Н 3

40647

解析數學講義

古爾薩著
王尚濟譯

第二冊

關於幾何的應用

國立北平研究院出版部印行

目　錄

第　十　章

包　封　論.——接　觸.

第十一章

空間曲線

第十二章

曲面

第　十　章

包 封 論.——接 觸.

在純正幾何上所研究的曲線及曲面都是些解析曲線及解析曲面.但是我們所將定出的幾何原素(élément géo métrique)其存在只須假定若干級的導來式是存在的.譬如一個平曲線爲方程式$y=f(x)$所表,若函數$f(x)$有一個導來式$f'(x)$,則曲線有一個切線;若導來式$f'(x)$也有一個導來式$f''(x)$,則曲線有一個曲度半徑(rayon de courbure)如此遞推.

I.——包封曲線及包封曲面.

198. **包封的求法.**——設有一個平曲線C關係一個變率a,其方程式是

$$(1)\qquad f(x, y, a)=o;$$

在一般場合,若令a變化,此曲線以連續的狀態變化形狀及位置.若是這一切的曲線C都切於一個定曲線E,此曲線E叫作這些曲線C的包封(enveloppe),這些曲線C叫作被封(enveloppée).假定已知曲線C,我們試求辨認牠們是否有一個包封存在,並定出此包封.

假定此包封E是存在的,對於變率的一個價值a,有一個被封曲線C相應.設(x,y)是包封E和此被封C的接觸點M的坐標.這兩個坐標x, y都是變率a的未知函數,牠們滿足方程式(1).若要完全定出這兩個函數,必須說明在a變化時,M點所畫的曲線的切線合於曲線C的切線,我們用δx及δy表被封曲線的切線的

方向率(paramètre directeur),用$\frac{dx}{da}$及$\frac{dy}{da}$表未知函數$x=\varphi(a)$,$y=\psi(a)$的導來式;我們當有

$$\frac{\frac{dx}{da}}{\partial x}=\frac{\frac{dy}{da}}{\partial y}. \tag{2}$$

但是曲線C爲方程式(1)所表,在其中a有一個固定價值,我有當有關係式

$$\frac{\partial f}{\partial x}\partial x+\frac{\partial f}{\partial y}\partial y=o. \tag{3}$$

bf定出此曲線的切線,他一方面,未知函數$x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$也當滿足關係式

$$f(x, y, a)=o,$$

現在a是自變數,我們又當有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=o. \tag{4}$$

由關係式(3)及(4),條件方程式(2)成爲

$$\frac{\partial f}{\partial a}=o; \tag{5}$$

此方程式連同關係式(1)定出此兩個未知函數$x=\varphi(a)$,$y=\psi(a)$.那麼,如果包封是存在的,在方程式$f=o$及$\frac{\partial f}{\partial a}=o$中消去變率$a$即得包封的方程式.

設$R(x, y)=o$是消去a所得的結果;我們再考慮此曲線是否表一個包封.設C_0是和變率的價值a_0相應的特別曲線,(x_0, y_0)是二曲線

$$f(x,y,a_0)=o,\qquad \frac{\partial f}{\partial a_0}=o \tag{6}$$

的交點M_0的坐標;方程式(1)及(5)定出兩個函數$x=\varphi(a), y=\psi(a)$,對於$a=a_0$,牠們各成爲x_0, y_0,顯然可見我們有

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(\frac{dx}{da}\right)_0+\frac{\partial f}{\partial y_0}\left(\frac{dy}{da}\right)_0=o;$$

所以只要不同時得到$\frac{\partial f}{\partial x_0}=o, \frac{\partial f}{\partial y_0}=o$,就是說只要$(x_0, y_0)$點不是曲線$C_0$上的一個奇點,在上的關係式和關係式(3)合而觀之,可見在(x_0, y_0)點,曲線C_0的切線和(x, y)點所畫的切線相合.所以<u>方程式$R(x,y)=o$或是表一切的曲線C的包封,或是表牠們的奇點的軌迹.</u>

這個結果仍當加以補充:若曲線C中每一個都有一個或數個奇點,這些奇點的軌迹必包在曲線$R(x,y)=o$以內.誠然,設(x,y)是奇點中的一個坐標,x及y都是a的函數,牠們同時滿足三個關係式

$$f(x,y,a)=o,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=o,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=o,$$

所以也必能滿足關係式$\frac{\partial f}{\partial a}=o$;那麽,$x$及$y$必能滿足方程式$R=o$,牠是由關係式$f=o, \frac{\partial f}{\partial a}=o$消去$a$得來的.在最普通的場合,曲線$R=o$在解析上爲各別的兩部分所成,一部分是眞正的包封,他一部分是奇點的軌迹.

例.一設$f(x,y,a)=y^4-y^2+(x-a)^2=o$;我們有$\frac{\partial f}{\partial a}=-2(x-a)$,

在 $f=o$ 及 $\frac{\partial f}{\partial a}=o$ 中消去 a，得方程式 $y^4-y^2=o$，牠表三個直線 $y=o$，$y=+1$，$y=-1$. 所設曲線均是由曲線 $y^4-y^2+x^2=o$ 平行於 ox 軸移動得來；但是此曲線有一個二重點在原點，又在和 y 軸的交點上切於二直線 $y=\pm1$. 所以直線 $y=o$ 是二重點的軌迹，直線 $y=\pm1$ 成為眞正的包封.

在曲線 C 有一個包封 E 時，一個曲線 C 和包封的接觸點都是此一個曲線和其同類中相鄰曲線的交點的極限位置．誠然，設

$$f(x,y,a)=o,\quad f(x,y,a+h)=o \tag{7}$$

是兩個相鄰曲線的方程式；此兩個方程式定出此二曲線的公點的坐標，牠們顯然可代以同值方程式

$$f(x,y,a)=o,\quad \frac{f(x,y,a+h)-f(x,y,a)}{h}=o, \tag{7'}$$

在 h 漸近於零時，就是說第二曲線和第一曲線無限相近時，第二方程式成為 $\frac{\partial f}{\partial a}=o$.［註一］這個性質在幾何上差不多是極明瞭的；誠然，由圖 32(a) 可見兩個相鄰曲線 C，C' 有一個交點 N，在第二

Fig. 32 *a*.

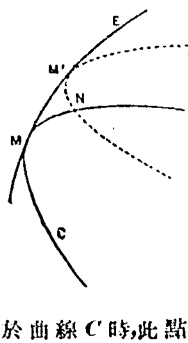
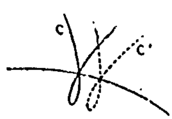


Fig. 32 *b*.



曲線 C' 來合於曲線 C 時，此點 N 來合於接觸點 M．同樣，在圖 32(b)

可見若曲線(1)有一個二重點,在C'來合於C時,C及C'的交點中有一個來合於二重點.

以上的注意表明爲何我們同時得着包封及奇點的軌迹.爲確定人的觀念,假定$f(x, y, a)$關於a是m次的多項式,對於平面中任意一點M_0坐標是(x_0, y_0),方程式

(8) $$f(x_0, y_0, a)=o$$

普通的有m個根;那麼,此同類曲線中有m個各別曲線經過此點.但是若是M_0點在曲線$R(x, y)=o$上,對於a的一個價值,我們同時有

$$f(x_0, y_0, a)=o, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=o,$$

方程式(8)有一個二重點.所以我們可以說曲線$R(x, y)=o$是平面上諸點的軌迹.對於這些點,曲線(1)中經過這些點的有兩個相合,圖32(a)及32(b)正是顯明一點來近於包封上一點時或來近於奇點的軌迹上一點時,經過此點的曲線C有兩個彼此相差極少,在極限上彼此相合.

注意.一有時我們所要求包封的這些曲線其方程式

(9) $$F(x, y, a, b)=o$$

含有兩個變率a及b,其間有一個關係式$\varphi(a, b)=o$.這個場合並不各別於普通場合.因爲由關係式$\varphi=o$我們能將b看作a的函數.依以前的定規,必須在方程式(9)上加以關於a的導來式等於零

$$\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}\,\frac{db}{da}=o;$$

但是由關係式$\varphi(a,b)=o$,得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{da}=o,$$

消去$\frac{db}{da}$,以上的公式成為

(10) $$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial b}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial\varphi}{\partial a}=o.$$

所以在方程式$F=o$,$\varphi=o$及方程式(10)間消去a及b,即得包封的方程式.

199. 一個直線的包封.——取一個直線 D 其方程式是法線形狀(forme normale)

(11) $$x\cos\alpha+y\sin\alpha-f(\alpha)=o,$$

變率是 α 角.關於此變率取導來式,得

(12) $$-x\sin\alpha+y\cos\alpha-f'(\alpha)=o;$$

自(11),(12)兩方程式得動直線和其包封的接觸點的坐標,

(13) $$\begin{cases}x=f(\alpha)\cos\alpha-f'(\alpha)\sin\alpha,\\ y=f(\alpha)\sin\alpha+f'(\alpha)\cos\alpha.\end{cases}$$

很容易驗明此點(x,y)所畫曲線E的切線是直線D;誠然,自方程式(13)得

(14) $$\begin{cases}dx=-[f(\alpha)+f''(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha,\\ dy=-[f(\alpha)+f''(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha,\end{cases}$$

可見切線的角係數是$-\cot\alpha$,這正是直線D的角係數.自方程式(14)又得

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\pm[f(\alpha)+f''(\alpha)]d\alpha,$$

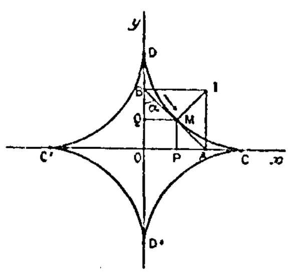
s是包封曲線的弧,因得

$$s=\pm\left[\int f(\alpha)d\alpha+f'(\alpha)\right];$$

所以欲得一個能直曲線,只須取一個已知函數的導來式爲 $f(\alpha)$ (註二).

譬如取 $f(\alpha)=l\sin\alpha\cos\alpha$; 在方程式 (11) 中逐漸令 $y=o$ 及 $x=o$, 得 $oA=l\sin\alpha$, $oB=l\cos\alpha$ (圖33), 結果 $AB=l$. 所以所求曲線是一個直線的包封,此直線的長爲定數l,兩端

Fig. 33.



在兩個直交直線上.現在公式(13)成爲

$$x=l\sin^3\alpha,\qquad y=l\cos^3\alpha,$$

包封的方程式是

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$$

這是一個過擺線 (hypocycloïde) 有四個逆退點,其形狀如圖所示.在 α 由 o 變至 $\frac{\pi}{2}$, 接觸點畫出 DC 弧.由 D 點起,弧的長度的算式是

$$s=\int_0^{\alpha} 3l\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha=\frac{3l}{2}\sin^2\alpha.$$

設I是在oA及oB上所建矩形的頂點,M是從I點向AB所引垂線的足;三角形AMI, APM給與

$$AM=AI\cos\alpha=l\cos^2\alpha,\quad AP=AM\sin\alpha=l\cos^2\alpha\sin\alpha$$

因而$OP=OA-AP=l\sin^3\alpha$,所以M點是直線AB和牠的包封的接觸點.又因

$$BM=l-AM=l\sin^2\alpha,$$

結果 弧 $DM=\frac{3}{2}BM.$

200. 一個圓的包封.——設

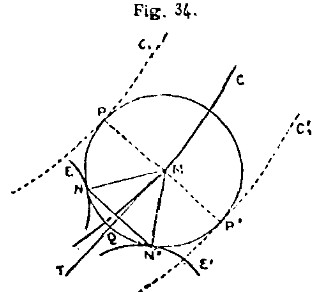
$$(x-a)^2+(y-b)^2-\rho^2=0 \tag{15}$$

是一個圓的方程式,a, b, ρ都是一個變率t的函數.此圓和其包封的接觸點都是此圓和直線

$$(x-a)a'+(y-b)b'+\rho\rho'=0 \tag{16}$$

的交點.此直線垂直於圓心(a, b)所畫曲線C的切線,其至圓

Fig. 34.



心的距離等於$\rho\frac{d\rho}{ds}$是，s曲線C的弧.此直線割此圓於兩點N，N'關於切線MT為對稱(圖34)；所以包封由兩枝曲線E，E'所成，一般的此兩枝曲線在解析上不是各別的.有許多特別場合可以注意：

1° 若ρ是常數，接觸弦 (corde des contacts) NN'成為法線PP'，包封由兩個平行曲線C_1，C_1'所成，此二曲線是在曲線C的法線自M點的兩邊各取一個定長ρ得來；

2° 若是$\rho=s+C$，則$\rho\frac{d\rho}{ds}=\rho$，弦$NN'$成為圓在$Q$點的切線.包封的兩枝相合，此包封$\Gamma$以曲線$C$的切線為法線；$C$叫作$\Gamma$的閉縮線.反之$\Gamma$叫作$C$的伸開線.若$d\rho>ds$，直線(16)和圓不相交.包封成為虛幻.

第二勾斯迪克 (Caustique secondaire).—假定動圓的半徑比例於圓心至一定點O的距離，若取此定點為原點，則圓的方程式是

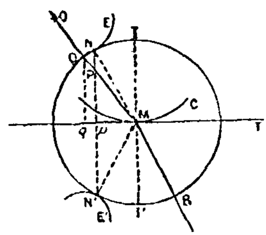
$$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2(a^2+b^2)$$

k是一個常數因數.接觸弦的方程式是

$$(x-a)a'+(y-b)b'+k^2(aa'+bb')=o.$$

設δ及δ'是圓心$M(a,b)$至接觸弦及至經過原點而平行於接觸弦之直線的距離，自以上的方程式得$\delta=k^2\delta'$. 所以自帶徑MO上取一點P使$MP=k^2MO$，再自P點引直線垂直於圓心的軌迹的切線即得接觸弦(圖35). 假定$K<1$，設E是圓的包封的一枝，牠和定點O同居於曲線C的切線的一邊，命t及r

Fig 35.



爲法線MI和直線MO及MN所作的角;我們有

$$\sin i=\frac{Mq}{MQ},\sin r=\frac{Mp}{MN},\ \frac{\sin i}{\sin r}=\frac{Mq}{Mp}=\frac{MQ}{MP}=\frac{1}{k}.$$

此附已經說明,假定O點是一個光源 (foyer lumineux),曲線C是O點所在的環境 (milieu) 及新環境的分開線.此新環境關於第一環境的折光指標 (indice de réfraction) 是$\frac{1}{k}$. 折光 (réfraction) 以後,射入光線 (rayon incident) OM變爲折光線 (rayon réfracté) MR,依折光律,牠正是NM的延長線,那麽,一切的折光線MR都垂直於包封E. E叫作折光的第二勾斯迪克.眞正的勾斯迪克即折光的包封,是第二勾斯迪克的閉縮線.

包封的第二枝E'顯然沒有物理上的意義;牠和一個折光的負指標相應.若假定$K=1$,包封E縮減爲O點自身,至於E'乃O點關於曲線C的切線的對稱軌迹.這個曲線E'又是由O點所出光線在曲線C上的反射光線 (reflexion) 的第二勾斯迪克.同樣方法可證明若以曲線C上每一點爲心畫一圓,其半徑比例於圓心至一個定直線的距離,所得包封是一個光源在無限遠所出光線的第二勾斯迪克.

201. **具有一個變率的曲面**——設

(17) $$f(x, y, z, a)=o$$

是一個曲面 S 的方程式,關係於一個任意變率 a. 若是有一個曲面 E 沿一個曲線 C 上和每一個曲面 S 相切,則曲面 E 叫作曲面 S 的包封, S 及 E 兩曲面的接觸曲線 C 叫作象徵曲線 (Caractéristique).

那麼,若要辨認是否有一個包封存在,必須考慮在一個曲面 S 上,是否能夠定出一個曲線 C, 牠們的軌迹曲面沿此曲線 C 切於此曲面 S, 設 x, y, z 是象徵曲線上一點 M 的坐標;若此點不是曲面 S 的一個奇點,此曲面的切平面方程式是

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=o.$$

他一方面,若在包封 E 上變位, x, y, z, a 都是兩個自變數的函數能滿足方程式 (17),在牠們的微分間有關係式

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial a}da=o;$$

若要曲面 E 的切平面恆同於曲面 S 的切平面,必須要也只須要在微分 dx, dy, dz 間有關係式

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=o.$$

計算着以上的條件,此條件成爲

(18) $$\frac{\partial f}{\partial a}=o.$$

倒轉來,和平曲線相同 (n^o198), 可証明在方程式 (17) 及 (18)

中消去變率a所得方程式或表曲面S的包封,或是奇點的軌迹.方程式(17)及(18)所表象徵曲線C仍是曲面S及其同類中相隣曲面的交線的極限位置.

202. **具有兩個變率的曲面.**——設有一個方程式

(19) $$f(x,y,z,a,b)=o,$$

牠所表的曲面S關係於兩個變率a及b.在一般場合,沒有一個曲面和每一個曲面S沿一個曲線相切;誠然,若在變率a及b間立一個關係式$b=\varphi(a)$,則這些曲面只關係一個變率a.象徵曲線為方程式(19)及

(20) $$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a)=o$$

所表.此象徵曲線普通的關係於$\varphi'(a)$,然則在每一個曲面S上有無量數的象徵曲線;所以在a及b變化時,這些象徵曲線;不能產生曲面,現在我們求是否有一個曲面E不沿一個曲線而沿一點或數點和每一個曲面S相接觸,若是這樣一個曲面是存在的,曲面S和包封E的一個接觸點的坐標(x,y,z)都是兩個變率a及b的函數.牠們能滿足關係式(19),因而牠們的微分dx,dy,dz能滿足關係式

(21) $$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=o.$$

若要(x,y,z)點的軌迹曲面切於曲面S,必須要

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=o,$$

計算着以上的關係式,此關係式成為

$$\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=o;$$

因爲 a 及 b 是兩個自變數,所以對於接觸點,必須要

(22)
$$\frac{\partial f}{\partial a}=o, \qquad \frac{\partial f}{\partial b}=o.$$

所以在關係式(19)及(22)間消去 a 及 b 即得包封的方程式.這個推理顯明如此所得的曲面誠然切於曲面 S,除卻

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=o$$

和方程式(19)及(22)有相同的解不論;那麼此曲面或是曲面 S 的包封,或是牠們的奇點的軌迹.

總而言之,依被封曲面關係於一個或兩個變率,我們有兩種包封曲面.例如一個球面的切平面或一個雙曲面的切平面關係兩個變率,此平面和曲面只接觸於一點.反之,一個錐面或柱面的切平面只關係一個變率,此平面沿一個母線 (génératrice) 和牠的包封相接觸.

203. **能展曲面** (surface développable).———只關係一個變率的平面的包封曲面叫作能展曲面.設

(23)
$$z=\alpha x+yf(\alpha)+\varphi(\alpha)$$

是動平面 P 的方程式,α 是變率,$f(\alpha)$ 及 $\varphi(\alpha)$ 是此變率的兩個任何函數.象徵曲線由方程式(23)及關於 α 微分所得方程式

(24)
$$x+yf'(\alpha)+\varphi'(\alpha)=o$$

所定;這是一個直線 G,那麼,能展曲面是一個直線曲面 (surface réglée).我們將証明這一切直線 G 都切於一個空間曲線.爲此,再

關於 α 微分一次,所得新方程式

(25) $$yf''(\alpha)+\varphi''(\alpha)=o$$

在象徵曲線 G 上定出特別一點 M. α 變化,這些點 M 的軌迹是一個空間曲線 Γ,其切線是直線 G 自身.誠然,曲線 Γ 爲三個方程式(23),(24),(25)所表,自此可得坐標 x, y, z 爲 α 的函數.將前兩個方程式微分之,再計算着末一個方程式,得

(26) $$dz=\alpha dx+f(\alpha)dy,\quad dx+f'(\alpha)dy=o,$$

他們表明曲線 Γ 的切線平行於象徵曲線 G. 但是這兩直線有一個公共點;結果,他們相合.

所以凡一個能展曲面都可以看作一個空間曲線 Γ 的切線所產曲面.此曲線 Γ 在特別場合能夠成爲一點,距離是有限或無限;在此時,曲面是一個錐面或柱面.在 $f''(\alpha)=o$ 時就是如此,

倒轉來,凡一個空間曲線 Γ 的切線所產曲面都是能展曲面.設

$$x=f(t),\qquad y=\varphi(t),\qquad z=\psi(t)$$

是 Γ 上一點的坐標;吻合平面 (plan os culateur) 的方程式是

(27) $$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=o,$$

係數 A, B, C 滿足兩個關係式

(28) $$Adx+Bdy+Cdz=o,\qquad Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=o,$$

至於吻合平面的幾何定義以後再說明之 (n° 214),

此平面關係一個變率 t;我們將驗明此平面的象徵曲線正是 Γ 的切線.這個象徵曲線是吻合平面和平面

$$dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=o$$

的交線,此第二平面也經過 (x, y, z) 點.若要証明此象徵曲線合於切線,只須証明我們有

$$Adx+Bdy+Cdz=0, \qquad dAdx+dBdy+dCdz=0;$$

但是此第一關係式是 A, B, C 的關係式(28)中的一個,第二關係式是將第一關係式微分再計算着(28)的第二關係式得來.

能展曲面的如此產法使人對於此曲面的形狀得到一個想像:設 AB 是一個空間曲線弧;自 AB 弧每一點 M 上引切線,我們對於每一個切線只取其和一個固定方向相應的一部分,譬如是和自 A 向 B 相應的部分罷,這些半直線的軌迹是曲面的一部 S_1,其界限是 AB 弧及在 A 點及 B 點上兩切線,他一方面伸張至無窮遠.同樣,若取 AB 弧上每一點的切線的他一段,則得曲面的他一部 S_2,他和 S_1 沿 AB 相接合,此曲面的兩部分自一個觀察者在其上視之,彼此爲部分的互相掩蓋.這是很明瞭的,凡經過 AB 弧上一點 O 的平面都沿兩枝曲線和曲面的兩部 S_1 及 S_2 相割,此兩枝曲線在 O 點相接合,成爲一個逆退(rebroussement);這個性質微實空間曲線 Γ 所以有逆退稜(arête de rebroussement)之名.

這是容易由計算証明的.取 O 點爲原點,割平面爲 xy 平面,切線爲 z 軸,吻合平面爲 xz 平面;若取 z 爲自變數,則 x 及 y 的展開式爲以下的形狀,

$$x=a_2z^2+a_3z^3+\ldots, \qquad y=b_3z^3+\ldots,$$

這是因爲在原點上,當得

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dz}=\frac{d^2y}{dz^2}=0$$

的緣故,在原點附近一點上的切線的方程式是

$$\frac{X-a_2z^2-a_3z^3-\ldots}{2a_2z+\ldots}=\frac{Y-b_3z^3-\ldots}{3b_3z^2+\ldots}=Z-z.$$

若令$Z=o$,則得切線和割平面的交點的坐標X, Y;此兩坐標的展開式各由z^2及z^3起.原點顯然是一個逆退點.

例. 取一個空間立方曲線(Cubique gauche)

$x=t, y=t^2, z=t^3$. 吻合平面的方程式是

$$t^3-3t^2X+3tY-Z=o;$$

將此方程式看作含t的方程式,説此方程式有一個二重根,即得能展曲面的方程式,這就等於在此二方程式

$$(E)\qquad \begin{cases} t^2-2tX+Y=o, \\ Xt^2-2tY+Z=o \end{cases}$$

間消去t.其結果是

$$(XY-Z)^2-4(X^2-Y)(Y^2-XZ)=o,$$

此能展曲面是第四級曲面.

我們可以注意方程式(E)表此空間立方曲線的切線.

204. **能展曲面的偏微分方程式.**——設$z=F(x,y)$是一個能展曲面的方程式,函數$F(x, y)$必能滿足方程式$s^2-rt=o$, r,s,t是依習慣表函數$F(x,y)$的三個第二級偏導來式.

顯然,此曲面的切平面方程式是

$$Z=pX+qY+z-px-qy,$$

他只當關係於一個變率;那麼,$p, q, z-px-qy$三個量中只當有一個任意的,特別在p及q間當有一個關係式$f(p,q)=o$,從此得沙勾個$\dfrac{D(p,q)}{D(x,y)}=rt-s^2$當恒等於零.

反之,若是$rt-s^2=o$,則p及q間至少有一個關係式.如果p及q間有兩個各別的關係式,則p及q都是常數$p=a, q=b$,函數

$F(x,y)$ 等於 $ax+by+C$; 曲面是一個平面.若是 p 及 q 間只有一個關係式,我們可寫爲 $q=\varphi(p)$, p不是一個常數,但是

$$y(rt-s^2)=\frac{D(z-px-qy,p)}{D(x,y)},$$

在 $rt-s^2=0$ 時, $z-px-qy$ 也就是 p 的一個函數,譬如是 $\psi(p)$. 那麼,未知函數 $z=F(x,y)$ 及他的偏導來式 p 及 q 當滿足此兩個關係式

$$q=\varphi(p),\qquad z-px-\varphi(p)y=\psi(p);$$

關於 x 及 y 取此第二關係式的導來式,得

$$[x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial x}=0,\qquad [x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

p 旣不是一個常數,我們當有

$$x+y\varphi'(p)+\psi'(p)=0.$$

所以曲面的方程式當自此關係式及

$$z=px+y\varphi(p)+\psi(p)$$

間消去 p 得來,這正是將 p 看作變率時此平面的包封.

205. **一類的空間曲線的包封.**——關係一個變率的一類的空間曲線普通的沒有包封曲線.試先取一類的直線,

(29) $$x=az+p,\qquad y=bz+q,$$

a, b, p, q 是一個變率 α 的已知函數.我們求有甚麼條件,此直線在他的所有的位置上皆和一個空間曲線 Γ 相切.設 $z=\varphi(\alpha)$ 是動直線 D 和其包封 Γ 的接觸點 M 的竪坐標;所求曲線 Γ 爲方程式 (29) 所表,更加以關係式 $z=\varphi(\alpha)$, 此曲線的切線的方向率的算式是

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\varphi'(\alpha)+a'\varphi(\alpha)+p',$$

$$\frac{dy}{d\alpha}=b\varphi'(\alpha)+b'\varphi(\alpha)+q',\qquad \frac{dz}{d\alpha}=\varphi'(\alpha),$$

a', b', p', q' 是 a, b, p, q 的導來式.若要此切線就是直線 D,必須要也只須要

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\frac{dz}{d\alpha},\ \frac{dy}{d\alpha}=b\frac{dz}{d\alpha},$$

就是

$$a'\varphi(\alpha)+p'=o,\qquad b'\varphi(\alpha)+q'=o.$$

那麼,未知函數 $\varphi(\alpha)$ 當滿足此兩個各別的關係式,結果,必須此兩個關係式能相容,動直線纔能够有包封,就是必須

$$a'q'-b'p'=o.$$

若是這個關係式能滿足,取 $\varphi(\alpha)=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}$,即得包封曲線.

這個推理容易推廣,我們取一類的曲線 C,關係於一個變率 α,爲兩個方程式

(30) $$F(x,y,z,\alpha)=o,\qquad \Phi(x,y,z,\alpha)=o$$

所表.若是這些曲線都切於一個曲線 Γ,和變率的價值 α 相應曲線 C 的接觸點 M 的坐標 (x,y,z) 滿足方程式 (30) 及另一個和此各別的關係式.設 dx, dy, dz 是關於 M 點在曲線 C 上變位的微分;在曲線 C 上, α 是常數,所以在這些微分間有兩個關係式

$$
(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy+\dfrac{\partial F}{\partial z}dz=o, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}dz=o. \end{cases}
$$

他一方面，$\partial x, \partial y, \partial z, \partial\alpha$ 表 M 點在曲線 Γ 上變位時 x, y, z, α 的微分;這些微分當滿足關係式

$$
(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\partial x+\dfrac{\partial F}{\partial y}\partial y+\dfrac{\partial F}{\partial z}\partial z+\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\partial\alpha=o, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\partial x+\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\partial y+\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\partial z+\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\partial\alpha=o. \end{cases}
$$

若要曲線 C 和 Γ 相切,必須要也只須要

$$
\frac{dx}{\partial x}=\frac{dy}{\partial y}=\frac{dz}{\partial z},
$$

計算着關係式(31)及(32),這些條件成爲

$$
\frac{\partial F}{\partial \alpha}\partial\alpha=o, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\partial\alpha=o.
$$

所以接觸點的坐標 x,y,z 當滿足方程式

$$
(33)\qquad F=o, \quad \Phi=o, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}=o, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}=o.
$$

所以若要曲線 C 有一個包封,必須要不論 α 如何,此四個方程式關於 x, y, z 有一組的公共的解,以上的推理表明此點 x, y, z 所畫曲線 Γ 在他的每一點上切於其相應曲線 C.但是這都是假定 (x,y,z) 點不是曲線 C 的奇點,就是說關係式(31)定出微分 dx, dy, dz 的比.

注意 I.——若是曲線 C 是含一個變率的曲面 $F(x,y,z,\alpha)=o$

的象徵曲線.方程式(33)縮減爲三個各別的關係式,

$$(34)\qquad F=o,\qquad \frac{\partial F}{\partial\alpha}=o,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}=o;$$

這些方程式所表的曲線是象徵曲線的包封.這是對於能展曲面的母線(génératrece)所証性質的推廣.

