標軸 ox, oy 的位置如何,如果切線的正向旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 來合於曲線 C 的內法線上,和 ox 旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 合於 oy 時所旋的方向相同,我們就說此曲線是依正方向畫出的.

第五章
有定積分的計算法

I.——無定積分(intégrales indéfinies)

在普通場合計算一個有定積分的價値,若由牠的定義起,是很困難的,〔註一〕然若是已知$f(x)$的一個原函數,就不論極限如何,此積分立卽可得.在代數學上,我們已見如何求得一個有理函數的原函數,並如何求得由變數更換法所成有理函數的原函數,例如一個函數關於x及一個二次式的平方根爲有理數,又如關於$\sin x$及$\cos x$的有理函數.這個計算法只須解一個代數式;一個有理函數的積分法只加入一個超越式(transcendante),就是對數,這是因爲函數arctang$x$能變爲對數的緣故.(第二冊)

除此簡單場合以外,一個代函數$f(x)$的有定積分,普通的都是一個超越函數,牠不能爲有限數的普通符號(symboles élèmentaires)所表明.這些超越函數的研究及分類法是積分學最要目的之一.在有定積分的應用觀點上,自然須要化此等新超越函數爲最少數,以便作出牠們的數字價値表.

97. **化法(réduction)的普通公式.**——在有理函數及幾個其牠函數的積分法中,我們常須應用化法的普通方法如下:我們先證明凡一個有理函數$R(x)$,都能分解爲一個整式部分$E(x)$,及些有理分數的和,這些分數的形狀是$\frac{A}{X^n}$,X和牠的導來式及A都是互素式(première),A是一個多項式,次數小於X^n若是已知分母的根,我們可取由一個實根所得的二項一次式爲

X,或取由一雙共軛虛根 (racines imaginaires conjuguées) 所得的三項二次式為X.然而將有理分數$R(x)$分解為些形狀為$\frac{A}{X^n}$的分數,並不須知分母的根,這個分解法能由一列的有理運算 (opérations rationnelles) 得來,就是多項式的乘法及除法.但是這些多項式X的次數能夠是任何的,每一多項式都是些二項因數的積,這些二項因數和$R(x)$分母的次數相同的複根相應.所以若$R(x)$是一個有理函數,$\varphi(x)$是一個任何函數,一個有定積分$\int R(x)\varphi(x)dx$的計算法變為兩個特別形狀的積分

$$\int E(x)\varphi(x)dx, \int\frac{A\varphi(x)}{X^n}dx.$$

若$n>1$,在許多場合,我們可以將第二積分用一個形狀相同的積分替代,此後者分母X的指數減少一個單位.

誠然,X既和牠的導來式是互素式,依代數學上的定理,我們可以求得兩個多項式B及C,滿足恆等式

$$BX+CX'=A,$$

我們可寫為

$$\int\frac{A\varphi(x)dx}{X^n}=\int\frac{BX+CX'}{X^n}\varphi(x)dx=\int\frac{B\varphi(x)}{X^{n-1}}dx+\int\frac{X'C\varphi(x)dx}{X^n}.$$

用部分積分法求此最後積分,令

$$u=C\varphi(x),\ v=-\frac{1}{(n-1)X^{n-1}};$$

得

$$\int C\varphi(x)\frac{X'dx}{X^n}=-\frac{C\varphi(x)}{(n-1)X^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{[C\varphi(x)]'}{X^{n-1}}dx,$$

代入以上的關係式中得

$$(1)\qquad \int\frac{A\varphi(x)}{X^n}dx=\int\frac{B\varphi(x)+\frac{1}{n-1}[C\varphi(x)]'}{X^{n-1}}dx-\frac{C\varphi(x)}{(n-1)X^{n-1}}.$$

對於函數$\varphi(x)$的某某形狀,此公式(1)能夠較為便利.

例如$\varphi(x)=e^{\omega x}$，ω是一個常數係數。一個積分$\int R(x)e^{\omega x}dx$能變爲積分$\int P(x)e^{\omega x}dx$及許多積分

(2) $$\int\frac{Ae^{\omega x}dx}{X^n}$$

的和，$P(x)$是一個多項式(n°84)。在此場合，化法的公式(1)成爲

(3) $$\int\frac{Ae^{\omega x}dx}{X^n}=-\frac{Ce^{\omega x}}{(n-1)X^{n-1}}+\int\frac{e^{\omega x}\left(B+\frac{C'+C\omega}{n-1}\right)dx}{X^{n-1}},$$

積分(2)的計算法變爲一個形狀相同積分的計算法，其中X的指數減少一個單位。繼續如此，終至一個積分

$$\int\frac{Be^{\omega x}dx}{X},$$

增加一個已經積分的部分，其形狀爲

$$\frac{\varphi(x)e^{\omega x}}{X^{n-1}},$$

B的次數總可假定小於X，$\varphi(x)$是一個多項式。

現在取一個任何有理函數$\frac{f(x)}{F(x)}$，其中$f(x)$和$F(x)$是互素式。

假定這個有理函數分解爲一個整式部分E及一列的分數$\frac{A}{X^n}$，X和牠的導來式是互素式；假想應用以上的方法在此每一分數上，將所得結果和積分$\int e^{\omega x}E(x)dx$相加，終得一個恆等式形狀爲

(4) $$\int e^{\omega x}\frac{f(x)}{F(x)}dx=e^{\omega x}\frac{P(x)}{V(x)}+\int e^{\omega x}\frac{Q(x)dx}{U(x)},$$

$V(x)$是$F(x)$及牠的導來式間的最大公約數，$U(x)$是$F(x)$及$V(x)$的商，$P(x)$及$Q(x)$是兩個多項式。若方程式$F(x)=0$是n次，有r個各別的根，U就是一個r次的多項式，牠和牠的導來式是互素式，V的次數就是$n-r$，此二函數可由有理的運算得來。

至於多項式$Q(x)$，我們總可以假定牠的次數至多等於$r-1$．這兩個多項式P及Q也可以由有理運算得來．誠然，令恆等式(4)兩端的導來式相等乘以$UVe^{-\omega x}$以後得

$$(5)\qquad f(x)=\omega PU+P'U-P\frac{V'U}{V}+QV.$$

設p是多項式P的未知次數．依多項式U及V的定義，積數$V'U$能為V所除盡．若$\omega\neq o$，第二端前三項的集合的次數必為$p+r$．至於積數QV，牠的次數至多等於$n-1$．此層已經說明，依$f(x)$的次數m，可以分為兩個場合：

1° 若$m>n-1$，我們必當有$p+r=m$；

2° 若$m\leqq n-1$，我們也當有$p+r\leqq n-1$，結果，$p\leqq n-r-1$．

如此，已知多項式P及Q的次數的最大限，只須令關係式(5)的兩端相等．其未知係數都由些一次方程式所定，這些方程式的數適等於未知數的數．

若$\omega=o$，這個方法仍能適用．為簡單計，假定$m\leqq n-1$，這是必可能的．我們很容易看出若$P(x)$的次數p大於$n-r$，(5)的第二端的次數就必大於$n-1$．若$P(x)$的次數是$n-r$，我們適宜的刪去一個常數，即可將有理分數$\frac{P}{V}$代以一個有理分數$\frac{P_1}{V}$，此後者分子的次數至多等於$n-r-1$，所得判定仍和前相同．在此特別場合$\omega=o$，如此，能由有理運算盡得一個有理函數的無定積分的有理部分．誠然，積分

$$\int\frac{Q(x)dx}{U(x)}$$

其中$Q(x)$的次數小於$U(x)$的次數，U和牠的導來式為互素式，此積分只函有超越項．除卻$Q(x)$和$U(x)$的導來式$U'(x)$相差一個常數係數一個場合外，若不將U分解為更低次的因子，這個計

算法就不能更進行.欲使一個有理函數的積分仍是一個有理函數,必須要然只須要$Q(x)$恆等於零.

若ω不等於零,我們就不能將積分$\int\frac{e^{\omega x}Q(x)dx}{U(x)}$化爲更簡;然而若已知$U$的根,卽能將此積分變爲一個新超越式.爲確定人的觀念,假定這些根都是實根;此積分變爲許多積分,其形狀爲

$$\int\frac{ae^{\omega x}dx}{x-a};$$

命$x=a+\frac{y}{\omega}$, $u=e^y$, 除常數係數不計外,這些積分可變爲以下兩個形狀之一:

$$\int\frac{e^y dy}{y},\quad \int\frac{du}{\log u},$$

此後者叫做積分對數 (logarithme intégral)

98. 有理曲線 (courbes unicursales).——現在我們依普通的方法取代函數的積分.設

(6) $$F(x,y)=o$$

是一個代數曲線的方程式, $R(x,y)$是x及y的一個函數;懸想在$R(x,y)$中用方程式(6)的一個根代y,所得結果是變數x自己的函數;積分

$$\int R(x,y)\,dx$$

是一個附在曲線(6)的阿伯耳積分 (intégrale abélienne). 若此已知曲線及函數$R(x,y)$都是任何的,這些積分就都是超越函數.然而若此曲線是有理的 (unicursale), 就是說此曲線上一點的坐標x及y能夠爲一個變率t的有理函數所表,在此特別場合,附在此曲線的阿伯耳積分就可變爲有理函數的積分.誠然,設

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t)$$

是坐標x及y爲t的函數的式;取t爲新自變數,得

$$\int R(x,y)dx=\int R[f(t),\varphi(t)]f'(t)dt,$$

此應行積分的新函數顯然是有理的.

在解析幾何上人們證明凡一個n次的有理曲線有$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$個二重點(points doubles),並証明一個n次的曲線若有等於此數的二重點就是有理曲線.現在我只說明如何求得這些坐標爲輔助變率(parametre auxiliaire)的函數的式.設有一個n次的曲線C_n,具有

$$\delta=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

個二重點.自此δ個二重點及C_n上的$n-3$個單點(points simples)我們令一束的$n-2$次的曲線通過;這些點定出一束的$n-2$次的曲線,因爲

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-3=\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1,$$

必須$\frac{(n-2)(n+1)}{2}$個點以定一個$n-2$次曲線.設$P(x,y)+tQ(x,y)=o$是此束的曲線的方程式,t表一個任意變率;束中每一曲線都遇曲線C_n於$n(n-2)$點,這些點中有些不關係t的,就是此三個單點及此δ個二重點,每一個二重點都照兩個交點計算.然而

$$n-3+2\delta=n-3+(n-1)(n-2)=n(n-2)-1;$$

所以只餘一個交點是隨着t變化的.此點的坐標由些一次方程式所定,其中的係數都是含t的多項整式;所以這些坐標是t的有理函數.我們也能夠自$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$個二重點及C_n上任意$2n-3$個單點令一束的$n-1$次曲線通過.

若$n=2$,我們有$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=o$;所以凡二次曲線都是有理

的.若 $n=3$, 我們有 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}=1$; 所以三次的有理曲線都是有一個二重點的曲線.若取二重點爲原點,立方曲線 (cubique) 的方程式的形狀就成爲

$$\varphi_3(x,y)+\varphi_2(x,y)=o,$$

φ_2 及 φ_3 都是同質多項式 (polynome homogene) 牠們的次數爲下標所指明.一個割線 (sécante) $y=tx$ 經過二重點,只和立方曲線遇於一點,此點隨 t 變化,牠的坐標是

$$x=-\frac{\varphi_2(1,t)}{\varphi_3(1,t)},\quad y=-\frac{t\varphi_2(1,t)}{\varphi_3(1,t)}.$$

一個第四次的有理曲線有三個二重點,欲得一點的坐標我們作一束的圓錐線 (conique) 的方程式經過此三個二重點及曲線上任意一個單點,此束中每一個圓錐線都遇此四次曲線 (quartique) 於一點,此點是隨變率變化的,若是作出交點的橫坐標的方程式,將和已知根相應因子消去已後,此方程式就成爲一次式,牠定 x 爲變率的有理函數,對於 y 也同法計算.

例如一個勒末尼斯加特 (lemniscate)

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),$$

有一個二重點在原點,此外又以在無限遠的圓點 (point circulaire) 爲二重點.一個圓周

$$x^2+y^2=t(x-y)$$

經過原點,在此點上又和勒末尼斯加特的一枝相切,牠和此曲線又相遇於一點,此點是隨 t 變化的,由此二方程式的組合,得

$$t^2(x-y)^2=a^2(x^2-y^2),$$

用 $x-y$ 除,只餘

$$t^2(x-y)=a^2(x+y);$$

此方程式表經過原點的一個直線,牠除原點外,又過圓周於另一點,此點的坐標是

$$x=\frac{a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\quad y=\frac{a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

若用以下的方法尤能直捷得此公式,對於一切的第四級有理曲線若已知牠的一個二重點,這個方法都能應用,用直線 $y=\lambda x$ 割此勒末尼斯加特ity過曲線於兩點,此兩點的坐標是

$$x=\frac{\pm a\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2},\ y=\lambda x.$$

在根號下的多項式是二次,欲消去這個無理性(irrationalité),只須令 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=\left(\frac{a}{t}\right)^2$,由此即得以上的公式.

注意 I.—— 一個平曲線若有些高級的奇點,此每一奇點都和若干個各別的二重點同價,若要一個曲線是有理的,只須要牠的奇點和 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個二重點同價,例如一個 n 次的曲線若有一個 $n-1$ 級的複點(points multiples),就是一個有理曲線,這是因為由此複點所出的一個割線只過曲線於一個變點的緣故.

注意 II.——在符號 $\int$ 下的函數往往關於 x 是有理的,然含有許多不同的無理數 $y,z,\cdots$,在代數學上證明這些無理數能為一個輔助無理數所表,例如積分

$$\int R(x,x^{\alpha},x^{\alpha'},\cdots,)dx$$

R 是一個有理函數,指數 $\alpha,\alpha',\alpha''\cdots$,是些分數,實際上 R 只含有一個無理數 $x^{\frac{1}{D}}$,D 表 $\alpha,\alpha',\alpha''\cdots$,通分後的公分母,只須令 $x=t^D$ 即將此函數變為有理函數.

99. 代對積分(intégrales algébrico-logarithmiques).——依上節所見,凡附在一個有理曲線的阿伯耳積分都是一個代對函數,就是說牠等於含 x 及 y 的一個有理函數,增加些含 x 及 y 的有

理函數的對數,這些對數爲些常數係數所乘.曲線(6)若不是有理曲線,附在此曲線的一個阿伯耳積分普通的是一個超越函數,牠不能只爲對數一個超越函數所表.然無論關係式

$$F(x,y)=o$$

如何,總有無限的有理函數 $R(x,y)$ 存在,能使積分 $\int R(x,y)dx$ 是一個代對函數,這是因爲此類的一個函數的導來式總是 x 及 y 的有理函數的緣故.若函數 $R(x,y)$ 是已知,普通的極難辨認 $\int R(x,y)dx$ 是否一個代對函數.然若是由一個代數的換置法,不論是有理或無理的,但能將 $R(x,y)$ 變爲一個有理微分式,此積分就是代對函數.

試舉二項微分式 (différentielles binomes)

$$x^m(ax^n+b)^p dx$$

作爲例子,m, n, p 都是有理數.關係式 $y=x^m(ax^n+b)^p$ 自然能爲含 x 及 y 的代數整式 $F(x,y)=o$ 所替代,此式普通的不是一個有理曲線.

若 p 是一個整數,此曲線就是有理的.誠然,用 D 表二數 m 及 n 的公分母,令 $x=t^D$, y 就也是 t 的一個有理函數.然而不是這個惟一場合我們纔能夠除去此無理性以實行積分.爲發見積分性 (intégrabilité) 的新場合,我們試作一個變數更換法,令

$$ax^n+b=t;$$

得

$$x=\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{na}\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}dt,$$

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx=\frac{1}{na}\int t^p\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dt;$$

這個新積分和第一個形狀相同;此處佔指數 p 的位置的是 $\frac{m+1}{n}-1$; 所以若 $\frac{m+1}{n}$ 是一個整數,就可以實行積分.

他一方面,此積分又可寫為

$$\int x^{m+np}(a+bx^{-n})^p dx,$$

可見若 $\frac{m+np+1}{n}=\frac{m+1}{n}+p$ 是一個整數,我們就又得積分性的一個新場合.約而言之,此三個數 p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ 中有一個是整數的,我們就能够實行積分.在 p, m, n 是有理數時,惟有此三個場合,我們能將積分用有限數的普通符號所表.

若積分是可能的,在實行積分時,可先變此積分為更簡的形狀,為此,令 $ax^n=bt$, 得

$$x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}-1}dt.$$

令

$$q=\frac{m+1}{n}-1,$$

若略去常數係數,積分就成為

$$\int t^q(1+t)^p dt,$$

因得積分性的場合如下: $p, q, p+q$ 三數中當有一個是整數的.

若 p 是整數, $q=\frac{r}{s}$, 我們可令 $t=u^s$; 若 q 是整數, $p=\frac{r}{s}$, 我們可令 $1+t=u^s$; 若 $p+q$ 是整數,我們可寫積分為

$$\int t^{p+q}\left(\frac{1+t}{t}\right)^p dt,$$

只須令 $1+t=tu^s$ 即將無理性消除.

例如積分

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx;$$

我們有 $m=1$, $n=3$, $p=\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=1$. 所以我們是在積分性的場合.先令 $x^3=t$,即得新積分

$$\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}\,dt,$$

再令 $1+t=tu^3$ 即將根號消除.

100. 橢圓積分 (integrales elliptiques) 及過橢圓積分 (integrales hyperelliptiques) 的化法.——設 $P(x)$ 是一個 p 次的多項式,牠和牠的導來式是互素式.設有一個積分

$$\int R\left[x,\sqrt{P(x)}\right]dx,$$

R 表關於 x 及根號 $y=\sqrt{P(x)}$ 的一個有理函數;在 $P(x)$ 的次數大於 2 時,此積分通常的不能爲普通函數所表明.此等積分都是普通阿伯耳積分的特別場合,可以分解爲代數及對數的一部分及若干數的特別積分,此後者不能由有限數的普通符號所表明.我們試述這個化法.

有理函數 $R(x)$ 是含 x 及 y 的兩個多項整式的商;將 y 的偶數冪如 y^{2q} 代以 $[P(x)]^q$,將 y 的奇數冪如 y^{2q+1} 代以 $y[P(x)]^q$,由此我們可以假定此分數的兩項都是 y 的一次式

$$R(x,y)=\frac{A+By}{C+Dy},$$

A, B, C, D 都是 x 的多項式.將此分數的兩項各乘以 $C-Dy$,仍以 $P(x)$ 代 y^2,我們又可寫爲

$$R(x,y)=\frac{F+Gy}{K},$$

於是所取的積分成爲兩個別的積分,一個 $\int\frac{F\,dx}{K}$ 是一個有理函數的積分,牠一個 $\int\frac{Gy}{K}dx$,牠又可以寫爲

$$\int\frac{M\,dx}{N\sqrt{P(x)}},$$

M 及 N 是 x 的兩個多項整式.這個積分是我們所當考慮的.有理函數 $\frac{M}{N}$ 能分解爲一個整式部分 $E(x)$ 及許多分數的一個和

$$\frac{M}{N}=E(x)+\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\cdots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

每一個多項式 X_i 都和牠的導來式是互素式.所以我們只有兩種的積分

$$Y_m=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{P(x)}},\quad Z_n=\int\frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}.$$

若 $P(x)$ 的次數是 p,這些積分 Y_m 就都爲在前的 $p-1$ 個積分 $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots, Y_{p-2}$ 及些代數項所表.

誠然,設

$$P(x)=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots.$$

我們有

$$\frac{d}{dx}\left[x^m\sqrt{P(x)}\right]=mx^{m-1}\sqrt{P(x)}+\frac{x^mP'(x)}{2\sqrt{P(x)}}$$
$$=\frac{2mx^{m-1}P(x)+x^mP'(x)}{2\sqrt{P(x)}};$$

分子是 $m+p-1$ 次的一個多項式,其中最高次的項是 $(2m+p)a_0x^{m+p-1}$. 積分以上等式的兩端,得

$$2x^m\sqrt{P(x)}=(2m+p)a_0Y_{m+p-1}+\cdots,$$

其中未寫明諸項都是指標小於 $m+p-1$ 的積分 Y. 在這個式中逐次令 $m=1,2,\cdots$;即能由一個代數項及 $p-1$ 個積分 $Y_0, Y_1, \cdots, Y_{p-2}$ 以計算 $Y_{p-1}, Y_p, \cdots$.

關於第二形狀的積分,依 X 是否和 $P(x)$ 爲互素式,可分爲兩種場合.

第一,若 X 和 $P(x)$ 是互素式,積分 Z_n 可分解爲一個代數項,積分 Y_k 的一個和及一個新積分

$$\int\frac{Bdx}{X\sqrt{P(x)}},$$

B是一個多項式,牠的次數小於X的次數.

X旣和牠的導來X'及$P(x)$都是互素式,X^n必和PX'是互素式.所以能夠求得兩個多項式λ及μ使$\lambda X^n+\mu X'P=A$,積分就分爲兩個別的積分

$$\int\frac{Adx}{X^n\sqrt{P(x)}}=\int\frac{\lambda dx}{\sqrt{P(x)}}+\int\frac{\mu\sqrt{P}X'}{X^n}dx.$$

第一部分是積分Y_4的一個和;若$n>1$,我們用部分積分法,令

$$\mu\sqrt{P}=u,\ v=\frac{-1}{(n-1)X^{n-1}},$$

第二積分成爲

$$\int\frac{\mu\sqrt{P}X'dx}{X^n}=\frac{-\mu\sqrt{P}}{(n-1)X^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{2\mu'P+\mu P'}{2X^{n-1}\sqrt{P(x)}}dx.$$

此新積分仍是原來積分的形狀,但X的指數減少一個單位.繼續這個化法,以至於X的指數等於1爲止,終得結果

$$\int\frac{Adx}{X^n\sqrt{P(x)}}=\int\frac{Bdx}{X\sqrt{P}}+\int\frac{Cdx}{\sqrt{P}}+\frac{D\sqrt{P}}{X^{n-1}},$$

B,C,D是三個多項式,其第一個B總可假定牠的次數小於X的次數.

第二,假定X及P有一個公除數D,譬如$X=YD$, $P=SD$,多項式D,S,Y都是彼此間兩兩的爲互素式.我們總可以求得兩個多項式λ及μ,使$A=\lambda D^n+\mu Y^n$,因而

$$\int\frac{Adx}{X^n\sqrt{P}}=\int\frac{\lambda dx}{Y^n\sqrt{P}}+\int\frac{\mu dx}{D^n\sqrt{P}}.$$

第一積分的形狀是方纔可研究的.至於積分

$$\int\frac{\mu dx}{D^n\sqrt{P}},$$

其中D是P的一個除數,牠可變爲一個代數項及些積分Y.

誠然，D^n 既是和 $D'S$ 是互素式，設 λ_1 及 μ_1 是兩個多項式，能滿足等式 $\lambda_1 D^n+\mu_1 D'S=\mu$；積分可寫爲

$$\int\frac{\mu dx}{D^n\sqrt{P}}=\int\frac{\lambda_1 dx}{\sqrt{P}}+\int\frac{\mu_1 SD'}{D^n\sqrt{P}}dx.$$

用 SD 代 P，第二積分可寫爲

$$\int\mu_1\sqrt{S}\frac{D'}{D^{n+\frac{1}{2}}}dx,$$

由部分積分法，命

$$u=\mu_1\sqrt{S},\ v=\frac{-1}{n-\frac{1}{2}}\ \frac{1}{D^{n-\frac{1}{2}}},$$

我們得

$$\int\frac{\mu dx}{D^n\sqrt{P}}=\int\frac{\lambda_1 dx}{\sqrt{P}}-\frac{\mu_1\sqrt{S}}{(n-\frac{1}{2})D^{n-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2n-1}\int\frac{2\mu'_1 S+\mu_1 S'}{D^{n-1}\sqrt{P}}dx.$$

此仍是化法的一個公式，然而因爲分數指數 $n-\dfrac{1}{2}$，我們能繼續這個化法，以至於 D 只有一乘冪現在分母上，終得

$$\int\frac{\mu dx}{D^n\sqrt{P}}=\frac{K\sqrt{P}}{D^n}+\int\frac{H dx}{\sqrt{P}},$$

H 及 K 是兩個多項式。

總而言之，凡一個積分 $\displaystyle\int\frac{M dx}{N\sqrt{P}}$ 都可變爲一個代數部分及積分

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{P}},\quad \int\frac{X_1 dx}{X\sqrt{P}}$$

的一個和，其中 m 至多等於 $p-2$，X 及 X' 及 P 俱是互素數，X_1 的次數比 X 的次數少 1。這個化法只須用多項式的加法，乘法及除法。

若已知方程式 $X=o$ 的諸根，我們可將每一個有理分數 $\dfrac{X_1}{X}$ 分解爲簡單分數，其形狀爲

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

A, B, C 都是常數,於是得兩個新模範的積分

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{(Bx+c)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]\sqrt{P(x)}},$$

此兩個積分都可歸入第一個的形狀,但須承認 a 能夠是幻數.此形狀的積分叫做第三類的積分.積分 Y_m 在 m 小於 $\frac{p}{2}-1$ 時叫做第一類的積分;積分 Y_m 在 m 大於或等於 $\frac{p}{2}-1$ 時叫做第二類的積分.第一類的積分有一個徵象特性 (propriété caractéristique): 在積分上限增加無限或等於 $P(x)$ 的一個根時,牠們能保有一個有限價值 (n^{os} 87, 88, 89). 然而現在第二類及第三類的區別不過是暫時的,牠們的眞正區別以後再論.

注意. 一直至現在,對於 $P(x)$ 的次數 p,我們並沒作一點假定.若這個多項式是奇次,我們總能將牠的次數增加一個單位.誠然,設 $P(x)$ 是一個多項式,牠的次數是 $2q-1$,

$$P(x)=A_0x^{2q-1}+A_1x^{2q-2}+\cdots+A_{2q-1};$$

令 $x=a+\frac{1}{y}$, a 不是 $P(x)$ 的根.我們有

$$P(x)=P(a)+P'\frac{1}{y}+\cdots+\frac{P^{(2q-1)}(a)}{(2q-1)!y^{2q-1}}=\frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

$P_1(y)$ 表一個多項式,次數是 $2q$. 因而得

$$\sqrt{P(x)}=\frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q},$$

凡關於 x 及 $\sqrt{P(x)}$ 的有理積分都變爲關於 y 及 $\sqrt{P_1(y)}$ 的有理函數的積分.

反之,若根號下的多項式 $P(x)$ 的次數是偶數 $2q$,我們能將此多項式的次數減少一個單位,但須知此多項式的一個根.誠然,設 a 是方程式 $P(x)=o$ 的一個根;令 $x=a+\frac{1}{y}$,得

$$P(x)=P'(a)\frac{1}{y}+\cdots+\frac{P^{(2q)}(a)}{(2q)!}\frac{1}{y^{2q}}=\frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

$P_1(y)$的次數是$2q-1$,因而

$$\sqrt{P(x)}=\frac{\sqrt{P_1(x)}}{y^q},$$

新積分中在積分號下不含別的無理性只有$\sqrt{P_1(y)}$

101. **代數積分的場合.**——我們能由一個更爲直接的運算,得到表積分$\int\frac{M}{N}\frac{dx}{\sqrt{P}}$的最後公式,不經過以上所用的一切居間方法.設$V$是多項式$N$及牠的導來式的最大公約數,$W$是兩多項式$N$及$P$的最大公約數.$U$是$N$及積數$VW$的商.依上節所證,所設積分等於一個代數部分,形狀是$\frac{Q\sqrt{P}}{VW}$,增加若干個積分Y_i及一個積分$\int\frac{Sdx}{U\sqrt{P}}$,$Q$及$S$是兩個多項式.因爲若$F(x)$是一個多項式,凡一個算式$F(x)\sqrt{P(x)}$都是積分$Y_i$的一個和,所以可寫爲

$$\int\frac{Mdx}{N\sqrt{P}}=\int\frac{Tdx}{\sqrt{P}}+\frac{Q\sqrt{P}}{VW}+\frac{Sdx}{U\sqrt{P}},$$

Q的次數小於VW的次數,S的次數小於U的次數.這三個多項式U,V,W都能自有理運算求出;其牠三個多項式Q,S,T也是如此.誠然,令上式的兩邊的導來式相等,再乘以$N\sqrt{P}$,得

$$M=TN+Q'PU+\frac{1}{2}P'QU-QP\frac{UW'}{W}-QP\frac{UV'}{V}+SVW,$$

要注意TN的次數至多等於其牠的最高次項的次數,即得T的次數的最大限.既知多項式Q,S,T的次數的最大限,再用恆等法決定牠們的係數.這個分解法既是可能的,我們可預知所得的方程式必能相容.積分$\int\frac{Tdx}{\sqrt{P}}$又可分爲一個代數部分及$p-1$積分$Y_0,Y_1,\cdots,Y_{p-2}$的直線組合.所以總能夠由有理運算將所設積分作成以下的形狀:

$$\int\frac{M}{A\sqrt{P}}dx=R(x)\sqrt{P}+\int\frac{T_1dx}{\sqrt{P}}+\int\frac{Sdx}{U\sqrt{P}},$$

T_1 的次數至多等於 $p-2$, S 的次數小於 U 的次數, $R(x)$ 表一個有理函數.

若要積分是一個代函數,必須要也只須要此兩個多項式 T_1 及 S 等於零.凡一個積分 $\int R(x,\sqrt{P})dx$ 都可分爲一個有理函數的積分及以上的形狀的一個積分,所以總能夠由一個有理運算驗明這個函數是否一個代函數,若是如此,並可以立即求得.

102. 橢圓積分. (intégrales elliptiques).——若多項式 $P(x)$ 是二次,上節的化法能夠將關於 x 及 $\sqrt{P(x)}$ 的一個有理函數的積分變爲積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},\ \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}},$$

這是在代數學上我們已知此等積分的計算法的.

除此以外最簡單的場合就是橢圓積分, $P(x)$ 是三次或四次;這兩個場合,可以彼此互變,已如上所見.設 $P(x)$ 是一個四次多項式,祇只有一次的單因子 (facteurs linéaires simples), 係數都是實數;我們將先證明由一個實數的一次更換法,能夠將此多項式變爲一個只含偶次諸項的多項式.

設 a,b,c,d 是方程式 $P(x)=o$ 的四個根,有一個內推 (involution) 的關係式

$$(7)\qquad Lx'x''+M(x'+x'')+N=o$$

牠能爲 $x'=a, x''=b$ 及 $x'=c, x''=d$ 所滿足,我們有兩個關係式

$$Lab+M(a+b)+N=o,$$

$$Lcd+M(c+d)+N=o$$

以決定係數 L, M, N；由此可見可取

$$L=a+b-c-d,\ M=cd-ab,\ N=ab(c+d)-cd(a+b).$$

命以上的內推(involution)的二重點爲 α 及 β，就是說方程式

$$Lu^2+2Mu+N=o$$

的兩個根；此兩個根是實根的條件

$$(cd-ab)^2-(a+b-c-d)[ab(c+d)-cd(a+b)]>o$$

可寫爲

(8) $$(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)>o$$

這個條件總是可以滿足的，若四個根 a, b, c, d 都是實根，只須兩個最大的爲 a 及 b；(8) 的四個因子就都是正，若方程式 $P(x)=o$ 只有兩個實根，我們取此兩個實根爲 a 及 b，取此兩個共軛虛根爲 c 及 d；如此，因數 $(a-c)$ 及 $(a-d)$ 是兩個共軛虛數；$(b-c)$ 及 $(b-d)$ 也是如此，若四個根都是虛根，我們取兩個共軛虛根成 a 及 b，牠兩個共軛虛根爲 c 及 d；(8) 的四個因子仍是兩個爲共軛，L, M, N 的相應價值都是實的。

關係式(7)可寫爲

(9) $$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=o;$$

我們若令 $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}=y$，或 $x=\dfrac{\beta y-\alpha}{y-1}$，即得

$$P(x)=\frac{P_1(y)}{(y-1)^4},$$

$P_1(y)$ 是一個四次的新多項式，係數都是實數，牠的四個根是

$$\frac{a-\alpha}{a-\beta},\quad \frac{b-\alpha}{b-\beta},\quad \frac{c-\alpha}{c-\beta},\quad \frac{d-\alpha}{d-\beta},$$

依公式(9),此四個根每一對都能滿足關係式 $y'+y''=o$; 所以多項式 $P_1(x)$ 只含有偶次項.

若是此四個根能滿足關係式 $a+b=c+d$,我們有 $L=o$,內推的一個二重點遠至無限.令 $\alpha=-\frac{N}{2M}$,方程式(7)可寫為

$$x'-\alpha+x''-\alpha=o,$$

只須令 $x=\alpha+y$,即得一個只含偶次項的多項式.

所以我們可以假定已將 $P(x)$ 變為一個最簡式(forme canonique)

$$P(x)=A_0x^4+A_1x^2+A_2;$$

凡橢圓積分除去一個代數項及一個有理函數的積分外,都可變為積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},$$

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}.$$

積分

$$u=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

是第一類的橢圓積分;若將 x 看做 u 的函數即得一個橢圓函數.

令 $x^2=u$,第二積分就變為一個通常積分.

第三積分

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

是列讓得(Legendre)的第二類積分.

最後,我們能寫為

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}=\int\frac{xdx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}}+a\int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}};$$

積分

$$\int\frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

是列讓得的第三類積分.

這些積分最初發見在橢圓線的長度問題中,所以叫做橢圓積分.設

$$x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi$$

是橢圓線上一點的坐標;我們有

$$ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)d\varphi^2,$$

令$a^2-b^2=e^2a^2$,此式又可寫爲

$$ds=a\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi;$$

令$\cos\varphi=t$,表橢圓弧的公式成爲

$$s=a\int\frac{\sqrt{1-e^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt=a\int\frac{1-e^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)}}dt;$$

可見橢圓弧爲一個第一類積分及一個第二類積分的和所表.

再取一個勒末尼斯加特

(10) $$x=a^2\frac{t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\ y=a^2\frac{t(t^2-a^2)}{t^4+a^4};$$

我們得

(11) $$ds^2=dx^2+dy^2=\frac{2a^4}{t^4+a^4}dt^2$$

勒末尼斯加特的弧爲一個第一類的橢圓積分所表.〔註二〕

103. 幾個超越函數的積分法.——設有若干因子的一個積,諸因子的形狀是$\cos(ax+b)$,a及b都是常數,一個相同的因子可以重複許多次.公式

$$\cos u\cos v=\frac{\cos(u+v)}{2}+\frac{\cos(u-v)}{2}$$

能將此類的兩個因數的一個積代以 x 的一次函數的兩個餘弦的和,此類的 n 個因數的積代以 $(n-1)$ 個因數的兩個積的和.應用這個公式若干次,終將所設的積變爲一個和 $\Sigma H\cos(Ax+B)$,此每一項都能直接積分.若 A 不等於零,我們有

$$\int\cos(Ax+B)dx=\frac{\sin(Ax+B)}{A}+c;$$

在特別場合,$A=o$,我們得

$$\int\cos Bdx=x\cos B+C.$$

這個變形法特別的適用在積數

$$\cos^m x\sin^n x$$

上,若 m 及 n 都是正整數,我們可寫爲

$$\cos^m x\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$$

應用以上的方法,此積即爲弧的倍數的正弦及餘弦的和,積分即可直接求得.

再設積分

$$\int e^{ax}f(\sin x,\ \cos x)dx,$$

f 是含 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的一個整函數.此積分任一項的形狀都是

$$\int e^{ax}\sin^m x\cos^n xdx$$

m 及 n 都是正整數.依方纔所見,積數 $\sin^m x\cos^n x$ 能爲 x 的倍數的正弦或餘弦的一個和所代,所以我們只有兩種積分

$$\int e^{ax}\cos bxdx,\int e^{ax}\sin bxdx.$$

用部分積分法,得

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx,$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx;$$

由此得

$$(12)\begin{cases}\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2},\\ \displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}.\end{cases}$$

積分中能變為以上的形狀的,我們舉出

$$\int f(\log x)x^m dx,\quad \int f(\arcsin x)dx,$$

$$\int f(x)\arcsin x\,dx,\quad \int f(x)\arctan g\,x\,dx,$$

f 表一個整函數.在前兩個中我們取 $\log x$ 或 $\arcsin x$ 為新變數;對於後兩個,我們用部分積分法,將 $f(x)dx$ 看作一個多項式 $F(x)$ 的微分,卽得一個已經研究的模範.

II.有定積分的近似值.

104. 概論.——在不知 $f(x)$ 的原函數時,我們可用近似值(approximation)的方法以求有定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值.由平均值的定理得此積分的兩個極限,然用和此相同的方法又能得無量數的極限.假定 x 自 a 變至 $b(a<b)$ 時,我們常有 $\varphi(x)<f(x)<\psi(x)$;可見

$$\int_a^b \varphi(x)dx<\int_a^b f(x)dx<\int_a^b \psi(x)dx;$$

若選擇兩個已知函數的導來式作為函數 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$,就能得所設積分的兩個極限.例如積分

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

我們可寫為 $\sqrt{1-x^4}=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}$,$x$ 自 o 變至 1 時,$\sqrt{1+x^2}$ 在 1 及 $\sqrt{2}$ 中間,所以所求積分在兩個積分

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

中間就是說在 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 及 $\frac{\pi}{2}$ 中間.我們仍能求得兩個更為相近的極限,因為 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ 大於 $1-\frac{x^2}{2}$,這是由戴勞公式在 $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$ 的展開式中可見的,所以積分 I 大於

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

此最後積分的價值是 $\frac{\pi}{4}$,所以積分 I 在 $\frac{3\pi}{8}$ 及 $\frac{\pi}{2}$ 中間.

這是很明瞭的,用此方法對於積分的確絕價值只能得着一個指導.欲得此積分更為近似的價值,我們可將區域 (a,b) 分為更小的部分區域,然後在每一區域中都應用平均值公式.為確定人的觀念,假定 x 自 a 至 b 時 $f(x)$ 是常上升的;我們分區域 (a,b) 為 n 個相等部分 $(b-a=nh)$;依積分的定義,$\int_a^b f(x)dx$ 是在兩個和數

$$s=h\Big\{f(a)+f(a+h)+\cdots+f[a+(n-1)h]\Big\},$$

$$S=h[f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+nh)]$$

中間,若取 $\frac{S+s}{2}$ 為積分的價值,所作的差誤必小於

$S-s=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$,價值 $\frac{S+s}{2}$ 可寫為

$$h\Big\{\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}+\cdots$$
$$+\frac{f[a+(n-1)h]+f(a+nh)}{2}\Big\};$$

若注意 $\frac{h}{2}\Big\{f(a+ih)+f[a+(i+1)]h\Big\}$ 表一個梯形面積,牠的高是 h,牠的底是 $f(a+ih)$ 及 $f(a+ih+h)$,可見這個方法是將曲線 $y=f(x)$ 及兩個相隣縱線所限的面積代以一個此兩縱線為底的梯形面積.若不需要極精確的近似值時,這個方法甚便實用.

例如積分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;所取 $n=4$,我們得積分的近似值

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{16}{17}+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{1}{4}\right)=0{,}7827\cdots,$$

所作的差誤小於 $\frac{1}{16}=0{,}0625$，由此得 π 的一個近似值 3, 1308，此值中第一位小數是確實的。

若是 x 自 a 變至 b 時 $f'(x)$ 不向一個方向變化，我們可將此區域分為許多其他區域，使在此每一區域中這個條件是能滿足的。

105. 補間法 (intérpolation).——我們又有一個方法以計算積分 $\int_a^b f(x)dx$：在曲線 $y=f(x)$ 上取和 a 及 b 相應的兩點間的一個弧，作一個 n 級的拋物曲線

$$y=\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

使通過此弧上的 $(n+1)$ 點 $B_0, B_1, \cdots, B_n$，我們將積分 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 作為所要計算的積分的近似值。設 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 是 $(n+1)$ 點 $B_0, B_1, \cdots, B_n$ 的坐標，多項式 $\varphi(x)$ 為拉格朗熱 (Lagrange) 的補間法公式所給與，

$$\varphi(x)=y_0X_0+y_1X_1+\cdots+y_iX_i+\cdots+y_nX_n,$$

其中 y_i 的係數 X_i 等於

$$X_i=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

這是一個 n 次的多項式，牠對於一切價值 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 都成為零，除對於 $x=x_i$ 是例外，在 $x=x_i$ 時，牠等於 1。所以我們有

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\sum_{i=0}^{n} y_i\int_a^b X_i dx;$$

但是我們寫為

$x_0=a+\theta_0(b-a), x_1=a+\theta_1(b-a), \cdots, x_n=a+\theta_n(b-a)$, $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n$ 是

在o及1間的上升常數由變數更換法,令$x=a+(b-a)t$,積分的近似值的形狀成爲

(13) $$(b-a)(K_0y_0+K_1y_1+\cdots+K_ny_n),$$

在此式中

$$K_i=\int_0^1\frac{(t-O_0)\cdots(t-O_{i-1})(t-O_{i+1})\cdots(t-O_n)}{(O_i-O_0)\cdots(O_i-O_{i-1})(O_i-O_{i+1})\cdots(O_i-O_n)}dt.$$

若不論函數$f(x)$如何,我們將區域(a,b)依一定比例分爲更小的區域,這些數$O_0, O_1, \cdots, O_n$就都不關係$f(x)$,因而係數K_i也是如此.這些係數一經算出即永久適用,我們只須在公式(13)中將$y_0, y_1, \cdots, y_n$用牠們的相應價值替代.

若是所要計算面積的曲線$y=f(x)$爲一個圖解的方法所給與,可將區域(a,b)分爲許多相等部分,我們只須測量曲線的等距離的縱線.若分爲兩等分,我們常取$O_0=o$, $O_1=\frac{1}{2}$, $O_2=1$,即得積分的近似值

$$I=\frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2).$$

若取$n=3$,同樣得

$$I=\frac{b-a}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3);$$

對於$n=4$,得

$$I=\frac{b-a}{90}(7y_0+32y_1+12y_2+32y_3+7y_4).$$

以上的方法是<u>高特</u>(Côtes)所創.<u>辛伯遜</u>(Simpson)的方法和此稍異.懸想將區域(a,b)分爲$2n$等分,設$y_0, y_1, \cdots, y_{2n}$是和諸分點相應的縱線.若將<u>高特</u>的第一公式應用在兩個相續偶數的縱線間的面積上如y_0及y_2, y_2及y_4, $\cdots$,即得全面積的價值

$$I=\frac{b-a}{6n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})]$$

簡約以後得辛伯遜公式

$$I=\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})].$$

106. 高斯(Gauss)的方法.——高斯的方法是別的價值作爲θ_i.試講明如下:假定在區域(a,b)內能求得些升冪的多項式,牠們和此應行積分的函數$f(x)$漸漸相近,譬如

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_{2n-1}x^{2n-1}+R_{2n}(x),$$

對於x在a及b間的一切價值,餘數$R_{2n}(x)$的絕對值都小於一個已知正數ε_n;通常的,我們不知道這些係數α_i,然而我們可見這些係數是無用的.設$x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$是x在a及b間的價值,〔註三〕$\varphi(x)$是一個$n-1$次的多項式,對於價值$x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$,牠取得$f(x)$的價值,拉格郎熱的補間法公式表明此多項式若寫爲

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{2n-1}\alpha_m\varphi_m(x)+R_{2n}(x_0)\Psi_0(x)+\cdots+R_{2n}(x_{n-1})\Psi_{n-1}(x),$$

φ_m及Ψ_k是些多項式,次數至多是$n-1$.這是很明瞭的,$\varphi(x)$只關係所取的價值$x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$.牠一方面,此多項式$\varphi(x)$對於$x=x_0$, $x=x_1$, $\cdots$, $x=x_{n-1}$,當取得x^m的價值;這是因爲若假設除α_m外,一切α_i及$R_{2n}(x)$都等於零,$f(x)$就成爲α_mx^m,$\varphi(x)$就成爲$\alpha_m\varphi(x)$.所以差數$x^m-\varphi_m(x)$必能爲積數

$$P_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

所除盡,若$m\geqq n$,我們當得$x^m-\varphi_m(x)=P_nQ_{m-n}(x)$,$Q_{m-n}(x)$是一個多項式,次數是$m-n$;若$m\leqq n-1$,我們當得$x^m-\varphi_m(x)=0$.這個業已說明,若用$\int_a^b\varphi(x)dx$代$\int_a^b f(x)dx$,所作的差誤就等於

$$(14)\ \sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m\int_a^b[x^m-\varphi_m(x)]dx+\int_a^b R_{2n}(x)dx-\sum_{i=0}^{n-1}R_{2n}(x_i)\int_a^b\Psi_i(x)dx.$$

關係係數 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 的一切項都皆等於零,可見所作的差誤只關係係數 $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{2n-1}$ 及餘數 $R_{2n}(x)$.但是此餘數 $R_{2n}(x)$ 比較係數 $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{2n-1}$ 通常的是極小;所以若是能選擇 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 使關係 $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{2n-1}$ 諸項也都等於零,我們就可以增加這個近似值.若要如此,必須要然只須要此 n 個積分

$$\int_a^b P_n Q_0 dx, \int_a^b P_n Q_1 dx, \cdots, \int_a^b P_n Q_{n-1} dx$$

都等於零,Q_i 是一個 i 次的多項式.我們已見($n^\circ 86$)若取

$$P_n = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n] \tag{15}$$

即能滿足這些條件;所以只須取方程式 $P_n=o$ 的 n 個根作爲 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$,這些根都是在 (a,b) 區域內的.

若 $a=-1, b=+1$,價值 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 都是列讓得多項式 $X_n=o$ 的根;由換置法 $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$,即能將一切場合都變爲這個場合.在 Bertrand 的 Traité de Calcul integral 中可見這些根的價值,以及公式(13)中係數 K_i 的價值.

在高斯方法中所作差誤等於

$$\int_a^b R_{2n}(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} R_{2n}(x_i)\int_a^b \Psi_i(x)dx; \tag{16}$$

函數 $\Psi_i(x)$ 不關係應行積分的函數.欲得差誤的最大限,只須知 $R_{2n}(x)$ 的一個極限,就是說知道在區域 (a,b) 內將 $f(x)$ 代以一個 $2n-1$ 次的多項式所作的差誤程度如何而並不必知道此多項式.

107. **級數積分法.**——設 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是連續函數所成的一個敍列,在區域 (a,b) 內均一的漸近 $f(x)$,依 29 節,我們有

(17) $$f(x)=f_n(x)+\delta_n(x)$$

δ_n的絕對價值在區域(a,b)內常小於一個任意選擇的正數ε,但只要指數n大於或至少等於一個整數N,N的價值關係於ε.自公式(17)得

(18) $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f_n(x)dx+\int_a^b \delta_n(x)dx,$$

然積分$\int_a^b \delta_n(x)dx$的絕對值小於$\varepsilon|b-a|$,只要$n\geqq N$.所以在n增加無限時,此積分漸近於零,我們有

$$\int_a^b f(x)dx=\lim\int_a^b f_n(x)dx,$$

或

(19) $$\int_a^b\left[\lim_{n=\infty} f_n(x)\right]dx=\lim_{n=\infty}\left[\int_a^b f_n(x)dx\right],$$

由此可見積分的符號及極限的符號能彀互換.〔註四〕

在函數$f_n(x)$非均一的漸近於$f(x)$時,等式(19)就不是恆能滿足,例如

$$f_n(x)=nxe^{-nx^2},\quad a=o,\quad b=1,$$

此處$f(x)=\lim\limits_{n=\infty}\left[nxe^{-nx^2}\right]=o$;公式(19)的第一邊為零,至於第二邊,他的價值是

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_o^1 nxe^{-nx^2}\right)=\lim_{n=\infty}\left(-\frac{e^{-nx^2}}{2}\right)_o^1=\lim\left(\frac{1-e^{-n}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

應用以上的定理在區域(a,b)內一個均一收斂的級數的和上,

(20) $$f(x)=u_0(x)+\cdots+u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots,$$

此級數的各項都是連續的,得

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x)$$

$S_n(x)$是$n+1$個初項的和,$R_n(x)$是自$u_{n+1}(x)$項以後所成級數

的和.說級數在區域 (a,b) 內是均一收斂的,就是說 $S_n(x)$ 在此區域內均一的漸近於 $f(x)$. 因爲 $S_n(x)$ 也是一個連續函數,所以

$$(21)\qquad \int_a^b f(x)dx=\lim_{n=\infty}\left[\int_a^b u_0(x)dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)dx\right],$$

這個等式表明公項是 $\int_a^b u_n dx$ 的這個級數是收斂的,牠的和是 $\int_a^b f(x)dx$. 這個結果可簡單的說是<u>一個均一收斂的級數若各項都是連續的就能夠逐項積分</u>.

同樣, 一個級數能够一項一項的分別微分,<u>但必須此由導來式所成的級數是均一收斂的</u>.設

$$f(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

是在 (a,b) 區域內一個收斂級數;假定由牠的導來式所成的級數在此同一區域內是均一收斂的;我們用 $\varphi(x)$ 表此新級數的和

$$\varphi(x)=\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1}{dx}+\cdots+\frac{du_n}{dx}+\cdots.$$

在 a 及 b 內的兩個數 x_0 及 x 間求此級數的每項的積分,得

$$\int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx=\Big[u_0(x)-u_0(x_0)\Big]+\Big[u_1(x)-u_1(x_0)\Big]+\cdots,$$

就是

$$(22)\qquad \int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx=f(x)-f(x_0),$$

這個關係式表明 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的導來式.

這個証明法假定導來式 $\dfrac{du_i}{dx}$ 都是連續函數,這個假定在第一個証明法是無用的 ($n^{\circ}30$).〔註五〕

例. 第一,積分 $\int\frac{e^x dx}{x}$ 不能由有限數的普通函數所表;我們寫爲以下的形狀:

$$\int\frac{e^x}{x}dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{e^x-1}{x}dx=\log x+\int\frac{e^x-1}{x}dx.$$

對於最後積分,可以展開爲一個級數,此級數對於 x 的一切價値都有效,誠然

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{1.2.3}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{1.2\cdots n}+\cdots$$

此級數在區域 $-R$, $+R$ 內是均一收斂的,R 如何大俱不論,這是因爲牠的各項的絕對値都小於級數

$$1+\frac{R}{1.2}+\cdots+\frac{R_{n-1}}{1.2\cdots n}$$

的各項的緣故,由積分法所得級數

$$F(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{1}{n}\frac{x^n}{1.2\cdots n}$$

是收斂的,x 如何不論,因而決定牠表一個以 $\frac{e^x-1}{x}$ 爲導來式的一個函數.

第二:一個橢圓,大軸是 $2a$, 離心率是 e, 牠的周界的長是有定積分(第 102 節)

$$S=4a\int_o^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

積 $e^2\sin^2\varphi$ 在 o 及 $e^2<1$ 中間,所以這個根號等於依二項式公式所展級數的和

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}=1-\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2\cdot4}e^4\sin^4\varphi-\cdots$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}e^{2n}\sin^{2n}\varphi-\cdots$$

第二邊的級數是均一收斂的,這是因爲牠的各項的絕對値都小於令 $\varphi=1$ 所成級數的各項的絕對値的緣故,所以能夠逐項

積分;由已知的公式〔註六〕,我們有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi d\varphi = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n}\frac{\pi}{2},$$

因得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-\cdots\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots 2n}\right]^2(2n-1)e^{2n}-\cdots\right\}.$$

若離心率 (excentricité) 極小,只須取第二端的極少的項卽能得積分的極為近似的價值.

同一方法,可將積分

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-e^2\sin^2 d\varphi}$$

展開為級數,上限 φ 如何不論.我們再舉出公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{4}e^2+\frac{9}{64}e^4+\cdots\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots 2n}\right]^2 e^{2n}+\cdots\right\}$$

此公式表列讓得的第一類的完全積分.

III.——各種方法.

108. **符號 $\int$ 下的微分法及積分法的應用.**——將某某有定積分附在别的已知有定積分上,用第94及95節公式也往往能得此等積分的價值.例如

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctang}\frac{x}{\sqrt{a}},$$

a 是一個正數.繼續應用公式(42) $n-1$ 次,得

$$(-1)^{n-1}1\cdot2\cdots(n-1)\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctang}\frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

在此例中我們本可以先計算無定積分,即直接得此有定積分的價值.然在以下的例中就不是如此.

以後將証明(第六章,第一百二十八節)公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

令 $x=y\sqrt{\alpha}$, α 是正,成為

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

我們很容易驗明關於 α 由疊微分法自此積分所得的一切積分都是均一收斂的,只要 α 常大於一個定數 $k>0$. 自以上的公式得着一列積分的價值

$$(24)\left\{\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} y^2e^{-\alpha y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\alpha^{-\frac{3}{2}},\\
&\int_0^{+\infty} y^4e^{-\alpha y^2}dy = \frac{1\cdot3}{2^3}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{5}{2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\\
&\int_0^{+\infty} y^{2n}e^{-\alpha y^2}dy = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{2n+1}{2}},
\end{aligned}\right.$$

將這些積分組合又可演出無量數積分的價值,例如

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy\\
&=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy\left[1-\frac{(2\beta y)^2}{1\cdot2}+\cdots+(-1)^n\frac{(2\beta y)^{2n}}{1\cdot2\cdots2n}+\cdots\right]\\
&=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^2}{1\cdot2}dy+\cdots\\
&\qquad+(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^{2n}}{1\cdot2\cdots2n}dy+\cdots.
\end{aligned}$$

這些積分都是方纔所計算的,只餘

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}-\frac{(2\beta)^2}{1\cdot 2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\alpha^{-\frac{3}{2}}}{2}+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{(2\beta)^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\alpha^{-\frac{2n+1}{2}}+\cdots,$$

或簡約爲

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}}. \tag{25}$$

又有些場合,我們可以先計算所求積分關於一個變率的導來式.例如積分

$$I=F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}dx;$$

由符號 $\int$ 下的微分法公式,得

$$\frac{dI}{d\alpha}=\frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}+\int_0^{\alpha}\frac{x dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)};$$

然而由分解法,

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right),$$

因而

$$\int_0^{\alpha}\frac{x dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=-\frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctang}\alpha.$$

所以

$$\frac{dI}{d\alpha}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctang}\alpha+\frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2},$$

再注意 $\alpha=0$ 時,I 也等於零,我們可寫爲

$$I=\int_0^{\alpha}\frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}d\alpha+\int_0^{\alpha}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctang}\alpha\, d\alpha.$$

對於第一積分用部分積分法,得

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{arctang}\alpha\log(1+\alpha^2). \tag{26}$$

有時由符號$\int$下的積分法公式也能計算某某等積分。

例如函數x^y，牠在x自o至1，y自a至b時是連續的，a及b都是正數，依普通公式(44)(n^o95)，我們有

$$\int_o^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_o^1 x^y dx.$$

然而$\int_0^1 x^y dx = \left(\dfrac{x^{y+1}}{y+1}\right)_o^1 = \dfrac{1}{y+1}$，結果，上式第二端的價值底為

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log \frac{b+1}{a+1}.$$

牠一方面，我們又有$\int_a^b x^y dy = \left(\dfrac{x^y}{\log x}\right)_a^b = \dfrac{x^b - x^a}{\log x}$，因得

$$\int_o^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{b+1}{a+1}. \tag{27}$$

一般，設$P(x,y)$，$Q(x,y)$是兩個函數，牠們有一個關係$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$。依符號$\int$下的積分法公式，得

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x} dx,$$

x_0，x_1，y_0，y_1都是常數，這個式子等於

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(x,y_1) - P(x,y_0)] dx = \int_{y_0}^{y_1} [Q(x_1,y) - Q(x_0,y)] dy.$$

高失自此式中演出許多有定積分。

109. $\int_o^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) dx$ 的計算法。— 又有一個計算有定積分的例子，所用法術尤為特殊。積分

$$F(\alpha) = \int_o^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) dx$$

有一個有限的價值，即在$\alpha = \pm 1$時也是如此。這個函數$F(\alpha)$具有以下的性質：

第一，$F(-\alpha)=F(\alpha)$．誠然，我們有

$$F(-\alpha)=\int_0^\pi \log\ (1+2\alpha\cos x+\alpha^2)dx,$$

令 $x=\pi-y$，

$$F(-\alpha)=\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos y+\alpha^2)dy=F(\alpha).$$

第二，$F(\alpha^2)=2F(\alpha)$．誠然，我們可寫為

$$2F(\alpha)=F(\alpha)+F(-\alpha),$$

或

$$2F(\alpha)=\int_0^\pi [\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)+\log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)]dx$$

$$=\int_0^\pi \log\ (1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)dx.$$

令 $2x=y$，得

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^\pi \log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy;$$

在此最後積分中若令 $y=2\pi-z$，即得

$$\int_\pi^{2\pi} \log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy=\int_0^\pi \log(1-2^2\alpha\cos z+\alpha^4)dz,$$

因而

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)+\frac{1}{2}F(\alpha^2)=F(\alpha^2).$$

由此公式逐漸得

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)=\frac{1}{4}F(\alpha^4)=\cdots=\frac{1}{2^n}F(\alpha^{2^n}).$$

現在我們注意若 $|\alpha|$ 小於 1，α^{2^n} 在 n 增加無限時就漸近於零；$F(\alpha^{2^n})$ 也是如此，這是因為對數漸近於零的緣故，所以若 $|\alpha|<1$，我們有 $F(\alpha)=0$，$\alpha=\pm 1$ 時亦然．在 $|\alpha|$ 大於一時，我們令 $\alpha=\frac{1}{\beta}$，得

$$F(\alpha)=\int_0^\pi \log\left(1-\frac{2\cos x}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\right)dx$$

$$\int_0^\pi \log(1-2\beta\cos x+\beta^2)dx = \pi\log\beta^2;$$

因爲$|\beta|$小於1,所以

$$F(\alpha) = -\pi\log\beta^2 = \pi\log\alpha^2.$$

由此可見有定積分$F(\alpha)$,依尤拉的定義,牠對於$\alpha=\pm1$是不連續函數.