注意 II.——方程式(33)中第一個及第三個表含一個變率的曲面 $F(x,y,z,\alpha)=o$ 的象徵曲線;第二個及第四個表曲面 $\phi(x,y,z,\alpha)=o$ 的象徵曲線.若是曲線 C 有一個包封,C 和其包封的接觸點當同時在此兩個象徵曲線上.C 的包封曲線屬於兩類曲面的包封的交線.

有時一個動直線的方程式的形狀是

$$(35)\qquad \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},$$

x_0, y_0, z_0, a, b, c 都是一個變率 α 的函數我們很容易直接得到此直線有一個包封的條件.用 l 表這些比的公共價值;直線任一點的坐標的算式是

$$x=x_0+la,\qquad y=y_0+lb,\qquad z=z_0+lc,$$

我們當視察是否能夠取 α 的一個函數爲 l,使 (x,y,z) 點所畫曲線切於動直線.爲此,必須要

$$(36)\qquad \frac{x'_0+a'l}{a}=\frac{y'_0+b'l}{b}=\frac{z'_0+c'l}{c};$$

用 m 表這些比的公共價值,在所得的三個線方程式中消去 l 及 m,得條件方程式

(37)
$$\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

若此條件能滿足,關係式(36)定出t,因而定出包封.

II.——兩個曲線的接觸及一個曲線和一個曲面的接觸.

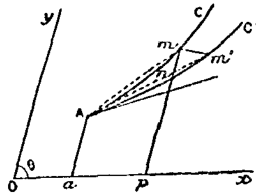
206. **兩個平曲線的接觸.**——設C及C'是兩個平曲線相切於一點A.設想對於A點附近曲線C上每一點m,依一個任何定律,作曲線C'上一點m'相應使m'點和m點同時漸近於A.我們取弧Am為主無限小,這也就等於取弦Am為主無限小.我們先求必須作如何的相應法,mm'關於Am的無限小的級數為最大[註三].為此,我們取兩個直交或斜交坐標軸,y軸不平行於切線AT(圖36),設

(C) $$y=f(x),$$

(C') $$Y=F(x)$$

是兩個曲線的方程式,(x_0, y_0)是A點的坐標;m點的坐標是x_0+h及$f(x_0+h)$,m'點的坐標是x_0+k及$F(x_0+k)$,k表h的一個函數,牠和h同時為零,此函數定出兩曲線上m及m'點的相應法.我

Fig. 36.



們再注意主無限小 Am 又可代以 $h=ap$，這是因為在 m 點漸近於 A 點時，比 $\frac{ap}{Am}$ 漸近一個確定極限不等於零。

此層已經說明，假定對於所取的某一相應法，mm' 關於 h 是 $r+1$ 級的無限小；然則 $\overline{mm'}^2$ 是 $2r+2$ 級的無限小。

但是我們可寫為

$$\overline{mm'}^2=[F(x_0+k)-f(x_0+h)+(k-h)\cos\theta]^2+(k-h)^2\sin^2\theta,$$

θ 表兩軸所作的角；所以必須要差數 $k-h$ 及 $F(x_0+k)-f(x_0+h)$ 都至少是 $r+1$ 級的無限小，就是說

$$k=h+\alpha h^{r+1},\quad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{r+1},$$

α 及 β 都是 h 的函數，在 h 漸近於零時，他們是有限，最後公式可寫為

$$F(x_0+h+\alpha h^{r+1})-f(x_0+h)=\beta h^{r+1};$$

假想將 $F(x_0+h+\alpha h^{r+1})$ 依 α 的冪展開，其關於 α 的部分至少是 $r+1$ 級的無限小，所以差數

$$\Delta=F(x_0+h)-f(x_0+h)$$

至少是 $r+1$ 級的無限小，或者其級數仍可以更高。但是此差數 Δ 表曲線 C,C' 在 oy 的一個平行線上的兩點的距離 mn。既是若將 m' 點代以 n 點只能增加 mm' 的無限小的級數，由此推定兩個曲線上相應點皆在 oy 的一個平行線上時，此兩點的距離的無限小的級數為最大。如果此級數是 $r+1$，我們就說此兩曲線在 A 點有一個 r 級的接觸。

注意。——由這個定義得到若干的注意。oy 軸只限定不平行於公共切線 AT；若要計算接觸的級數，我們可取兩個曲線上相應點同居於一個定直線 D 的一個平行線上，只要此定直線

不平行於切線.以上的推理表明所得無限小的級數不關係直線 D 的方向;這是很容易驗明的.誠然,假定由曲線 C 上一點 m 引兩個直線 $m\,m'$ 及 $m\,n$ 都不平行於切線的方向.在三角形 $m\,m'\,n$,得

$$\frac{mm'}{mn}=\frac{\sin\widehat{mnm'}}{\sin\widehat{mm'n}};$$

在 m 漸近於 A 時,角 $\widehat{mnm'}$ 及 $\widehat{mm'n}$ 的極限異於 o 及 π,因爲弦 $m'n$ 的極限是切線 AT,結果 mm' 和 mn 爲同級.同樣的計算法表明不論由 m 點得到 m' 點所用方法如何,mm' 的無限小的級數不能高於 mn,這是因爲分子 $\sin\widehat{mnm'}$ 有一個確定極限不等於零的緣故.

我們是取弧 Am 或弦 Am 爲主無限小;若取 C' 上的 An 弧爲主無限小也得到相同的結果.這是因爲 Am 及 An 是同級的緣故.

若曲線 C, C' 有 r 級的接觸,我們能有無量數的方法使兩曲線上 m 及 m' 點相應使 $m\,m'$ 是 $r+1$ 級的無限小.我們只須取 $k=h+\alpha h^{s+1}$, $s\geqq r$, α 是 h 的一個函數,祇在 $h=o$ 時保有確定的價値.若是 $s<r$,則 $m\,m'$ 的級數就只是 $s+1$ 了.

207. **接觸的級數.**——欲得兩個曲線 C, C' 的接觸的級數由以上所見,須要計算

$$Y-y=F(x_0+h)-f(x_0+h)$$

關於 h 的無限小的級數.這兩個曲線旣相切於 A 點,我們當先得着 $F(x_0)=f(x_0)$, $F'(x_0)=f'(x_0)$; 然而對於 x_0,兩函數的其他的導來式也能够有若干級皆相等.爲該括一切場合計,我們假定

$$(38)\quad \begin{cases} F(x_0)=f(x_0) & F'(x_0)=f'(x_0) \\ F''(x_0)=f''(x_0),\ldots & F^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0), \end{cases}$$

至於以下的導來式 $F^{(n+1)}(x_0)$ 及 $f^{(n+1)}(x_0)$ 則不相等.應用戴勞公式在二函數 $F(x)$ 及 $f(x)$ 上,我們可寫爲

$$Y=F(x_0)+\frac{h}{1}F'(x_0)+\ldots$$

$$+\frac{h^n}{1\cdot2\ldots n}F^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{1\cdot2\ldots(n+1)}[F^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon]$$

$$y=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\ldots$$

$$\frac{h^n}{1\cdot2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{1\cdot2\ldots(n+1)}[f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon'],$$

各邊減各邊,得

$$(39)\quad Y-y=\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}[F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon-\varepsilon']$$

ε 及 ε' 是無限小.所以兩個曲線的接觸的級數等於在 $x=x_0$ 時此二函數 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的首先不相等於導來式的級數.

拉格郎熱所定條件(38)又表明方程式 $F(x)=f(x)$ 以 $x=x_0$ 爲 $n+1$ 級的複根.但是此方程式定出此二曲線 C,C' 的公點的橫坐標;所以我們也可以說有 n 級的接觸的兩個曲線有 $n+1$ 個交點合爲一個.

公式(39)表明在 n 是偶數時,$Y-y$ 和 h 同時變符號,在 n 是奇數時符號不變.所以兩個有奇級的接觸曲線在接觸點不互相通過,兩個有偶級的接觸曲線在接觸點互相通過.這是很容易了

屏的.爲確定人的觀念,假定一個曲線C'在A點附近三個點上通過曲線C;如果此曲線C'以連續狀態變化形狀,其方法總使此三個交點來合於A點,C'的極限位置和C有第二級的接觸.由作圖可見此二曲線在A點相通過.這個推理自然是一般的.

若是兩曲線的方程式不是本縱坐標y及Y解開.這是最普通的場合,由計算導來式的定規總能得到兩曲線有n級的接觸的必要條件.此問題毫無特殊困難.我們但考慮幾個常用的特別場合.先假定每一曲線上的坐標都爲一個變率的函數

$$(C)\qquad x=f(t),\qquad y=\varphi(t),$$

$$(C')\qquad X=f(u),\qquad Y=\psi(u),$$

對於一個特別價值t_0,我們有$\psi(t_0)=\varphi(t_0)$, $\psi'(t_0)=\varphi'(t_0)$,其方法總是此二曲線在A點相切,此點的坐標是$f(t_0)$, $\varphi(t_0)$若是$f'(t_0)$不等於零,這是我們以後所假定的,公共切線不平行於oy軸.令$u=t$,即得二曲線上橫坐標相同的點.他一方面,$x-x_0$關於$t-t_0$爲第一級,我們仍歸到計算$\psi(t)-\varphi(t)$關於$t-t_0$的無限小的級數.若要此兩曲線有一個n級的接觸,只須要

$$(40)\qquad \psi(t_0)=\varphi(t_0),\psi'(t_0)=\varphi'(t_0),\ldots,\psi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0);$$

若是導來式$\psi^{(n+1)}(t_0)$及$\varphi^{(n+1)}(t_0)$不相同,其接觸的級數只是n.

再取一個場合,曲線C爲兩個方程式所表,

$$(41)\qquad x=f(t),\qquad y=\varphi(t).$$

曲線C'的方程式是$F(x,y)=o$.此場合能變爲以上的場合;在$F(x,y)$中x代以$f(t)$,設$y=\psi(t)$是關係式

$$(42)\qquad F[f(t),\psi(t)]=o$$

所定除函數.如此,曲線C'也可以看作爲兩個方程式

$$(43)\qquad x=f(t),\qquad y=\psi(t)$$

所表.

若要二曲線 C, C' 在和變率 t_0 相應的點 A 有 n 級的接觸,必須要以上所得的條件 (40) 能滿足,但是除函數 $\psi(t)$ 的累次導來式.得自方程式

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}f'(t)+\dfrac{\partial F}{\partial y}\psi'(t)=o, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}[f'(t)]^2+2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}f'(t)\psi'(t) \\ \qquad\qquad +\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}[\psi'(t)]^2+\dfrac{\partial F}{\partial x}f''(t)+\dfrac{\partial F}{\partial y}\psi''(t)=o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}[f'(t)]^n+\ldots+\dfrac{\partial F}{\partial y}\psi^{(n)}(t)=o; \end{cases}$$

在這些公式中令 $t=t_0$, $x=f(t_0)$, $\psi(t_0)=\varphi(t_0)$, $\psi'(t_0)=\varphi'(t_0),\ldots,$ $\psi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0)$.這些條件可以宣告如下.令 $\mathfrak{F}(t)=F[f(t),\varphi(t)]$;若要兩曲線在 $t=t_0$ 點有 n 級的接觸,必須要也只須要

$$(45)\qquad \mathfrak{F}(t_0)=o,\quad \mathfrak{F}'(t_0)=o,\ldots,\quad \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=o,$$

由方程式 $\mathfrak{F}(t)=o$ 得變率 t 和二曲線的交點相應的價值.這些接觸的條件仍是表明方程式以 $t=t_0$ 爲 $n+1$ 級的複根,就是說此兩曲線有 $n+1$ 個公共點相合.

208. **吻合曲線** (Courbes osculatrices)——設有一個定曲線 C 及一個關係 $(n+1)$ 個變率 $a, b, c, \ldots, l$ 的曲線 C',此後者的方程式是

$$(46)\qquad F(x, y, a, b, c, \ldots, l)=o.$$

我們可以選取此 $n+1$ 個變率的價值,使曲線 C' 有 n 級的接觸.設 $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ 是曲線 C 上一點的坐標;曲線 C 及 C' 在 $t=t_0$ 點

上有n級的接觸的條件爲方程式(45)所定,其中

$$\mathfrak{F}(t)=F[f(t),\varphi(t),a,b,c,\ldots,l].$$

變率的價值t_0若已定,此$n+1$個方程式定出此$n+1$個變率$a,b,c,\ldots,l$.如此所得的曲線C'叫作曲線C的吻合曲線.

我們應用這幾個定理在幾個簡單曲線上.一個直線的方程式$y=ax+b$關係兩個變率a及b;所以吻合直線有一個第一級的接觸;若$y=f(x)$是一個曲線C的方程式,變率a及b當滿足兩個關係式

$$f(x_0)=ax_0+b,\qquad f'(x_0)=a;$$

我們復得切線的方程式,這是我們所預期的.一個圓周的方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=o \tag{47}$$

關係三個變率a,b,R;所以吻合圓(cercle osculatrice)有一個第二級的接觸.設$y=f(x)$是已知曲線的方程式;我們說此圓過此曲線於相合三點以定出a,b,R,由方程式(47)得兩個條件

$$x-a+(y-b)y'=o,\qquad 1+y'^2+(y-b)y''=o. \tag{48}$$

由此二式所得a及b的價值恆同於曲度中心(centre de covrbure)的坐標;所以吻合圓和曲度圓相合.此接觸旣是第二級,我們由此決定一個平曲線的曲度圓在接觸點通過曲線,這些結果可先天(à priori)看出的;誠然,曲度中心的坐標只關係x,y,y',y'';所以有一個第二級的接觸的兩個曲線就有相同的曲度中心;但是吻合圓的曲度中心顯然就是此圓的中心;所以曲度圓和吻合圓恆同,他一方面,我們取兩個相鄰的曲度圓;此兩圓的半徑的差旣等於閉縮線(développée)在此兩圓心間的弧的長,此差數當大於兩圓心的距離,所以此兩圓中有一個完全在他一個內,若是在接觸點附近此兩圓皆在曲線內或皆在曲線外,則此一層不能實現.所以

此兩圓通過曲線C.

但是在一個平曲線的若干的特別點上,吻合圓可以不通過曲線,這個注意也附在一般的性質上,已知一個曲線C'關係$n+1$個變率,在$n+1$個方程式(45)上,我們可加一個新方程式

$$\mathfrak{F}^{(n+1)}(t_0)=o.$$

但只須要將t_0看作一個待決的新未知數,所以普通的在一個平曲線C上有若干個的點,在此等點上,曲線C及其吻合曲線C'有$n+1$級的接觸,那麼,曲線C上有些點,曲線在這些點的切線有一個第二級的接觸:這都是彎曲點 (point d'iuflexion). 對於這些點,$y''=o$. 若要得到吻合圓有第三級的接觸的點,必須將方程式(48)的末一方程式微分之,得

$$3y'y''+(y-b)y'''=o.$$

消去$y-b$,得條件

(49)
$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=o,$$

能滿足這個條件的點都是能令$\dfrac{dR}{dx}=o$的點,就是說在這些點上曲度半徑是最大或最小.對於一個橢圓,這都是頂點;對於一個擺線 (cycloïde), 這都是切線平行於底的點.

209. **吻合曲線的性質**——一個曲線C'和曲線C相遇於$n+1$個隣點,在這些點相合時,此曲線C'的極限位置可以看成吻合曲線.為確定人的觀念,我們取一類曲線關係三個變率a, b, c, 設t_0+h_1, t_0+h_2, t_0+h_3是t_0的三個相隣價值;和曲線C相遇於此三個相隣點的曲線C'為以下的三個方程式所定

(50)
$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=o,\quad \mathfrak{F}(t_0+h_2)=o,\quad \mathfrak{F}(t_0+h_3)=o.$$

在末二方程式中減去第一方程式,再應用有限增長公式在此兩個差數上,得一組的同值方程式

(51) $\mathfrak{f}(t_0+h_1)=o,\quad \mathfrak{f}'(t_0+k_1)=o,\quad \mathfrak{f}'(t_0+k_2)=o,$

k_1是在h_1及h_2之間,k_2是在h_1及h_3之間,再自第三方程式減去第二方程式,仍應用有限增長公式,又得一新組的方程式

(52) $\mathfrak{f}(t_0+h_1)=o,\quad \mathfrak{f}'(t_0+k_1)=o,\quad \mathfrak{f}''(t_0+l_1)=o,$

l_1是在k_1及k_2之間,在h_1,h_2,h_3皆漸近於零時,k_1,k_2,l_1也漸近於零,在極限上,這些方程式成爲

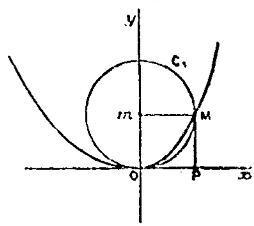
$$\mathfrak{f}(t_0)=o,\quad \mathfrak{f}'(t_0)=o,\quad \mathfrak{f}''(t_0)=o;$$

這正是定吻合曲線的方程式.無論變率的數目如何,這些推理是一般的;我們又可將吻合曲線看作爲以下的方法所定:一個曲線C'在p個點上切於曲線C,在q個點上通過之$(2p+q=n+1)$,在此$p+q$點合而爲一時,吻合曲線看成此曲線C'的極限位置.

例如吻合圓是和曲線C在接觸點附近三點上相交的圓的極限位置.此圓又可以看作和曲線C在一個定點上相切又在一隣點相交的圓的極限位置.這個性質很容易證明,我們在此處暫留瞬息.

取此定點爲原點,切線爲x軸,法線向曲度中心的方向爲oy軸的正向.在原點上我們有$y'=o$,因而$R=\frac{1}{y''}$,依戴勞公式我們

Fig. 37.



可寫爲

$$y=x^2\left(\frac{1}{2R}+\varepsilon\right),$$

ε 和 x 同時爲無限小.由此可見在 M 漸近於 O 點時. R 是算式 $\frac{x^2}{2y}=\frac{\overline{OP}^2}{2MP}$ 的極限.他一方面,設 C_1 是一個圓,牠在原點上切於 OX 軸,又過 M 點,R_1 是半徑;我們有

$$\overline{OP}^2=\overline{Mm}^2=MP(2R_1-MP),$$

或

$$\frac{\overline{OP}^2}{2MP}=R_1-\frac{MP}{2};$$

所以半徑 R_1 的極限誠然等於曲度半徑 R.

210. **兩個空間曲線的接觸.**——兩個空間曲線的接觸的級數的定法和平曲線同.設有兩個曲線 Γ,Γ' 在 A 點相切;設 M 是曲線 Γ 在 A 點附近的一點,對於此點依一個任何定律使曲線 Γ' 上有一點 M' 相應,其相應法限定此兩點 M,M' 同時漸近於 A.若取弧 AM 爲主無限小,我們將求 MM' 關於弧 AM 的無限小的級數的最大限;如果此級數是 $n+1$,我們就說此二曲線有一個 n 級的接觸.

我們將此二曲線標誌在一系的直交軸上,[註四] yz 平面不平行於公共切線.先假定曲線的方程式爲以下的形狀:

$$(\Gamma)\quad\begin{cases}y=f(x),\\ z=\varphi(x),\end{cases}\qquad(\Gamma')\quad\begin{cases}Y=F(x),\\ Z=\Phi(x),\end{cases}$$

設 $x_0\ y_0\ z_0$ 是接觸點的坐標,M 及 M' 二點的坐標當是

$$M[x_0+h,f(x_0+h),\varphi(x_0+h)],\quad M'[x_0+k,F(x_0+k),\Phi(x_0+k)],$$

k 是 h 的一個函數,此函數關係於所取的相應法,牠和 h 同時爲

零.我們仍可舍 AM 弧而取 h 爲主無限小 (n° 206).若要 MM'是 $n+1$ 級的無限小,必須要此每一個差數

$$k-h,\quad F(x_0+k)-f(x_0+h),\quad \Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)$$

至少是 $n+1$ 級的無限小,所以我們當得

$$k-h=\alpha h^{n+1},\qquad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$
$$\Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1}.$$

在 h 漸近於零時,α,β,γ 仍爲有限;將 k 代以牠的價值,此末二條件成爲

$$F(x_0+h+\alpha h^{n+1})-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$
$$\Phi(x_0+h+\alpha h^{n+1})-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1}.$$

本戴勞公式將 $F(x_0+h+\alpha h^{n+1})$ 及 $\Phi(x_0+h+\alpha h^{n+1})$ 展開,凡關於 α 的項都含 h^{n+1} 爲因數,差數

$$F(x_0+h)-f(x_0+h),\quad \Phi(x_0+h)-\varphi(x_0+h)$$

當至少是 $n+1$ 級.如果距離 MM' 是 $n+1$ 級,二曲線上同橫坐標 (x_0+h) 二點 M 及 N 的距離 MN 就至少是 $n+1$ 級,所以若令二曲線上同橫坐標的點相應,即得無限小的級數的最大限度.

這個級數甚易計算,這兩個曲線旣是相切,我們有關係式

$$f(x_0)=F(x_0),\ f'(x_0)=F'(x_0),\ \varphi(x_0)=\Phi(x_0),\ \varphi'(x_0)=\Phi'(x_0);$$

爲普及一般場合,我們假定又有

$$f''(x_0)=F''(x_0),\ldots,\ f^{(n)}(x_0)=F^{(n)}(x_0),$$
$$\varphi''(x_0)=\Phi''(x_0),\ldots,\ \varphi^{(n)}(x_0)=\Phi^{(n)}(x_0),$$

差數 $F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)$,$\Phi^{(n+1)}(x_0)-\varphi^{(n+1)}(x_0)$,中至少有一個不等於零,距離 MM'就是 $n+1$ 級,二曲線就有一個 n 級的接觸.這個結果又可宣告如下:若要得兩曲線 Γ,Γ'的接觸級數,只須取此二曲線在 xoy 及 xoz 二平面的射影 (C,C') 及 (C_1,C_1') 又計算 C 和

C', C_1, 和 C'_1, 的接觸級數而取二數中的最小者.

若是曲線 Γ 及 Γ' 爲公式

$$(\Gamma) \qquad x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t),$$

$$(\Gamma') \qquad X=f(u),\quad Y=\Phi(u),\quad Z=\Psi(u),$$

所表,對於 $u=t=t_0$, 此二曲線相切,我們有

$$\Phi(t_0)=\varphi(t_0),\quad \Phi'(t_0)=\varphi'(t_0),\quad \Psi(t_0)=\psi(t_0),\quad \Psi'(t_0)=\psi'(t_0);$$

我們假定在接觸點上,切線不平行於 yz 平面,就是說 $f'(t_0)$ 不等於零,二曲線上同橫坐標的點皆和 t 的一個價值相應,若要有 n 級的接觸,必須要也只須要 $\Phi(t)-\varphi(t)$, $\Psi(t)-\psi(t)$ 關於 $t-t_0$ 是 $n+1$ 級的無限小,就是說

$$\Phi'(t_0)=\varphi'(t_0),\ldots\ \Phi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0),$$

$$\Psi'(t_0)=\psi'(t_0),\ldots\ \Psi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0),$$

差數

$$\Phi^{(n+1)}(t_0)-\varphi^{(n+1)}(t_0),\quad \Psi^{(n+1)}(t_0)-\psi^{(n+1)}(t_0)$$

至少有一個不等於零.

若是二曲線中有一個 Γ 爲方程式

$$(53) \qquad x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)$$

所表,曲線 Γ' 爲兩個未解方程式

$$F(x,y,z)=o,\qquad F_1(x,y,z)=o$$

所表,仍由207節的推理可証明若要在 Γ 和 t_0 相應點上有 n 級的接觸,必須要

$$(54) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}(t_0)=o, & \mathfrak{F}'(t_0)=o,\ldots, \quad \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=o, \\ \mathfrak{F}_1(t_0)=o, & \mathfrak{F}'_1(t_0)=o,\ldots, \quad \mathfrak{F}_1^{(n)}(t_0)=o, \end{cases}$$

其中是

$$\mathfrak{F}(t)=F[f(t),\varphi(t),\psi(t)],\quad \mathfrak{F}_1(t)=F_1[f(t),\varphi(t),\psi(t)].$$

211. **吻合曲線.**——一方面,設有一個定曲線Γ,其上一點的坐標都是一個變率的函數為公式(53)所表;他一方面設有一類的曲線Γ'關係$2n+2$個變率$a, b, c, \ldots l$為方程式

(55) $$F(x, y, z, a, b, \ldots l)=o, \qquad F_1(x, y, z, a, b, \ldots, l)=o$$

所表,普通的我們能選擇此$2n+2$個變率,使此類中一個曲線在一個定點上和曲線Γ有一個第n級的接觸.如此所得的曲線叫作Γ的吻合曲線.定變率$a, b, c, \ldots l$的方程式正是以上的$2n+2$個方程式(54).我們注意若要這些方程式能相容,必須要方程式F, F_1每一個至少含有$n+1$變率,例如曲線Γ'都是平曲線,方程式(55)中有一個只含三個變率.所以一個平曲線和在一個空間曲線的任取一點上不能和此曲線有一個高於第二級的接觸.

我們應用這個定理在最簡單的曲線上,譬如是直線及圓周.一個直線關係四個變率,所以吻合直線有一個第一級的接觸.我們很容易驗明牠和切線相合;誠然,若是將直線的方程式寫為

$$x=az+p, \qquad y=bz+q,$$

對於一個曲線Γ上一點(x_0, y_0, z_0),方程式(54)成為

$$x_0=az_0+p, \qquad x'_0=az'_0, \qquad y_0=bz_0+q, \qquad y'_0=bz'_0,$$

由此得

$$a=\frac{x'_0}{z'_0}, \qquad b=\frac{y'_0}{z'_0}, \qquad p=x_0-\frac{x'_0}{z'_0}z_0, \qquad q=y_0-\frac{y'_0}{z'_0}z_0;$$

我們就得到切線的方程式.若要切線和曲線有一個第二級的接觸,必須要$x''_0=az''_0$, $y''_0=bz''_0$,結果,

$$\frac{x''_0}{x'_0}=\frac{y''_0}{y'_0}=\frac{z''_0}{z'_0};$$

在以後的另一問題上(n° 216)我們將復得着這些點,

在空間的一個平圓關係六個變率,所以吻合圓有一個第二級的接觸,我們寫出平圓的方程式,

$$F(x,y,z)=A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=o,$$

$$F_1(x,y,z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=o,$$

變率是 a, b, c, R 及係數 $A. B. C$ 中此兩個和他一個的比,假定 x, y, z 各代以 $f(t), \varphi(t), \psi(t)$, 定這些變率的方程式是

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=o,$$

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=o,$$

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=o,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

$$(x-a)\frac{dx}{dt}+(y-b)\frac{dy}{dt}+(z-c)\frac{dz}{dt}=o.$$

$$(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=o$$

這些關係式中第二個及第三個明表吻合圓的平面是吻合平面自己(n° 214),至於末兩個方程式,若將 a, b, c 看作流行坐標軸們表在 (x, y, z) 點的法平面及隣近一點的法平面(n° 220).

212. 一個曲線及一個曲面的接觸.——設有一個曲面 S 及一個曲線 Γ 相切於 A 點,對於曲線上在 A 點附近一個隣點 M, 我們依一個任意定律令曲面上一點 M' 相應,其相應法總使此兩點 M 及 M' 同時漸近於 A, 我們先求必須如何取 M'

點，MM' 關於弧 AM 的無限小的級數纔能達到最大，我們將這個圖形標誌在三個直交坐標軸上。其坐標軸的選擇使曲線 Γ 的切線不平行於 yz 平面，曲面 S 的切平面不平行於 oz 軸。設 x_0, y_0, z_0 是 A 點的坐標；$Z=F(x,y)$ 是曲面 S 的方程式；$y=f(x)$，$z=\varphi(x)$ 是 Γ 的方程式；假想在一個相應法中 MM' 的無限小的級數是 $n+1$，設 M 點的坐標 x, y, z 是 x_0+h, $f(x_0+h)$, $\varphi(x_0+h)$，M' 點的坐標是 X, Y, $Z=F(X,Y)$。若要 MM' 關於弧 AM 是 $n+1$ 級，或說關於 h 是 $n+1$ 級也是一樣，必須要每一差數 $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ 至少是 $n+1$ 級，所以我們當有

$$X-x=\alpha h^{n+1},\qquad Y-y=\beta h^{n+1}\qquad Z-z=F(X,Y)-z=\gamma h^{n+1}$$

α,β,γ 在 $h=o$ 時為有限，因而

$$F(x+\alpha h^{n+1}\ y+\beta h^{n+1})-z=\gamma h^{n+1}.$$

那麼，$F(x,y)-z$ 至少是 $n+1$ 級，這表明若對於 Γ 上一點 M 令曲面 S 上一點 N 相應，N 是經過 M 而平行於 oz 軸的直線和曲面的交點，MN 的級數至少等於 MM' 的級數。所以若求 MN 關於弧 AM 或 h 的無限小的級數，即得曲面及曲線的接觸的級數。我們又可以說這是 Γ 和曲線 Γ' 的接觸級數，Γ' 是依 Γ 而平行於 oz 的射影柱面(Cylindre projetant)在曲面上的足，(這是很明瞭的，oz 的方向能夠是一個任何方向只要不平行於切平面。)

曲線 Γ' 的方程式是

$$y=f(x),\quad Z=F\{x,f(x)\}=\Phi(x);$$

由假定

$$\Phi(x_0)=\varphi(x_0),\quad \Phi'(x_0)=\varphi'(x_0);$$

若是另外的更有

$\Phi'(x_0)=\varphi'(x_0),\ldots,\Phi^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0)$, $\Phi^{(n+1)}(x_0)\neq\varphi^{(n+1)}(x_0)$,
曲線及曲面就有一個n級的接觸,我們注意方程式$\Phi(x)=\varphi(x)$定出曲線及曲面的交點橫坐標;在A點有一個n級的接觸的條件表明有$n+1$個交點在A點相合.

再取一個場合;Γ的方程式是$x=f(t),y=\varphi(t),z=\psi(t)$,曲面$S$的方程式是$F(x,y,z)=o$.方程所定的曲線$\Gamma'$的方程式當是$x=f(t),y=\varphi(t),z=\pi(t)$,函數$\pi(t)$是由以下關係式所定

$$F[f(t),\varphi(t),\pi(t)]=o.$$

若要Γ及Γ'有一個n級的接觸必須要$\pi(t)-\psi(t)$關於$t-t_0$是$n+1$級的無限小,就是說

$$\pi(t_0)=\psi(t_0),\quad \pi'(t_0)=\psi'(t_0),\ldots,\pi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0).$$

這些條件又可寫爲

$$\mathfrak{F}(t_0)=o,\quad \mathfrak{F}'(t_0)=o,\ldots,\mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=o;$$

$\mathfrak{F}(t)$和以前意義相同($n^\circ 210$),這表明曲線及曲面有$(n+1)$個公共點在A點相合.

若是曲面S關係$n+1$個變率$a,b,c,\ldots,l$,我們可選擇這些變率使此曲面和一個定曲線在一個定點上有一個n級的接觸;如此所得曲面叫作吻合曲面.

在一個平面的場合,我們有三個變率;定此等變率的方程式是

$$Af(t)+B\varphi(t)+C\psi(t)+D=o,$$
$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=o,$$
$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=o,$$

這些方程式正是我們取爲吻合平面的定義的方程式($n^\circ 203$),

由此可見這個接觸普通的是第二級,若要接觸的級數更高,又須要

$$Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)=o,$$

此時我們說吻合平面是停留 (Stationnaire).

一個球面關係四個變率,所以吻合球面有一個第三級的接觸.以後可見這個運算 (n° 228).

213. **一個曲面的吻合直線.**——若是一個曲線 C 關係 $n+2$ 個變率,我們能夠處理這些變率使曲線和曲面 S 在一個定點 M 上有一個 n 級的接觸誠然,我們說曲線 C 經過 M 點,並且說他在此點上過曲面 S 於 $n+1$ 點相合,共有 $n+2$ 個方程式以定這些變率.例如一個直線關係四個變率,所以在曲面的每一點上有一個或數個直線和曲面有第二級的接觸,若要定出這些直線,我們取曲面上的與點為原點,z 軸不在切平面內,設 $z=F(x,y)$ 是曲面在此系的坐標軸內的方程式,所求直線顯然經過原點,其方程式的形狀是

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\rho;$$

方程式 $c\rho=F(a\rho,b\rho)$ 當以 $\rho=o$ 為三重根,這須要

$$c=ap+bq,$$

$$o=a^2r+2abs+b^2t,$$

p,q,r,s,t 是 $F(x,y)$ 的第一及第二級導來式對於 $x=y=o$ 時的價值,這兩個關係式中第一個表明所求直線在曲面的切平面內,這一層仍是可以先天看出的,他一方面,比 $\frac{b}{a}$ 為一個二次方程式所定,他有兩個實根,如果 s^2-rt 是正,所以在一個曲面每一點上普通的有兩個直線和曲面有一個第二級的接觸而只有兩個直

線.這些直線是實或虛依 s^2-rt 的符號而定.以後在曲面的曲度的研究中我們仍遇着這兩個曲線(第十二章).

習　　題

1. 設 C 是一個三次曲線有一個二重點在 O, 一個直角 MON 繞 O 點而旋轉,其兩邊各遇曲線 C 於 M 及 N, 求定直線 MN 的包封,特別的取曲線 C 的方程式爲 $\lambda y^2=x^3$ 或 $x^3+y^3=\mu xy$.

[Licence: Bordeaux, juillet 1855.]

2. 在方程式

$$x=a(n\omega-\sin\omega),\qquad y=a(n-\cos\omega)$$

所表曲線上,求和吻合圓有高於第二級的接觸的點.

[Licence: Grenoble juillet 1885.]

3. 設 m, m_1, m_2 是一個平曲線上相隣三點,在此三點相合時,求在此三點上的切線所成三角形的外接圓的半徑的極限價值.

4. 若一個沒有彎曲點的合口曲線有一個合口的縮閉線(développée), 此縮閉線的全長等於在曲線的所有點上最大曲度半經的和及最小曲度半經的和的差的二倍.

5. 若自一個曲線上每一點引一個定長直線和法線作一個定角,此直線的頂點的軌迹曲線的法線經過第一曲線的曲度中心.

6. 設 r 是一個極 (pôle) 至一個平曲線上一點的帶徑 (rayon vecteur), p 是此極至切線的距離,曲度半經 R 的算式是 $R=\pm r\dfrac{dr}{dp}$.

7. 有一類的拋物線在一個定點上和一個定曲線有一個

第二級的接觸此拋物線的焦點(foyer)的軌迹是一個圓.

8. 一個楕圓其軸有固定方向,祂在一個定點上和一個定曲線有第二級的接觸;求其中心的軌迹.

9. 設$F(X,Y;x,y)$是兩個的變數(X,Y)及(x,y)的一個函數,在方程式$F=o$中,若是將(x,y)看作一個定點m的坐標,將X及Y看作流行坐標,對於平面中任一點m,此關係式定出一個相應曲線c在m點畫出一個曲線C時相應曲線c有一個包封曲線Γ爲兩個方程式所定,

$$F(X,Y;x,y)=o,\qquad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=o.$$

這個曲線Γ由一個接觸變形法(transformation de contact)自曲線C得來,若互換這兩個的變數(x,y)及(X,Y)即得其逆變形法(transformation in verse)(參觀$n°$ 59).

應用:$F=X^2+Y^2-Xx-Yy$.

10. 若要方程式$F(x,y,a)=o$所表的曲線C在一點上和祂們的包封有一個n級的接觸,必須要也只須要在這一點上得到

$$F=o,\qquad \frac{\partial F}{\partial a}=o,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}=o\qquad \ldots,\frac{\partial^n F}{\partial a^n}=o,$$

應用在C是一個圓周的場合,

11. 凡一個曲面$F(x,y,z,a)=o$都和能展曲面的逆退稜有一個第二級的接觸,此逆退稜爲三個方程式所定:$F=o,\dfrac{\partial F}{\partial a}=o,$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial a^2}=o.$

12. 在一個定點上和一個定曲線有一個第二級的接觸的

球面的球心的軌迹.

13. 一個變化球面關係一個變率,若是牠的包封成爲一個曲線Γ這個曲線Γ和此球面有一個第二級的接觸.

14.* 設有一曲線面S,以S上每一點m爲心畫一個球面Σ,其半徑是一個變數R,通常的這個球面Σ切牠的包封於兩點M M'直線MM'垂直於曲面S在m點的切平面.計算m點至直點MM'的距離δ.

若是曲面S標誌在一系的垂直曲線坐標(Coordonnées curvilignes orthogonales) (u,v)則由

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

我們有

$$\delta^2 = R^2\left[\frac{1}{E}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2\right]$$

15　若是一個曲面S在一個平面P中的一個曲線C的所有點上和此平面相切,則此曲線上任一點的切線都和曲面S有一個第三級的接觸.

16* 在一個曲面S的每一點M上,普通的有∞^1個圓周牠們和S有一個第三級的接觸,對於曲面在一點M的每一個切線這些圓周中有一個而只有一個牠的平面經過此切線.若M點不是一個臍(Ombilic),則有十個圓周在M點和曲面有一個第四級的接觸.

[Darboux, Bulletin des Sciences mathématiques, t. IV, 2^e serie, 1880, p. 348—384.]

【註一】將方程式(7')的第二個寫爲$f'_a(x,y,a+\theta h)=0$,則這

個証明更形嚴格.若是在h漸近於零時,(x,y)點漸近於一個極限點$(x_1\ y_1)$,又若是導來式f''是連續的則此極限點的坐標當滿足關係式$f(x_1\ y_1\ a)=o$　$f'(x_1,y_1,a)=o$

[註二]在計算弧的公式

$$s=f'(\alpha)+\int f(\alpha)d\alpha$$

中,第二邊所含一切的量都有幾何上的意義:α是從原點向動直線所引垂線ON和Ox軸所作的角,$f(\alpha)$是原點至此直線的距離ON;$f'(\alpha)$除相差一個符號外是距離MN,M是動直線和其包封的接觸點,N是自原點向動直線所引垂線的足.這個求長公式有時也稱爲列讓得公式,

[註三]這是明瞭的,這個級數可由以下的方法得來:作出m'點和m點相應使m點至曲線C'的距離對於此m'點是最小,但是我們要証明這個相應法能代以無量數的其他相應法,

[註四]這是容易看出的這個假定對於以後並非絕對必要的,只要援用在斜交軸中兩點的距離的公式,

第十一章

空間曲線.

I.——吻合平面.

214 **定義及方程式.**——我們已經屢次論到一個空間曲線的吻合平面(n°203,211,212).此平面直接的定義和切線的定義相仿.設M是一個空間曲線Γ上的一點,MT是在此點的切線;取經過直線MT及Γ上M點的一個隣點M'的平面,通常的在M'漸近於M時,此平面漸近於一個極限位置;此極限平面叫作曲線Γ在M點的吻合平面.我們先求此平面的方程式.設

(1) $$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t)$$

是Γ上一點的坐標為一個變率t的函數的公式.M及M'點和此變率的價值t及$t+h$相應.平面MTM'的方程式是

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=o,$$

係數A,B,C當滿足關係式

(2) $$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=o,$$

(3) $$A[f(t+h)-f(t)]+B[\varphi(t+h)-\varphi(t)]+C[\psi(t+h)-\psi(t)]=o,$$

在關係式(3)中將$f(t+h),\varphi(t+h),\psi(t+h)$代以牠們的戴勞公式的展開式.此式又可寫為

$$A\left\{hf'(t)+\frac{h^2}{1.2}[f''(t)+\varepsilon_1]\right\}+B\left\{h\varphi'(t)+\frac{h^2}{1.2}[\varphi''(t)+\varepsilon_2]\right\}+\dots=o,$$

由此減去方程式(2)乘h,再以$\frac{h^2}{2}$除其結果,可見關係式(2)及(3)同價於以下的關係式:

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=o,$$

$$A[f''(t)+\varepsilon_1]+B[\varphi''(t)+\varepsilon_2]+C[\psi''(t)+\varepsilon_3]=o,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$和$h$同時爲無限小.在$h$漸近於零時,此最後關係式成爲

(4) $$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=o.$$

所以吻合平面的方程式是

(5) $$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=o,$$

係數A, B, C限於滿足兩個關係式

(6) $$\begin{cases} Adx+Bdy+Cdz=o, \\ Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=o. \end{cases}$$

有時吻合平面的方程式也寫爲定準式的形狀:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=o.$$

我們很容易驗明在經過切線的所有平面中惟吻合平面是曲線Γ在接觸點附近距離最近的平面 (n° 212). 我們先取一個經過切線的平面,假定其非吻合平面,將方程式(5)第一邊流行坐標X, Y, Z代以$f(t+h), \varphi(t+h), \psi(t+h)$,設$F(t)$是代入的結果;我們有

$$F(t)=\frac{h^2}{1.2}[Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)+\eta].$$

η和h同時爲無限小.所以在M點附近,曲線Γ上一點至此平面的距離是第二級無限小;不但如此,在h極小時,$F(t)$常保有固定符號,可見曲線Γ在接觸點附近完全在切平面的一邊.

在吻合平面就不是如此;對於此平面,我們有

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=o,$$

必須要將 Γ 上一點的坐標的展開式推至含 h 的三次項,代入以後,得

$$F(t)=\frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z}{dt^3}+\eta\right).$$

可見曲線 Γ 上一點至吻合平面的距離是第三級的無限小;不但如此,$F(t)$ 和 h 同時換符號,這表明空間曲線在接觸點上通過其吻合平面.這個性質顯然表示吻合平面及經過切線的其他平面的區別.

215. **停留的吻合平面** (plan os culateur stationnaire).——若是吻合平面的方程式的係數 A, B, C 能滿足關係式

(7) $$Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z=o,$$

以上的結論即有未合;在此場合,必須將坐標的展開式推至含 h 的四次項,所得結果爲以下的形狀

$$F(t)=\frac{h^4}{1.2.3.4}\left(\frac{Ad^4x+Bd^4y+Cd^4z}{dt^4}+\eta\right)$$

我們說在這些點上吻合平面是停留.若是 $Ad^4x+Bd^4y+Cd^4z$ 不等於零,這是最普通的場合,$F(t)$ 不和 h 同時換符號,曲線不通過吻合平面.不但如此,曲線上一點至吻平面的距離是第四級無限小.若是又得着 $Ad^4x+Bd^4y+Cd^4z=o$,則必須將展開式推至第五級,餘類推.

在關係式 (6) 及 (7) 中消去 A, B, C,得方程式

(8) $$\Delta=\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}=o;$$

此方程式關於 t 的根定出曲線 Γ 上吻合平面是停留的點.那麼,在一個空間曲線上通常的有若干的點具有此性質.

由此,我們考求是否有些曲線 Γ 牠們的所有吻合平面都是停留嚴密的說,我們求一個變率 t 的所有函數 x, y, z,在 t 由 a 變至 b 時 $(a<b)$, 牠們和牠們的導來式以至於第三級都是連續的,並且能令以上的定準式 Δ 恆等於零.

先假定 Δ 關於第三橫行各元的子式 (mineur) 有一個不等於零,譬如 dxd^2y-dyd^2x 在區域 (a, b) 內不能成為零.以下的兩個關係式

$$(9)\qquad \begin{cases} dz=C_1dx+C_2dy, \\ d^2z=C_1d^2x+C_2d^2y \end{cases}$$

定出 t 的兩個函數 C_1 及 C_2 在此區域內是連續的.因為 $\Delta=o$, 此二函數又能滿足關係式

$$(10)\qquad d^3z=C_1d^3x+C_2d^3y.$$

將方程 (9) 微分之,更計算着公式 (10), 得新方程式

$$dC_1dx+dC_2dy=o; \qquad dC_1d^2x+dC_2d^2y=o,$$

由此取得 $dC_1=dC_2=o$; 所以係數 C_1 及 C_2 都是常數.將 (9) 中第一式積分之,得

$$z=C_1x+C_2y+C_3,$$

C_3 是一個新常數.所以曲線 Γ 是一個平曲線.

若是 dxd^2y-dyd^2x 對於 t 在 a 及 b 中間的一個價值 c 成為零,以上的推理即歸無效.因為對於 t 的價值 c, C_1 及 C_2 的算式成為無限或不定.為確定人的現念,假定在區域 (a, b) 內此定準式只對於 t 的此一個價值 c 成為零,而相假定準式

dxd^2z-dzd^2x不成爲零.由以上的推理可見t由a變至c時曲線Γ上相應點都在一個平面P上,t由c變至b時曲線Γ上相應點都在一個平面Q上.他一方面,子式dxd^2z-dzd^2x既對於$t=c$不成爲零,我們撰取一個數h有充分的小,使t自$c-h$變至$c+h$時,此子式不成爲零.然則t自$c-h$變至$c+h$,曲線Γ上的相應點皆在一個平面R上;此平面R當和平面P及Q都有無量數的公共點不在一個直線上,結果,此三個平面相合.

將這個推理加以擴充,可見只要此三個定準式

$$dxd^2y-dyd^2x,\qquad dxd^2z-dzd^2x,\qquad dyd^2z-dzd^2y$$

在區域(a,b)內不同時爲零,曲線Γ上的所有點就都在一個平面上.若是這三個定準式同時爲零,曲線Γ能夠成自許多平曲線弧在各別的平面內,而在吻合平面的方程式成爲不定諸點上互相結合.(註一)

若是以上的三個子式在某一區域內皆恆等於零,曲線Γ就是一個直線或由許多的部分直線所成.譬如$\dfrac{dx}{dt}$在區域(a,b)內不成爲零,我們可寫爲

$$\frac{d^2ydx-dyd^2x}{(dx)^2}=0,\qquad \frac{d^2zdx-dzd^2x}{(dx)^2}=0,$$

由此得

$$dy=C_1dx,\qquad dz=C_2dx,$$

C_1及C_2是兩個常數;更由一個積分法,得

$$y=C_1x+C'_1,\qquad z=C_2x+C'_2,$$

這表明曲線Γ是一個直線,

216. **停留的切線** (tangeute stationnaire).——以上

的推理引導我們研究一個空間曲線上的例外的點,這些點都是以前所說過的(n° 211);就是在這些點上我們有

(11) $$\frac{d^2x}{dx}=\frac{d^2y}{dy}=\frac{d^2z}{dz};$$

我們說在此等點上曲線的切線是停留.應用一點至一直線的距離的公式,很容易証明在接觸點附近,曲線 Γ 上一點至切線的距離普通的是第二級;而對於停留的切線是第三級.若曲線 Γ 縮減爲一個平曲線,停留的切線都是彎曲點上的切線(tangente d'inflexion).以上的運算表明一個曲線上所有的切線都是停留的是一個直線.

在切線是停留的一點上,我們有 $\Delta=o$, 吻合平面的方程式成爲不定的形狀.然而這個不定只是表面的.設然,若更繼續第214節之初所作的運算,將 M' 點的坐標的展開式推至含 h 的三次項,更利用關係式(11), 我們得經過 M 點的切線及 M' 點的平面的方程式

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f'''(t)+\varepsilon_1 & \varphi'''(t)+\varepsilon_2 & \psi'''(t)+\varepsilon_3 \end{vmatrix}=o,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 和 h 同時漸近於零.所以此平面漸近於一個確定的極限位置;將關係式(6)的第二式代以

$$Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z=o,$$

即得吻合平面的方程式.

若是又有

$$\frac{d^3x}{dx}=\frac{d^3y}{dy}=\frac{d^3z}{dz},$$

只須將關係式(6)第二式代以

$$Ad^qx+Bd^qy+Cd^qz=o,$$

q是整數中能令此關係式各別於$Adx+Bdy+Cdz=o$的最小的一個.至於曲線關於吻合平面的位置,我們留給讀者自行研究.在方程式

$$Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z=o$$

不能滿足的普通場合,一個任何的切平面都爲空間曲線所通過,吻合平面則不然,牠不爲曲線所通過.

關於幾個曲線的應用.——我們取幾個特別曲線Γ,牠們能滿足關係式

(12) $$xdy-ydx=kdz,$$

k是一個已知常數;自此關係式又得

(13) $$\begin{cases}xd^2y-yd^2x=kd^2z,\\ xd^3y-yd^3x+dxd^2y-dyd^2x=kd^3z.\end{cases}$$

對於此類的一個曲線,我們求牠的經過一定點(a,b,c)的所有的吻合平面.接觸點的坐標(x,y,z)當滿足方程式

$$\begin{vmatrix}a-x & b-y & c-z\\ dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z\end{vmatrix}=o.$$

計算着(12)及(13),此式成爲

(14) $$ay-bx+k(c-z)=o;$$

所以接觸點是曲線Γ及方程(14)所表平面的交點,此平面經

過(a,b,c)點

方程式$\Delta=o$定出吻合平面是停留的點將dz, d^2z, d^3z代以牠們的價值得

$$\Delta=\frac{1}{k}(dxd^2y-dyd^2x)^2=o;$$

所以對於這些點我們得

$$\frac{d^2x}{dx}=\frac{d^2y}{dy}=\frac{yd^2x-xd^2y}{ydx-xdy}=\frac{d^2z}{dz},$$

這表明在這些點上的切線是停留.

我們很容易得到些能滿足關係式(12)的曲線;作爲舉例.我們只須令

$$x=At^m,\qquad y=Bt^n,\qquad z=Ct^{m+n},$$

A, B, C, m, n都是常數.最簡單的曲線是空間立方曲線(cubique gauche) $x=t, y=t^2, z=t^3$, 及四次空間曲線$x=t, y=t^3, z=t^4$. 圓螺旋線(helice circulaire)

$$x=a\cos t,\qquad y=a\sin t,\qquad z=kt$$

也能滿足此問題.

若要得到能滿足關係式(12)的所有空間曲線,我們將此關係式寫爲

$$d(xy-kz)=2ydx;$$

若是

$$x=f(t),\qquad xy-kz=\varphi(t),$$

此關係式成爲 $2yf'(t)=\varphi'(t)$. 關於 x, y, z 解此三個方程式,得曲線上的坐標的普通算式爲一個變率的函數

$$x=f(t),\qquad y=\frac{\varphi'(t)}{2f'(t)},\qquad kz=\frac{f(t)\varphi'(t)}{2f'(t)}-\varphi(t).$$

這些函數含有兩個任意函數 f 及 φ, 但是這是明瞭的,我們能任意將 f 及 φ 中的一個給以特別的形狀並不害及普遍性,譬如令 $f(t)=t$.

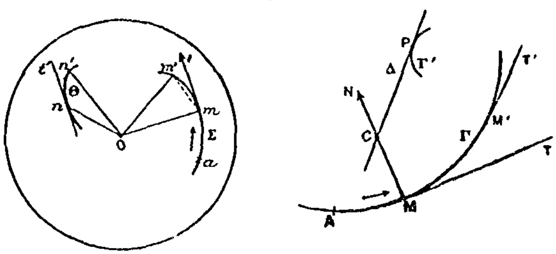
II. 曲度及旁曲度(torsion). 閉縮線

217. **球面指線**(indicatrice sphérique).——在一個空間曲線 Γ 上取一個進行的方向, A 是曲線上一個定點, M 是曲線上任何點,用 s 表原點在 A 終點在 M 的弧 AM, s 前置符號 + 或 − 依自 A 向 M 的方向是正方向或相反的方向而定.設 MT 是在 M 點的切線的正方向,就是說和弧的漸增方向相應的方向.若是自空間一點 O 引這些半直線的平行線,則得一錐曲面(cône) S, 牠是曲線 Γ 上的切線所產的能展曲面的準錐曲面(cône directeur). 以 O 點爲心,以長度的單位爲半經作一球面,設 Σ 是球面和以上的錐曲面的交線,曲線 Σ 叫作曲線 Γ 的球面指線.這兩個曲線點和點相應;對於 Γ 上一點 M, Σ 上有一點 m 相應,這是 MT 的平行線通過球面的點.在 M 點由正方向畫出 Γ 時, m 點亦由某一方向畫出 Σ, 我們即取此方向爲曲線 Σ 的正方向,如此,則兩曲線上的弧 s 及 σ 同時漸增(圖38).

這是很明瞭的,若將球心 O 變位,則曲線 Σ 受同樣的平行移動(translation);從此以後,我們假定球心 O 在坐標軸的原點.同樣,若

是更換曲線Γ的正方向,則曲線Σ為一關於O點為對稱的曲線所代;但是我們注意Σ上的切線的正向mt不關係Γ上的方向

Fig. 38.



的選擇.錐曲面S上沿母線Om的切平面平行於在M點的吻合平面.誠然,球心O既在原點,設

$$AX+BY+CZ=o$$

是平面Omm'的方程式;此平面既平行於在M點及在M'點的兩個切線,此二點和變率的價值t及$t+h$相應,我們當有

(16) $$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=o,$$

(17) $$Af'(t+h)+B\varphi'(t+h)+C\psi'(t+h)=o;$$

第二關係式又可寫為

$$A\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}+B\frac{\varphi'(t+h)-\varphi'(t)}{h}+C\frac{\psi'(t+h)-\psi'(t)}{h}=o,$$

在h漸近於零時,就成為

(18) $$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=o,$$

所得方程式(16)及(17)正是吻合平面的方程式.

218. **曲度半徑.**——設ω是曲線Γ上兩個隣點M, M'上的切線的正方向$MT, M'T'$所作的角.在M'漸近於M時,商$\frac{\omega}{\text{弧}\,MM'}$的極限叫作$\Gamma$在$M$點的曲度;曲度半經是曲度的倒數,就是商$\frac{\text{弧}\,MM'}{\omega}$的極限:我們又可將曲度半徑的定義看作兩無限小弧$MM', mm'$的商的極限.誠然,我們有

$$\frac{\text{弧}\,MM'}{\omega}=\frac{\text{弧}\,MM'}{\text{弧}\,mm'}\times\frac{\text{弧}\,mm'}{\text{弦}\,mm'}\times\frac{\text{弦}\,mm'}{\omega},$$

在m'漸近於m時每一個比$\frac{\text{弧}\,mm'}{\text{弦}\,mm'}$, $\frac{\text{弦}\,mm'}{\omega}$的極限都是1.弧$s$及$\sigma$既向同一方向變化,所以

$$R=\frac{ds}{d\sigma}. \tag{19}$$

設

$$x=f(t),\qquad y=\varphi(t),\qquad z=\psi(t) \tag{20}$$

是曲線Γ上一點在一系的直交軸中的坐標坐標軸的原點在O. m點的坐標正是MT的方向餘弦

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \beta=\frac{dy}{ds},\qquad \gamma=\frac{dz}{ds},$$

由這些公式,得

$$d\alpha=\frac{dsd^2x-dxd^2s}{ds^2},\quad d\beta=\frac{dsd^2y-dyd^2s}{ds^2},\quad d\gamma=\frac{dsd^2z-dzd^2s}{ds^2},$$

$$d\sigma^2=d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2=\frac{(dsd^2x-dxd^2s)^2+(dsd^2y-dyd^2s)^2+(\ldots)^2}{ds^4},$$

將這些平方展開,更計算着ds^2及dsd^2s的公式,得

$$d\sigma^2=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2}{ds^4}.$$

用拉格郎熱的恆等式,又可寫爲

$$d\sigma^2=\frac{A^2+B^2+C^2}{ds^4},$$

其中

(21)
$$\begin{cases} A=dyd^2z-dzd^2y, \\ B=dzd^2x-dxd^2z, \\ C=dxd^2y-dyd^2x, \end{cases}$$

後仿此定曲度半徑的公式(19)成爲

(22)
$$R^2=\frac{ds^6}{A^2+B^2+C^2};$$

由此可見R^2是$x,y,z,x',y',z',x'',y'',z''$的有理函數.至於曲度半徑自身是無理式,但牠顯然是一個正數量.

注意.一若是自變數是曲線Γ的弧自身,函數$f(s),\varphi(s),\psi(s)$能滿足關係式

$$f'^2(s)+\varphi'^2(s)+\psi'^2(s)=1,$$

定曲度半徑的公式成爲一個美麗的形狀.誠然,s既是自變數,由以上所計算

$$\alpha=f'(s),\qquad \beta=\varphi'(s),\qquad \gamma=\psi'(s).$$

$$(23)\qquad \begin{cases} d\alpha=f''(s)ds, & d\beta=\varphi''(s)ds, \quad d\gamma=\psi''(s)ds, \\ d\epsilon^2=\{[f''(s)]^2+[\varphi''(s)]^2+[\psi''(s)]^2\}ds^2, \end{cases}$$

因而

$$(24)\qquad \frac{1}{R^2}=[f''(s)]^2+[\varphi''(s)]^2+[\psi''(s)]^2.$$

219. 主法線 (normale principale). 曲度心 (centre de courbure).——自曲線Γ上一點M引直線平行於曲線Σ在m點的切線,在此直線上取方向MN平行於正方向mt;如此所得的直線叫作Γ的主法線.此法線在吻合平面內,這是因爲mt垂直於om而平面omt平行於吻合平面的緣故(n°217).方向MN是主法線的正方向.這個方向極爲確定,因爲mt的方向不關於在Γ上所取的方向,以後可見不用指線亦可將此方向定出.

若在方向MN上由M點起取一個長度MC等於曲度半徑,終點C叫作曲度心,以C爲心,MC爲半徑在吻合平面內所畫的圓叫作曲度圓.設α'、β'、γ'是主法線的方向餘弦;曲度心的坐標是

$$x_1=x+R\alpha', \qquad y_1=y+R\beta', \qquad z_1=z+R\gamma',$$

但是

$$\alpha'=\frac{d\alpha}{d\epsilon}=\frac{d\alpha}{ds}\,\frac{ds}{d\epsilon}=R\frac{d\alpha}{ds}=R\frac{dsd^2x-dxd^2s}{ds^3},$$

對於β'及γ'亦有和此相似的公式.在x_1中將α'代以牠的價值,得

$$x_1=x+R^2\frac{dsd^2x-dxd^2s}{ds^3};$$

R^2的係數可以寫爲

$$\frac{ds^2d^2x-dxdsd^2s}{ds^4}=\frac{d^2x(dx^2+dy^2+dz^2)-dx(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)}{ds^4},$$

加入係數A, B, C,此式又可寫爲

$$\frac{Bdz-Cdy}{ds^4},$$

至於y_1及z_1的價值可由對稱的方法自x_1得來;結果,我們得曲度心的坐標

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned} x_1&=x+R^2\frac{Bdz-Cdy}{ds^4}, \qquad y_1=y+R^2\frac{Cdx-Adz}{ds^4},\\ z_1&=z+R^2\frac{Ady-Bdx}{ds^4};\end{aligned}\right.$$

這些公式關於$x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$是有理的.