110. $\log\Gamma(n+1)$ 的近似値.——我們又能用各種技術,雖不能得有定積分的正確價値,至少也可以得着牠的近似値.試舉一例.由定義,我們有

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx;$$

函數x^ne^{-x}在$x=n$時是最大,牠的最大價値是n^ne^{-n}.x自o變至n時,x^ne^{-x}自零漸增至n^ne^{-n} $(n>o)$,x自n變至$+\infty$時,x^ne^{-x}自n^ne^{-n}降至o.同樣,在t由$-\infty$增至o時$n^ne^ne^{-t^2}$自o增至n^ne^{-n},在t由o增至$+\infty$時,牠自n^ne^{-n}漸減至o.依變數更換法,

(28) $$x^ne^{-x}=n^ne^{-n}e^{-t^2}$$

我們令x及t價値相應,其方法使t自$-\infty$變至$+\infty$ x自o漸增至$+\infty$

我們仍須計算$\frac{dx}{dt}$.取(28)的兩邊的對數導來式,得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{x-n}$$

牠一方面,依公式(28),又有

$$t^2=x-n-n\log\left(\frac{x}{n}\right).$$

爲計算便利計,命 $x=n+z$,再依戴勞公式展開 $\log\left(1+\dfrac{z}{n}\right)$ 至第二項止,

$$t^2=z-n\left[\frac{z}{n}-\frac{z^2}{2n^2(1+\theta\frac{z}{n})^2}\right]=\frac{nz^2}{2(n+\theta z)^2},$$

θ 是在 o 及 1 中間.由此逐漸得

$$\frac{n}{z}+\theta=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$\frac{2tx}{x-n}=2t\left(\frac{n}{z}+1\right)=2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+(1-\theta)t\right],$$

又依變數更換法,

$$\Gamma(n+1)=2n^ne^{-n}\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt+2n^ne^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}(1-\theta)tdt.$$

第一積分(參觀以後第128節)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\int_{o}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

至於第二積分,因爲不知道 θ,故不能精確計算.然而甚易得一個極限.誠然,在 $-\infty$ 及 o 中間,一切原質都是負;在 o 及 $+\infty$ 中間,牠們都是正.又每一積分 $\int_{-\infty}^{o}$, $\int_{o}^{+\infty}$ 的絕對價值都小於 $\int_{o}^{+\infty}te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$. 所以我們可寫爲

$$\Gamma(n+1)=\sqrt{2n}\,n^ne^{-n}\left(\sqrt{\pi}+\frac{\omega}{\sqrt{2n}}\right), \tag{29}$$

ω 在 -1 及 $+1$ 中間,

若 n 是一個極大的數, $\dfrac{\omega}{\sqrt{2n}}$ 是極小,取

$$\Gamma(n+1)=n^ne^{-n}\sqrt{2n\pi}$$

爲 $\Gamma(n+1)$ 的近似值,雖絕對差誤能是甚大,而相對差誤則甚

小.取公式(29)兩邊的對數,又得

$$\log\Gamma(n+1)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{2}\log(2\pi)+\varepsilon, \tag{30}$$

在n極大時,ε極小.略去ε,所得公式叫作$\log\Gamma(n+1)$的<u>漸近價值</u>(valeur asymptotique).這個公式是很有興趣的,牠顯明一個連乘積(factorielle)的廣大的度.

習題

1. 計算下列函數的無定積分:

$$\frac{1}{(x^4+1)^2},\ \frac{1}{x(x^3+1)^3},\ \frac{x^4-x^3-2x^2-x}{(x^2+1)^3},\ \frac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}},\ \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}},\ \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)}},\ \frac{x}{\cos^2 x},\ xe^x\cos x,$$

$$\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a+x^{n+2}}},\quad x^n\operatorname{arctang}x,$$ n是一個分數$\frac{p}{q}$.

2. 決定一個最普通的五次多項式$P(x)$,使積分

$$\int\frac{P(x)dx}{x^3(x^4+1)^2}$$ 是一個有理函數.

3. 計算積分$\int ydx$,x及y間有下列的一個關係式:

$$(x^2-a^2)^2-ay^2(2y+3a)=o,\quad y^2(a-x)=x^3,$$

$$y(x^2+y^2)=a(y^2-x^2),\quad x^3+y^3-3axy=o.$$

4. 證明公式

$$\int\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}+C,$$

$$\int\sin^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\sin nx}{n}+C,$$

$$\int\cos^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\cos^n x\sin nx}{n}+C,$$

$$\int\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=-\frac{\cos^n x\cos nx}{n}+C.$$

5. 計算假橢圓積分(integrales pseudo-elliptiques)

$$\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}},\quad \int\frac{(1-x^2)dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

6. 將下列積分變爲橢圓積分

$$\int\frac{R(x)dx}{\sqrt{a(1+x^6)+bx(1+x^4)+cx^2(1+x^2)+dx^3}},$$

$$\int\frac{R(x)dx}{\sqrt{a(1+x^8)+bx^2(1+x^4)+cx^4}},$$

$R(x)$ 表一個有理函數.

7. 曲線 $y=Ax^{\mu}$ 的長度計算演爲二項微分式的積分,求出能積分的場合.

8. 假定 $a>1$,得

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

由此演出

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\pi.$$

9. 假定 $AC-B^2>o$,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\pi\frac{A^{n-1}}{(AC-B^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

應用第97的化法公式.

10. 計算有定積分 $\int_o^{\pi}\frac{\sin^2x\,dx}{1+2a\cos x+a^2}$.

11. 証明公式

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\log\left(\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}\right),\ (\alpha\beta>o),$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta},$$

12. 設 m 及 n 是兩個正整數 $(m>n)$,得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

用有理分數的分解法.

13. 由上題演出關係式

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi},\ (o<a<1).$$

14. 令$I_{p,q}=\int t^q(t+1)^p dt$,則得以下的化法公式

$$(p+q+1)I_{p,q}=t^{q+1}(t+1)^p+pI_{p-1,q},$$

$$(p-1)I_{-p,q}=t^{q+1}(t+1)^{1-p}-(2+q-p)I_{-p+1,q}$$

及類此的對於指數q的兩個化法公式.

15. 求出下列積分的化法公式

$$I_n=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},\ Z_m=\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

16. 求出有定積分$\int_o^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$的化法公式;由此演出對於有定積分$\int_o^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$一個和Wallis公式相似的公式.

17. 計算有定積分$\int_{-1}^{+1}\frac{x^4dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$.

18. 在焦點軸及出自焦點的一個帶徑間的橢圓扇形的面積

$$\mathcal{A}=\frac{p^2}{2}\int_o^\omega\frac{d\omega}{(1+e\cos\omega)^2},$$

p表parametre $\frac{b^2}{a}$, e表離心率(excentricité).

依普通方法,令$\tan\frac{\omega}{2}=t$,再令$t=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}u$,則得

$$\mathcal{A}=ab(\arctan u-e\frac{u}{1+u^2}),$$

証明此式又可寫爲

$$\mathcal{A}=\frac{ab}{2}(\varphi-e\sin\varphi),$$

φ表 anomalie excentrique.

19. 有一個已知平曲線C,設M是其上一點,N及T是在M點的法線及切線和自一定點O向帶徑OM所作垂線的交點,求一切曲線其長度NT或三角形MNT的面積爲常數;書出此曲線的兩枝.

20. 設$A_n=\dfrac{x^{2n+1}}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\displaystyle\int_0^1(1-z^2)^n\cos xz\,dz$.

証明循環公式

$$A_{n+1}=(2n+1)A_n-x\frac{dA_n}{dx}.$$

由此演出公式

$$A_{2p}=U_{2p}\sin x+V_{2p}\cos x,$$

$$A_{2p+1}=U_{2p+1}\sin x+V_{2p+1}\cos x,$$

其中U_{2p},V_{2p},U_{2p+1},V_{2p+1}都是係數是整數的多項式,U_{2p},U_{2p+1}只含有x的偶數乘方.

先驗明這個定律對於$n=1$是確實的,然後由循環公式演出此定律是一般的.

由A_{2p}的算式能証明π^2是無理數,若命$\dfrac{\pi^2}{4}=\dfrac{b}{a}$,將$A_{2p}$中$x$代以$\dfrac{\pi}{2}$,則得一個關係式

$$H_1=a^p\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p}}{2\cdot4\cdot6\cdots4p}\int_0^1(1-z^2)^{2p}\cos\frac{\pi z}{2}\,dz,$$

H_1是一個整數,如此的一個等式是不可能的,因爲在p增加無限時第二邊漸近於零.

21. 用符號$\int$下的微分法計算有定積分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx.$$

22. 証明公式

$$I=\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

〔証明$\frac{dI}{da}=-2I$.〕

23. 由以上的公式演出有定積分

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha-\frac{k^2}{\alpha}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\pi}\,e^{-2k}.$$

24. 自關係式$\frac{1}{a^3}=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-ax}dx$演出公式

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{e^x-1}.$$

25. 証明在n增加無限時積分$\int_{0}^{1}\frac{x^n\log x}{1-x^2}dx$漸近於零.由此演出有定積分$\int_{0}^{1}\frac{\log x\,dx}{1-x^2}$的級數展開式.

〔註一〕參觀第67節及第四章習題3及6.

〔註二〕這個性質屬於Serret所發現的一類曲線(cours de calcul différentiel et intégral, *t*. II, *p*. 264).

〔註三〕依危伊斯特拉斯的一個定理(第九章)這是在(a,b)區域內的一個連續函數的普通性質.

〔註四〕若是些能積分函數$f_n(x)$在牠們的集合內是限制的,就是說不論x及n如何牠們有一個極限$f(x)$, $f_n(x)$的積分

的極限是$f(x)$的積分(Lebesgue, Leçons sur l' intégration p. 114).此定理的特別場合:f及f_n都是連續函數,已爲Osgood所証(American Journal 1897).

〔註五〕關於符號$\int$下的微分法,第九十六節的定理同樣的可以自同節中公式(51)演出.假定這兩個函數$f(x,\alpha)$及$f'_\alpha(x,\alpha)$對於$x\geqq a$, $\alpha_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$是連續的,又這兩個積分

$$F(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)dx,\quad \Phi(\alpha)=\int_a^{+\infty}f'_\alpha(x,\alpha)dx$$

皆有意義,並假定此最後積分在區域(α_0,α_1)內是均一收斂的.依公式(51),若α常在α_0及α_1中間,我們有

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}du\int_a^{+\infty}f'_u(x,u)dx=\int_a^{+\infty}dx\int_{\alpha_0}^{\alpha}f'_u(x,u)du,$$

這又可寫爲

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Phi(u)du=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)dx-\int_a^{+\infty}f(x,\alpha_0)dx=F(\alpha)-F(\alpha_0);$$

由此得等式

$$F'(\alpha)=\Phi(\alpha).$$

〔註六〕Briot, Leçons d' Algèbre 18e édition, p. 525).

第　六　章

二重積分 (intègrales doubles).

I.——二重積分——計算法.

格林 (Green) 公式.

111. 和數 S 及 s.——設有一個平面領域 (domaine plan) A 爲一個閉線 (contour) Γ 所限,這個閉線 Γ 能夠由單獨的一個閉曲線 C 所成,或由一個閉曲線 C 及在 C 內的些閉曲線 $C', C'', \cdots$ 所成.假想由許多輔助曲線將領域 A 分爲較小的 n 個領域 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.這個分法所用的方法是任意的,但是我們假定領域 a_i 都是能方的.設 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 是這些部分領域的面積,Ω 是領域 A 的面積.無論區分 A 時所用方法如何,我們都得着

$$\Omega = \sum_1^n \omega_i.$$

設 $f(x,y)$ 是在領域 A (閉線 Γ 在內) 的一個限制函數,M 及 m 是 $f(x,y)$ 在此領域內的上限及下限.平面中領域 A 既分爲更小部分 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,設 ω_i 是 a_i 的面積,M_i 及 m_i 是 $f(x,y)$ 在 a_i 中的上下限,我們作兩個和

$$S = \sum_{i=1}^n \omega_i M_i, \quad s = \sum_{i=1}^n \omega_i m_i;$$

如此,對於 A 的每一個分法都有一個大和 S 及一個小和 s 相應.這些和 S 顯然大於 $m\Omega$,所以牠們有一個下限 I.同樣這一切的和 s 都小於 $M\Omega$;所以牠們有一個上限 I'.如前所見 (n^o69),我們可以證明 $I' \leqq I$,這是根據以下的普通命題,完全和 n^o70 的命題相同.

在 n 增加無限時,所用的方法使一切領域 a_i 的所有的度(dimensions) 漸近於零,和數 S 及 s 各有一個極限 I 及 I'.

爲簡單計,如果能得一個圓周,半徑是 l,包含平面的一個有限部分 A 在內,我們就說 A 的所有的度都小於 l. 對於平面中一個變化部分,若能求得一個半徑極小的圓周,包含此平面部分在內,我們就說此平面部分是無限小在牠的所有的度上。例如一個正方形牠的邊漸近於零,或一個橢圓牠的兩軸漸近於零,牠們都是無限小在所有的度上,反之,一個長方形牠的一個邊漸近於零,或一個橢圓牠的一個軸漸近於零都不是無限小在所有的度上.

我們試證明 S 的極限是 I. 我們能夠假定 $f(x,y)$ 在領域 A 中是正,這是因爲我們總可以求得一個正常數 C,使函數

$$\varphi(x,y)=C+f(x,y)$$

在 A 內是正,對於同一分法,關於函數 f 及 φ 的和 S 及 S' 相差的是一個常數量 $C\Omega$.

設 ε 是一個任何正數;I 既是和數 S 的下限,必有一個分法分領域 A 爲 n 個部分領域 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 使相應和數 S 小於 $I+\dfrac{\varepsilon}{2}$. 令圍線 Γ 及實行此分法在領域 A 內所畫的輔助線的集合爲 L. 設 ω_i 是領域 a_i 的面積,γ_i 是此領域的圍線,在領域 a_i 內我們畫一個閉圍線 γ'_i,牠和 γ_i 沒一個公共點,然而牠和 γ_i 充分相近,能使此二圍線 γ_i 及 γ'_i 間的面積小於 $\dfrac{\eta}{n}$, η 是一個任意正數,懸想對於一切部分領域 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 同樣作法,設 L' 是如此所畫的曲線 γ'_i 的集合. L' 分領域 A 爲 A' 及 A''; A' 由曲線 γ'_i 所限領域 a'_i 的集合所成, A'' 是除去 A' 所餘領域,若 Ω', Ω'' 表此兩領域的面積,我們有 $\Omega=\Omega'+\Omega''$,依所選曲線 γ_i 的方法,差數 $\Omega-\Omega'$ 或 Ω'' 必小

於η.曲線L及L'旣沒有一個公共點,我們用λ表L上一點及L'上一點的最小距離.

現在用一個任意分法將領域A分爲部分領域,牠們都小於λ在所有的度上,設S'是相應的大和.和曲線L沒有一個公共點的部分領域,給與S'一個和小於S.他一方面,和曲線L有一個公共點的部分領域都在領域A'內,牠們給與S'一個和數小於$M\eta$.所以我們有

$$S'<S+M\eta<I+\frac{\varepsilon}{2}+M\eta;$$

若是取任意數η小於$\frac{\varepsilon}{2M}$,我們必有$S'<I+\varepsilon$,即此可證明定理.

同樣,我們也可以證明s的極限是I'.若領域A分爲p個部分領域$A_1,A_2,\cdots,A_p$,可見我們有關係式$I=I_1+\cdots+I_p$,$I'=I'_1+\cdots+I'_p$,I_i及I'_i是方纔關於領域A_i所定的數.

112. 二重積分.——若此二數I及I'相等,函數$f(x,y)$就說在領域A內是能積分的.和數S及s的這個公共極限I叫作函數$f(x,y)$擴充在領域A內的二重積分.我們表以記號〔註一〕

$$I=\iint_{(A)}f(x,y)dxdy,$$

平面中此部分A叫作積分的場(champ d' intégration).

和在單積的場合相同,可見若要一個函數$f(x,y)$在A內是能積分的,必須要然只須要這些部分領域的最大度漸近於零時,差數$S-s$漸近於零.凡一個連續函數都是能積分的.誠然,假定我們取一個正數η,凡A的一個部分領域的所有度都小於η時,函數的限差必小於ε.若所有部分$a_1,a_2,\cdots,a_n$的度都小於η,差數M_i-m_i中每一個就都小於ε,差數$S-s$就小於$\varepsilon\Omega$.

和上相同(n^o71),我們可證明一個若干數的能積分函數的

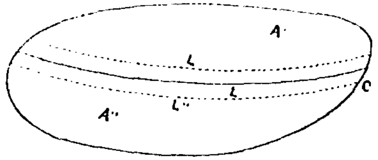
和或積也是能積分的.若一個函數$f(x,y)$在一個領域A內是能積分的,牠在A內的任何領域A'內也就是能積分的;若領域A分爲許多部分領域$A_1, A_2, \cdots, A_p$,擴充在A的二重積分就等於擴充在$A_1, A_2, \cdots, A_p$的二重積分的和.

再取一個更爲普通的場合,一個限制函數$f(x,y)$,牠在領域A內有無限的不連續點,然而這些不連續點能夠包圍在一個領域δ內,δ的面積小於一個任何預定的數.如此的一個函數在A內是能積分的.誠然,一個函數$f(x,y)$能積分的條件可以宣告如下:必須要然只須要對於任一正數ε,能夠將A分爲部分領域使相應差數$S-s$小於ε,這是因爲差數$S-s$至少等於$I-I'$的緣故.

這個業已說明,爲確定人的觀念,我們假定對於閉曲線C所限的領域A內,限制函數$f(x,y)$是連續的,除却對於一個曲線L上所有點爲例外,這個曲線L分領域A爲兩個領域A'及A''.在領域A'內,函數$f(x,y)$合於一個連續函數$f_1(x,y)$,在領域A''內,合於一個連續函數$f_2(x,y)$.對於函數$f(x,y)$在L上的價值我們不作一點別的假定,但是假定牠們是限制的.在A內從曲線L的每一邊,我們引兩個相鄰極近曲線L'及L'',使在L'及L''間面積小於$\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$,$\varepsilon$是一個已知正數.這兩曲個線$L'$, L''分A爲三個域領A', A'', A''', A'''是包有L的領域.懸想將A', A'', A'''分爲更小的領域,由A'''所得$S-s$的部分小於$\dfrac{\varepsilon}{2}$. $f(x,y)$在領域A'及A''內旣是連續的,若適宜的選擇這個分法,由A'及A''所得$S-s$的部分也就小於$\dfrac{\varepsilon}{2}$.所以我們有$S-s<\varepsilon$; ε是一個任意正數,所以$f(x,y)$在A內是能積分的.這個推理顯然是一般的.

在 A 的二重積分等於在 A', A'', A''' 內的二重積分的和.在曲線 L', L'' 和 L 無限相近時,在 A''' 內的二重積分漸近於零;所以在 A 內的二重積分是在 A' 及 A'' 內的二重積分的和的極限,牠不關

圖　十　六



係於函數在曲線 L 上的價值.一般若是一個函數 $f(x,y)$ 在區域 A 內是能積分的,我們能任意的在無限的點上將函數的價值更換,但必須此函數是限制的,又必須這些點能夠包含在一個領域 δ (相連或否)內,此領域的面積小於一個任何已知正數,如此,積分的價值並不改變.這個注意可以和以下的注意並列.在計算和數 S 的極限 I 時,我們能夠在此和數中略去由若干部分領域所得的部分,但必須這些領域的面積的和漸近於零.

二重積分的定義能夠更爲推廣.設 (ξ_i,η_i) 是部分 a_i 內或圍線上的一點;可見和數 $\Sigma f(\xi_i,\eta_i)\omega_i$ 是在兩個和數 S 及 s 中間;所以牠的極限也是此二重積分,(ξ_i,η_i) 點如何選擇俱不論.

第一平均值定理能夠推廣在二重積分上.設 $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ 是兩個能積分函數,其中一個 $\varphi(x,y)$ 在 A 內保有一個固定符號,譬如 $\varphi(x,y)>o$. 若 M 及 m 是 $f(x,y)$ 在 A 內的上下限,可見我們有

$$M\varphi(\xi_i,\eta_i)\omega_i > f(\xi_i,\eta_i)\omega_i > m\varphi(\xi_i,\eta_i)\omega_i;$$

將這些不等式相加,進至極限,我們有

(1) $$\iint_{(A)} f(x,y)\varphi(x,y)dxdy = \mu\iint_{(A)} \varphi(x,y)dxdy,$$

μ是在M及m中間.若函數$f(x,y)$是連續的,牠在圍線C內一點(ξ,η)取得價值μ,我們又可寫爲

(2) $$\iint_{(A)} f(x,y)\varphi(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint_{(A)} \varphi(x,y)dxdy;$$

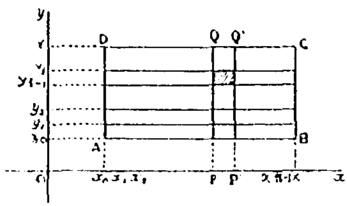
這是二重積分的平均值公式.若是$\varphi(x,y)=1$,積分$\iint dxdy$擴充在平面的部分A中顯然等於此部分的面積Ω,公式(1)成爲

(3) $$\iint_{(A)} f(x,y)dxdy = \Omega f(\xi,\eta).$$

113. **二重積分的計算法.**——一個二重積分的計算法變爲連續計算兩個單積分.先假定積分的場是一個矩形以直線$x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$爲界.

設PQ是平行於oy軸的一個直線,橫坐標是x在x_0及X中間.用$I(x)$表取在矩形居PQ之左的部分內的二重積分$\iint f(x,y)dxdy$的價值.這個積分$I(x)$顯然是x的連續函數,牠在$x=x_0$時爲零.欲得牠的導來式$I'(x)$,只須計算增長$I(x+h)-I(x)$的主部分.這個差數等於在矩形內一個長條$PQP'Q'$間的二重積分的價值,PQ及$P'Q'$是oy的平行線,橫坐標是x及$x+h$.欲得

圖十七



牠的式子,懸想用x軸的平行線$y=y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,y_i和指數同時漸增,將此長條分爲小矩形.應用平均值公式在每一個小矩形

上,得

$$(4)\qquad I(x+h)-I(x)$$
$$=h[(y_1-y_0)f(\xi_1,\eta_1)+\cdots+(y_i-y_{i-1})f(\xi_i,\eta_i)+\cdots],$$

(ξ_i,η_i)是直線PQ, $P'Q'$及x軸的平行線$y=y_{i-1}$, $y=y_i$所成矩形內一點的坐標.他一方面,應用平均值公式在一個單積分上,我們有

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x,y)dy=(y_i-y_{i-1})f(x,y'_i),\ y_{i-1}<y'_i<y_i$$

若令$f(\xi_i,\eta_i)-f(x,y'_i)=\varepsilon_i$,差數

$$I(x+h)-I(x)$$

可寫爲

$$h\left[\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dy+\varepsilon_1(y_1-y_0)+\cdots+\varepsilon_i(y_i-y_{i-1})+\cdots\right].$$

這兩點(ξ_i,η_i)及(x,y'_i)都在同一部分矩形內.$f(x,y)$既是均一連續的,我們能取數h及一切差數y_i-y_{i-1}有充分的小,使一切絕對值$|\varepsilon_i|$都小於一個任意選擇的正數ε.我們又有

$$(5)\qquad I(x+h)-I(x)=h\left[\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dy+\varepsilon'\right],$$

ε'的絕對價值小於$\varepsilon(Y-y_0)$.所以在h漸近於零時,商

$$\frac{I(x+h)-I(x)}{h}$$

的極限是$\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dy$,因而積分$I(x)$等於$\int_{x_0}^{x} dx\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dy$.特殊的,取在全矩形的二重積分爲以下的公式所給與

$$(6)\qquad \iint_{(R)} f(x,y)\,dxdy=\int_{x_0}^{X} dx\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dy;$$

故欲得二重積分的價值,當先將x看作常數,將y看作變數,在極限y_0及Y內積分$f(x,y)$;所得結果是一個變數x的函數,再將此函數在極限x_0及X間積分.

顛倒這個次序,就是說先計算和數S由ox兩個平行線間—

列直方形所得部分,我們就得着

$$\iint_{(R)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{y_0}^{Y} dy\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx,$$

合此兩個公式,可以寫爲

$$\int_{x_0}^{X} dx\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy=\int_{y_0}^{Y} dy\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx;$$

我們復得符號$\int$下的積分法公式.這個證明法,和第一個証明法同 (n^{o}95),是假定極限x_0, y_0, X, Y是固定的,又假定函數$f(x,y)$在此極限內是連續的.

例.——設$z=\dfrac{xy}{a}$.由普通公式,我們得

$$\iint_{(R)} \frac{xy}{a}\,dx\,dy=\int_{x_0}^{X} dx\int_{y_0}^{Y} \frac{xy}{a}\,dy$$

$$=\int_{x_0}^{X} \frac{x}{2a}(Y^2-y_0^2)\,dx=\frac{1}{4a}(X^2-x_0^2)(Y^2-y_0^2).$$

一般,若函數$f(x,y)$是x的一個函數及y的一個函數的積,我們得

$$\iint_{(R)} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy=\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx\times\int_{y_0}^{Y} \psi(y)\,dy;$$

第二端的兩個積分彼此間是絕對沒有關係的.

由此注意,弗郎克蘭 (Franklin) 演出幾個極有興趣的定理的證明法,這些定理是澤比色夫(Tchebicheff) 所創 (American Journal of mathematics *t.* VII).設$\varphi(x)$及$\psi(x)$是區域(a,b)內兩個連續函數,$a<b$.依以上的注意,取在四個直線$x=a$, $x=b$, $y=a$, $y=b$所限方形內的二重積分

$$\iint [\varphi(x)-\varphi(y)]\,[\psi(x)-\psi(y)]\,dx\,dy$$

等於

$$2(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx-2\int_a^b \varphi(x)dx\times\int_a^b \psi(x)dx$$

然而若兩個函數 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 都是同時上升的或同時下降的,或是在一個上升時牠一個下降,二重積分的一切原素就都有相同的符號.這是因爲在第一場合,兩個差數 $\varphi(x)-\varphi(y)$, $\psi(x)-\psi(y)$ 常有相同的符號,在第二場合,牠們符號相反,所以若此兩個函數 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 都是上升的或都是下降的,我們有

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx>\int_a^b \varphi(x)dx\times\int_a^b \psi(x)dx.$$

和此相反,若二函數在此同一區域內一個是上升,牠一個下降,我們有

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx<\int_a^b \varphi(x)dx\times\int_a^b \psi(x)dx.$$

在 $\psi(x)=\varphi(x)$ 時,二重積分的符號並無不定,這是因爲在此場合應行積分的函數成爲一個完全平方的緣故.所以無論 $\varphi(x)$ 如何,我們有關係式

$$(b-a)\int_a^b [\varphi(x)]^2dx\geqq\left[\int_a^b \varphi(x)dx\right]^2,$$

這個等號只在 $\varphi(x)$ 爲一個常數時方能實現.

由此結果,能演出變分法上一個極有興趣問題的解.設 P 及 Q 是平面上兩點,坐標各爲 (a,A) 及 (b,B).設 $y=f(x)$ 是連此兩點的一個曲線的方程式. $f(x)$ 及牠的第一級導來式在區域 (a,b) 都是連續的.試就這些曲線中求出一個,對於牠,積分 $\int_a^b y'^2dx$ 是最小.

在以上的不等式中用 y' 代 $\varphi(x)$,再注意由假定 $f(a)=A$, $f(b)=B$,得

$$(b-a)\int_a^b y'^2dx \geqq (B-A)^2$$

所以積分的最小價值等於$\dfrac{(B-A)^2}{b-a}$，這個最小價值惟在 y' 是常數時方能達到,就是說曲線是連合 P,Q 兩點的直線 PQ.

114. 積分的場是任何的場合. ——我們先將公式(6)推廣,假定函數 $f(x,y)$ 在矩形 $ABCD$ 內有一個或多個不連續線,但在這些線上,此函數仍是限制的.爲確定人的觀念,假定函數 $f(x,y)$ 在一個線 L 上是不連續(或至少在此線的某一部分上是不連續),此線連合 AD 上一點及 BC 上一點,爲一個方程式 $y=\varphi(x)$ 所表,函數 $\varphi(x)$ 在區域 (x_0,X) 內是連續的.此線 L 分矩形 R 爲兩部分,一部分 R_1 在 L 下,在此部分內 $f(x,y)=f_1(x,y)$, $f_1(x,y)$ 在 R_1 內是連續的,一部分 R_2 在 L 上,在此部分內 $f(x,y)=f_2(x,y)$, $f_2(x,y)$ 在 R_2 內是連續的.我們已見(第 112 節)此函數 $f(x,y)$ 是能積分的.

欲得此二重積分的式子,只須將上節的推理稍加修改,方纔所定的積分 $I(x)$ 是兩個二重積分 $I_1(x)$, $I_2(x)$ 的和,這兩個積分取在領域中 oy 的平行線 PQ 之左兩個部分內,此兩部分一個在 L 線上,牠一個在下,欲得導來式 $I'_1(x)$,用 ξ 表 $\varphi(x)$ 在區域 $(x,x+h)$ 內的最小縱坐標;我們將 $I_1(x+h)-I_1(x)$ 分爲兩個積分

$$I_1(x+h)-I_1(x)=J+j$$

J 是一個二重積分取在長條 R_1 內在直線 $y=\xi$ 下, j 也是取在此長條以內在直線 $y=\xi$ 上.和上節相似,我們能証明

$$J=h\left[\int_{y_0}^{\xi} f_1(x,y)\,dy+\eta_1\right]$$

$$=h\left[\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy+\int_{\varphi(x)}^{\zeta} f_1(x,y)\,dy+\eta_1\right]$$

因而

$$J=h\left[\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy+\eta_2\right]$$

η_1及η_2都和h同時為無限小.他一方面,我們有

$$|j|<Mh\delta$$

M是$|f|$在區域$(x,x+h)$內的上限,δ是$\varphi(x)$在此區域內的限差.函數f既是連續的,比$\frac{j}{h}$和h同時漸近於零,所以

$$F'_1(x)=\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy.$$

導來式$F'_2(x)$也是同樣計算,合

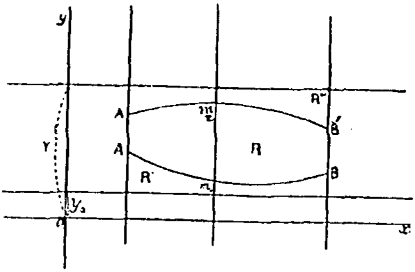
$$\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy=\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy+\int_{\varphi(x)}^{Y} f_2(x,y)\,dy,$$

二重積分$\iint_{(R)} f(x,y)\,dx\,dy$的價值即為公式(6)所給與.顯然可見這個方法是一般的,在矩形$ABCD$內任有若干個和L相類的不連續線都是一樣,只要在這些線上函數$f(x,y)$是有限制的.

這個業已說明,現在我們取一個圍線牠和Oy的一個平行線只相遇於兩點.這個圍線總可以假定是以下的諸線所成:兩個部分直線AA', BB',牠們在Oy的兩個平行線$x=a$, $x=b$上$(a<b)$,及二個曲線弧Am_1B, $A'm_2B'$,為方程式$y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$所表,$(y_2\geqq y_1)$,函數φ_1, φ_2在a及b間是連續的.這些點A及A', B及B'也能夠是相合的.圍線是一個閉曲線時就是這個場合,譬如一個橢圓.設$f(x,y)$是一個函數,牠在此圍線所限領域R內及圍線上都是連續的.欲計算二重積分,懸想有兩個平行於Ox軸的直線$y=y_0$, $y=Y$,領域R盡包在此二平行線內,設T是此四直線$x=a$,

$x=b$, $y=y_0$, $y=Y$ 所限的一個直方形(圖18).

圖 十 八



曲線Am_1B, $A'm_2B'$分此直方形T爲三個領域,R,R'及R'',R'在Am_1B下,R''在$A'm_2B'$上.設一個輔助函數$F(x,y)$,牠在T內的定法如下:1^0在R內及R的圍線上,$F(x,y)=f(x,y)$; 2^0在R'及R''內,$F(x,y)=o$,顯然可見

$$\iint_{(R)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{(T)} F(x,y)\,dx\,dy.$$

公式(6)可以應用在此函數$F(x,y)$上,牠有兩個不連續線Am_1B, $A'm_2B'$,我們有

$$\iint_{(T)} F(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_0}^{Y} F(x,y)\,dx\,dy.$$

牠一方面,依函數$F(x,y)$的定法,我們有

$$\int_{y_0}^{Y} F(x,y)\,dy=\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy,$$

結果,

$$(7)\qquad \iint_{(R)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy.$$

第一個積分法仍是將x看作常數,但是極限y_1及y_2都是x的函數,不是常數.

例. 設計算函數$\frac{xy}{a}$的二重積分,取在坐標軸及圓周$x^2+y^2-R^2=o$所限平圓的四分之一內,x的極限是O及R,若x看作常數,y能自o變至$\sqrt{R^2-x^2}$,所以積分的式子是

$$\int_o^R dx\int_o^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{xy}{a}dy=\int_o^R\frac{x}{2a}\Big[y^2\Big]_o^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\int_o^R\frac{x(R^2-x^2)}{2a}dx;$$

這個積分甚易求出,牠的價值是$\frac{R^4}{8a}$.

在積分區域爲一個任何形狀的閉線所限時,我們分爲許多部分區域,使每一區域的閉線只和Oy軸的一個平行線相遇於兩點,我們也可以分爲部分區域,使每一部分區域的閉線只和ox軸相遇於兩點,先作關於變數x的積分法,作爲例,我們取一閉凸曲線(courbe fermée convexe)在直方形$x=a, x=b, y=c, y=d$內,此直方形的各邊經過A, B, C, D四點,在此四點上,x或y是最小或最大,設$y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$是曲線弧ACB, ADB的方程式,同樣設$x_1=\psi_1(y)$, $x_2=\psi_2(y)$是曲線弧CAD, CBD的方程式;〔註二〕$\varphi_1(x)$及$\varphi_2(x)$在a及b間都是連續的;$\psi_1(y)$及$\psi_2(y)$在y自c變至d時都是連續的,在此閉線內的一個連續函數$f(x,y)$,我們能由兩個方法以計算牠的二重積分,今所得兩個式子相等,得

$$(8)\qquad \int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{x_1}^{x_2}f(x,y)dx;$$

這兩個積分的極限完全不同,凡一個凸閉線都供給一個此類的公式,例如取一個三角形爲積分區域,此三角形爲直線$y=o$, $x=a$, $y=x$所限,我們得一個公式

$$\int_o^a dx\int_o^x f(x,y)dy=\int_o^a dy\int_y^a f(x,y)dx,$$

此公式是底里格來(Dirichlet)所創.

115. 二重積分和單積分的相同性(analogie)—— 單積分$\int_a^x f(t)dt$看成x的函數時,牠的導來式就是$f(x)$. 對於二重積分也有相同的定理.設$f(x,y)$是在直線$x=a, x=A$, $y=b$, $y=B(a<A, b<B)$所限矩形內一個連續函數. $f(x,y)$在直線$x=a$, $x=X$, $y=b$, $y=Y$所限矩形內的二重積分是此變化頂點的坐標X,Y的函數,我們可寫爲

$$F(X,Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x,y)dy.$$

令$\Phi(x)=\int_b^Y f(x,y)dy$先取關於$X$的導來式,得

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\Phi(X)=\int_b^Y f(X,y)dy$$

再關於Y取導來式,得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}=f(X,Y). \tag{9}$$

能滿足關係式(9)的最普通的函數$u(X,Y)$甚易得來,只須在$F(X,Y)$上加一個函數z牠的第二級導來式$\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y}$等於零.此函數$u(X,Y)$的形狀當是

$$u(X,Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x,y)dy+\varphi(X)+\psi(Y), \tag{10}$$

$\varphi(X)$及$\psi(Y)$是兩個任意函數.我們能處理這兩個任意函數使在$X=a$時,$u(X,Y)$成爲一個已知函數$V(Y)$,在$Y=b$時成爲又一函數$U(X)$;這兩個函數當然爲關係式

$$U(a)=V(b)$$

所連合.在關係式(10)中逐漸令$X=a$, $Y=b$,即得兩個條件

$$V(Y)=\varphi(a)+\psi(Y),\quad U(X)=\varphi(X)+\psi(b);$$

由此取出

$$\psi(Y)=V(Y)-\varphi(a),\quad \psi(b)=V(b)-\varphi(a)$$

$$\varphi(X)=U(X)-V(b)+\varphi(a),$$

公式(10)成爲

$$(11)\qquad u(X,Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x,y)dy+U(X)+V(Y)-V(b)$$

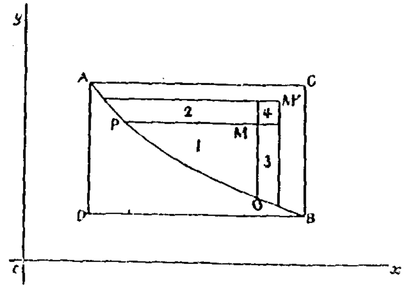
倒轉來,不論由何方法,若已得到一個函數 $u(X,Y)$ 滿足關係式(9),由一個和上相同的計算卽得二重積分的價值

$$(12)\qquad \int_a^X dx\int_b^Y f(x,y)dy=u(X,Y)-u(X,b)-u(a,Y)+u(a,b).$$

現在我們作一個和此稍異的假定,將矩形的兩邊代以曲線弧如 AB (圖19),弧上一點的橫坐標漸增時,縱坐標常下降.

設 $f(x,y)$ 是在矩形 $ACBD$ 內一個連續函數,M 是矩形內

圖　十　九



任一點的坐標,由此點所引兩軸的平行線各過 AB 弧於 P,Q,取在混合線三角形 PMQ 內的二重積分

$$F(X,Y)=\iint_{(PMQ)} f(x,y)dxdy$$

是此矩形內一個連續函數,將此二重積分寫作(7)的形狀,甚易顯明牠也滿足關係式(9).用以下的方法又可直接將此看出.我們給 X 一個增長 h,Y 一個增長 k;如此即自 M 點到 M' 點.

用(1),(2),(3),(4)表取在圖中和此數字相應領域的二重積分,得

$$F(X+h,Y+k)=(1)+(2)+(3)+(4),$$

$$F(X+h,Y)=(1)+(3),\quad F(X,Y+k)=(1)+(2),$$

所以

$$\frac{F(X+h,Y+k)-F(X,Y+k)-F(X+h,Y)+F(X,Y)}{hk}=\frac{(4)}{hk};$$

在 h 及 k 漸近於零時(第二十一節),第一邊的比漸近於極限 $\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}$.他一方面,應用平均值公式在二重積分(4)上,得 $(4)=hkf(X+\theta h,Y+\theta k)$.令 h 及 k 漸近於零,適得公式(9).

方程式(9)的積分 $F(X,Y)$ 沿 AB 弧上爲零,牠兩個第一級偏導來式也是如此;誠然,由圖直接可見若 M 點在 AB 弧上,對於 X 的一個增長 h,$F(X,Y)$ 有一個相應增長是第二級無限小.

公式(12)和基本公式(8)相同(看第七十五節).

以下的公式又現出部分積分法的一個相同性.

設 A 是平面中一個有限部分,由一個或數個任何形狀的曲線所限.一個函數 $f(x,y)$ 在 A 是連續的,牠在一個最小 v_0 及一個最大 V 間變化.假想已經畫出些等力線(courbe de niveau) $f(x,y)=v$, v 是在 v_0 及 V 中間,我們假定能求得 A 中一部分面

積在此面積內，$f(x,y)$ 常在 v_0 及 v 中間這個面積是一個函數 $F(v)$，和 v 同時漸增，在兩個無限相近的等力線中間的面積等於

$$F(v+\triangle v)-F(v)=\triangle v F'(v+0\triangle v).$$

若用些線連合兩個相鄰的等力線，將此面積分爲無限小的部分面積，在每一部分面積內就能取一點(ξ,η)使$f(\xi,\eta)=v+0\triangle v$，自此部分所得二重積分$\iint f dxdy$ 的原素的和是

$$(v+0\triangle v)F'(v+0\triangle v)\Delta v,$$

所以二重積分等於

$$\Sigma(v+0\Delta v)F'(v+0\Delta v)\Delta v$$

的極限，就是說等於單積分

$$\int_{v_0}^{V} vF'(v)dv=VF(V)-\int_{v_0}^{V}F(v)dv.$$

若積分的場是兩個等力線

$$f(x,y)=v_0,\ f(x,y)=V$$

所限，這個方法特形便利，例如計算二重積分$\iint\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$ 取在平圓 $x^2+y^2=1$ 內，若令 $v=\sqrt{1+x^2+y^2}$，積分的場就是爲兩個等力線 $v=1$，$v=\sqrt{2}$ 所限，函數 $F(v)$ 祇是半徑等於 $\sqrt{v^2-1}$ 的一個平面的面積等於 $\pi(v^2-1)$，所以二重積分等於

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2\pi v^2 dv=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).〔註三〕$$

以上的公式甚易推廣到二重積分

$$\iint f(x,y)\varphi(x,y)dxdy$$

上，只須用 $F(v)$ 表取在積分場內爲等力線 $v=f(x,y)$ 所限部分的二重積分 $\iint f(x,y)dxdy$.

116. 格林公式 (formule de Green).——若函數 $f(x,y)$ 是一個已知函數關於 x 或 y 的導來式,兩個積分法中的一個立可實行,這個二重積分就變爲一個面積法 (quadrature). 這個簡單的注意引起一個重要公式,叫作<u>格林公式</u>.

我們先取一個二重積分 $\iint\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$, 此積分擴充在平面上閉線 C 所限的部分內,如圖十八,此閉線是平行於 oy 的兩個直線 AA', BB', 及兩個曲線弧 Am_1B, $A'm_2B'$. 在 AA' 及 BB' 間平行於 oy 的一個直線,遇曲線弧 Am_1B 及 $A'm_2B'$ 於兩點 m_1 及 m_2, 牠們的縱坐標是 y_1 及 y_2. 試先關於 y 積分,二重積分的式子成爲

$$\iint\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int_a^b[P(x,y_2)-P(x,y_1)]dx.$$

然而這兩個積分 $\int_a^b P(x,y_1)dx$, $\int_a^b P(x,y_2)dx$ 正等於沿曲線弧 Am_1B 及 $A'm_2B'$ 所取的曲線積分.因爲曲線積分 $\int_{AA'}Pdx$, $\int_{BB'}Pdx$ 都等於零,我可將上式寫爲

$$(13)\qquad \iint\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int_{(C)}Pdx,$$

若坐標軸的位置法如圖所示,此曲線積分就是依正向沿閉線 C 上取的.欲將此公式擴充在一個任何形狀閉線所限面積上,我們仍用 (n^o92) 的計劃,將此面積用些橫斷線分爲許多部分面積,使每一個部分面積的閉線都能滿足以上的條件,然後應用公式在每一個部分面積上,同一方法,我們得公式

$$(14)\qquad \iint\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_{(C)}Qdy,$$

此曲線積分仍是依同一方向取的,將等式(13),(14)相減,得

$$(15)\qquad \int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

這個二重積分是擴充在閉線C所限的面積上的.這是格林公式,牠有重要的實用.若用$Q=x, P=-y$,即得以前($n^{\circ}92$)所得的公式,此公式是用一個曲線積分表明一個閉曲線的面積.

> 用α', β'表內法線和坐標軸所作的角(看第九十二節),將Q代以$-Q$,格林公式又可寫為
>
> $$(15')\qquad \iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy + \int_{C}(P\cos\beta' + Q\cos\alpha')\,ds = o.$$
>
> 這個公式不關係坐標軸ox, oy的位置.公式(15)也可以應用,位置法如何不論,只要用以上的方法將周圍上進行的正向確定.

注意.——在公式(13)中用兩個因子的積uv代P,得

$$\iint u\,\frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy + \iint v\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{(C)} uv\,dx,$$

因而

$$\iint u\,\frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{(C)} uv\,dx - \iint v\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy.$$

同一方法,得

$$\iint v\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{(C)} uv\,dy - \int u\,\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy$$

這和部分積分法公式完全相類.

II.——變數更換法.——體積.——一個曲面的面積.

計算一個二重積分,我們都是假定用坐標軸的平行線將積分的場分為無限小的直方形.現在我們將假定用兩類的任何曲線分此積分的場.

117. 預公式.——設u及v是一點關於一系直交坐標軸的

坐標,在一個平面內,x 及 y 是又一點關於又一系直交軸的坐標,這些軸和前者的位置法相同,在相同的平面內或在另一平面內公式

$$(16)\qquad x=f(u,v),\ y=\varphi(u,v)$$

在此二平面的一切點間定出某一個相應法.我們假定:第一,(u,v) 點在平面 (u,v) 上畫出閉線 C_1 所限部分 A_1 時,此二函數 $f(u,v)$, $\varphi(u,v)$ 都是連續的,又都有連續偏導來式;第二,對於平面 (u,v) 的部分 A_1,由公式(16),平面 (x,y) 中有一個閉線 C 所限的部分 A 相應,又假定此二面積內及此二閉線上的點間有唯一的(univoque)相應法,就是對於 A 的一點,A_1 內只有一點相應;第三,函數定準式 $\Delta=\dfrac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}$ 在 C_1 內不變符號(祂在 A_1 的某某點也可以成為零).

我們仍有兩個場合.在 (u,v) 點依正方向畫出閉線 C_1 時,(x,y) 點當依一個固定方向畫在閉線 C,這個方向能夠是正方向或相反方向.

這個業已說明,平面中部分 A 的面積 Ω 的式子是

$$\Omega=\int_{(C)}x\,dy,$$

此積分是依正方向沿閉線 C 取的.若用公式(16)的變數更換法,我們有

$$\Omega=\pm\int_{(C_1)}f(u,v)\,d\varphi(u,v),$$

這個新積分是依正方向沿 C_1 取的;依這個相應法是正或反,我們當取符號 + 或 −.應用格林公式在此新積分上,令 $u=x, v=y$, $P=f\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, $Q=f\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$,得

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\Delta=\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)},$$

因而

$$(17)\qquad \int_{(C_1)} f(u,v)\,d\varphi(u,v) = \iint_{(A_1)} \frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\,du\,dv,$$

或應用平均值公式在二重積分上,

$$(17')\qquad \Omega = \pm\Omega_1 \frac{D(f,\varphi)}{D(\xi,\eta)},$$

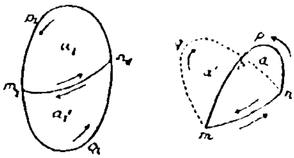
(ξ,η)是C_1內一點的坐標,Ω_1是平面(u,v)中部分A_1的面積.我們可見依Δ是正或負,當取符號$+$或$-$在方程式的第二端上.所以依Δ是正或負,這個相應法就是正或反.(第三章習題13,14)

公式(17)在函數定準式及導來式間又定出一個相同性.誠然,懸想平面部分A_1無限減小在所有方向上,牠所有的點都漸近於一個定點(u,v),A也是如此,面積Ω,Ω_1的比的極限是函數定準式Δ的絕對值;導來式是兩個線的原素的比的極限,Δ是兩個面積原素的比的極限.在這個觀點上,公式(17)和有限增長公式相同.

注意.——我們對於A及A_1的相應法所作的一切假定不盡是各個獨立的.譬如要這個相應法是惟一的,自然連帶着必須要Δ在A_1內不變符號.誠然,假定A_1由一個曲線γ_1分為兩部分,在一部分內Δ是正,在牠一部分內Δ是負,在曲線γ_1上Δ為零.在γ_1上我們取一個小弧m_1n_1,在A_1內取一個極小部分包有弧m_1n_1,此部分由弧m_1n_1分為兩部分a_1及a'_1(圖二十).

在(u,v)點畫出Δ是正面積a_1時,(x,y)點畫出面積a,圍線是$mnpm$,這兩個圍線$m_1n_1p_1m_1$,$mnpm$同時都是依正方向畫出.在(u,v)點畫出Δ是負面積a'_1時,(x,y)點畫出面積a',圍線是$nmqr$,

圖二十



在$n_1m_1q_1n_1$依正方向畫出時,$nmqr$當依相反的方向畫出.那麼,這個面積a'當有一部分掩蓋面積a;對於此兩面積的公共部分nrm內任一點,A_1內都有兩點(u,v)相應各居於m_1n_1弧的一邊.

作爲例子,我們取$X=x$, $Y=y^2$;此處$\Delta=2y$,若(x,y)點畫出一個閉面積包有x軸上一個線分ab,顯然可見(X,Y)點畫出兩個面積都在X軸上方,又都以此軸上一個線分AB爲界.譬如取紙一張在其上畫一直線,依此直線將此紙摺疊,即得(X,Y)點所畫兩個面積的明瞭觀念.

若要相應法是惟一的,Δ在A_1內不變符號－是一個充足的條件.譬如取$X=x^2-y^2$, $Y=2xy$;涉勾層$\Delta=4(x^2+y^2)$常是正.但是若用(r,θ), (R,ω)表兩點(x,y), (X,Y)的極坐標,以上的公式可寫爲$R=r^2$, $\omega=2\theta$.此層已經說明,令r由a變至b $(a<b)$, θ由o變至$\pi+\alpha$ (α在o及$\frac{\pi}{2}$中間).(R,ω)點畫出一個環形在兩個圓周中間半徑是a^2及b^2.然對於ω角在o及2α中間的任一價值,θ有兩個價值相應,一個θ_1在o及α中間,牠一個θ_2在π及$\pi+\alpha$中間.我們也可以用一個環形的紙有一部分自相掩蓋以顯明(X,Y)點所畫的面積.

118. **變數更換法. 第一方法.**——對於區域A,A_1及公式(16),我們保留以上的假定.設$F(x,y)$是在A_1內的一個連續函數.我們用一個任何方法將區域A_1分爲更小區域$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$;和此相應區域$A$有一個分法分爲更小區域$a_1,a_2,\cdots,a_n$.設$\omega_i$及$\sigma_i$是兩個相應區域$a_i$及$\alpha_i$的面積,依公式(17),我們有

$$\omega_i=\sigma_i\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(u_i,v_i)}\right|,$$

u_i, v_i是區域α_i內一點的坐標.對於此點(u_i,v_i),區域a_i內有一點$x_i=f(u_i,v_i)$ $y_i=\varphi(u_i,v_i)$相應.命$\Phi(u,v)=F[f(u,v),\varphi(u,v)]$,我們可寫爲

$$\sum_{i=1}^{n}F(x_i,y_i)\omega_i=\sum_{i=1}^{n}\Phi(u_i,v_i)\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(u_i,v_i)}\right|\sigma_i;$$

進至極限,我們得等式

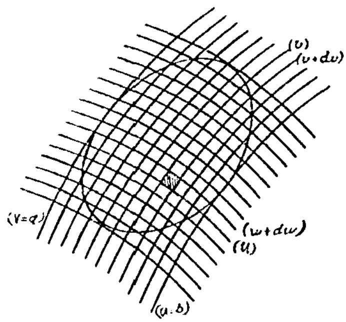
$$(18)\quad\iint_{(A)}F(x,y)dxdy=\iint_{(A_1)}F[f(u,v),\varphi(u,v)]\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right|dudv.$$

所以欲實行一個變數更換法在一個二重積分內,須將x及y代以牠們爲新變數u,v的函數的價值,將積數$dx\,dy$代以$|\Delta|du\,dv$.至於新積分區域,我們已經說明牠的如何定法.

在求此新二重積分的價值時,欲知積分法的極限,普通的並不須要畫出新積分區域A_1的閉線C_1.誠然,我們將u及v看做一系的曲線坐標(coordonnées curvilignes);在公式(16)中,若給變數u或v一個常數價值,但命他一個變化,即得兩類的曲線$u=$ const, $v=$ const.依對於公式(16)的假定,自區域A的每一點上,兩類中各有一個曲線經過而只有一個曲線經過.爲確定人的觀念,我們假定一個曲線$v=$ const.只遇閉線C於兩點M_1,M_2,牠們和u的價值u_1, u_2相應$(u_1<u_2)$,又假定和閉線C相遇的所有曲線(v)都在兩

個曲線$v=a, v=b(a<b)$中間(圖二十一).那麼,若令v為常數,先關於u積分,我們當令u自u_1變至u_2(u_1及u_2普通的是v的函數),然後在極限a及b間積分此結果.

圖二十一



所以所求二重積分的式子是

$$\int_a^b dv \int_{u_1}^{u_2} F\left[f(u,v), \varphi(u,v)\right] |\Delta| \, du.$$

一個變數更換法實際上只是用兩系曲線(u)及(v)將積分區域分為無限小區域.設ω是曲線(u),$(u+du)$,(v),$(v+dv)$所限的曲線四邊形的面積;du及dv都是正數;對於此四邊形,平面(u,v)上有一個直方形相應,牠的邊線是du及dv.依公式(17′),我們有$\omega=|\Delta(\xi,\eta)|dudv$,$\xi$是在$u$及$u+du$中間,$\eta$在$v$及$v+dv$中間.式子$|\Delta(u,v)|dudv$叫做在坐標系$(u,v)$中的面積原素.$\omega$的正確價值是$\omega=\left\{|\Delta(u,v)|+\varepsilon\right\}dudv$,$\varepsilon$是和$du$及$dv$同時為無限小.然而在求和數$\Sigma F(x,y)\,\omega$時可以略去$\varepsilon$.誠然,$\Delta(u,v)$既是一個連續函數,我們可以假定曲線$(u)$及$(v)$充分相近,使一切的$\varepsilon$的絕對值都小於一個任何已知正數,結果,和數$\Sigma F(x,y)\varepsilon dudv$的

絕對值也就小於一個任何正數.

119. 例:第一,極作標(coordonnées polaires).——假設由直交坐標改爲極坐標,我們有 $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$,令 ρ 由 o 變至 $+\infty$, ω 由 o 變至 2π,即盡得平面上所有點.在此場合,面積原素是 $\rho d\omega d\rho$,由幾何法甚易將此證明.先設在平面的一個區域內計算一個二重積分,區域的界線是一個弧 AB,及兩個直線 OA, OB;假定 AB 弧和由原點所出的一個半直線只相遇於一點,二直線 OA 及 OB 和 Ox 所作的角是 ω_1 及 ω_2.設 $R=\varphi(\omega)$ 是弧 AB 的方程式; ω 是在 ω_1 及 ω_2 中間, ρ 能夠自零變至 R, $f(x,y)$ 的二重積分的價值是

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}d\omega\int_{o}^{R}f(\rho\cos\omega,\rho\sin\omega)\rho d\rho.$$

若曲線弧 AB 成爲一個閉曲線,包有原點在內,我們可取 $\omega_1=o$, $\omega_2=2\pi$.無論一個任何形狀的積分區域,都能分爲許多區域,使牠們的形狀和上相同.例如閉線 C 是一個閉曲線,不包有原點,設 OA 及 OB 是由原點所引此閉線的切線, $R_1=f_1(\omega)$, $R_2=f_2(\omega)$ 是曲線弧 ANB, AMB 的方程式.對於 ω 在 ω_1 及 ω_2 間一個固定價值, ρ 能夠自 R_1 變至 R_2,我們得二重積分的價值

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}d\omega\int_{R_1}^{R_2}f(\rho\cos\omega,\rho\sin\omega)\rho d\rho.$$

第二,橢圓坐標.(coordonnées elliptiques)——我們取一系的同焦點的錐線(coniques homofoncales)

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1, \tag{19}$$

其中 λ 表一個任意變率.自平面中任意一點,有此類中兩個錐線經過,一個是橢圓,一個是雙曲線.這是因爲無論 x 及 y 如何,

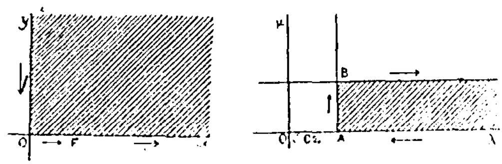
方程式(19)都有一個根λ大於c^2及一個正根μ小於c^2.

在關係式(19)中用μ代λ得一個和(19)相類的關係式,合之關係式(19)得

(20) $$x=\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c},\ y=\frac{\sqrt{(\lambda-c^2)(c^2-\mu)}}{c}\ (o\leqq\mu\leqq c^2\leqq\lambda);$$

為避免一切紛糾我們只取xy平面內在xoy角內的部分.此部

圖二十二



分和(λ,μ)平面內直線

$$\lambda=c^2,\ \mu=o,\ \mu=c^2$$

所限部分點和點有惟一的相應法.

在(λ,μ)點依矢的方向畫出此部分的周線時,公式(20)顯明(x,y)點也依矢的方向畫出ox及oy軸所以這個相應法是相反.計算Δ卽可將此證明,

$$\Delta=\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}=-\frac{1}{4}\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda-c^2)(c^2-\mu)}}.$$

120. **變數更換法:第二方法.**——我們能用另一方法證明普通公式(18),這個證明法惟一的依據二重積分的計算法.對於區域A及A_1上諸點的相應法,我們自然仍保留以前所作的假定.先注意若此公式對於兩個特殊的變形法

$$x=f(u,v),\ u=f_1(u',v'),$$

$$y=\varphi(u,v),\quad v=\varphi_1(u',v')$$

是確實的,我們若將這兩個變形法挨次實行,這個公式也是確實的.這是根據函數定準式的特性($n^\circ 52$)

$$\frac{D(x,y)}{D(u',v')}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(u',v')}.$$

同樣,若此公式對於許多區域 $A,B,C,\cdots,L$ 是確實的,牠對於區域 $A+B+C+\cdots+L$ 也是確實的.最後,若變數更換法簡約爲坐標變換法(transformations de coordonnées)

$$x=x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

此公式仍是確實的;我們有 $\Delta=1$, 依二重積分的定義,此兩個積分相等,

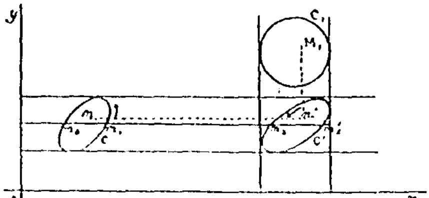
$$\iint_{(A)}F(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\iint_{(A')}F(x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\,y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)\,dx'\,dy'$$

這個業已說明,我們先取一個特別變形法

(21) $$x=\varphi(x',y'),\quad y=y',$$

牠對於一個區域 A 定出一個區域 A' 相應,此兩區域都在 ox 的相

圖　二　十　三



同平行線 $y=y_0$, $y=y_1$ 內.我們假定對於 A 中每一點, A' 中只有一點相應,反之亦然.若是 ox 的一個平行線只過 A 的閉線 C 於兩點,

對於A'的閉線C'就也是如此.對於閉線C上兩點m_0及m_1,牠們的縱坐標是y,閉線C'上有兩點m'_0及m'_1相應.然而依此相應法是正或反,能夠有兩個場合.欲分別這兩個場合,我們注意若$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$是正,$x$和$x'$同時增加,這些點$m_0$及$m_1$,$m'_0$及$m'_1$的位置法如圖二十三所示,這個相應法是正(direct),反之,若$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$是負,這個相應法就是反(inverses).

我們取第一場合,設x_0, x_1, x'_0, x'_1是m_0, m_1, m'_0, m'_1諸點的橫坐標,應用變數更換公式在一個單積分上,我們有

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y)\,dx = \int_{x'_0}^{x'_1} F[\varphi(x',y'),y']\,dx'\,dy',$$

y及y'都看作常數,因而

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} F(x,y)\,dx = \int_{y_0}^{y_1} dy' \int_{x'_0}^{x'_1} F[\varphi(x',y'),y']\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\,dx'.$$

然而沙勾畐(jacobien)Δ在此處簡約爲$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$,以上的公式可寫爲

$$\iint_{(A)} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{(A')} F[\varphi(x',y'),y]\,|\Delta|\,dx'\,dy'.$$

在$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$是負時,此公式也是用同一的方法證明.自然此公式能夠推廣在一個任何形狀閉線所限的區域內.

同樣,命

(22) $$x = x',\quad y = \psi(x',y'),$$

即得公式

$$\iint_{(A)} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{(A')} F[x',\psi(x',y')]\,|\Delta|\,dx'\,dy'.$$

這個新區域A'和區域A點和點相應.

現在取變形法的普通公式

(23) $$x = f(x_1,y_1),\quad y = f_1(x_1,y_1),$$

爲明瞭計,我們用(x,y), (x_1,y_1)表兩個相應點m及M_1關於同一系的坐標軸的坐標.設A及A_1是相應區域,牠們爲閉線C及C_1所限.若對於兩點m, M_1,我們設一點m',牠的坐標是$x'=x_1$, $y'=y$,此點m'畫出一個輔助區域A',我們假定牠及區域A, A'_1都是點和點相應.在這六個坐標x, y, x_1, y_1, x', y'間有四個關係式

$$x=f(x_1,y_1),\ y=f_1(x_1,y_1),\ x'=x_1,\ y'=y;$$

我們因得

(24) $$x'=x_1,\ y'=f_1(x_1,y_1),$$

此式定出一個變形法,形狀和(22)相同.自關係式$y'=f_1(x',y_1)$,我們得$y_1=\chi(x',y')$,因而得

(25) $$x=f(x',y_1)=\varphi(x',y'),\ y=y'.$$

所以所取的變形法(23)爲兩個特殊的變形法(24)及(25)所成,對於此二者普通公式是確實的;所以對於變形法(23)此公式也是確實的.

注意.——我們是假定m'點所畫的區域A'和區域A, A_1都是點和點相應.我們總能夠假定牠是如此的.誠然,試在區域A_1中取些曲線,牠們和區域A中平行於Ox的直線相應.若這些曲線只和Oy的一個平行線相遇於一點,可見對於A中一點m, A'中只有一點m'相應.我們只須要將區域A_1分爲小區域,這個條件就必能滿足.若這些曲線是平行於Oy的直線,我們就對於(x_1,y_1)先作一個坐標更換法.

121. **體積.**——一個平曲線的面積的直觀,引起有定積分的解析法(n°66至68),同樣一個圓柱,一個垂直於此圓柱母線的平面及一個任何曲面所限體積能引起二重積分的解析式.由以前

(第67節)所用的推理,這個推廣法是極容易,我們暫從不論.現在我們要翻轉來給一個閉曲面所限的體積一個純粹解析的定義.設 Σ 是一個閉曲面,牠分空間爲兩個各別的領域,一個內領域 D 及一個外領域 D';同一領域的兩點總能爲一個不通過曲面 Σ 的折線(ligne poly-gonal)所連合,然連合兩領域中兩點的折線至少和 Σ 有一個交點.

欲定如此的一個領域的體積,我們仍用定平曲線的面積的方法,凡一個限制領域,牠的界由有限數的平多角領域(domaine polygonal plan)所成,我們叫牠做多面領域(domaine polyédral),這些多角領域是此多面領域的面(*face*.)凡一個多面領域都是由有限數的凸多面體(polyedre convexe)所成,牠的體積已由普通幾何學所定,這個業經說明.設 P 及 p 是兩個多面領域,第一個包含 D,第二個在 D 內,牠們的體積各爲 V_P 及 V_p.我們有 $V_P > V_p$,因而 V_P 有一個下限 V,V_p 有一個上限 V';並且 $V' \leq V$.若 $V' = V$,我們就說 D 有一個確定體積,並且取 V 爲此體積的量.和在平面積的場合(n^{os}77,78)相同可證明以下的命題:

若要領域 D 有一個體積,必須要然只須要不論正數 ε 如何,能夠求得兩個多面領域 P 及 p,一個包含 D,一個在 D 內,差數 $V_P - V_p$ 必小於 ε.

若一個領域 D 能分爲許多領域 $D_1, D_2, \cdots, D_n$,牠們的體積是 $V_1, V_2, \cdots, V_n$,領域 D 的體積就是

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n.$$

若平行於三個直交平面作許多平面,各平面間的距離是 ρ,此等平面分空間爲無限的立方體,在 ρ 漸近於零時,D 內的立方

體的和有一個極限,就是體積V,至於和D的界有公共點的立方體的體積的和漸近於零.

我們先取一個領域D,牠的界是:一個圓柱,此柱的橫截線(section droite)是一個沒有二重點的閉曲線,一個平面Q垂直於此圓柱的母線,一個曲面S在圓柱內的部分,此部分曲面和圓柱的母線的一個平行線相遇於一點而只相遇於一點.若取平面Q爲xy平面,取圓柱的母線的一個平行線爲z軸,設$z=f(x,y)$是曲面S的方程式;$f(x,y)$在曲線C所限平面領域d內是一個連續函數,曲線C是圓柱由平面$z=o$所成的橫截線.我們又假定$f(x,y)\geqq o$.這個業已說明,我們用兩軸的平行線,距離是ρ,將xy平面畫作方格(carrelage),又用以下的方法作成兩個多面領域:在xy平面中混合方形(carré mixte)上作一個直角柱(prisme droit)牠的底是此方形,牠的高是$f(x,y)$的上限M;在c內的每一正方形上,我們同樣的作一個直角柱,牠的底是此正方形,牠的高是$f(x,y)$在此正方形內的上限M_i,這些角柱的集合,成爲一個多面領域P,包含D在內.又在C內的每一正方形上,作一個角柱,牠的底是此正方形,牠的高是$f(x,y)$在此正方形內的下限m_i,這些新角柱的集合,成爲一個多面領域p,包含在D內.這兩個多面領域的體積的差V_P-V_p小於$M\eta+A\omega$,η表混合方形的面積的和,A表領域d的面積,ω表$f(x,y)$在每一正方形內的限差(oscillation)的上限.但是我們能夠取此正方形的邊線ρ有充分的小,使積數$M\eta$,$A\omega$都小於一個任何已知數ε.所以領域有一個確定體積.

這個體積等於二重積分

$$V=\iint_{(d)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

這是因爲無論ρ如何,體積V'_p都大於此二重積分,體積V_p都小於此二重積分的緣故.

一個閉曲面只和oz的一個平行線相遇於兩點,牠所限領域可以看作和上相類的兩個領域的差,所以此體積是兩個二重積分的差.最後,一個任何閉曲面若只和oz的一個平行線相遇於有限的點,牠所限領域可以分爲若干領域,每一個小領域的界只和oz的一個平行線相遇於兩點,所以此領域的體積爲許多二重積分的一個代數和所表.

122. **體積的計算法.**——和上節相同,我們取空間的一部分,牠的界是xy平面,一個圓柱牠的母線平行於oz,一個曲面S完全在xy平面上邊.我們假定由平面$z=o$所成的橫截線是一個如圖十八所示的閉線,牠由oy軸的兩個平行線及兩個曲線弧Am_1B, $A'm_2B'$所成.設$z=f(x,y)$是曲面S的方程式,此體積的式子是

$$V=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy.$$

然而積分$\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy$表此體積由yz的一個平行面所成橫截線的面積$\mathcal{A}$,故以上的公式可以寫爲

$$V=\int_a^b \mathcal{A}\,dx. \tag{26}$$

但是一個任何形狀的體積,都等於若干個和上相同的體積的代數和.例如計算一個閉凸曲線(surface fermée convexe)所限體積,我們可在此曲面上作一個外切圓柱,牠的母線平行於oz軸,即變爲計算和上相同的兩個體積的差.所以對於平行平面$x=a$, $x=b(a<b)$及一個任何曲面所限的任何積體公式(26)都能應用.

公式中$\mathfrak{S}$表此體積由上二平面的一個平行平面所成的橫截線的面積.假定用上升數$a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, b$將區域$(a,b)$分爲更小的區域,設$\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \cdots, \mathfrak{S}_i, \cdots$是和平面$x=a, x=x_1, \cdots$相應的橫截線.有定積分$\int_a^b \mathfrak{S}\,dx$是和數

$\mathfrak{S}_0(x_1-a)+\mathfrak{S}_1(x_2-x_1)+\cdots+\mathfrak{S}_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\cdots$的極限,因爲$\mathfrak{S}_{i-1}(x_i-x_{i-1})$表一個圓柱體積,牠的底是由平面$x=x_{i-1}$所成的橫截線,牠的高是兩個相鄰平面的距離,所以這個和數的意義是極明瞭的,所以所求體積是以上所定無限薄的圓柱體積的和的極限,這實在適合於通常的體積觀念.

若已知面積$\mathfrak{S}$爲x的函數,所求體積即可由一個面積法得來.例如計算一個旋轉曲面(surface de révolution)及牠的軸的兩個垂直平面所限的體積,我們取此軸爲x軸,設$z=f(x)$是在xz平面中的經線(méridienne)的方程式;由yz平面的一個平行面所成的橫截線是一個圓周,半徑是$f(x)$,所以所求體積的式子是$\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$.

例如求橢圓面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

及二平面$x=x_0, x=X$所限體積,由$x=o$的一個平行平面所成的橫截線是一個圓橢牠的兩個半軸(dimi-axes)各等於$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$,$c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$;因得所求體積

$$V=\int_{x_0}^{X}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(X-x_0-\frac{X^3-x_0^3}{3a^2}\right).$$

欲得橢圓面的全體積,只須取$x_0=-a, X=a$,即得$\frac{4}{3}\pi abc$.

123. 一個直線曲面(surface réglée)所限的體積.——若面積$\mathfrak{A}$是x的整函數且是二次式,設B,B',b是兩端的切開面(section)及平均切開面(section moyenne)的面積,h是兩端的切開面距離,體積V甚易爲B,B',b及h所表明.我們取平均切開面的平面爲xy平面,得

$$V=\int_{-a}^{+a}(lx^2+2mx+n)\,dx=2l\frac{a^3}{3}+2na;$$

他一方面,

$h=2a$,$b=n$,$B=la^2+2ma+n$,$B'=la^2-2ma+n$,由此得$n=b$,$a=\dfrac{h}{2}$,$2la^2=B+B'-2b$,因得公式

$$V=\frac{h}{6}\left[B+B'+4b\right]. \tag{27}$$

這個公式特別的可應用在兩個平行平面及一個任何的直線曲面所限的體積上.誠然,設$y=ax+p$,$z=bx+q$是一個動直線的方程式,其中a,b,p,q,都是一個變率(paramétre)t的連續函數,在t自t_0變至T時,這些函數仍回復到牠們的初價值上.此直線畫出一個直線曲面,$x=o$的一個平行平面和此曲面所成的切開面的面積是($n°92$)

$$\mathfrak{A}=\int_{t_0}^{T}(ax+p)(b'x+q')\,dt$$

a',b',p',q'是a,b,p,q關於t的導來式;這些導來式對於t在t_0及T中有限數的價值上也可以是不連續,若此直線曲面由許多各別的曲面所成就是這個場合.我們可寫爲

$$\mathfrak{A}=x^2\int_{t_0}^{T}ab'\,dt+x\int_{t_0}^{T}(aq'+pb')\,dt+\int_{t_0}^{T}pq'\,dt.$$

第二端的積分顯然不關係x.所以公式(27)能應用在所求面積上;可注意的由這個公式能得到普通幾何上所計算的體積的大部分.

124. 一個空間曲面的面積.——一個曲面爲以下的解析法所定.設$f(u,v)$, $\wp(u,v)$, $\psi(u,v)$是兩個變數u,v的三個連續函數,u及v的變化區域是平面中一個領域R爲一個閉圍線L所限.在(u,v)點畫出領域R時,直交坐標是$x=f(u,v)$, $y=\wp(u,v)$, $z=\psi(u,v)$的那些點的軌迹是曲面S,和平面(u,v)中曲線L相應曲線Γ是此曲面的圍線.若能夠選擇變數u,v使滿足以下的條件,我們就說曲面S是規則的(régulière):第一,曲面S及平面(u,v)中的領域R,依惟一的(univoque)方法點和點相應.圍線Γ及L也是如此;第二,函數$f,\wp,\psi$有第一級的偏導來式在R內及L上都是連續的;第三,在R內及L上的任何點這三個涉勾局$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$不同時爲零.我們先只論規則曲面或由有限數的規則曲面的部分所成.

規則曲面上一點M和R內(u,v)相應,在此點上,曲面有一個切平面,牠的方程式是(第61節)

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=o,$$

其中

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\quad B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\quad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)};$$

法線的方向餘弦的式子是

$$\alpha=\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \beta=\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \gamma=\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

在這三個公式中符號當是相同.這個雙符號和法線上所能選的兩個相反方向相應.譬如要求和oz軸成銳角那個方向的餘弦,我們可取C的符號爲符號.

若將u及v用一個變率t的函數替代,(x,y,z)點在S上畫出

一個曲線,將 dx, dy, dz 的式自乘再相加即得此曲線的線原素(élément linéaire)的平方的公式

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{28}$$

其中

$$E = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2;$$

符號 S 表明當用 y 代 x,又用 z 代 x,再以其結果相加.在曲面的研究中,此三個函數 E, F, G 有重要的任務;若 f, φ, ψ 都是實函數如我們所假定,顯然可見 $E, G, EG-F^2$ 都是正.

係數 A, B, C 不但關係曲面上所取的點,並且關係於坐標軸,至於 E, F, G 不關係坐標軸的選擇,然只關係於曲面 S 及所取的變數 u 及 v. 依此等係數的幾何上的意義,這是很明瞭的;又依坐標更換法公式,這個驗明也甚直捷.這六個函數間有一個重要關係式

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

是在拉格郎熱(Lagrange)公式

$$(ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (a'a + bb' + cc')^2$$

中將 a, b, c, a', b', c' 各代以 $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial v}$ 得來.

我們再立一個預公式.設 r 是 R 內的一部分,為一個閉線 c 所限,m 是 r 內一點,設 s 是 S 的一部分和 r 相應,γ 是 s 的閉線,M 是 s 內一點和 m 點相應.假定區域 r 有充分的小,在 M 點的法線的一個平行線只能過 s 於一點,這個曲面 s 在 M 點的切平面上的直射影 s' 為一個曲線 γ' 所限,γ' 是 γ 的射影.設 ω 是 r 的面積,o 是 s' 的面積;我們先求 $\frac{o}{\omega}$ 的式子(第117節).為此懸想取 M 點

為坐標的原點,取在M點的法線為z軸,取在M點的切平面中兩個直交線為x軸及y軸,設u_0,v_0是平面(u,v)中m點的坐標,在原點上的切平面既是平面$z=0$,所以$A_0=B_0=0$,因而$C_0^2=E_0G_0-F_0^2$,指數零表一個u及v的函數對於$u=u_0, v=v_0$時的價值.

在(u,v)點畫出閉線c時,(x,y)點在平面$z=0$內畫出曲線γ'包有一個面積σ,所以$\sigma=\omega|C(u',v')|$(第117節),u',v'是c內一點m'的坐標,在$u=u_0, v=v_0$時,這兩個函數$|C(u,v)|$及$\sqrt{EG-F^2}$相等,已如上所見;這兩個函數既都是連續函數,若區域r極小,對於$u=u'$, $v=v'$, 牠兩個的差也常是極小,我們有

$$\sigma=\omega\left\{\sqrt{E'G'-F'^2}+\varepsilon\right\},$$

E',F',G'是E,F,G對於r內一點的坐標u',v'的價值,ε和此區域r的度同時為無限小.

這個數ε和區域r的最大的度同時均一的漸近於零.誠然,我們有

$$|\varepsilon|=\frac{A'^2+B'^2}{|C'|+\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}<\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}\left\{\frac{A'^2+B'^2}{A'^2+B'^2+C'^2}\right\}<H\sin^2\theta,$$

H是$\sqrt{EG-F^2}$的最大價值,θ是在S的兩點(u_0,v_0),(u',v')上的法線所作的角.所以只須顯明在S的相鄰兩點M, M'上的法線所成的銳角θ和距離MM'同時均一的漸近於零,但是無論坐標軸如何,

$$\sin^2\theta=\frac{(AB'-BA')^2+(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)},$$

第二邊是四個變數u, v, u', v'的一個連續函數,牠在$u'=u$, $v'=v$時為零.所以牠和$(u'-u)^2+(v'-v)^2$同時均一的漸近於零(n^{os}8,12).

此層已經說明,懸想將平面 (u,v) 的區域 R 分爲 n 部分 $r_1, r_2, \cdots, r_n$, 區域 r_i 爲一個閉曲線 c_i 所限.在 r_i 內取任意一點 $m_i(u_i,v_i)$. 對於區域 r_i 及曲線 c_i, S 上有一個部分曲面 s_i 及閉線 γ_i 相應.設 M_i 是 s_i 內和 m_i 相應的點.假定取一切區域 r_i 有充分的小,使在 M_i 點的法線的一個平行線不能過 s_i 於一點以上.〔註四〕曲面 s_i 在 M_i 點的切平面的射影是一個部分平面面積是 o_i. 在 n 增加無限,區域 r_i 的所有的度都漸近於零時,這些平面積的和

$$o_1 + o_2 + \cdots + o_n = \Omega$$

漸近於一個極限,由定義,此極限是曲面 S 的面積.誠然,依方纔所證,我們有

$$\Omega = \Sigma\omega_i\left\{\sqrt{E'_iG'_i - F'^2_i} + \varepsilon_i\right\},$$

ω_i 是 r_i 的面積, u'_i, v'_i 是 r_i 內一點的坐標, ε_i 是一個無限小. ε_i 既均一的漸近於零,和數 $\Sigma\omega_i\varepsilon_i$ 也漸近於零,因而 Ω 的極限是二重積分

$$\mathcal{S} = \iint_{(R)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{29}$$

這是曲面 S 的面積的式子.〔註五〕

125. **曲面的原素.**——式子 $\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$ 是曲面 S 在坐標系 (u,v) 中的面積的原素.曲面在曲線 (u), $(u+du)$, (v) $(v+dv)$ 中間的部分面積的正確價值是

$$(\sqrt{EG - F^2} + \varepsilon)\,du\,dv,$$

ε 和 du, dv 同時爲無限小,然而如以上所見我們能夠略去 $\varepsilon\,du\,dv$ 一項.由微分幾何 (géométrie infinitésimale) 上幾個注意,很容易復得這個面積原素.誠然,我們若將曲面上這個小部分看作 (u,v) 點的

切平面中一個平行四邊形牠的面積就等於兩邊的長度的積乘以曲線(u)及(v)所成角的正弦.若又將弧的增長和微分ds混同,依公式(28),邊線的長度是,$\sqrt{E}du$,$\sqrt{G}dv$,du及dv都假定是正的.再計算二曲線所成的角α,因此二曲線的切線的方向率(parametre directeur)各等於$\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}$及$\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}$所以

$$\cos\alpha=\frac{S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}}=\frac{F}{\sqrt{EG}},$$

因而$\sin\alpha=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$.作這個積數,即復得面積原素.我們可注意:若曲線$(u)$及$(v)$成爲一個垂直曲線系(réseau orthogonal),由$\cos\alpha$的公式可見係數$F=o$,然而也只是在此場合,F才等於零.

若曲面S簡約爲一個平面,我們即復得以前所得的價值(第118節).誠然,若假定$\psi(u,v)=o$,我們有

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

由定準式的平方的定規

$$\Delta^2=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}^2=\begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}=EG-F^2,$$

$\sqrt{EG-F^2}$成爲$|\Delta|$.

例.——<u>第一</u>,一個曲面$z=f(x,y)$,牠有一部分射影在xy平面區域R內,在此區域R內,$f(x,y)$及牠的導來式$p=\frac{\partial f}{\partial x}$及$q=\frac{\partial f}{\partial y}$都是連續的.試求此部分曲面的面積.取$x$及$y$爲自變數,

我們有 $E=1+p^2$, $F=pq$, $G=1+q^2$, 所求面積是二重積分

$$(30)\qquad \mathcal{A}=\iint_{(R)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\iint_{(R)}\frac{dxdy}{\cos\gamma},$$

γ 表曲面的法線和 oz 所作的銳角.

<u>第二,</u> 計算一個旋轉曲面在兩個緯線 (parallils) 間的面積.我們取曲面的軸爲 z 軸,設 $z=f(x)$ 是曲面在 xz 平面中的經線 (méridienne) 的方程式,曲面上一點的坐標是

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega,\quad z=f(\rho),$$

所取的自變數是此點在 xy 平面中的射影的極坐標 ρ 及 ω.此處我們有

$$ds^2=d\rho^2[1+f'(\rho)]+\rho^2d\omega^2,$$

$$E=1+f'^2(\rho),\quad F=o,\quad G=\rho^2.$$

欲得曲面在兩個緯線間的面積,若此兩個緯線的半徑是 ρ_1 及 ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$, 只須命 ρ 自 ρ_1 變至 ρ_2, 命 ω 自 o 變至 2π.所以所求面積是

$$\mathcal{A}=\int_{\rho_1}^{\rho_2}d\rho\int_o^{2\pi}\rho\sqrt{1+f'^2(\rho)}\,d\omega=2\pi\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\sqrt{1+f'^2(\rho)}\,d\rho,$$

我們只須計算一個面積.法用 s 表經線的弧,我們有

$$ds^2=d\rho^2+dz^2=d\rho^2[1+f'^2(\rho)],$$

以上的公式可寫爲

$$\mathcal{A}=\int_{\rho_1}^{\rho_2}2\pi\rho\,ds.$$

這個公式的幾何意義極爲直捷; $2\pi\rho ds$ 是一個截頭圓錐 (tronc de cône) 的側面積,圓錐的邊線是 ds, 牠的平均圓周的半徑是 ρ.若將曲線在兩個相隣緯線間的面積作爲一個截頭圓錐的側面積,即復得面積 $\mathcal{A}$ 的公式.例如一個拋物面 (paraboloïde) 由拋

物線 $x^2=2pz$ 旋轉所成,求此拋物面在頂點及一個緯線間的面積.若緯線的半徑是 r,這個面積的價值是

$$\mathcal{A}=2\pi\int_0^r \frac{\rho}{p}\sqrt{\rho^2+p^2}\,d\rho=\frac{2\pi}{3p}\Big[(r^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\Big].$$

126. 微微亞尼(Viviani)的問題.—— 在半徑是 R 的一個球體上取一個半徑 OA 爲直徑畫一個平圓 C,以 C 爲直截面 (section droite) 作一個旋轉圓柱,求球體在此圓柱內的體積.我們取球的中心爲原點,所求體積的四分之一等於取在以 OA 爲直徑的半圓的的二重積分

$$\frac{V}{4}=\iint\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

若改爲極坐標 ρ,ω,ω 能自 o 變至 $\frac{\pi}{2}$,ρ 能自 o 變至 $R\cos\omega$,得

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int_0^{R\cos\omega}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\Big[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{R\cos\omega}d\omega$$

或

$$\frac{V}{4}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^3-R^3\sin^3\omega)\,d\omega=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

若在球體中減去牠在此圓柱內的部分及牠在依 oz 爲對稱的圓柱內的部分,所餘體積等於

$$\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{8R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}R^3$$

同樣,球面在以上的圓柱內的面積

$$\Omega=4\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy;$$

將 p 及 q 代以牠們的價值 $-\frac{x}{z}$ 及 $-\frac{y}{z}$,並改爲極坐標得

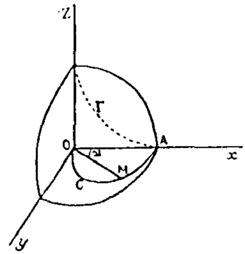
$$\Omega=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int_0^{R\cos\omega}\frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\left(\sqrt{R^2-\rho^2}\right)_0^{R\cos\omega}d\omega,$$

或

$$\Omega=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\omega)d\omega=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

若自球的全面積內減去祗在兩圓柱內的

圖二十四



部分,所餘面積等於

$$4\pi R^2-8R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8R^2.$$

III.——二重積分的擴充.——
曲面積分

127. **在一個無限場內的二重積分.**——設$f(x,y)$是一個函數祗在一個閉曲線Γ外一切部分內都是有限制並且能積分的.二重積分$\iint f(x,y)dxdy$擴充在Γ及Γ外一個閉曲線C內,有一個有限的價值.曲線C由一切方向遠至無限時,若此積分漸近於一個極限,由定義此極限是$f(x,y)$擴充在平面在Γ外

的部分的二重積分.若是一個變化曲線C常在一個圓周外,圓周的半徑是一個任意數R,圓心是一個定點,我們就說曲線C由一切方向遠至無限.

若要極限存在,必須要然只須要以下的條件.設C,C'是兩個任何閉曲線,牠們包有曲線Γ, $\delta(C,C')$是擴充在曲線(Γ,C)及(Γ,C')所限領域的兩個二重積分的差.必須要然只須要在此二曲線C及C'由一切方向彼此獨立的遠至無限時,$\delta(C,C')$漸近於零.

這個條件的必要是顯然可見的.牠也是充足的.誠然,我們取一列的閉曲線$C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$包有$\Gamma$在內,牠們彼此間又互相包閉,在$n$增加無限時,牠們都遠至無限,差數$\delta(C_m,C_n)$在$m$及$n$增加無限時漸近於零,所以擴充在$\Gamma$及$C_n$間的二重積分漸近於一個極限$I$($n^o$5).現在我們取另一閉曲線$C'$,形狀是任何的,牠由一切方向遠至無限.因爲由假定$\delta(C',C_n)$漸近於零.所以擴充在$\Gamma$及$C'$間的二重積分也漸近於$I$.

因爲確定人的觀念,我們將積分領域都是假定由一切方向遠至無限,然而這個假定並非是必要的.例如我們能夠取兩個定直線及一個變化曲線所限領域爲積分的場,此曲線在此兩個定直線所成的角內遠至無限.以前的推理仍能應用無須修改.

例.——設$f(x,y)$是一個函數,牠在以原點爲心a爲半徑的圓周以外形狀是

$$f(x,y)=\frac{\psi(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha}},$$

分子$\psi(x,y)$常在兩個正數m及M中間.取在以原點爲心r及

R 爲半徑的兩個圓周所限環形內的二重積分是

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_r^R \frac{\psi(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\rho\, d\rho}{\rho^{2\alpha}};$$

所以牠在兩個積分

$$2\pi m \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}, \quad 2\pi M \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}$$

中間.

在 r 及 R 增加無限時,若要這個積分漸近於零,必須要也只須要 $\alpha>1$.所以取在兩個任何閉曲線所限領域的二重積分,在此二曲線遠至無限時必漸近於零.這是因爲這個領域常在方纔所設環形以內的緣故.所以 $f(x,y)$ 的二重積分,取在 a 爲半徑的圓周以外的部分,在 $\alpha>1$ 有一個極限,也惟有在這個場合爲然.

由以上所得的必要且充足的條件,可見若積分 $\iint|f(x,y)|dxdy$ 有一個極限,二重積分 $\iint|f(x,y)|dxdy$ 也就有一個極限.然而此處有一個重要區別.若函數 $f(x,y)$ 保有一個固定符號,譬如是正吧,欲知此積分是否有一個極限,只須取一列的閉曲線 $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ 牠們彼此互相包圍,在 n 增加無限時,C_n 遠至無限.若在 n 增加無限時.擴充在 Γ 及 C_n 間的領域 R_n 內的二重積分 $I_n=\iint f(x,y)dxdy$ 漸近於一個極限 I,擴充在 Γ 及一個任何閉曲線 C' 所限領域 R' 的積分 I' 也就有一個極限.誠然,閉線 C' 是在兩個閉線 C_m 及 C_{m+n} 中間,牠們和 C' 同時遠至無限.所以我們有 $I_m<I'<I_{m+n}$,因而 I' 的極限是 I.

若函數 $f(x,y)$ 沒有一個固定符號,擴充在一個任何領域的

二重積分是兩個二重積分的差

$$\iint f(x,y)\,dxdy=\iint f_1(x,y)\,dxdy-\iint f_2(x,y)\,dxdy,$$

這兩個二重積分的原素都是正.然而

$$\iint |f(x,y)|\,dxdy=\iint f_1(x,y)\,dxdy+\iint f_2(x,y)\,dxdy;$$

其中是假定在 $f>o$ 時, $f_1=f$, $f_2=o$, 在 $f<o$ 時, $f_1=o$, $f_2=-f$. 這個業已說明,若二重積分 $\iint|f(x,y)|dxdy$ 沒有極限,這兩個二重積分 $\iint f_1(x,y)dxdy$, $\iint f_2(x,y)dxdy$ 中至少有一個增加無限.若此兩個二重積分都增加無限,牠們的差就是不定.誠然,和對於半收斂級數 (séries semi-convergentes) 同一推理,(第八章) 人們證明能夠選擇兩類的變化曲線,使二重積分 $\iint f(x,y)dxdy$ 的極限等於一個任何預定的數,但必須函數 f 是有限制的.

茲舉愷列 (Cayley) 所創的一個例子.設 $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$, 若先在邊長等於 a 的一個正方形內積分,我們得二重積分

$$\int_o^a dx\int_o^a \sin(x^2+y^2)\,dy$$

$$=\int_o^a \sin x^2 dx\times\int_o^a \cos y^2 dy+\int_o^a \cos x^2 dx\times\int_o^a \sin y^2 dx.$$

在 a 增加無限時,第二端的二重積分有一個極限 (n^o88). 人們證明此極限等於 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 所以第二端的極限是 $\frac{\pi}{4}$. 反之,若在半徑是 R 的一個圓內積分,我們有

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} d\omega\int_o^R \rho\sin\rho^2 d\rho=-\frac{\pi}{4}\Big[\cos\rho^2\Big]_o^R=\frac{\pi}{4}\Big[1-\cos R^2\Big],$$

在 R 增加無限時,第二端是不定.

128. 函數 $B(p,q)$.——設

$$f(x,y)=4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2},$$

在其中是假定 $p>0, q>0$; 這個函數在 xoy 角內是連續的且是正.若先在兩軸及直線 $x=a, y=a$ 所限方形內積分,二重積分的價值是

$$\int_0^a 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx \times \int_0^a 2y^{2q-1}e^{-y^2}dy;$$

在 a 增加無限時,第二邊的每一個積分都有一個極限.誠然,若在定函數 $\Gamma(p)$ 的積分(第90節)

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dx$$

內命 $t=x^2$, 得

(31) $$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx.$$

所以二重積分的極限是積數 $\Gamma(p)\Gamma(q)$.

現在在坐標軸及圓周 $x^2+y^2=R^2$ 所限四分之一平圓內積分;用極坐標,我們得二重積分

$$\int_0^R 2\rho^{2(p+q)-1}e^{-\rho^2}d\rho \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi.$$

在 R 增加無限時,二重積分的極限是

$$\Gamma(p+q)B(p,q).$$

其中

(32) $$B(p,q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi;$$

我們說這兩個極限相同,即得關係式

(33) $$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q).$$

積分 $B(p,q)$ 是尤拉積分第一類;命 $\sin^2\varphi=t$ 我們又可寫為

(34) $$B(p,q)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt.$$

公式(33)將函數 $B(p,q)$ 的計算法變爲函數 Γ 的計算法.作爲例子,若令 $p=q=\frac{1}{2}$,得

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\Gamma(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}2d\varphi=\pi,$$

因而 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.公式(31)定出

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

一般,令 $q=1-p$,又假定 p 在 o 及 1 中間.

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=B(p,1-p)=\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1}\frac{dt}{t}.$$

以後可見此積分的價是 $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

129. **非限制函數的積分.**—— 一個函數 $f(x,y)$ 若在一點上或沿一個曲線上成爲無限,牠的積分也是同樣的定法.爲此,我們先將積分領域的不連續點或不連續線除外,就是用一個極小閉線將此點包閉,或在此不連續線極近處作一個閉線;然後將此閉線所限領域減小無限.例如函數 $f(x,y)$,在一點 (a,b) 附近.牠的形狀是

$$f(x,y)=\frac{\psi(x,y)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha},$$

此式中 $\psi(x,y)$ 的絕對值是在兩個正數 m 及 M 中間,若積分領域內只有此一個不連續點 (a,b),函數 $f(x,y)$ 的二重積分就有一個有限價值,但必須 α 小於 1,這個證明法和上相同(第 127 節).

我們再取一個函數牠能滿足以下的條件:第一,牠在領域 A 內是連續的,A 的定法是 $a\leqq x\leqq b, o\leqq y\leqq g(x)$,$g(x)$ 是在 a 及 b 間

一個連續正函數;第二,在曲線$y=g(x)$附近,牠的形狀是

$$f(x,y)=\frac{\psi(x,y)}{[g(x)-y]^{\alpha}},$$

α是一個正指數,分子$\psi(x,y)$是有限制的.再取一個領域δ,牠的界限是直線$x=a, x=b$及兩個曲線$y=g(x)-\varepsilon, y=g(x)-\eta$, ε及η是兩個正無限小,擴充在此領域δ內的二重積分的式子是

$$\int_a^b dx\int_{\varepsilon}^{\eta}\frac{\psi[x,g(x)-u]du}{u^{\alpha}},$$

此式漸近於零,但必須α小於1.所以$f(x,y)$的二重積分在領域A內有一個有限價值.

若已知一個非限制函數的二重積分在某一領域內有一個有限的價值,我們計算這個積分就和一個限制函數的積分相同.例如一個函數

$$f(x,y)=\frac{\psi(x,y)}{(x-y)^{\alpha}},$$

求此函數在直線$y=o, y=x, x=a$所限的三角形T內的二重積分,函數$\psi(x,y)$在此領域內是連續的,α小於1.這個積分是二重積分

$$I'=\int_h^a dx\int_o^{x-h}f(x,y)dy$$

在$h=o$時的極限.然而

$$\int_o^{x-h}f(x,y)dy=\int_o^x f(x,y)dy-\eta(x,h),$$

$\eta(x,h)$是一個無限小,x在區域(a,b)內,$\eta(x,h)$均一的和h漸近於零.因而我們可以寫為

$$I'=\int_h^a dx\int_o^x f(x,y)dy-\int_h^a\eta(x,h)dx,$$

I'的極限是

$$I=\int_o^a dx\int_o^x f(x,y)dy,$$

我們也可以同樣的得着

$$I=\int_o^a dy\int_y^a f(x,y)dx.$$

所以底里格來公式在此處仍能應用(第114節).

注意.——一個非限制函數若在領域R內沒有相同的符號,此函數的二重積分在此區域內就也沒有確定的價值,這個不定能夠和積分的場無限大的場合那個不定相似.爲確定人的觀念,假定有一個不連續點.若用一個曲線c將此點隔離,依曲線c的形狀不同,在所餘區域內的二重積分能夠有迥異的極限.作爲例子,我們取

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

積分的場是一個矩形爲直線$x=o, x=a, y=o, y=b$所限,a及b都是正數.我們先將原點隔離,在積分的場中剔去坐標軸及直線$x=\varepsilon, y=\varepsilon'$所限矩形,$\varepsilon$及$\varepsilon'$是兩個極小正數.所餘積分的場$R'$能夠由直線$x=o, x=\varepsilon, x=a, y=o, y=\varepsilon', y=b$分爲三個矩形.他一方面

$$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\text{Arctang}\,\frac{y}{x}\right),$$

逐漸應用公(12)在三個矩形上,化簡以後得

$$\iint_{(R')} f(x,y)dxdy=\text{Arctang}\frac{b}{a}-\text{Arctang}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

可見在ε及ε'漸近於零時這個二重積分的極限和比$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$的極限同時變化($n^o$95).

130. 阿伯耳(Abel)的函數方程式(équation fonctionnelle).——力學上一個問題引導阿伯耳到一個方程式:

(35) $$\varphi(x)=\int_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{x-y}},$$

其中 $\varphi(x)$ 是一個已知函數,在區域 (o,a) 內是連續的,a 是正數,$f(y)$ 是要決定的函數.若這個函數對於 $y=o$ 時是連續的,顯然可見當得着 $\varphi(o)=o$.這是我們首先假定的.

將方程式的兩邊各乘以 $\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}$,$\alpha$ 是在區域 (o,a) 中間,再將新不等式的兩邊在極限 o 及 α 間積分,得

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^\alpha dx\int_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}$$

或用底里格來公式在第二邊的二重積分上

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^\alpha f(y)dy\int_y^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}.$$

令

$$x=y\cos^2\varphi+\alpha\sin^2\varphi$$

第一個單積分甚易計算,只餘

(36) $$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\pi\int_0^\alpha f(y)dy.$$

在 $\alpha=o$ 時,公式的兩邊都爲零;所以只須要顯明兩邊的導來式相等.第二邊的導來式是 $\pi f(\alpha)$;第一邊的導來式,在前已經計算(第96節),牠的式子是

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(\alpha)+2x\varphi'(x)}{2\alpha\sqrt{\alpha-x}}dx,$$

或

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}-\frac{1}{2}\Big[\varphi(x)\sqrt{\alpha-x}\Big]_0^\alpha$$

這是可立即驗明的.由假定 $\varphi(o)=o$,所以只餘

(37) $$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}.$$

若 $\varphi(o)$ 不等於零,方程式(35)又可寫爲同值的形狀(第

96節)

$$\varphi(x)-\varphi(o)=\int_o^x \frac{f(y)-\frac{\varphi(o)}{\pi\sqrt{y}}}{\sqrt{x-y}}dy.$$

新方程式的第一邊在$x=o$時成爲零.依公式(37)用y代a,得

(38) $$f(y)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\varphi(o)}{\sqrt{y}}+\int_o^y\frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{y-x}}\right].$$

131. **曲面積分.**——設S是一個規則曲面,$F(M)$是一個函數,牠和此曲面上M點的位置同時變化.第111–112節的推理能夠應用無須修改,只要將平面的部分改爲曲面S的部分.假想已將S分爲更小部分$s_1,s_2,\cdots,s_n$,在s_i中任取一點M_i.在n增加無限,曲面上每一部分的所有的度都漸近於零時,和數$\Sigma F(M_i)\sigma_i$漸近於一個極限.這個極限是取在曲面S上的一個曲面積分,表以

$$\iint_{(S)}Fd\sigma.$$

若S上一點M的坐標x,y,z都爲兩個變率(u,v)的函數所表明,其表明法能使S和平面(u,v)中一個領域D點和點相應,$F(M)$在此領域內就是變數u,v的連續函數$f(u,v)$,依第124節的記法,曲面積分的式子是

$$\iint_{(D)}f(u,v)\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

在許多關係曲線積分問題中,$F(M)$是曲面的法線的方向餘弦的一次函數.自此以下,我們假定此曲面有各別的兩面,譬如將一面染以紅色牠一面染以藍色,若自曲面上一個道路由紅面行至藍面,即不能不通過限制此曲面的曲線.〔註六〕我

們將曲面S看作一個由物質所成的曲面,牠有一個厚(épaisseur),設m及m'是相隣極近兩點各居於各別的兩面上.自m點依不通過曲面的方向引一個法線mn;爲簡便計,我們說在曲面上如此所定的方向和此一面相應.自m'點,曲面在牠一面的法線的方向和前一個方向相反.譬如一個曲面S和oz的一個平行線不能相遇於兩點或多於兩點,顯然可見牠有二面,此兩面的相應法線各和oz軸作一個銳角及一個鈍角;法線和oz軸作成銳角的那個相應的面是曲面的上面.

此屑已經說明,設$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$是在S上三個連續函數;α,β,γ是坐標軸和曲面的一面相應法線的方向所作的角.在實用時所常關涉的曲面積分都是以下的形狀

$$\iint_{(S)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma; \tag{39}$$

若將曲面的此一面換爲他一面,$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$都換符號,因而曲面積分也換符號,和前相同,我們假定曲面S上一點的坐標都爲兩個變率u及v的函數所表,其表明法使S和平面(u,v)的一個領域D點和點相應我們有

$$\frac{\cos\alpha}{\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}}=\frac{\cos\beta}{\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}}=\frac{\cos\gamma}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{EG-F^2}}, \tag{40}$$

以上的積分的形狀成爲

$$\pm\iint_{(D)}\left[P\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]du\,dv, \tag{41}$$

依積分取在曲面的某一面上,我們當取$+$號或$-$號.

若曲面S由許多規則曲面的部分集合而成,譬如這個曲面S有些稜(arête)沿每一個稜都有兩張規則曲面相交又都具

有各別的切平面,由定義,取在曲面 S 上的曲面積分是取在每一個部分規則曲面的積分的和.我們以後的推理總假定 S 由於一個規則曲面所成,然而所證明的特性也能應用在此最爲普通的場合,這是因爲應用這個推理在每一個規則部分上再將所得公式相加,就可將此看出.

若是將曲線積分的定義推廣,用曲面代曲線,用二重積分代單積分,就得到些形狀如(39)的積分.設

$$z=\varphi(x,y)$$

是曲面 S 的方程式,此曲面爲一個閉圍線 Γ 所限, Γ 在 xy 平面內的射影是一個閉曲線 C 限出一個領域 A,$\varphi(x,y)$ 在領域 A 內是連續的.他一方面,設 $R(x,y,z)$是在這個曲面 S 上的一個連續函數.二重積分

$$\iint_{(A)} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy \tag{42}$$

顯然和曲線積分有相同性 (analogue),我們本可以取此式作爲曲面積分的定義.然而這個積分立可變爲一個已經討論過的形狀的一個積分,這是因爲這個積分可寫爲(第132節)

$$\iint_{(S)} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma,$$

γ 是 S 的法線和 oz 軸所作的銳角;所以牠和取在曲面 S 的上面的曲面積分恆同.若將這個積分換符號,就表取在 S 的下面的曲面積分.特殊的我們可以說一個通常的二重積分 $\iint_{(A)} fdxdy$ 表取在 xy 平面的上面的曲面積分.

這個注意引導曲面積分 (39) 到一個簡約的記法,牠可寫爲

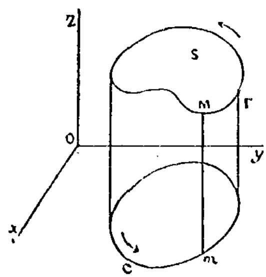
$$(43)\qquad \iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

只要注意將積分取在曲面的那一面指明,然而這個記法沒有以前(39)及(41)的記法顯明,在實行計算積分時,必須要回復到前者的形狀上.

注意.——設V是一個向徑(vecteur)牠的分徑(composante)是P, Q, R,原點是曲面上一點$M(x,y,z)$; $P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$表此向徑在$M$點的法線的正方向上的射影的代數值.那麽,二重積分(39)的原素,除符號不計外,等於一個柱形體積,底是S的一個原素$d\sigma$,高是以此原素上一點為原點的向徑V在S在此點的法線上的射影.

132. 斯多克(Stok)公式.——設有一系的直交坐標ox, oy, oz,一個觀察者,足在o,頭在oz的方向上,此人所見自ox向oy旋轉的方向,我們適宜的稱為旋轉的正向.譬如在圖25中三面角的位置法,是取yoz平面為圖的平面,ox軸是在圖的平面前方,在這個場合,旋轉的正向是自左向右.然而我們將來所得

圖二十五



的結果是不關係坐標軸的位置法的.

設 S 是一個有各別的兩面的規則曲面,爲一個閉曲線 Γ 所限,此閉線 Γ 能由兩個各異的方向畫出;我們依以下的規約,對於每一個方向令 S 的一面相應.設 AB 是 Γ 上一個小弧,P 是 S 上近於此弧的一點;由 P 點引法線的方向線 Pn,其定法如下:若有一個動點由 A 向 B 在 AB 弧上進行,一個觀察者足在 P 首在 Pn 上則見此動點的移動是依旋轉的正向.

對於以上所定閉線 Γ 的進行方向,我們令法線的方向是 Pn 那一面和牠相應.譬如 S 是方程式 $z=\varphi(x,y)$ 所表曲面的一部,S 的閉線 Γ 在 xy 平面的射影是一個閉閉線 C,函數 $\varphi(x,y)$ 在 C 所限領域內是連續的.一點 M 畫出 Γ 時若是牠的射影 m 依正方向畫出 C(圖25),曲面 S 的相應面就是上面.

假定曲面 S 和平面 (u,v) 中一個閉曲線 L 所限領域 D 點和點相應.這兩個輔助變數 u,v 在結果中自行消滅,我們可假定平面 (u,v) 平行於 xy 平面,ou 及 ov 軸和 ox 及 oy 軸位置法相同.在 (u,v) 點依正方向(第92節,附注)畫出閉線 L 時,(x,y,z) 點也依某一方向畫出閉線 Γ,這個方向我們叫作<u>正向</u>;對於 Γ 這個正向,曲面上有確定的一面相應,我們叫牠作<u>正面</u>.曲面上的法線的相應方向的方向餘弦都爲公式 (40) 所定,在其中當取 + 號在 $\sqrt{EG-F^2}$ 之前.要證明這一層,只須顯明 $\cos\gamma$ 和 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 同符號.誠然,我們取 S 的一點 P,及一個閉閉線 λ 包有此點,λ 有充分的小使 S 在 s 內的部分不能和 oz 的一個平行線相遇於一點以上;這個曲面 s 射影在 xy 平面成一個小領域 s'

爲λ的射影λ'所限.對於S的這個部分s,平面(u,v)中有一個領域r相應,爲一個閉曲線l所限.假定在此領域內沙勾局$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$是正;那麼,在(u,v)點依正方向畫出閉線l時,(x,y,o)點也依正方向畫出λ',(x,y,z)點也依正方向畫出λ.對於λ這個進行的正向,s有一個正面相應,依方綫的注意,她顯是s的上面,所以γ是銳角;同樣可在沙勾局$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$是負的所有點上,此角是鈍角.如此,對於S的正面的法線的方向餘弦,我們有公式

$$
(41)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos\alpha\, d\sigma=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}du\,dv,\quad \cos\beta\, d\sigma=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}du\,dv,\\
&\cos\gamma\, d\sigma=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}du\,dv,
\end{aligned}\right.
$$

此附已經說明,設$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx$是依正向取在Γ上的一個曲線積分;此積分可代以曲線積分

$$\int_L P(x,y,z)\left\{\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right\},$$

此後者是依正向取在L上的.應用格林公式第(116節),得

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma P\,dx&=\iint_{(D)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[P\frac{\partial x}{\partial v}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[P\frac{\partial x}{\partial u}\right]\right\}du\,dv\\
&=\iint_{(D)}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]du\,dv.
\end{aligned}
$$

依公式(44),此最後的二重積分恒同於曲面積分

$$\iint_S\left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right]d\sigma=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy,$$

此是取在S的正面的.循環交換x,y,z,又得兩個相似公式

$$\int_\Gamma Q(x,y,z)\,dy=\iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy-\frac{\partial Q}{\partial z}dy\,dz,$$

$$\int_{\Gamma} R(x,y,z)dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx;$$

和第一個公式相加,即得斯多克的普通公式

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx;$$

閉線 Γ 的進行的正向及曲面上積分所取的那一面的相應法是依我們所講明的.

133. **關於體積的應用.** —— 一個閉平曲線所限面積為一個取在此曲線上的曲線積分所表明,同樣一個閉曲面 S 所限體積為一個曲面積分所表明.先取一個閉曲面 S 祗只能和 oz 的一個平行線相遇於兩點,此曲面上所有點在 xy 平面的射影都在一個領域 A 內, A 內每一點都是 S 的兩點 m_1 及 m_2 的射影,設 $z_1 = f_1(x,y)$, $z_2 = f_2(x,y)$ 是 m_1 及 m_2 所畫兩張曲面 S_1 及 S_2 的方程式 $(f_1 < f_2)$. 曲面 S 所限體積等於兩個二重積分的差

$$V = \iint_{(A)} f_2(x,y)dxdy - \iint_{(A)} f_1(x,y)dxdy,$$

第一積分表取在 S_2 的上面的曲面積分 $\iint zdxdy$, 至於第二積分祗表取在 S_1 的上面的曲面積分 $\iint zdxdy$,所以這個差等於積分 $\iint zdxdy$ 依法線的向外方向的相應面在曲面 S 的全部上取的.依對稱理由,可取以下的任一曲面積分作為體積的式子

$$\iint_{(S)} z\,dx\,dy,\ \iint_{(S)} x\,dy\,dz,\ \iint_{(S)} y\,dz\,dx,$$

每一個都是取在曲面的外面;這個公式能推廣在一個任何曲面所限的體積上(第92節,注意).

習題

1. 一個懸索線(chainette),牠在直交坐標中方程式是

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

在此曲線上一點 M 引切線和 ox 軸交於 T, 將此圖形依此軸旋轉.設 A 是懸索線的頂點,試將曲線弧 AM 及切線 MT 所畫面積之差: 1^0 用 M 點的橫坐標的函數表明; 2^0 用 T 點的橫坐標的函數表明.

[Licence: Paris, 1880]

2. 設 ox, oy, oz 是三個直交坐標軸.一個直線曲面(surface réglée)由以下的方法產出:平面 zOA 依 Oz 旋轉;母線 D 在此平面內和 Oz 作一個定角其正切爲 λ;此母線在 OA (在平面 xOy 內)上截出一個線分 OC 等於 $\lambda a\theta$, a 表一個已知長度, θ 表 zOx, zOA 二平面所作的角.

1^0 計算此直線曲面及平面 xOy, zOx, zOA 所限的體積,此最後二平面所作的角 θ 小於 2π

2^0 計算曲面在平面 xOy, zOx, zOA 間的部分面積.

[Licence Paris, 1882.]