若自M點引平面Q垂直於MN,此平面當經過切線MT,而在M點上不通過曲線Γ.我們將証明在M點附近,曲線Γ的點及曲度心當同居於此平面Q的一邊.要証明這個性質,假定自變數是曲線Γ的弧s,此弧自M點起;M的一個鄰M'的坐標X, Y, Z是

$$X=x+\frac{s}{1}\frac{dx}{ds}+\frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\varepsilon\right),$$

對於他二坐標Y, Z,亦有相似的展開式,但是自變數旣是s,我們有

$$\frac{dx}{ds}=\alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{R}\alpha',$$

X的公式成爲

$$X=x+\alpha s+\left(\frac{\alpha'}{R}+\varepsilon\right)\frac{s^2}{1\cdot 2}.$$

在垂直於 MN的平面方程式

$$\alpha'(X-x)+\beta'(Y-y)+\gamma'(Z-z)=0$$

內,將 X, Y, Z 代以牠們的價值,得

$$\frac{s}{1}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')+\frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right)=\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right),$$

η和s同時爲無限小;對於s漸近於零時此結果是正.同樣,將X, Y, Z代以曲度心的坐標$x+R\alpha'$,..., 其結果是R,此最顯然是正,即此可証所宣告的定理.

220. 極直線(droite polaire)及極曲面(surface polaire).——自曲度心引直線Δ垂直於吻合平面,此直線叫作極直線.極直線是曲線Γ的法平面的象徵直線.這是很明瞭的,在兩個隣點M及M'的兩個法平面的交線是一個直線D垂直於兩直線MT及$M'T'$,所以牠垂直於平面mOm'.在M'點漸近於M時,平面mOm'成爲平行於吻合平面,所以直線D的極限是垂直於吻合平面的一個直線.若要証明此直線經過曲度心,我們假定取Γ的弧s爲自變數;法平面的方程式是

$$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0, \tag{26}$$

象徵直線由方程式(26)及

$$(27)\qquad \frac{\alpha'}{R}(X-x)+\frac{\beta'}{R}(Y-y)+\frac{\gamma'}{R}(Z-z)-1=o$$

所定.

此新方程式表一個經過曲度心而垂直於主法線的平面.所以此兩平面的交線是極直線.由此可見曲度心合於吻合圓心(n° 211),所以曲度圓合於吻合圓.這個結果可以先天看出的,兩個曲線若有一個第二級的接觸,必有相同的曲度圓,這是因爲y', z', y'', z''對於兩個曲線皆有相同的價值的緣故.

極直線的軌迹所成的直線曲面叫作極曲面.由方才所証,這也是Γ的法平面的包封所成的能展曲面.若曲線Γ是一個平曲線,極曲面是一個柱面,其垂直截線是Γ的閉縮線,以上的性質是極明瞭的.

221. **旁曲度**——在曲度的定義中用吻合平面代切線即得幾何上一個新元素,這個新元素可以說是量取吻合平面回旋的遲速.設ω'是兩隣點M及M'上的吻合平面所成的角,在M'漸近於M時,$\dfrac{\omega'}{\text{弧} MM'}$的極限叫作曲線$\Gamma$在$M$點的旁曲度.旁曲度半徑$T$是旁曲度的逆.

自M點引吻合平面的垂直線,此直線叫作副法線(binormale),在此直線上取一個定方向(此定方向以後再决定),其方向餘弦爲α'', β'', γ''.由原點所引的平行直線通過中心在原點半徑爲 1 的球面於一點n,此點n仍和Γ上M點相應.

n點的軌迹是一個球面曲線Θ.和前相同,我們可証明旁曲

度半徑 T 仍可看爲兩曲線 Γ 及 Θ 上兩個相應的無限小弧 MM' 及 nn' 的比的極限.那麽,

$$T^2=\frac{ds^2}{d\tau^2}$$

τ 是曲線 Θ 的弧.

n 點的坐標是 α'', β'', γ'', 就是

$$\alpha''=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \beta''=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \gamma''=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

在此三個公式中,根號的符號當皆相同.由此得到 $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$ 的價值;例如

$$d\alpha''=\pm\frac{(A^2+B^2+C^2)dA-A(AdA+BdB+CdC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

公式 $d\tau^2=d\alpha''^2+d\beta''^2+d\gamma''^2$ 成爲

$$d\tau^2=\frac{(A^2+B^2+C^2)(dA^2+dB^2+dC^2)-(AdA+BdB+CdC)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2},$$

再應用拉格朗熱公式,得

$$d\tau^2=\frac{(BdC-CdB)^2+(CdA-AdC)^2+(AdB-BdA)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

此式的分子仍能更爲簡單,由關係式

$$Adx+Bdy+Cdz=0,$$

$$dAdx+dBdy+dCdz=0,$$

得

$$(28)\qquad \frac{dx}{BdC-CdB}=\frac{dy}{CdA-AdC}=\frac{dz}{AdB-BdA}=\frac{1}{k},$$

$d\tau^2$成爲

$$d\tau^2=\frac{K^2ds^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

K的價值是

$$K=\frac{(dzd^2x-dxd^2z)(dxd^3y-dyd^3x)-(dxd^2y-dyd^2x)(dzd^3x-dxd^3z)}{dx}$$
$$=dzd^2xd^3y-dxd^2zd^3y+dyd^2zd^3x$$
$$-d^2ydzd^3x+dxd^2yd^3z-dyd^2xd^3z;$$

方程式的第二邊正是定準式△[(n°215),公式8]的展開式.所以

$$d\tau=\pm\frac{\Delta ds}{A^2+B^2+C^2},$$

因而

$$(29)\qquad T=\pm\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}.$$

和曲度半徑相同.若將旁曲度半徑常看成一個正數,可取第二邊的絕對價值爲爲T.但是要注意所得算式關於x', x'', x''', y', y'', y''', z', z'', z'''是有理函數,旁曲度半徑當然是一個帶有符號長度.這兩個符號視曲線Γ在M點附近的位置情形而截然不同.

T的符號只關係於△的符號,現在研究曲線的位置如何依此符號而變化.我們假定三面角$Oxyz$的位置法如下:一個觀察

者立於xy平面上,足在O,首向z,則見Ox軸若由右向左旋轉$90°$,即合於Oy軸.如此在副法線上選取一個方向MN_b,使三面角(MT, MN, MN_b)和三面角$Oxyz$的位置法同.若令曲線Γ逐漸變位,使M點來合於O點,MT合於Ox,MN合於Oy,則MN_b合於Oz.在這個運動時,T的絕對值不變;那麼Δ不能成爲零,所以牠的符號不變【註二】.曲線Γ既是爲此新系的坐標軸所定,我們假定變率$t=o$的價值和原點相應;原點附近一點的坐標當是

$$
(30) \qquad \begin{cases} x=a_1t+t^2(a_2+\varepsilon), \\ y=b_2t^2+t^3(b_3+\varepsilon'), \\ z=t^3(c_3+\varepsilon''), \end{cases}
$$

$\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''$和$t$同時爲無限小;誠然,依我們所選坐標軸的方法,在$t=o$時,當得$dy=dz=d^2z=o$;我們又可假定$a_1>o$,這是因爲若將$t$代以$-t$,即可將$a_1$變爲$-a_1$的緣故.在$t$漸近於零時,$y$是正,所以$b_2$當是正;惟有$c_3$或是正或是負.但是在$t=o$時$\Delta=12\ a_1\ b_2\ c_3\ dt^6$,所以$\Delta$和$c_3$同符號.這些已經說明,依$c_3$的符號可分爲兩個場合:若$c_3>0$,在$t$由$-h$變至$o$時,$x$及$z$都是負,在$t$由$o$變至$+h$時,$x$及$z$

Fig. 39 a.

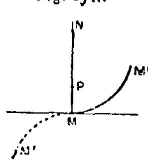
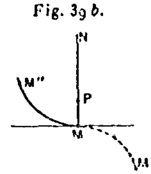


Fig. 39 b.



都是正(h是一個極小正數).一個觀察者立在吻合平面上,足在主法線的一點P,將見弧MM'在他的左方面在吻合平面上,弧

MM''在他的右方而在吻合平面下(圖 39a),那麼曲線是左轉(sinistrorsum).若$c_3<o$,即得相反的情形(圖 39b)[註三],曲線是右轉(dextrorsum).這兩個位置法是絕對各別的.譬如兩個同步(pas)的螺旋線(hélice)畫在兩個同半徑的旋轉圓柱上,若此二螺旋線皆右轉或皆左轉,則此二螺旋線能相合;若一個右轉,一個左轉,則此一個能合於他一個關於一個平面為對稱的線上.

從此以後,我們將旁曲度的公式寫為

$$T=-\frac{A^2+B^2+C^2}{\wedge}; \tag{31}$$

若在其一點上,T是正,則曲線是右轉,T是負則曲線是左轉.若三面角(MT, MN, MN_b)和三面角$Oxyz$的位置法不同,則結果相反.

222. 福爾內的公式(formule de Frenet).——曲線Γ上每一點都是一個三重垂直三面角(triédre trirectangle)的頂點,此三面角由切線,主法線及副法線所成,其位置法和三面角$Oxyz$的位置法同.主法線的正方向是確定的,至於切線的正方向能任意選擇,並由此正方向定出副法線的正方向.這九個方向餘弦α,β, γ,...的微分很簡單的為R, T及這些餘弦所表明,這些公式叫作福爾內的公式.我們已見定$d\alpha, d\beta, d\gamma$的公式

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R},\quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{R},\quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}. \tag{32}$$

設

$$\alpha''=\varepsilon\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\beta''=\varepsilon\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\gamma''=\varepsilon\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(\varepsilon\pm=1)$$

是副法線的正向的餘弦.三面角 (MT, MN, MN_b) 旣和三面角 $Oxyz$ 的位置法相同,當得

$$\alpha'=\beta''\gamma-\beta\gamma'',$$

或
$$\alpha'=\varepsilon\frac{B\gamma-C\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

他一方面,定 $d\alpha''$ 的公式可寫爲

$$d\alpha''=\varepsilon\frac{B(BdA-AdB)+C(CdA-AdC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

更計算着關係式(28)及 K 的價值,得

$$\frac{d\alpha''}{ds}=\varepsilon\Delta\frac{C\beta-B\gamma}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\Delta\alpha'}{A^2+B^2+C^2}.$$

α' 的係數非他,就是 $\frac{1}{T}$ [公式 31]; 同樣,計算 $d\beta''$ 及 $d\gamma''$,我們有公式[註四]

(33)
$$\frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T},\quad \frac{d\beta''}{ds}=\frac{\beta'}{T},\quad \frac{d\gamma''}{ds}=\frac{\gamma'}{T},$$

和公式(32)完全相似.

若要得 $d\alpha', d\beta', d\gamma'$,將以下的著名公式

$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,$$

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,$$

$$\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=o$$

微分之,將 $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\alpha'', d\beta'', d\gamma''$ 代以牠們的價值 (32) 及 (33),得

$$\alpha' d\alpha'+\beta' d\beta'+\gamma' d\gamma'=o,$$

$$\alpha d\alpha'+\beta d\beta'+\gamma d\gamma'+\frac{ds}{R}=o,$$

$$\alpha'' d\alpha'+\beta'' d\beta'+\gamma'' d\gamma'+\frac{ds}{T}=o,$$

我們只須由此取得 $d\alpha', d\beta', d\gamma'$ 的價值

$$(34)\qquad \frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha''}{T},\quad \frac{d\beta'}{ds}=-\frac{\beta}{R}-\frac{\beta''}{T},\quad \frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}.$$

公式 (32), (33), (34) 即所求公式.

注意.—n 點的坐標是 $\alpha'', \beta'', \gamma''$, 公式 (33) 表明 n 點所畫球面指曲線 Θ 上的切線平行於主法線.這一層也是由幾何可見的.誠然.試取頂點在 O, 依曲線 Θ 爲準線的錐曲面 S'; 母線 On 垂直於錐曲面 S 沿 Om 的切平面 ($n^\circ 221$), 結果錐曲面 S' 和錐曲面 S 相補 (suplémentaire). 然而我們知道此類的錐曲面有相互性,所以倒過來 S 的母線 Om 垂直於錐曲面 S' 沿 On 的切平面.這些已經說明,曲線 Σ 上的切線既垂直於直線 Om, On, 故垂直於平面 mOn. 同理,曲線 Θ 的切線 nt' 亦垂直於平面 mOn. 所以此二直線平行.

223. x, y, z 依 s 的冪的展開式.———設有一個自變數 s 的兩個函數 $R=\varphi(s), T=\psi(s), \varphi(s)$ 假定是正,一定有一個曲

線Γ存在,除卻牠在空間的位置外,此曲線是確定的,其曲度半徑及旁曲度半徑都由以上的公式爲此曲線的一個弧的函數.這個定理的嚴格的証明須在習微分方程式論以後.我們假定此曲線一點的坐標能依s的幕展開,現在只說明如何得到這些展開式.取在O點的切線,法線及副法線爲坐標軸,曲線的弧亦從O點起;在原點附近,所求曲線上一點的坐標是

$$
(35)\quad \begin{cases} x=\dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0+\dfrac{s^2}{1\cdot2}\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)_0+\dfrac{s^3}{1\cdot2\cdot3}\left(\dfrac{d^3x}{ds^3}\right)_0+\cdots \\ y=\dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dy}{ds}\right)_0+\dfrac{s^2}{1\cdot2}\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)_0+\dfrac{s^3}{1\cdot2\cdot3}\left(\dfrac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\cdots \\ z=\dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dz}{ds}\right)_0+\dfrac{s^2}{1\cdot2}\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)_0+\dfrac{s^3}{1\cdot2\cdot3}\left(\dfrac{d^3z}{ds^3}\right)_0+\cdots. \end{cases}
$$

但是

$$\frac{dx}{ds}=\alpha,\qquad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R},$$

更求微分,

$$\frac{d^3x}{ds^3}=-\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds}-\frac{1}{R}\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right),$$

一般,繼續用福納內的公式,得$\dfrac{d^nx}{ds^n}$的算式

$$\frac{d^nx}{ds^n}=L_n\alpha+M_n\alpha'+P_n\alpha'',$$

L_n, M_n, P_n是R, T及牠們關於弧的累次導來式的已知函數.同法可得y及z的累次導來式,只須將α,α',α''代以β,β',β'',及γ,γ'.

γ''. 但在原點上 $\alpha_0=1$, $\beta_0=o$, $\gamma_0=o$, $\alpha'_0=o$, $\beta'_0=1$, $\gamma'_0=o$, $\alpha''_0=o$, $\beta''_0=o$, $\gamma''_0=1$, 若但將含 s, s^2, s^3 的項寫出,則公式(35)成爲

$$(36)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{s}{1}-\dfrac{s^3}{6R^2}+\ldots, \\[2ex] y=\dfrac{s^2}{2R}-\dfrac{s^3}{6R^2}\,\dfrac{dR}{ds}+\ldots, \\[2ex] z=-\dfrac{s^3}{6RT}+\ldots, \end{cases}$$

其中未經寫出諸項都是高於三次的. R, T, $\dfrac{dR}{ds}$,... 自然是代以牠們對於 $s=o$ 時的價值.

由這些公式甚易計算某種無限小的主部分.例如曲線上一點的一個隣點至吻合平面的距離是第三級無限小,其主部分是 $-\dfrac{s^3}{6RT}$.一點至 ox 軸的距離,或說是至切線的距離,是第二級無限小,其主部分是 $\dfrac{s^2}{2R}$ ($n^\circ 209$). 試再計算曲線上一個極小的弦的長度 c,

$$c^2=x^2+y^2+z^2=s^2-\frac{s^4}{12R^2}+\ldots,$$

其未經寫明諸項都是高於四次的.由此得

$$c=s\left(1-\frac{s^2}{12R^2}+\ldots\right)^{\frac{1}{2}}=s\left(1-\frac{s^2}{24R^2}+\ldots\right)$$

所以 s 及 c 的差是第三級無限小,其主部分是 $\dfrac{s^3}{24R^2}$.

由同一計算法可証明在原點的切線和在其極近隣點的切

線的距離是第三級無限小,其主部分是 $\frac{s^3}{12RT}$. 這個定理是步格(Bouquet)的.

224. 自方程式(équation intrinsèque).——若是旁曲度半徑 T 恆爲無窮大,則曲線是平曲線,這是因爲 Δ 恆等於零的緣故(n° 215);在此場合,定此曲線的微分方程式能由兩個面積法積分.

假定取弧 s 爲自變數,直交坐標 x 及 y 都是 s 的函數,能滿足方程式(n°218)

$$(37)\quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1, \qquad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2=\left[\frac{1}{\varphi(s)}\right]^2.$$

令 $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\sin\alpha$, α 表切線的正方向和 Ox 軸所作的角,則第一關係式是能滿足的;由第二關係式得

$$d\alpha=\pm\frac{ds}{\varphi(s)},$$

這個公式是能由曲度半徑的定義得來的.由一個面積法得

$$\alpha=\alpha_0\pm\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}.$$

更由兩個面積法,得

$$x=x_0+\int_{s_0}^{s}\cos\alpha\, ds, \qquad y=y_0+\int_{s_0}^{s}\sin\alpha\, ds$$

這個曲線關係三個常數x_0, y_0, α_0; 若是但論牠的形狀而不論牠的位置,則實際上只有一個曲線.誠然,在這些曲線中特別的取一個曲線c其公式是

$$X=\int_{s_0}^{s}\cos\left[\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}\right]ds,\qquad Y=\int_{s_0}^{s}\sin\left[\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}\right]ds,$$

先取 + 號在$\varphi(s)$之前,則一般公式可寫為

$$x=x_0+X\cos\alpha_0-Y\sin\alpha_0,$$

$$y=y_0+X\sin\alpha_0+Y\cos\alpha_0;$$

這就是坐標更換法的公式.同樣,若取 - 號,則得曲線C的對稱曲線.所以若是已知一個平曲線的曲度半徑為曲線弧的函數,則此曲線的形狀即完全確定.方程式$R=\varphi(s)$叫作曲線的<u>自方程式</u>.一般,在R, s, α三個量中若是已知某兩個間的一個關係式,則曲線的形狀即完全確定,其坐標能由面積法得來.譬如若知R為α角的函數,$R=f(\alpha)$,我們有$ds=f(\alpha)d\alpha$,從而得

$$dx=\cos\alpha f(\alpha)d\alpha,$$

$$dy=\sin\alpha f(\alpha)d\alpha;$$

由兩個面積法得x及y.例如R是常數,則得

$$x=x_0+R\sin\alpha,\qquad y=y_0-R\cos\alpha;$$

那麼,所求曲線是一個圓周,半徑為R,依閉縮線的定義,這個結果是明瞭的.誠然,這個閉縮線的弧既常等於零,自然常縮為一

點.

再求一個平曲線,其曲度半徑與弧成反比例,$R=\frac{a^2}{s}$;先得

$$\alpha=\int_0^s\frac{sds}{a^2}=\frac{s^2}{2a^2},$$

繼得

$$x=\int_0^s\cos\frac{s^2}{2a^2}ds,\qquad y=\int_0^s\sin\frac{s^2}{2a^2}ds.$$

雖然不能得到這些積分為 s 的陽函數的形狀,但是這個曲線的形狀容易推知.在 s 由 0 變至 ∞ 時,x 及 y 經過無量數的最大及最小而漸近於一個確定極限;所以曲線是一個螺線(spirale)的形狀,有一個漸近點(point asymptote)在直線 $y=x$ 上.

225. **伸開線及閉縮線**——若是一個曲線 Γ 的切線都是他一個曲線 Γ_1 的法線,我們就說 Γ_1 是 Γ 的伸開線(développante),反之,Γ 是 Γ_1 的閉縮線(développée).這是很明瞭的,一個曲線 Γ 的所有伸開線都在一個能展曲面之上,且和此能展曲面的母線垂直相交,此能展曲面的遞退稜是 Γ.

設 x, y, z 是 Γ 上一點 M 的坐標;α, β, γ 是切線的方向餘弦,伸開線和在 M 點的切線的交點為 M_1.用 l 表線分 MM_1;M_1 的坐標是

$$x_1=x+l\alpha,\qquad y_1=y+l\beta,\qquad z_1=z+l\gamma,$$

由此得

$$dx_1=dx+ld\alpha+\alpha dl,\qquad dy_1=dy+ld\beta+\beta dl,$$

$$dz_1=dz+ld\gamma+\gamma dl.$$

若要M_1所畫曲線垂直於MM_1,必須要也只須要

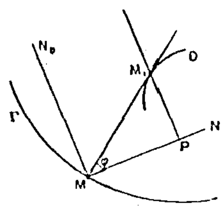
$$\alpha dx_1+\beta dy_1+\gamma dz_1=o,$$

就是說

$$\alpha dx+\beta dy+\gamma dz+dl+l(\alpha d\alpha+\beta d\beta+\gamma d\gamma)=o,$$

此關係式縮減爲$ds+dl=o$.由此可見欲得一空間曲線Γ的伸開線可仍用一個平曲線的伸開線的建造法.

Fig. 40.



現在我們求一個曲線Γ的一切閉縮線,就是說依一個連續的定律將曲線的法線結合使成爲一個能展曲面(圖40).

凡Γ的一個法線MM_1都是在M點的法平面和一個經過M的平面的交線.若是這個法線MM_1有一個包封,此直線和牠的包封的接觸點M_1是在法平面和一隣近的法平面的交線上($n^\circ 205$),就是說在極直線上.所以所有的閉縮線都在極曲面上.

設D是一個閉縮線,φ是方向MM_1和主法線的正方向所作的角,此角的計算法和在三角學上同;在法平面內,我們取旋轉的正方向和以下方向同:若將法線的正方向旋轉$\frac{\pi}{2}$即合於副法

線的正方向上,(圖40).設λ, μ, ν是方向MM_1的方向餘弦若要直線MM_1產出一個能展曲面,必須要也只須要($n^\circ 205$)

$$(38)\qquad H=\begin{vmatrix} \dfrac{d\lambda}{ds} & \dfrac{d\mu}{ds} & \dfrac{d\nu}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=o.$$

由關係式

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=o,\quad \lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'=\cos\varphi,\quad \lambda\alpha''+\mu\beta''+\nu\gamma''=\sin\varphi,$$

得

$$\lambda=\alpha'\cos\varphi+\alpha''\sin\varphi,\quad \mu=\beta'\cos\varphi+\beta''\sin\varphi,\quad \nu=\gamma'\cos\varphi+\gamma''\sin\varphi,$$

又依福蘭內公式得

$$\frac{d\lambda}{ds}=-\alpha\frac{\cos\varphi}{R}+\alpha'\sin\varphi\left(\frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}\right)-\alpha''\cos\varphi\left(\frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}\right),$$

將$\alpha, \alpha', \alpha''$各代以$\beta, \beta', \beta''$即$\gamma, \gamma', \gamma''$,即得$\dfrac{d\mu}{ds}, \dfrac{d\nu}{ds}$.將$\lambda, \mu, \nu, \dfrac{d\lambda}{ds}, \dfrac{d\mu}{ds}, \dfrac{d\nu}{ds}$的價值代入定準式中,即成為六個部分定準式除去有兩行相同者等於零,只餘公式

$$(39)\qquad \frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}=\begin{vmatrix} \dfrac{d\lambda}{ds} & \dfrac{d\mu}{ds} & \dfrac{d\nu}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

令第一端等於零,得一個方程式由一個面積法定出φ【註五】

$$\varphi=\varphi_0+\int_0^s \frac{ds}{T}. \tag{40}$$

對於常數φ_0的兩個價值，φ角有兩個相隨價值，但是沿曲線Γ上，此兩個角的差恆爲常數。由此可見Γ的切於兩個閉縮線的法線相交成定角。若已知Γ的一類的法線成爲一個能展曲面，則由法線所成的一切能展曲面都可由將第一類的法線繞共和Γ的交點旋轉一個任意定角得來。

注意 I.——若Γ是平曲線，T是無窮大，以上的公式成爲$\varphi=\varphi_0$。和$\varphi_0=0$相隨的閉縮線是通常的平閉縮線，牠也是曲度心的軌迹。其他的閉縮線有無量數皆在一個柱面上，此柱面的直截線是此平閉縮線；這都是空間曲線，叫作螺旋線(hélice)，下章再詳論之。這個場合是曲度心的軌迹同時是閉縮線的惟一場合。令$\varphi=0$，若要關係式(40)能滿足，必須要T爲無窮大或$\Delta=0$。所以曲線是一個平曲線($n^\circ 216$)。

注意 II.——若D是Γ的閉縮線，則Γ是D的伸開線。在閉縮線上取一個適宜的方向其弧爲s_1，

$$ds_1=d(MM_1);$$

所以一個曲線的閉縮線都是能直曲線。

206. **螺旋線.**——設C是一個任何的平曲線；若自此曲線的一點m在C的平面的垂直線上取一個長度mM，比例於曲線C自一個定點A所起的弧，M點的軌迹是一個空間曲線Γ，叫作螺旋線。我們取曲線C的平面爲xy平面，設

$$x=f(\sigma), \quad y=\varphi(\sigma)$$

是曲線 C 上一點 m 的坐標爲弧 σ 的函數.曲線 Γ 上的相應點 M 的坐標當是

$$(41)\qquad x=f(\sigma),\quad y=\varphi(\sigma),\quad z=K\sigma,$$

K 是一個常數係數.函數 $f(\sigma)$ 及 $\varphi(\sigma)$ 當滿足關係式 $f'^2+\varphi'^2=1$. 命 Γ 的弧爲 s, 由公式 (41), 得

$$ds^2=(f'^2+\varphi'^2+K^2)d\sigma^2=(1+K^2)d\sigma^2,$$

因而 $s=\sigma\sqrt{1+K^2}+H$; 若是將弧 s 及 σ 皆令其自曲線 C 上一點 A 起,這就是令 $H=0$, 則得 $s=\sigma\sqrt{1+K^2}$. Γ 的切線的方向餘弦是

$$(42)\qquad \alpha=\frac{f'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}},\quad \beta=\frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}},\quad \gamma=\frac{K}{\sqrt{1+K^2}};$$

γ 旣不關於 σ, 可見切線和 Oz 軸相作成定角.這個性質是象徵的:凡一個曲線若是牠的切線皆和一個定方向相作成定角則此曲線是一個螺旋線.若要証此定理,我們取 z 軸平行於此方向,設 C 是所論曲線 Γ 在 xy 平面中的射影;曲線 Γ 的方程式總可寫爲

$$(43)\qquad x=f(\sigma),\quad y=\varphi(\sigma),\quad z=\psi(\sigma),$$

函數 f 及 φ 假定是能滿足關係式 $f'^2+\varphi'^2=1$ 的,這就是取曲線 C 的弧 σ 爲自變數.由此得

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{\psi'(\sigma)}{\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}}=\frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}};$$

若要γ爲常數,必須要也只須要φ'爲常數,因而$\varphi(\theta)$的形狀是$K\theta+z_0$.適宜的選取原點,則曲線Γ的方程式的形狀常是(41),

γ旣是常數,依公式$\frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}$,則$\gamma'=0$.那麼主法線垂直於柱面的母線;又因爲他垂直於螺旋線的切線,所以他是柱面的法線,吻合平面也垂直於柱面.然則副法線常在柱面的切平面內而垂直於切線;這表明副法線和Oz相作成定角.

γ'旣等於零,依公式$\frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}$,得$\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}=0$.這表明在螺旋線上$\frac{T}{R}$爲常數.

這些性質都是一個螺旋線的象徵.譬如我們証明凡一個曲線若是比$\frac{T}{R}$爲常數就是一個螺旋線 (Barré de Saint-Venant 及 J. Bertrand).

自福雷內公式得

$$\frac{d\alpha}{d\alpha''}=\frac{d\beta}{d\beta''}=\frac{d\gamma}{d\gamma''}=\frac{T}{R}=\frac{1}{H};$$

若H爲常數,由積分,得

$$\alpha''=H\alpha-A,\quad \beta''=H\beta-B,\quad \gamma''=H\gamma-C,$$

A, B, C表三個新常數.將此三個方程式各乘以α, β, γ以後再相加,得

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=H,$$

這又可寫爲

$$\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{H}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

但是 $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 是某一個直線 Δ 的方向餘弦,以上的公式表明切線和此方向相作成定角;所以所設曲線是一個螺旋線.