3. 設 Ox, Oy, Oz 是三個直交坐標軸.計算一個體積爲以下各面所限:橢圓拋物面,方程式是

$$\frac{2z}{c}=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2},$$

平面 xy 及柱面 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

〔Licence Paris, 1882.〕

4. 設 Ox, Oy 是直交坐標軸,A 及 B 是 Oy 軸上兩點,計算曲線積分

$$\int[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy,$$

此積分取在自 A 點至 B 點一個任何道路 AMB 上,但是此道路和直線 AB 限出面積 $AMBA$ 等於一個定量 S;m 是常數,$\varphi(y)$ 是一個連續函數,其導來式 $\varphi'(y)$ 亦然.

〔Licence Nancy, 1895.〕

5. 用變數更換法 $x+y=u$, $y=uv$ 計算取在 xOy 角內的二重積分

$$\iint e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy,$$

由此證明公式 $\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q)$.

6. 求一個旋轉橢圓面或一個旋轉雙曲面在兩個緯線間的部分面積.

7.* 三軸不等的橢圓面面積.—— 全面積 $\mathcal{S}$ 的一半等於二重積分

$$\frac{\mathcal{S}}{2}=\iint\sqrt{\frac{1-\dfrac{a^2-c^2}{a^4}x^2-\dfrac{b^2-c^2}{b^4}y^2}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\,dxdy,$$

此積分取在橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 內.將此二重積分變爲橢圓積分,所用方法中最簡易的一個出自Catalan;此方法由於115節

的變形法,用v表符號$\iint$下的函數,令v由1變至$+\infty$,則此二重積分等於差數

$$\frac{\pi abl(l^2-1)}{\sqrt{\left(l^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(l^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}-\pi ab\int_1^l\frac{(v^2-1)dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}$$

在l無窮大時的極限;此式現出不定形,但是我們可寫爲

$$\int_1^l\frac{v^2dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}=\left[\frac{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}{v}\right]_1^l$$

$$+\int_1^l\frac{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}},$$

可見在上的算式的極限是

$$\pi ab\left[\frac{c^2}{ab}+\int_1^{+\infty}\frac{dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\int_1^{+\infty}\frac{dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right].$$

8.* 由極坐標方程式$\rho=F(\theta,\varphi)$所定的曲面的面積爲二重積分$\iint\frac{\rho^3}{\delta}\sin\theta d\theta d\varphi$所表明,$\delta$是自原點至在$(\theta,\varphi)$點的切平面的距離.幾何上的意義.

應用.—— Fresnel de 彈力曲面 (surface délasticité)

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$$

即一個橢圓面關於中心的極面 (podaire), 其面積等於以

$\frac{bc}{a}, \frac{ca}{b}, \frac{ab}{c}$ 爲半軸的橢圓面的面積(William Roberts, Journal de Liouville $t.$ XI, 1[re] serie, $p.$ 81).

9. 用兩個不同的方法計算 $(x-y)^n f(y)$ 取在直線 $x=x_0, y=x, x=X$ 所成三角形的面積內的二重積分,以證

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y) dy = \int_{x_0}^{X} \frac{(X-y)^{n+1}}{n+1} f(y) dy.$$

由此演出關係式

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \cdots \int_{x_0}^{x} f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-y)^{n-1} f(y) dy.$$

同樣證明公式

$$\int_{x_0}^{x} x dx \int_{x_0}^{x} x dx \cdots \int_{x_0}^{x} x dx \int_{x_0}^{x} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \int_{x_0}^{x} (x^2-y^2)^n f(y) dy,$$

並用符號 $\int$ 下的微分法驗明這些公式.

10. 計算直線 $x=o, y=o, x+y-1=0$ 所成三角形的面積內的二重積分

$$\iint x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} (1-x-y)^{\frac{2}{3}} dx dy.$$

11. 計算二重積分

$$\iint x^2 y^3 \sqrt{1-x^3-y^3}\, dx dy,$$

此積分取在不等式

$$x \geqq o, \quad y \geqq x, \quad x^3+y^3 \leqq 1$$

所限平面部分內.

12. Schwarz 的例子(第124節註).——一個旋轉圓柱半徑爲 r, 高爲 h. 我們將其高分爲 m 等分,由這些分點用平行

於兩底的平面通過之;再在如此所得的直截線上,作內接有法凸多角形邊數爲n,其方法使經過這些多角形的一頂點的母線也經過相隣兩個多角形的一邊所對弧的中點.這些多角形的所有頂點都是圓柱的一個內接多面體的頂點;此多面體爲$2mn$個相等的等腰三角形所成,其面積等於

$$2mnr\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4+\frac{h^2}{m^2}}.$$

在m及n增加無限時,此式的極限關係於$\frac{m}{n^2}$的極限;此極限惟在$\frac{m}{n^2}$的極限是零時始等於$2\pi rh$.

13*. 第117節公式(17)的推廣.——此公式的證明法似乎必須第二級導來式φ''_{uv}的存在,這個假定是可以離卻的.誠然,若是$f(u,v)$, f'_u, f'_v在領域A_1內都是連續的,此公式對於一個任何多項式$P(u,v)$都是確實的,

$$(\alpha)\qquad \int_{(C_1)} f(u,v)\left(\frac{\partial P}{\partial u}du+\frac{\partial P}{\partial v}dv\right)=\iint_{(A_1)}\frac{D(f,P)}{D(u,v)}du\,dv.$$

但是若函數φ及其導來式在領域A_1內都是連續的,我們總能設求得一個多項式$P(u,v)$使$\varphi-P$, $\varphi'_u-P'_u$, $\varphi'_v-P'_v$在A_1內其絕對值恒小於一個任何正數ε.(可參觀Vallée Poussin的Cours d' Analyse).所以能選擇$P(u,v)$使公式(17)的兩邊和等式(α)的兩邊相差如何少都可以.結果,二式是相等.

14. 保存面積的點的變形法.——凡公式

$$X=\frac{\partial U(x,Y)}{\partial Y},\qquad \frac{\partial U(x,Y)}{\partial x}=y$$

所定點的變形法都是

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=1,$$

結果是保存面積的.欲證其逆定理,可假定點的變形法為公式

$$X=f(x,Y),\quad \varphi(x,Y)=y,$$

由此得

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial Y}.$$

〔註一〕 此式又可表以$\iint_{(A)}F(x,y)d\omega$, $d\omega$ 是一個面積原素;對於複積分亦可用相類的記法.

〔註二〕 閱者請畫出此圖.

〔註三〕 在 Catalan 的一個記錄上,有此法的許多應用.(Journal de Liouville 1^e série, *t.* IV, *p.* 233)

〔註四〕 此一層能嚴格的證明 (Bulletin de la Société mathématique, *t.* XXXVIII, 1910, *p.* 139.) 為避免困難計,可將沿曲線 γ_1 所取的積分$\int y dx$命為s的射影的面積 (*cf.* n°93).

〔註五〕 此定義實際上是將曲面S上無限小的一片代以此片上一點的切平面上的無限小的一片.曲面積似乎應該取和曲線弧的長度相似的定義,就是說將 S 的面積看一個內接多面體的面積在面的數增加無限而棱的最大長度漸近於零時之極限.Schwarz有一個簡單的例子表明一個顯有趣旨的事實:一個多面體的面積在不加入別的條件時不漸近於零.

〔註六〕 我們甚易作出一個曲面不能滿足這個條件.只須取折一張長方的紙 $ABCD$,使 BC 邊合於 AD 邊,C合於A,B合於 D.

第　七　章

複積分(intégrales multiples).

全微分的積分法

I.——複積分.——變數更換法.

134. 三重積分(intégrales triples).——三重積分的定法和二重積分完全相同(第111-112節),只須將兩度的領域換作三度的領域,將面積換作體積.設 $F(x,y,z)$ 是在空間一個限制領域內的一個限制函數.懸想由任何方法將此領域分爲部分領域 d_1, $d_2,\cdots,d_n$, 牠們的體積是 $v_1,v_2,\cdots,v_n$, 設 M_i, m_i 是 F 在 d_i 內的上限及下限.在 n 增加無限使每一部分領域都由牠的一切的度減小無限時,這兩個和數

$$S=\sum_{i=1}^{n}M_i v_i,\quad s=\sum_{i=1}^{n}m_i v_i$$

各漸近於極限 I, I'. 我們有 $I'\leq I$.

若 $I'=I$, 函數 $F(x,y,z)$ 在領域 D 內就是能積分的,和數 S 及 s 的公共極限是 $F(x,y,z)$ 擴充在領域 D 的三重積分.我們表此積分用符號

$$I=\iiint_{(D)}F(x,y,z)dxdydz,$$

領域 D 是積分的場,積分 I 也是和數

$$S'=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)v_i \tag{1}$$

的極限,(ξ_i,η_i,ζ_i) 是領域 d_i 內或牠的界上任何點的坐標.

凡一個連續函數都是能積分的.凡一個限制函數,若有若干不連續點,但是我們能夠將這些不連續點閉在一個領域內,此領

域的體積能小於一個任何正數,這個函數就也是能積分的.譬如一個限制函數$F(x,y,z)$在領域內有一個或多個不連續面(surface de discontinuite),就是這個場合.

三重積分常發現在力學中各種問題上,特別的就是求一個固體的質量(masse)或重心時尤須應用.假定領域(D)爲一種異質物質 (substance hétérogene) 所充滿,設 $\mu(x,y,z)$ 是在一點的密度(densité),就是說以(x,y,z)點爲心,用無極小的半徑作一個球,此球內的質量和此球的體積的比.若μ_1及μ_2是μ在領域(d_i)內的最大及最小價值,可見此領域所含的質量在$\mu_1 v_i$及$\mu_2 v_i$中間;所以牠等於$v_i\mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$,$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$是在$(d_i)$內選擇適宜的一點.所以此固體的全質量是取在領域$D$的三重積分$\iiint \mu dxdydz$.

135. **計算方法.**——先取一個函數$F(x,y,z)$,牠在領域D內是連續的,D的界是:平面$z=o$的兩個平行平面$z=z_0$, $z=Z$,一個圓柱牠的母線平行於oz,牠由平面xy所成的橫截線(section)是一個閉曲線C,曲線C包圍一個平面領域A.假定此平面領域A分爲更小的領域$a_1,a_2,\cdots,a_n$,牠們的面積是$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$;我們作些圓柱,牠們的母線都平行於$oz$軸,牠們的底是領域$a_1,a_2,\cdots,a_n$.和第113節相同,我們先計算取在以平面領域$a_i$爲底的柱形領域$D_i$內的三重積分的主部分.假定此領域自身由平面$z=z_k$ $(k=1,2,\cdots,m-1)$ 又分爲小的柱形領域,$z_1,z_2,\cdots,z_{m-1}$成爲一個級列(suite)的上升數在z_0及Z中間,依平均值定理,取在領域D_i內三重積分等於

$$\omega_i[F(\xi_{i1},\eta_{i1},\zeta_{i1})(z_1-z_0)+F(\xi_{i2},\eta_{i2},\zeta_{i2})(z_2-z_1)+\cdots],$$

$(\xi_{ik},\eta_{ik},\zeta_{ik})$是平面$z=z_{k-1}$,$z=z_k$在$D_i$內所定小柱形內一點的

坐標.拋一方面,$(\xi_i\eta_i)$是領域a_i內一點的坐標:依平均值定理,對於一個單積分,我們仍有

$$\int_{z_0}^{Z} F(\xi_i,\eta_i,z)dz = F(\xi_i,\eta_i,\zeta_1)(z_1-z_0)+F(\xi_i,\eta_i,\zeta_2)(z_2-z_1)+\cdots$$

ζ_k是在z_{k-1}及z_k中間,所以取在領域D_i內三重積分又可寫爲

$$\omega_i\left[\int_{z_0}^{Z} F(\xi_i,\eta_i,z)dz+\varepsilon_1(z_1-z_0)+\cdots+\varepsilon_k(z_k-z_{k-1})+\cdots\right],$$

我們是令

$$F(\xi_{ik},\eta_{ik},\zeta_{ik})=F(\xi_i,\eta_i,\zeta_k)+\varepsilon_k,$$

(ξ_i,η_i,ζ_k) 及 $(\xi_{ik},\eta_{ik},\zeta_{ik})$點都是在一個部分柱形內,所有的絕對價值$|\varepsilon_k|$都能夠小於一個任意正數$\varepsilon$,但須領域$a_i$的度及差數$z_k-z_{k-1}$都小於一個只關係$\varepsilon$的另一正數$\eta$.所以取在柱形領域$D_i$的三重積分等於

$$\omega_i\left[\int_{z_0}^{Z} F(\xi_i,\eta_i,z)dz+\rho_i\right]$$

(ξ_i,η_i) 是領域 a_i 內任意一點的坐標,ρ_i 均一的和此領域的最大的度同時爲零.所以所求的三重積分等於和數

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi(\xi_i,\eta_i)\omega_i$$

的極限,

其中是令

$$\Phi(x,y)=\int_{z_0}^{Z} F(x,y,z)dz. \tag{2}$$

這個極限等於函數$\Phi(x,y)$ 取在領域A內的二重積分我們有

$$\iiint_{(D)} F(x,y,z)dxdydz=\iint_{(A)}\Phi(x,y)dxdy \tag{3}$$

$$=\iint_{(A)} dxdy\int_{z_0}^{Z} F(x,y,z)dz.$$

我們已見一個二重積分的計算法如何變爲一個面積法.例如積分的場D是六個平面所限的一個平行六面體,這六個平面

的方程式是 $x=x_0, x=X, y=y_0, y=Y, z=z_0, z=Z$, 領域 A 是一個直方形,三重積分的式子是

$$(4)\qquad \int_{x_0}^{X}dx\int_{y_0}^{Y}dy\int_{z_0}^{Z}F(x,y,z)dz.$$

這個式子的意義是極明瞭的.在第一個積分法中是將 x 及 y 看作常數:所得結果是兩個變數 x 及 y 的函數,我們將 x 看作常數,將 y 看作變數,再在 y_0 及 Y 間求積分;由此第二積分法所得的結果只關係於 x, 又在 x_0 及 X 間求積分.

三個字母有若干排列法,實行此積分時就有若干方法,就是有六個方法.例如我們可以將三重積分寫爲

$$\int_{z_0}^{Z}dz\int_{x_0}^{X}dx\int_{y_0}^{Y}F(x,y,z)dy=\int_{z_0}^{Z}\Psi(z)dz,$$

$\Psi(z)$ 表 $F(x,y,z)$ 在直線 $x=x_0, x=X, y=y_0, y=Y$ 所限的直方形內的二重積分.

我們起首時若作三列的平面平行於坐標平面,將領域 D 分爲小平行六面體,這些小六面體有些在平面 $z=z_{i-1}, z=z_i$ 所限薄片(tranche)內,我們先求 S' 成自此等六面體的部分,也能得以上的式子;若適宜的取 (ξ,η,ζ) 點,此薄片給與 S' 一個和數

$$\Psi(z_{i-1})(z_i-z_{i-1}),$$

這個推理的終結和上相同.

一個限制函數 $F(x,y,z)$ 在領域內若有一個或數個不連續面,公式(3)仍能應用.例如函數 F 在兩個曲面 S_1 及 S_2 的某某部分上是不連續的,S_1 及 S_2 的方程式是

$$(S_1)\qquad z=\varphi_1(x,y),$$

$$(S_2)\qquad z=\varphi_2(x,y),$$

φ_1 及 φ_2 是在領域 A 內的兩個連續函數 $(z_0<\varphi_1<\varphi_2<Z)$,這兩個曲

面S_1及S_2分D爲三部分,在每一部分中函數F都是連續的.爲確定人的觀念,我們假定:

第一, 在平面$z=o$及S_1中間,$F=f_1(x,y,z)$;

第二, 在S_1及S_2中間,$F=f_2(x,y,z)$;

第三, 在S_2及平面$z=Z$中間,$F=f_3(x,y,z)$.

每一個函數f_1,f_2,f_3都假定在相應區域內是連續的.計算此三重積分時,公式(3)仍能應用,但須令

$$\int_{z_0}^{Z} F(x,y,z)dz=\int_{z_0}^{\varphi_1} f_1(x,y,z)dz+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_2(x,y,z)dz+\int_{\varphi_2}^{Z} f_3(x,y,z)dz.$$

由這個注意,直接得計算一個連續函數$F(x,y,z)$在一個領域D的三重積分的方法,這個領域的界限是一個和前相同的圓柱及曲面$z_1=\varphi_1(x,y)$,$z_2=\varphi_2(x,y)$的兩個部分,φ_1及φ_2在平面領域A內是連續的.爲此,我們只須取兩個輔助平面$z=z_0$,$z=Z$($z_0<\varphi_1<\varphi_2<Z$)及一個輔助函數$F'(x,y,z)$,在領域$D$內,此函數等於$F(x,y,z)$,在領域$D$外此函數等於零.$n^{\circ}$ 114的推理可以應用無須變更,$F(x,y,z)$在D的三重積分的價值是

$$\iint_A dxdy\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(x,y,z)dz.$$

若領域A的圍線C是Oy的兩個平行直線及兩個曲線弧$y_1=\psi_1(x)$,$y_2=\psi_2(x)$,($\psi_1<\psi_2$),我們又有

$$(5)\qquad \iiint_{(D)} F(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{\psi_1}^{\psi_2} dy\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(x,y,z)dz.$$

第一積分法的極限φ_1及φ_2關係於x及y,第二積分法的極限ψ_1及ψ_2只關係x,最後,極限a及b都是常數.

若積分的場D爲一個閉曲面Σ所限,Σ只和坐標軸的一個平行線相遇於兩點(例如一個凸曲面),我們能任意依一個次序

實行這些面積法,但是這些極限一般的依積分的次序而不同.

例.——試計算三重積分$\iiint z\,dx\,dy\,dz$取在球體$x^2+y^2+z^2=R^2$的八分之一內爲三面角$Oxyz$所限.若先關於z再關於y再關於x積分,積分的極限如下:x及y是定數時,z能自零變至$\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;x是定數時,y能自零變至$\sqrt{R^2-x^2}$,最後x能自零變至R.所以

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dz,$$

由此逐漸取得

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}z\,dz=\frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2),$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(R^2-x^2-y^2)dy=\left[\frac{1}{2}(R^2-x^2)y-\frac{1}{6}y^3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$=\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$,只剩了計算有定積分$\frac{1}{3}\int_0^R(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$,令$x=R\cos\varphi$,此積分成爲

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^4\sin^4\varphi\,d\varphi.$$

所以三重積分的價值是$\dfrac{\pi R^4}{16}$.

注意.——若不先計算由一列的柱形領域所得的和,我們也可以用別種計劃.設D是在兩個平行平面$z=z_0$,$z=Z$間一個限制領域;我們先用些平面$z=z_i$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$分此領域爲許多薄片(tranches),$z_1,z_2,\cdots,z_{m-1}$成爲一列的上升數在z_0及Z中間,再將每一薄片分爲小柱形領域;仍依第135節的推理,也可見取在平面$z=z_{i-1}$,$z=z_i$所限薄片內的三重積分的主部分是

$$(z_i - z_{i-1})\iint_{A_{i-1}} F(x, y, z_{i-1})dxdy,$$

A_{i-1}是領域D及平面$z=z_{i-1}$所成的平面領域,所以若令

$$\Psi(z) = \iint_{(A_z)} F(x,y,z)dxdy,$$

A_z是方才所定的平面領域,三重積分的式子就是

$$\int_{z_0}^{Z} \Psi(z)dz.$$

欲計算擴充在一個任何領域D的三重積分,可將領域D分爲許多領域,使牠們都和以上所取領域相同,譬如分爲如此的領域:平行於一個定方向的直線只能和限此領域的曲面相遇於一點.

136. 格林公式.—— 對於三重積分也有一個公式和第116節公式(15)完全相似.先設一個曲面S牠和oz軸的一個平行線只相遇於兩點,一個函數$R(x, y, z)$在此曲面上是連續的,$\frac{\partial R}{\partial z}$也是如此.$S$上的所有點在平面$xy$上的射影成爲一個面積$A$爲一個閉閉線$C$所限.對於領域$A$內每一點,曲面$S$上有兩點相應,坐標是$z_1=\varphi_1(x, y)$及$z_2=\varphi_2(x, y)$.如此,這個曲面區分爲二部$S_1$及$S_2$;我們假定$z_1<z_2$.此層已經說明,取在閉曲面$S$上的三重積分

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

能夠先關於z在極限z_1及z_2間積分(第135節).這個第一積分的結果是$R(x, y, z_2) - R(x,y, z_1)$,然後在領域$A$內取二重積分

$$\iint\left[R(x,y,z_2) - R(x,y,z_1)\right]dxdy.$$

但是二重積分$\iint R(x,y,z_2)dxdy$不是別的,只是取在曲面S_2的上面的曲面積分(第131節)

$$\iint_{(S_2)} R(x,y,z)dxdy.$$

同樣，$R(x,y,z_1)$ 的二重積分換符號是取在 S_1 的下面的二重積分

$$\iint_{(S_1)} R(x,y,z)\,dxdy.$$

將此二積分相加，我們可寫為

$$\iiint\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz=\iint_{(S)} R(x,y,z)dxdy,$$

此曲面積分是取在 S 的外面的。

若領域的全部界限 S 除去曲面 S_1 及 S_2 外又有一部分是柱形曲面，牠的母線平行於 oz 軸，以上的結果仍能應用，這是因為取在這個柱面上的曲面積分 $\iint\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdy$ 等於零的緣故。

這個公式能推廣到一個任何形狀曲面所限體積上，此層已經屢次說明；互換 x,y,z，即演出相似的其他公式：

$$\iiint\frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz=\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz,$$

$$\iiint\frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz=\iint_{(S)} (x,y,z)dzdx.$$

相加，即得對於三重積分格林的一般公式

$$\iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy,$$

曲面積分總是依曲面的外面取的。

若要復得着以前所得的體積的式子，只須令 $P=x, Q=R=o$，或 $Q=y, P=R=o$，或 $R=z, P=Q=o$。

137. **兩個曲面的原素的比。**——對於三重積分，若

要成立一個變數更換法公式,可用一個方法和第117－118節所用的方法相同.我們先證明一個預公式.設公式

(6) $$x=f(x',y',z'),\ y=\varphi(x',y',z'),\ z=\psi(x',y',z')$$

在空間定出一個點的變形法 (transformation ponctuelle); x', y', z' 是一點 m' 關於一系的直交軸 ox', oy', oz',的坐標,x, y, z 是相應點 m 關於一系的直交軸 ox, oy, oz 的坐標,此一系的軸和上一系位置法相同,也可以和牠相合.我們假定:第一,x', y', z' 點畫出一個領域 (E') 時,x, y, z 點畫出又一領域 (E); 第二,這兩個領域的點依惟一的(univoque)方法每一個和每一個相應; 第三,函數 f, φ, ψ 是連續的,又有偏導來函數在 (E') 內也是連續的,並且在 (E') 內,沙勾尉 $\dfrac{D(x,y,z)}{D(x',y',z')}$ 不能成爲零.

兩個領域內諸點間的相應法能夠是正或反.設 $m't'_1, m't'_2, m't'_3$ 是三個線原素,成爲一個三面角在領域 (E') 內;因爲函數 f, φ, ψ 的沙勾尉在 m' 點不成爲零(第三章,習題13),對於這三個線原素,領域 (E) 內有三個線原素 mt_1, mt_2, mt_3 相應也成爲一個三面角,若此三面角 $mt_1t_2t_3$ 的位置法和三面角 $m't'_1t'_2t'_3$ 的位置法相同,公式(6)所定的相應法就說是正,在相反的場合,這個相應法說是反,這個定義又能爲以下的定義替代.設 S, S_1 是領域 E, E' 內兩個相應曲面,各有各別的兩面,又各爲閉曲線 Γ, Γ' 所限.依公式(6)的相應法在此兩個閉線上取兩個相應的進行方向;依第132節所作的規約,對於這個進行方向,每一個曲面上都有確定的一面相應.若此二曲面 S, S' 的二面也是依公式(6)彼此相應,這些公式所定的相應法就是正,否則是

反.

此層已經說明,試在曲面 S,S' 上取依所設的變形法的相應二面,設 $(\alpha,\beta,\gamma),(\alpha',\beta',\gamma')$ 是此二面的法線的方向和坐標軸所作的角.假定二曲面 S,S' 上諸點的坐標為兩個變率 u 及 v 所表,我們在前已經說明如何是周線 Γ,Γ' 的正向,及如何是二曲面的正面.若相應法是正,S 的正面,相應於 S' 的正面,依第132節的公式(44)及關於曲面 S 相似公式,我們有

$$\cos\gamma\, d\sigma=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}du\,dv,\quad \cos\gamma' d\sigma'=\frac{D(x',y')}{D(u,v)}du\,dv,$$

$d\sigma$ 及 $d\sigma'$ 是曲面的面積原素.若相應法是反,對於 S 的正面相應於 S' 的負面,在第二公式中,$\cos\gamma'$ 當代以 $-\cos\gamma'$. 將此二公式各邊除各邊得

$$\frac{\cos\gamma\, d\sigma}{\cos\gamma' d\sigma'}=\pm\frac{D(x,y)}{D(u,v)}:\frac{D(x',y')}{D(u,v)}, \tag{7}$$

依相應法是正或反,公式當取符號 + 或 −.

在這個關係式中也可以將這兩個輔助變數 u 及 v 消滅;誠然,我們有

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\frac{D(x',y')}{D(u,v)}+\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}\frac{D(y',z')}{D(u,v)}+\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}\frac{D(z',x')}{D(u,v)}.$$

所得關係式關於沙勾爾 $\dfrac{D(x',y')}{D(u,v)},\cdots$ 既是同質的(homogenes),若將牠們代以牠們的比例量 $\cos\alpha',\cos\beta',\cos\gamma'$, 就成為

$$\cos\gamma\, d\sigma=\pm\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}\cos\alpha'+\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}\cos\beta'+\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\cos\gamma'\right]d\sigma'. \tag{7'}$$

對於 $\cos\alpha\, d\sigma$, $\cos\beta\, d\sigma$ 也有和此相應的公式;這些公式能將取在 S 上的曲面積分代以取在 S' 上的一個曲面積分.

138. **變數更換法.第一方法.**——設 D,D' 是取在領

域(E),(E')的兩個相應領域,爲兩個閉曲面S,S'所限,我們先求此兩個領域的體積的比$\frac{V}{V'}$的式子,我們有

(8) $$V=\int_{(S)} z\,dx\,dy=\int_{(S)} z\cos\gamma\,d\sigma$$

$d\sigma$是S的面積原素,γ是領域(E)的外法線(normale exterieure)的方向和oz所作的角,然而由公式(7′)能將曲面積分(8)代以取在S'上的曲面積分,如此,即得

$$V=\pm\iint_{(S')}\psi(x',y',z')$$
$$\times\left[\cos\alpha'\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}+\cos\beta'\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}+\cos\gamma'\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right]d\sigma',$$

α',β',γ'是曲面S'的外法線和坐標軸ox',oy',oz'所作的角;依相應法是正或反,當取符號+或−,這一個新積分不是別的,只是依曲面S'的外面所取曲面積分(參觀第131,132,137節)

$$\iint_{(S')}\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}dy'dz'+\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}dz'dx'+\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}dx'dy'.$$

應用格林的一般公式在此最後的積分上,牠成爲

(8′) $$V=\pm\iiint_{(E')}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}\right]+\frac{\partial}{\partial z'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right]\right\}dx'dy'dz',$$

將積分號下的函數展開,得兩類的項;有些項含有一個第二級導來函數例如$\frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial\varphi}{\partial z'}$,然而這些項都是兩兩相消,這是容易看出的,至於只含第一級導來函數諸項,牠們的和是

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}+\frac{\partial\psi}{\partial z'}\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}=\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}.$$

所以又得着

$$V=\pm\iiint_{(E')}\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}dx'dy'dz',$$

最後應用平均值定理得

$$V=\pm V'\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta,\zeta)},\tag{9}$$

(ξ,η,ζ)是領域(E')內一點的坐標.因為V及V'都是正,所以依沙勾局$\dfrac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}$是正或負,由此公式可以演出這個相應法是正或反(第三章習題13),我們又可寫為

$$V=V'\left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right|.\tag{9'}$$

這個公式(9′)和第六章公式(17)完全相似,由此取得一列的結果.特殊的,在對於三重積分變數更換公式可立即演出;只要再述第118節的方法無須修改.若$F(x,y,z)$是在領域(E)內一個能積分函數,我們有

$$\iiint_{(E)}F(x,y,z)dxdydz=\iiint_{(E')}F(f,\varphi,\psi)\left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}\right|dx'dy'dz'\tag{10}$$

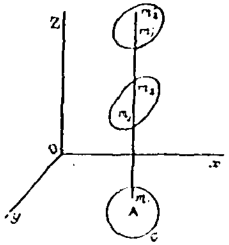
139. **變數更換法:第二方法.**——公式(10)又能用以下的方法證明.我們先注意,若是對於一個或數個特殊的變數的更換法,這個公式業已證明,我們若將這些變數更換法連續實行,這個公式就也是確實,這是依函數定準式的性質可見的(第52節).若是這個公式適用在空間的許多領域,牠就也適用在此等領域相加所得的領域,此層業已說明,和二重積分的場合相同,我們將證明這個公式對於更換一個自變數時能夠適用,譬如一個變形法為以下的形狀:

$$x=x',\ y=y',\ z=\psi(x',y',z')\tag{11}$$

我們假定這兩點$M(x,y,z)$及$M'(x',y',z')$都是關於相同的坐標

軸,並假定領域(E)所界的曲面只和oz的一個平行線相遇於兩點,對於這個曲面,公式(11)作出另一曲面相應,此後者限出一個領域(E');這兩個曲面有一個公有的外切柱形,牠的母線(génératrices)平行於oz,牠沿一個閉曲線C爲平面$z=o$所割,曲線C所限領域A中每一點m都是第一曲面上兩點m_1及m_2的射影,牠們

圖二十六



的豎坐標是z_1及z_2,又都是第二曲面上兩點m_1'及m_2'的射影,牠們的豎坐標是z'_1及z'_2.我們假定$z_1<z_2$,$z_1'<z_2'$.對於m_1點,公式(11)定出一點m'_1或m'_2相應,欲分辨這兩個場合,只須考$\frac{\partial\psi}{\partial z'}$的符號.若$\frac{\partial\psi}{\partial z'}$是正,$z$就和$z'$同時增加在此場合,$m_1$點和$m_1'$點相應,$m_2$點和$m_2'$點相應.反之,若$\frac{\partial\psi}{\partial z'}$是負,$z'$增加時,$z$減小;在此場合,$m_1$和$m'_2$相應,$m_2$和$m'_1$相應,在第一場合,我們有

$$\int_{z_1}^{z_2}F(x,y,z)\,dz=\int_{z'_1}^{z'_2}F[x,y,\psi(x,y,z')]\frac{\partial\psi}{\partial z'}dz';$$

在第二場合和此相反,我們有

$$\int_{z_1}^{z_2}F(x,y,z)\,dz=-\int_{z'_1}^{z'_2}F[x,y,\psi(x,y,z')]\frac{\partial\psi}{\partial z'}dz'$$

在這兩個場合,我們都可寫爲

(12)　$$\int_{z_1}^{z_2}F(x,y,z)\,dz=\int_{z'_1}^{z'_2}F[x,y,\psi(x,y,z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|dz'$$

現在我們若在區域A中取此等式兩端的二重積分,二重積分

$$\iint_{(A)} dxdy\int_{z_1}^{z_2} F(x,y,z)dz$$

不是別的,只是在空間領域(E)所取的三重積分$\iiint F(x,y,z)dxdydz$.同樣,(12)的第二端的二重積分就是函數

$$F[x',y',\psi(x',y',z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|$$

在(E')內所取的三重積分,若將x代以x',y代以y',即可見是如此的.所以在此特別場合我們有

$$\iiint_{(E)} F(x,y,z)dxdydz=\iiint_{(E')} F[x',y',\psi(x',y',z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right|dx'dy'dz';$$

然而在此處函數定準式$\dfrac{D(x,y,z)}{D(x',y',z')}$簡約爲$\dfrac{\partial\psi}{\partial x'}$.所以對於(11)的變數更換法,公式(10)是確實的.

再設一個變數更換法

$$(13)\qquad x=f(x',y',z'),\ y=\varphi(x',y',z'),\ z=z',$$

在此更換法中,變數z不換;普通公式(10)在此場合也是確實.我們假定由公式(13),空間兩個領域(E)及(E')間點和點相應,特別的,(E)及(E')由平面$z=o$的一個平行平面所成的橫截線R及R'間也是點和點相應.所以依二重積分的變數更換法,我們有

$$(14)\qquad \iint_{(R)} F(x,y,z)\,dxdy$$
$$=\iint_{(R')} F[f(x',y',z'),\varphi(x',y'z,'),z']\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right|dx'dy';$$

此等式的兩端只關係於變數$z=z'$.在區域(E)內,z能由z_1變至z_2,我們若再在此二極限內求積分,所得等式可寫爲

$$(15)\qquad \iiint_{(E)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\iiint_{(E')} F[f(x',y',z'),\varphi(x',y',z'),z']\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right|dx'dy'dz'$$

但是此處 $\dfrac{D(x,y,z)}{D(x',y',z')}=\dfrac{D(x,y)}{D(x',y')}$,所以公式(10)對於(13)的變數更換法仍能適用.

現在我們證明凡一個變數更換法

$$(16)\qquad x=f(x_1,y_1,z_1),\quad y=\varphi(x_1,y_1,z_1),\quad z=\psi(x_1,y_1,z_1)$$

都能由以上兩個變數更換法組合而成.令 $x'=x_1$, $y'=y_1$, $z'=z_1$;(16)的最後方程式可寫爲 $z'=\psi(x',y',z_1)$, 由此得 $z_1=\pi(x',y',z')$. 那麼,公式(16)能爲一組的六個方程式所更換:

$$(17)\qquad x=f[x',y',\pi(x',y',z')],\quad y=\varphi[x',y',\pi(x',y',z')],\quad z=z',$$

$$(18)\qquad x'=x_1,\ y'=y_1,\quad z'=\psi(x_1,y_1,z_1):$$

由前所見,公式(10)對於(17),(18)的變形法能夠適用,結果,牠也適用在(16)的變數更換法上.

我們也能夠將公式(16)用和(11)相同的三個變形法逐漸更換,這一層閱者很容易自行驗明.

140. **體積的原素.**——將變數更換法的公式(6)中的 x', y', z' 代以 u, v, w,我們有

$$(19)\qquad x=f(u,v,w),\quad y=\varphi(u,v,w),\quad z=\psi(u,v,w).$$

現在稍改變幾何上的意義,我們將 u, v, w 看作一系的曲線坐標曲面(u)是將 u 看作常數但令 v 及 w 變化時 (x,y,z) 點所畫的曲面,曲面(v)及(w)的定義也是和此相同.若在空間的領域(E)中的每一點上,這三類曲面中各有一個經過,然只有一個經過,這些曲面就分區域(E)爲許多小六面體(héxaédres),和由三個

坐標平面的平行面所成的六面體相似,但牠們的各面都是彎曲的.

依公式(9),曲面(u),(v),(w),$(u+du)$,$(v+dv)$,$(w+dw)$所限固體的體積(du,dv,dw都是正)是

$$\left[\left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(u,v,w)}\right|+\varepsilon\right]dudvdw,$$

ε和du,dv,dw同時為無限小.依前所見(第72及118節),我們能夠略去$\varepsilon dudvdw$一項,積數

$$dV=\left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw \tag{20}$$

叫作曲線坐標(u,v,w)中的<u>體積原素</u>.

設ds^2是在同一坐標系中線的原素的平方;自公式(19)得

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw,\quad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial u}du+\cdots,$$

各自乘再相加,得

$$\begin{aligned}ds^2=H_1du^2+H_2dv^2+H_3dw^2+2F_1dvdw\\+2F_2dwdu+2F_3dudv,\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$H_1=S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad H_2=S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\quad H_3=S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2, \tag{22}$$

$$F_1=S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w},\quad F_2=S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w},\quad F_3=S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

符號S表明當用y代x,再用z代x,然後作牠們的和.定dV的公式極容易自定ds^2的公式演出;誠然,依普通定規作定準式的平方,

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}H_1 & F_3 & F_2\\ F_3 & H_2 & F_1\\ F_2 & F_1 & H_3\end{vmatrix}=M,$$

得體積的原素 $\sqrt{M}\,du\,dv\,dw$.

現在取一個重要的特別場合,假定坐標曲面 (surfaces coordonnées) (u), (v), (w) 成爲一個三重垂直系 (systeme triple orthogonal), 就是說經過空間任一點的三個曲面在此點上都是兩兩的垂直相割.那麼,此三個曲面在此點上定出三個互觸曲線,這三個曲線的切線在此點上成爲一個直交三面角(triédre trirectangle);這個條件只須要 $F_1=F_2=F_3=0$. 如此,ds^2 及 dV 的公式成爲簡單

(23) $$ds^2=H_1du^2+H_2dv^2+H_3dw^2,\quad dV=\sqrt{H_1H_2H_3}\,du\,dv\,dw.$$

由微分幾何上幾個注意也很容易得着這些公式.假定 du, dv, dw 極小,將體積原素看作一個極小的平面直方體.若畧去高級無限小,這個直方體的稜就各等於 $\sqrt{H_1}du$, $\sqrt{H_2}dv$, $\sqrt{H_3}dw$. 若將對角線看作線的原素,將此小體積看作體積原素即得公式(23).同樣,一個面的面積 $\sqrt{H_1H_2}\,du\,dv$ 表曲面 (w) 的面積原素.

例如空間的極坐標

(24) $$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta;$$

ρ 表 $M(x,y,z)$ 點至原點的距離,θ 表 OM 和 Oz 所作的角,φ 表半平面 Moz 在平面 $z=0$ 上的迹和 ox 所作的角.欲得空間的所有點,只須令 ρ 自 0 變至 $+\infty$, θ 自 0 變至 π, φ 自 0 變至 2π. 由公式(24),得

(25) $$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta d\varphi^2,$$

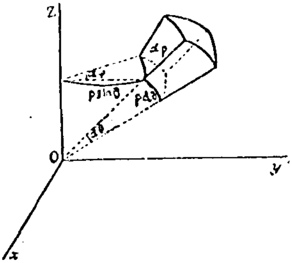
因而

(26) $$dV=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

不用一點計算也可以得着這些公式.這三類的曲面 (ρ), (θ), (φ) 各是以原點爲心的同心球面,以原點爲頂點以 oz 爲軸的旋轉圓錐及經過 oz 軸的平面.這些曲面成爲一個三重垂直系,如圖

所示,

圖二十七



可見體積原素的度各等於 $d\rho$, $\rho d\theta$, $\rho\sin\theta d\varphi$;如此即得公式(25)及(26).

設有一個閉曲面S,牠和由原點所出的一個半直線只相遇於一點,並且包有原點在內,牠的方程式是 $R=f(\theta,\varphi)$, 若要用變數ρ, θ, φ 計算擴充在此曲面所限領域內的三重積分,我們須令ρ自0變至R,再令θ自0變至π,φ自0變至2π.例如求計算此曲面所限的體積,這個體積等於三重積分

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^2\sin\theta d\rho;$$

第一個積分法是直接的,只餘

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3}\sin\theta d\theta.$$

我們有時也用半極坐標 r, ω, z, 其中 $x=r\cos\omega$, $y=r\sin\omega$. 在此場合,我們有

$$ds^2=dr^2+r^2d\omega^2+dz^2$$

$$dV=r d\omega dr dz.$$

141. 橢圓坐標.——設一個方程式

$$(27)\qquad \frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}-1=o$$

其中 λ 是一個變率,其中 $a>b>c>o$, 此方程式所表的曲面成為一系的同焦點二次曲面 (quadriques homofocales). 自空間每一點此系中有三個曲面經過,一個橢圓面,一個兩張雙曲面,一個一張雙曲面,這是因為方程式(27)總有一個根 λ_1 在 b 及 c 中間,一個根 λ_2 在 a 及 b 中間,一個根 λ_3 大於 a;這三個根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 叫以 x, y, z 為直交坐標的點的橢圓坐標 (coordonnées elliptiques). 系中任何二曲面都互相垂直,這是因為在方程式 (27) 中若先用 λ_1 代 λ, 再用 λ_2 代 λ, 各邊減各邊,又除以 $\lambda_1-\lambda_2$, 即得

$$(28)\qquad \frac{x^2}{(\lambda_1-a)(\lambda_2-a)}+\frac{y^2}{(\lambda_1-b)(\lambda_2-b)}+\frac{z^2}{(\lambda_1-c)(\lambda_2-c)}=o,$$

這個關係式表明曲面 λ_1 及 λ_2 的垂直性.

若要簡捷的得到 x, y, z 為 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的函數,我們注意以下的式子是永存的,

$$(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)-x^2(\lambda-b)(\lambda-c)$$
$$-y^2(\lambda-a)(\lambda-c)-z^2(\lambda-a)(\lambda-b)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3);$$

在此恆等式中依次令 $\lambda=a, \lambda=b, \lambda=c$, 由此取得

$$(29)\left\{\begin{aligned} x^2&=\frac{(\lambda_3-a)(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{(a-b)(a-c)},\\ y^2&=\frac{(\lambda_3-b)(\lambda_2-b)(b-\lambda_1)}{(a-b)(b-c)},\\ z^2&=\frac{(\lambda_3-c)(\lambda_2-c)(\lambda_1-c)}{(a-c)(b-c)}.\end{aligned}\right.$$

取對數的導來函數得

$$dx=\frac{x}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-a}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-a}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-a}\right),$$

$$dy=\frac{y}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-b}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-b}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-b}\right),$$

$$dz=\frac{z}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-c}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-c}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-c}\right);$$

作平方和,依關係式(28),及牠的相類關係式可見含 $d\lambda_1 d\lambda_2$, $d\lambda_2 d\lambda_3$, $d\lambda_1 d\lambda_3$ 諸項當自行消滅.$d\lambda_1^2$ 的係數是

$$\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(\lambda_1-a)^2}+\frac{y^2}{(\lambda_1-b)^2}+\frac{z^2}{(\lambda_1-c)^2}\right],$$

將 x^2, y^2, z^2 代以牠們的價值,並化簡,得

$$M_1=\frac{1}{4}\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)(\lambda_1-c)},$$

由循環排列法可演出 $d\lambda_2^2$ 及 $d\lambda_3^2$ 的係數 M_2 及 M_3.那麼體積的原素是 $\sqrt{M_1M_2M_3}\,d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$.

142. 底里格來(Dirichlet)的積分.—— 設計算取在四個平面 $x=o$, $y=o$, $z=o$, $x+y+z=1$ 所成四面體內一個三重積分

$$\iiint x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz;$$

令 $x+y+z=\xi$, $\quad y+z=\xi\eta$, $\quad z=\xi\eta\zeta$,

ξ, η, ζ 是三個新變數這些公式又可寫為

$$\xi=x+y+z,\quad \eta=\frac{y+z}{x+y+z},\quad \zeta=\frac{z}{y+z}$$

倒轉來,又得

$$x=\xi(1-\eta),\ y=\xi\eta(1-\zeta),\ z=\xi\eta\zeta.$$

在 x, y, z 都是正而和數 $x+y+z$ 小於1時,ξ, η, ζ 就都在零及一中間.倒轉來,ξ, η, ζ 都在零及一中間時,我們有 $x>o$, $y>o$, $z>o$, $x+y+z<1$. 那麼,以上的四面體就為一個立方所替代.

要計算函數定準式,令 $X=\xi$, $Y=\xi\eta$, $Z=\xi\eta\zeta$,

即得 $x=X-Y,\ y=Y-Z,\ z=Z$; 我們有

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)}\cdot\frac{D(X,Y,Z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\xi^2\eta,$$

由這個變數更換法,三重積分成爲

$$\int_0^1 d\xi\int_0^1 d\eta\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s\eta^{q+r+1}(1-\eta)^p\zeta^r(1-\zeta)^q d\zeta$$

符號 $\int$ 下的函數是 ξ 的一個函數乘以 η 的一個函數及 ζ 的一個函數的積,所以三重積分等於積數

$$\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s d\xi\times\int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p d\eta\times\int_0^1 \zeta^r(1-\zeta)^q d\zeta,$$

或是加入函數 Γ〔看第 128 節公式 (33) 及 (34)〕, 此式又等於

$$\frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}\times\frac{\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)}\times\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)};$$

將公因式除去,三重積分的價值只餘

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

143. **複積分.**——對於一個二重積分及一個三重積分所得的純解析式,能使推廣積分的定義到含任何數自變數的函數上.試將所取的步驟約畧指明.

設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一組 n 個自變數,爲省畧計,我們說這些變數所得的一組的價值 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ 在含 n 度的空間表一個點,同樣,一個關係式 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$,牠的第一邊是一個連續函數也說表一個曲面;若 F 是一次式,我們就說此方程式表一個平面.設有些點的集合,牠們的坐標滿足某某不等關係式,如

(30) $$\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leq 0,\ (i=1,2,\cdots,k),$$

我們說這些點的集合在 n 度的空間成爲一個領域 D.若對於

此領域的所有點這些坐標x_i中任何一個都小於一個定數,D就說是完全在有限距離.若定領域D的不等式爲以下的形狀

(31)　$$x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^1,\ x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^1, \cdots,\ x_n^0 \leq x_n \leq x_n^1,$$

這個領域叫作一個角柱體 (prismatoïde), 我們說這n個正數$x_i^1-x_i^0$是此角柱體的度.最後若是對於領域D內一點的坐標,公式(30)的函數φ_i中至少有一個成爲零,我們就說此點在領域D的界上.

此層已經說明,設D是一個有限領域,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是在此領域的一個連續函數.懸想由平面$x_i=c(i=1,2,\cdots,n)$的平行平面分領域D爲更小領域.這些平面所成角柱體有些完全在領域D內,我們任取一個;設$\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$是此角柱體的度,$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$是此角柱體內任一點的坐標.當全在領域$D$內的角柱體的數增加無限牠們的所有的度都漸近於零時,取在這些角柱體內的和數

(32)　$$S=\Sigma f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$$

漸近於一個極限I.〔註一〕這個極限叫作$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在領域D內的n重積分,

$$I=\iint\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

n重積分的計算法仍能變爲n個連續單積分的計算法.若要徵實這個定律是一般的,只須顯明若對於$(n-1)$重積分此定律是確實的,牠就能推廣n重積分上.爲此,我們取D中任意一點$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$;我們若暫時令x_n消滅,$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$就畫出某一個領域D'在$(n-1)$個度的空間.我們假定領域D滿足

以下的條件對於 D' 內的任一點 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$, D 只有兩個相應點在牠的界上,此兩點的坐標是$(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}; x_n^{(1)})$ 及 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}; x_n^{(2)})$,坐標 $x_n^{(1)}$ 及 $x_n^{(2)}$ 是在 D' 內 $(n-1)$ 個變數 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的連續函數.若這個條件不能滿足,就將領域 D 分爲更小領域使牠們每一個都能滿足這個條件.此層已經說明,在領域 D 內取和一點 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 相應的一貫(file)的角柱體;我們甚易証明若適宜的選擇 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 點,這些角柱體給 S 一個和等於

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_{n-1}\left[\int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_n + \varepsilon\right],$$

只要所有的量 Δx_i 都有充分的小, $|\varepsilon|$ 就能小於一個任何正數.若令

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = \int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_n, \tag{33}$$

可見 I 等於和數

$$\Sigma\,\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\,\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_{n-1}$$

的極限,就是等於在領域 D' 內的 $(n-1)$ 重積分

$$I = \iiint\cdots\int \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\,dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}. \tag{34}$$

我們的定律既是假定對於 $(n-1)$ 重積分是確實的,所以牠是一般的.

我們也可以依一個別的方法運算.先給坐標 x_n 一個定數,和此相應的點 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 在 $(n-1)$ 度的空間畫出一個領域 δ,顯然可見 n 重積分 I 也等於

$$I = \int_{X_n^1}^{X_n^2} \Theta(x_n)\,dx_n, \tag{35}$$

$\Theta(x_n)$是取在δ內的$(n-1)$重積分，X_n^1, X_n^2是x_n在領域D內的下限及上限.無論如何運算,所要實行的積分的極限關係於領域D的性質,普通的都關係於積分的先後次序.然若D是由條件

$$x_1^0 \leqq x_1 \leqq X_1, \cdots, \ x_i^0 \leqq x_i \leqq X_i$$

所定的一個角柱體就是例外.在此場合,複積分的式子是

$$I=\int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0}^{X_2} dx_2 \cdots \int_{x_n^0}^{X_n} f dx_n,$$

我們能任意顛倒積分的次序,無須改變每一變數的相應極限.

變數更換公式也可以推廣到n重積分上.設

(36) $$x_i=\varphi_i(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

是一個變形法的公式,牠令$(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$點所畫領域$D'$和$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$點所畫領域$D$點和點相應.我們有

(37) $$\iint\cdots\int_{(D)} F(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$=\iint\cdots\int_{(D')} F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \left| \frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(x'_1, \cdots, x'_n)} \right| dx'_1 \cdots dx'_n.$$

這個證法完全和以前相似.我只撮其大要將應遵的步驟指明:

第一,對於兩個變形法,公式(37)是確實的,牠對於挨次實行兩個變形法所得變形法也是確實的.

第二,凡一個變數更換法都是由以下的兩個變數更換法組合而成:

(38) $$x_1=x'_1, x_2=x'_2, \cdots, x_{n-1}=x'_{n-1}, x_n=\varphi_n(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n),$$

(39) $$x_1=\psi_1(x'_1, \cdots, x'_n), \cdots, x_{n-1}=\psi_{n-1}(x'_1, \cdots, x'_n), x_n=x'_n.$$

第三,公式(37)能應用在(38)的形狀的變數更換法上,這是因為凡一個n重積分都可令牠成為(34)的形狀的緣故;依複積

分第二個形狀(35),公式(37)又可應用在變數更換法(39)上;若是承認此公式對於 $n-1$ 級的複積分已經成立,所以逐漸可証此公式是一般的.

作為例子,假定計算有定積分

$$I=\iint\cdots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)^{\beta}dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 都是正數,此積分是取在領域 D 為以下的不等式所定:

$$o\leqq x_1,o\leqq x_2,\cdots,o\leqq x_n,x_1+x_2+\cdots+x_n\leqq 1.$$

公式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\xi_1,x_2+\cdots+x_n=\xi_1\xi_2,\cdots,x_n=\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$$

所給的變數更換法將領域 D 代以領域 D' 為以下的不等式所定:

$$o\leqq\xi_1\leqq 1,o\leqq\xi_2\leqq 1,\cdots,o\leqq\xi_n\leqq 1,$$

此外又有

$$\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1\,\xi_2,\cdots,\xi_n)}=\xi_1^{n-1}\xi_2^{n-2}\cdots\xi_{n-1}$$

這是由計算可見的(第142節).應行積分的函數成為

$$\xi_1^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+n-1}\xi_2^{\alpha_2+\cdots+\alpha_n+n-2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}(1-\xi_1)^{\beta}(1-\xi_2)^{\alpha_1}\cdots(1-\xi_n)^{\alpha_{n-1}},$$

所求積分仍為 Γ 函數所表

$$(40)\qquad I=\frac{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)\cdots\Gamma(\alpha_n+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta+n+1)}.$$

II.—全微分的積分法.

144. **普通方法.**—設 $P(x,y),Q(x,y)$ 是二自變數 x 及 y 的兩個函數;式子

$$Pdx+Qdy$$

通常的不是一個二自變數x及y的函數的全微分.誠然,方程式

(41) $$du=Pdx+Qdy$$

和兩個各別的方程式

(42) $$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

同價;我們關於y微分第一個方程式,關於x微分第二個方程式;可見函數$u(x,y)$當滿足兩個關係式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

所以若要有一個函數$u(x,y)$存在能滿足這個問題,必須要

(43) $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

這個必要條件也就是充足的.誠然,我們知道有無量數的函數$u(x,y)$存在,牠們關於x的導來式等於$P(x,y)$;這些函數都包含在公式

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+Y$$

內,x_0是一個任意常數,Y是y的一個任意函數.若要這個函數$u(x,y)$滿足方程式(41),必須要然只須要牠關於y的偏導來式等於$Q(x,y)$,就是說

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}=Q(x,y).$$

然而依積分性的條件(43),

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}dx=Q(x,y)-Q(x_0,y),$$

上面的關係式成爲

$$\frac{dY}{dy}=Q(x_0,y)$$

此式的第二端只關係於y;所以有無量數的y的函數能滿足這個關係式,這些函數都包含在公式

$$Y=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$$

內，y_0是y的一個特別價值，C是一個任意常數.所以有無量數的函數$u(x,y)$能滿足方程式(41)；這些函數都為公式

(44)
$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$$

所包含,牠們彼此相異的只是一個常數項C.

例如

$$P=\frac{x+my}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{y+mx}{x^2+y^2};$$

條件(43)是能滿足的,令$x_0=o$, $y_0=1$,我們得

$$u=\int_{o}^{x}\frac{x+my}{x^2+y^2}dx+\int_{1}^{y}\frac{dy}{y}+C.$$

實行此積分法,得

$$u=\frac{1}{2}\Big[\log(x^2+y^2)\Big]_{o}^{x}+m\left(\operatorname{arctang}\frac{x}{y}\right)_{o}^{x}+\log y+C,$$

或

$$u=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+m\operatorname{arctang}\frac{x}{y}+C.$$

以上的方法能推廣在任何數的自變數的場合.我們試展開關於三自變數的計算法.設P, Q, R是x, y, z的三個函數;全微分的方程式

(45)
$$du=Pdx+Qdy+Rdz$$

同價於三個各別方程式

(46)
$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R.$$

用兩個各異的方法計算偏導來式$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$,即得三個條件

(47)
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}.$$

我們假定這些條件業已滿足.依第一條件,必有無量數的函數 $u(x,y,z)$ 存在,牠們關於 x 及 y 的偏導來式各等於 P 及 Q;牠們都包含在公式

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,dy+Z,$$

Z 表 z 的一個任意函數.若要 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 等於 R,只須

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial z}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q(x_0,y,z)}{\partial z}dy+\frac{dZ}{dz}=R,$$

依關係式 (47),這個條件簡約為

$$R(x,y,z)-R(x_0,y,z)+R(x_0,y,z)-R(x_0,y_0,z)+\frac{dZ}{\partial z}=R(x,y,z),$$

或

$$\frac{dZ}{dz}=R(x_0,y_0,z).$$

由此決定有無量數的函數 $u(x,y,z)$ 能滿足方程式 (45); 牠們都為公式

$$(48)\qquad u=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,dz+C$$

所包含, x_0, y_0, z_0 是三個任意選擇的數字價值, C 是一個任意常數.

145. 積分 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$ 的研究.——以上的問題能在另一觀點上討論,由這個觀點引起一個新結果.設 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 是兩個函數,牠們和牠們的第一級偏導來式在一個閉圍線 C 所限領域 A 內都是連續的.這個領域 A 也能夠充滿在平面的全部,這就是假定圍線 C 遠至無限.沿 A 內一個道路 L 上所取的曲線積分

$$\int Pdx+Qdy$$

通常的關係於積分的道路.我們先求必須有甚麼條件這個積分

纔能夠但關係於此道路兩端的坐標.設M及N是領域A內任意兩點,L及L'是連合此兩點的兩個道路,牠們在兩極端中間沒有交點;牠們兩個成為一個閉閉線.若要沿L及L'上所取的曲線積分相等,這是很明瞭的,必須要然只須要依一個方向進行時沿此閉閉線所取的積分等於零.所以所設問題和以下的問題同價:必要如何纔能夠使沿A內一個閉閉線所取的曲線積分

$$\int Pdx+Qdy$$

等於零?

由格林公式

$$\int_{(C)} Pdx+Qdy=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{49}$$

直接得着這個解答,此式中C是A內的任一閉閉線,二重積分是擴充在C內的.這是很明瞭的,若函數P及Q能滿足關係式(43),第一端的曲線積分就恒等於零.這個條件是必要的;誠然,若$\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在$A$內不恒等於零,因為牠是一個連續函數,我們總能夠求得一個有充分小的領域a,使牠在a內的符號是固定的;如此,依公式(49),沿a的閉線上所取的曲線積分就不能等於零.

若條件(43)恒能滿足,兩個道路L及L',極端都在M及N,除此兩極端外牠們沒有交點,這兩個道路對於一個曲線積分供給一個相同的價值.即令在M及N間牠們相交若干次,所得結果也是如此,因為只須取一個第三道路L'',牠和L及L'除M及N外沒有別的交點,再將L,L'和L''比較.

這個業已說明,我們假定積分道路的一端是A內一個定點(x_0,y_0),牠一端是A內一個變點(x,y);沿此一個任意形狀的道路上所取的積分

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy \tag{50}$$

只關於此變化頂點的坐標(x,y).此函數的偏導來式是$P(x,y)$,$Q(x,y)$.誠然,譬如

$$F(x+\Delta x,y)=F(x,y)+\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx,$$

這是因爲我們能夠假定自(x_0,y_0)點先至(x,y)點,再依Ox的平行線自(x,y)點至$(x+\Delta x,y)$點,在此直線上,$dy=o$.應用平均值公式,我們寫爲

$$\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x,y),(o<\theta<1);$$

令Δx漸近於零,得$F'_x=P$,同樣可見$F'_y=Q$.所以曲線積分$F(x,y)$能滿足全微分的方程式(41),在$F(x,y)$上加一個任意常數即得此方程式的普通積分(intégrale générale).

因爲這個積分道路是不定的,所以這個新公式比公式(44)較爲普通.我們也很容易由此新公式演出公式(44).爲避免一切紛亂,我們用(x_0,y_0),(x_1,y_1)表兩極端的坐標,取兩個直線$x=x_0$,$y=y_1$爲積分的道路.沿第一直線上,我們有$x=x_0$,$dx=o$,y自y_0變至y_1;沿第二直線上,我們有$y=y_1$,$dy=o$,x自x_0變至x_1.所以曲線積分等於

$$\int_{y_0}^{y_1} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x_1} P(x,y_1)dx;$$

除記法不同外,這就是公式(44).

然而若另取一個積分道路或者更有利益.我們假定令$x=f(t)$,$y=\varphi(t)$,t自t_0變至t_1時,(x,y)點畫出一個曲線弧連合(x_0,y_0)及(x_1,y_1)點;我們有

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy=\int_{t_0}^{t_1}\Big[P(x,y)f'(t)+Q(x,y)\varphi'(t)\Big]dt,$$

只須計算一個面積法.譬如若要取直線爲積分道路,我們可令 $x=x_0+t(x_1-x_0)$, $y=y_0+t(y_1-y_0)$,再令 t 由 o 變至1.

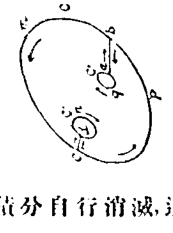
翻轉來,若已知方程式(41)的一個特別積分 $\Phi(x,y)$,即能由公式

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy=\Phi(x,y)-\Phi(x_0,y_0)$$

演出曲線積分,此公式和第四章公式(8)相同.

146. 週期(périodes).——我們能夠研究更爲普遍的場合.我們先注意格林公式能應用在許多閉線所限的面積上.爲確定人的觀念,試設一個面積 A,牠爲一個外閉線 C 及在 C 內的兩個內閉線 C', C'' 所限(圖二十八),設 P 及 Q 是兩個函數,牠們和牠們的第一級偏導來式在此面積內都是連續的.(平面在 C' 及 C'' 內的部分,當看作不屬於領域 A 在這兩個部分內,我們對於 P 及 Q 不作一點假定)我們用橫斷線 ab, cd 將 C', C'' 連結閉線 C.如此,我們得一個閉線 $abmcdndepbaqa$ 或 Γ,這個閉線能夠由一筆畫出.若應用格林公式在此閉線所限的面積上,由橫斷

圖二十八



線 ab 及 cd 所得的曲線積分自行消滅,這是因此每一橫斷線都是由相反的方向畫出兩次,只餘

$$\int Pdx+Qdy=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

此積分是沿面積A的全閉線上取的,就是說沿此三個閉線C, C', C''依矢所示的方向,總使所限面積常在左方.

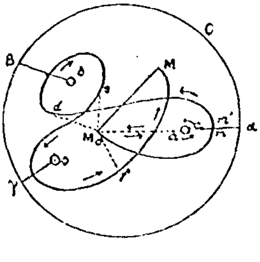
若函數P及Q在區域A內能滿足關係式$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,上式中的二重積分成爲零,我們能寫爲

(51) $$\int_{(c)}Pdx+Qdy=\int_{(c')}Pdx+Qdy+\int_{(c'')}Pdx+Qdy,$$

這三個積分都是依相同的方向取的.

這個業已說明,我們仍取一個單獨的閉線C所限領域A,設P及Q是兩個函數,能滿足關係式$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,牠們和牠們的導來式在$A$內是連續的,但是對於有限數的點,$P$及$Q$中至少有一個是不連續的.爲確定人的觀念,假定在$A$中有三個不連續點$a$, b, c.我們將此三點都用一個極小圓周圍繞,又將每一圓周都用一個隔(coupure)和閉線C連結(圖29).閉線C,這些隔及小圓周成爲一個閉線能由一筆畫出.依上所見,一個曲線連結一個定點(x_0, y_0)及一個變點(x, y),此曲線若不和任一隔相交,沿此曲線所取的積分$\int Pdx+Qdy$在每一點上就都有一個惟一的價值.我們用$\overline{F(x,y)}$表此積分沿$M_0(x_0,y_0)$至$M(x,y)$間直接的道路上的

圖二十九



價值.

如前所見我們在 a,b,c 點外各作一個小圓周;現在由一定點 M_0 起作一個線 M_0a' 和圓周 a 相連;此直線 M_0a',圓周 a 及直線 $a'M_0$ 所成的道路叫做一個紐(lacet).沿一個紐所取的曲線積分 $\int Pdx+Qdy$ 簡約為沿此圓周所取的積分.若有一個函數 P 或 Q 在 a 點成為無限,此最後積分通常的不等於零,然而牠不關係於此圓周的半徑;這是一個常數 $\pm\mathfrak{A}$,這個雙符號和進行的兩個方向相應.同樣,我們用 $\pm\mathfrak{B}$ 及 $\pm\mathfrak{C}$ 表曲線積分沿在奇點 b 及 c 所作的紐上的價值.

這個業已說明,凡自 M_0 點至 M 點的一個道路都能變為一列的紐隨着一個自 M_0 至 M 的直接道路.例如道路 M_0mdefM 可以變為道路 M_0mdM_0, M_0deM_0, M_0efM_0, M_0fM; 但道路 M_0mdM_0 又可變為繞 a 點的一個紐,對於其牠的道路也是如此;最後,M_0fM 和直接道路同價.所以無論積分道路如何,曲線積分的價值都是以下的形狀

$$F(x,y)=\overline{F(x,y)}+m\mathfrak{A}+n\mathfrak{B}+p\mathfrak{C}, \tag{52}$$

m,n,p 是正或負的任意整數.$\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ 是曲線積分的週期(periodes).所以此積分是變數 x 及 y 的函數,牠有無量數的定法(déterminations).

注意.——若在區域 A 內畫出三個隔 $a\alpha, b\beta, c\gamma$,函數 $\overline{F(x,y)}$ 在此區域內就是確定的;然而我們當注意兩個鄰點各居於一個隔的一邊,例如 m, m',差數 $F(m)-F(m')$ 有一個有限的價值.誠然,我們有

$$\mathfrak{A}=\int_{M_0}^{m}+\int_{m}^{m'}+\int_{m'}^{M_0},$$

這又可寫為

$$\int_{M_0}^{m}=\int_{M_0}^{m'}+\mathfrak{d}+\int_{m'}^{m}$$

然$\int_{m'}^{m}$是無限小,只餘

$$\overline{F(m)}-\overline{F(m')}=\mathfrak{d}.$$

所以沿 $a\alpha$ 上差數$\overline{F(m)}-\overline{F(m')}$是一個常數等於 $\mathfrak{d}$. 對於其他的隔也是如此.

例.——曲線積分

$$\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

有一個難點 (point critique) 是原點.欲知此相應週期,試沿圓周 $x^2+y^2=\rho^2$ 積分;我們有

$$x=\rho\cos\omega,\ y=\rho\sin\omega,\ xdy-ydx=\rho^2d\omega,$$

這個週期是$\int_0^{2\pi}d\omega=2\pi$.因爲符號$\int$下是 $\operatorname{arctang}\dfrac{y}{x}$ 的全微分,這個週期是很容易驗明的.

147. 以上的結果的擴張.——以上各節的結果可不大修改推廣到在空間的曲線積分上

$$U=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz. \tag{53}$$

我們用 P,Q,R 表三個函數,牠們在一個閉曲面 S 所限的空間領域內是連續的,牠們的第一級偏導來式也是連續的.試求必要甚麼條件,以上曲線積分纔能夠只關係於積分曲線的兩極端.這就等於求在甚麼場合,能夠使取在一個任何閉曲線 Γ 上的曲線積分都爲零.但是依斯多克公式(第 132 節),這個曲線積分等於取在閉線 Γ 所限一個曲面 Σ 上的曲面積分

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx.$$

若要不論閉線Γ如何,此積分恒等於零,顯然可見必須要也只須要

(54) $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}.$$

若這些條件能滿足,U是變數x,y,z的函數,牠的全微分是$Pdx+Qdy+Rdz$,牠在空間的領域(E)內是單值的(uniforme).若要得函數U在一點上的價值,可以任意選一個積分道路.

若函數P,Q,R能滿足關係式(54),然在(E)中一個線或許多線上成為無限,我們可演出些結果和在第146節所得的結果相似.

譬如函數P,Q,R中若有一個在閉曲線γ的所有點上成為無限,積分U就有一個週期,牠等於取在一個閉閉線上的曲線積分,此閉閉線通過γ所限一個曲面σ一次然只通過一次.

對於曲面積分,又可以提出一個問題完全和對於曲線積分所研究的問題相同.用A,B,C表三個函數,牠們在曲面S所限的空間領域(E)內是連續的,牠們的第一級導來式也是如此.設Σ是在(E)內一個曲面為一個任何形狀曲線Γ所限.曲面積分

(55) $$I=\iint_{(\Sigma)}Adydz+Bdzdx+Cdxdy$$

一般的關係曲面Σ的本身,不僅關係閉線Γ.若要這個積分只關係閉線Γ,必須要取在(E)內一個任何閉曲面上的二重積分為零.這個所要求的條件立即為格林公式所給與(第136節).誠然,我們已知取在一個閉曲面上的二重積分等於取在此曲

面所限體積內的三重積分

$$\iiint\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dxdydz.$$

若要不論此體積如何,此最後積分恒爲零,顯然可見必須要函數 A, B, C 滿足關係式

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=o, \tag{56}$$

此條件也是充足的.

斯多克公式給我們一個極易的驗明.誠然,已知三個函數 A, B, C 滿足關係式(56),我們有無量數的方法定三個別的函數 P, Q, R 使

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=A,\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=B,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=C. \tag{57}$$

先注意若這些方程式有一個解,牠們就有無量數的解,這是因爲若將 R, Q, R,各代以

$$P+\frac{\partial\lambda}{\partial x},\ Q+\frac{\partial\lambda}{\partial y},\ R+\frac{\partial\lambda}{\partial z},$$

λ 是 x, y, z 的一個任何函數,這些方程式不變的緣故.此層已經說明,令 $R=o$;自(57)在前的兩個關係式取得

$$P=\int_{z_0}^{z}B(x,y,z)dz+\varphi(x,y),Q=-\int_{z_0}^{z}A(x,y,z)dz+\psi(x,y),$$

$\varphi(x,y)$ 及 $\psi(x,y)$ 是 x 及 y 的兩個任何函數,將此等價值代入(57)的最後方程式,牠成爲

$$-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)dz+\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=C(x,y,z).$$

計算着條件(56),此式又等於

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=C(x,y,z_0),$$

函數 φ 及 ψ 中仍有一個可任意選擇的.

如此決定三個函數P,Q,R滿足關係式(57),依斯多克公式曲面積分等於曲線積分

$$\int_{(\Gamma)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz;$$

所以祂只關係圍線Γ.

習題

1. 討論X,Y,Z的函數

$$F(X,Y,Z)=\int_{x_0}^{X}dx\int_{y_0}^{Y}dy\int_{z_0}^{Z}f(x,y,z)\,dz$$

的性質,推廣第115節的結果.

2. 求方程式

$$(x^2+y^2+z^2)^3=3a^3xyz$$

所表曲面在三面角$oxyz$內所限的部分體積.

3. 將取在不等式

$o\leqq x_1,\ o\leqq x_2,\cdots,\ o\leqq x_n,\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqq a$所限領域$D$內的複積分變爲一個單積分(和第147節同樣計劃).

4. 同樣問題對於複積分

$$\iint\cdots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}F\left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\right]dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

其領域D爲以下的不等式所定:

$$o\leqq x_1,o\leqq x_2,\cdots,o\leqq x_n,\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\leqq 1.$$

5.* 證明公式

$$\iiint\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

此積分取在不等式

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$$

所定領域D內.

6.*証明公式

$$\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}F\,(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\varphi+c\sin\theta\sin\varphi)\,\sin\theta\,d\varphi=2\pi\int_{-1}^{+1}F(uR)du,$$

其中a,b,c是常數,$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.〔Poisson〕.

〔注意於此二重積分表取在球面$x^2+y^2+z^2=1$上的某一個曲面積分,再取平面$bx+cy+az=o$為xy的新平面〕.

7.*設$\rho=F(\theta,\varphi)$是一個合口曲面的極坐標方程式.証明此曲面所限的體積等於取在全曲面上的二重積分

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{3}\iint\rho\cos\gamma\,d\sigma,$$

$d\sigma$表面積原素,γ表帶徑和外法線所作的角.幾何上的意義.

8.*設有一個橢圓面其方程式為

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1;$$

用橢圓坐標ν及ρ定曲面上一點,就是在上式中將μ代以未知數而取其根(參觀$n^0$141).應用$n^0$133中公式在此橢圓面的體積上,得以下的關係式

$$\int_0^b d\rho\int_b^c\frac{(\nu^2-\rho^2)\sqrt{(c^2-\rho^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)}}d\nu=\frac{1}{b}\pi c^2(c^2-b^2).$$

同樣,應用公式(α),得

$$\int_0^b d\rho\int_b^c\frac{(\nu^2-\rho^2)d\nu}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}}=\frac{\pi}{2}.$$

9. 阿基默特斯的原理.——一個固體沉在一同質的液體中而平衡,每一個面積原素受有一個垂直壓力等於一個以此原素為底,以此原素至液體的自由面為高的液體柱的重

量,証明這些壓力有一個堅直的合力自下向上,且等於和沉沒固體的體積相等的液體體積的重量.

10.* 保存體積的變形法.——設$U(x,Y,Z)$及$V(x,y,Z)$是兩個函數,導來式$\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial Z}$及$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial Y}$皆不等於零,公式

$$X=\frac{\partial U}{\partial Y},\quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial Z},\quad \frac{\partial V}{\partial y}=z$$

所定的點的變形法是$\frac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)}=1$.在此變形法中將$x,y,z$互換,即得所有保存體積的一切點的變形法.

推廣.—— 設$U_1(x_1,X_2,\cdots,X_n)$, $U_2(x_1,x_2,X_3,\cdots,X_n)$, $\cdots$, $U_i(x_1,\cdots,x_i,X_{i+1},\cdots,X_n)$, $\cdots$, $U_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},X_n)$是一組的$n-1$個函數,含有$n$個變數,$X_1,X_2,\cdots,X_n$為自變數$x_1,x_2,\cdots,x_n$的函數由方程式

$$X_1=\frac{\partial U_1}{\partial X_2},\frac{\partial U_1}{\partial x_1}=\frac{\partial U_2}{\partial X_3},\frac{\partial U_2}{\partial x_2}=\frac{\partial U_3}{\partial X_4},\cdots,\frac{\partial U_{n-2}}{\partial x_{n-2}}=\frac{\partial U_{n-1}}{\partial X_n},\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}}=x_n$$

所定,驗明

$$\frac{D(X_1,X_2,\cdots,X_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=1.$$

〔註一〕對於$n=2$或$n=3$, S的極限實等於二重積分或三重積分,這是因為所畧去的領域的面積或體積的和漸近於零的緣故.

第　八　章

級數及無限積(produits infinis)

I 收歛性(convergence)的定規.

148. 概論. —— 我們在前已見($n^\circ5$)一個級數的收歛性的普通條件.在實用上,若要辨認一個級數是收歛的或是開發的(divergente),最常用的是些不甚普通然較爲便利的定規.我們試將這些定規舉出.未舉出定規之前,我們先作幾個注意,這些注意都是由收歛性的定義直接演出的.

第一,若用一個不等於零的常數 a 乘一個級數的所有項,這個新級數是收歛的或開發的,必和第一級數同;若第一級數是收歛的,牠的和是 S,第二級數的和就是 aS.

第二,若有兩個收歛級數

$$(1)\qquad u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

$$(2)\qquad v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,$$

牠們的和各是 S 及 S',將此兩級數逐項相加所得的新級數

$$(3)\qquad (u_0+v_0)+(u_1+v_1)+\cdots+(u_n+v_n)+\cdots$$

就也是收歛的,牠的和是 $S+S'$.若有 p 個級數相加也是如此.

第三,若在一個級數中將有限數的項的價值更換,此級數的收歛性或開發性不變;因爲這是等於自和數 S_n 中增加或減去一個常數.特別的,在一個級數中將若干數的項除去,此新得的級數和原設的級數同時是收歛的或開發的.

第四,設 S 是一個收歛級數的和,S_n 是此級數的 $n+1$ 個初項

的和,R_n是自u_{n+1}項起的級數的和;若取$n+1$個初項的和S_n作爲S的近似値,所作的差誤顯然等於R_n.在n增加無限時,S_n的極限既是S,差數R_n漸近於零;我們總能夠取n有充分的大,使將S代以S_n,所作的差誤小於任何預定的數;這一層至少在理論上也是可能的.

149. 正項級數(series a termes positifs).—— 級數的所有項都是正數,叫作正項級數,此類級數至關重要,我們首先研究牠們.在如此的一個級數中,和數S_n和n同時增加;若要這個級數是收斂的,只須要不論n如何,和數S_n小於一個固定極限.定一個級數的收斂性或開發性的最普通方法,在於將所設級數和一個已經研究的另一級數比較.爲此,我們所依據的是以下的兩個命題:

第一,一個正項級數,若是所有項各小於或至多等於一個別的正項收斂級數的相應項,第一個級數就是收斂的.

誠然,所設級數的n個初項的和S_n顯然小於第二級數的和S';所以牠有一個極限S小於S'.

第二,一個正項級數,若牠的所有項都大於或至少等於一個別的正項開發級數的相應項,第一個級數也就是開發的.

誠然,第一級數的n個初項的和大於第二級數的n個初項的和,所以牠和n同時無限增加.

我們能夠用另一方法作兩個級數的比較,這個方法依據的是以下的預定理設

$$(U) \qquad u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

$$(V) \qquad v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,$$

是兩個正項級數,若級數(U)是收斂的,又若自某一項後,我們常

有$\frac{v_{n+1}}{v_n}<\frac{u_{n+1}}{u_n}$,級數$(V)$也就是收斂的.若級數$(U)$是開發的,又若是自某一項後,我們常有$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$,級數$(V)$也就是開發的.

爲証明第一部分,我們假定對於$n\geqq p$,不等式$\frac{v_{n+1}}{v_n}<\frac{u_{n+1}}{u_n}$是滿足的.因爲若用一個常數乘一個級數的所有項,此級數收斂性不變,牠的一項和前項的比亦不變,我們能假定$v_p<u_p$,所以必能有$v_{p+1}<u_{p+1}$,以及$v_{p+2}<u_{p+2},\cdots$.所以級數(V)是收斂的.這個預定理的第二部分証法亦同.

若已知一個正項級數的性質,我們可以取爲比較的標準,如此,或比較兩個級數的項,或比較兩個級數的相續項的比,我們得兩個命題,在許多場合,由此兩命題能夠決定第二級數的收斂或開發.

150. 高失及達朗伯(d' Alembert)的定規.——能取爲比較項(terme de comparaison)的最簡單級數是幾何級數,公比(raison)是r,若r小於1,此級數是收斂的,若r大於或等於1,此級數是開發的.由一個正項級數和一個幾何級數的比較,得以下的定規,此定規是高失所創.

在一個正項級數中,若自某一項起,$\sqrt[n]{u_n}$常小於一個小於1的定數,此級數就是收斂的;若自某一項起,$\sqrt[n]{u_n}$常大於一個大於1的定數,此級數就是開發的.

誠然,在第一場合,$\sqrt[n]{u_n}<k<1$,因而$u_n<k^n$.所以自某一項起,此級數的各項都小於一個公比小於1的幾何級數的各項.在第二場合,和此相反,$\sqrt[n]{u_n}>1$,因而$u_n>1$;所以牠的公項不漸近

於零.

凡$\sqrt[n]{u_n}$漸近於一個極限時,以上的定規都能應用,我們仍可以宣告以下的命題

在n增加無限時,若$\sqrt[n]{u_n}$漸近於一個極限l,若l小於1,此級數是收斂的,若l大於1,此級數是開發的.

若$l=1$,然$\sqrt[n]{u_n}$漸近於1而常大於1,此級數就是開發的;若$l=1$,然$\sqrt[n]{u_n}$漸近於1,而不常大於1,就是不定的場合.

同樣,將一個正項級數的兩個連續項的比,和一個幾何級數的兩個相續項的比相較,得達郎伯的定規:

在一個正項級數中,若自某一項起,每一項和前項的比都小於一個小於1的定數,此級數就是收斂的,若自某一項起,此比大於1,此級數就是開發的.

由此定理得着一個系(corollaire:)在n增加無限時,若$\frac{u_{n+1}}{u_n}$漸近於一個極限l,若l小於1,此級數就是開發的,若l大於1,此級數就是開發的.若$l=1$,就是不定的場合,然若是$\frac{u_{n+1}}{u_n}$漸近於1而常大於1,此級數也是開發的.

151. **各種注意.**——I.高失的定規比達郎伯的定規較為普通.誠然,假定一個級數的所有項自某列以後通同小於一個降幾何級數的項;那麽,只要n大於一個定數p,公項u_n就小於Ar^n,A是一個常數,r小於一.所以$\sqrt[n]{u_n}<r\cdot A^{\frac{1}{n}}$,在$n$無限大時此式的第二邊的極限是$r$.用$K$表在$r$及1間的一個定數,自某列以後,我們有$\sqrt[n]{u_n}<K$.如此,我們就常在可以應用高失的定規的場合,然而取級數的項無論如何遠,比$\frac{u_{n+1}}{u_n}$能夠常取得

大於 1 的價值.例如級數

$$1+r\,|\sin\alpha|+r^2\,|\sin 2\alpha|+\cdots+r^n\,|\sin n\alpha|+\cdots,$$

其中 r 小於 1,α 是一個任何常數.我們有

$$\sqrt[n]{u_n}=r\sqrt[n]{|\sin n\alpha|}<r,$$

至於比

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=r\left|\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}\right|$$

在 n 增加無限時普通的能取得無量數的大於一的價值.

但是達郎伯的定規也有保留的便利,這是因為牠在應用上較為容易的緣故.譬如級數

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots,$$

在 n 增加無限時,一項和前項的比 $\frac{x}{n+1}$ 的極限是零,至於 $\sqrt[n]{u_n}=\frac{x}{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}}$ 在 n 無限大時,我們不容易直接看出牠的極限.

II. 若是應用以上的一個定規,已知一個級數的所有項自某列以後各小於一個降幾何級數的所有項,此幾何級數的公項是 Ar^n,若取第一級數的 m 個初項的和代牠的總和,就很容易知道所作的差誤的最大限;這是很明瞭的,這個差誤小於以下的幾何級數的和:

$$Ar^m+Ar^{m+1}+Ar^{m+2}+\cdots=\frac{Ar^m}{1-r}.$$

III. 若二式 $\sqrt[n]{u_n}$ 及 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 各有一個極限,這兩個極限一定是相同的.誠然,我們取一個輔助級數

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots,\tag{4}$$

其中 x 是正,在這個級數中,一項和前項的比的極限是 lx, l 是

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$的極限,所以若$x<\frac{1}{l}$,級數(4)就是收斂的,若$x>\frac{1}{l}$,就是開發的,同樣用l'表 $\sqrt[n]{u_n}$的極限,$\sqrt[n]{u_n x^n}$的極限就是$l'x$.如此,若 $x<\frac{1}{l'}$ 級數(4)就是收斂的,若 $x>\frac{1}{l'}$,就是開發的,若要這兩個收斂的徵象不相衝突,必須$l=l'$;如其不然,譬如 $l>l'$ 罷,凡在$\frac{1}{l}$及$\frac{1}{l'}$中間的一個數 x 依高失的定規能令此級數收斂,依達郎伯的定規此同一數又能使此級數開發.

IV. 一般,在$\frac{u_{n+1}}{u_n}$漸近於一個極限l時,$\sqrt[n]{u_n}$也漸見於同一極限.誠然,假定n有充分的大時自某列以後,所有的比

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},\cdots,\quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}$$

都在$l-\varepsilon$及$l+\varepsilon$中間,ε表一個任何小的正數,我們也必有

$$(l-\varepsilon)^p<\frac{u_{n+p}}{u_n}<(l+\varepsilon)^p,$$

或

$$u_n^{\frac{1}{n+p}}(l-\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}<\sqrt[n+p]{u_{n+p}}<u_n^{\frac{1}{n+p}}(l+\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}},$$

n不變而p增加無限時,這個雙不等式的兩極端各漸近於$l-\varepsilon$及$l+\varepsilon$.所以若m的價值超過適宜的限度時,我們有

$$l-2\varepsilon<\sqrt[m]{u_m}<l+2\varepsilon.$$

但ε是任意的,所以$\sqrt[m]{u_m}$ 的極限是 l. 我們要注意這個逆定理是不確實的,譬如級數

$$a, ab, a^2b, a^2b^2, \cdots, a^nb^{n-1}, a^nb^n,\cdots,$$

其中a及 b 是兩個各別的數,一項和前項的比迭爲a或b,然在n增加無限時 $\sqrt[n]{u_n}$ 的極限是 $\sqrt{ab}$.

在某某算式成爲不定的形狀時,由以上的命題往往能求

得牠們的極限.例如由此命題能決定$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}$和$n$同時增加無限,這是因爲比$\dfrac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$增加無限的緣故.同樣可見$\sqrt[n]{n}$及$\sqrt[n]{\log n}$的極限都是一.

152. **最大極限的應用.**——高失將以上的定規表以一個較爲普通的形狀.設a_n是一個正項級數的公項,我們取一個敘列

$$(5)\qquad a_1, a_2^{\frac{1}{2}}, a_2^{\frac{1}{3}}, \cdots, a_n^{\frac{1}{n}}, \cdots;$$

若這個敘列沒有上限,公項a_n就不漸近於零,此級數是開發的,若是敘列(5)的所有項都小於一個定數,設ω是此敘列的所有項的最大極限.

若ω小於一,級數Σa_n是收斂的,若ω大於一,此級數是開發的.

要証第一部分,設$1-\alpha$是在ω及1中間的一個數.依最大限的定義(n^o4),敘列(5)只有有限數的項大於$1-\alpha$:所以能求得一個整數p.在n的價值大於p時,我們有$\sqrt[n]{a_n}<1-\alpha$.所以級數Σa_n是收斂的.和此相反,若$\omega>1$,設$1+\alpha$是在1及ω中間的一個數;序(5)有無限數的項大於$1+\alpha$,因而n有無限數的價值對於這些價值a_n都大於一.所以級數Σa_n是開發的.只有$\omega=1$是不定的場合.

153. **高失的定理.**——若$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$或$\sqrt[n]{u_n}$漸近於1而不常大於1,由達郎伯及高失的定規不能决定一個級數的收斂或開發.在此場合,必須取具有相同特性的別的級數爲比較項.高失自有定積分得以下的命題,在以上的定規不適用時,由此命題往

往能判定一個級數的收斂或開發:

設 $\varphi(x)$ 是一個正函數,自 x 的某一個價值 a 起,牠常常下降,在 x 增加無限時,牠漸近於零.曲線 $y=\varphi(x)$ 依 x 軸為漸近線,有定積分 $\int_a^l \varphi(x)dx$ 在 l 增加無限時,能夠有或沒有一個確定極限.此屑業已說明,若此積分漸近於一個極限,級數

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+n)+\cdots \tag{6}$$

就是收斂的,在相反場合,此級數是開發的.

誠然,假定 x 在 $a+p-1$ 及 $a+p$ 中間,p 是一個正整數.自雙不等式

$$\varphi(a+p-1)>\varphi(x)>\varphi(a+p)$$

在 $a+p-1$ 及 $a+p$ 間積分得

$$\varphi(a+p-1)>\int_{a+p-1}^{a+p}\varphi(x)dx>\varphi(a+p).$$

逐漸令 $p=1,2,\cdots,n$,將所得的不等式相加,得

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+n-1)>\int_a^{a+n}\varphi(x)dx,$$

$$\varphi(a+1)+\varphi(a+2)+\cdots+\varphi(a+n)<\int_a^{a+n}\varphi(x)dx.$$

此屑業已說明,若積分 $\int_a^l \varphi(x)dx$ 在 l 增加無限時,漸近於一個極限 L,和數 $\varphi(a)+\cdots+\varphi(a+n)$ 既常小於 $\varphi(a)+L$,必漸近於一個極限;所以級數(6)是收斂的.反之,若積分 $\int_a^{a+n}\varphi(x)dx$ 增加在一切極限以外,由第一個不等式可見和數 $\sum_{i=0}^{n}\varphi(a+i)$ 也是如此,所以級數(6)是開發的.

例如 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^\mu}$,$\mu$ 是一個正數,$a=1$,這個函數 $\varphi(x)$ 能滿

是所宣告的一切條件,積分$\int_1^l \frac{dx}{x^\mu}$在$l$增加無限時漸近於一個極限.但必須要$\mu$大於1,然而也只有在這一個場合為然.因而決定一個級數牠的公項是$n^{-\mu}$,若μ大於1,此級數是收斂的;若μ小於1,此級數是開發的.

再設$\varphi(x)=\frac{1}{x(\log x)^\mu}$, $x\ge 2$, μ是一個正數,$\log x$表訥氏對數.假定$\mu \gtrless 1$,我們有

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\log x)^\mu}=\frac{-1}{\mu-1}\left[(\log n)^{1-\mu}-(\log 2)^{1-\mu}\right];$$

若$\mu>1$,此式的第二端就有一個有限的極限;若$\mu<1$,此式的第二端就增加無限.在特別場合,$\mu=1$,同樣可見此積分超過一切極限.所以若$\mu>1$,級數

$$\frac{1}{2(\log 2)^\mu}+\frac{1}{3(\log 3)^\mu}+\cdots+\frac{1}{n(\log n)^\mu}$$

是收斂的;若$\mu<1$,牠是開發的.

一般,一個級數牠的公項是

$$\frac{1}{n\log n\log^2 n\cdots\log^{p-1}n(\log^p n)^\mu}$$

若$\mu>1$,此級數是收斂的;若$\mu\le 1$,此級數是開發的.在此式中為簡單計,我們將$\log\log n$寫為$\log^2 n$,一般,將p個$\log$符號寫為$\log^p n$.自然我們但給n有充分大的價值使$\log n$, $\log^2 n$, $\log^3 n$, $\cdots$, $\log^p n$都是正,並假定所缺的項都為零所替代.這個證明法和對於以上的級數相同;例如$\mu\ne 1$,函數

$$\frac{1}{x\log x\log^2 x\cdots(\log^p x)^\mu}$$

是$\frac{1}{1-\mu}(\log^p x)^{1-\mu}$的導來式,在$x$增加無限時,此最後函數惟對於$\mu>1$才漸近於一個極限.

高失的定理仍有他種應用.設$\varphi(x)$是能滿足以上的條件的一個函數,我們取和數

(7) $$\varphi(n)+\varphi(n+1)+\cdots+\varphi(n+p),$$

其中n及p是可以增加無限的兩個整數.一個級數公項是$\varphi(n)$,牠要是收斂的,和數(7)的極限就是零,這是因爲此和數是兩個和數S_{n+p}及S_n的差,牠兩個都漸近於此級數的和.然而若是這個級數是開發的,我們就無從判定.仍用以上的推理,得雙不等式

$$\int_n^{n+p}\varphi(x)dx<\varphi(n)+\varphi(n+1)+\cdots+\varphi(n+p)<\varphi(n)+\int_n^{n+p}\varphi(x)dx$$

因爲在n增加無限時,$\varphi(n)$漸近於零,可見所取的和數的極限和積分$\int_n^{n+p}\varphi(x)dx$的極限相同,牠關係於二數n及p增加無限時的方法.

例如欲得和數$\sum_{i=0}^{p}(n+i)^{-1}$的極限,只須求有定積分

$\int_n^{n+p}\frac{dx}{x}=\log\left(1+\frac{p}{n}\right)$的極限,這是很明瞭的,這個積分惟在$\frac{p}{n}$有一個極限時牠纔有一個極限;若$\alpha$是此比的極限,以上的和數的極限就是$\log(1+\alpha)$. (*cf.* n^018).

欲得和數$\sum_{i=0}^{p}(n+i)^{\frac{1}{2}}$的極限,同樣當求積分

$$\int_n^{n+p}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2(\sqrt{n+p}-\sqrt{n})$$

的極限;若要這個算式有一個極限,必須商數$\frac{p}{\sqrt{n}}$牠自己有一個極限α,上式也就有一個極限α.

154. **對數徵象** (criteres logarithmiques). —— 取級數$\Sigma n^{-\mu}$爲比較項,高失從此演出收斂性的一個新定規和關於$\sqrt[n]{u_n}$的定規相似:

若自某一項起,$\dfrac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$常大於一個大於1的常數,此級數就是收斂的.若$\dfrac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$常小於1,此級數就是開發的.

在n增加無限時$\dfrac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$若漸近於一個極限$l$,若$l>1$,此級數就是收斂的,若$l<1$,此級數是開發的,若$l=1$,就是不定的場合.

要証明第一部分,我們注意由不等式

$$\log\frac{1}{u_n}>k\log n,$$

得u_n小於n^{-k};所以若k大於1,此級數就是收斂的.

一個級數若自某一項起所有各項各小於級數$\Sigma An^{-\mu}$的所有各項,A是一個常數,$\mu>1$,由以上的定規能夠決定此級數的收斂性.誠然,若是

$$u_n<\frac{A}{n^{\mu}},$$

我們有

$$\log u_n+\mu\log n<\log A,$$

或

$$\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}>\mu-\frac{\log A}{\log n},$$

在n增加無限時,第二端有一個極限μ.所以自某一項起,

$$\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}>k$$

k表在1及μ間的一個數.

同樣,若取級數

$$\sum\frac{1}{n(\log n)^{\alpha}},\quad \sum\frac{1}{n\log n(\log^{2}n)^{\alpha}},\cdots$$

爲比較項,即得無量數的收斂性的定規,在以上的定規中將 $\dfrac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$ 代以 $\dfrac{\log\frac{1}{nu_n}}{\log^2 n}$, $\dfrac{\log\frac{1}{nu_n\log n}}{\log^3 n}$,…, 即得這一切定規.〔註一〕這些定規應用的場合逐漸加廣;我們很容易驗明若由一個定規能辨認一個級數的收斂或開發,由以後一切的定規,都是如此.然有時應用這些定規,終不能辨出一個級數的性質.誠然,巴來斐(Bois-Reymond)〔註二〕及普連申(Pring-sheim)〔註三〕曾作出些級數,也有收斂的,也有開發的,對於他們,對數徵象毫無効用.這個結果在理論上很有趣味,然而這些級數一定收斂極遲,在數字的計算上毫無實用.〔註四〕

155 拉伯(Raobe)及杜哈梅(Duhamel)的定規.——仍用這些級數爲比較項,然不比較各項而比較兩個相續項的比,即得些新定規,這些定規雖不如以上的定規普通,然在實用上往往更爲便利.設(U)是一個正項級數,在其中比$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$漸近於1,然常小於1,我們可用$\dfrac{1}{1+\alpha_n}$表這個比,α_n是一個正數,他在n增加無限時漸近於零.將這個比和$\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^{n}$比較,得以下的定規,這個定規首創者爲拉伯,〔註五〕繼之者爲杜哈梅:〔註六〕

若自某一項起,$n\alpha_n$常大於一個大於1的定數,此級數就是收斂的;若自某一項起,此積常小於1,此級數就是開發的.

這個命題的第二部分是直接的;若自某一項起,$n\alpha_n<1$,由此得

$$\frac{1}{1+\alpha_n}>\frac{n}{n+1},$$

比 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 大於調和級數 (serie harmonique) 的兩個相績項的比,所以此級數是開發的.

爲証明第一部分,我們假定自某一項起, $n\alpha_n > k > 1$. 設 μ 是在 1 及 k 間的一個數 $1 < \mu < k$; 若自某一項起,比 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 小於 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$, 此後者是級數 $n^{-\mu}$ 的兩個相績項的比,如此,所設級數的收斂性即能決定.然而若要如此,必須

$$(8)\qquad \frac{1}{1+\alpha_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}},$$

用戴勞公式展開 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ 截至 $\frac{1}{n^2}$ 項,上式又可寫爲

$$1+\frac{\mu}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2}<1+\alpha_n.$$

在 n 增加無限時, λ_n 常小於一個定數.簡約以後這個條件成爲

$$\mu+\frac{\lambda_n}{n}<n\alpha_n;$$

但是在 n 增加無限時,此式第一端的極限是 μ. 所以在 n 的有充分的大時,第一端必小於 $n\alpha_n$, 卽此可證明不等式 (8), 也就是證明此級數的收斂性.

若對於 n 無限大,積數 $n\alpha_n$ 漸近於一個極限 l, 我們能應用以上的定規.若 $l>1$, 此級數是收斂的;若 $l<1$, 此級數是開發的;若 $l=1$, 就是不定,然若是 $n\alpha_n$ 漸近於 1, 而常小於 1, 此級數也是開發的.

若積數 $n\alpha_n$ 的極限是 1, 我們將 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 和級數

$$\frac{1}{2(\log 2)^{\mu}}+\cdots+\frac{1}{n(\log n)^{\mu}}$$

的兩個相續項的比比較,這個級數在 $\mu>1$ 時是收斂的,在 $\mu\leq 1$ 時是開發的.我們將兩個相續項的比寫爲

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}}$$

在 n 增加無限時 β_n 漸近於零.若自某項起,積數 $\beta_n \log n$ 常大於一個大於1的定數,此級數就是收斂的,若此積數常小於1,此級數就是開發的.

要証明第一部分,假定對於 n 的價值大於一個數 p 時, $\beta_n \log n>K>1$. 設 μ 是這麽一個數, $1<\mu<K$. 若是自某項以後,

(9) $$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{n}{n+1}\left[\frac{\log n}{\log(n+1)}\right]^{\mu},$$

此級數的收斂性就可以成立,上式可寫爲

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^{\mu},$$

用戴勞公式展開第二端,又可寫爲

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{\mu\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}+\lambda_n\left[\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^2\right\},$$

在 n 增加無限時, λ_n 的絕對值常小於一個定數.化簡以後,此式成爲

$$\beta_n \log n>\mu(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\lambda_n(n+1)\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\log n};$$

但是依戴勞公式

(10) $$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2n}(1+\varepsilon),$$

ε 漸近於1,所以在 n 增加無限時, $(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的極限是1. 所以上面不等式的第二端的極限是 μ; 此不等式的第一端既常大於 μ,所以自某項以後,此不等式是成立的.

同一方法,將$\frac{u_{n+1}}{u_n}$和一個級數的兩個相續項比較,此級數的公項是$\frac{1}{n\log n}$.不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{n}{n+1}\frac{\log n}{\log(n+1)}$$

可寫爲

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}\right]$$

或

$$\beta_n\log n<(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

但是依公式(10)所示,此不等式第二端由大於1的價值而漸近於1.第一端既不能大於1,所以自某一項起,此不等式能夠成立.

自以上的命題,可以取得一個系,若n增加無限時,積數$\beta_n\log n$漸近於一個極限l,若$l>1$,此級數就是收斂的;若$l<1$,此級數就是開發的;若$l=1$,則爲不定,但是若$\beta_n\log n$常小於1,此級數也是開發的.

在$\beta_n\log n$漸近於1而常大於1的時候,我們可寫爲

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1+\gamma_n}{n\log n}}$$

γ_n在n增加無限時漸近於零.我們再取$\gamma_n\log^2 n$可以得和上相同的判定,後仿此.

系.——在一個正項級數,若是一項和前項的比爲以下的形狀

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{r}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\alpha}},$$

μ是一個正數，r是常數，在n增加無限時，H_n的絕對值常小於一個定數；若$r>1$，此級數是收斂的，在他種場合，牠是開發的。

誠然，若仍用$\dfrac{1}{1+\alpha_n}$表兩個相續項的比，我們有

$$n\alpha_n=\frac{r-\dfrac{H_n}{n^{\mu}}}{1-\dfrac{r}{n}+\dfrac{H_n}{n^{1+\mu}}},$$

所以$\lim n\alpha_n=r$。所以若$r>1$，此級數是收斂的；若$r<1$，此級數是開發的。只有一個不定的場合是$r=1$。爲除去這個困難，我們令

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\beta_n}{n}};$$

得

$$\beta_n\log n=\frac{\dfrac{\log n}{n}-\dfrac{n+1}{n}H_n\dfrac{\log n}{n^{\mu}}}{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{H_n}{n^{1+\mu}}};$$

不論正數μ如何小，此式第二端在n增加無限時都漸近於零。所以此級數是開發的。

譬如$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$是n的一個有理函數，牠在n增加無限時漸近於1。

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\cdots}{n^p+b_1n^{p-1}+b_2n^{p-2}+\cdots};$$

實行除法至$\dfrac{1}{n^2}$的那一項爲止，

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{a_1-b_1}{n}+\frac{\varphi(n)}{n^2},$$

$\varphi(n)$是n的一個有理函數，在n增加無限時，牠漸近於一個確

定的極限,依以前所得的結果,若要此級數是收斂的,必須要也只須要

$$b_1 > a_1 + 1.$$

此定理爲高斯(Gauss)所創,是直接證明的,這是收斂性的第一普通定規中的一個.〔註七〕

156. **絕對收斂的級數**(series absolument convergente).——現在我們所將討論的級數牠們各項的符號能夠是任何的.一個級數,若自某一項起所有各項都同符號,這個場合就直接變爲以上的場合.所以只須考慮有無量數的正項及無量數的負項的級數.我們先證明以下的命題,這個命題是根本的.

一個任何項級數若牠的各項的絕對值所成的級數是收斂的,此級數也就是收斂的.

設

$$(11) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

是一個級數,牠的各項的符號是任何的,又設

$$(12) \qquad U_0 + U_1 + \cdots + U_n + \cdots$$

是由第一個級數的各項的絕對值所成的級數,其中 $U_n = |u_n|$.若級數(12)是收斂的,級數(11)就也是如此;這是收斂性的普通定理的一個結果,因爲

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < U_n + U_{n+1} + \cdots + U_{n+p},$$

若 n 有充分的大,無論 p 如何,這個第二和數就能夠小於任何已知數.

我們也能夠用別的一個方法證明.我們寫爲

$$u_n = (u_n + U_n) - U_n,$$

再取一個輔助級數,牠的公項是u_n+U_n

(13) $$(u_0+U_0)+(u_1+U_1)+\cdots+(u_n+U_n)+\cdots;$$

用S_n, S'_n, S''_n表級數(11),(12),(13)的n個初項的和,顯然可見

$$S_n=S''_n-S'_n.$$

由假定,級數(12)是收斂的;級數(13)沒有一項是負,牠的公項至多等於$2U_n$,所以牠也是收斂的.在n增加無限時,和數S'_n, S''_n各漸近於一個極限,因而S_n也漸近於一個極限,就是說級數(11)是收斂的.這個級數我們又可以看作由兩個正項收斂級數相減而成.

凡一個級數若牠的各項的絕對值所成的級數是收斂的,此級數就說是絕對收斂的.在這麼一個級數中,我們能夠任意變動各項的次序,此級數的和不變.先設一個正項級數(U),牠的和是S,設(V)是另一個級數,牠的各項和第一級數同,但是排列的次序異,級數(U)中的每一項都在級數(V)中佔一個任何位置,反之,(V)中每一項也在(U)中佔一個任何位置.

設S'_m是級數(V)的m個初項的和;這些項既都在級數(U)內,我們能夠取n有充分的大,使級數(V)的m個初項都在級數(U)的n個初項以內.所以

$$S'_m<S_n<S,$$

這就表明級數(V)是收斂的,牠的和$S'\leqq S$.同樣,我們當有$S\leqq S'$,因而決定$S'=S$.同一推理表明若級數(U)及(V)有一個是開發的,第二個也就是開發的.

在一個正項收斂級數中,我們能任意將許多項集合為一項,就是說作成一個新級數,牠的各項都由第一級數的任意若干項

所成.此級數的價值不變.我們先假定將若干相續項集合,設

$$(14)\qquad A_0+A_1+A_2+\cdots+A_m+\cdots$$

是所得的新級數,其中

$$A_0=a_0+a_1+\cdots+a_p,\ A_1=a_{p+1}+\cdots+a_q,$$
$$A_2=a_{q+1}+\cdots+a_r,\ \cdots,$$

級數 (14) 的 m 初項的和 S'_m 等於原設級數 N 個初項的和 $S_N(N>m)$.在 m 增加無限時,N 也是如此,因而 S'_m 的極限也是 S.

組合以上的兩個演算,可見一個正項收斂級數能不變牠的和用另一級數替代,此後者的每一項都是第一級數中任意取若干項的和所成,只須要第一級數的每一項都進入第二級數的一項內而只進入一項內.

凡一個絕對收斂級數,既都能看作兩個正項收斂級數的差,對於這麼一個級數,以上的演算仍是合理的.所以一個絕對收斂級數,在計算數字價值時,能夠看作有限數的項的和.

157. **半收斂級數**(series semi-convergentes).—— 一個任何項級數能夠是收斂的,然由牠的各項的絕對值所成的級數能夠是開發的.這個命題很容易爲以下關於更迭級數(series alternées)的定理所顯明.我但將這個定理舉出:

一個級數的各項迭爲正負,若每項的絕對值小於前項的絕對值,又若是項的次第增加無限時,項的絕對值無限減小,此級數就是收斂的.

例如級數

$$(15)\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

是收斂的，然而牠的各項的絕對值成爲調和級數，牠是開發的。凡不是絕對收斂的收斂級數，叫做半收斂級數。高失，底里格來(Dirichlet)及黎曼(Riemann)常顯明絕對收斂級數及半收斂級數有分辨的必要。在半收斂級數，我們不能夠更換各項相積的次第，也不能任意將牠的項集合；若要如此，這些運算就能改變此級數的和，甚至於變一個收斂級數爲開發級數，或變一個開發級數爲一個收斂級數。作爲例子，我們仍取級數(15)，牠的和顯然是算式

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

在 m 增加無限時的極限。現在我們依另一次序，使每一正項隨着兩個負項，此級數成爲

$$(16)\qquad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\cdots;$$

若取和數 S_{3n}, S_{3n+1}, S_{3n+2}, 很容易證明這個新級數是收斂的。牠的和是下式

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)$$

在 m 增加無限時的極限。然而

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

結果，第二級數的和等於第一級數的和的半數。

一般，設有一個收斂而非絕對收斂的級數，我們能將此級數的項依一個次序排列使所成的新級數是收斂的，並且使牠的和等於一個預定在先的數 A。我們用 S_p 表所設級數在前的 p 個正項的和，用 S'_q 表牠在前的 q 個負項的和；顯然可見 $p+q$ 個初項的和是 $S_p-S'_q$。在 p 及 q 增加無限時，這兩個和 S_p 及 S'_q

也常如此,因爲如其不然,此級數就成爲開發的或絕對收斂的了.他一方面,此級數既是收斂的,牠的公項必漸近於零.

此屌已經說明,我們用以下的方法,作出一個新級數,牠的和是 A: 先順次取所設級數的正項,到了牠們的和數大於 A 爲止;在此以後,再順次取所設級數的最初負項,到了這些正負項的和小於 A 爲止;再取正項,自第一次所截止的項起,至這些項的和大於 A 爲止;再取負項,繼續如此.可見這個新級數的項的和,時而大於 A 時而小於 A,然而和 A 相差的量,逐漸下降以至於零.

158. 阿伯耳(Abel)的定規.—— 阿伯耳有一個定理,能辨認某種級數的收斂性,這個證明法,根據以前已經用過的定理 ($n^o 74$). 設 Σu_i 是一個收斂級數,或是不定(就是說牠的 n 個初項的和的絕對值常小於一個定數 A).牠一方面,設正數 ε_i 所成的一個敍列,每一個數都小於前一個,對於 n 無限時 $\lim \varepsilon_n = o$. 此屌已經說明,在這些條件之下,級數

$$(17)\qquad \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_n u_n + \cdots$$

是收斂的.

誠然,由我們的假定,可見不論 n 及 p 如何

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < 2A,$$

又依預定理,

$$|u_{n+1}\varepsilon_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\varepsilon_{n+p}| < 2A\varepsilon_{n+1};$$

既是 n 增加無限時 ε_{n+1} 漸近於零,我們能夠取 n 有充分的大,使不論 p 如何,和數

$$\varepsilon_{n+1}u_{n+1}+\cdots+\varepsilon_{n+p}u_{n+p}$$

能小於一個任何預定的數.所以依普通定理(n^o5),級數(17)是收斂的.

若級數$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$成爲

$$1-1+1-1+1-1+\cdots,$$

牠的項迭爲$+1$及-1,以上的命題就成爲在前所論關於更迭級數的定理.

再舉一例;級數

$$\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\cdots+\sin n\theta+\cdots$$

是收斂的或不定.在$\sin\theta=0$時,此級數的各項都爲零在$\sin\theta\gtrless0$時,依三角公式,牠的n個初項的和等於

$$\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right),$$

牠的絕對價值小於$\dfrac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$.因而决定級數

$$\varepsilon_1\sin\theta+\varepsilon_2\sin2\theta+\cdots+\varepsilon_n\sin n\theta+\cdots$$

對於θ的一切價值都是收斂的;同一方法,可證級數

$$\varepsilon_1\cos\theta+\varepsilon_2\cos2\theta+\cdots+\varepsilon_n\cos n\theta$$

是收斂的,惟對於$\theta=2k\pi$或者是例外.

系.——關於收斂級數我們能宣告一個普通性質.設

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$$

是一個收斂級數,

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n,\cdots$$

是正數所成的一個敍列,上升的或下降的,在 n 增加無限時漸近於一個不等於零的極限 k;級數

(18) $$\alpha_0 u_0+\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n+\cdots$$

就也是收斂的.

爲確定人的觀念,假定 α_i 是上升的;我們可寫爲

$$\alpha_0=k-\varepsilon_0, \alpha_1=k-\varepsilon_1,\cdots,\alpha_n=k-\varepsilon_n\cdots,$$

這些數 $\varepsilon_0, \varepsilon_1\cdots, \varepsilon_n\cdots$,成爲一個正項的下降敍列,在 n 增加無限時,ε_n 漸近於零.這兩個級數

$$ku_0+ku_1+\cdots+ku_n+\cdots,$$

$$\varepsilon_0 u_0+\varepsilon_1 u_1+\cdots+\varepsilon_n u_n+\cdots$$

都是收斂的所以級數(18)也是如此.

II——幻數項級數.——複級數.

159. **定義.**——在以下各節,我們舉出級數的幾個推廣法.設

(19) $$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

是一個級數,牠的各項都是幻數量,

$$u_0=a_0+b_0 i,\ u_1=a_1+b_1 i,\ \cdots,\ u_n=a_n+b_n i,$$

若由實數部分及 i 的係數所成的級數

(20) $$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

(21) $$b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

都是收斂的,級數(19)就說是<u>收斂的</u>.設 S' 及 S'' 是級數(20)及(21)的和;級數(19)的和就是 $S=S'+iS''$;這是很明瞭的這個和仍是在 n 增加無限時級數(19)的 n 個初項的和的極限,由此可見一個幻

數項級數實際上只是兩個實數項級數的集合.

若級數(19)各項的模(modules)所成的級數

(22) $$\sqrt{a_0^2+b_0^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\cdots$$

是收斂的,級數(20)及(21)就都是絕對收斂的,這是因為a_n及b_n的絕對值至多等於級數(22)的公項的緣故,級數(19)的自身就說是<u>絕對收斂的</u>.我們能改變此等級數各項的次序,或任意將牠的各項分為許多的羣,並不至改變牠的和.

凡一個定規能決定一個正項級數是收斂的,就有一個相應定規決定一個實數或幻數的一個任何項級數是絕對收斂的.所以在一級數中若自某列以後,比$\frac{u_{n+1}}{u_n}$的模(module)常小於一個小於1的定數,此級數就是絕對收斂的.誠然,設$U_i=|u_i|$;若自某列以後,常能得著

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<K<1,$$

級數

$$U_0+U_1+\cdots+U_n+\cdots$$

的兩個相續項的比既常小於k,此級數是收斂的.若n增加無限時,比$\frac{u_{n+1}}{u_n}$漸近於一個極限l,若$|l|<1$,此級數就是收斂的,若$|l|>1$,此級數就是開發時;誠然,在此最後場合,公項u_n的模不漸近於零,級(20)及(21)不能同時是收斂的.若$|l|=1$,是不定的場合.

> 一般,在n增加無限時,設ω是$\sqrt[n]{U_n}$的最大極限,若$\omega<1$,級數(19)就是收斂的,若$\omega>1$,就是開發的,這是因為在此場合,公項的模不漸近於零的緣故(第152節);在$\omega=1$時是不定,所以所設級數能夠是絕對收斂的,單收斂或開發的.

160. **級數的乘法.** ——設

(23) $$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

(24) $$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

是兩個任何項級數.用盡可能的方法將第一級數的一項乘以第二級數的一項,再將所有的積 $u_i v_j$ 整頓,凡指標的和數 $i+j$ 相同的都集合爲一羣:如此即得一個新級數

(25) $$u_0v_0+(u_0v_1+v_0u_1)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\cdots$$
$$+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_nv_0)+\cdots.$$

若級數(23)及(24)都是絕對收斂的,級數(25)就也是收斂的,牠的和是前兩個的和的積.這個定理是高失所創,邁爾當(Mertens)加以推廣,〔註八〕牠証明這個定理仍是確實,只要級數(23)及(24)中有一個是絕對收斂的,他一個儘可以是單收斂的.