試再計算曲度半徑.依所得 (42) 中 α 及 β 的價值,我們有

$$\frac{\alpha'}{R}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{1+K^2}f''(\sigma), \frac{\beta'}{R}=\frac{1}{1+K^2}\varphi''(\sigma),$$

γ' 旣等於零,結果,

(44) $$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{(1+K^2)^2}\left[f''^2(\sigma)+\varphi''^2(\sigma)\right].$$

那麼,比 $\frac{1+K^2}{R}$ 不關於 K;但是對於 $K=o$, 此比縮減爲柱面的直截線 C 的曲度半徑的倒數 $\frac{1}{r}$, 這是容易驗明的 (n°218). 所以以上的公式可寫爲 $R=r(1+K^2)$, 這表明一個螺旋線的曲度半徑和曲線 C 的曲度半徑的比爲常數,由此甚易得到 R 及 T 都是常數的一切曲線.誠然比 $\frac{T}{R}$ 旣是常數,依德聖維南 (Barré de Saint-Venant) 及彼得耶 (J. Bertrand) 的定理,這些曲線都是螺旋線.又因爲 R 是常數,故曲線 C 的曲度半徑也是常數.然則曲線 C 是一個圓周,所求曲線是畫在一個旋轉圓柱上的一個螺旋線.這個命題是畢若 (Puiseux) 的.【註六】

207. **彼得耶的曲線.**——一個平曲線的主法線同

時是無量數其他平曲線的主法線,這些曲線都和第一曲線平行.彼得郎他要求些空間的曲線,牠們的主法線,同時也是別的一個空間曲線的主法線.假定Γ上一點的坐標x,y,z為弧s的函數;在每一個法線上取一個長度l,設X,Y,Z是其終點的坐標.

$$X=x+l\alpha',\quad Y=y+l\beta',\quad Z=z+l\gamma'. \tag{45}$$

若要曲線Γ的主法線也是(X,Y,Z)點所畫曲線Γ'的主法線,必須要也只須要有兩個關係式

$$\alpha' dX+\beta' dY+\gamma' dZ=o,$$

$$\alpha'(dYd^2Z-dZd^2Y)+\beta'(dZd^2X-dXd^2Z)$$
$$+\gamma'(dXd^2Y-dYd^2X)=o,$$

牠們的意義是明瞭的.自第一關係式得$dl=o$,這表明長度l是常數.再由福耐內的公式及由微分法所得公式取得dX, d^2X dY,...的價值,代入第二關係式,化簡以後,得

$$\frac{1}{T}d\left(1-\frac{l}{R}\right)=\left(1-\frac{1}{R}\right)d\left(\frac{1}{T}\right),$$

由積分得關係式

$$\frac{l}{R}+\frac{l'}{T}=1, \tag{46}$$

l'表一個新常數.然則所求曲線都是曲度及旁曲度間有一個一次關係式的曲線.由此又可見這個條件是充足的,長度l即

可自關係式(46)得來.

特別可加注意的一個場合曾爲孟然(Monge)所研究;就是曲度半徑爲常數的場合.關係式(46)成爲$l=R$,公式(45)所表曲線Γ'是曲線Γ的曲度心的軌迹.假定$l=R=$常數,由公式(45)得

$$(47)\qquad dX=-\frac{R}{T}\alpha''ds,\quad dY=-\frac{R}{T}\beta''ds,\quad dZ=-\frac{R}{T}\gamma''ds,$$

這表明Γ'的切線是Γ的極直線.

Γ'的曲度半徑R'由以下的公式得來:

$$R'^2=\frac{dX^2+dY^2+dZ^2}{d\alpha''^2+d\beta''^2+d\gamma''^2}=R^2;$$

可見此曲度半徑也是常數且等於R,那麼,此兩曲線Γ及Γ'間有相互性;此一曲線是他一曲線的極曲面的逆退稜.這些性質都很容易在圓螺旋線上直接驗明.

注意.—我們很容易得到一般公式表一切的空間曲線牠們的曲度半徑爲常數且等於R.設α,β,γ是含一個變率的三個函數能滿足關係式$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.設$d\sigma=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}$,公式

$$(48)\qquad X=R\int\alpha d\sigma,\quad Y=R\int\beta d\sigma,\quad Z=R\int\gamma d\sigma$$

表一個能滿足這個問題的曲線.我們很容易証明由此方法即得滿足這個問題的一切曲線.誠然,α,β,γ正是切線的方向餘弦,σ是球面指線的弧(n° 217).

228. **吻合球面** (sphère osculatrice).——我們再應用福爾內的公式以定吻合球面.假定曲線Γ上一點的坐標x, y, z爲此曲線的弧s所表明.若要中心在(a, b, c),半徑爲ρ的一個球面和此曲線Γ在某一個已知點上有一個第三級的接觸,必須要也只須要

$$(49)\qquad \mathfrak{F}(s)=o, \qquad \mathfrak{F}'(s)=o, \qquad \mathfrak{F}''(s)=o, \qquad \mathfrak{F}'''(s)=o,$$

我們是令

$$(50)\qquad \mathfrak{F}(s)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\rho^2,$$

其中x, y, z假定爲s的函數.後三個條件展開以後,再應用福爾內的公式可寫爲

$$\mathfrak{F}'(s)=(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma=o,$$

$$\mathfrak{F}''(s)=(x-a)\frac{\alpha'}{R}+(y-b)\frac{\beta'}{R}+(z-c)\frac{\gamma'}{R}+1=o,$$

$$\mathfrak{F}'''(s)=-\frac{x-a}{R}\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right)-\frac{y-b}{R}\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right)-\frac{z-c}{R}\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}\right)$$

$$-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}[(x-a)\alpha'+(y-b)\beta'+(z-c)\gamma']=o.$$

這三個方程式定出a, b, c.但是若將a, b, c看作流行坐標,則第一個關係式表一個平面在(x,y,z)點和曲線垂直.其他兩個關係式是關於變率s求微分得來的;那麼,吻合球面的中心合於極直線及其包封的接觸點.若要解此三個方程式,我們注意計算着首二

方程式,則最後的方程式可寫爲

$$(51)\qquad (x-a)\alpha''+(y-b)\beta''+(z-c)\gamma''=T\frac{dR}{ds};$$

很容易得到

$$(52)\qquad \begin{cases} a=x+R\alpha'-T\dfrac{dR}{ds}\alpha'', \\ b=y+R\beta'-T\dfrac{dR}{ds}\beta'', \\ c=z+R\gamma'-T\dfrac{dR}{ds}\gamma''; \end{cases}$$

因而吻合球面的半徑ρ爲以下的公式所表:

$$(53)\qquad \rho^2=R^2+T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

若是常數,則吻合球面的中心合於曲度心;這誠然和$n°227$之末所得結果同.

III. 直線組(systéme de droites)的概要.

空間一個直線關係四個變率.所以依此等變率間的關係式的數,一組的空間直線有含一個,兩個或三個變率之不同.關係一個變率的動直線產出一個直線曲面.關係兩個各別變率的直的集合叫作直線的相合組(congruence).關係三個各別變率的直線的集合叫作直線的複合組(conpléxe).

229. **直線曲面.**——設

(54) $$x=az+p, \qquad y=bz+q$$

是一個動母線G在一系的直交坐標中的方程式,a, b, p, q都是一個變率u的函數.今此直線所產曲面爲S,我們將研究此曲面的切平面的位置如何依接觸點在母線G上的位置而變化.方程式(54)加以$z=z$,定出曲面上任意一點的坐標爲兩個變率z及u的函數;那麼,切平面的方程式是(n°61)

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ a & b & 1 \\ a'z+p' & b'z+q' & o \end{vmatrix}=o,$$

a', b', p', q'是a, b, p, q關於u的導來式.將x代以$az+p$, y代以$bz+q$,展開此定準式,方程式成爲

(55) $$(b'z+q')(X-aZ-p)-(a'z+p')(Y-bZ-q)=o.$$

首先可見此平面常經過母線G,這是先天的預知的.在接觸點畫出此母線時,此平面沿此直線而旋轉,只要分數式$\dfrac{a'z+p'}{b'z+q'}$非與z無關,就是說只要沒有關係式$a'q'-b'p'=o$,這是我們所預先除外的場合.這個分數式既關於z是一次式,則凡經過母線的一個平面都在母線上一點和曲面相切而只在母線上一點和曲面相切.若接觸點沿母線上遠至無限,則切平面漸近於一個極限平面P',此平面叫作母線上無限遠點的切平面,牠的方程式是

(56) $$b'(X-aZ-p)-a'(Y-bZ-q)=o.$$

設ω是此平面P'和曲面在母線(x, y, z)點上的切平面所作

的角.此兩平面的法線的方向率 (pararètre directeur) 各為 $b', -a'$, $a'b-ab'$ 及 $b'z+q', -(a'z+p'), b(a'z+p')-a(b'z+q')$; 那麽

$$\cos\omega=\frac{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2]^{-\frac{1}{2}}\{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2]z+b'q'+a'p'+(ab'-ba')(aq'-bp')\}}{\sqrt{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2]z^2+2z[b'q'+a'p'+(ab'-ba')(aq'-bp')]+q'^2+p'^2+(aq'-bp')^2}},$$

由此很容易算出

$$(57)\qquad \operatorname{tang}\omega=\frac{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2]z+b'q'+a'p'+(ab'-a'b)(aq'-bp')};$$

切平面在母線的一點 O_1 上垂直於此平面 P',此點的縱坐標 z_1 的公式是

$$(58)\qquad Z_1=-\frac{a'p'+b'q'+(ab'-ba')(aq'-bp')}{a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2};$$

此點叫作母線的<u>中心點</u>(point-central),在此點的切平面 P 叫作<u>中心平面</u> (plan central). 在母線的另一點上的平面和此中心平面所作的角 θ 等於 $\frac{\pi}{2}-\omega$, 公式 (57) 可以代以

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2](z-z_1)}{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

設 ρ 是中心點至一個切平面的接觸點 M 的距離,依方向 O_1M 和 Oz 作成銳角或鈍角,我們給 ρ 一個符號 + 或 - 我們有

$$\rho=(z-z_1)\sqrt{1+a^2+b^2},$$

以上的公式又可寫爲

$$\tan g\,\theta = K\rho, \tag{59}$$

其中 K 的價值是

$$K = \frac{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}{(a'q' - b'p')(1 + a^2 + b^2)}; \tag{60}$$

係數 K 叫作分配變率 (para métre de distribution).公式(59)是切平面沿母線而旋轉的定律,其形狀極爲簡單.此公式只含具有幾何意義的原素;誠然,我們不遠可見如何直接定出此分配變率 k.但是公式(59)仍有頗滋誤會的點,就是不能立即看出向那一個方向計算 θ 角.換句話說,就是接觸點在母線上移動時先天的不能知道切平面如何沿母線而旋轉.此旋轉的方向止爲 k 的符號所定.

若要將此點充分的明瞭,假定一個觀察者臥於母線上,在接觸點由足向首移動時,則此觀察者見切平面由左向右旋轉或由右向左旋轉,只須略加思索即可見如此所定的旋轉方向在觀察者首足互易位置時並不生變化.兩個雙曲拋物面 (paraboloïde hyperbolique)旣有一個公共母線,又關於一個經過此母線的平面成對稱,給我們此兩個位置法(disposition)的一個明瞭觀念.此附已經說明,懸想將坐標軸的三面角連續變位,使原點到中心點 O_1, z 軸合於母線, xy 平面合於中心平面,這是明瞭的,分配變率 k 保有其固定價值;在新系的坐標軸中,公式(59)成爲

$$\tan g\,\theta = kz, \tag{59'}$$

θ 表切平面和平面 $y=o$ 所作的角,此角的方向是適宜選取的.

對於變率和 Oz 軸相隨的價值 u_0,我們當有 $a=b=p=q=o$,

切平面方程式(55)縮減為

$$(b'z+q')X-(a'z+p')Y=o.$$

若要原點是中心點,xz平面是中心平面,必須要$a'=o, q'=o$,切平面的方程式成為$Y=\frac{b'z}{p'}X$,由公式(60)得$k=-\frac{b'}{p'}$.那麼,在公式(59')中,θ角當由Oy向Ox.若坐標軸的三面角依以上的位置法(n^o 221),一個觀察者臥於Oz上,若k是正,則見切平面由左向右,若k是負,則由右向左.

一切母線的中心點的軌迹叫作直線曲面的嚴密線 (ligne de striction).公式(54)及(58)定出此線上一點的坐標為變率u的函數.

注意.一若是對於所取母線,得到$a'q'=b'p'$,則沿此母線上切平面都是相同.若是對於u的所有價值,這個關係式都能滿足,此直線曲面就成為能展曲面(n^o 205).我們很容易復得到以前所得的結果.誠然,若a'及b'不同時為零,切平面在G的所有點上都是相同;對於一點$z=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}$,就是對於母線和其包封的接觸點,切平面成為不定,計算着關係式$a'q'-b'p'=o$,甚易驗明公式(58)所定z_1的價值和以上的價值相同,嚴密線與逆退稜相合;分配變率成為無限.若$a'=b'=o$,曲面是柱面;中心點為不定.

中心點及分配變率亦可由他種方法推定.對於母線G,同時取一個鄰近母線G_1,G_1和變率的價值$u+h$相應,他的方程式是

$$(61)\qquad x=(a+\triangle a)z+p+\triangle p,\qquad y=(b+\triangle b)z+q+\triangle q.$$

設δ是此二直線G及G_1的最近距離,α是牠們所作的角,X, Y, Z是G和公垂線的交點的坐標,自解析幾何上的公式得

$$Z=-\frac{\Delta a\Delta q+\Delta b\Delta p+(a\Delta b-b\Delta a)[(a+\Delta a)\Delta q-(b+\Delta b)\Delta p]}{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\Delta b-b\Delta a)^2},$$

$$\delta=\frac{\Delta a\Delta q-\Delta b\Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\Delta b-b\Delta a)^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\Delta b-b\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{(a+\Delta a)^2+(b+\Delta b)^2+1}}.$$

在h漸近於零時,Z的極限是對於z_1所得的算式,至於$\frac{\sin\alpha}{\delta}$的極限是$k$.那麼,中心點是$G$和一個隣近母線的公垂線的足的極限點,分配變率是比$\frac{\sin\alpha}{\delta}$的極限.

將$\delta, \Delta a, \Delta b, \Delta p, \Delta q$代以牠們關於$h$的展開式,對於分子,得

$$\Delta a\Delta q-\Delta b\Delta p=h^2(a'q'-b'p')+\frac{h^3}{2}(a''q'+a'q''-b''p'-b'p'')+\ldots,$$

至於分母,關於h總是第一級.可見δ通常的是第一級無限小,除卻在能展曲面的場合,我們有$a'q'-b'p'=o$.然而$\frac{h^3}{2}$的係數是$a'q'-b'p'$的導來式;那麼,此係數亦為零,結果,對於能展曲面,兩個相隣母線的最近距離是第三級(n^o 223).這個定理是步格的,他另外又証明若要此距離恆為第四級,則必須此距離恆為零,就是說在平曲線的切線的場合或圓錐曲面的場合.若欲見此,只須將$\Delta a\Delta q-\Delta b\Delta p$展至第四級的項.

230. **直線的相合組.焦點曲面** (surface focale).——凡一個直線組

$$x=az+p,\qquad y=bz+q, \tag{62}$$

a, b, p, q 關係兩個變率 α 及 β,叫作直線的相合組.自空間一點通常的有相合組中若干個直線經過.這是因爲若假定 x, y, z 是已知,則有兩個方程式以決定 α 及 β.若在 α 及 β 間作出一個關係式,則方程式 (62) 所表曲線產出一個直線曲面,此曲面普通的不是一個能展曲面,若要這個曲面是一個能展曲面,必須要

$$da\,dq-db\,dp=o,$$

將 da 代以 $\frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta,\ldots,$ 此條件成爲

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial q}{\partial \beta}d\beta\right)\\&\qquad-\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial b}{\partial \beta}d\beta\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial p}{\partial \beta}d\beta\right)=o.\end{aligned}\right. \tag{63}$$

自此關於 $\frac{d\beta}{d\alpha}$ 的二次方程式,普通的得 $\frac{d\beta}{d\alpha}$ 的兩個價值:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\varphi_1(\alpha,\beta),\quad \frac{d\beta}{d\alpha}=\varphi_2(\alpha,\beta). \tag{64}$$

以後可見在些極普條件之下,這兩個方程式每一個都能為無量數的 α 的函數所滿足;每一個方程式有一個而只有一個積分對於 $\alpha=\alpha_0$ 牠取得 β_0 的價值.那麼,相合組中任一個直線 G 都在兩個能展曲面上,而此等曲面的所有母線也都是相合組中的直線.設 Γ 及 Γ' 是此兩個能展曲面的逆退稜,A 及 A' 是直線 G 和 Γ 及 Γ' 的接觸點.這兩點 A 及 A' 叫作<u>母線的焦點</u>.若要得此二點,只須用以下的方法,並不須要求方程式 (63) 的積分,此方程式是定相合組的能展曲面的.這兩點中每一個的坐標 z 當滿足兩個關係式

$$z\,da+dp=o,\qquad z\,db+dq=o,$$

將 da, db, dp, dq 代以牠們的展開式,得

$$z\left(\frac{\partial a}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial a}{\partial\beta}d\beta\right)+\frac{\partial p}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial p}{\partial\beta}d\beta=o,$$

$$z\left(\frac{\partial b}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial b}{\partial\beta}d\beta\right)+\frac{\partial q}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial q}{\partial\beta}d\beta=o.$$

在此兩個關係式中消去 z,即復得方程式 (63),但是若消去比 $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ 即得一個二次式以定兩個焦點

$$(65)\qquad \begin{cases}\left(z\dfrac{\partial a}{\partial\alpha}+\dfrac{\partial p}{\partial\alpha}\right)\left(z\dfrac{\partial b}{\partial\beta}+\dfrac{\partial q}{\partial\beta}\right)\\[2ex] \qquad -\left(z\dfrac{\partial a}{\partial\beta}+\dfrac{\partial p}{\partial\beta}\right)\left(z\dfrac{\partial b}{\partial\alpha}+\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}\right)=o.\end{cases}$$

焦點A及A'的軌迹成爲兩張曲面Σ及Σ'牠們的方程式當自(62)及(65)消去α及β得來.普通的這兩張曲面在解析上並非各別的,牠們是同一曲面的兩張.這叫作焦點曲面的兩張.這個焦點曲面也是相合組的能展曲面的逆退稜的軌迹.誠然,依曲線Γ的定義,在此曲線任意一點A上的切線都在相合組內而A點正是焦點中的一個.凡相合組中一個直線都切於此兩張曲面Σ, Σ',這是因爲此直線切於此兩張曲面上的兩個曲線的緣故.

我們用以下的方法定出曲面Σ及Σ'在A及A'點上的切平面(參看圖41).例如假定直線G逐漸變位但常切於曲線Γ,此直線也必常切於曲面Σ',牠和此一張曲面的接觸點A'畫出一個曲線γ', γ'當然各別於Γ'.那麽,直線G所產的能展曲面必切Σ'於A',這是因爲這兩個曲面的兩個切平面都包有直線G;及γ'的切線的緣故.由此可見Σ'在A'點的切平面正是曲線Γ在A點的吻合平面.同樣的方法可証明Σ在A點的切平面是曲線Γ'在A'點的吻合平面.這兩個平面叫作<u>焦點平面</u>(plans focaux).

這兩個焦點平面可以直接定出如下.設

$$x-az+p+\lambda(y-bz-q)=o$$

是一個焦點平面的方程式.此平面經過相合組的一個直線G.在此直線變位而產出相合組的一個能展曲面時,α,β及λ都是一個變率的函數,此動平面的象徵線正是此直線G自身.但是此象徵線是此動平面及以下的平面的交線:

$$-z\,da-dp+d\lambda(y-bz-q)-\lambda(z\,db+dq)=o.$$

若要此第二曲面經過直線G,必須要

$$da+\lambda db=o,\qquad dp+\lambda dq=o.$$

消去λ,即得方程式(63),但是若消去比$\dfrac{d\beta}{d\alpha}$即得λ的二次式以定兩個焦點平面

$$(66)\qquad \begin{cases}\left(\dfrac{\partial a}{\partial\alpha}+\lambda\dfrac{\partial b}{\partial\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial p}{\partial\beta}+\lambda\dfrac{\partial q}{\partial\beta}\right)\\ \qquad-\left(\dfrac{\partial a}{\partial\beta}+\lambda\dfrac{\partial b}{\partial\beta}\right)\left(\dfrac{\partial p}{\partial\alpha}+\lambda\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}\right)=o.\end{cases}$$

有時焦點曲面的一張成爲一個曲線C.此時相合組的直線切於一張曲面Γ而和曲線C相遇;一類的能展曲面成爲錐曲面(cône),外切於曲面Σ,頂點畫出C.若是焦點曲面的兩張各成爲曲線C及C',則兩類的能展曲面都成爲錐曲面從一個曲線經過,頂點在他一曲線上.若是此兩曲線C及C'都是直線.我們稱爲直線式的相合組(congruence linéaire)

231. **法線的相合組.**——一個曲面的法線顯然成爲一個相合組.然而這個逆定理是不確實的;對於一個相合組.未必定有一個曲面垂直於組中的一切直線.誠然.我們試求直線(62)垂直於一個曲面的條件;若要如此.必須要也只須要有一個函數$f(\alpha,\beta)$存在;方程式

$$(67)\qquad x=az+p,\quad y=bz+q,\quad z=f(\alpha,\beta)$$

所表曲面S的法線正是直線G,爲此必須要

$$a\frac{\partial x}{\partial \alpha}+b\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}=o,$$

$$a\frac{\partial x}{\partial \beta}+b\frac{\partial y}{\partial \beta}+\frac{\partial z}{\partial \beta}=o;$$

將x代以$az+p$,y代以$bz+q$,除以$\sqrt{a^2+b^2+1}$,這些條件成爲

$$(68)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right)+\dfrac{a\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}+b\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=o, \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right)+\dfrac{a\dfrac{\partial p}{\partial \beta}+b\dfrac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=o. \end{cases}$$

若要這些條件能相容,必須要也只須要

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{a\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}+b\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{a\dfrac{\partial p}{\partial \beta}+b\dfrac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right);$$

若這些條件能滿足,方程式(68)由一個面積法顯明z.所得的曲面關係一個由積分所輸入的常數成爲一類的平行曲面.

若要解釋條件(69),我們注意於經過相合組中任一直線的兩個焦點平面的垂直性是

$$1+\lambda_1\lambda_2+(a+b\lambda_1)(a+b\lambda_2)=o,$$

$\lambda_1\lambda_2$是方程式(66)的兩個根,將$\lambda_1+\lambda_2$及$\lambda_1\lambda_2$代以牠們的價值,這個條件成爲

$$(1+a^2)\frac{D(b,q)}{D(\alpha,\beta)}+(1+b^2)\frac{D(a,p)}{D(\alpha,\beta)}=ab\left[\frac{D(a,q)}{D(\alpha,\beta)}+\frac{D(b,p)}{D(\alpha,\beta)}\right],$$

牠和條件(69)相同.由此,我們可以宣告以下的命題:<u>若要一個直線的相合組由於一個曲面的法線所成,必須要也只須要經過相合組中每一直線的兩個焦點平面互相垂直.</u>

注意I.——若取直線和ox及oy軸所成角的餘弦爲變率α,β,我們有

$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\quad b=\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\quad \sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},$$

方程式(61)成爲

$$(79)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\dfrac{\partial p}{\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}=o, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\dfrac{\partial p}{\partial\beta}+\beta\dfrac{\partial q}{\partial\beta}=o, \end{cases}$$

能積分條件(69)成爲$\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}=\dfrac{\partial p}{\partial\beta}$.這表明$p$及$q$都是一個函數$F(\alpha,\beta)$的偏導來式$p=\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}$, $q=\dfrac{\partial F}{\partial\beta}$,此函數能由一個面積法得來.更自一個全微分

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)=-\left(\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}\right)d\alpha-\left(\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}+\beta\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}\right)d\beta,$$

由積分法得

$$z=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\left(C+F-\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial F}{\partial p}\right),$$

C是一個任意常數.

注意II.——一個曲線Γ的法線也都是一個管狀曲面(surface conal)的法線,此曲面是半徑爲常數,中心在Γ的一個球面的包封,所以曲線Γ的法線成爲一個法線的相合組.焦點曲面的一張縮減爲曲線Γ,他一張是Γ的極曲面.一個焦點平面從一個法線MN經過是Γ的法平面,他一焦點平面經過Γ的切線MT;牠們自然是垂直的.

一個圓環(tore)的法線成爲一個相合組.牠的焦點曲面縮減爲兩個曲線,就是圓環的軸及徑線的中心的軌迹所成圓周.

232. **複合組**(complêxe).——一個直線的複合組由於關係三個變率的直線的集合而成.設

$$x=az+p,\quad y=bz+q \tag{71}$$

是一個直線的方程式;凡一個直線的複合組都是由a, b, p, q間一個關係式

$$F(a,b,p,q)=o \tag{72}$$

所定,其逆亦爲確實.若F關於a,b,p,q是整多項式,則複合組

爲代數的.複合組中經過一定點(x_0, y_0, z_0)的直線成爲一個錐曲面,頂點在此定點上,此錐曲面的方程式是在關係式(71),(72)及

$$x_0 = az_0 + p, \qquad y_0 = bz_0 + q \tag{73}$$

間消去a, b, p, q得來;所以此錐曲面的方程式是

$$F\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}, \frac{x_0z-xz_0}{z-z_0}, \frac{y_0z-yz_0}{z-z_0}\right)=0. \tag{74}$$

同樣,在每一個平面中皆有無量數的直線屬於此複合組;這些直線包封一個曲線叫作複合組的曲線.若複合組是代數的,則複合組的錐曲面的級數 (ordre) 等於複合組的曲線的類 (classe). 誠然,假定我們要盡得複合組中經過一個定點A而盡在一個平面P內的直線(P經過A點).我們有兩種方法:用平面P割頂點在A的複合組錐曲面,或由A點引平面P上複合組曲線的切線.此兩個方法當得同數的直線,故宣告的定理是確實.

若複合組錐曲面縮減爲一平面,此複合組叫作直線式的,方程式(72)的形狀當是

$$Aa + Bb + Cp + Dq + E(aq - bp) + F = 0; \tag{75}$$

複合組中過個一定點x_0, y_0, z_0的直線的軌迹是一個平面其方程式是

$$\begin{aligned} A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(x_0z - z_0x) \\ + D(y_0z - z_0y) + E(y_0x - x_0y) + F(z-z_0) = 0, \end{aligned} \tag{76}$$

複合組的曲線既是第一類,當縮減爲一點,這就是複合組在一個平面中的所有直線都從此平面中一點經過,此點叫作極或焦點.那麼,一個直線式的複合組將空間的平面及點間作成一個關係:對於一點,有一個經過此點的平面相應;對於一個平面,有一個相應點在此平面上.空間的直線也有一個相應法.設 D 是一個直線不在複合組內;設 F 及 F' 是經過此直線的兩個平面的焦點, Δ 是連此二焦點的直線.凡經過 Δ 的一個平面都以和直線 D 相遇點 φ 爲焦點,這是因爲直線 φF, $\varphi F'$ 顯然屬於複合組的線故.由此可見凡過 D 及 Δ 的直線都屬於複合組.經過 D 的一個平面的焦點是此平面和直線 Δ 的交點.此二直線 D 及 Δ 叫作共軛直線 (droites conjugueés).此一個是經過他一個的平面的焦點的軌迹.

若直線 D 遠至無限,則經過 D 的平面都成爲平行,由此可見平行於一個定平面的平面的焦點的軌迹是一個直線.有一個平面存在,其性質是平行於牠的平面的焦點的軌迹是一個垂直於牠的直線.若取此直線爲 z 軸,一個平面的焦點若在 z 軸上,則此平面常平行於平面 $z=o$.若要如此,必須要

$$A=B=C=D=o;$$

複合組的方程式成爲簡單

$$aq-bp+K=o, \tag{77}$$

一個平面焦點在 (x, y, z) 點,牠的方程式是

$$Xy-Yx+K(Z-z)=o, \tag{78}$$

X, Y, Z 都是流行坐標.

作為應用,我們求些曲線,牠們的切線都在以上的複合組之內.假定有一個此類的曲線,他的坐標 x, y, z 都是一個變率的函數.此曲線一點上的切線的方程式是

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz};$$

若要此直線屬於複合組,必須要也只須要牠在平面 (78) 上,此平面的焦點是 x, y, z 點,就是說

$$xdy-ydx=Kdz. \tag{79}$$

我們已見(n°216)如何得到能滿足這個關係式的所有的一個變數的函數 x, y, z;那麼,我們有能應此問題的所有曲線.

在 n° 216 所得結果很容易在複合組的理論中說明之.譬如將方程式 (79) 微分,得

$$xd^2y-yd^2x=Kd^2z, \tag{80}$$

關係式 (79) 及 (80) 表明在 (x, y, z) 點的吻合平面正是平面 (78).所以我們可宣告以下的命題:若是一個空間曲線的切線屬於一個直線式的複合組,此曲線上任一點的吻合平面是以此點為焦點的平面. (Appell).

設有一個空間曲線 Γ 其切線屬於一個直線式的複合組,懸想要自空間一定點 O 引此曲線的吻合平面.設 M 是平面中一個的接觸點,依以上所宣告的定理,直線 MO 是複合組中一個直線,因而 M 點在以 O 為焦點的平面內.倒轉來,若曲線 Γ 上

的 M 點是在此平面內,直線 MO 牠屬於複合組,牠就在 M 點的吻合平面內,此吻合平面經過 O 點,所以所求點是曲線 Γ 及以 O 為焦點的平面的交點(n° 216).

直線式的複合組常見於幾何學及機械學的理論中[譬如參觀 Appell 及 Picard 的博士論文].[註七]

習　　題

1. 一個曲線和一個正圓錐 (cone circulaire droite 的直線母線相交成定角,求此曲線的縮閉線的方程式,方程式中的項數是有限的.

[Licence: Marseille, juillet 1884.]

2. 是否有些曲線 Γ 存在,其性質是一個定平面 P 和切線,主法線,副法線的交點成為一個等邊三角形的頂點?

3. 一個曲面牠是些球面的包封(象徵圓周的包封),牠的逆退稜是 Γ;球面的中心的軌迹曲線在 Γ 的極曲面 (surface polaire) 上.逆定理.

4. 設有一個空間曲線 Γ,自一個定點 O 引一個直線平行於 Γ 上一點 M 的極直線 (droite polaire),在此直線上取一個長度 ON 等於 Γ 在 M 點的曲度半徑. N 點畫出一個曲線 Γ',牠和 Γ 的曲度中心的軌迹曲線 Γ'' 相應,Γ' 及 Γ'' 的線原素有恆等性及垂直性.

[Rouquet.]

5. 若是一個空間曲線 Γ 的吻合球面的半徑是一個定長 a,此曲線必在一個半徑等 a 的球面上,除卻曲度半徑是常

數且等於a.

6. 若要盡在一個柱面的螺旋線 (hélice) 的曲度心的軌迹是又一螺旋線盡在又一個柱面之上,此後者的母線皆平行於第一柱面的母線,必須要也只須要此第一柱面的垂直割線 (section droite) 是一個圓周或是一個對數螺線 (spirale logarithmique). 在此第二場合,這些螺旋線都在旋轉圓錐上.

[Tissot, Nouvelles Annales t. XI, 1852]

7.* 若是空間的兩個曲線常有相同的主法線,則在此二曲線和一個共同法線的交點上,此二曲線的吻合平面作成定角,此兩點及二曲線的曲度中心共得四點,其反調和比 (rapport anharmonique) 爲定數. 這兩個曲線,在相應點上,其旁曲度半徑 (rayon de torsion) 的積爲常數.

[Paul Serret, Mannheim, Schell.]

8. 設x, y, z是一個空間曲線Γ的直交坐標,s是此曲線的弧.一個曲線Γ_0其坐標的算式

$$x_0=\int\alpha''ds, \qquad y_0=\int\beta''ds, \qquad z_0=\int\gamma''ds$$

此曲線叫作附屬曲線 (courbe adjointe).設θ是一個定角,方程式

$$X=x\cos\theta+x_0\sin\theta, \quad Y=y\cos\theta+y_0\sin\theta, \quad Z=z\cos\theta+z_0\sin\theta$$

所表曲線叫作會合曲線 (courbes associées). 對於這些曲線求基本三面角 (triédre fondamental) 的位置法 (dis position) 以及曲度半徑旁曲度半徑.

若曲線Γ的曲度是常數,則曲線Γ_0的旁曲度是常數,會

合曲線都是彼得郎的曲線.由此演出此等曾合曲線的普通方程式.

9.* 在一個旋轉二次曲面S上,求出曲線Γ牠們的每一點的切線都和經過此點而平行於旋轉軸之直線作成定角.依此二次曲線的種類研究這些曲線的各種形狀.顯明這些曲線又和些錐曲面(cône)的母線相交成定角,這些錐曲面以Γ為準線(directrice),以經線(méridienne)在旋轉軸上的焦點為頂點,若S是一個旋轉圓錐,則得通常的「柱錐」(cylindro-conique)螺旋線.(參觀 Piron dini, Journal de Crelle, t. 118, 1897, p. 61; G. Scheffers, Leipzig Beritche, 1902, p. 369; E. Cesuro, Rendiconti di Napoli, 1903, p. 73.)

若是兩個錐曲面沿一個曲線Γ相割,又若是Γ和這兩個錐曲面的母線皆相交成定角,牠也必和一第三個錐曲面的母線相交成定角,此第三錐曲面的頂點S''在前兩個錐曲面的頂點S及S'所定的直線上.如此則曲線Γ在一個旋轉曲面上,其經線是一個戴加德(Descartes)的蛋形線(Ovale),S, S', S''是這個曲線的焦點.

[Cesaro, Ibid.]

10. 一個直線關於一個空間曲線的基本三面角為固定,並且經過此三面角的頂點;若要這個直線產出一個能展曲面,必須要這個直線合於切線.如果曲線Γ不是一個螺旋線.在這個場合有無量數的直線能應答此問題.

對於一個彼得郎曲線,有兩個雙曲拋物面(paraboloïde hyperbolique)關於基本三面角為固定.此二曲面的所有母線都產出

能展曲面.

[Cesars, Rivista di Mathe matica, t. 11, 1892, p. 155.]

11*. 若要一個空間曲線的主法線是又一個空間曲線的副法線,必須要在曲度半徑及旁曲度半徑間有一個關係式

$$A\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}\right)=\frac{B}{R},$$

A及B是常數.

[Mannhein, Comptes rendus, 1877.]

一個直線經過一個空間曲線上一點,又關於基本三面角爲固定,這個直線常是另一空間曲線的主法線或副法線的場合已爲伯列 (Pellet) (comptes rendus, mai 1887), 西撒羅 (cesraro) (Nouzelles annales, 1888, p. 147), 巴里得郎 (Bolitranp) (Mathesis, 1894, p. 159) 所研究.

12. 若是一個空間曲線Γ的吻合平面常切於一個中心在O的定球面:第一,經過切線而垂直於主法線的平面必經過O點;第二,曲度半徑及旁曲度半徑的比是弧的一次函數.逆定理.

13. 有一個空間曲線Γ,平行於其上一點M的切線MT而射影在一個平面P上,此射影有一個逆退點在M的射影m點上:在逆退點的切線是Γ在M點的吻合平面在平面P上的迹 (trace).Γ在M點的吻合平面是停留的場合.

14*. 在一個空間曲線C每一點M上引一個法線和主法線作成一個變角φ,在其上取一個定長$MM'=l$.M'點所畫的曲線C'必垂直於直線$M'M$.定出φ角使此兩個曲線C, C'在

相隨點M, M'上的切線作成一個定角V.特別場合$V=\frac{\pi}{2}$.

取$\tang\frac{\varphi}{2}$爲未知數,則得里加狄(Riccati)的方程式.

[Darboux, Comptes rendus, t. CXLVI, 1908, p. 881]

15. 求無限相近的兩個主法線的最小距離的主部分(partie principale)及公共垂線的足(pied)的極限位置.

[註一] 這個奇異場合,仿佛是比亞奴(Peano)首先指出.顯然可見牠只有解析上的興趣.

[註二] 由一個直接運算,容易證明自一系的直交坐標軸改爲又一系的直交坐標軸其位置法(disposition)和前相同,則Δ不變.

[註三] 由這個規約,則通常的螺螄釘是右轉,這是極自然的.對於這個問題參觀(un article de M. Alezais dans les nouvelles Annales de Mathématiques, 4ᵉ série, t. X, 1910, p. 289.

[註四] 若是寫出旁曲度的公式$\frac{1}{T}=\frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}$,則編爾內的公式當寫爲

$$d\alpha''=-\frac{\alpha' ds}{T},\ldots.$$

[註五] 這個結果如此簡單,能由微分幾何解釋之.略去第三級無限小,則Γ上M點的一個鄰點M'可以假定在M的吻合圓上,在M'的切線是圓的切線.若要在M點及M'點的法線相遇,必須要也只須要這兩個直線和在M點的吻合平面作成相等的角.但是依旁曲度的定義,在M及M'的吻合平面所作

的角等於 $\frac{ds}{T}$. 所以自 M 點至無限相近的鄰點 M' 時,法線和相應的吻合平面所作的角的增長 $d\varphi$ 等於 $\frac{ds}{T}$. 試然合於計算所得的結果.

[註六] 這個證明假定曲線是實,這是因為曾經假定

$$A^2+B^2+C^2$$

不等於零 (參觀 M. Lyon 的論文, Sur les courbes à torsion constante, 1890).

[註七] Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1876 et 1877.

第十二章

曲面

I.——畫在一個曲面上的曲線的曲度.

233. **基本公式. 莫尼葉(Meunier)的定理.**——一個曲面S普通的爲一組的三個方程式所定

$$(1)\qquad x=f(u,v),\qquad y=\varphi(u,v),\qquad z=\psi(u,v),$$

其中x, y, z是此曲面上一點的直交坐標.u及v是兩個變率.這三個函數f, φ, ψ並非必要是解析函數,但是我們假定除去在些例外的點外牠們都是連續的,並且有前兩級的偏導來式,也都是連續的.若對於u及v的一組的價值,三個定準式

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

不皆成爲零,則曲面上相應點M就是一個常點(point ordinaire),在此點附近,一個坐標爲他兩個坐標的連續函數,並且也有第一級及第二級的偏導來式也是連續的(n°61).我們要研究經過一個常點而畫在此曲面上的所有曲線的曲度.我們本可以假定在此點附近,曲面的方程式的形狀是$z=F(x,y)$,但是若保留(1)的三個方程式,則所得公式較爲普遍,其應用亦最廣.

我們寫出曲面在(x, y, z)點的切平面的方程式

$$(2)\qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0;$$

係數 A, B, C 能滿足兩個關係式

$$(3)\qquad SA\frac{\partial x}{\partial u}=o,\qquad SA\frac{\partial x}{\partial v}=o,$$

其中 S 的意義是很明瞭的.自這兩個關係式得

$$(4)\qquad A=K\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\qquad B=K\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\qquad C=K\frac{D(x,y)}{D(u,v)},$$

K 是一個常數或變數因數,可任意選取.[註一].例如曲面的方程式若是 $z=F(x,y)$,可令 $x=u, y=v, K=-1$,則 A, B, C 的相應價值是 $A=p, B=q, C=-1$, p 及 q 仍是習慣上的意義.

若在方程式(1)中將 u 及 v 皆代以一個變數 α 的函數,則 (x,y,z) 點畫出一個曲線 Γ 在曲面 S 上,此曲線的切線的方向率皆比例於

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv,\qquad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial u}du+\frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dz=\frac{\partial \psi}{\partial u}du+\frac{\partial \psi}{\partial v}dv;$$

如此,對於比 $\dfrac{dv}{du}$ 的每一個價值,曲面在 (u, v) 點有一個切線相應,此切線的方向餘弦甚易算出.沿曲線 Γ 上,微分 dx, dy, dz 必滿足關係式

$$(5)\qquad Adx+Bdy+Cdz=o,$$

這是表明曲線 Γ 的切線在曲面的切平面上.令此關係式第一邊

的全微分等於零(n° 37),即得 x, y, z 的第二級微分間一個關係式

$$(6)\qquad Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z+dAdx+dBdy+dCdz=o.$$

我們將說明此式的幾何意義.

我們先注意 $dAdx+dBdy+dCdz$ 關於 du, dv 是二次同質式(forme quadratique),

$$(7)\qquad dAdx+dBdy+dCdz=Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2,$$

係數 D, D', D'' 由微分法自 A, B, C, x, y, z 的算式得來.

他一方面,$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z$ 除差一個常數因數外,他表兩個直線所作角的餘弦,此兩直線的方向率各爲 (A, B, C) 及 (d^2x, d^2y, d^2z). 方向率是 A, B, C 的這個直線垂直於曲面;我們選取此法線的正方向使軸的方向餘弦是

$$(8)\quad \lambda=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \mu=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \nu=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

再若是取曲線 Γ 的弧 s 爲自變數,我們有

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\alpha'}{R},\qquad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\beta'}{R},\qquad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\gamma'}{R},$$

α', β', γ' 仍是習慣上的意義(n° 223). 將關係式(6)各項各除以 ds^2,他可以寫爲

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}(\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma')=\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2},$$

E, G, F 是高斯的係數,已見於公式 $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ (n° 124).

但是 $\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'=\cos\theta$, θ 是曲線 Γ 的主法線和曲面的法線的正方向所作的角;如此我們到了基本公式

$$(9)\qquad \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}\cos\theta=\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2},$$

牠和公式 (6) 完全同值.在此關係式中根號 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 及曲度半徑 R 都顯然是正數,所以 $\cos\theta$ 和第二邊同符號.對於 u 及 v 的一組的價值,此第二邊只因此 $\dfrac{dv}{du}$ 的價值而變,就是只因曲線 Γ 在 M 點的切線的位置而變.設 Γ' 是曲面上又一曲線,牠在 M 點和 Γ 相切; R' 是牠的曲度半徑, θ' 是牠的主法線和曲面的法線的正方向所作的角.對於此兩曲線,公式 (9) 的第二邊的價值當是相同,結果,

$$(10)\qquad \frac{\cos\theta}{R}=\frac{\cos\theta'}{R'}.$$

特別的取曲面上兩個曲線 Γ 及 Γ', 牠們在 M 點有相同的吻合平面(假定此平面異於切平面).這是很明瞭的,此二曲線在 M 點的切線相同,因為切線是切平面及吻合平面的交線,所以公式 (10) 能應用在這兩個曲線上,然而牠們的兩個主法線的方向能够是相同或相反,那麼 $\theta'=\theta$ 或 $\theta'=\pi-\theta$. 但是 $\cos\theta$ 及 $\cos\theta'$ 當同符號,故第二個假定可以作廢.所以 $\theta'=\theta$, 結果 $R'=R$. 此兩個曲線 Γ 及 Γ' 旣是主法線的方向相同,曲度半徑又同,所以有相同的曲度心.如此,曲面上經過一點 M 的所有曲線只要有相同的吻合

平面(不同於切平面),就有相同的曲度心.特別的凡一個曲線的曲度心都和牠的吻合平面和曲面所成截線的曲度心同.

那麼,我們只須研究曲面在M點的截線的曲度.我們先研究經過同一切線MT的所有平面和曲面所成截線的曲度.對於此切線MT,我們可假定

$$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2>o,$$

如此,並無害於此理論的普遍性,因爲若換A, B, C的符號,則等於換曲面的法線的正方向,這是明瞭的,D, D', D''皆換符號.對於這一切截線,$\cos\theta$是正,θ是銳角;特別的對於垂直截線,角θ'等於零.設R'是此垂直截線的曲度半徑;在此場合,關係式(10)成爲$R=R'\cos\theta$.由這個等式可見若兩個截線共一切線,則斜截線的曲度心正是垂直截線的曲度心在此斜截線的平面上的垂直射影(莫尼葉的定理).

這個定理將斜截線的曲度的研究變爲垂直截線的曲度的研究.我們試將左列所得結果陳述.先注意對於一個垂直截線,依$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2$的符號,公式(9)有兩個不同的形狀.爲避免這個不便,我們以後用R表一個垂直截線的曲度半徑先之以符號+或−依自M點至曲度心的方向合於曲面的法線的正方向或相反方向而定.由這個規約,在這兩個場合R皆爲公式

$$(11)\qquad \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}=\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

所定.此公式顯明曲度心的位置.

自公式(11)甚易看出曲面在一點附近和牠的切平面的相

關位置.若是 $D'^2-DD''<o$,在割平面沿法線而旋轉時,三項式

$$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2$$

常保有一個固定符號,就是 D 及 D'' 的符號;所有的垂直截線的曲度心皆在切平面的一邊,結果,所有垂直截線也都在切平面的一邊;我們說曲面在此點上是凸.反之,若是 $D'^2-DD''>o$,對於割平面的兩個特別位置,三項式 $Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2$ 成為零;和此相應的垂直截線現出一個彎曲點.割平面在此兩平面所作的一個二面角內時,R 是正,截線在切平面的一邊;割平面在和此相補的他一個二面角內時,R 是負,截線居於切平面的他一邊.那麼,曲面在接觸點附近通過切平面;我們說曲面是曲度相反(courbure opposée).最後,若 $D'^2-DD''=o$,所有的垂直截線都在切平面的一邊.除去其中有一個軸的曲度半徑是無限,軸普通的通過切平面;我們說此點是一個拋物線點(point parabolique).

特別的我們取方程式 $z=F(x, y)$ 所表的曲面.若令 $A=p$, $B=q$, $C=-1$,則 $D=r$, $D'=s$, $D''=t$. r, s, t 都是習慣上的意義.係數 E, G, F 的價值是 $E=1+p^2$, $F=pq$, $G=1+q^2$. 曲面的法線的正向的方向餘弦是

$$(12)\qquad \lambda=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \mu=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

軸和 oz 軸作一銳角.設 α, β, γ 是在 M 點的垂直截線的切線的方向餘弦;du 及 dv 皆比例於 α, β,公式(11)成為

$$(13)\qquad \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{(1+p^2)\alpha^2+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2};$$

計算着關係式$\gamma=p\alpha+q\beta,\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$,此式又成爲

$$(13')\qquad \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=r\alpha^2+2s\alpha\beta+\beta^2.$$

此處是三項式 $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$. 牠指示一個垂直截線在一點附近是在切平面上或在切平面下.約而言之,在M點上,曲面是凸或是曲度相反依 $s^2-rt<o$ 或 $s^2-rt>o$ 而定,若 $s^2-rt=o$, 則是一個拋物線點.

在接觸點附近,在曲面上及切平面上各取一點,牠們在xy平面上的射影相同,我們研究此二點的坐標z及z'的差 δ, 則以上所得的結果愈見確實.設 (x_0, y_0) 是接觸點的坐標, p_0 q_0, r_0, s_0 t_0 是 $F(x,y)$ 的前二級導來式在此點的價值.我們有

$$\delta=F(x,y)-p_0(x-x_0)-q_0(y-y_0),$$

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)_0=o,\qquad \left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)_0=o,$$

$$\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right)_0=r_0,\quad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)_0=s_0,\quad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)_0=t_0.$$

若$s_0^2-r_0t_0<o$,則δ在M點是最大或最小 (n° 45).因爲δ在此點上爲零,所以在此點附近,δ有一個固定符號;和此相反,若

$$s_0^2-r_0t_0>o,$$

δ沒有最大最小,結果,在M點附近沒有固定符號.

234. **兩個基本形式**(forme).——由上節所作的研究使我們於形式

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

外,又得一個du,dv的新二次形式

$$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2.$$

依牠們的定義,係數D, D', D''的價值是

$$(14)\qquad D=S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u},\quad D''=S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v},\quad 2D'=S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u};$$

合計着關係式(3),D'的算式可以化簡.誠然,若將這些算式第一個關於v取微分,第二個關於u取微分,則得

$$SA\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}=o,\qquad SA\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=o;$$

那麼,

$$S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}=S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

因而

$$(14')\qquad D'=S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}=S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

對於D, D', D'',我們又能得到些算式只關係坐標x, y, z的

導來式;自恒等式(6)得

$$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2=-(Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z);$$

所以du^2的係數D是

$$-\left(A\frac{\partial^2x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2z}{\partial u^2}\right).$$

將A, B, C代以牠們的價值(4),可見K的係數是一個定準式的展開式

$$(15)\qquad D=-K\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial^2x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2z}{\partial u^2}\end{vmatrix},$$

同樣得

$$(16)\qquad D'=-K\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial^2x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}\end{vmatrix},\quad D''=-K\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial^2x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2z}{\partial v^2}\end{vmatrix}.$$

係數D, D', D''和係數A, B, C一樣,只在選定因數K以後纔完全

確定,至於二次形式

$$\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{17}$$

除符號外是不關於K的,這個形式(17)有一個幾何上的意義至爲簡單.設δ是曲面上和$u+du$, $v+dv$相應點至和u, v相應點的切平面的距離,此距離δ可以適宜的冠以一個符號.若將δ依du, dv的冪展開,依關係式(3),則du, dv的一次項消滅,至於du, dv的二次項的集合正是

$$\frac{1}{2}\,\frac{Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

就是除一個因數$-\frac{1}{2}$外和形式(17)同.公式(11)轴給與一個垂直截線的曲度半徑又可寫爲

$$\frac{1}{R}=2\lim\frac{\delta}{ds^2},$$

這就然和(n° 209)所預告的結果同.

235. <u>尤列</u>的定理.指曲線(indicatrice).——若要研究一個垂直截線的曲度半徑的長度的變化,假定在曲面上取所設點爲原點,切平面爲xy平面.在此一系的坐標軸內,我們有

$$p=q=0,$$

公式(3)成爲

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+2s\cos\varphi\sin\varphi+t\sin^2\varphi, \tag{18}$$

φ 是割平面在 xy 平面的迹 (trace) 和 ox 軸所作的角.令第二邊的導來式等於零,則可見 R 對於兩個直交方向成爲最大或最小.若要對於一切可能的特別場合精密的研究 R 的變化,則以用以下的幾何表示法爲便.假定在割平面的迹上取一個長度 Om 等於曲度半徑的絕對值的平方根;此點 m 畫出一個曲線叫作指曲線,這是很明瞭的.若假定此曲線已經畫出,則一考察此曲線立即可見曲度半徑的變化.此層已經說明,試考慮三個可能的場合:

1° $s^2-rt<o$. 在此場合,半徑 R 有一個固定符號;我們假定牠是正. m 點的坐標 $\xi=\sqrt{R}\cos\varphi$, $\eta=\sqrt{R}\sin\varphi$, 故所求曲線的方程式是

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=1; \tag{19}$$

此曲線是一個橢圓,中心在原點.可見割平面的迹合於橢圓的長軸時,R 是最大,合於短軸時 R 是最小;兩個割平面的迹一樣的向指曲線的軸傾斜 (incline) 則相應的 R 相等.經過指曲線的軸的垂直截線叫作主垂直截線,相應的曲度半徑叫作主曲度半徑.若取指曲線的軸爲 x 及 y 軸,則在此系中 $s=o$, 公式 (18) 成爲

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+t\sin^2\varphi;$$

令 $\varphi=o$, 或 $\varphi=\frac{\pi}{2}$, 則得主曲度半徑 R_1 及 R_2. 所以

$$\frac{1}{R_1}=r,\quad \frac{1}{R_2}=t,$$

因而

(20)
$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}.$$

2° $s^2-rt>o$.在此場合,方程式

$$r\cos^2\varphi+2s\cos\varphi\sin\varphi+t\sin^2\varphi=o$$

有關於φ的根,和φ的這些價值相應的垂直截線的曲度半徑爲無限.設L'_1OL_1, L'_2OL_2是這兩個平面在xoy平面上的迹.譬如割平面在L_1OL_2角內,以上的三項式是正,用和第一場合同樣的表示法,可見指曲線的相應的一段爲方程式

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=1;$$

這是一個雙曲線以L'_1OL_1及L'_2OL_2爲漸近線.若割線的迹在L'_2OL_1角內,$R<o$,若要得指曲線的相應部分的方程式,則當令

$$\xi=\sqrt{-R}\cos\varphi,\quad \eta=\sqrt{-R}\sin\varphi.$$

於是得到和以上的雙曲線的共軛(conjugue)雙曲線的方程式

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=-1.$$

這兩個共軛雙曲線的集合仍能表出垂直截線的曲度半徑的變化.若取這些雙曲線的軸爲坐標軸,則一般公式(18)仍成爲

(20)的形狀,R_1及R_2表兩個主曲度半徑,一個是正,一個是負.

3° $s^2-rt=o$. 在此場合,曲度半徑 R 保有一個固定符號,譬如是+罷.指曲線仍爲方程式(19)所表;但是這個曲線既是拋物線類,又有一個中心在原點,則必由兩個平行直線所成.若取 y 軸平行於此兩個直線,在此系的坐標中,當有 $s=o$, $t=o$, 一般公式(18)成爲

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi,$$

或 $R_1=R\cos^2\varphi$. 若在公式(20)中將一個曲度半徑 R_2 看作無限,則以上的公式仍可看作公式(20)的極限場合.

尤烈的公式也可以成立,並不必須要預公式(13).我們取曲面上的點爲原點,切平面爲 xy 平面,用戴勞公式將 z 展開至第三級各項,

$$z=\frac{rx^2+2sxy+ty^2}{1.2}+\ldots,$$

其未經寫出各項都是第三級或更高級各項.若要得到曲面和平面 $y=z\operatorname{tang}\varphi$ 所成截線的曲度半徑,可先作坐標更換法

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\quad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

再令 $y'=o$; 如此,即得 z 依 x' 的冪的展開式

$$z=\frac{r\cos^2\varphi+2s\sin\varphi\cos\varphi+t\sin^2\varphi}{1.2}x'^2+\ldots$$

應用第209節的注意,即復得公式(18).

注意.一曲面和其切平面的相割曲線的方程式是

$$o=rx^2+2sxy+ty^2+\varphi_3(x,y)+\ldots,$$

牠現出一個二重點在原點,在此二重點上的切線正是漸近切線(tangente asymptotique).一般,若兩個曲面 S, S_1 都在原點上切於 xy 平面,此二曲面的相割曲線在 xy 平面上的射影的方程式是

$$o=(r-r_1)x^2+2(s-s_1)xy+(t-t_1)y^2+\ldots,$$

r_1, s_1, t_1 對於曲面 S_1 的意義和 r, s, t 對於曲面 S 的意義相同.二重點的種類關係算式 $(s-s_1)^2-(r-r_1)(t-t_1)$ 的符號;若此式為零,則二曲面的相交曲線普通的有一個逆退點.

要而言之,在一個曲面的每一點上,曲面的切線有四個顯著的位置;有兩個切線互相垂直,和此兩個切線相應的垂直截線的曲度半徑 R 是最大或最小.又有兩個漸近切線,和牠們相應的 R 是無限.若要得這兩個切線,只須令三項式 $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ 等於零(n° 213).現在我們要說明在任何一系的直交坐標中如何定出主垂直截線及主曲度半徑.

236. **主曲度半徑.**——由指曲線的研究可見對於 R 的一個價值,普通的有兩個垂直截線相應牠們的曲度半徑等於 R,此二截線可以是實的或虛的;但是 R 的價值若等於一個主曲度半徑時則為例外,在此場合,只有相應的主垂直截線以此為曲度半徑.設 R 是一個已知價值,若要求以 R 的曲度半徑的垂直截

線,我們復取普通公式(11),令 $R=\rho\sqrt{A^2+B^2+C^2}$,此公式成爲

$$(21)\qquad \frac{1}{\rho}=\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}.$$

對於 ρ 的一個價值,方程式(21)關於 $\frac{dv}{du}$ 是二次式

$$(22)\qquad (\rho D-E)du^2+2(\rho D'-F)dudv+(\rho D''-G)dv^2=o,$$

牠的兩個根定出以 R 爲曲度半徑的兩個垂直截線的切線.若 R 是一個主曲度半徑,方程式(22)有關於 $\frac{dv}{du}$ 的二重根,牠滿足兩個關係式

$$(23)\qquad \begin{cases}(\rho D-E)du+(\rho D'-F)dv=o,\\(\rho D'-F)du+(\rho D''-F)dv=o,\end{cases}$$

此一系兩個關係式同時定出兩個主曲度半徑及兩個主垂直截線.消去 $\frac{dv}{du}$ 得關於 ρ 的一個二次方程式

$$(24)\qquad (\rho D'-F)^2-(\rho D-E)(\rho D''-G)=o,$$

只須將 ρ 代以 $\frac{R}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 即得主曲度半徑的方程式.同樣若在方程式(23)中消去 ρ,即得一個關於 $\frac{dv}{du}$ 的二次方程式,

$$(25)\qquad (Ddu+D'dv)(Fdu+Gdv)-(D'du+D''dv)(Edu+Fdv)=o,$$

牠的根顯明主垂直截線在切平面上的迹.

依我們的問題性質,含 ρ 的方程式的兩個根都常常是實根;設 R 及 R' 是主曲度半徑,積 RR' 常由公式

$$(26)\qquad \frac{1}{RR'}=\frac{DD''-D'^2}{(EG-F^2)(A^2+B^2+C^2)}$$

所給與,這又對於以上所得結果給與一個驗明.誠然,$EG-F^2$ 常是正,RR' 當和 $DD''-D'^2$ 同符號.在一個拋物線點上,一個主曲度半徑爲無限,故 $\frac{1}{RR'}$ 等於零.

若要方程式(24)有等根,只須要指曲線是一個圓周,此時所有的垂直截線的曲度半徑皆相同.公式(11)的第二邊當不關於 $\frac{dv}{du}$;爲此,必須要

$$(27)\qquad \frac{D}{E}=\frac{D'}{F}=\frac{D''}{G}.$$

能滿足這些條件的點叫作臍 (ombilic).在這些點上,方程式(25)成爲一個恆等式,因爲一個圓周的所有直徑都是一個對稱軸,所以此一層是明瞭的.若曲面的方程式是 $z=F(x,y)$,則方程式(24),(25),(27)各成爲

$$(24)'\qquad (rt-s^2)R^2-\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]R + (1+p^2+q^2)^2=o,$$

$$(25)'\qquad \alpha^2[(1+p^2)s-pqr]+\alpha\beta[(1+p^2)t-(1+q^2)r] + \beta^2[pqt-(1+q^2)s]=o,$$

$$(27)'\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

這些公式可以看成特別場合自普通公式中求出,或是自公式

(13)起直接計算.

有時由幾何上的注意能定出一個曲面上主垂直截線.例如若是一個曲面S有一個對稱平面經過曲面上一點M,這是明瞭的這個平面和在M的切平面的相割直線是指曲線的一個對稱軸,所以由對稱平面所成的截線是一個主垂直截線.那麼,在一個旋轉曲面的一點上,徑線是一個主垂直截線;然則第二個主垂直截線的平面經過曲面的法線及緯線的切線.但是經過緯線的切線有一個斜截線牠的曲度心是已知的,就是此緯線的心.依莫尼葉的定理可見第二個主垂直截線的曲度心在曲面的法線和旋轉軸的交點上.

在一個能展曲面的一點上,$s^2-rt=o$,指曲線是一系的兩個直線.主截線中有一個合於母線,相應的主曲度半徑是無限.第二個主截線的平面垂直於母線.能展曲面上所有點都是拋物線點,也只有此種曲面具有如此的性質(n° 204).

若是一個曲面非能展曲面,而在某某點上是凸,在別的點上是曲度相反.普通的這個曲面有一個拋物線點所成的線,牠分開曲面為兩部分,在一部分上$s^2-rt>o$,在牠一部分上$s^2-rt<o$.例如在一個圓環上,此線由兩個極端的緯線所成.