爲確定人的觀念,我們假定級數(23)是絕對收斂的,設 w_n 是級數(25)的公項,

$$w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_nv_0.$$

要証明我們的命題,只須顯明在 n 增加無限時,以下的兩個差數漸近於零:

$$w_0+w_1+\cdots+w_{2n}-(u_0+u_1+\cdots+u_n)(v_0+v_1+\cdots+v_n),$$

$$w_0+w_1+\cdots+w_{2n+1}-(u_0+u_1+\cdots+u_{n+1})(v_0+v_1+\cdots+v_{n+1}).$$

這兩個場合的証法相同,試取第一個差數,依 u_i 整頓,我們可以寫爲

$$\delta=u_0(v_{n+1}+\cdots+v_{2n})+u_1(v_{n+1}+\cdots+v_{2n-1})+\cdots+u_{n-1}v_{n+1}$$
$$+u_{n+1}(v_0+\ +v_{n-1})+u_{n+2}(v_0+\cdots+v_{n-2})+\cdots+u_{2n}v_0.$$

級數(23)既是絕對收斂的,無論 n 如何,和數

$$U_0+U_1+\cdots+U_n$$

必小於一個有定正數A;同樣,級數(24)是收斂的,無論n如何,和數

$$v_0+v_1+\cdots+v_n$$

的模(module)必小於一個有定正數B.此層既已說明,設ε是一個任何預定的正數,我們能選擇一個有充分的大的正數m,使無論p如何,只要$n\geqq m$,必能得着.

$$U_{n+1}+\cdots+U_{n+p}<\frac{\varepsilon}{A+B},$$

$$\left|v_{n+1}+\cdots+v_{n+p}\right|<\frac{\varepsilon}{A+B}.$$

如此選擇n,若將$u_0, u_1, \cdots, u_{2n}$各代以$U_0, U_1, \cdots, U_{2n}$,將$v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+p}$代以$\frac{\varepsilon}{A+B}$,又將$v_0+\cdots+v_{n-1}, v_0+\cdots+v_{n-2}, \cdots, v_2$代以$B$,就可見$\delta$的模有一個上限.

$$|\delta|<U_0\frac{\varepsilon}{A+B}+U_1\frac{\varepsilon}{A+B}+\cdots+U_{n-1}\frac{\varepsilon}{A+B}$$
$$+U_{n+1}B+U_{n+2}B+\cdots+U_{2n}B,$$

或

$$|\delta|<\frac{\varepsilon}{A+B}(U_0+U_1+\cdots+U_{n-1})$$
$$+B(U_{n+1}+\cdots+U_{2n})<\frac{\varepsilon A}{A+B}+\frac{\varepsilon B}{A+B}$$

或$|\delta|<\varepsilon$.差數δ的極限是零.

161. **二重級數**(séries doubles).——設有一個方棋盤,上方及左方有界限,下方及右方無界限,祂有無限的豎行各記以號數自o至∞,又有無限的橫行也記以號數自o至∞.懸想對於棋盤

的每一格各作一數相應,這個數就記在牠的相應格上;設 a_{ik} 是和豎行 i 及橫行 k 相交的格相應的數.

如此我們得一個表如下:

$$
(26)\qquad
\begin{array}{|llllll}
\hline
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & \cdots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

我們先假定表中各項都是實數且都是正數.

懸想有一列的曲線 $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$, 牠們在所有的方向上都遠至無限,牠們和限制此表的兩個直線成爲一列的閉曲線互相包圍,設 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 是表中爲此等閉曲線所限各項的和,若 n 增加無限, S_n 漸近於一個極限 S, 我們就說二重級數

$$(27)\qquad \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik}$$

是收斂的,牠的和是 S. 要徵實這個定義,必要証明這個極限 S 和這些曲線 C 的形狀無關係.試然,假定有另一列的曲線, $C'_1, C'_2, \cdots, C'_n, \cdots$ 也是遠至無限在所有的方向上,設 $S'_1, S'_2, \cdots, S'_m, \cdots$ 是相應的和.暫假定 m 是定數,我們必能選擇 n 有充分的大,使曲線 C_n 完全在 C'_m 外;因而 $S'_m < S_n$, 卽 $S'_m < S$; 但是這個和數 S'_m 是和指標同時漸增的;所以牠漸近於一個極限 $S' \leqq S$. 同樣又可証明 $S \leqq S'$; 因得 $S' = S$.

例如作為曲線C,我們可取一個正方形的兩邊,牠的邊線遠至無限,或取一個直線,牠和棋盤的兩邊作為同樣的角;如此所得的相應和如下:

$$a_{00}+(a_{10}+a_{11}+a_{01})+\cdots+(a_{n0}+a_{n1}+\cdots+a_{nn}+a_{n-1n}+\cdots+a_{0n}),$$

$$a_{00}+(a_{10}+a_{01})+(a_{20}+a_{11}+a_{02})+\cdots+(a_{n0}+a_{n-11}+\cdots+a_{0n});$$

若n增加無限,此二和中有一個增加無限,他一個就也是如此,這兩個極限相同.我們也可以依橫行或依豎行計算表中的和.誠然,假定二重級數(27)是收斂的,S是牠的和,這是很明瞭的,表中無論若干項的和必小於S.因而由一個橫行的各項所成的級數

(28) $$a_{i0}+a_{i1}+\cdots+a_{in}+\cdots\quad(i=0,1,2,\cdots)$$

都是收斂的,這是因為和數

$$a_{i0}+a_{i1}+\cdots+a_{in}$$

常小於S,又和n同時漸增的緣故.

設$\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_i,\cdots$是如此所得一切收斂級數的和;新級數

(29) $$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_i+\cdots$$

也是收斂的.誠然,試取表中各項Σa_{ik}的和,$i\leqq p$, $k\leqq r$.這個和常小於S;若令p固定,令r增加無限,牠的極限是$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_p$.

所以$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_p<S$,因為這個和和$p$同時增加,因而決定級數(29)是收斂的,牠的和是一個數$\Sigma\leqq S$.倒轉來,若(28)的一切級數都是收斂的,又若是這些級數的和所成的新級數(29)是收斂的,牠的和是Σ,我們可見表(26)中無論若干項的和必小於Σ.故$S\leqq\Sigma$,因而$\Sigma=S$.

我們方纔對於由橫行所得的級數所說的,當然能移到由豎行所得的級數上.欲得一個二重級數的和,若級數的各原質都是

正,我們可以依橫行計算,或依豎行計算,或取任何形狀的極限曲線 (courbes limites). 特別的,若依橫行計算,此級數是收斂的,依豎行計算時就也是如此,牠的和在此兩個計算法相同.對於正項二重級數,我可說出一切定理和對於正項單級數的定理相似.例如一個正項二重級數的各項若都小於他一個收斂二重級數的相應項,第一個級數也就是收斂的.

一個正項二重級數若不是收斂的,就叫作開發的.在和此級數相應的表中,若令一個曲線由各方向遠至無限,曲線所限的各項的和增加無限.

現在我們取一個表,表中所有原質不全是正.這是很明瞭的,我們不須取所有原質都是負的場合,也無須取只有有限的正原質或負原質的場合,因為這些場合都直接變為在前的場合.所以我們假定在表中有無限的正原質及負原質.設 a_{ik} 是此表 T 中的公項.再取一個正項的表 T_1, 牠的公項是表 T 中相應項的絕對值 $|a_{ik}|$. 若表 T_1 是收斂的,表 T 就說是絕對收斂的.如此的一個表具有一個收斂正項表的一切主要特性.

要証明這個,我們取兩個輔助表 T' 及 T'', 牠們的定法如下:表 T' 是將表 T 中正項保存將負項代以零得來.同樣表 T'' 是將表 T 中負項換符號,將正項代以零得來.若表 T_1 是收斂的,表 T' 及 T'' 就都是收斂的,這是因為表 T' 及 T'' 中每一項至多等於表 T_1 中的相應項的緣故.級數 T 中在一個閉曲線內各項的和是 T' 及 T'' 在此同一曲線內諸項的和的差,此曲線遠至無限時,此在後的兩個和既各漸近於一個極限,在前的和數也必漸近於一個極限,此極限不關係曲線的形狀.這是這個極限叫作表 T 的和.由以前對

於正項表所作的推理,我們可以依橫行或依豎行計算表T.這是很明瞭的,一個任何符號原質所成的表若是絕對收斂的,能夠和一個正項收斂表一樣對待.但是必審定T的各項的絕對值所成的表T_1是收斂的最關緊要.

例如一個二重級數公項的形狀是$u_m v_n$,u_m及v_n是兩個通常級數U及V的公項.若此二級數是絕對收斂的,這個二重級數就也是絕對收斂的,也只有在這個場合是如此,牠的和等於此二級數的和的積.依對角線計算此二重級數的和,即得高失關於兩個絕對收斂級數的積的定理.

若是表T_1是開發的,表T', T''中至少有一個是開發的.若T', T''中有一個是開發的,譬如是T'罷,T''既是收斂的,不論一個閉曲線C的形狀如何,C由一切方向遠至無限時,表T在曲線C內各項的和增加無限.

若表T', T''都是開發的,以前的推理只表明T表中在曲線C內各項的和等於兩個和的差,這兩個和在曲線C由各方向遠至無限時成為無限.然而因曲線C的形狀不同,這個差數能漸近於些不同的極限,就是說這個差數的極限全視介正項的數及負項的數增加無限時所用的方法.若將表中各項依某一個次序增加,這個和數能夠增加無限或不近於任何極限.特別的,若依橫行或豎行作表中各項的和,能夠得着完全不同的結果.

以下的例是 Arndt 所創 (Grunert' s Archiv, vol. XI, *p.* 319). 設有一個表

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right),\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right),\cdots,\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right),\cdots,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2,\cdots,\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^2,\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n,\cdots,\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^n,\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots,
\end{array}$$

含有無量數的正項及負項,第n橫行各原質所成的級數的和顯然是$\frac{1}{2^{n+1}}$,所以若是依橫行作此表的和,就得着

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots,$$

就是$\frac{1}{2}$.他一方面,第$(p-1)$豎行各原質所成的級數是

$$\frac{1}{p}\left[\left(\frac{p-1}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)^2+\cdots+\left(\frac{p-1}{p}\right)^n+\cdots\right]$$
$$-\frac{1}{p+1}\left[\left(\frac{p}{p+1}\right)+\left(\frac{p}{p+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{p}{p+1}\right)^n+\cdots\right],$$

此級數是收斂的,牠的和是

$$\frac{p-1}{p}-\frac{p}{p+1}=-\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}.$$

若依豎行計算此表,即得

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\right)+\cdots,$$

就是$-\frac{1}{2}$,這個例子顯明在計算上只當用絕對收斂的二重級數.

二重級數的原質也可以是幻數.若表(26)中的原質都是幻數,我們可取表中每一原質的實數部分作一個表 T', 取 $\sqrt{-1}$ 的係數作一個表 T''.

我們再取表 T 中各原質的模(module)作一個正項表 T_1,若 T_1 是收斂的, T' 及 T'' 就都是收斂的, T 就是絕對收斂的.若一個閉曲線由各方向遠至無限,表 T 中為曲線所限諸原質的和漸近於一個極限,這個極限不關係曲線的形狀,叫作表 T 的和.一個絕對收斂的和仍能夠依橫行或依豎行計算.

一個絕對收斂的二重級數能變為一個通常級數仍為原有的項所成.我們只須証明一個行數無限的棋盤如(26)者,總能夠將其所有的格加以號數,使每一個格有一號數,並且沒有遺漏的,換一句話說,若是一方面取數的自然順序,他一方面取兩個整數 (i,k) 的所有各組,但 $i\geq o, k\geq o$, 對於任意一組我們總能夠令數的自然序中有一個和牠相應,倒轉來對於一個數 n 只有這些組中的一個相應.誠然,我們將這些組用以下的方法一一寫出:

(30) $$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ \cdots,$$

一般的,寫完 $i+k<n$ 所有各組後,再寫 $i+k=n$ 的各組,先自 (n,o) 起,然後令 i 逐漸減 1 以至於零.這是很明瞭的每一組 (i,k) 只有有限的組在其前,所以牠在敘列中必站有一個固定的次第.現在我們假定將絕對收斂的二重積分 $\Sigma\Sigma a_{ik}$ 的項,依方纔所定次第寫出,我們得一個通常的級數

(31) $$a_{00}+a_{10}+a_{01}+a_{20}+a_{11}+a_{02}+\cdots+a_{n0}+a_{n-1\,1}+\cdots,$$

其各項即此二重級數的各項,此級數和此二重級數相同也是絕對收斂的,結果也有相同的和,這是很明瞭的,這個變化的方法不是惟一的,因爲我們能任意變換各項的次第,倒轉來,凡一個絕對收斂的普通級數能由無量數的方法變爲一個二重級數,此種設計在某某恆等式的証明法上成爲利器.

由此可見一個二進級數的觀念和通常級數的觀念並沒區別,在前已見一個絕對收斂的級數能夠將有限數的項代以其和,或將其各項依任意的次第排列,若將此性質更加推廣,自然引導至二進級數上.

162. **複級數**(series multiples).——二重級數的觀念能夠推廣,先譬如我們可以取些級數,牠們的每一項 a_{mn} 都關係兩個指標,這兩個指標都能由 $-\infty$ 變至 $+\infty$. 如此的一個級數,我們可以假想將牠的各項放在一個沒有邊際的棋盤的各格內,可見這個二進 (double entrée) 級數 $\Sigma\Sigma a_{mn}$ 能夠分爲四個和上節相類的級數,此外又有一個最爲重要的推廣法,我們設一個級數,牠的每項 $a_{m_1 m_2 \cdots m_p}$ 關係 p 個指標,這些指標都能夠由 0 變至 ∞, 或由 $-\infty$ 變至 $+\infty$, 另外的牠們也可以滿足某某不等式,雖然是若有三個以上的指標我們即不能用上節的幾何表示法,然一加深思,即可想見對於二重級數所立的命題,都不難推廣在 p 級的複級數上.

我們先假定所有的項 $a_{m_1 m_2 \ldots m_p}$ 都是正.懸想取級數中若干項的和,在此和上又加以若干被畧項的和,繼續如此,經過若干次運算以後,總使級數中任意一項都進入這些連續和以內,設 S_1, $S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 是所得的連續和,若 n 增加無限時, S_n 漸近於一個極

限S,此級數就是收斂的,牠的和是S;和在兩個指標的場合同,這個極限S不關係積加各項加入時所依的方法.若級數中各原質的符號是任何的,或都是幻數,只須要各原質的模所成級數是收斂的,此級數就也是收斂的.

163. 高失的定理的推廣.—用以下的定理往往能決定一個複級數的收斂性或開發性.這個定理是高失的定理的推廣(n^0 153).設$f(x,y)$是二自變數x及y的函數,牠在某一閉曲線Γ外所有點(x,y)上都是正,(x,y)點遠於原點時此函數$f(x,y)$漸減.他一方面,設一個曲線C在曲線Γ外,牠遠至無限,取一個二重積分$\iint f(x,y)dxdy$擴充在此二曲線所限的帶狀(couronne)內;他一方面,取一個二重級數$\Sigma f(m,n)$,其中指標m,n歷盡正或負的整數值,總使(m,n)點常在Γ外.由這個條件,二重積分若有一個極限,此二重級數就是收斂的,反之也是如此.

坐標軸的平行線$x=o,\pm1,\pm2,\cdots$及$y=o,\pm1,\pm2,\cdots$,分二曲線C及Γ間的面積爲許多方形及些不規則部分.我們若在每一個方形內取牠遠於原點的角,可見相應的和$\Sigma f(m,n)$必小於擴充在C及Γ內的二重積分$\iint f(x,y)\,dxdy$.在C遠至無限時,若此二重積分漸近於一個極限S,二重級數的任意若干項的和都小於一個定數,所以此級數是收斂的.同一方法,若二重級數是收斂的,可見二重積分常小於一個定數,所以此積分漸近於一個極限.由適宜的假定,這個定理可以推廣到有p個指標的複級上;在此場合,比較項(terme de comparaison)是一個p級的複積分.

例如一個二重級數牠的公項是$\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\mu}$,指標m及n佔盡$-\infty$及$+\infty$間一切的整數值,除$m=n=o$不計;若$\mu>1$,此級數是

收斂的,若 $\mu\leq 1$, 此級數是開發的,因為取一個以原點為心的圓周,若 $\mu>1$,擴充在圓周外的二重積分

$$\iint f(x,y)dxdy \tag{32}$$

有一個有限的價值若 $\mu<1$,此積分增加無限 (n^0 127)。

一般,一個複級數牠的公項是

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+\cdots+m_p^2)^\mu}$$

除 $m_1=m_2=\cdots=m_p=o$ 不計外,若 $2\mu>p$,此級數就是收斂的。

164. **變數項的複級數.**——設有一個二重級數,或具有 p 度的複級數,牠的各項是 n 個變數 $x, y, z, \cdots$ 的函數,此級數假定在一個領域 D 內是絕對收斂的,牠若是能滿足以下的條件,我們就說牠是均一收斂的:設有一個任何正數 ε, 就有一個數 N 存在,級數中任取若干項 n, 只要此 n 項包有 N 首項在內,所得的和 S_n 及級數的和 S 的差的絕對值必小於 ε, 這個性質對於變數 $x, y, z, \cdots$ 在領域 D 內的一切價值都是如此。

仍用第29及107節的推理,我們能証明一個均一收斂級數,牠的各項若在領域 D 內都是連續函數,牠的和也就是在此領域內的連續函數.牠能夠在 D 所含的任意一個 q 度的有限領域 δ 內逐項積分($q\leq n$).同樣,我們能夠將一個絕對收斂級數微分若干次,只須要如此所得的級數是均一收斂的。

一個複級數,若每項都小於一個定數項的收斂級數的相應項,此級數也就是均一收斂的 (n^0 29)。

III 無限積

165. **定義及概論.**——設有一個無限敍列 (suite indéfinie), 牠的各項可以是實數或幻數,公項是 u_n; 試取連續積數 $P_0, P_1, \cdots,$

P_n，其中

$$P_n=(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n);$$

若n增加無限，P_n漸近一個極限P，我們就說無限積

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)=(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots \tag{33}$$

是收斂的由定義，P是此積的價值.

這是很明瞭的，一切因數$1+u_m$中若有一個為零，這一切的積$P_n(n\geqslant m)$都為零.然也能夠積數P_n漸近於零而因數$1+u_m$中沒有一個為零.例如n個首數(premiers nombres)的倒數的積，在n增加無限時，此積漸近於零.對於此特別場合，關於無限積的收斂性的定規恒不適用，我們保留收斂積的名稱專給無限積P_n，在n增加無限時，牠漸近於一個不等於零的極限.若P_n的極限是零，我們說此積是零.若P_n不漸近於任何極限，我們說此積是開發的.

若要一個無限積是收斂的不等於零，必須要u_n漸近於零.誠然，若P_n漸近於一個極限P，差數$P_n-P_{n-1}=P_{n-1}u_n$當漸近於零，因數P_{n-1}既有一個極限不等於零，所以必須要因數u_n漸近於零.若一個無限積等於零，這個推理就不適用，我們很容易驗明在上例中u_n不漸近於零.

依以前的一個注意，($n^\circ 5$)研究一個無限積的收斂性或開發性，可變為研究一個級數的相同問題.我們令$v_0=1+u_0$，對於$n>o$我們令

$$v_n=P_n-P_{n-1}=(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_{n-1})u_n, \tag{34}$$

試研究輔助級數

$$v_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots \tag{35}$$

和數 $\Sigma_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ 顯然等於 P_n, 所以此級數和無限積 $\Pi(1+u_n)$ 同時是收斂的或開發的;若此級數是收斂的,牠的和 Σ 等於無限積的價值 P.

16. **絕對收斂積.**——先假定一切數 u_n 都是實數且是正數,積數 P_n 和 n 同時漸增,要証明牠的收斂性,只須証明無論 n 如何,此積數 P_n 都小於一個定數.一方面,我們有

$$P_n>1+u_0+u_1+\cdots+u_n;$$

牠一方面,設 x 是正數,我們有 $1+x<e^x$,所以

$$P_n<e^{u_0+u_1+\cdots+u_n}.$$

第一個不等式表明若積數 P_n 漸近於一個極限 P, 必常有 $u_0+u_1+\cdots+u_n<P$.所以正項級數

(36) $$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$$

是收斂的.倒轉來,假定此級數是收斂的,設 S 是牠的和;第二個不等式顯明 $P_n<e^S$. 所以積數 P_n 漸近於一個極限,因而決定一個無限積 $\prod_0^{+\infty}(1+u_n)$, 一切數 u_n 都是實數且是正數,此積必和級數 (36) 同時爲收斂的或開發的.

現在設一個任何項的無限積,實數或幻數

(37) $$(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)\cdots,$$

令 $U_i=|u_i|$. 若級數

(38) $$U_0+U_1+\cdots+U_n+\cdots$$

是收斂的,無限積 (37) 就也是如此.誠然,我們令

$$v_n=(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_{n-1})u_n,$$

$$V_n=(1+U_0)(1+U_1)\cdots(1+U_{n-1})U_n.$$

由假定,正項級數 ΣU_i 是收斂的,所以無限積 $\Pi(1+U_i)$ 也是如

此,因而級數

(39) $V_0+V_1+\cdots+V_n+\cdots$

也是如此.

但是 $|v_n|<V_n$,所以級數

(40) $v_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots$

是絕對收斂的,依以前的注意,此級數的和是積數

$$P_n=(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)$$

在 n 增加無限時的極限,依此等條件,無限積 $\prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ 說是絕對收斂的.

絕對收斂的無限積有一個特殊利益,和絕對收斂級數相似.在一個絕對收斂的無限積中,能夠任意改變各因數的次序不至變更牠的積.我們先証明設有一個絕對收斂的無限積,對於一個正數 ε,我們能夠選擇一個整數 n 相應,使在1及任有若干因數

$$(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots(1+u_\lambda)$$

間的差必小於 ε,但必須指標 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ 都大於 n.誠然,我們可直接驗明

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots(1+u_\lambda)-1|<(1+U_\alpha)(1+U_\beta)\cdots(1+U_\lambda)-1,$$

因而

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots(1+u_\lambda)-1|<e^{U_\alpha+U_\beta+\cdots+U_\lambda}-1;$$

然級數 ΣU_i 既是收斂的,我們能取 n 有充分的大,使指標 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ 大於 n 時,和數 $U_\alpha+U_\beta+\cdots+U_\lambda$ 小於 $\log(1+\varepsilon)$.所以在 n 有充分的大時,以上的不等式的第二端能小於任何正數 ε.

我們略加觀察,可見一個絕對收斂的積,除非有一個因子等於零,總不能等於零.誠然,試假定積中沒有一個因子為零;我們選

擇n有充分的大,使無論p如何,都得着

$$\left|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\cdots(1+u_{n+p})-1\right|<\alpha,$$

α是一個小於1的正數.這是很明瞭的,無限積$\prod_{p=1}^{+\infty}(1+u_{n+p})$的模(module)必大於$1-\alpha$,結果,積數$P$是將此積乘以$P_n$,所以$P$不能等於零.

此層既已說明,設

(41)　　$(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)\cdots$

是一個絕對收斂的無限積,

(42)　　$(1+u'_0)(1+u'_1)\cdots(1+u'_n)\cdots$

是又一個無限積,此後者的因子和前者的因子都相同,但次序各異.此第二積也是絕對收斂的,這是因為級數$\Sigma U'_i$和級數ΣU_i都由相同的項所成的緣故.命此二積(41)及(42)的價值為P及P'.設P_n是(41)的n個在前因數的積,這些因子既都在積(42)內,我們能夠取一個數$m>n$,使積數P'_m含有P_n的一切因子.那末,我們有

$$\frac{P'_m}{P_n}=(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots(1+u_\lambda),$$

一切指標$\alpha,\beta,\cdots,\lambda$既都大於$n$,由方纔所見,我們能夠取$n$有充分的大,使

$$\left|\frac{P'_m}{P_n}-1\right|<\varepsilon,$$

ε如何小但不論,但是n增加無限時,m也是如此,$\frac{P'_m}{P_n}$的極限是$\frac{P'}{P}$,所以$P'=P$.

167. **均一收斂積.**——仍取無限積(33),其中$u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots$都是一個或多個變數$x,y,t,\cdots$的連續函數,這些函數能夠是實

數或幻數,這顯然包有$u_0, u_1, \cdots u_n, \cdots$都是一個幻數變數$z$的函數的場合.上節所定的級數$\Sigma v_n$,牠的和等於此無限積,若此級數在此領域內是均一收斂的,此無限積就說是均一收斂的.在此場合,積數P是自變數的連續函數.

若級數

$$(43)\qquad U_0+U_1+\cdots+U_n+\cdots$$

是均一收斂的,此無限積就是均一收斂的.誠然,仍取級數(35),我們有$v_{n+1}+\cdots+v_{n+p}=P_{n+p}-P_n=P_n\Big[(1+u_{n+1})\cdots(1+u_{n+p})-1\Big]$;牠一方面,我們有不等式

$$|P_n|<(1+U_0)(1+U_1)\cdots(1+U_n)<e^{U_0+U_1+\cdots+U_n},$$

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\cdots(1+u_{n+p})-1|<e^{U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots+U_{n+p}}-1.$$

然而級數(43)在領域D內是均一收斂的,牠表小於某一極限M的一個連續函數;我們能夠選擇一個數N有充分的大,在$n\geqq N$時,不論p如何,和數

$$U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots+U_{n+p}$$

在同一領域內常小於一個正數α.我們旣如此選擇n,所以必能得着

$$|v_{n+1}+\cdots+v_{n+p}|<e^M(e^\alpha-1).$$

這就表明級數Σv_n是均一收斂的,這是因爲無論ε如何小,我們必能選擇α使滿足條件$e^M(e^\alpha-1)<\varepsilon$的緣故.

注意.——對於無限積$\Pi(1+u_{mn})$,這兩個指標m, n都能夠由o變至∞,以上的一切特性很容易推廣到這些積上.若二重級數ΣU_{mn}是收斂的,以上的積就有一個確定價值,此價值不關係增加因子的數時所用的方法.一個絕對收斂的二重級數能夠由

無限的方法變為一個通常級數,同樣,以上的二重無限積能夠由無限的方法變為一個絕對收斂的單無限積,若一切項 u_{mn} 都是自變數 $x, y, \cdots,$ 的連續函數,又若是級數 ΣU_{mn} 在某一領域 D 內是均一收斂的,無限積 $\Pi(1+u_{mn})$ 就也是均一收斂的,牠在此領域內表 $x, y, \cdots$ 的連續函數.

168. **實數無限積.**——現在研究級列 $u_0, u_1, u_2, \cdots$, 有無某數負項的場合,仍取一個實因數的無限積

$$(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)\cdots$$

若是自某列以後,這些項 u_i 都在 -1 及 o 中間,我們即變為研究一個無限積形狀是

$$(1-v_0)(1-v_1)\cdots(1-v_n), \tag{44}$$

其中 $v_0, v_1, \cdots, v_n, \cdots$ 都是正且小於1.這是很明瞭的,在 n 增加無限時,此積 $(1-v_0)(1-v_1)\cdots(1-v_n)$ 下降並且常是正;所以在 n 增加無限時,牠漸近於一個極限;但是這個極限能夠是零或是一個正數.如果級數 Σv_i 是收斂的,無限積 (44) 就是絕對收斂的;所以積 $(1-v_0)(1-v_1)\cdots(1-v_n)$ 有一個極限不等於零 (n^o166).

欲知級數 Σv_i 是開發時如何,我們注意於 $1+x$ 常小於 e^x, 實數 x 的價值如何不論,這是因為函數 e^x-x-1 在 $x=o$ 時是最小的緣故,所以我們可寫為

$$1-v_0<e^{-v_0}, 1-v_1<e^{-v_1}, \cdots, 1-v_n<e^{-v_n},$$

因而

$$(1-v_0)(1-v_1)\cdots(1-v_n)<e^{-(v_0+v_1+\cdots+v_n)}.$$

和數 $v_0+v_1+\cdots+v_n$ 和 n 同時增加無限,所以此無限積等於

零.

在級列 $u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$ 具有無量數的正項及無量數的負項時,無限積只在公項 u_n 漸近於零時總能夠是收斂的不等於零 (n^0 165). 我們假定牠是如此:因爲最初的有限數的因數常可從畧,我們可假定積中所有因數都是正.那末,積 P_n 含有大於1的若干個因數及小於1的若干個因數;一個不定的場合是在 n 無限時大於1的因數的積增加無限,而小於1的因數的積漸近於零.此時無限積能夠是收斂的或開發的依情形而不同;然而和對於半收斂級數的同樣的推理(n^0 157),甚易證明在此等無限積中總能夠變置其因數的次第,使積 P_n 的極限等於一個任何預定在先的正數.

在級數 Σu_n 是收斂時,我們有一個簡趣的定規.<u>積 P_n 漸近於一個正數極限或漸近於零依級數 Σu_n^2 是收斂或開發而定.</u>

欲證明之,我們注意比

$$\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$$

在 x 漸近於零時其極限爲 $-\frac{1}{2}$;所以我們可寫爲

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}(1+\alpha),$$

只要 x 的絕對價值小於某一極限,α 的絕對價值就小於 $\frac{1}{2}$. u_n 既漸近於零,又因爲無限積可任意從某一因數起,我們可假定

$$\log(1+u_0)=u_0-\frac{u_0^2}{2}(1+\theta_0),$$

$$\log(1+u_1)=u_1-\frac{u_1^2}{2}(1+\theta_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\log(1+u_n)=u_n-\frac{u_n^2}{2}(1+\theta_n),$$

$\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_n$ 都在 $-\frac{1}{2}$ 及 $+\frac{1}{2}$ 中間.由此得

$$(45)\ \log P_n=u_0+u_1+\cdots+u_n-\frac{1}{2}u_0^2(1+\theta_0)-\cdots-\frac{1}{2}u_n^2(1+\theta_n);$$

若此兩個級數 Σu_n 及 Σu_n^2 都是收斂的,在 n 無限時 (45) 的第二邊漸近於一個確定極限,這是因為 $u_n^2(1+\theta_n)$ 是在 $\frac{u_n^2}{2}$ 及 $\frac{3}{2}u_n^2$ 中間的緣故,所以積 P_n 有一個極限不等於零.和此相反,若級數 Σu_n^2 是開發的公式 (45) 的第二邊漸至於常為負數而其絕對價值增加無限;所以 P_n 漸近於零.

由等式(45)又可見若級數 Σu_n 是開發的而級數 Σu_n^2 是收斂的,無限積是開發的或是零.但是要注意若二級數 Σu_n 及 Σu_n^2 都是開發時無限積仍能夠是收斂的.例如取 $u_0=u_1=u_2=0$,對於 $n>1$,

$$u_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}},\ u_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}},$$

級數 Σu_n 是開發的,這是因為和數 S_{2n} 大於

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

的緣故;同一理由,級數 Σu_n^2 也是開發的,但是無限積

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\cdots$$

是收斂的,這是因為 $2n-2$ 個因數的積等於

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

而 $2n-1$ 個因數的積等於以上的積乘以一個因數 $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,此因數的極限是1.

例.——1° 級數

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\cdots$$

是收斂的,其各項的平方所成級數也是如此;相應的無窮積

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdots$$

是收斂的;依瓦利斯(Wallis)公式此積等於$\frac{2}{\pi}$.若欲將此積變爲一個絕對收斂的積,只須將兩個連續因數合併爲一,即得

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

2° 設$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$是一個實數項級數,其兩個連續項的比是$n$的一個有理函數

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots}{n^p+b_1n^{p-1}+\cdots}$$

在n增加無限時此比漸近於1.

我們將此級數有一項等於零或無限大的場合暫置勿論,我們可寫爲

$$u_{n+1}=u_1\prod_{\nu=1}^{n}\left[1+\frac{a_1-b_1}{\nu}+\frac{\varphi(\nu)}{\nu^2}\right],$$

$\varphi(\nu)$是ν的一個有理函數,牠的絕對價值常小於一個定數.若是$a_1-b_1>o$,級數

$$\Sigma\left[\frac{a_1-b_1}{\nu}+\frac{\varphi(\nu)}{\nu^2}\right] \tag{46}$$

終至於是正,此級數是開發的;所以第一級數的公項u_{n+1}的絕對價值增加無限.若$a_1-b_1=o$,級數(46)是絕對收斂的,所以u_{n+1}漸近於一個極限不等於零.最後,若是$a_1-b_1<o$,級數(46)的所有項終至於都成爲負,此級數是開發的;所以在n無限時u_{n+1}

漸近於零.這些結果都是高斯 Gauss 所得(參閱 n^0 155).

169. **級數是無限的定準式.**——設 Σa_{ik} 是一個絕對收斂的二重級數,其中每一個指標 i, k 都由 $-\infty$ 變至 $+\infty$.我們設一個定準式

$$D_m=\begin{vmatrix} 1+a_{-m,-m} & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & a_{-m,m} \\ a_{-m+1,-m} & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & a_{-m+1,m} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{0,-m} & \cdots & 1+a_{0,0} & \cdots & a_{0,m} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m,-m} & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & 1+a_{m,m} \end{vmatrix}$$

積 $\Pi_m=\prod_{i,k}(1+|a_{ik}|)$,其指標 i, k 均由 $-m$ 變至 $+m$, Π_m 大於 $|D_m|$,這是因爲 D_m 的任一項的模皆是 Π_m 的一項,而 Π_m 又有其他的項通同是正.所以

$$|D_{m+p}-D_m|<\Pi_{m+p}-\Pi_m.$$

但是級數 $\Sigma|a_{ik}|$ 是收斂的,積 Π_m 在 m 無限時漸近於一個極限;所以在二數 m 及 $m+p$ 獨立的增加無限時, $\Pi_{m+p}-\Pi_m$ 漸近於零,因而差數 $D_{m+p}-D_m$ 也是如此.由此可見定準式 D_m 漸近於一個極限($n^0$5).

習　題

1. 若要一個無限積是收斂的不等於零,必須要也只須要對於一個任一正數 ε,能夠有一個整數 n 相應,使

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\cdots(1+u_{n+p})-1|<\varepsilon,$$

整數 p 如何不論.

2.* 正項級數$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$和級數$\frac{u_0}{S_0}+\frac{u_1}{S_1}+\cdots+\frac{u_n}{S_n}+\cdots$同時爲收斂或開發.

[我們可寫爲$\frac{S_0}{S_n}=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{u_i}{S_i}\right)$,再應用$n^0$ 168的定理].

3. 用兩個不同的方法計算一個二進表中各項的和,以證明公式

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots=\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots+\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\frac{q^2}{1+q^5}+\cdots=\frac{1}{1-q}-\frac{q}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}-\cdots,$$

$$\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\cdots=\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\cdots,$$

$$\frac{q}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^6}+\frac{5q^5}{1-q^{10}}+\cdots=\frac{q(1+q^2)}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3(1+q^6)}{(1-q^6)^2}+\frac{q^5(1+q^{10})}{(1-q^{10})^2}+\cdots,$$

$$\frac{\sqrt{q}}{1+q}-\frac{\sqrt{q^3}}{3(1+q^3)}+\frac{\sqrt{q^5}}{5(1+q^5)}-\cdots=\operatorname{arctang}\sqrt{q}-\operatorname{arctang}\sqrt{q^3}+\operatorname{arctang}\sqrt{q^5}-\cdots,$$

其中$|q|<1$.

4.* 設q是小於1的一個正數;命

$$Q_1=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n}),Q_2=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}),Q_3=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1});$$

證明公式

$$Q_1Q_2Q_3=1.$$

〔註一〕 參觀 Bertrand, Traité de calcul différentiel et intégral, t. I, p. 238; Journal de Liouville 1^{ire} série, t. VII, p. 385

〔註二〕 Ueber Convergenz von Reihen (Journal de crelle, t. 66, 1873, p. 835).

〔註三〕 Allgemeine Theorie der Divergenz. (Mathe matische Annalen t. XXV, 1890)

〔註四〕 Bois-Reymond 有一個收斂級數的例子,作者自謂必計算此級數的項數等於以立方分表地球體積之數,纔能得到此級數的總和的半.

〔註五〕 Zeitschrift für Mathematik und physik, t. X, 1832.

〔註六〕 Journal de Liouville, t. IV, 1838.

〔註七〕 Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha,\beta}{1.\gamma}x+\cdots$(*OEuvres* complétes, t. III, p. 138)

〔註八〕 Journal de crelle, t. 79.

第 九 章

整級數(series entieres).—三角級數

I.—戴勞的級數.—概論.

170. 戴勞的級數.——若一個函數$f(x)$牠的累次導來式所成的級列在區域$(a,a+h)$內是無窮的,第18節的公式(7)中的數n能任意假定有如何大;若n增加無限時,餘數R_n漸近於零,我們可寫爲

$$(1)\qquad f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a)+\cdots,$$

此公式表明級數

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\cdots+\frac{h^n}{1.2\cdots n}f^{(n)}(a)+\cdots$$

是收斂的,牠的和是$f(a+h)$。這是這個公式(1)成爲眞正戴勞公式.然而牠必須在n增大時,餘數R_n漸近於零方爲合法,至於普通公式(7)假定導來式的存在只至第$(n+1)$級.若用x代a,公式(1)又可寫爲

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x)+\cdots;$$

反之,令$a=o$,用x代h,就成爲

$$(2)\qquad f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\cdots+\frac{x^n}{1\ 2\cdots n}f^{(n)}(o)+\cdots$$

此後者也叫作馬克婁閑公式;然而這些公式實際上都是相同,公式(2)顯明x的一個函數依x的冪的展開式,公式(1)顯明h的一個函數依h的冪的展開式;自此式變爲彼式,只須變更一個記法.

有一個場合,範圍亦甚廣,在此場合我們能決定n增加無限時,餘數R_n漸近於零;這就是x在區域$(a,a+h)$內變化時各級的

導來式的絕對值都小於一個定數的M場合,誠然,我們有

$$|R_n| < M\frac{|h|^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)},$$

此式的第二端是一個收斂級數的公項,函數e^x, $\cos x$, $\sin x$就是如此;e^x的所有的導來式都等於e^x,結果,在所設區域內,牠們有相同的最大至於$\cos x$及$\sin x$的導來式,牠們的絕對值永不能大於1,所以公式(1)可以應用在此三個函數上,a及h的價值如何俱不論,我們但論公式(2);若$f(x)=e^x$,對於$x=o$,函數及牠的所有導來式都等於1;所以我們有展開式

$$(3)\qquad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots,$$

此式能應用在x的一切正或負的價值上,若a是一個任何正數我們有$a^x=e^{x\log a}$結果,

$$(4)\qquad a^x=1+\frac{x\log a}{1}+\frac{(x\log a)^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{(x\log a)^n}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots.$$

再取$f(x)=\sin x$;牠的累次導來式成爲一個循環敍列,(suite périodique)共有四項:$\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x$;對於$x=o$,這些導來式也成爲一個循環敍列$1, o, -1, o$.所以對於$x$的一切正或負的價值,我們都有

$$(5)\qquad \sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+1)}+\cdots$$

同樣

$$(6)\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}+\cdots.$$

再論普通場合.餘數R_n的討論,多不如在以上各例中的簡單;然而我們若注意如果此餘數漸近於零,級數

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a)+\cdots$$

必是收斂的,這個討論也就成爲較易.一般,在視察R_n以前,莫如先視察此級數是否是收斂的;若對於所設a及h的價值此級數是

開發的,就無須更加深求:我們决定n增加無限時R_n不漸近於零.

這個逆定理是不確實的.級數

$$f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\frac{x^2}{1\cdot2}f''(o)+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot2\cdots n}f^{(n)}(o)+\cdots$$

能夠是收斂的,然而牠並不表牠所自出的函數$f(x)$;以下的例子是高失所創.

設$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$;我們有$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$,一般,第$n$級的導來式的形狀是

$$f^{(n)}(x)=\frac{P}{x^{m}}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

P表一個多項式.對於$x=o$,這一切的導來式都等於零,這是因為$e^{-\frac{1}{x^2}}$及x的任何正冪的商必和x同時為零;誠然,若命$x=\frac{1}{z}$,我們可寫為

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{z^m}{e^{z^2}},$$

大家知道無論m如何大,$\frac{e^{z^2}}{z^m}$都和z同時增加無限.他一方面,設$\varphi(x)$是能應用公式(2)的一個函數

$$\varphi(x)=\varphi(o)+\frac{x}{1}\varphi'(o)+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot2\cdots n}\varphi^{(n)}(o)+\cdots.$$

我們命$F(x)=\varphi(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$;因得

$$F(o)=\varphi(o),\ F'(o)=\varphi'(o),\ \cdots,\ F^{(n)}(o)=\varphi^{(n)}(o),\cdots$$

那末,若用馬克婁蘭公式展開$F(x)$,此展開式卽和上式相同.如此所得的級數的和所表的函數和產生此級的函數截然不同.

一般,若對於$x=o$,兩個函數$f(x)$及$\varphi(x)$相等,牠們的各級導來式又相等,然此二函數並不恆等,牠們兩個必不能都為馬克婁蘭公式展開,這是因為對於此二函數展開式中的係數必都相同的緣故.

171. **二項式的公式.**——再取函數$(1+x)^m$爲最後一例,只要$1+x$是正,此函數及牠的各級的導來式就都是連續的.相應的級數(2)是

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots n}x^n+\cdots,$$

若$|x|>1$,除卻m是正整數外,此級數都是開發的.x在-1及$+1$中間時,若要証明餘數R_n漸近於零,我們可將此餘數寫爲有定積分的形狀(n°85)

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^x F^{(n+1)}(z)(x-z)^n dz$$

$$=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!}\int_0^x (1+z)^{m-1}\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^n dz.$$

在z自0變至x時,$(1+z)^{m-1}$常小於一個最大限M,此最大限不關係n.商數$\frac{x-z}{1+z}$的絕價值常小於x,這是因爲若令$z=\theta x$,即得

$$\frac{x-z}{1+z}=x\frac{1-\theta}{1+\theta x},$$

θ自0漸增至1時,x的係數常小於1.由此可見R_n的絕對值常小於一個收斂級數的公項.

結果,對於x在-1及$+1$間的一切價值,我們都有

$$(7)\qquad (1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots n}x^n+\cdots.$$

同一方法可得展開式

$$(8)\qquad \log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

此式對於$-1<x\leqq1$有效.

除以上的例子及幾個其他的例子以外,因爲累次導來式逐漸複雜,所以餘數的討論倍極困難.那末,驟然看來,戴劳公式對於一個函數的展開級數,似乎用途極狹.殊不知這個觀察絕對不確,

這些展開式在近世解析學上實負有主要任務,然欲見牠們的重要,必須置身於他一觀點,但就整級數自身上研究牠們的特性,並不必問此等級數的根源.

II. ——一個自變數的整級數.

現在我們對於一個或多個自變數的整級數作一個直接研究,自然這些級數都是能由戴勞公式得來的.雖說我們只論實自變數,然而若將所有名詞「絕對值」改作「模 module」,一切的推理都自然能推廣到虛自變數上.

172. **收斂區域.**——先取一個級數

$$A_0+A_1X+A_2X^2+\cdots+A_nX^n+\cdots, \tag{9}$$

其中係數$A_0, A_1, A_2, \cdots$都是正,又假定自變數X只能有正值.我們將一切正數分為兩類:若一個正數X使級數(9)是收斂的,我們將此數歸入(α)類,若此數X使級數(9)是開發的,我們將此數歸入(β)類.先假定這兩類的數都存在.因為級數(9)中每一項,只要牠的係數不為零,牠都和X同時增長,顯然可見(α)類中的任一數都小於(β)類中的任一數,所以有一個數$R>o$存在($n^o 2$),凡大於R的一個數X都使級數(9)開發,凡小於R的一個正數X都使級數(9)收斂.若置此數R於X的地位,或成一收斂級數或成一開發級數.

兩類中能夠有一類(α)或(β)不存在:

1° 若(β)類中沒有一個數存在,無論X如何,級數(9)都是收斂的,我們說R是無限,例如級數

$$1+\frac{X}{1}+\frac{X^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{X^n}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots.$$

2° 若(α)類中沒有一個正數存在,除$X=o$外,級數(9)都是開

發的,我們說 $R=o$,例如級數

$$1+X+1\cdot 2X^2+\cdots+1\cdot 2\cdots nX^n+\cdots$$

現在取一個整級數

$$(10)\qquad a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

其中係數 a_i 及變 x 數的符號都能夠是任何的.自此以後,我們令 $A_i=|a_i|$, $X=|x|$, 如此,級數(9)就是級數(10)的各項的絕對值所成,設 R 是方纔對於級數(9)所定的數,由 R 的定義,可見若 x 的價值在 $-R$ 及 $+R$ 中間,級數(10)就是絕對收斂的.我們只須表明 x 的絕對值大於 R 時,級數(10)是開發的.這一層是源於阿伯耳 Abel 的一個根本命題:〔註一〕若對於一個特別價值 x_0,級數(10)是收斂的,對於 x 的絕對值小於 $|x_0|$ 時,此級數就都是絕對收斂的.

誠然,對於 $x=x_0$,級數(10)既假定是收斂的,我們取一個正數 M,牠大於級數(10)中任一項的絕對值,使無論 n 如何,都得着

$$A_n|x_0|^n<M.$$

我們可寫為

$$A_nX^n=A_n|x_0|^n\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n<M\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n;$$

所以若令 $X<|x_0|$,級數(9)就是收斂的,卽此可証明定理.

此層既經說明,若對於 $x=x_0$,級數(10)是收斂的,可見只須要 X 小於 $|x_0|$,級數(9)就也是收斂的.所以不能夠 $|x_0|>R$,因為如果如此,R 就不是 X 令級數(9)收斂的價值的上限.

約而言之,對於一個整級數(10),牠的一切係數的符號是任何的,必有一個數 R 存在,此數 R 具有以下的特性:對於 x 在 $-R$ 及 $+R$ 中間的一切價值,級數(10)是絕對收斂的,對於 x 的絕對值大於 R 時,級數(10)是開發的.區域 $(-R,+R)$ 叫作收斂區域.若 R 的

極限是無限,此區域即擴充自 $-\infty$ 到 $+\infty$;若 $R=o$,此區域縮簡在原點我們以後,置此一個特別場合不論.

對於極限價值 $x=R$, $x=-R$, 以上的証明法,不能使我們有若何的決定,在此時,級數(10)能夠是絕對收斂的,單收斂的,或開發的.

例如以下的三個級數

$$1+\sum_{p=1}^{+\infty}x^p,\quad 1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p},\quad 1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p^2};$$

對於此三個級數 R 都等於 1, 這是因為任一項和牠的前項的比的極限等於 x 的緣故.第一級數對於 $x=\pm 1$ 是開發的,第二級數對於 $x=1$ 是開發的,對於 $x=-1$ 是收斂的,第三級數對於 $x=\pm 1$ 都是絕對收斂的.

注意.—— 阿伯耳的定理能夠推廣,誠然,由推理的結果,我們只須假定級數

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots$$

的任一項的絕對值常小於一個定數,若能如此,對於 x 的絕對值小於 $|x_0|$ 時,級數(10)就是絕對收斂的.

此數 R 和第152節所定的數 ω 有極簡的關係式, ω 是敘列

$$A_1,\ \sqrt[2]{A_2},\ \sqrt[3]{A_3},\ \cdots,\ \sqrt[n]{A_n}\ \cdots$$

的一切項的最大極限,誠然,試取敘列

$$A_1X,\ \sqrt[2]{A_2X^2},\ \cdots,\ \sqrt[n]{A_nX^n},\ \cdots,$$

牠的所有項的最大極限是 ωX. 那末,若是 $X<\frac{1}{\omega}$, 級數(9)就是收斂的;若是 $X>\frac{1}{\omega}$, 級數(9)就是開發的;結果 $R=\frac{1}{\omega}$.(註二)

173. 一個整級數的連續性.——設有一個整級數,牠在$(-R, +R)$區域內是收斂的,我們用$f(x)$表牠的和

(11) $$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

設R'是小於R的一個正數,我們先証明級數(11)在$(-R', +R')$區域內是均一收斂的.誠然,若x的絕對值不過於R',級數中任一項的絕對值$|a_nx^n|$,至多等於收斂級數

$$A_0+A_1R'+\cdots+A_nR'^n+\cdots$$

的相應項.

因此,對於變數在$-R$及$+R$中間的一切價值,級數(11)的和$f(x)$是x的一個連續函數.誠然,對於一個數x_0牠的絕對值小於R,顯然可見我們能夠求得另一正數R',小於R而大於$|x_0|$.由以上所見,此級數在$-R'$及$+R'$區域內是均一收斂的,所以對於此區域內的價值x_0,和數$f(x)$是連續的.

在收斂區域的界限$-R$及$+R$上,以上的証明不能應用.然只要級數是收斂的,這個連續性仍然存在.誠然,阿伯耳曾証明:對於$x=R$,若級數(10)是收斂的,此級數的和是x由小於R而漸近於R時級數$f(x)$的和所漸近的極限.

我們只須証明級數(11)在區域(o, R)內是均一收斂的,極限$x=R$亦在內.誠然,設ε是一個任意正數,我們選擇一個整數n有充分的大,使

$$|a_{n+1}R^{n+1}+a_{n+2}R^{n+2}+\cdots+a_{n+p}R^{n+p}|<\varepsilon,$$

p如何不論;這是必可能的,因為由假定級數(10)對於$x=R$是收斂的緣故.設x是小於R的一個正數;我們可寫為

$$a_nx^n=a_nR^n\times\left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

應用阿伯耳的預定理($n^{\circ}74$),並注意於 $\frac{x}{R}$ 的相績乘冪成爲一個下降級列,所以不論 p 如何我們有

$$|a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_{n+p}x^{n+p}|<\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}<\varepsilon;$$

此不等式和以上的不等式併從,表明級數(10)在(o,R)全區域內是均一收斂的,那末,此級數對於區域的上限是連續的,這是因爲自第29至第30節的証法能應用在收斂區域的極限上,只要級數在全區域內是均一收斂的,極限亦在內.

同法可見若級數(11)對於$x=-R$是收斂的,對於$x=-R$此級數的和是fx漸近於$-R$時和數$f(x)$所漸近的極限,況且我們只須要將x代以$-x$卽變爲第一場合.

應用. —— 這個命題能補足關於兩個級數的乘法的定理($n^{\circ}160$).設

$$S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

$$S'=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

是兩個收斂級數,沒有一個是絕對收斂的,由乘法的定規所得級數

$$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+\cdots+(u_0v_n+\cdots+u_nv_0)+\cdots$$

能夠是收斂的或開發的;但是牠若是收斂的,牠的和 Σ 就等於兩個原級數的和的積,$\Sigma=SS'$.誠然,試取三個整級數

$$f(x)=u_0+u_1x+\cdots+u_nx^n+\cdots,$$

$$\varphi(x)=v_0+v_1x+\cdots+v_nx^n+\cdots,$$

$$\psi(x)=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)x+\cdots+(u_0v_n+\cdots+u_nv_0)x^n+\cdots;$$

由假定在$x=1$時此三個級數都是收斂的,因而x在 -1 及 $+1$

中間時,此三個級數都是絕對收斂的.對於 x 的這些價值,高失關於級數的乘法的定理可以應用,我們得關係式

(12) $$f(x)\varphi(x)=\psi(x);$$

但是在 x 漸近於1時,依阿伯耳定理, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 各漸近於極限 S, S', Σ. 公式(12)的兩邊常常相等,所以在極限上我們有 $\Sigma=SS'$.

對於虛數項的級數此定理仍爲確實,其證法亦同.

174. **一個整級數的累次導來式.**——設有一個整級數

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

牠在區域 $(-R,+R)$ 內是收斂的.逐項微分此級數,即得一個新整級數

(13) $$a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

此後者在此同一區域內也是收斂的.要證明這一層,只要表明絕對值所成級數

(14) $$A_1+2A_2X+\cdots+nA_nX^{n-1}+\cdots$$

對於 $X<R$ 時是收斂的,對於 $X>R$ 時是開發的.

要證明第一部分,假定 $X<R$,設 R' 是在 X 及 R 間的一個數 $X<R'<R$. 輔助級數

$$\frac{1}{R'}+\frac{2}{R'}\frac{X}{R'}+\frac{3}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^2+\cdots+\frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^{n-1}+\cdots$$

是收斂的,這是因爲一項和前項的比的極限是 $\frac{X}{R'}$,此數小於1. 將此級數的各項各乘以因子

$$A_1R',\ A_2R'^2,\ \cdots,\ A_nR'^n,\ \cdots,$$

R' 旣小於 R,這些因子都小於一個定數,可見所得的新級數

$$A_1+2A_2X+\cdots+nA_nX^{n-1}+\cdots$$

仍是收斂的.

同法可證第二部分.若X_1大於R,假令級數

$$A_1+2A_2X_1+\cdots+nA_nX_1^{n-1}+\cdots$$

是收斂的,級數

$$A_1X_1+2A_2X_1^2+\cdots+nA_nX_1^n+\cdots$$

也是如此,結果,級數$\sum_1^{+\infty}\Sigma A_nX_1^n$牠的每一項都小於上列級數的相應項,就也是收斂的,$R$就不是$X$能令級數(9)收斂的價值的上限.

整級數(14)的和$f_1(x)$是x在此同一區域內的連續函數.此級數既在區域$(-R',+R')$內$(R'<R)$是均一收斂的,牠在此區域內表$f(x)$的導來式(n^o30).然而R'能夠任意近於R,我們決定對於x在$-R$及$+R$中間的一切價值,函數$f(x)$有一個導來式,牠是將$f(x)$逐項微分得來的級數

(15) $$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots.$$

對於此整級數仍用以上的推理,我們決定$f(x)$有一個第二級導來式

$$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots,$$

餘類推.在$(-R,+R)$區域內$f(x)$有一個無限敘列的導來式,牠們都是逐項微分得來的級數

(16) $$f^{(n)}(x)=1\cdot2\cdots na_n+2\cdot3\cdots n(n+1)a_{n+1}x+\cdots.$$

若在這些公式中令$x=o$,即得

$$a_0=f(o),\ a_1=f'(o),\ a_2=\frac{f''(o)}{2},\cdots,$$

一般,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(o)}{1\cdot2\cdots n},$$

總之，$f(x)$的展開式和由馬克斐蘭公式所得的展開式恒同，

$$f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot2}f''(o)+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot2\cdots n}f^{(n)}(0)+\cdots.$$

除相差些數字的因子外，係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都等於$f(x)$及牠的累次導來式在$x=o$的價值，顯然可見將一個函數展開爲整級數只有一個可能的方法。

同樣將一個整級數逐項積分，即得一個新整級數，和若一個任意常數項，此級數在第一級數的收斂區域內是收斂的，牠以第一級數爲導來式，再求積分，即又得一個新級數，牠兩首項的係數是任意的，餘類推。

例。——1^0 對於x在 -1 及 $+1$ 間的一切價值，一個公比式 $-x$ 的幾何級數

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$$

是收斂的，牠的和是 $\frac{1}{1+x}$。在極限o及x $(|x|<1)$ 間逐項積分，即復得$\log(1+x)$的展開式(n^0171)

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots;$$

因爲第二端的級數在$x=1$時仍是收斂的，所以此公式對於$x=1$仍是確實。

2^0 對於x在 -1 及 $+1$ 間的一切價值，我們有

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^nx^{2n}+\cdots,$$

在極限o及x $(|x|<1)$ 間逐項積分，得

$$\operatorname{arctang}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

此級數在$x=1$時仍是收斂的,因而決定恆等式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots.$$

3^0 設$F(x)$是以下的收斂級數的和

$$F(x)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}x^p+\cdots,$$

m是一個任何數,$|x|<1$. 由此級數得

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)}x^{p-1}+\cdots\right]$$

若用$1+x$乘此式的兩端,又將x的兩個同冪項集合,依恆等式

$$\frac{(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)}+\frac{(m-1)\cdots(m-p)}{1\cdot 2\cdots p}=\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}$$

可見

$$(1+x)F'(x)=m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}x^p+\cdots\right]$$

就是

$$(1+x)F'(x)=mF(x).$$

此關係可寫爲

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{m}{1+x},$$

由此得$F(x)$的形狀是

$$F(x)=C(1+x)^m.$$

要定常數C,只須注意$F(o)=1$,即得$C=1$,我們復得$(1+x)^m$的展開式($n^0 171$)

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}x^p+\cdots.$$

4^0 在以上的公式中,用$-x^2$代x,用$-\frac{1}{2}$代m;得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}x^{2n}+\cdots,$$

此公式對於 x 在 -1 及 $+1$ 間的一切價值都有效.在極限 o 及 x ($|x|<1$) 間積分此式的兩端,得 $\arcsin x$ 的展開式

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

175. **第二證法.** —— 整級數所表函數的特性能夠由更爲淺近的方法證明.設 x_0 是在 $-R$ 及 $+R$ 中間的一個數,x_1 是 x_0 的一個相近的數,此數也在此區域內.若要證明在 x_0 固定,x_1 漸近於 x_0 時,差數 $f(x_1)-f(x_0)$ 漸近於零,我們可將表 $f(x_0)$ 及 $f(x_1)$ 的級數逐項相減,因得

$$f(x_1)-f(x_0)=a_1(x_1-x_0)+a_2(x_1^2-x_0^2)+\cdots+a_n(x_1^n-x_0^n)+\cdots.$$

此新級數的公項可以寫爲

$$a_n(x_1-x_0)(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1}).$$

欲得此項的絕對值的上限,我們用 l 表小於 R 大於 $|x_0|$ 的一個正數,因爲當令 x_1 漸近於 x_0,我們又假定 $l>|x_1|$. 那末,積數 $x_1^{n-1}, x_1^{n-2}x_0, \cdots$ 中任一個的絕對值都小於 l^{n-1},因而以上的公項的絕對值必小於 $nA_nl^{n-1}|x_1-x_0|$. 所以

$$|f(x_1)-f(x_0)|<|x_1-x_0|(A_1+2A_2l+\cdots+nA_nl^{n-1}+\cdots);$$

然而 $l<R$, 括弧內的級數是一個收斂級數 ($n^o 174$). 所以差數 $f(x_1)-f(x_0)$ 和 x_1-x_0 同時爲零,函數 $f(x)$ 在 $-R$ 及 $+R$ 間一切點上都是連續的.