在一個凸曲面上,普通的只有若干個臍,彼此是獨立的.如以下所証,只有一個曲面其所有的點都是臍就是一個球面.仍令曲面的法線的方向餘弦為λ, μ, ν;取公式(12)的導來式得

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{pqt-(1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{pqs-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

計算着公式(27)′,這些關係式成爲

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=o,\quad \frac{\partial\mu}{\partial x}=o,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

第一個關係式表明λ只關係x,第二個關係式表明μ只關係y,所以導來式$\frac{\partial\lambda}{\partial x}$,$\frac{\partial\mu}{\partial y}$的公共價值也不關係$x$,也不關係$y$:這是一個常數$\frac{1}{a}$.由此得

$$\lambda=\frac{x-x_0}{a},\quad \mu=\frac{y-y_0}{a},\quad \nu=\frac{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}{a}$$

$$p=-\frac{\lambda}{\nu}=-\frac{x-x_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}},$$

$$q=-\frac{\mu}{\nu}=-\frac{y-y_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}},$$

由積分得z的價值

$$z=z_0+\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2};$$

我們就然得到球面的方程式.同樣可見若是$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}=o$,曲面就是一個平面.但是關係式(27)′又有無量數虛數解,牠們滿足方程式$1+p^2+q^2=o$,若將此關係式關於x及y微分之,即可將此驗明.

II.——漸近曲線(ligne asymptotique).——曲度線(ligne de courbure).

237. 漸近曲線.——在曲面上一個曲度相反的部分,每一點上有兩個切線和牠們相應的垂直截線的曲度半徑爲無限:這是指曲線的兩個漸近線.凡在曲面上的線,若是在牠們的所有點上都和指曲線的一個漸近線相切,則這個線叫作漸近曲線.在一個漸近曲線上移動,u及v都是一個變數的函數;若要切線和指曲線的一個漸近線相合,依以上所見,du及dv當滿足關係式

$$(28)\qquad Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2=o.$$

係數D, D', D''是u及v的函數,自以上的方程式,得$\dfrac{dv}{du}$的兩個價值,

$$(29)\qquad \frac{dv}{du}=\varphi_1(u,v),\qquad \frac{dv}{du}=\varphi_2(u,v);$$

我們以後再証明這兩個方程式都有無量數的積分,並且一偶的價值(u_0, v_0)普通的都定一個積分而只定一個積分.微分方程式(28)又可寫爲同值的形狀

$$(30)\qquad dAdx+dBdy+dCdz=o,$$

這個形狀通常的更便於應用.若是一個曲面爲方程式$z=F(x,y)$所表,以上的微分方程式成爲

$$(31)\qquad dpdx+dqdy=rdx^2+2sdxdy+tdy^2=o.$$

漸近曲線又可為一個毫無長度關係 (reatien métrique) 的性質所定.這是曲面上的線,牠們的吻合平面合於切平面.誠然,若要吻合平面合於切平面,必須要也只須要同時有

$$Adx+Bdy+Cdz=o, \qquad Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=o;$$

第一個方程式是曲面上所有曲線都能滿足的,至於第二個方程式,依公式 (6),牠恒等於方程式 (30). 漸近曲線這兩個定義的相同很容易解釋.一個垂直截線切於指曲線的一個漸近線,其曲度半徑既是無限,依莫尼葉的定理,一個漸近曲線也當是如此,除非其吻合平面垂直於曲面的法線時為不然,因為在此場合,莫尼葉的定理成為虛妄,那麼,漸近曲線的吻合平面當合於切平面,只要牠的曲度半徑非恒為無限;但是若是曲度半徑恒為無限,則是一直線,其吻合平面為不定,由這個性質可見對於任何的相似變形法 (transformation homographique), 漸近曲線是不變的.又可見無論坐標軸是直交或斜交,微分方程式都是相同,這是因為吻合平面的方程式是不變的緣故.

一個曲面上的漸近曲線惟在曲面的曲度相反時存在.但是若曲面是解析的 (analytique), 無論 D'^2-DD'' 的符號如何,微分方程式 (28) 總有無量數的實或虛的積分.推廣起來,我們說一個凸解析曲面有兩系的虛漸近曲線.所以一個一張雙曲面的漸近曲線是兩系的直線母線;對於一個橢圓面或兩張雙曲面,這些母線都是虛直線,但是牠們仍能滿足漸近曲線的微分方程式.

例一第一,求曲面

$$z=x^m y^n$$

的漸近曲線;我們有

$$r=m(m-1)x^{m-2}y^n,\quad s=mnx^{m-1}y^{n-1},\quad t=n(n-1)x^my^{n-2},$$

微分方程式(31)可寫爲

$$m(m-1)\left(\frac{ydx}{xdy}\right)^2+2mn\left(\frac{ydx}{xdy}\right)+n(n-1)=o.$$

由此得 $\frac{ydx}{xdy}$ 的兩個價值 h_1, h_2;這兩類的漸近曲線在 xy 平面內的射影曲線是

$$y^{h_1}=C_1x,\qquad y^{h_2}=C_2x.$$

第二,再取一個錐曲面 (surface conoïde) $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$,令 $x=u$, $y=uv$, $z=\varphi(v)$,關係式(3)成爲

$$A+Bv=o,\qquad Bu+C\varphi'(v)=o;$$

取 $C=-u$, $B=\varphi'(v)$, $A=-v\varphi'(v)$ 以滿足之,微分方程式(30)成爲

$$u\varphi''(v)dv^2-2\varphi'(v)dudv=o.$$

我們先得一個解 $v=$ 常數,他給與直線母線;用 dv 除,餘方程式

$$\frac{\varphi''(v)dv}{\varphi'(v)}=\frac{2du}{u},$$

得 $u^2=C\varphi'(v)$,第二系的漸近曲線在 xy 平面上的射影的方程

式是

$$x^2=C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

第三,再述沙梅(Jamet)所發現的曲線,其方程式可變爲以下的形狀

$$xf\left(\frac{y}{x}\right)=F(z).$$

若取z及$\frac{y}{x}=u$爲自變數,漸近曲線的微分方程式是

$$\sqrt{\frac{F''(z)}{F(z)}}dz=\pm\sqrt{\frac{f''(u)}{f(u)}}du,$$

可由兩個面積法積分.

第四,一個螺旋曲面(surface héli coïdale)的方程式是

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,\qquad z=f(\rho)+h\omega;$$

閱者可自行証明漸近曲線的方程式是

$$\rho f''(\rho)d\rho^2-2hd\omega d\rho+\rho^2f'(\rho)d\omega^2=0:$$

ω仍能由一個面積法得來.

238. **直線曲面的漸近曲線.**——凡一個直線曲面的方程式都可寫爲

$$x=x_0+\alpha u,\qquad y=y_0+\beta u,\qquad z=z_0+\gamma u,$$

$x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$都是一個變率$v$的函數,在$u$等於$o$時,$(x_0, y_0, z_0)$點畫出曲面上的某一個曲線$\Gamma$;反之,若$v$爲常數,令$u$變化,則$(x, y, z)$點畫出一個直線母線,變數$u$比例於$(x, y, z)$點至曲線$\Gamma$上$(x_0, y_0, z_0)$點的距離.爲便利計,假定在公式(4)中取$K=\pm 1$;(15)及(16)的算式表明$D=o$, D'不關於u, D''是u的一個多項式次數至多是二次. $dv=o$相應於直線母線,將方程式(28)用dv除,餘一個微分方程式其形狀是

$$\frac{du}{dv}+Lu^2+Mu+N=o, \tag{32}$$

L, M, N都是變數v的函數,此方程式定出第二系的漸近曲線.此類的方程式有些顯著的性質,我們以後再証明.例如任何的四個積分的反調和比(rapport an harmonique)爲常數;由此可見曲面上一個母線和四個漸近曲線的四個交點的反調和比爲常數.於是只要已知三個漸近曲線即可識得所有的漸近曲線.我們以後又可見若已知方程式(32)的一個或兩個積分,即能由兩個或一個面積法得到所有的積分.若是所有的母線皆遇一個定直線,則此直線是第二系的一個漸近曲線.由兩個面積法即得其他的一切漸近曲線.若曲面有兩個直線準線,我們已知兩個漸近曲線,似乎仍須一個面積法以識得其他的漸近曲線.但是我們能得到一個更爲精確的結果.誠然,一個直線曲面若有兩個直線準線,我們可作一個相似變形法使一個準線遠至無限;曲面即成爲一個錐曲面,我們已見一個錐曲面的漸近曲線不用面積法可以定出(n° 237).

239. 共軛曲線.(lignes conjuguées).——經過曲面S上一點的兩個直線若都在切平面內,又若是成爲指曲線的兩個共軛直徑(diamètre conjugué),則此二直線叫作曲面在此點的共軛切線.這是很明瞭的,對於曲面上任一切線都有一個共軛切線相應,若是第一切線是一個漸近切線,則此第二切線和牠相合,亦只有在此場合是如此.設du及dv是曲面上一個切線在曲線坐標中的方向率;這個切線在xy平面內的射影的角係數是

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv}{\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv},$$

曲面在$M(u,v)$點上的四個切線的反調和比等於$\frac{dv}{du}$的四個相應價値的反調和比.設(du,dv)及$(\delta u,\delta v)$是兩個切線MT及MT'的方向率,c及c'是方程式

$$D+2D'm+D''m^2=o$$

的兩個根,此方程式定出兩個主切線.若要MT及MT'是共軛,必須要也只須要

$$\frac{dv-c\,du}{dv-c'du}+\frac{\delta v-c\,\delta u}{\delta v-c'\delta u}=o,$$

去分母,並將cc'及$c+c'$代以牠們的價値,此條件可寫爲

$$D\,du\,\delta u+D'(du\,\delta v+dv\,\delta u)+D''dv\,\delta v=o. \tag{33}$$

合計着 D, D', D'' 的價値,此條件又可寫爲任意的兩個同値形狀

$$(34)\qquad dA\delta x+dB\delta y+dC\delta z=o,\quad \delta A dx+\delta B dy+\delta C dz=o.$$

我們是由習慣上令

$$dF=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv,\qquad \delta F=\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial v}\delta v.$$

設有提在曲面 S 上一個曲線 Γ,沿 Γ 上曲面的切平面包封一個能展曲面,此能展曲面沿 Γ 上和曲面 S 相切;在 Γ 的每一點 M 上,能展曲面的母線是 Γ 的切線的共軛切線.

誠然,在曲線 Γ 上移動時,x, y, z, A, B, C 都是一個變率 α 的函數;計算着關係式 (5),則切平面的象徵線爲以下的兩個方程式所定

$$(35)\qquad \begin{cases} A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=o, \\ dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=o. \end{cases}$$

字母 d 表關於 α 的微分;若是 $\delta x, \delta y, \delta z$ 表此徵象線的方向率,則(35)的第二公式給與一個關係式

$$dA\delta x+dB\delta y+dC\delta z=o,$$

牠和關係式 (34) 恒同.由此可証明所宣告的定理.特別的若是曲線 Γ 是一個漸近曲線,則象徵線合於 Γ 的切線,結果,曲線 Γ 是能展曲面的逆退稜(n° 238).

設曲面上有兩類曲線皆關係一個變率,若是在曲面的任何點上,兩類中經過此點的曲線的切線都是共軛,我們說這兩類曲線成爲<u>共軛網</u> (réseau conjugué). 共軛網是有無量數的,這是因爲兩類曲線中我們能任意選取一類,其第二類的曲線都由一個第一級微分方程式所定.誠然,設 $F(u,v)=K$ 是一類曲線的方程式關係一個任意變率 K. 自方程式 $dF=o$ 中取得 $\frac{dv}{du}=G(u,v)$, 方程式(33)給與 $\frac{\partial v}{\partial u}$ 的價值爲 u 及 v 的函數,這就是一個第一級微分方程式.

作爲舉例,我們求曲線 $u=$ 常數及 $v=$ 常數成爲共軛網的條件.在此場合,我們可取 $du=o, \partial v=o$, 則條件(33)成爲 $D'=o$, 或

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} \end{vmatrix}=o.$$

我們也可以說這個條件表明 x, y, z 是一個微分方程式

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\partial v}=M\frac{\partial \theta}{\partial u}+N\frac{\partial \theta}{\partial v} \tag{36}$$

的三個積分,式中 M 及 N 都是 u 及 v 的任何函數;所以只須知道如此形狀一個任何方程式的三個各別積分,即得一個曲面的坐標的方程式.此曲面標誌在一個共軛系上.譬如取

$$M=N=o,$$

則凡(36)的一個積分都是 u 的一個函數及 v 的一個函數的和;所以凡一個曲面其方程式的形狀若是

$$(37)\quad x=f(u)+f_1(v),\quad y=\varphi(u)+\varphi_1(v),\quad z=\psi(u)+\psi_1(v),$$

則曲線 (u) 及 (v) 成爲共軛網.

此類的曲面叫作平動曲面 (surfaces de translation); 這些曲面能由一個定形曲線 Γ 的平行移動(translation)所產生,但在移動時 Γ 上有一點限定畫出另一曲線 Γ'.這個產生的方法有兩種的可能.誠然,在曲面上取四個點 M_0, M_1, M_2, M 和變率 u, v 的四組的價值 $(u_0, v_0),(u, v_0),(u_0, v),(u, v)$ 相應.依公式(37),這四點是一個矩形的四個頂點.若令 v_0 固定,令 u 變化,則 M_1 點畫出曲面上一個曲線 Γ;同樣,令 u_0 固定,令 v 變化,則 M_2 點畫出曲面上另一曲線 Γ'.所以此曲面能够看爲曲線 Γ 平行移動所產生,但 Γ 上有一點 M_2 限定畫出曲線 Γ';此曲面又可看爲曲線 Γ' 平行移動所產生,但其上有一點 M_1 限定畫出曲線 Γ.由這個產生的方法顯然可見此兩類的曲線是共軛;例如在 Γ' 移動時,牠的所有位置在牠和 Γ' 的交點上的切線成爲一個柱面沿曲線 Γ 外切於曲面.所以這些曲線的切線是共軛,

240. **曲度曲線** (ligne de courbure).——畫在一個曲面 S 上的曲線若是在牠們的所有點上都和指曲線的軸相切,則這些曲線叫作曲度曲線.所以這些曲線都由以前所得的一個微分方程式得來

(25) $(Ddu+D'dv)(Fdu+Gdv)-(D'du+D''dv)(Edu+Fdv)=o,$

此方程式常給與 $\dfrac{dv}{du}$ 兩個實值.由微分方程式的普通理論,可見自曲面的任一個常點上(臍除外)有兩個曲度曲線而只有兩個經過,其每一個都各切於指曲線的一個軸.所以除一個球面或平面外,在一個實曲面上,都有兩類的曲度曲線,成爲一個網同時互爲垂直且共軛.

曲度曲線又可爲以下的性質所定:<u>曲度曲線是畫在曲面上的曲線,其條件是曲面在這一個曲線的各點上的法線成爲一個能展曲面.</u>

誠然,法線的方程式是

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}\;;$$

若要這個直線產出一個能展曲面,必須要也只須要(n° 205)

$$(38)\qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix}=o,$$

將微分展開,則成爲

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv & \dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv & \dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv \\ A & B & C \\ \dfrac{\partial A}{\partial u}du+\dfrac{\partial A}{\partial v}dv & \dfrac{\partial B}{\partial u}du+\dfrac{\partial B}{\partial v}dv & \dfrac{\partial C}{\partial u}du+\dfrac{\partial C}{\partial v}dv \end{vmatrix}=o.$$

若要顯明這個微分方程式恆同於方程式(25),我們將第一豎行各元乘以$\frac{\partial x}{\partial u}$,第二豎行各元乘以$\frac{\partial y}{\partial u}$,第三豎行各元乘以$\frac{\partial z}{\partial u}$,再將第一豎行各元代以所得相應積的和.同樣的方法將u代以v,如此運算以後,定準式成爲

$$\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Fdu+Gdv & \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv \\ 0 & 0 & C \\ Ddu+D'dv & D'du+D''dv & \frac{dC}{\partial u}du+\frac{\partial C}{\partial v}dv \end{vmatrix}=0,$$

其中D, D', D''的價值是由公式(14)及(14)′得來,這就然是方程式(25).

這個結果甚易由空間曲線的閉縮線及共軛切線的性質解釋.設Γ是曲面S上一個曲線,其性質是法線MN產出一個能展曲面;若將這個直線在Γ的法平面內沿M點旋轉一個直角,牠就合於切平面內一個直線MT',此後者和Γ的切線MT垂直.直線MT'也產出一個能展曲面,牠沿Γ外切於曲面S(n° 225).所以MT, MT'是共軛切線;此兩直線旣是垂直,這是指曲線的軸相互的定理亦由同法證明.

在應用上,取曲度曲線的微分方程式往往以(38)的形狀爲便利,因爲這個形狀不須預先計算這六個係數E, F, G, D, D', D''.譬如一個曲面爲方程式$z=F(x, y)$所表;法線的方程式是

$$(39)\qquad \begin{cases} X=-pZ+(x+pz), \\ Y=-qZ+(y+qz); \end{cases}$$

若要這個直線產出一個能展曲面,必須要也只須要這兩個方程式

$$-Zdp+d(x+pz)=0,\quad -Zdq+d(y+qz)=0 \tag{40}$$

為Z的一個同一的價值所滿足(n° 205),就是說

$$\frac{d(x+pz)}{dp}=\frac{d(y+qz)}{dq},$$

或是再加簡單變為

$$\frac{dx+pdz}{dp}=\frac{dy+qdz}{dq}.$$

將dz, dp, dq代以牠們的價值得微分方程式

$$\frac{(1+p^2)dx+pqdy}{rdx+sdy}=\frac{pqdx+(1+q^2)dy}{sdx+tdy}, \tag{41}$$

若是將dx及dy代以α及β,則此式和方程式(25)′恆同.

例.—第一,求螺旋曲面

$$z=a\ \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$$

的曲度曲線.

我們可令

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta,\qquad z=a\theta;$$

係數A,B,C當滿足這兩個關係式

$$A\cos\theta+B\sin\theta=o,$$

$$-A\rho\sin\theta+B\rho\cos\theta+Ca=o.$$

我們取$C=\rho$,則$A=a\sin\theta$, $B=-a\cos\theta$.

微分方程式(38)在展開及化簡以後成爲

$$d\rho^2-(\rho^2+a^2)d\theta^2=o.$$

由此得

$$d\theta=\pm\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}};$$

若是取符號+,由積分,得

$$\rho+\sqrt{\rho^2+a^2}=ae^{\theta-\theta_0}$$

或

$$\rho=\frac{a}{2}\left[e^{\theta-\theta_0}-e^{-(\theta-\theta_0)}\right].$$

這些曲度曲線在xy平面內的射影都是些相等的螺線(spirale),甚易作出.

第二,再求拋物面

$$z=\frac{xy}{a}$$

的曲度線我們有

$$p=\frac{y}{a},\qquad q=\frac{x}{a},\qquad r=t=o,\qquad s=\frac{1}{a},$$

微分方程式(41)在此處成爲

$$(a^2+y^2)dx^2=(a^2+x^2)dy^2.$$

由此得

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\pm\frac{dy}{\sqrt{y^2+a^2}}=o;$$

譬如取＋號在根號之前,普通積分爲方程式

$$(x+\sqrt{x^2+a^2})(y+\sqrt{y^2+a^2})=C$$

所表,此式給與一系的曲度曲線.若令

(42) $$\lambda=x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2},$$

以上的方程式又可寫爲

$$\lambda+\sqrt{\lambda^2+a^4}=C,$$

這是由於恆等式

$$(x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2})^2+a^4=[xy+\sqrt{(x^2+a^2)(y^2+a^2)}]^2$$

可見的;那麼,一系的曲度曲線的射影爲方程式(42)所表,其中 λ 表一個任意常數.同樣可見他一系的曲度曲線的射影的方程式是

$$(43)\qquad x\sqrt{y^2+a^2}-y\sqrt{x^2+a^2}=\mu.$$

計算着拋物面的方程式 $xy=az$, 關係式(42)及(43)又可寫爲

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=C,\quad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=C';$$

但是 $\sqrt{x^2+z^2}$ 及 $\sqrt{y^2+z^2}$ 表 (x, y, z) 點至 oy 軸及至 ox 軸的距離.所以拋物面的曲度曲線都是畫在曲面上的曲線其性質是自曲線上每一點至 ox 及至 oy 軸的距離的和或差爲常數.

241. **一個曲面的閉縮面**(développée).——設 C 是曲面 S 的一個曲度曲線;在 M 點畫出曲線 C 時,曲面的法線 MN 常切於一個曲線 Γ.我們令牠的接觸點爲 A, X, Y, Z 是此點的坐標;坐標 Z 爲(40)中任一個方程式所給與,因爲 C 是一個曲度曲線,所以這兩個方程式成爲一個.牠們可寫爲

$$Z-z=\frac{(1+p^2)dx+pqdy}{rdx+sdy}=\frac{pqdx+(1+q^2)dy}{sdx+tdy},$$

若將第一個比的上下兩項乘以 dx, 第二個比的上下兩項乘以 dy, 由加的方法可將以上的兩個分數寫爲一個同質分數方程式成爲

$$Z-z=\frac{dx^2+dy^2+(pdx+qdy)^2}{rdx^2+2sdxdy+tdy^2}.$$

但是 dx, dy, dz 比例於方向餘弦 α, β, γ,此方程式又可寫爲

$$Z-z=\frac{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}=\frac{1}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}.$$

將此公式和公式(13)比較,此後者定出切於曲度曲線的垂直截線的曲度半徑 R,連有符號在內,可見以上的關係式可寫爲

$$(44)\qquad Z-z=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=R\nu,$$

ν 是法線的正方向和 oz 軸所作的銳角的餘弦.然而 $z+R\nu$ 正等於這個垂直截線的曲度心的 Z 的價值.由此可見法線 MN 和牠的包封 Γ 的接觸點 A 和切於 C 的垂直截線的曲度心相合.所以曲線 Γ 是這些曲度心的軌迹.若取和曲線 C 同系的所有曲度曲線,相應曲線 Γ 的軌迹是一個曲面 Σ,曲面 S 的所有法線都和牠相切.因爲一個法線 MN 和曲線 Γ 相切於 A 點而此曲線 Γ 是在 Σ 上的.

現在取經過 M 點的第二曲度曲線 C',牠和 C 在 M 點直角相交.同樣,曲面 S 的法線沿 C' 和一個曲線 Γ' 相切.Γ' 是切於 C' 的垂直截線的曲度心的軌迹.對於和 C' 同系的一切曲度曲線,相應曲線 Γ' 的軌迹是一個曲面 Σ',曲面 S 的所有法線都和牠相切.這兩個曲面 Σ 及 Σ' 普通的在解析上不是各別的,牠們是一個曲面的兩張由一個不能分解的方程式所表.

曲面S的法線MN在A及A'點切於此兩張Σ及Σ'此兩點是曲面S在M點的兩個主曲度心.依相合組的普通性質,Σ及Σ'在A及A'點上的切平面各是曲線Γ'在A'點的吻合平面及曲線Γ在A點的吻合平面(n° 230).我們以後仍討論這個特別緊要的場合.在M點畫出曲線C時,法線MN產出一個能展曲面D

Fig. 41.

以Γ'爲逆退稜;他一方面,此法線MN及Σ'的接觸點A'畫出一個曲線γ'各別於Γ',這是因爲直線MN不能同時常切於兩個曲線Γ'及Γ''的緣故.所以能展曲面D及曲面Σ'在A'點相切,因而Σ'在A'點的切平面沿MN切於能展面D;那麼,這是平面NMT,軸從C的切線經過.同樣可見曲面Σ在A點的切平面是平面NMT'從第二曲度曲線C'的切線經過.這兩個平面NMT, NMT'互相垂直,此足徵實以前所得的結果(n° 231),並且演出閉縮面的一個重要性質.懸想由空間任意一點O引曲面S的一個法線OM,設A及A'是S在此法線上的主曲度心.在閉縮面的兩張Σ及Σ'的兩點

A及A'上的切平面互相垂直;因爲這兩個平面都經過O點,可見自空間任意一點視一個曲面S的閉縮面的兩張都是相交成直角.此性質的相互定理已証明在前(n_o 231).

242. 阿蘭德羅德利克(Olinde Rodrigue)的公式.——仍用λ, μ, ν表曲面的法線的方向餘弦,用R表主曲度半徑;相隨的曲度心的坐標是

$$(45)\qquad X=x+R\lambda,\quad Y=y+R\mu,\quad Z=z+R\nu.$$

在(x, y, z)點畫出曲度曲線時,此曲線切於垂直截線,此後者的曲度半徑是R;由前所見曲度心畫出一個曲線Γ切於S的法線MN.所以我們當有

$$\frac{dX}{\lambda}=\frac{dY}{\mu}=\frac{dZ}{\nu}.$$

將X, Y, Z代以牠們的價值(45),得

$$\frac{dx+Rd\lambda}{\lambda}=\frac{dy+Rd\mu}{\mu}=\frac{dz+Rd\nu}{\nu};$$

這些比的公共價值是零,這是因爲若將第一個比上下兩項各乘以λ,第二個比上下兩項各乘μ,第三個比上下兩項各乘以ν,由加法的組合,得一個比和牠們同值,其分母爲一,其分子

$$\lambda dx+\mu dy+\nu dz+R(\lambda d\lambda+\mu d\mu+\nu d\nu)$$

是恆等於零.於是我們得阿蘭德羅德利克公式

(46) $$dx+Rd\lambda=o,\quad dy+Rd\mu=o,\quad dz+Rd\nu=o,$$

這些公式在曲面論上極關重要.自然這些公式惟在 (x, y, z) 點畫出曲度曲線時方能應用.

注意一我們又可利用一個曲面的閉縮曲面的性質作出定主曲度半徑的方程式.在公式 (46) 中將 λ, μ, ν 代以 (8) 的價值.又令 $R=\rho\sqrt{A^2+B^2+C^2}$;此公式成爲

$$X=x-\rho A,\quad Y=y-\rho B,\quad Z=z-\rho C.$$

既是在 (x, y, z) 點畫出一個曲度曲線時, X, Y, Z 點亦畫出一個曲線切於曲面 S 的法線,我們當有

$$\frac{dx-\rho dA-Ad\rho}{A}=\frac{dy-\rho dB-Bd\rho}{B}=\frac{dz-\rho dC-Cd\rho}{C},$$

若令這些比的公共價值爲 $-d\rho+K$,則得

(47) $$dx-\rho dA-AK=o,\ dy-\rho dB-BK=o,\ dz-\rho dC-CK=o.$$

在這三個關係式中消去 ρ 及 K,則復得曲度曲線的微分方程式 (38);但是若將 dx, dy, dz, dA, dB, dC 代以

$$\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ldots,\quad \frac{\partial C}{\partial u}du+\frac{\partial C}{\partial v}dv,$$

再消去 du, dv 及 K,則得一個含 ρ 的方程式:

$$
(48)\qquad \begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial u}-\rho\frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}-\rho\frac{\partial A}{\partial v} & A \\
\frac{\partial y}{\partial u}-\rho\frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}-\rho\frac{\partial B}{\partial v} & B \\
\frac{\partial z}{\partial u}-\rho\frac{\partial C}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}-\rho\frac{\partial C}{\partial v} & C
\end{vmatrix}=o.
$$

用和n°240相同的變形法可以驗明這個方程式和方程式(24)恆同.然而方程式(48)不用將E, F, G, D, D', D''預行算出.

作爲應用我們仍求螺旋曲面(hélicoïde gauche à plan directeur)的主曲度半徑.在此場合,稍變以前所用的記法,令

$$x=u\cos v,\qquad y=u\sin v,\qquad z=av,$$

$$A=a\sin v,\qquad B=-a\cos v,\qquad C=u.$$

方程式(48)可寫爲

$$a^2\rho^2=a^2+u^2,$$

由此得

$$R=\pm\frac{a^2+u^2}{a}.$$

所以螺旋曲面的主曲度半徑的絕對值皆相等但符號相反.

243. 若瑟斯達(Joachimsthal)的定理.——有時由幾何上的注意可以得到某種曲面上曲度曲線.譬如一個旋轉曲面

的曲度曲線很顯明的是經線及緯線,這是因為這些曲線在每一點上都切於指曲線的一個軸的緣故.作為証實,我們注意沿一個經線上,曲面的法線成為一個平面,沿一個緯線上曲面的法線成為一個旋轉圓錐,就是說這是些能展曲面.

在一個能展曲面上,第一類的曲度曲線為母線所成;第二類的曲度曲線為母線的直交軌線(trajectoire orthogonale)所成,就是說是逆退稜的些伸開線 (n° 225);這些曲線可自一個面積法得來.若是已知其中的一個,則其他的皆可由此求出不須復用面積術.這些結果都甚易由運算驗明.

一個空間曲線的閉縮線的理論引導若瑟斯達得到一個重要定理,常應用在這個理論上.設有兩個曲面 S, S' 沿一個曲線 C 相割,假定曲線 C 同時是每一個曲面的曲度曲線;沿曲線 C 上,曲面 S 的法線 MN 產出一個能展曲面.而曲面 S' 的法線 MN' 亦產出一個能展曲面.但是這兩個直線都垂直於曲線 C. 所以若是兩個曲面有一個公共的曲度曲線,則沿這個曲線上,這兩個曲面相交成定角.