要證 $f_1(x)$ 是 $f(x)$ 的導來式,只須顯明在 x_1 漸近 x_0 時差數

$$D=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-f_1(x)$$

漸近於零.由方纔所見,商數$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$等於收斂級數

$$a_1+a_2(x_1+x_0)+\cdots+a_n(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})+\cdots.$$

自此級數中減去表$f_1(x_0)$的級數,即得表D的一個級數,牠的公項能夠寫爲

$$a_n[(x_1^{n-1}-x_0^{n-1})+(x_1^{n-2}x_0-x_0^{n-1})+\cdots+(x_1x_0^{n-2}-x_0^{n-1})],$$

其中每一個差數$x_1^{n-1}-x_0^{n-1}$, $x_1^{n-2}x_0-x_0^{n-1}$, $\cdots$都是x_1-x_0乘以許多積數$x_1^px_0^q$, p及q都是正整數,牠們的和等於$n-2$.這些積的總數顯然是

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

牠們每一個的絕對值都小於l, l的意義仍和前相同.所以

$$|D|<\frac{|x_1-x_0|}{2}[2A_2+6A_3l+\cdots+n(n-1)A_nl^{n-2}+\cdots],$$

若l是小於R的一個正數,括弧內的級數就是收斂的,這是因爲此級數是整級數$f_2(x)$的模(modules)級數,$f_2(x)$是從$f_1(x)$逐項微分得來的結果,x_1漸近於x_0時,D漸近於零.

176 **戴勞公式的推廣.**——設$f(x)$是在區域$(-R,+R)$內一個收斂整級數的和,x_0是在區域內的一點,x_0+h是區域內另一點,$|x_0|+|h|<R$.級數

$$a_0+a_1(x_0+h)+a_2(x_0+h)^2+\cdots+a_n(x_0+h)^n+\cdots$$

的和是$f(x_0+h)$,若將(x_0+h)的各冪展開,又將關於h爲同次各項寫在一行,即得一個二進級數(serie à double entrée)

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad & a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots\\
&+a_1h+2a_2x_0h+\cdots+na_nx_0^{n-1}h+\cdots\\
&+a_2h^2+\cdots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_nx_0^{n-2}h^2+\cdots\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

這個二進級數是絕對收斂的,誠然,若將每一項都用牠的絕對值替代,即得一個新的二進正項級數

$$(18)\qquad \begin{aligned}&A_0+A_1|x_0|+A_2|x_0|^2+\cdots+A_n|x_0|^n+\cdots\\&+A_1|h|+2A_2|x_0||h|+\cdots+nA_n|x_0|^{n-1}|h|+\cdots\\&+A_2|h|^2+\cdots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A_n|x_0|^{n-2}|h|^2+\cdots\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

若依豎行作此表的原質的和,即得級數

$$A_0+A_1[|x_0|+|h|]+\cdots+A_n[|x_0|+|h|]^n+\cdots$$

此級數是收斂的,這是因為 $|x_0|+|h|<R$ 的緣故.所以作表(17)中各原質的和時,可以依橫行也可以依豎行計算.若依豎行計算,即復得 $f(x+h)$;若依橫行計算,所得結果即依 h 的冪排列,$h, h^2, \cdots$ 的係數各等於 $f'(x_0), \dfrac{f''(x_0)}{1\cdot 2}, \cdots$.所以若假定 $|h|<R-|x_0|$,我們可寫為

$$(19)\qquad f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x_0)+\cdots.$$

公式(19)自然能應用在 $x_0-R+|x|$ 至 $x_0+R-|x_0|$ 區域內,然而第二端的級數也能夠在一個更廣的區域內是收斂的.例如函數 $(1+x)^m$,m 不是一個正整數,依 x 的升冪的展開式,在 $x=-1$ 及 $x=+1$ 間有效.設 x_0 是 x 在區域內的一個價值,我們可寫為

$$(1+x)^m=(1+x_0+x-x_0)^m=(1+x_0)^m[1+z]^m$$

其中 $z=\dfrac{x-x_0}{1+x_0}$,依 z 的冪展開級數 $(1+z)^m$.這個新展開式對於 $|z|<1$ 有效,就是對於 x 在 -1 及 $1+2x_0$ 中間有效.若 x_0 是正,新區域就大於原區域 $(-1,+1)$,結果,由新公式,對於變數 x 在原區域以外的價值,也能計算函數的價值.本此注意更加深求,即得一個極關重要的觀念,就是<u>解析的延長</u>(prolongement analytique),我們

將這個研究留在第二册.

注意.——對於變數x的正冪的展開式所証的定理,不難推廣在依$x-a$的正冪級數上,一般,這些特性也可以推廣在依一個連續函數$\varphi(x)$的正冪級數上.我們只須將這些級數看作合成函數(fonctions composees),將$\varphi(x)$看作居間函數.例如依$\frac{1}{x}$的正冪級數,在x的絕對值超過某一極限時是收斂的,對於變數的這些價值牠表一個連續函數.試取函數$\sqrt{x^2-a}$,我們可寫爲$\pm x\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$;對於$x$的絕對值大於$\sqrt{a}$時,$\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$能夠依$\frac{1}{x^2}$的冪展開,如此即得公式

$$\sqrt{x^2-a}=x-\frac{1}{2}\frac{a}{x}-\frac{1}{2\ 4}\frac{a^2}{x^3}-\cdots-\frac{1\ 3\cdots(2p-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2p}\frac{a^p}{x^{2p-1}}\cdots$$

此式在$x>\sqrt{a}$時是$\sqrt{x^2-a}$的展開式.若$x<-\sqrt{a}$,此級數仍是收斂的,牠的和是$-\sqrt{x^2-a}$.這個公式可用以求一個整數的平方根的展開式,只要假定已知道直接大於牠的那個完全平方.

177. 大函數.(fonctions majorantes).——由以前所証的特性,可見在多項式及整級數間有許多的相似點.設有許多整級數$f_1(x)$, $f_2(x)\cdots$, $f_n(x)$,設$(-r,+r)$是這些級數的收斂區域中的最小的,只要$|x|<r$,這些級數就都是絕對收斂的,我們能夠由加法及乘法將牠們任意組合和多項式相同.一般,凡含$f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$的一個多項式都能夠在同一區域內展開爲一個收斂的整級數.

要推廣這些特性,我們先定出幾個術語,牠們以後是常用的.設$f(x)$是一個整級數

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

設$\varphi(x)$是另一個整級數

$$\wp(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n+\cdots,$$

係數α_i都是正,牠在一個適當區域內是收斂的,若每一係數是α_n都大於或至少等於$f(x)$的相應係數的絕對值,

$$|a_0|\leqq\alpha_0,\quad |a_1|\leqq\alpha_1,\quad\cdots,\ |a_n|\leqq\alpha_n,\cdots$$

我們就說$\wp(x)$是$f(x)$的大函數,依班加來(Poincaré)氏所提的記法,我們表二函數$f(x)$及$\wp(x)$間的這個關係:

$$f(x)\ll\wp(x).$$

大函數在推理上的效益,基於以下的特性,這個特性就是由牠的定義直接得來的結果:設$P_n(a_0,a_1,\cdots,a_n)$是一個多項式,牠關係$f(x)$的在前的$n+1$個係數,牠的係數都是正實數,若在此多項式中將$a_0,a_1,\cdots,a_n$各代以大函數$\wp(x)$中的相應係數,顯然可見

$$|P(a_0,a_1,\cdots,a_n)|\leqq P(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_n).$$

例如$\wp(x)$是$f(x)$的一個大函數,表$[\wp(x)]^2$的級數就是$[f(x)]^2$的大函數,…,一般,$[\wp(x)]^n$是$[f(x)]^n$的大函數.同樣,若$\wp$及$\wp_1$各是f及f_1的大函數,積數$\wp\wp_1$就是ff_1的大函數,….

若已知一個整級數$f(x)$在$(-R,+R)$區域內是收斂的,求一個大函數是一個不定的問題,然由推理的結果,我們選擇一個大函數愈簡單愈便利,設r是一個正數,牠小於R,然要和R如何相近都可以,所設級數對於$x=r$既是絕對收斂的,設M是此級數的各項的絕對值的上限,無論n如何,我們都有

$$|a_n|=A_n\leqq\frac{M}{r^n}.$$

所以公項是$M\dfrac{x^n}{r^n}$的一個級數

$$M+M\frac{x}{r}+\cdots+\frac{Mx^n}{r^n}+\cdots=\frac{M}{1-\frac{x}{r}}$$

是 $f(x)$ 的一個大函數;就是這個函數我們常常援用.若 $f(x)$ 不含有常數項,我們可取函數

$$\frac{M}{1-\frac{x}{r}}-M$$

爲大函數.若取小於 R 的一個任何數爲 r,顯然可見相應數 M 和 r 同時漸減,然若是 A_0 不等於零,M 總不能小於 A_0.在此場合,我們總可以求得一個正數 $\rho<R$,使函數 $\dfrac{A_0}{1-\frac{x}{\rho}}$ 是 $f(x)$ 的一個大函數,誠然,設

$$M+M\frac{x}{r}+M\frac{x^2}{r^2}+\cdots+M\frac{x^n}{r^n}+\cdots,$$

其中 $M>A_0$,此級數是 $f(x)$ 的第一個大函數,我們取一個數 ρ 小於 $r\frac{A_0}{M}$;假定 $n\geqq 1$,我們可寫爲

$$|a_n\rho^n|=|a_nr^n|\times\left(\frac{\rho}{r}\right)^n<M\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1},$$

所以 $|a_n\rho^n|<A_0$; 他一方面 $|a_0|=A_0$,所以級數

$$A_0+A_0\frac{x}{\rho}+A_0\frac{x^2}{\rho^2}+\cdots+A_0\frac{x^n}{\rho^n}+\cdots$$

是 $f(x)$ 的一個大函數.這個特性我們以後將應用.一般,我們可取大於或至少等於大於 A_0 的一個數爲 M.

同樣,在 $a_0=o$ 的場合,我們可取

$$\frac{\mu x}{\rho-x}$$

爲大函數,μ 是一個任意正數.

注意.——若已知一個下降的幾何級數是大函數,即能約略知道將級數的和 $f(x)$ 代以其 $n+1$ 個首項的和所得的近似程度(參觀 n^o151,注意 II).

178. 一個級數換置在他一級數.——設

(20) $$z=f(y)=a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n+\cdots$$

是依變數y的冪所成的級數,祇在$|y|<R$時是收斂的.他一方面,設

$$y=\varphi(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots \tag{21}$$

是在區域$-R$至$+R$中間的一個收斂級數.試想自公式(21)取y的價值代入級數(20)中,由此卽得一個二進的表

$$\begin{array}{llll} a_0+a_1b_0 & +a_2b_0^2 & +\cdots+a_nb_0^n+\cdots \\ +a_1b_1x & +2a_2b_0b_1x & +\cdots+na_nb_0^{n-1}b_1x+\cdots \\ +a_1b_2x^2 & +a_2(b_1^2+2b_0b_2)x^2+\cdots & \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{array} \tag{22}$$

我們試考慮此表是否絕對收斂的.若要如此,首先須要的是第一橫行所成的級數

$$a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\cdots$$

是絕對收斂的,或是說$|b_0|<R$.這個條件是充足的.誠然,如果這個條件能滿足,我們可取一個算式$\dfrac{m}{1-\frac{x}{\rho}}$爲$\varphi(x)$的大函數,其中$m$是大於$|b_0|$的一個任何正數,$\rho<r$;所以我們能假定$m<R$.函數$f(y)$自己也有一個大函數,形狀是

$$\frac{M}{1-\frac{y}{R'}}=M+M\frac{y}{R'}+M\frac{y^2}{R'^2}+\cdots.$$

若在此最後級數中用$\dfrac{m}{1-\frac{x}{\rho}}$代$y$,又依二項式公式將$y$的各冪依$x$的升冪展開,卽得一個新的二進表

$$\begin{array}{l} M+M\left(\dfrac{m}{R'}\right)+\cdots+M\left(\dfrac{m}{R'}\right)^n+\cdots \\ \quad +M\dfrac{m}{R'}\dfrac{x}{\rho}+\cdots+nM\left(\dfrac{m}{R'}\right)^n\dfrac{x}{\rho}+\cdots \\ \quad +\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{23}$$

這一切係數都是正,他們的絕對值又都大於表(22)中的相應係數,這是因爲表(22)中的每一個係數都是由加法及乘法自係數 $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_0, b_1, b_2, \cdots$, 得來的緣故,所以若二進級數(23)是絕對收斂的,二進級數(22)就也是如此,在級數(23)中用 x 的絕對值代 x, 若要如此所得的表是收斂的,必須要由同一豎行各項所成的級數是收斂的,就是說 $|x|<\rho$. 這個條件滿足以後,第 $(n+1)$ 豎行中各項的和是

$$M\left[\frac{m}{R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n,$$

所以又須要

$$m<R'\left[1-\frac{|x|}{\rho}\right],$$

就是

$$|x|<\rho\left(1-\frac{m}{R'}\right). \tag{24}$$

最後的不等式(24),連帶得着以前不等式 $|x|<\rho$, 所以若要二進級數(23)是絕對收斂的, $|x|<\rho$ 是必要且充足的條件,因而二進級數(22)在 x 的價值能滿足這個條件時也是絕對收斂的;我們注意 x 的這些價值都能令級數 $\wp(x)$ 收斂,並且 y 的相應價值的絕對值必小於 R', 這是因爲不等式

$$|\wp(x)|<\frac{m}{1-\frac{|x|}{\rho}}, \qquad \frac{|x|}{\rho}<1-\frac{m}{R'}$$

連帶得着不等式 $|\wp(x)|<R'$ 的緣故.若依豎行相加,作級數(22)的和,卽得

$$a_0+a_1\wp(x)+a_2[\wp(x)]^2+\cdots+a_n[\wp(x)]^n+\cdots,$$

就是 $f[\wp(x)]$; 反之,若依橫行相加,卽得一個 x 的升冪級數,我們可寫爲

$$(25)\qquad f[\varphi(x)]=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

這些係數$c_0, c_1, c_2, \cdots$由此二級數的係數表明,牠們的關係式是

$$(26)\quad\begin{cases} c_0=a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\cdots+a_nb_0^n+\cdots, \\ c_1=a_1b_1+2a_2b_1b_0+\cdots+na_nb_0^{n-1}b_1+\cdots, \\ c_2=a_1b_2+a_2(b_1^2+2b_0b_2)+\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

關係式(25)的成立,本假定是x滿足條件(24),然而牠只是這個關係式的有效區域的一個最小限度,這個關係式很能夠存在於一個更加寬廣區域以內,這個問題要完全解決,必須研究一個虛變數,以後再討論牠.

特別場合.——1⁰在不等式(24)中的數R'能夠假定距R如何近都可以,所以只要$|x|<\rho\left(1-\frac{m}{R}\right)$,公式(25)即能應用,此層已經說明,若無論$y$如何,級數(20)都是收斂的,我們可假定$R$爲無限,$\rho$距$r$如何近都可以,所以只要$|x|<r$,公式(25)卽能應用,就是說此公式能和公式(21)應用在相同區域內,特別的,若無論x如何,級數$\varphi(x)$都是收斂的,我們又可以假定r爲無限,公式(25)對於x的任何價值都存在.

2⁰　若級數(21)中的常數項b_0爲零,我們可取一個式子

$$\frac{m}{1-\frac{x}{\rho}}-m$$

爲$\varphi(x)$的大函數,其中$\rho<r$,m能夠是任何數,和普通場合同一推理,我們可證明只要

$$(27)\qquad |x|<\rho\,\frac{R'}{R'+m},$$

公式(25)卽能應用,R'距R如何近都可以,此最後不等式所表區域廣於普通條件(24)所表區域.

在實用上這個場合時常發現,此時不等式$|b_0|<R$自行滿足,因之係數c_n只關係$a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$,

$$c_0=a_0,\ c_1=a_1b_1,\ c_2=a_1b_2+a_2b_1^2, \cdots,\ c_n=a_1b_n+\cdots+a_nb_1^n.$$

例.— 高失曾顯明二項式公式能自$\log(1+x)$的展開式演出.誠然,我們可寫為

$$(1+x)^\mu=e^{\mu\log(1+x)}=e^y=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1\cdot 2}+\cdots,$$

其中

$$y=\mu\log(1+x)=\mu\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots\right);$$

將第二級數代入第一級數內,得

$$(1+x)^\mu=1+\mu\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)+\frac{\mu^2}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2+\cdots.$$

這是很明瞭的,將第二邊依x的冪排列,x^n的係數是關於μ的一個n級的多項式,命之為$P_n(\mu)$.此多項式對於$\mu=0, 1, 2, \cdots, n-1$時成為零,對於$\mu=n$時成為1,即此可決定.

$$P_n=\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}.$$

2° 設$z=(1+x)^{\frac{1}{x}}$,x在-1及$+1$中間.我們可寫為

$$z=e^y=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1\cdot 2}+\cdots$$

其中

$$y=\frac{1}{x}\log(1+x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n+1}+\cdots.$$

第一個展開式不論y如何都有效;第二個展開式惟對於$|x|<1$時有效.所以將第二展開式代入第一所得的公式能應用在x在-1及$+1$中間的一切價值上.

茲但將首二項寫明,我們有

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{x}{2}\left(1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots\right)+\cdots$$

$$=e-\frac{e}{2}x+\cdots.$$

所以在 x 由正值漸近於零時，$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 上升而漸近於 e.

179. **整級數的除法.**——設有一個整級數,其首項為1,其收斂區域是$(-r,+r)$.我們取其倒數

$$f(x)=\frac{1}{1+b_1x+b_2x^2+\cdots}.$$

令

$$y=b_1x+b_2x^2+\cdots,$$

我們可寫為

$$f(x)=\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\cdots,$$

將第一展開式換置在第二中,即得表$f(x)$的一個整級數

$$f(x)=1-b_1x+(b_1^2-b_2)x^2+\cdots,$$

此級數在某一區域內有效.

對於一個任何整級數,首項是一個不等於零的常數,同一方法也可以將此級數的倒數展開.

現在求展開兩個收斂整級數的商

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}.$$

若 b_0 不為零,我們可寫為

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\times\frac{1}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots};$$

依方纔所見,此式的第二端是兩個收斂整級數的積,所以對於 的價值在零附近時,此商數能夠寫為一個收斂整級數的形狀

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots,$$

去分母,又令 x 在兩端的同羃諸項的係數相等,即得以下的關係式

$$a_n=b_0c_n+b_1c_{n-1}+\cdots+b_nc_0\quad(n=o,1,2\cdots),$$

以逐漸定出係數 $c_0, c_1,\cdots, c_n$. 我們可見若將此二級數看作兩個多項式,依 x 的升羃實行一個除法,所得係數和此正同.

在 $b_0=o$ 時,所得結果不同.爲普及一般計,我們假定 $\psi(x)=x^k\psi_1(x)$, k 是一個正整數, $\psi_1(x)$ 表一個整級數,其中常數項不等於零.

我們可寫爲

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{x^k}\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)},$$

依方纔所見,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}=c_0+c_1x+\cdots+c_{k-1}x^{k-1}+c_kx^k+c_{k+1}x^{k+1}+\cdots.$$

因得

$$(28)\qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{c_0}{x^k}+\frac{c_1}{x^{k-1}}+\cdots+\frac{c_{k-1}}{x}+c_k+c_{k+1}x+\cdots;$$

可見此商數是一個有理分數及一個整級數的和,此有理分數在 $x=o$ 時成爲無限,此級數在原點附近某一區域內是收斂的.

注意.——欲計算一個整級數的相續乘羃,在實施上用以下的方法運算較爲便利.在恒等式

$$(a_0+a_1x+\ +a_nx^n+\ )^m=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots$$

中,取兩邊的對數導來式,去分母以後,得一新恒等式

$$(29)\qquad m(a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots)$$
$$=(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)(c_1+2c_2x+\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots).$$

我們很容易作出兩邊 x 的各乘羃的係數,令同次羃的係

數相等,即得一列的關係式以逐漸定出 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$,只要知道 c_0. 但是 $c_0 = a_0^m$ 是明瞭的.

180. $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ 的展開式.——我們求將 $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ 依 z 的冪展開.命 $y = 2xz - z^2$, 只要 $|y| < 1$, 即可寫為

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = (1-y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y^2 + \cdots,$$

就是

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + \frac{2xz - z^2}{2} + \frac{3}{8}(2xz - z^2)^2 + \cdots, \tag{30}$$

將關於 z 的同次項集合,得展開式形狀如下

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots + P_n z^n + \cdots, \tag{31}$$

其中

$$P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, \cdots,$$

P_n 是 x 的一個 n 級的多項式,這些多項式逐漸為一個循環定律所定.誠然,關於 z 取上列公式的導來式,得

$$\frac{x - z}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1 + 2P_2 z + \cdots + nP_n z^{n-1} + \cdots,$$

合計着公式(31),此式又可寫為

$$(x - z)(P_0 + P_1 z + \cdots + P_n z^n + \cdots) = (1 - 2xz + z^2)(P_1 + 2P_2 z + \cdots);$$

令兩邊 z^n 的係數相等,得循環關係式

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}.$$

但是這個關係式和連續三個列讓得多項式間的關係式完全相同($n^\circ 86$),並且 $P_0 = X_0$, $P_1 = X_1$, $P_2 = X_2$. 所以不論 n 如何,必得着 $P_n = X_n$; 公式(31)成為

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots, \tag{32}$$

X_n 是列讓得的第 n 級多項式

$$X_n = \frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

以後可見在何區域內此公式可以應用.

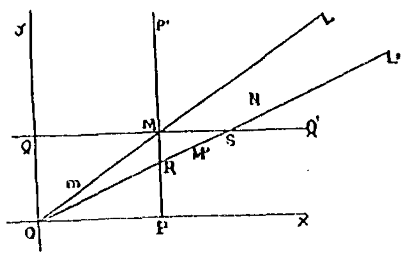
III. ——多變數的整級數

181. 收斂區域.——先設一個整級數

(33) $$\Sigma A_{mn}X^mY^n,$$

其中一切係數 A_{mn} 都是正,變數 X 及 Y 也只能有正值,顯然可見若對於一組的價值 X_0, Y_0 此級數是收斂的,牠對於 (X,Y) 的任何組的價值,只要同時 $X\leqq X_0$, $Y\leqq Y_0$, 也就是收斂的,反之,若對於價值 X_0, Y_0 級數(33)是開發的,牠在同時 $X\geqq X_0$, $Y\geqq Y_0$ 也就是開發的,換一句話說,若級數(33)對於角 XOY 內一點 M 的坐標是收斂的,牠對於長方形 $OPMQ$ 內或邊上一點(圖30)也就是收斂的;反之,若此級數對於 M 點的坐標是開發的,牠對於直角 $P'MQ'$ 內或邊上一切點就都是開發的.

圖三十



此層既已說明,試在角 XOY 內設一個無定半直線 OL, 在其上取一點 m, 牠自原點起畫出此直線, m 漸遠於原點時,牠的坐標

漸增,因之級數(33)中各項凡 A_{mn} 不為零的都漸增,所以在直線 OL 上有一個分點 M,對於原點及 M 點所限線分上一切點,級數(33)都是收斂的,對於 M 點外的線分上一切點都是開發的.〔註三〕

在特別場合,M 點也能夠在原點上,那末,級數(33)對於凡不在 OX 或 OY 上一切點都是開發的.若 M 點投至無限遠,級數(33)就不論 X 及 Y 如何都是收斂的,就是收斂在角 XOY 全部以內.

除此兩個極端場合不論外,對於角 XOY 內每一個半直線 OL,我們都得着一點 M,牠去原點的距離隨着此直線的角係數 λ 連續變化.誠然,設 OL' 是近於 OL 的一個半直線(圖三十).級數(33)既對於線分 OM 的一切點上都是收斂的,牠對於長方形 $OPMQ$ 內一切點上就也是收斂的,因而在線分 OR 的一切點上也是如此.反之,級數(33)既對於 ML 的一切點上都是開發的,牠對於 SL' 的一切點上必也是開發的.所以半直線 OL' 的分點 M' 必在線分 RS 上,結果,OL' 來合於 OL 時,M' 點必合於 M 點.半直線 OL 畫出 XOY 角時,M 點的軌迹是一個曲線 I',牠分此 XOY 角為二部分,一為內部(I),一為外部(E).一點 m 若在原點及直線 Om 的分點 M 中間,m 點就是在部分(I)內,反之,牠就是在部分(E)內.由此曲線 I' 的定義,可見級數(33)在部分(I)的一切點上都是收斂的,在部分(E)的一切點上都是開發的.對於分開線 I' 上一點,此級數能夠是收斂的或是開發的,視每一個場合為斷.

依所設的級數不同,這個分開線能夠有許多形狀.由以上的推理,可見此曲線上一點的橫坐標增加時,牠的縱坐標不能增加,反之亦然.欲知 OL 漸近 OX 時成何景象,只須注意 M 點的橫坐標不能下降,牠的縱坐標不能上升,所以 y 漸近於一個極限,然而

x能夠漸近於一個極限,或增加無限,所以曲線 Γ 能夠止於 OX 上一點 A,或有一漸近線(asymptote),此漸近線或平行於 OX 軸,或就是 OX 軸.但是我們須注意,若曲線 Γ 止於 OX 上的一點 A 時,級數(33)對於 OX 軸上在 A 外的一切點並非定是開發的.這些理論自然也都可以應用在 OY 軸上.

例.——1° 級數 $\Sigma M\dfrac{X^mY^n}{a^mb^n}$ 是收斂的,只要同時 $X<a, Y<b$,也惟在此場合爲然,其和爲

$$\frac{M}{\left[1-\dfrac{X}{a}\right]\left[1-\dfrac{Y}{b}\right]}.$$

曲線 Γ 由一個矩形的兩邊所成,此兩邊各平行於坐標軸.

2° 二重級數

$$\Sigma M\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{X^mY^n}{a^mb^n}=\frac{M}{1-\left[\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}\right]}$$

是收斂的,只要 $\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}<1$,此處曲線 Γ 是在 OX, OY 軸所截的一個直線線分.

3° 二重級數 $\Sigma A_{mn}X^mY^n$,其中 $A_{mm}=1$, $A_{mn}=o$(對於 $m\neq n$);此級數只在 $XY<1$ 時是收斂的,曲線 Γ 是一枝雙曲線依兩坐標軸爲漸近線.

4° 級數

$$\Sigma' M\left[\frac{X}{a}\right]^m\left[\frac{Y}{b}\right]^n,$$

其指標 m 及 n 自 1 變至 ∞,此級數和第一例中的級數在同一矩形內是收斂的,另外的又在 OX, OY 軸上也是收斂的.在半直線 OL 漸近的 OX 軸時,OL 上一點 M 漸近於 OX 上一點其橫

坐標爲a，至於OX上的分點則投至無限遠。

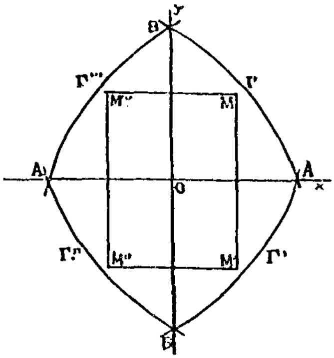
5^0 級數 $\sum m!X^mY^n$ 對於不在軸上的所有點都是開發的。

182. **整級數的性質。**——現在我們取一個整級數，係數是任何的

$$(34)\qquad F(x,y)=\sum_{m,n}a_{mn}x^my^n,$$

設$A_{mn}=|a_{mn}|$，$X=|x|$，$Y=|y|$。若是一點(X,Y)在以上所定的區域(I)內，絕對值所成級數(33)就是收斂的，然也只在此場合是收斂的。因而若一點(x,y)在以下的區域(D)內，級數(34)就是絕對收斂的；區域(D)的界線是四個曲線都等於分開線Γ，其中一個就是Γ，他三個是由對稱得來的(圖31)。

圖三十一



若一點在(D)外，又不在軸上，級數(34)就不是絕對收斂的。無論將各項的次序如何排列，我們總不能將牠變爲一個收斂級數。誠然，設x_0, y_0是在(D)外一點的坐標，此點不在軸上；級數

$\Sigma a_{mn}x_0^m y_0^n$ 的公項不能夠是有限制的.誠然,設 M 是一個定數,假使不論 m 及 n 如何都得着

$$|a_{mn}x_0^m y_0^n| < M,$$

我們就因而決定級數(33)的公項小於 $M\dfrac{X^m Y^n}{|x_0|^m|y_0|^n}$,就是小於一個級數的公項,此後者在 $X<|x_0|$, $Y<|y_0|$ 時是收斂的.因之,坐標是 $|x_0|$, $|y_0|$ 的這一點不能在曲線 Γ 外,結果,(x_0,y_0) 點不能在區域 (D) 外.在此區域的界線上,級數(34)能夠是收斂的或開發的,和級數(33)自身同.

設 a, b 是 (D) 的一點,此點在角 xoy 內.在四個直線 $x=\pm a$, $y=\pm b$ 所限長方形 $MM'M''M'''$ 內,級數(34)是均一收斂的,結果在此長方形內,$F(x,y)$ 是變數 x,y 的連續函數,因而 $F(x,y)$ 在 (D) 的所有點上都是一個連續函數;誠然,設 m 是此區域的任意一點,顯然可見在此區域 (D) 內我們能夠求得另一點 M,使 m 在長方形 $MM'M''M'''$ 內.

將級數(34)關於 x 或關於 y 逐項微分,即得兩個新級數

$$(35)\qquad \begin{cases} F_1(x,y) = \sum\limits_{m,n} m a_{mn} x^{m-1} y^n, \\ F_2(x,y) = \sum\limits_{m,n} n a_{mn} x^m y^{n-1}, \end{cases}$$

這兩個級數的收斂區域和級數(34)同.我們只須證明級數 $\sum\limits_{m,n} m A_{mn} X^{m-1} Y^n$ 的分開線 Γ 和級數(33)同.

仍和 n^0 174 相似,這個證明法分爲兩部分:

1^0 若級數 $\Sigma m A_{mn} X^{m-1} Y^n$ 是收斂的,級數 $\Sigma A_{mn} X^{m-1} Y^n$ 就也是收斂的,結果,級數(33)也是如此;

2^0 反之,若級數 $\Sigma A_{mn} X_0^m Y_0^n$ 是收斂的,對於 $X<X_0$, $Y<Y_0$,

級數 $\Sigma m A_{mn} X^{m-1} Y^n$ 就也是收斂的.

誠然,假定不論 m 及 n 如何,都得着

$$A_{mn} X_0^m Y_0^n < M;$$

由此得不等式

$$m A_{mn} X^{m-1} Y^n < \frac{Mm}{X_0}\left(\frac{X}{X_0}\right)^{m-1}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^n,$$

第二端是一個收斂二重級數的公項,牠的和是

$$\frac{M}{X_0}\,\frac{1}{\left(1-\frac{X}{X_0}\right)^2\left(1-\frac{Y}{Y_0}\right)}.$$

若將二級數 $F(x,y)$ 及 $F_1(x,y)$ 本 x 的升冪排列,將 y 看作常數,卽得關於 x 的兩個整級數,依第二級數從第一級數得來時所用的方法,我們有

$$F_1(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}.$$

同一理由我們也有

$$F_2(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}.$$

一般,在領域 (D) 內,級數 (34) 能夠逐項微分任若干次,所以偏導來式 $\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial y^n}$ 等於一個二重級數的和,牠的常數項是 $m!n!a_{mn}$. 那末除數字係數不計外,係數 a_{mn} 表函數 $F(x,y)$ 的偏導來式在 $x=y=o$ 時的價值,公式 (34) 可寫爲

$$(34)' \qquad F(x,y)=\Sigma\frac{\left(\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\right)_0}{1\cdot 2\cdots m\cdot 1\cdot 2\cdots n}x^m y^n,$$

這表明一個二變數的函數只有一個方法展開爲整級數.若在二重級數中將關於 x 及 y 的同次諸項集合,即得一普通級數

$$(34)'' \qquad F(x,y)=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n+\cdots,$$

φ_n 是關於 x,y 的同質多項式,次數是 n, 我們可依符號的形狀

寫爲

$$\varphi_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n)}$$

由此可見這個展開式和自戴劳公式($n^0 27$)所得的展開式同.

設 (x_0,y_0) 是 D 中一點的坐標,r 及 ρ 是曲線 Γ 上一點的坐標,$|x_0|<r$, $|y_0|<\rho$.在 D 中取一鄰點 (x_0+h, y_0+k),使

$$|x_0|+|h|<r,\quad |y_0|+|k|<\rho.$$

在四直線

$$x=x_0\pm[r-|x_0|],\quad y=y_0\pm[\rho-|y_0|]$$

所成的長方形內,函數 $F(x,y)$ 能夠依 $x-x_0$ 及 $y-y_0$ 的冪展開爲整級數

$$F(x_0+h, y_0+k)=\Sigma\left(\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\frac{h^m k^n}{m!n!}. \tag{36}$$

要證明這個,我們在二重級數

$$\Sigma a_{mn}(x_0+h)^m(y_0+k)^n$$

內,將每一項都用牠關於 h 及 k 的展開式替代,再注意在以上所作假定以內,如此所得的新複級數是絕對收斂的,將此級數依 h 及 k 的冪排列,即適得公式 (36).

以上的推理及定理不難推廣到任何數的變數的整級數上.設有含 n 個變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一個整級數,通常的有無限的稜柱體 (prismatoïdes) 爲以下的條件所定

$$-x_1^0<x_1<x_1^0,\ -x_2^0<x_2<x_2^0,\ \cdots,\ -x_n^0<x_n<x_n^0,$$

在牠們任一個內,整級數 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都是絕對收斂的.在此領域內此級數表一個連續函數,牠能夠逐項微分任若干次.

183. 大函數 (fonctions majorantes)——設 $f(x,y,z,\cdots)$ 是含 n 個變數的一個整級數,$\varphi(x,y,z,\cdots)$ 是另一含 n 個變數的

整級數,若$\varphi(x,y,z,\cdots)$的任一係數都是正且大於$f(x,y,z,\cdots)$的相應係數的絕對值,我們說$\varphi(x,y,z,\cdots)$是$f(x,y,z,\cdots)$的大函數.第182節的推理實際上就是根據於大函數的使用;若對於$x=r$,$y=\rho$,級數$\Sigma|a_{mn}x^my^n|$是收斂的,函數

$$\varphi(x,y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}=M\Sigma\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{y}{\rho}\right)^n$$

就是級數$\Sigma a_{mn}x^my^n$的一個大函數,其中M是大於級數$\Sigma|a_{mn}r^m\rho^n|$的一切項的一個數.函數

$$\psi(x,y)=\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)}$$

也是一個大函數;這是因為在$\psi(x,y)$內,x^my^n的係數等於在$M\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$的相同項的係數,結果,牠至少等於在$\varphi(x,y)$內$x^my^n$的係數.

同樣,設有一個三重級數

$$f(x,y,z)=\Sigma a_{mnp}x^my^nz^p,$$

設r,r',r''是三個正數,若對於$x=r,y=r',z=r''$此級數是絕對收斂的,牠就有一個大函數,形狀是

$$\varphi(x,y,z)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r''}\right)},$$

此大函數又可以為以下的任一函數替代:

$$\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)},\quad\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left[1-\left(\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)\right]},\cdots.$$

若 $f(x,y,z)$ 不含有常數項,我們可仍取以上的任一函數減去 M 爲大函數.

關於一個整級數換置在他一整級數的理論($n^0$178)能推廣在多自變數的級數上.若在含 p 個變數 $y_1,y_2,\cdots,y_p$ 的一個收斂整級數內,將這些變數用 p 個整級數的展開式替代,假定這些整級數含有 q 個變數 $x_1,x_2,\cdots x_q$,不含有常數項,又都是收斂的,換置的結果可依 $x_1,x_2,\cdots,x_q$ 的冪作成一個整級數,但須假定這些變數的絕對值都在某某極限以下.

無論有若干變數,這個證明法既是相同,爲確定人的觀念,我們只取以下的特別場合.設有一個整級數

$$F(y,z)=\Sigma a_{mn}y^m z^n \tag{37}$$

牠在 $|y|\leqq r,|z|\leqq r'$ 時是收斂的.他一方面設

$$\begin{cases} y=b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots, \\ z=c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots \end{cases} \tag{38}$$

是兩個級數不含有常數項,牠們在 x 的絕對值不過於 ρ 時是收斂的.在級數(37)的任一項中,將 y 及 z 用牠們的展開級數(38)替代;如此,對於 $y^m z^n$ 即得一含 x 的新整級數,二重級數(37)即爲一個三重級數所替代,此後者的係數即由加法及乘法自係數 a_{mn},b_n,c_n 得來.現在要證明此三重級數在 x 的絕對值不超過某一極限時是絕對收斂的,結果,可以將此級數依變數的升冪排列.爲此,我們注意我們能取函數

$$\Phi(y,z)=\frac{M}{\left(1-\frac{y}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r'}\right)}=\Sigma M\left(\frac{y}{r}\right)^m\left(\frac{z}{r'}\right)^n \tag{39}$$

爲 $F(y,z)$ 的大函數,取二個函數形狀是

$$
(40)\qquad \frac{N\dfrac{x}{r}}{1-\dfrac{x}{r}},\qquad \frac{N'\dfrac{x}{r'}}{1-\dfrac{x}{r'}}
$$

各爲(38)的兩個級數的大函數.以上的三進級數的任一項的絕對值都小於依同法由二進級數

$$
\Sigma\frac{M}{R^m R'^n}\left(\frac{NX}{r}+\frac{NX^2}{r^2}+\cdots\right)^m\left(\frac{N'X}{r'}+\frac{N'X^2}{r'^2}+\cdots\right)^n
$$

所得的三進級數的相應項,式中 $X=|x|$.若要此三進級數是收斂的,只須二重級數

$$
M\Sigma\left[\frac{N\dfrac{X}{r}}{R\left(1-\dfrac{X}{r}\right)}\right]^m\left[\frac{N'\dfrac{X}{r'}}{R'\left(1-\dfrac{X}{r'}\right)}\right]^n
$$

是收斂的,就是說同時

$$
X<r\frac{R}{R+N},\quad X<r'\frac{R'}{R'+N'}.
$$

注意.——在級數(38)含有常數項 b_0 及 c_0 時,此定理仍爲確實,只要 $|b_0|<R,|c_0|<R'$.誠然,我們能將展開式(37)代以依 $y-b_0$ 及 $z-c_0$ 的冪的展開式($n^0$182),即變爲方纔所論的場合.

IV——陰函數.

解析曲線及解析曲面.

184. 一個自變數的陰函數. —在某某連續性的條件以內,我們已經證明陰函數的存在(n^{0s}32, 33, …).若所設方程式的第一端能展開爲整級數,所得結果更爲精確.試說明如下.

設有一個方程式 $F(x,y)=o$,牠的第一端能依 $x-x_0$ 及 $y-y_0$

<u>的升冪展開爲一個收斂級數,此級數不含有常數項,並且 $y-y$ 的係數不爲零,這個方程式有一個根並只有一個根,在 x 漸近於 x_0 時漸近於 y_0,此根能夠依 $x-x_0$ 的冪展開爲一個整級數.</u>

爲運算簡單計,我們假定 $x_0=y_0=o$,這是將原點挪移,將含 y 的一次項移置在方程式的一端,所設方程式可寫爲

$$y=f(x,y)=a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots, \tag{41}$$

其未經寫出諸項都是高於二次的.我們將證明若在方程式(41)內將 y 用一個級數

$$y=c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots \tag{42}$$

替代,並且將第二端看作一個收斂級數,此方程式是恒能滿足的.誠然,代入法實行以後,命兩端恒等,即得條件

$$c_1=a_{10},\ c_2=a_{20}+a_{11}c_1+a_{02}c_1^2,\cdots;$$

一般,c_n 由加法及乘法爲係數 $a_{kl}(l+k\leqq n)$ 及以前的係數 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{n-1}$ 所表,所以我們可寫爲

$$c_n=P_n(a_{10},a_{20},a_{11},\cdots,a_{0n}), \tag{43}$$

P_n 是一個多項式,牠所有係數都是正整數.我們若能證明在 x 的價值有充分小時,如此所得的級數(42)是收斂的,即可保證以上的運算的合法.爲此,我們用<u>高失</u>所創的一個極爲普通的法術,此法術根據於大函數的使用.

設

$$\varphi(x,Y)=\Sigma b_{mn}x^mY^n$$

是 $f(x,y)$ 的一個大函數,其中 $b_{00}=b_{01}=o$,b_{mn} 是正且至少等於 $|a_{mn}|$;試取一個輔助方程式

(41)′ $$Y=\varphi(x,Y)=\Sigma b_{mn}x^{m}Y^{n},$$

和以上相同,我們求滿足此方程式將Y用含x的一個整級數

(42)′ $$Y=C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots$$

替代,即同樣得係數$C_1, C_2, \cdots, C_n$的價值

$$C_1=b_{10},\ C_2=b_{20}+b_{11}C_1+b_{02}C_1^2,\ \cdots,$$

一般,

(43)′ $$C_n=P_n(b_{10}, b_{20}, \cdots, b_{0n}).$$

將關係式(43)及(43)′比較,可見$|c_n|<C_n$,這是因為多項式P_n的係數都是正,並且$|a_{mn}|\leq b_{mn}$的緣故,所以若級數(42)′是收斂的,級數(42)就也是收斂的,但是我們能取大函數$\varphi(x,Y)$的式子為

$$\varphi(x,Y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)}-M-M\frac{Y}{\rho},$$

M, r, ρ是一個正數,輔助方程式(41)′在消去分母以後成為

$$Y^2-\frac{\rho^2 Y}{\rho+M}+\frac{M\rho^2}{\rho+M}\,\frac{x}{r-x}=0.$$

在$x=0$時,此方程式有一個根成為零,此根的式子是

$$Y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}-\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\sqrt{1-\frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\,\frac{x}{r-x}};$$

令 $\alpha=r\left(\frac{\rho}{\rho+2M}\right)^2$, 根號下的量可寫為

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1}$$

Y又可寫為

$$Y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1-\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

如此,可見這個根Y能在區域$(-\alpha,+\alpha)$內展開爲一個收斂級數;這個展開式自然和直接代入所得的展開式恆同,就是說和展開式(42)′恆同.結果,在區域$(-\alpha,+\alpha)$內,級數(42)也是收斂的,然此不過是收斂區域的一個最小限,這個區域很能夠更爲廣大.

依係數c_n得來的方法,可見級數(42)能滿足方程式(41).我們將此方程式寫爲$F(x,y)=y-f(x,y)=o$,設$y=P(x)$是我們方纔所證明的那個根.若在$F(x,y)$內令$y=P(x)+z$,並將代入所得的結果依x及z的冪排列,一切的項都當能爲z所除,這是因爲在z等於零時,無論x如何,此結果都當爲零.所以我們恆有

$$F[x,P(x)+z]=zQ(x,z),$$

$Q(x,z)$是含x及z的一個整級數.現在若在$Q(x,z)$內用$y-P(x)$代z,即得一恆等式

$$F(x,y)=[y-P(x)]Q_1(x,y);$$

Q_1中的常數項當等於1,這是因爲y的係數當等於1的緣故.我們可寫爲

(44) $$F(x,y)=[y-P(x)](1+\alpha x+\beta y+\cdots).$$

這個將$F(x,y)$分爲兩個因子的積是危伊特拉斯(Weierstrass)所創.他顯明這個根$y=P(x)$;又因爲在x及y漸近於零時,第二因子不漸近於零,所以此式又顯明$F(x,y)=o$並沒有第二個根和x同時爲零.

注意.——欲定展開式(42)的相續係數,我們將所取的方程式寫爲

(41″) $$y=Ax^n+xy\Phi(x,y)+Cx^{n+1}+\cdots+Dy^2+\cdots,\ A\neq o$$

其中$\Phi(x,y)$是關於x及y的整級數,其未經寫出的項成爲兩

個整級數,一個是關於 x 的,一個是關於 y 的,前者能爲 x^{n+1} 所除,後者能爲 y^2 所除,所求級數的第一項是 Ax^n,命 $y=x^n(A+z)$, 方程式(41'')的兩邊除以 x^n 以後,成爲一個方程式和原方程式形狀相同

$$z=A_1x^{n_1}+xz\Phi_1(x,z)+\cdots;$$

z 的展開式的第一項是 $A_1x^{n_1}$, 所以 y 的第二項是 $A_1x^{n+n_1}$; 這是很明瞭的,用此方法可以繼續以至於無窮.〔註四〕

185. **普通定理.**——現在設有 $p+q$ 個變數間的 p 個關係式

$$(45)\qquad \begin{cases} F_1(x_1,x_2,\cdots,x_q;\,y_1,y_2,\cdots,y_p)=0,\\ F_2(x_1,x_2,\cdots,x_q;\,y_1,y_2,\cdots,y_p)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ F_p(x_1,x_2,\cdots,x_q;\,y_1,y_2,\cdots,y_p)=0, \end{cases}$$

對於 $x_i=y_k=0$, 函數 $F_1,F_2,\cdots,F_p$ 都等於零,在這些價值附近,又都能夠展開爲整級數;對於這些價值,我們可假定函數定準式 $\dfrac{D(F_1,F_2,\cdots,F_p)}{D(y_1,y_2,\cdots,y_p)}$ 不爲零.在這些條件以內,方程式(45)有一組的解而只有一組的解,其形狀是

$$y_1=\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_q),\ \cdots,\ y_p=\varphi_p(x_1,x_2,\cdots,x_q),$$

$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$ 都是含 $x_1,x_2,\cdots,x_q$ 的整級數,牠們在 $x_1=x_2=\cdots=x_q=0$ 時都成爲零.

爲便於書寫計,我們但取兩個方程式含有兩個函數 u 及 v, 及三個自變數 x,y,z,

$$(46)\qquad \begin{cases} F_1=au+bv+cx+dy+ez+\cdots=0,\\ F_2=a'u+b'v+c'x+d'y+e'z+\cdots=0, \end{cases}$$

由假定,定準式 $ab'-ba'$ 既不等於零,我們可將(46)的兩個方程式代以以下的兩個方程式

$$(47)\qquad \begin{cases} u=\Sigma a_{mnpqr}x^m y^n z^p u^q v^r, \\ v=\Sigma b_{mnpqr}x^m y^n z^p u^q v^r, \end{cases}$$

此二式的第二端不含有常數項,也不含有 u 及 v 的一次項.仍用以前的方法,我們証明若取 u 及 v 爲含 x,y,z 的級數

$$(48)\qquad u=\Sigma c_{ikl}x^i y^k z^l,\quad v=\Sigma c'_{ikl}x^i y^k z^l,$$

其中係數 c_{ikl}, c'_{ikl} 都是由加法及乘法自係數 a_{mnpqr} 及 b_{mnpqr} 得來,方程式 (47) 是恒能滿足的.要証明這些展開式的收斂性只須要將牠們和求滿足輔助方程式

$$U=V=\frac{M}{\left(1-\frac{x+y+z}{r}\right)\left(1-\frac{U+V}{\rho}\right)}-M\left(1+\frac{U+V}{\rho}\right)$$

所得的展開式比較,M,r 及 ρ 都是正數,牠們的意義在前已經說明.這兩個輔助方程式縮簡爲一個二次方程式

$$U^2-\frac{\rho^2 U}{2\rho+4M}+\frac{M\rho^2}{2\rho+4M}\cdot\frac{x+y+z}{r-(x+y+z)}=o,$$

牠對於 $x=y=z=o$ 時有一個根等於零,若命 $\alpha=r\left(\frac{\rho}{\rho+4M}\right)^2$,此根的式子是

$$U=\frac{\rho^2}{4(\rho+2M)}-\frac{\rho^2}{4(\rho+2M)}\sqrt{\frac{1-\frac{x+y+z}{\alpha}}{1-\frac{x+y+z}{r}}}.$$

只要 x,y,z 的絕對值不大於 $\frac{\alpha}{3}$,此根就能夠展開爲一個收斂整級數,所以在這些極限以內,級數(48)是收斂的.

設 u_1 及 v_1 是方程式 (47) 的能展解(solutions developpables,)若

令 $u=u_1+u'$, $v=v_1+v'$,代入方程式(47),並依 x, y, z, u', v' 的冪整頓,所得一切項都當含有 u' 或 v' 爲因子.若再回復到變數 x,y,z,u,v 上,原設方程式就可寫爲

$$
(47)' \qquad \begin{cases}(u-u_1)f+(v-v_1)\varphi=o,\\(u-u_1)f_1+(v-v_1)\varphi_1=o.\end{cases}
$$

$f, \varphi, f_1, \varphi_1$ 也都是含 x, y, z, u, v 的整級數.如此,即將此兩個解 $u=u_1$, $v=v_1$ 顯明;然而又可見對於 $x=y=z=o$ 時沒有其他的解.誠然,方程式(47)′的另外的任一解都要令 $f\varphi_1-\varphi f_1$ 爲零;但是比較方程式(47)及(47)′,可見在 f 及 φ_1 內的常數項等於1,至於在 f_1 及 φ 的則等於零.所以若取函數 u 及 v 和 x, y, z 同時爲零,方程式 $f\varphi_1-\varphi f_1=o$ 就不能滿足.

186. 拉格耶熱的公式.——設

$$
(49) \qquad y=a+x\varphi(y)
$$

是一個方程式,其中 $\varphi(y)$ 能依 $(y-a)$ 的升冪展開爲收斂級數,只要 $(y-a)$ 的絕對值不超過某一極限,

$$
\varphi(y)=\varphi(a)+(y-a)\varphi'(a)+\frac{(y-a)^2}{1\cdot 2}\varphi''(a)+\cdots;
$$

依第184節的普通定理,此方程式有一個根而只有一個根在 x 漸近於零時牠漸近於 a;在 x 的價值有充分小時,此根爲一個收斂整級數所表,

$$
y=a+a_1x+a_2x^2+\cdots.
$$

一般,設 $f(y)$ 是一個函數能依 $y-a$ 的正冪展開,在此展開式中將 y 代以以上的展開式,則此展開式在 x 在某某極限以內時仍有效.

(50) $$f(y)=f(a)+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n+\cdots.$$

拉格郎熱的公式的目的正是給與係數$A_1, A_2,\cdots, A_n,\cdots$,的算式為$a$的函數.我們注意這個問題並非和普通問題頗有區別.係數A_n除因數$n!$外是$f(y)$在$x=o$時的n級導來式.函數y為方程式(49)所定,這個導來式能用已知的定規計算.這個運算似覺甚為繁雜,然而賴有拉布拉斯所作的注意,此運算縮簡許多.方程式(49)所定由函數y的關於x及a的偏導來式為公式

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y),\quad [1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a}=1;$$

從而得

(51) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a},$$

式中$u=f(y)$.他一方面,設$F(y)$是y的一個任何函數,由微分法可見

(51)副 $$\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right],$$

這是因為此兩個導來式展開時皆等於

$$F'(y)f'(y)\frac{\partial y}{\partial a}\ \frac{\partial y}{\partial x}+F(y)\ \frac{\partial^2 u}{\partial a\partial x}$$

的緣故.此層已經說明,不論整數n如何,總得着

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

依公式(51),此定律是確實的.要証明此定律是一般的,假定對於n的某一價值此定律已經成立,由此得到

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n}}{\partial a^{n-1}\partial x}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

但是利用關係式(51)及(51)副,我們可寫為

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right];$$

祇然得着

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right],$$

所以此公式對於n的一切價值都是確實的.

現在假定$x=o$, 則y成爲a, u成爲$f(a)$,u關於x的n級的導來式成爲

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\varphi(a)^n f'(a)\right].$$

戴勞公式給與$f(y)$的展開式

$$f(y)=f(a)+x\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}\left[\varphi(a)^2 f'(a)\right]+\cdots \tag{52}$$

$$+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\varphi(a)^n f'(a)\right]+\cdots.$$

這是著明的拉格郎熱公式;牠給與在x漸近於零時方程式(49)漸近於a的那一個根y的算式.以後可見此公式在何區域內可以應用.

注意. —— 由普通定理可見若將根y看作x及a的函數,此根也可以爲x及a的冪的二重級數表明.這個二重級數可將A_n代以其關於a的冪的展開式得來.由此可見級數(52)能逐項求其關於a的導來式.

例. —— 1° 方程式

$$y=a+\frac{x}{2}(y^2-1) \tag{53}$$

在$x=o$時有一個根a.拉格郎熱公式給與此根的展開式

(54) $$y=a+\frac{x}{2}(a^2-1)+\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{d(a^2-1)^2}{da}+\cdots$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{d^{n-1}(a^2-1)^n}{da^{n-1}}+\cdots;$$

牠一方面,解方程式(53),得

$$y=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{x}\sqrt{1-2ax+x^2},$$

欲得在 $x=o$ 時等於 a 的那一個根,可取減號.關於變數 a 取方程式 (54) 兩邊的導來式,即得一公式,除記號外和以前所得公式(32)相同 (n^o180).

2° 蓋倍耳(Képler)的方程式

(55) $$u=a+e\sin u$$

在 $e=o$ 時有一個根 a,拉格郎熱公式給與此漸近於 a 的根的展開式

(56) $$u=a+e\sin a+\frac{e^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}(\sin^2 a)+\cdots+\frac{e^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}(\sin^n a)}{da^{n-1}}\cdots.$$

拉格郎熱由一個淵博的解析法首先証明以上的級數是收斂的,只要 e 小於極限 o,662743….

187. **逆法.**——設

(57) $$y=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

是在區域 $(-r,+r)$ 內的一個收斂級數,其第一個係數 a_1 不等於零.在方程式(57)內,若是將 y 看作自變數,將 x 看作 y 的函數,依普通定理(n^o184),有一個而只有一個根和 y 同時漸近於零;此根能依 y 的冪展開爲級數

(58) $$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots+b_ny^n+\cdots.$$

在公式(57)中將x代以其展開式,再說牠是一個恒等式,即可逐漸算出係數$b_1, b_2, b_3, \cdots$.

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}, \quad \cdots.$$

我們也能夠由拉格郞熱公式計算係數b_n的一般算式.誠然,若令

$$\psi(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + \cdots,$$

方程式(57)可寫爲

$$x = y \frac{1}{\psi(x)},$$

拉格郞熱的公式給與和y同時爲零的那個根的展開式

$$x = y \frac{1}{\psi(o)} + \cdots + \frac{y^n}{1\cdot 2 \cdots n} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\frac{1}{\psi(x)} \right]^n \right\}_0 \cdots,$$

指標o表明微分以後將x代以o.

以上的問題從前叫作級列的逆轉 (retour des suites) 問題.

188. **解析函數** (fonctions analytiques) —— 自此以後,凡一個函數含有任何數的變數$x, y, z, \cdots$,牠在一組的價值$x_0, y_0, z_0, \cdots$附近能夠依$x-x_0, y-y_0, z-z_0, \cdots$的冪展開爲整級數,只要這些差數在某某極限以內,此級數是收斂的,(這些數$x_0, y_0, z_0, \cdots$也可以有某某制限,我們此處不論)我們稱此函數爲解析函數.依此章所研究,這些函數可以彼此互生.設有一個或多個解析函數,由積分法或微分法,或由代數運算,譬如乘法,除法,或代入法所組合等等,都能夠生出新解析函數.若有一組方程式,第一端都是解析函數,解此等方程式所得的函數,也就都是解析函數.但是函數中最簡單的如多項式,指函數及圓函數都是解析函數,我們很容易想見

爲甚麼幾何學者所最初研究的函數都是解析函數,在一個虛變數的函數及微分方程式的研究中,這些函數的緊要尤爲昭著.然而雖解析函數有根本任務,我們總不要忘記牠們實際上只是連續函數的一個特別羣.〔註五〕

189. **解析曲線.** (courbes analytiques) ——在 (n^o13), 我們定一個曲線是將牠看作一點 M 的軌迹,此點的坐標是一個變率 t 的連續函數, $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$, 在 t 變化時此點畫出曲線.若此等函數 $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 都是 t 的解析函數,就是說對於 t 在某一區域 (a,b) 內的任一價值 t_0, 這些函數都能夠用戴勞公式依 $t-t_0$ 的冪展開,和此相應的曲線弧就說是解析曲線弧.通常應用上所習見的曲線都是解析曲線,或是由有限數的解析曲線弧首尾相銜而成.

設 x_0, y_0, z_0 是是個解析曲線上一點 M_0 的坐標, x, y, z 是曲線上 M_0 點的一隣點 M 的坐標.若三個差數 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 中此二個能依其牠一個的冪展開爲整級數,這些差數的絕對值小於某一極限 $h>o$, 此二級數是收斂的,如此,我們說此點 M_0 是一個常點 (point ordinaire). 在相反的場合, M_0 說是一個奇點,沒有奇點的解析曲線弧說是規則的.

依解析曲線的定義, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 點的隣點 M 的坐標 x, y, z 都是爲整級數所表,

$$(59)\qquad \begin{cases} x=x_0+a_1(t-t_0)+\cdots+a_n(t-t_0)^n+\cdots, \\ y=y_0+b_1(t-t_0)+\cdots+b_n(t-t_0)^n+\cdots, \\ z=z_0+c_1(t-t_0)+\cdots+c_n(t-t_0)^n+\cdots, \end{cases}$$

只要 $|t-t_0|$ 小於一個正數 r,此三個級數都是收斂的.

若要 M_0 點是一個常點,只須要公式(59)的三個係數 a_1, b_1, c_1 中有一個不等於零.譬如 a_1 不等於零,我們自(59)的第一個方程式取 $t-t_0$ 依 $x-x_0$ 的冪的展開式($n^\circ 184$),將 $t-t_0$ 的價值代入其他二式中,卽得 $y-y_0$ 及 $z-z_0$ 依 $x-x_0$ 的整冪的展開式.反之,在一個常點 M_0 附近,定一個解析曲線的方程式,必能夠寫爲(59)的形狀,係數 a_1, b_1, c_1 中至少有一個不等於零.誠然,譬如 $y-y_0$ 及 $z-z_0$ 是等於含 $x-x_0$ 的整級數,我們只須令 $x-x_0=t$,卽變爲公式(59)的形狀,其中 $a_1=1$. 由這個注意可見一個常點和坐標軸無關係.誠然,若用一個相似變形法 (transformation homographique)

$$X=lx+my+nz+p,$$

$$Y=l'x+m'y+n'z+p',$$

$$Z=l''x+m''y+n''z+p'',$$

牠們的定準式不爲零,將曲線變爲曲線 Γ,我們有

$$\frac{dX}{dt}=l\frac{dx}{dt}+m\frac{dy}{dt}+n\frac{dz}{dt}, \quad \frac{dY}{dt}=l'\frac{dx}{dt}+\cdots, \quad \frac{dZ}{dt}=l''\frac{dx}{dt}+\cdots,$$

若三個導來式 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ 在 $t=t_0$ 時不同時爲零,此三個導來式 $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}$ 對於 t 的這個價值也不能同時爲零.〔註六〕

若三個係數 a_1, b_1, c_1 同時爲零,在普通場合,M_0 點是一個奇點.例如方程式 $x=t^2, y=t^3$ 所定的平曲線,在 $t=o$ 時我們有 $a_1=b_1=o$. 原點誠是一個奇點,這是因爲自以上的關係式我們有 $x=y^{\frac{2}{3}}$,反之, $y=x^{\frac{3}{2}}$,每一個坐標都是牠一坐標的分數冪.

和此相反,我們取一個平曲線,爲公式$x=t^2, y=t^4$所定,令$t=o$,仍得$a_1=b_1=o$,但是因爲$y=x^2$,原點不是一個奇點.然而我們要注意,在這個例子上,對於曲線上一點,變率(paramétre)有兩個各別的價值$\pm t$相應.

設x_0, y_0是方程式$F(x,y)=o$所表曲線上一點M_0的坐標,此方程式的第一端能依$x-x_0$及$y-y_0$的冪展開爲整級數.若牠的兩個偏導來式$\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$在$x=x_0$, $y=y_0$時不同時爲零,M_0點就是一個常點.誠然,譬如$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$不等於零,自方程式$F=o$,我們能夠取$y-y_0$依$x-x_0$的冪的展開式($n^o 184$).

同樣,設x_0, y_0, z_0是一個空間曲線Γ上一點的坐標,此曲線爲一組的兩個方程式

$$F(x,y,z)=o, \quad F_1(x,y,z)=o \tag{60}$$

所表,牠們的第一端都是函$x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$的整級數.若對於$x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$,此三個函數定準式

$$\frac{D(F,F_1)}{D(x,y)}, \quad \frac{D(F,F_1)}{D(y,z)}, \quad \frac{D(F,F_1)}{D(z,x)}$$

不同時爲零,此點M_0就是一個常點.譬如在M_0點,定準式$\frac{D(F,F_1)}{D(x,y)}$不等於零,自方程式(60)我們取$x-x_0$及$y-y$依$z-z_0$的冪的展開整級數($n^o 185$).

這些宣告的定理和在第37及43節的定理完全相同,然而此處所證明的結果更爲精確,這是因爲此處我們並且證明所論的陰函數都是自變數的解析函數緣故.

注意. I ——特別的取一個平曲線C,這就是在公式(59)中將末一個公式代以$z=o$. 欲見曲線在一點M_0附近的形狀,只須注意於在$t-t_0$的價值無限小時,$x-x_0$及$y-y_0$各有第二邊首項$a_m(t-t_0)^m$及$b_n(t-t_0)^n$的符號.

我們假定$m\leq n$. 若m是奇數(對於一個常點總是如此),曲線是通常的形狀或現出一個彎曲點;若m是偶數,曲線現出第一類或第二類的逆退(rebroussement.)

注意. II. ——設M_0是一個平解析曲線C上的一個常點;譬如我們假定將$y-y_0$依$x-x_0$的冪展開

$$y-y_0=c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots.$$

若切線不平行於ox軸,係數c_1就不等於零,我們能夠倒轉來由以上的關係式取$x-x_0$依$y-y_0$的冪的展開式.若在M_0點的切線平行於ox軸,就不是如此.在此場合$c_1=o$, $y-y_0$關於$x-x_0$的展開式首項即高於一次;第184的普通定理不能應用.由以後的一個研究(第二冊)可見此時$x-x_0$能夠依$y-y_0$的分數冪展開為整級數.

190. 二重點. ——我們仍在一個二重點附近研究一個解析平曲線C.取此二重點為原點,曲線的方程式的形狀成為

$$ax^2+2bxy+cy^2+\varphi_3(x,y)+\cdots=o, \tag{61}$$

其中係數a, b, c不能同時為零,其未經寫明諸項成為含x及y的整級數,牠在$x=y=o$點附近是收斂的.我們再假定坐標軸的選法使c不等於零,依以前所作的注意〔n^o42註〕,方程式(61)不能有兩個以上實根和x同時漸近於零;以後我們將証明無論實根或

虛根,此方程式常有兩個根然也只有此兩個根和 x 同時漸近於零若 b^2-ac 不等於零,我們很容易得着這些根的式子.

1^0 若 $b^2-ac>o$, 我們將以上的方程式用 c 除,即得

$$F(x,y)=(y-\alpha x)(y-\beta x)+\varphi_3(x,y)+\cdots=o, \tag{62}$$

α 及 β 是兩個不同的實數,若令

$$y=x(\alpha+u),$$

$F[x,x(\alpha+u)]$ 能夠依 x 及 u 的冪排列 (n^0177), 用 x^2 除,只餘方程式

$$u(u+\alpha-\beta)+\cdots=o, \tag{63}$$

其未經寫明諸項在 $x=o$ 時都爲零.依一般定理(n^0184),這個方程式有一個根 u_1 和 x 同時爲零,此根能依 x 的冪展開

$$u_1=\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots.$$

所以方程式(62)也有一個根 y_1

$$y_1=\alpha x+\alpha_1x^2+\alpha_2x^3+\cdots, \tag{64}$$

同樣又可見這個方程式有一個第二根 y_2

$$y_2=\beta x+\beta_1x^2+\beta_2x^3+\cdots. \tag{65}$$

那末,自原點有兩個曲線枝經過,對於單獨一枝,原點都是一個常點.

仍依第184節的推理,可見 $F(x,y)$ 能分解爲三個因子的積

$$F(x,y)=(y-y_1)(y-y_2)(1+c_1x+c_2y+\cdots), \tag{66}$$

此式顯明方程式(62)的兩個根 y_1 及 y_2, 又顯明此外沒有別的根和 x 同時爲零.

2^0 設 $b^2-ac<o$. 我們知道在此場合原點是一個孤立的二重點,然而我們方纔所示的運算仍能應用,並且得兩個收斂級數

(64) 及 (65), 此兩個級數仍能滿足方程式(62),但是係數有些是虛數,所以在此場合,方程式(62) 有兩個共軛虛根和 x 同時爲無限小.

對於一個解析曲線的一個 p 級的奇點,若在此點的切線都是各別的,在此點附近研究曲線,以上的方法也很容易應用.

3° 設 $b^2-ac=o$. 若取在二重點的切線爲 x 軸,方程式的形狀成爲

(67) $$y^2=Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+\cdots.$$

設 $u+\sqrt{v}$, $u-\sqrt{v}$ 是兩個無限小的根,用 $u+\sqrt{v}$, 代 y, 方程式成爲

$$u^2+2u\sqrt{v}+v=Ax^3+Bx^2(u+\sqrt{v})+Cx(u+\sqrt{v})^2+D(u+\sqrt{v})^3+\cdots.$$

令關於 v 的有理項所成的級數及 $\sqrt{v}$ 的係數爲零,得以下的兩個方程式以決定 u 及 v:

(68) $$\begin{cases} v=-u^2+Ax^3+Bx^2u+Cxu^2+Cxv+Du^3+3Duv+\cdots, \\ 2u-Dv=Bx^2+2Cxu+3Du^2+\cdots \end{cases}$$

對於此一組的方程式能應用第185節的普通定理,我們得 u 及 v 的展開式

(69) $$\begin{cases} v=Ax^3+\cdots, \\ u=\dfrac{B}{2}x^2+\cdots, \end{cases}$$

此二級數的首項至小各爲三次式及二次式.一般,設

$$u=ax^p+\cdots,\quad v=bx^q+\cdots\quad (ab\neq o, p\geqq 2, q\geqq 3)$$

是如此所得的級數,方程式(67)有此兩個無限小的根

$$y=ax^p+\cdots\pm\sqrt{bx^q+\cdots}.$$

曲線的形狀首先關係於 q 的奇偶性.

第一場合.——設 $q=2r+1$ ($r\geqq 1$); 我們再假定 $b>0$; 對於 x 在零附近的價值,根號下的級數有 bx^q 的符號.若要 y 是實,x 當假定 >0, y 的兩個價值若爲一個依 $\sqrt{x}$ 的冪級數所表若是 $r+\frac{1}{2}<p$,則最低次項是含 $x^{r+\frac{1}{2}}$ 的項,我們有第一類的逆退.若是 $r+\frac{1}{2}>p$,我們有第二類的逆退.

第二場合.——設 $q=2r$ ($r>1$).必須要 b 是正,對於 x 無限小的價值,y 的價值方能是實.如果如此,我們有兩枝曲線在原點上切於 ox 軸,對於曲線的每一枝,原點是一個常點,這是因爲這兩個根可寫爲

$$y=ax^p+\cdots\pm x^r+\sqrt{b+b_1x+\cdots}.$$

若 b 是負,原點是一個孤立的二重點.

191. 解析曲面 (surfaces analytiques).——設有一部分曲面 S,其上一個定點 M_0 的坐標是 x_0, y_0, z_0,若此點附近一個動點 M 的坐標 x, y, z 能夠依兩個變率 $t-t_0$, $u-u_0$ 展開爲整級數

$$(70)\qquad \begin{cases} x-x_0=a_{10}(t-t_0)+a_{01}(u-u_0)+\cdots, \\ y-y_0=b_{10}(t-t_0)+b_{01}(u-u_0)+\cdots, \\ z-z_0=c_{10}(t-t_0)+c_{01}(u-u_0)+\cdots, \end{cases}$$

她們在差數 $t-t_0$, $u-u_0$ 不超過某某極限時是收斂的,我們就說此曲面是解析曲面.若在 M_0 點附近,三個差數 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 中任一個能依他二個的整冪展開爲整級數,此點 M_0 就是曲面上的常點.我們將証明若三個定準式

$$\frac{D(y,z)}{D(t,u)},\quad \frac{D(z,x)}{D(t,u)},\quad \frac{D(x,y)}{D(t,u)}$$

對於一點 M_0 不同時爲零,M_0 就是一個常點.誠然,譬如第一個定

準式不等於零,我們能自(70)中後二方程式取$t-t_0$及$u-u_0$的價值代入第一方程式,即得$x-x_0$依$y-y_0$及$z-z_0$的冪的展開式.

設曲面S為一個未解方程式$F(x,y,z)=0$所表,x_0, y_0, z_0是此曲面上一點M_0的坐標.若函數F能依$x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$的冪展開為整級數,而三個偏導來式$\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$不同時為零,依一般定理($n^o$184)$M_0$就是一個常點.

注意. —— 我們所採用的常點的定義不關係坐標軸的選擇.設$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面S上一個常點,那末,一個隣點的坐標都為公式(70)所定,而三個定準式$\frac{D(y,z)}{D(t,u)}$, $\frac{D(z,x)}{D(t,u)}$, $\frac{D(x,y)}{D(t,u)}$在$t=t_0$, $u=u_0$時不同時為零.一個坐標變換法,就等於將變數x,y,z用三個新變數X, Y, Z替代,此後者都是前者的一次函數

$$X=\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1,$$

$$Y=\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2,$$

$$Z=\alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z+\delta_3,$$

牠們的定準式$\Delta=\frac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)}$不等於零.將$x, y, z$用牠們的展開式(70)替代,即得$X,Y,Z$的三個新展開式,在$t=t_0$, $u=u_0$時不能夠$\frac{D(X,Y)}{D(t,u)}=\frac{D(Y,Z)}{D(t,u)}=\frac{D(Z,X)}{D(t,u)}=0$;這是因為由上式我們得變形法的公式

$$x=A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1,$$

$$y=A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2,$$

$$z=A_3X+B_3Y+C_3Z+D_3,$$

若x, y, z關於t,u的三個函數定準式不同時為零,X, Y, Z的三個函數定準式也不能同時為零.

V.—三角級數.—多項式級數.

192. 傅利葉(Fourier)的級數.—在以下各節我們所論的級數和前大異.三角級數是白奴利(Bernoulli)關於弦的顫動(cordes vibrantes)問題第一次研究;我們以下所示係數的定法是尤列所創.

設$f(x)$是x在區域(a,b)內的一個限制且能積分的函數;我們先假定極限a及b是$-\pi$及$+\pi$,這是總能夠的,因爲只須取$\dfrac{2\pi x-(a+b)\pi}{b-a}$爲新變數即可變爲這個場合.此層既已說明,若對於$x$在$-\pi$及$+\pi$間的一切價值,我們都有以下的等式

$$(71)\quad f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\cdots,$$

$a_0, a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m, \cdots$都是未知的常數係數,以下的法術可以決定這些係數.爲此,我們先寫出以下的公式,其中m及n都是正整數:

$$(72)\left\{\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\,dx=0,\ \text{若}\ m\neq 0,\qquad \int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\,dx=0,\\
&\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(m-n)x+\cos(m+n)x}{2}dx=0,\ \text{若}\ m\neq n,\\
&\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2 mx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx=\pi,\quad \text{若}\ m\neq 0,\\
&\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x}{2}dx=0,\quad \text{若}\ m\neq n,\\
&\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 mx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-\cos 2mx}{2}dx=\pi,\ \text{若}\ m\neq 0,\\
&\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{2}dx=0.
\end{aligned}\right.$$

若在$-\pi$及$+\pi$極限內積分等式(71)的兩端,其第二端是逐

項積分,即得

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi a_0,$$

由此式我們取得 a_0 的價值.同樣,若將等式 (71) 的兩端都乘以 $\cos mx$ 或 $\sin mx$, 再求兩端在 $-\pi$ 及 $+\pi$ 間的積分,第二端各項中所給的結果不等於零的只有 $\cos^2 mx$ 或 $\sin^2 mx$, 我們終得以下的公式

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos mx dx = \pi a_m, \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = \pi b_m.$$

我們又可以將所得各係數的價值寫爲

$$(73)\qquad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)d\alpha, \ a_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos m\alpha d\alpha, \\ b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha. \end{cases}$$

以上所示的係數的計算法,顯然不是嚴格的証明,牠只有一個歸納法的價值.

凡一個三角函數

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_m\cos mx + b_m\sin mx + \cdots,$$

其中一切係數都是依公式 (73) 自一個能積分函數 $f(x)$ 得來,我們稱此級數爲傅利業級數.

凡在 $(-\pi, +\pi)$ 區域內的一個能積分函數,都有一個傅利業級數相應.然而這並不能表明此傅利業級數是收斂的並且牠的和是 $f(x)$, 這就和戴劳級數一樣,一個函數牠有無盡的累次導來式,然由此函數所得的戴劳級數並不必表此函數($n^0$170).我們並能夠徵實一個傅利業級數不是常表牠所自生的函數.誠然,設

$f_1(x), f_2(x)$是兩個函數牠們在$-\pi$及$+\pi$內只有有限數的不同的價値傅利業級數對於此兩個函數是相同的($n^o 71$);那末,此二函數中至少有一個對於x的一切價值不是都能爲牠的傅利業級數所表.然而依係數(73)的式子,可見若兩個函數$f(x)$, $\varphi(x)$在$-\pi$及$+\pi$內都爲牠們的傅利業級數所表,函數$Af(x)+B\varphi(x)$就也是如此,常數A及B如何俱不論.

若要一個函數$f(x)$在區域$(-\pi, +\pi)$內能展開爲傅利業級數,我們將定出一組的充足條件,這些條件簡稱爲底里格來(Dirichlet)的條件:

1^o 我們能夠將區域$(-\pi, +\pi)$分爲有限數的開區域,在此每一部分區域內此函數都是一致的(monotone;)

2^o 此函數只有規則的不連續點.

將係數a_i, b_i用牠們的價値(73)替代,化簡以後,函數$f(x)$所生的傅利業級數的$2m+1$個初項的和是

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos2(\alpha-x)+\cdots+\cos m(\alpha-x)\right]d\alpha.$$

然依三角學上一個著明公式

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cdots+\cos m\alpha=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

因而

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}d\alpha,$$

令$\alpha=x+2y$,我們又可寫爲

$$(74)\qquad S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy.$$

193. 積分$\int_0^h f(x)\dfrac{\sin nx}{\sin x}dx$的研究. —— 對於和數$S_{2m+1}$所得的式子引導我們求有定積分$\int_0^h f(x)\dfrac{\sin nx}{\sin x}dx$在$n$增加無限時的極限.這個問題是底里格來(Lejeune Dirichlet)第一次嚴格研究;牠所根據的幾個命題均已見前,我們復述如下.

設h是一個正數,有定積分

$$\int_0^h\frac{\sin x}{x}dx$$

是正且至多等於積分$A=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x}dx$($n^\circ 88$);在$h$增加無限時,牠的極限是$\dfrac{\pi}{2}$($n^\circ 96$).

設h是一個正數,n是一個正整數,在有定積分

$$\int_0^h\frac{\sin nx}{x}dx,$$

中若令$nx=y$,此積分就成為

$$\int_0^{nh}\frac{\sin y}{y}dy,$$

所以無論n及h如何牠都是正,在n增加無限時牠有一個極限$\dfrac{\pi}{2}$.那末設a及b是兩個任何正數,有定積分$\int_a^b\dfrac{\sin nx}{x}dx$在$n$增加無限時趨近於零;這是因為此積分等於兩個積分

$$\int_0^b\frac{\sin nx}{x}dx,\int_0^a\frac{\sin nx}{x}dx$$

的差.此兩個積分在 n 增加無限時都漸近於 $\frac{\pi}{2}$. 這個命題又可依第二平均值定理直接証明;若假定 $a<b$, 函數 $\frac{1}{x}$ 在 x 自 a 至 b 時是正且下降的,我們有

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{x}dx=\frac{1}{a}\int_a^\xi \sin nx dx=\frac{1}{a}\frac{\cos na-\cos n\xi}{n}.$$

所以此積分的絕對值小於 $\frac{2}{na}$, 這就顯明牠對於 b 的一個任何大於 a 的價值都是均一的漸近於零.

此層既已說明,我們取有定積分

$$J=\int_0^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx,$$

其中 $h>o$, $\varphi(x)$ 是在區域 (o,h) 內一個正函數且是下降的.若在此區域內取兩個任何正數爲積分極限,在此極限內所取的積分 J 必等於零.誠然,我們假定 $a<b$; 第二平均值公式仍表明

$$\int_a^b \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx=\varphi(a)\int_a^\xi \frac{\sin nx}{x}dx,$$

結果,積分的絕對值小於 $\frac{2\varphi(a)}{na}$. 然而這個運算並未告訴我們積分 J 自己的極限如何.

要求此極限,設 c 是一個極小正數;我們可寫爲

$$J=\int_0^c \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx+\int_c^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx.$$

依方纔所見,第二積分在 n 增加無限時漸近於零.至於第一積分,若 c 有充分的小,函數 $\varphi(x)$ 在區域 (o,c) 內就和 $\varphi(+o)$ 相差極少,這個積分差不多和積分 $\int_0^c \varphi(+o)\frac{\sin nx}{x}dx$ 有同一的極限,就是說 $\frac{\pi}{2}\varphi(+o)$. 若要將這個歸納法改爲一個嚴格的証明,我們將差數 $J-\frac{\pi}{2}\varphi(+o)$ 寫爲

$$J-\frac{\pi}{2}\varphi(+o)=\varphi(+o)\left(\int_o^c\frac{\sin nx}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\int_o^c\left[\varphi(x)-\varphi(+o)\right]\frac{\sin nx}{x}dx+\int_c^h\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx.$$

函數 $\varphi(x)-\varphi(+o)$ 既在區域 (o,c) 內是下降的,我們可將第二積分寫為

$$\int_o^c\left[\varphi(c)-\varphi(+o)\right]\frac{\sin nx}{x}dx+\int_o^c\left[\varphi(x)-\varphi(c)\right]\frac{\sin nx}{x}dx;$$

函數 $\varphi(x)-\varphi(c)$ 既是正且下降的,我們能將第二平均值定理應用在此新積分上,終得

$$\left|\int_o^c\left[\varphi(x)-\varphi(+o)\right]\frac{\sin nx}{x}dx\right|<2A\left[\varphi(+o)-\varphi(c)\right].$$

同樣,我們有

$$\left|\int_c^h\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx\right|<\frac{2\varphi(c)}{nc}.$$

現在設 ε 是一個任意正數,在 x 漸近於零時 $\varphi(x)$ 的極限既是 $\varphi(+o)$,我們選擇 c 有充分的小,使

$$2A\left[\varphi(+o)-\varphi(c)\right]<\frac{\varepsilon}{3}.$$

數 c 既如此選定,我們再選擇一個整數 N,使 $\frac{2\varphi(c)}{Nc}<\frac{\varepsilon}{3}$,並且對於 n 的價值 $n\geqq N$ 時都得着

$$\varphi(+o)\left|\int_o^c\frac{\sin nx}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

所以對於 n 的這一切價值,我們都有

$$\left|J-\frac{\pi}{2}\varphi(+o)\right|<\varepsilon,$$

結果,

(75) $$\lim_{n=\infty}J=\frac{\pi}{2}\varphi(+o).$$

以上的定理的証明法,對於函數 $\varphi(x)$ 曾設若干數的制限,此等制限也可以消除.若 x 自零至 h 時,$\varphi(x)$ 下降,然不常為正數,我們總可以增加一個正數 C,使 $\psi(x)=\varphi(x)+C$ 在 (o,h) 區域內是下降的且常是正.應用這個定理在函數 $\psi(x)$ 上,我們可寫為

$$\int_o^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx=\int_o^h \psi(x)\frac{\sin nx}{x}dx-C\int_o^h\frac{\sin nx}{x}dx;$$

此等式的第二端的極限是 $\frac{\pi}{2}\psi(+o)-\frac{\pi}{2}C$,就是 $\frac{\pi}{2}\varphi(+o)$.若 x 自 o 至 h 時是上升的,$-\varphi(x)$ 就下降,我們有

$$\int_o^h\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx=-\int_o^h-\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx.$$

此積分的極限仍是 $\frac{\varphi}{2}(+o)$.

對於積分

$$\int_a^b\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx$$

其中 a 及 b 都是任何正數,$\varphi(x)$ 是 (a,b) 區域內的一個一致函數,同樣的方法可證明這個積分在 n 增加無限時漸近於零.

最後我們簡單的假定函數 $\varphi(x)$ 是有限制的(bornée),並且能夠分 (o,h) 區域為有限數的區域 $(o,a),(a,b),(b,c),\cdots,(l,h)$,在此每一區域內 $\varphi(x)$ 是一致的.自 o 至 a 間的積分的極限是 $\frac{\pi}{2}\varphi(+o)$,至於其他的一切積分,譬如

$$\int_a^b\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx,$$

都是以零為極限.公式(75)仍能應用在此函數上.

現在論積分

$$I=\int_o^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx,\tag{76}$$

h是小於π的一個正數;此積分能寫為

$$I=\int_{o}^{h}f(x)\frac{x}{\sin x}\,\frac{\sin nx}{x}dx.$$

若函數$f(x)$是正且自o至h是上升的,函數$\varphi(x)=f(x)\dfrac{x}{\sin x}$就也是如此,因而

$$\lim_{n=\infty}I=\frac{\pi}{2}\varphi(+o)=\frac{\pi}{2}f(+o). \tag{77}$$

由一列的推理和方纔所演的相似,可依次證明:

1° 公式(77)能應用在區域(o,h)內的一切一致函數上.

2° 積分$\int_{a}^{b}f(x)\dfrac{\sin nx}{\sin x}dx$, a及b是兩個小於π的正數,$f(x)$是在(a,b)區域內的一個一致函數,此積分的極限是零;

3° 我們有

$$\lim\int_{o}^{h}f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx,=\frac{\pi}{2}f(+o)\quad(o<h<\pi), \tag{78}$$

但須要區域(o,h)能夠分為有限數的部分區域,在此每一部分區域中函數$f(x)$是一致的.

194. 能展開為傅利業級數的函數.——設$f(x)$是在$(-\pi,+\pi)$區域內一個限制且能積分函數,我們在前已求得相應的傅利業級數的$2m+1$個首項的和的式子S_{2m+1}〔公式(74)〕.我們將此積分分為兩個其他的積分,牠們的極限各等於o及$\dfrac{\pi-x}{2}$, $-\dfrac{\pi+x}{2}$及o,在第二積分中再命$y=-z$,我們仍可寫為

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\frac{\pi-x}{2}}f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy \tag{79}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\frac{\pi+x}{2}}f(x-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}dz.$$

若x在$-\pi$及$+\pi$中間,這兩個積分的上限就都在o及π中

間,上節的定理對於牠們可以應用,但須要函數$f(x)$能滿足底里格來的第一條件就是只要能夠分區域$(-\pi,+\pi)$爲有限數的區域,在每一區域中$f(x)$都是一致的(monotone),那末,y的函數$f(x+2y)$在區域$\left(o,\dfrac{\pi-x}{2}\right)$內也是如此,第一積分的極限是

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}f(x+o)\right]=\frac{1}{2}f(x+o).$$

同樣,第二積分的極限是$\dfrac{1}{2}f(x-o)$,所以S_{2m+1}的極限是

$$\frac{f(x+o)+f(x-o)}{2}.$$

再設x等於極限中的一個,譬如$x=-\pi$罷,我們可寫爲

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_o^{\frac{\pi}{2}}f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy.$$

第二端的第一積分的極限是$\dfrac{1}{2}f(-\pi+o)$;用$\pi-z$代y,第二積分成爲

$$\frac{1}{\pi}\int_o^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}dz,$$

牠的極限是$\dfrac{1}{2}f(\pi-o)$.所以在$x=-\pi$時,傅利業級數的和等於$\dfrac{f(\pi-o)+f(-\pi+o)}{2}$;在$x=\pi$時這個和自然仍是相同.

約而言之,區域$(-\pi,+\pi)$若能夠分爲有限數的區域,在每一區域內$f(x)$都是一致函數,相應的傅利業級數就是收斂的,若x在$-\pi$及$+\pi$中間,牠的和就是$\dfrac{f(x+o)+f(x-o)}{2}$,若$x=\pm\pi$,牠的和就是$\dfrac{f(-\pi+o)+f(\pi-o)}{2}$.

此外若再假定$f(x)$只有規則的(réguliers)不連續點,對於x在

$-\pi$及$+\pi$區域內一切的價值,我們都得着

$$f(x)=\frac{f(x+o)+f(x-o)}{2},$$

傅利業級數的和就等於$f(x)$.所以凡一個函數$f(x)$,確定在區域$(-\pi,+\pi)$內,並且能滿足底里格來的條件,此函數在此區域內就能展開爲傅利業級數.

這個定理是假定取

$$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{f(-\pi+o)+f(\pi-o)}{2},$$

然而這個假定只是對於不連續點的種類所作的假定的一個邏輯的結果.誠然,若不將x看作直線上一個長度,然而將牠看作半徑爲1的一個圓周的弧;設m是圓周上一點,m'及m''是圓周上m的兩邊兩點,級數在m的和,等於此級數在m'及m''上的和對於m'及m''都漸近於m時的極限的平均值.若此兩個極限價值$f(-\pi+o)$,$f(\pi-o)$不相同,圓周上和弧的原點直徑相對的點就是一個不連續點,函數在此點的價值就也是兩個極限$f(-\pi+o)$,$f(\pi-o)$的平均值.

一般,設$f(x)$是確定在區域$(\alpha,\alpha+2\pi)$內的一個函數,區域的廣度是2π,此函數滿足底里格來的條件.顯然可見有一個函數$F(x)$存在且只有一個,牠的週期是2π,並且在$(\alpha,\alpha+2\pi)$區域內和$f(x)$相合;這個函數$F(x)$對於x的一切價值都爲一個三角級數所表,牠的係數a_m及b_m都爲公式(73)所定,

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\cos mx\,dx,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\sin mx\,dx.$$

係數a_m又可寫爲

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi}F(x)\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\alpha}F(x)\cos mx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi}F(x)\cos mx dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\alpha+2\pi}F(x)\cos mx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}F(x)\cos mx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\cos mx dx.$$

對於係數b_m同樣得

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\sin mx dx.$$

若一個函數$f(x)$是在一個任何區域的已知函數,區域的廣度是2π,由以上的公式能計算牠的傅利業級數的展開式的係數,並不須要將區域的極限變爲$-\pi$及$+\pi$.

195. 例.——1° 求一個傅利業級數,x在$-\pi$及o間其和爲-1,x在o及π間其和爲$+1$.依公式(73),我們有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o}-dx+\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi}dx=o,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o}-\cos mx dx+\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi}\cos mx dx=o,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o}-\sin mx dx+\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi}\sin mx dx=\frac{2-\cos m\pi-\cos(-m\pi)}{m\pi};$$

若m是偶數,則b_m爲零;若m是奇數,則b_m等於$\frac{4}{m\pi}$.將一切的係數乘以$\frac{\pi}{4}$,可見級數

$$y=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots+\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}+\cdots \tag{80}$$

當x在$-\pi$及o中間其和爲$-\frac{\pi}{4}$,當x在o及π中間其和爲$\frac{\pi}{4}$.$x=o$是一個不連續點,對於此點,此級數的和是零,這是顯然如此的.一般在$\sin x$是正時,級數(80)的和爲$\frac{\pi}{4}$;$\sin x$是負時,其和爲$-\frac{\pi}{4}$;在$\sin x=o$時,其和爲零.

方程式 (80) 所表的曲線由無量數的部分直線及無量數孤立點所成，這些部分直線都在 x 軸的平行線 $y=\pm\frac{\pi}{4}$ 上，其長爲 π，這些孤立點 $(y=o, x=k\pi)$ 都在 x 軸上。

2^0　求將 x 在 o 及 2π 區域內展開爲傅利業級數，我們有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi}xdx=2\pi,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi}x\cos mxdx=\left[\frac{x\sin mx}{m\pi}\right]_o^{2\pi}-\frac{1}{m\pi}\int_o^{2\pi}\sin mxdx=o,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi}x\sin mxdx=-\left[\frac{x\cos mx}{m\pi}\right]_o^{2\pi}+\frac{1}{m\pi}\int_o^{2\pi}\cos mxdx=-\frac{2}{m},$$

由此得公式

$$(81)\qquad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\cdots,$$

此公式對於 x 在 o 及 2π 間一切價值都是確實的。若在此公式中將第一端代以 y，如此所得方程式所表的曲線由無量數部分直線平行於直線 $y=\frac{x}{2}$ 及無量數的孤立點所成。

注意.——1^0 定在區域 $(-\pi,+\pi)$ 內的一個函數 $f(x)$ 若是偶函數，就是說 $f(-x)=f(x)$，則所有係數 b_m 皆爲零，這是因爲顯然可見

$$\int_{-\pi}^{o}f(x)\sin mxdx=-\int_o^{\pi}f(x)\sin mxdx.$$

反之，若函數 $f(x)$ 是奇函數，就是說 $f(-x)=-f(x)$，則係數 a_m 都等於零，a_0 亦在內。一個函數 $f(x)$ 但定在自 o 至 π 區域內，我們能將牠延長在自 $-\pi$ 至 o 區域內，只須適宜的令

$$f(-x)=f(x)\ \text{或}\ f(-x)=-f(x).$$

所以函數 $f(x)$ 在自 o 至 π 區域內能爲一個正弦級數或

餘弦級數所表.

2° 若$f(x)$是在區域$(-\pi,+\pi)$內能展開爲傅利業級數的一個函數:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\cdots; \tag{82}$$

係數a_i, b_i是爲公式(73)所定的.

若在此關係式中將x代以$-x$,得

$$f(-x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x-b_1\sin x)+\cdots+(a_m\cos mx-b_m\sin mx)+\cdots. \tag{83}$$

由此兩個等式决定此兩個三角級數

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+\cdots+a_m\cos mx+\cdots,$$

$$b_1\sin x+\cdots+b_m\sin mx+\cdots$$

在區域$(-\pi,+\pi)$內都是收斂的並且各表此兩個函數

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2};$$

我們甚易驗明這正是關於此二函數的傅利業級數.

196. **傅利業級數的推廣.**——若要一個函數能展開爲傅利業級數,底里格來的條件只是充足的條件,並非是必要的.由第193及194節的推理,這些條件能代以更爲寬廣的條件.

設$f(x)$是在區域$(-\pi,+\pi)$內一個限制變分的函數;我們知道牠在此同一區域內是兩個一致函數$f_1(x)$及$f_2(x)$的和($n^\circ 11$).設$S(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$是由此三個函數$f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$所得的傅利業級數.由以前所見,此兩個級數$S_1(x)$, $S_2(x)$在區域$(-\pi,+\pi)$內都是收斂的並且對於區域內任一點,都是

$$S_1(x)=\frac{f_1(x+0)+f_1(x-0)}{2},\quad S_2(x)=\frac{f_2(x+0)+f_2(x-0)}{2};$$

他一方面，$S(x)$ 的任一項都等於 S_1 及 S_2 的相應項的和，所以級數 $S(x)$ 也是收斂的，其和爲 $S_1(x)+S_2(x)$，就是說等於

$$\frac{f_1(x+o)+f_2(x+o)+f_1(x-o)+f_2(x-o)}{2}=\frac{f(x+o)+f(x-o)}{2}$$

那末，凡在區域 $(-\pi,+\pi)$ 內的一個限制變分的函數都產出一個傅利業級數，對於 x 在 $-\pi$ 及 $+\pi$ 中間的任一個價值其和都等於 $\dfrac{f(x+o)+f(x-o)}{2}$. 同樣的方法可見對於 $x=\pm\pi$，此級數的和等於 $\dfrac{f(\pi-o)+f(-\pi+o)}{2}$.

若是函數 $f(x)$ 在此區域內又只有第一類的不連續點，傅利業級數的和對於 x 在 $-\pi$ 及 $+\pi$ 中間的所有價值都等於 $f(x)$.

計算傅利業級數的係數，第 192 節所用的方法能受極大的推廣。設有在 (a,b) 區域內的一列的垂直函數 (fonctions orthogonales)

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n,\ \cdots,$$

就是說 $\int_a^b \varphi_m\varphi_n dx=o$, m 及 n 如何不論，只要 $m\neq n$. 假定一個函數在 (a,b) 區域內能展開爲一個均一收斂的級數其形狀爲

$$f(x)=A_0\varphi_0+A_1\varphi_1+\cdots+A_n\varphi_n,$$

則這些常數係數 A_i 立可決定。誠然，將以上的關係式的兩邊乘以 φ_n，並在極限 a 及 b 內積分，計算着其表垂直性的關係式，得

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=A_n\int_a^b \varphi_n^2 dx,$$

由此取得係數 A_n 的價值。對於每一個特別場合，只餘視察如此所得的級數是否收斂的，其和是否是 $f(x)$.

列讓得的多項式 ($n^\circ 86$) 在區域 $(-1,+1)$ 內成爲一列的垂直函數，若要計算一個函數依這些多項式的展開式的係數仍

須要知道積分$K_n=\int_{-1}^{+1}X_n^2dx$的數字價值.設$a_n$是$X_n$中$x^n$的係數計算看第86節關係式(27)及(28),我們可寫爲

$$\int_{-1}^{+1}X_n^2dx=\int_{-1}^{+1}a_nx^nX_ndx$$

$$=\int_{-1}^{+1}a_nx^{n-1}\frac{(n+1)X_{n+1}+nX_{n-1}}{2n+1}dx$$

$$=\frac{na_n}{2n+1}\int_{-1}^{+1}x^{n-1}X_{n-1}dx.$$

但是我們又有

$$\int_{-1}^{+1}X_{n-1}^2dx=a_{n-1}\int_{-1}^{+1}x^{n-1}X_{n-1}dx,$$

所以比$\frac{K_n}{K_{n-1}}$等於$\frac{na_n}{(2n+1)a_{n-1}}$,就是等於$\frac{2n-1}{2n+1}$.因而決定積數$(2n+1)K_n$不關係於$n$.但是對於$n=o$,可見$K_0=2$;所以係數$K_n$等於$\frac{2}{2n+1}$.

197. **一個連續函數的展開式.危伊特拉斯的定理.**——設$y=f(x)$是在區域(a,b)內的一個連續函數.危伊特拉斯有一個最堪注意的命題,宣告如下:設ε是一個預定的正數.我們能決定一個多項式$P(x)$,使對於x在區域(a,b)內的任何價值,差數$f(x)-P(x)$的絕對值小於ε.

關於這個定理的許多証法,最簡單的一個是來倍哥(Lebesgue)所作.〔註七〕我們先取以下的特別場合.設$\psi(x)$是在區域$(-1,+1)$內的連續函數,其定法如下:對於$-1\leqq x\leqq o$,我們有$\psi(x)=o$;對於$o\leqq x\leqq 1$,我們有$\psi(x)=2kx$,k是一個已知常數.

此函數可寫爲 $\psi(x) = k[x+x|x|]$. 他一方面,對於 x 在 -1 及 $+1$ 間的一切價值,我們有

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)},$$

並且對於 x 的這些價值,此根號能依 $(1-x^2)$ 的羃展開爲一個均一收斂的級數[註八]那末,$|x|$ 在此區域內能爲一個多項式所表,其近似差誤(approximation)如何都可以現在我們取在區域 (a,b) 內的一個任何連續函數,並且假定將此區域分爲 n 個部分區域

$$(a_0,a_1),\ (a_1,a_2),\ \cdots,\ (a_{n-1},a_n),$$

其中

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b,$$

其分法總使在此等區域內 $f(x)$ 的限差小於 $\frac{\varepsilon}{2}$.設 Γ 是依次連結在曲線 $y=f(x)$ 上而其橫坐標等於 $a_0, a_1, a_2, \cdots, b$ 各點所得的折線.此折線上一點的縱坐標當然是橫坐標的連續函數 $\varphi(x)$. 差數 $f(x)-\varphi(x)$ 的絕對值小於 $\frac{\varepsilon}{2}$.誠然,譬如在 (a_{n-1},a_n) 區域內說,我們可寫爲

$$f(x)-\varphi(x)=[f(x)-f(a_{n-1})][1-\theta]+[f(x)-f(a_n)]\theta$$

其中 $x-a_{n-1}=\theta(a_n-a_{n-1})$. 因數 θ 既是正且小於1,差數 $f-\varphi$ 的絕對值小於 $\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta+\theta)=\frac{\varepsilon}{2}$.這個函數 $\varphi(x)$ 能夠分爲 n 個和上面的 $\psi(x)$ 相類的函數的和.誠然,設 $A_0, A_1, A_2, \cdots A_n$ 是折線 Γ 上的相續頂點;$\varphi(x)$ 等於一個連續函數 $\psi_1(x)$ 他在區域 (a,b) 內爲負荷 A_0A_1 邊的一個直線所表,增加一個函數 $\varphi_1(x)$ 爲一個折線 $A'_0A'_1\cdots A'_n$ 所表,其第一邊 $A'_0A'_1$ 是在 ox 軸上;$\varphi_1(x)$ 又是兩個連續函數 ψ_2 及 φ_2 的和;ψ_2 在 a 及 a_1 間爲零,

在 a_1 及 b 間爲負荷 $A'_1A'_2$ 邊的直線所表;至於 φ_2 則爲折線 $A'_0A'_1A'_2\cdots A'_n$ 所表,其頂點 A'_0, A'_1, A'_2 皆在 ox 軸上,如此,終至於將 $\varphi(x)$ 代以 n 個函數的和 $\varphi=\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n$,其中 ψ_i 是一個連續函數牠在 a 及 a_i 間爲零,在 a_i 及 b 間爲一個直線所表.若作變數更換法,命 $X=px+q$,適宜選擇 p 及 q,ψ_i 將在區域 $(-1,+1)$ 內爲等式

$$\psi_i=k[X+|X|],$$

結果能爲一個多項式所表,其近似差誤如何小都可以.在區域 (a,b) 內這每一個函數 ψ_i 既都可以爲一個多項式所表,其近似差誤小於 $\frac{\varepsilon}{2n}$.這是很明瞭的,這些多項式的和及 $f(x)$ 所差者不能過於 ε.

由此定理可見凡在區域 (a,b) 內的一個連續函數,在此區域內,都能爲一個均一收斂的多項式級數所表.誠然,我們取一個下降正數所成的敍列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$,在 n 增加無限時,公項 ε_n 漸近於零.依以上的定理,對於此敍列的每一個數 ε_i,我們能作一個多項式 P_i 相應,其方法使在 (a,b) 全區域內,差數 $f(x)-P_i(x)$ 的絕對值小於 ε_i.此層已經說明,當 x 在區域 (a,b) 內時,級數

$$P_1(x)+[P_2(x)-P_1(x)]+\cdots+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]+\cdots$$

是收斂的,其和是 $f(x)$.誠然,此級數的 n 個初項的和 S_n 是 $P_n(x)$;差數 $f(x)-P_n(x)$ 的絕對價値既小於 ε_n,所以在 n 增加無限時漸近於零.這個級數是均一收斂的,因爲若是選取 n 有充分的大,使 $\varepsilon_m<\varepsilon$,那末,只要 n 等於或大於 m,我們必能得着

$$|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon.$$

習 題

1. 方程式$y^2=ay+x$有一個根在$x=o$時變等於a;試應用拉格朗熱的公式在此根依x的冪的展開式上.

2. 同上的問題對於方程式$y-a+xy^{m+1}=o$.應用在二次方程式$a-bx+cx^2=o$.

依c的冪展開,在c漸近於零時其漸近於$\frac{a}{b}$的那一個根.

3. 證明公式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots.$$

4. 若x大於$-\frac{1}{2}$,我們有

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots.$$

5. 若$|x|<1$,我們有

$$x=\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2\cdot4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\cdots.$$

若$|x|>1$時,此級數的和如何?

6. 証明公式

$$(a+x)^{-n}=\frac{1}{a^n}\left[1-\frac{nx}{a+x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3+\cdots\right].$$

7. 在$\sin x$等於零時,$\sin mx$及$\cos mx$成爲零及1的那兩個定法(détermination)都能本$\sin x$的冪展開:

$$\sin mx=m\left[\sin x-\frac{m^2-1}{1\cdot2\cdot3}\sin^3x+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\sin^5x-\cdots\right],$$

$$\cos mx=1-\frac{m^2}{1\cdot2}\sin^2x+\frac{m^2(m^2-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\sin^4x-\cdots.$$

利用微分方程式

$$(1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2}-y\frac{du}{dy}+m^2u=o,$$

此式能爲 $\cos mx$ 及 $\sin mx$ 所滿足,若是將牠們看作 $y=\sin x$ 的函數.

8. 自以上的公式演出 $\cos(n\operatorname{arccos}x)$ 及 $\sin(n\operatorname{arccos}x)$ 的展開式.

9. 証明以下的公式:

$$\log(x+2)=2\log(x+1)-2\log(x-1)+\log(x-2)$$
$$+2\left[\frac{2}{x^3-3x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5+\cdots\right],$$

(Borda 的級數)

$$\log(x+5)=\log(x+4)+\log(x+3)-2\log x$$
$$+\log(x+3)+\log(x-4)-\log(x-5)$$
$$-2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\cdots\right].$$

(Haro 的級數)

10.* 一個函數 $f(x)$ 在區域 (a,b) 內是連續的,其性質是對於 $n=o,1,2,3,\cdots$ 積分 $\int_a^b x^n f(x)dx=o$, 試證 $f(x)$ 恒等於零.

解.假定 $f(x)$ 展開爲均一收斂的多項式級數,由之得積分 $\int_a^b f(x)^2dx$ 將等於零. (Moore)

11.* 一個不等於零的連續函數不能有一個恒等於零的傅利業級數.

解.假定在區域 (a,b) 內 $f(x)>m>o$, a 及 b 都是在 o 及 2π 中間;令

$$\psi=1+\cos\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\cos\frac{a-b}{2}.$$

證明不論n如何,積分$\int_0^{2\pi} f(x)p^n dx$不能等於零.(參觀Lebesgue, Leçons sur les series trigonometriques, p. 37.)

由此證明兩個不同的連續函數不能有相同的傅利業級數結果;若自一個連續函數$f(x)$所得傅利業級數是均一收斂的,此級數的和就等於$f(x)$.

12.* 一個連續函數$f(x)$爲一個折線所表,週期爲2π,計算其傅利業級數的係數.這個級數既是均一收斂的,由此演出第197節危伊特拉斯的定理的一個新證法.

〔註一〕 Recherches sur la serie $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$.

〔註二〕 此定理爲高失(Cauchy)所證,在他的解析學講義上,又見於Hadamard的論文上.

〔註三〕 λ是直線OL的角係數,M點的橫坐標是一切數$\sqrt[n]{A_{pq}\lambda^q}$ $(n=p+q)$所成集合的最大極限的倒數.(Lemaire, Bulletin des Sciences mathématiques, 1896, p. 286).

〔註四〕 用此方法得到若干的項以後,由除法能將這些項的數二倍之〔參觀un article Sur le développement en serie entiere d' une branche de fonction impticite (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1904).〕

〔註五〕 設$f(x)$是在區域(a,b)內的連續函數,又有各級的導來式也是連續的.若是這些導來式能滿足條件

$$(A)\qquad \left|f^{(n)}(x)\right| < \frac{Mn!}{r^n},$$

M及r這兩個不關於x的正數,函數$f(x)$就是解析函數.誠然,設x_0及x是區域(a,b)內的任意兩點;若由戴勞公式依$x-x_0$的

冪將 $f(x)-f(x_0)$ 展開 ($n^\circ 18$),據條件(A),係數 R_n 的絕對值就小於 $M\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{\rho^{n+1}}$,結果,在 n 增加無限時,只要 x 在 $x_0-\rho$ 及 $x_0+\rho$ 中間,此係數就漸近於零.

反而言之,由第二冊上可見條件(A)是 $f(x)$ 是解析函數的必要條件.

M. S. Bernstein (Math. *Ann.* *Bd* 75, 1914, *p.* 449) 新近證明以下的命題:若是一個無限制能導來函數(*f*onction indéfiniment dérivable) $\varphi(x)$ 的所有的導來式在區域 (a,b) 內都是正,此函數在此區域內就是一個解析函數.

假定 $a<b$, 設 x_0 及 $x>x_0$ 是此區域內的兩個任何價值. $\varphi(x)$ 的所有的導來式既都是正,則此函數和牠的所有的導來式都是上升的.我們依次得不等式

$$\varphi^{(n-1)}(x)>\varphi^{(n)}(x_0)(x-x_0),\quad \varphi^{(n-2)}(x)>\varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2},\ \cdots,$$

$$\varphi'(x)>\varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!},\quad \varphi(x)>\varphi(x_0)+\varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!};$$

倒轉來, 令 $x=b$,得

$$\varphi^{(n)}(x_0)<\frac{Mn!}{(b-x_0)^n},$$

M 是正數 $\varphi(b)-\varphi(a)$. 由此可見若用第一個戴劳公式依 $x-x_0=h$ 的冪將 $\varphi(x)$ 展開,則係數 R_{n+1} 的絕對值小於

$$\frac{M\,|\,h\,|_{n+1}}{(b-x_0-\theta h)^{n+1}},$$

在 n 增加無限時此係數漸近於零,只要

$$|\,h\,|<\frac{b-x_0}{2}.$$

〔註六〕 顯然可見此性質能推廣到為解析公式所定的一切能逆變形法 (transformations réversibles) 上.

〔註七〕 Bulletin des Scicences mathématiques, 1898, *p*. 278.

〔註八〕 誠然,x既在 -1及 $+1$中間,公式的絕對値至多等於$\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$,依Duhamel的定規,這是一個收斂級數的公項.

勘　誤　表

頁數	行數	誤	正
12	5	$o\leq x\leq o$	$o\leq x\leq 1$
17	11	爲	於
18	圖一中	CD	$C'D$
21	6	$f(x_0-\varepsilon)\leq f(x_0-\varepsilon)$	$f(x_0-\varepsilon)\leq f(x_0+\varepsilon)$
24	22	看	相
50	3	當	常
60	14	dy	$dy,$
75	19	S^m+R^m	$S_m+R_m.$
83	10	$\varphi^m(x)=o,$	$\varphi_m(x)=o,$
92	10	$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\neq o,$	$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\neq o,$
95	4	導式	導來式
103	1	ε'	$\varepsilon,$
103	11	場和	場合

頁數	行數	誤	正
104	5	x_u	x_n
104	7	u_u	u_n
107	4	24.	42.
109	13	已後	以後
120	2	$y=x\text{ang}\,\omega$	$y=x\tan g\,\omega$
129	8	f'_x, f'_x	f'_x, f'_y
135	14	$T=F_2(X,Y,zt)$	$T=F_2(X,Y,z,t)$
137	2,4	y_n	y_m
150	8	函有 y',	含有 y',
151	15		二
153	18	$^2\omega\partial$	$\partial^2\omega$
155	6	我個	我們
170	7	x^2+y^2+z	$x^2+y^2+z^2$
173	3	$\frac{\partial^2 U}{\partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

頁數	行數	誤	正
178	10	E 點 E'	E 及 E'
181	20	條例	條件
190	8	$f_1(f)+C_1$	$f_1(x)+C_1$
207	2	可見	可以
213	9	M_1T	M_1T_1
214	16	$dMNB$ 弧	$dANB$ 弧
218	15	$\int_a^b x^m \log x$	$\int_a^b x^m \log x\,dx$
223	12	曲面	曲線
238	17	$adpC$	$cdpc$
246	18	$l \geqq L$	$l \leqq L$
251	10	有極限	其極限
254	23	線曲	曲線
258	20	L 故	故 L
262	5	$+\int\frac{{}^{\alpha x}(\quad)dx}{X^{n-1}}$	$+\int\frac{e^{\alpha x}(\quad)dx}{X^{n-1}}$

頁數	行數	誤	正
263	23	兩有	含有
275	13	$\frac{Sdx}{U\sqrt{P}}$	$\int\frac{Sdx}{U\sqrt{P}}$
296	10	e^{1t^2}	e^{-t^2}
298	13	$n-\frac{1}{2}$	$n+\frac{1}{2}$
305	18	單積	單積分
306	19	兩曲個線	兩個曲線
335	19	一個圓橢	一個橢圓
354	17	$\frac{\pm 1}{\sqrt{EG-E^2}}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{EG-F^2}}$
360	1	$\iint_{(S)} xdyd$	$\iint_{(S)} xdydz$
367	7	無極小	無限小
408	14	開發	收斂
410	7	漸見	漸近
417	20	$\log^3$	$\log 2$
425	15	$im\varepsilon=o$	$\lim\varepsilon=o$

頁　數	數　行	誤	正
435	15	$\left(\frac{1}{p+1} \mid \frac{1}{p}\right)$	$\left(\frac{1}{p+1}\right)-\frac{1}{p})$
454	19	產生此級	產生此級數
457	5	變 x 數	變數 x

△本院出版部最近出版書報地圖▽

一……中國地名大辭典　劉鈞仁著

洋裝一厚冊

定價每冊國幣拾伍元

二……北平附近地圖　曾意雅編製

五彩精印二萬五千分之一

已出七幅餘在印刷中

定價每幅國幣壹元

三……國立北平研究院院務彙報　本院出版部編印

兩月一冊全年六冊

定價每冊國幣壹元

全年國幣伍元

總發行所國立北平研究院出版部

中華民國十九年九月出版

解析數學講義 第一冊

定價國幣伍元
郵費另加

原著者 法國古爾薩

譯者 王尙濟

發行者 國立北平研究院出版部

總發行所 國立北平研究院出版部

〔財政部印刷局排印〕