反而言之,若是兩個曲面相交成定角,又若是相交曲線是一個曲面的曲度曲線,牠也就是他一個曲面的曲度曲線.誠然,我們知道若一個空間曲線 C 的法線產出一個能展曲面,則將每一個法線在 C 的法平面內旋轉一個定角所得的法線也成為一個能展曲面.

凡一個平面曲線或球面曲線都是平面或球面的曲度曲線.因而我們自若瑟斯達的公式得到以下的一個系 (Cor olaire):若要在一個曲面上的平面曲線或球面曲線是此曲面的曲度曲線,

必須也要只須要此曲面交此平面或球面成一個定角.

244. 杜班(Dupin)的定理.——我們已經屢次說過三重垂直系(système triple orthogonal)(n° 65, 140). 這個理論的起源始於杜班所創的一個著名的定理:

設有三類的曲面成爲一個三重垂直系,則不同類的兩個曲面的交線是此每一曲面的曲度曲線.

假定空間一點的三個直交坐標 x, y, z 爲三個變率 u, v, w 所表明,其表明法總使這三類的曲面 $(u), (v), (w)$ 成爲一個三重垂直系.我們已見垂直的條件爲三個關係式所表明(n° 65)

$$(49)\qquad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}=o,\quad S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}=o,\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=o.$$

關於 u, v, w 分別微分此三個關係式,得

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial w}+S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=o,\qquad S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial w}=o,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial w}+S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial w}=o;$$

由此,自一個甚易的組合,得

$$(50)\qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial w}=o,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial w}=o,\quad S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=o.$$

在(49)的前兩個方程式及(50)的末一個方程式中消去導來式 $\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}$,得到條件

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = o,$$

此條件表明在曲面(W)上,曲線 $u=C$, $v=C'$ 成爲一個共軛網.此網既同時是垂直且共軛,所以是由曲度曲線所成,即此已證所宣告的定理.

二次的共焦點曲面 (surfaces homofocales) 供給一個最鮮明的例子 (n° 141). 杜班必是由這些曲面的研究纔引導至普通定理.由這個定理可見一個橢圓面或一個雙曲面的曲度線都是這個曲面和牠的共焦點二次曲面的交線.

設 λ 是一個變率,方程式

$$\frac{y^2}{p-\lambda}+\frac{z^2}{q-\lambda}=2x-\lambda$$

所表的拋物面也成爲一個三重垂直系,由此我們得到拋物面的曲度曲線.我們再舉出以前所遇的一個三重系 (système triple)

$$\frac{xy}{z}=\alpha, \qquad \sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=\beta, \qquad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=\gamma.$$

關於三重垂直系的研究是微分幾何上一個極有興趣並且極難的問題.這個問題曾爲許多記錄 (mémoire) 中的對象,牠們的

簡要的結果見於達而布的新近作品中.[註二]

一個任何曲面 S 都屬於無量數的三重垂直系.這些系中有一個爲 S 的平行曲面及 S 沿牠的曲度曲線的法線所產的兩類能展曲面所成.誠然,設 MN 是曲面 S 在 M 點的法線,O 是此法線上任意一點,MT 及 MT' 是經過 M 點的兩個曲度曲線 C 及 C' 的切線.經過 O 點而平行於 S 的曲面的切平面平行於 S 在 M 點的切平面;沿曲線 C 或 C' 上,曲面 S 的法線所產的能展曲面的切平面各是平面 NMT 及 NMT'. 這三個平面誠然是兩兩垂直.

自一個任何的三重垂直系,由帶徑相互變形法能得無量數的別的三重垂直系,這是因爲這個變形法是保存角度的緣故.由方才所見凡一個曲面既是必在一個三重垂直系內,由此決定在一個帶徑相互變形法內,變形曲面的曲度曲線都是原曲面的曲度曲線的變形曲線.

245. **量地線(géodésique)的旁曲度.**——曲度曲線的性質附屬在一個重要的幾何原素上,此幾何原素關係第三級的導來式.依以前的空間曲線的理論(n° 225),我們有

$$(51)\qquad \frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}=H=\begin{vmatrix}\frac{d\lambda}{ds} & \frac{d\mu}{ds} & \frac{d\nu}{ds}\\ \lambda & \mu & \nu\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}$$

α,β,γ 是畫在曲面 S 上的一個曲線 Γ 的切線的方向餘弦;λ, μ,ν 是此曲面的法線的方向餘弦. θ 是曲面的法線和 Γ 的主

法線所作的角,此角的數法和在第225節同,T是Γ的旁曲度半徑.S上一點的坐標既是爲兩個變率u, v所表明,則係弦λ, μ, ν也是u及v的函數.定準式H的所有的元都爲$u, v, \frac{dv}{du}$所表明.那麽,對於曲面上經過(u, v)點而在此點相切的所有曲線Γ, $\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}$的算式都是相同.獲得此重要結果的是包內(Bonnet)他稱此原素爲<u>最地線的旁曲度</u>.若要研究最地線的旁曲度關於切線的位置的變化,我們取指曲線的兩個軸爲x及y軸,使曲面爲方程式

$$z=\frac{x^2}{2R}+\frac{y^2}{2R'}+\dots$$

所表.若是經過原點的一個曲線Γ,其切線和ox軸所作的角是ω.則在原點上我們有$\alpha=\cos\omega$, $\beta=\sin\omega$, $\gamma=0$, $\lambda=\mu=0$, $\nu=1$, $\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\cos\omega}{R}$, $\frac{d\mu}{ds}=\frac{\sin\omega}{R'}$, 公式(51)成爲

$$(51)' \qquad \frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}=\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\sin\omega\cos\omega$$

此公式補足<u>尤刺</u>的公式,他表明若曲線Γ切於指曲線的一個軸時,則最地線的旁曲度爲零,也只有在此場合時是如此.所以<u>曲度曲線能够看成是曲面上的曲線他的最地線的曲度爲零.</u>況且這也是由公式(51)可見的,因爲若令第二邊爲零則得到這些曲線的微分方程式.我們再注意若是在公式(51)′中用$\omega+\frac{\pi}{2}$代ω,則第二邊換符號;結果,<u>曲面上的兩個垂直曲線在</u>

交點上的最地線的曲度的和爲零.

若是兩個曲面S及S'沿一個曲線Γ相交成定角,則沿此曲線上;差數$\theta-\theta'$爲常數,因而Γ在兩個曲面上的最地線的曲度相同.若瑟斯達的定理是這個注意的一個直接驗明.由最地線的曲度的性質,也很容易得到杜班的定理.誠然,設S_1, S_2, S_3是經過空間一點的三個曲面,此三個曲面分屬於一個三重垂直系的三類曲面內.設Γ_1是曲面S_2及S_3的交線,Γ_2是S_3及S_1的交線,Γ_3是S_1及S_2的交線.曲面S_2及S_3既是沿Γ_1上直角相交,則Γ_1在此二曲面上的最地線的旁曲度相同;我們命之爲τ_1.同樣τ_2, τ_3對於曲線Γ_2, Γ_3有相同的意義.在M點上,這三個最地線的旁曲度滿足關係式$\tau_1+\tau_2=0$, $\tau_2+\tau_3=0$, $\tau_3+\tau_1=0$,這是因爲曲面S_3上的曲線Γ_1及Γ_2互爲垂直,S_2上的Γ_3, Γ_1互爲垂直,S_1上的Γ_2, Γ_3互爲垂直,所以在M點上,$\tau_1=\tau_2=\tau_3=0$.所以在M點上,曲線Γ_1, Γ_2, Γ_3的切線在每一個切平面內都是相隨曲面S_i的指曲線的軸,M點既是空間的任何點,曲線Γ_i誠然是牠所在的兩個曲面S_k的曲度曲線.[註三]

246. **應用在幾類的曲面上.**——有許多問題在於求定出些曲面使牠們的曲度曲線能滿足預定的幾何條件我們暫將結果最簡單的舉出幾個.

我們先求一切曲面牠們的兩系的曲度曲線中有一系都是些圓周.依若瑟斯達的定理,圓周的平面當和曲面相交成定角;因而沿圓周C上,曲面的法線當過圓周的軸(就是經過圓心而垂直於圓周的平面的直線)於同一的點O.那麼以O爲心過

圓周 C 的球面常沿 C 和曲面相切;所以所求曲面是含一個變率的球面的包封,倒轉來,凡球面的包封曲面都能滿足此問題,這是因爲象徵曲線都是圓周顯然成爲第一系的曲度曲線的緣故.

旋轉曲面顯然是一個特別場合.又有一個極有興趣的場合是管狀曲面 (surface canale),就是半徑等於 R 的一個球面其中心變出一個任意曲線 Γ 時所產的包封曲面.象徵曲線都是些圓周,半徑爲 R,中心變出 Γ,其平面垂直於 Γ. 曲面上的法線也都是曲線 Γ 的法線;所以取 Γ 的法線所產能展曲面在曲面上的迹即得曲面的第二系的曲度曲線.

若是一個曲面的兩系的曲度曲線都是圓周,此曲面可由兩種不同的方法看成含一個變率的球面的包封.設 S_1, S_2, S_3 是同一系中三個任何球面, C_1, C_2, C_3 是三個相隨象徵曲線, M_1, M_2, M_3 是 C_1, C_2, C_3 和第二系的一個曲度曲線 C' 的交點.球面 S' 沿圓周 C' 上和曲面相切,所以也切此三個曲面 S_1, S_2, S_3 於 M_1, M_2, M_3;那麼,所求曲面是一個常切於三個定球面的變化球面的包封.這個著名的球面是杜班的西格利得(cyclide).馬韓 (Mann heim) 曾以美麗的方法証明這個曲面是由帶徑相互變形法一個環形 (tou) 所成的變形曲面.設 γ 是垂直於三個球面 S_1, S_2, S_3 的一個圓周;若取 γ 上一點爲極;作一個帶徑相互變形法,則此圓周變爲一個直線 OO',球面 S_1, S_2, S_3 變爲三個球面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 垂直於此直線 OO',結果牠們的心在此直線上.設 C'_1, C'_2, C'_3 是這三個球面由一個經過 OO' 的平面所成的截

線.設 C' 是切於 C'_1, C'_2, C'_3 的一個圓周, Σ' 是以 C' 爲大圓的一個球面.這是很明瞭的,繞 OO' 一個旋轉,球面 Σ' 常和三個球面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 相切,所以 Σ' 的包封是以 C' 爲經線的一個環形.

我們再求些曲面牠們的曲度曲線有一系都是在平行平面中的平曲線.我們取和曲度曲線的平面平行的一個平面爲 xoy 軸.設

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = F(\alpha, z)$$

是 xy 平面的一個平行平面和曲面所成截線的切線方程式; $F(\alpha, z)$ 是兩個變數 α 及 z 的函數.此函數關係於所求的曲面.將以上的方程式再加以關係式

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha},$$

即得曲面上的一點的坐標 x, y. 然則定 x, y, z 的公式是

$$(62)\qquad x = F\cos\alpha - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\sin\alpha,\quad y = F\sin\alpha + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cos\alpha,\quad z = z,$$

適宜的選取函數 $F(\alpha, z)$, 凡一個曲面都可爲如此形狀的方程式所表.只有一個例外,就是以 $z=o$ 爲準平面的直線曲面.

一個容易的運算得切平面的方程式的係數 A, B, C

$$A = \cos\alpha,\quad B = \sin\alpha,\quad C = -\frac{\partial F}{\partial z},$$

因而法線和oz所作角的餘弦是

$$\nu=\frac{-F'_z}{\sqrt{1+F'^2_z}}.$$

若要平面xoy的平行平面所成截線是曲度曲線,依若瑟斯達的定理,必須要也只須要這些平面和曲面相交成定角,就說ν當不關於α;若要如此,必須要也只須要F'_z只關係z,因而$F(\alpha,z)$的形狀當是

$$F(\alpha,z)=\varphi(z)+\psi(\alpha),$$

函數φ及ψ都是任何的.此時公式(52)成為

$$(53)\qquad\begin{cases}x=\psi(\alpha)\cos\alpha-\psi'(\alpha)\sin\alpha+\varphi(z)\cos\alpha,\\ y=\psi(\alpha)\sin\alpha+\psi'(\alpha)\cos\alpha+\varphi(z)\sin\alpha,\\ z=z.\end{cases}$$

如此,我們得能對答此問題的最普通的曲面.

這些曲面可由以下的方法產出.若將z看成常數,令α變化,則(53)的前兩個方程式表一系的曲線,都是xy平面的平行平面和曲面所成截線在$z=o$平面中的射影曲線.但是這些曲線都平行於令$\varphi(z)=o$所得的曲線;由此得到曲面的一個作法:在$z=o$平面內取一個任意曲線及牠的些平行曲線,再將這些曲線依一個任意定率平行於Oz而移動;則此動曲線的各種位置所產曲面是能對答問題的最普通的曲面.

這個產生的方法很容易看出能為以下的方法所替代:一

個任何形狀的平曲線軸的平面沿一個以任何爲底的柱面上爲不滑的旋轉,則產生所求曲面.這是些滑旋曲面 (surface moulure).

在公式(53)中令 α 爲常數研究如此所得的平曲線,則甚易驗明以上的結果.這兩類的曲度曲線正是平曲線 $z=C$ 及 $\alpha=c'$.

III.——兩個曲面上的點的相應.

247. **球面表示法** (représentation sphérique) 設 Σ 是一個曲面或是一個曲面的一部,牠有各別的兩面 (n^o 131). 我們特別的選定一面,對於每一點 M 取法線和此面相應的方向 MN. 再設一個球面 S 中心在 O, 半徑等於一,自 O 點引一個半直線平行於 Σ 的法線的正向 MN. 這個半直線通過球面 S 於 m 點,此點和 Σ 的 M 點相應.如此,對於 Σ 上每一點 M, S 上有一個確定的點相應;在兩個相應的點上,兩個切平面平行.若在球面上取自內向外的方向爲 S 的法線的正方向,如此,則兩個曲面的法線的正向又相同.對於 Σ 上一個曲線 C, S 上有一個曲線 c 相應,牠是曲線 C 的球面映像 (image sphérique).

曲線 c 在 m 點的切線 mt 垂直於 Σ 上曲線 C 在相應點 M 上的切線 MT 的共軛切線.

設然,設 M 及 M' 是 C 上的兩個鄰點; m 及 m' 是 c 上的相應點; D 是曲面 Σ 在 M 點及 M' 點的切平面的相交直線. d 是球面上在 m 及 m' 的切平面的相交直線.這些平面每兩個互相平行,這是很明瞭的, d 平行於 D. 在 M' 漸近於 M 時,直線 D

的極限位置是Σ上的切線MT',牠是C上的切線MT的共軛切線($n^\circ 239$).同樣,d的極限位置是mt在球面上的共軛切線.譬如作爲是mt'.但是mt'垂直於mt,這是因爲球面上每一點的指曲線都是一個圓周的緣故;況且mt'平行於MT',即此可証所宣告的定理.

若要直線MT, mt平行,必須要只須要MT垂直於牠的共軛切線,就是說MT是Σ的指曲線的一個軸.所以Σ上曲度曲線的切線和牠的球面映像的切線在相應點上平行.並且曲度曲線是Σ上具有此性質的惟一曲線.

這個結果可與阿蘭德羅德利克的公式並行.誠然,若取原點爲球面S的中心,則m點的坐標正是法線的正向MN的方向餘弦λ, μ, ν我們說$M(x, y, z)$點及$m(\lambda, \mu, \nu)$點所畫曲線C及c平行,即得到關係式

$$\frac{dx}{d\lambda}=\frac{dy}{d\mu}=\frac{dz}{d\nu},$$

這誠然和公式(46)相符.

在曲面Σ上取一個無限小面積原素$d\sigma$包有一點M在內,設$d\sigma'$是球面上相應的面積原素.若要計算比$\dfrac{d\sigma'}{d\sigma}$,只須應用第137節的運算,但是在現在的場合,兩曲面的法線既是平行,比$\dfrac{d\sigma'}{d\sigma}$等於$xy$平面的兩個原素的比$\dfrac{d\omega'}{d\omega}$.假定在$M$點附近,曲面$\Sigma$爲方程式$z=f(x, y)$所表,並且假定取法線和$Oz$軸作成銳角的方向爲法線的正方向.在此情形之下,$m$點的坐

樣是

$$x'=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad y'=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad z'=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

我們有

$$\frac{d\omega'}{d\omega}=\left|\frac{D(x',y')}{D(x,y)}\right|=\left|\frac{D(x',y')}{D(p,q)}\right|\times\left|\frac{D(p,q)}{D(x,y)}\right|,$$

由一個甚易的運算,可見

$$\frac{d\omega'}{d\omega}=\frac{|rt-s^2|}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

此式的第二邊不是別的,只是曲面 Σ 的全曲度 (courbure totale) $\frac{1}{RR'}$ 的絕對價值.由此得到這個幾何原素的一個定義,完全和一個曲線的曲度的定義相似 (n° 218).

但是一個曲線的曲度的算式含有一個根號,至於一個曲面的曲度則爲有理的,結果,牠有一個符號,就是 $rt-s^2$ 的符號.這個符號仍能用球面表示法解釋.假想有兩個觀察者各倚在 S 及 Σ 的相應點的法線上,足在曲面,頭向法線的正方向.在第一個觀察者畫出面積 $d\sigma$ 的圍線,其進行時總使此面積在其左,則第二個觀察者畫出面積 $d\sigma'$ 的圍線,其進行時此面積或在其左或在其右; $rt-s^2$ 在第一個場合是正,在第二個場合是負,因而 $\frac{1}{RR'}$ 也是如此.

注意.—若是M點不是Σ的一個拋物線點,$rt-s^2$不等於零,依陰函數的定理(n° 38, 185),曲面Σ在M點附近的點及球面上在m點附近的點以惟一的(univoque)相應法一個和一個相應.但是對於一個拋物線點,普通的一不是如此,這是很容易舉例以徵實的.

設AMB是一個平曲線弧牠有一個彎曲點在M, AM及BM兩個弧的凸(convexité)方面是向兩個不同的方向.在曲線的平面中取一個不通過曲線的軸OO',繞此軸而旋轉,則AMB弧產出一個旋轉曲面Σ,在其上M點所產的緯線P是拋物線點的一個軌迹.弧AM及BM所產的兩個曲面Σ_1及Σ_2的球面映像是兩個帶形(Zone)有一部分互相掩蓋,沿P的映像所成緯線p相接合.Σ的這個球面映像,譬如是一張紙沿球面的一個緯線摺疊,使此紙兩次掩蓋球面上以此緯線爲界的一個帶形.

再取一個圓環(tore)曲面,由一個圓周C繞一個軸OO'旋轉而成,假定圓周C在一個豎平面(plan vertical)內,OO'是此平面內一個豎直線不通過圓周C. C的最高最低兩點A及B分C爲兩個弧C_1及C_2,譬如C_1是離軸較遠的一個弧.

依OO'而旋轉時,產出一個凸曲面Σ_1牠和球面S點和點相應除卻Σ_1上的兩個極端的緯線及S的兩個極不論.同樣,C_2產出一個曲度相反的曲面Σ_2,牠和S點和點相應,也是兩極端的緯線和S的兩極除外.至於A及B兩點所產兩個極端的緯線,牠們和球面的兩個相反的極相應.圓環的球面映像可以設想是兩個相等的球面,此一個嵌入牠一個內,牠們兩個外面僅在兩極相通.

248. **能合曲面**(surfaces applicables).——一個曲面的球面表示法對於曲面上每一點使球面上有一點相應,反之也是如此.在更爲普通的場合,設有兩個任何曲面 S 及 S',假定 S 上一點的直交坐標爲兩個變率 u 及 v 所表明,S' 上一點的直交坐標爲另外兩個變率 u' 及 v' 所表明.若在此兩偶的變數 (u,v),(u',v') 間成立兩個公式

$$(54)\qquad u'=g(u,v),\qquad v'=h(u,v),$$

其沙勾脫 $\dfrac{D(u',v')}{D(u,v)}$ 不恆等於零,則得兩曲面間一個點和點的相應法;這是很明瞭的,凡兩個曲面的諸點間的一個此類的應法都是由形狀和(54)相同的公式所定,只要適宜的選取函數 g 及 h.

對於這些相應法有許多的問題提出.譬如求在甚麼場合,兩曲面上兩個任何的相應弧能夠常有相等的長度.設

$$(55)\qquad ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

$$(56)\qquad ds'^2=E'du'^2+2F'du'dv'+G'dv'^2$$

是定兩曲面的線原素 (élément linéaire) ds^2 及 ds'^2 的公式.若在公式(56)中將 u' 及 v' 代以牠們在(54)的算式,則得

$$(56)'\qquad ds'^2=E_1du^2+2F_1dudv+G_1dv^2,$$

E_1,F_1,G_1 都是 g,h 及牠們的導來式的函數,這些函數的算式也甚易算出.若是公式(54)所定的相應法是保有長度的,則不論 du,dv 如何,常得到 $ds'=ds$,因而

$$(57) \qquad E_1=E, \quad F_1=F, \quad G_1=G;$$

如此,我們說曲面 S 及 S' 是彼此能合.設兩個曲面的線原素各爲公式(55)及(56)所給與,若要這兩個曲面彼此能相合,必須要也只須要能够求得兩個函數 $g(u,v)$, $h(u,v)$ 滿足關係式(57).這兩個未知函數 $g(u,v)$, $h(u,v)$ 當滿足一組的三個第一級偏微分方程式;若是係數 E, F, G, E', F', G' 都是任何的,這些方程式通常的是不能相容 (in compatible).若要使牠們能相容,則係數 $E, F\ldots$ 不能任意選取;這個問題的解答只須要微分法及消去法,我們暫且勿論.

又有一個問題和上一個問題不同,就是:定出一個已知曲面的所有的能合曲面,或是更爲普通一點,定出所有的曲面以一個已知線原素爲線原素.這個新問題的解答,在於解一組的三個第一級偏微分方程式

$$(58) \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=E, \quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=F, \quad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=G,$$

E, F, G 是 u 及 v 的三個已知函數;x, y, z 是三個未知函數.這一組的方程式的全積分 (inlégration complete) 只在極少數的場合可以實現;牠變爲一個第二級的偏微分方程式的積分法.

我們特別的取一個螺旋曲面 S 爲公式

$$(59) \qquad x=\rho\cos\omega, \quad y=\rho\sin\omega, \quad z=f(\rho)+a\omega$$

所表,其中 $2\pi a$ 爲螺旋線的步(pas).二次形式 (forme quadratique) ds^2 可寫爲以下的形狀

$$(60)\qquad ds^2=(\rho^2+a^2)\left[d\omega+\frac{af'(\rho)}{\rho^2+a^2}d\rho\right]^2+\frac{a^2+\rho^2+\rho^2f'^2(\rho)}{\rho^2+a^2}d\rho^2.$$

令

$$du=\sqrt{\frac{a^2+\rho^2+\rho^2f'^2(\rho)}{\rho^2+a^2}}d\rho,$$

$$dv=d\omega+\frac{af'(\rho)}{\rho^2+a^2}d\rho;$$

u 及 v 都由面積法 (quadrature) 得來，ρ^2+a^2 是 u 的一個函數 U，總之，凡螺旋曲面的 ds^2 都能變為

$$(61)\qquad ds^2=du^2+Udv^2$$

的形狀，我們注意曲線 (u) 及 (v) 都是曲面上的螺旋線及牠們的垂直軌線 (trajectoire orthogonale)；那麼，這些軌線都能由一個面積法得來。

設 S' 是又一個螺旋曲面為一個公式

$$(59')\qquad x'=r\cos\theta,\qquad y'=r\sin\theta,\qquad z=\varphi(r)+b\theta$$

所表；對於這個曲面，我們有

$$(62)\qquad ds'^2=(r^2+b^2)\left[d\theta+\frac{b\varphi'(r)}{r^2+b^2}dr\right]^2+\frac{b^2+r^2+r^2\varphi'^2(r)}{b^2+r^2}dr^2.$$

若要這兩個曲面彼此能合，使兩曲面上的螺旋線相應，必須要也只須要能夠定出一個 ρ 的函數 r，一個 ρ 及 ω 的函數 θ 滿足三個條件

$$(63)\quad \begin{cases} \left[1+\dfrac{r^2\varphi'^2(r)}{r^2+b^2}\right]dr^2=\left[1+\dfrac{\rho^2 f'^2(\rho)}{\rho^2+a^2}\right]d\rho^2, \\ c^2(r^2+b^2)=\rho^2+a^2, \\ d\theta+\dfrac{b\varphi'(r)}{r^2+b^2}dr=c\left[d\omega+\dfrac{af'(\rho)}{\rho^2+a^2}d\rho\right], \end{cases}$$

c 是一個不等於零的常數.[註四]自第二公式取得

$$\rho^2=c^2(r^2+b^2)-a^2,$$

以此價值代入第一個條件,即能由一個面積法得 $\varphi(r)$. 旣得 $\varphi(r)$,繼續得

$$\theta=c\omega+ca\int\frac{f'(\rho)}{\rho^2+a^2}d\rho-\int\frac{b\varphi'(r)}{r^2+b^2}dr.$$

那麽,有無量數的螺旋曲面關係兩個任意常數 b 及 c,能合於一個已知螺旋曲面.並且兩曲面上的螺旋線相應.

這個常數 b,除一個因數 2π 外,牠等於新螺旋曲面 S' 的步.若是 $b=o$,此曲面 S' 就是旋轉曲面,於是得布爾 (Bour) 的定理:凡一個螺旋曲面都能合於一個旋轉曲面,曲面 S' 上的螺旋線相應於旋轉曲面的緯線.不但如此,我們可見這些旋轉曲面關係一個任意常數 c.

例:第一,設 $f(\rho)=o$,曲面 S 是具有準平面的直螺旋曲面 (heli coïde droit à plan directeur) 若假定 $b=o, c=1$,自方程式 (63) 得公式

$$\varphi(r)=a\,\mathrm{Log}\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}.$$

相應的旋轉曲面,是阿利賽伊得 (alysseïde) 由懸索線 (chainette) 繞其底 (base) 旋轉而成.

第二,若 $f(r)=r$;若仍令 $b=o,\ c=1$,我們有

$$\varphi(r)=\sqrt{r^2-a^2}+C.$$

此螺旋曲面的斷面是一個直線和 Oz 軸相交成 45° 的角,至於旋轉曲面,牠是一個一張雙曲面,由一個正雙曲線(hyperbole équi latére) 旋轉而成.

249. **能合於一個平面的曲面.**——對於一個平面,我們有 $ds^2=du^2+dv^2$, u 及 v 是一點的直交坐標.所以要得到能合於一個平面的一切曲面,在於積分三個聯立微分方程式

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=1,\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=o,\quad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=1.$$

包內(Bonnet)所作以下的証明表示這些曲面都是能展曲面.關於 u 及 v 將以上的三個方程式微分之,得六個關係式

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=o,\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=o,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=o,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=o,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=o,\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=o.$$

自含$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$的兩個方程式.可見這三個偏導來式各比例於沙勾扁 $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$. 我們假定這三個沙勾扁不皆恆等於零,因為如果不然,則 (x, y, z) 將畫出一個曲線而不是一個曲面.同樣可見偏導來式$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$也都比例於這些沙勾扁,導來式$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$也是如此.所以得到關係式

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}}$$

這些關係式表明這三個導來式$\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$中任意兩個的沙勾扁恆等於零;然則$\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$都是一個變數$t$的函數.同樣可見 $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ 都是一個變數 t' 的函數.他一方面,關係式 $S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=o$ 表明這兩個變數 t, t' 縮減為一個.那麼,六個第一級偏導式都是其中一個的函數.自方程式$dz=pdx+qdy$所得切平面的角係數p及q只關係一個變數,所以曲面是能展曲面(n° 204).

【註五】

倒轉來,設 S 是一個能展曲面,為一個曲線 Γ 的切線所產生;作為變率,我們取曲線 Γ 由任意一點所起的弧 σ 及母線上一點

至接觸點的距離 l.

S 上任意一點的坐標都爲以下的公式所給與

$$X=x+l\alpha,\qquad Y=y+l\beta,\qquad Z=z+l\gamma,$$

其中, x, y, z 是 Γ 上一點的坐標, α, β, γ 是切線的方向餘弦.由福爾內的公式得

$$dX=\alpha(d\sigma+dl)+\frac{l\alpha' d\sigma}{R},\quad dY=\beta(d\sigma+dl)+\frac{l\beta' d\sigma}{R},\ldots,$$

因而

$$ds^2=(d\sigma=dl)^2+l^2\frac{d\sigma^2}{R^2}, \tag{64}$$

R 是 Γ 的曲度半徑.由這個公式不能立即看出 ds^2 能變爲 du^2+dv^2 的形狀.若要得到這個簡式,只須注意 ds^2 惟一的關係於函數 $\frac{1}{R}=\varphi(\sigma)$ 牠定出曲度半徑 R 及弧 σ 間的關係式.設 Γ' 是又一個曲線,對於這個曲線函數 $\varphi(\sigma)$ 仍是相同;以 Γ' 爲逆退稜的能展曲面的 ds^2 有同一的算式(64).所以這兩個曲面彼此能相合,並且兩曲面上的母線相應.但是這些曲線 Γ' 中有一個 C 是平曲線,牠的切線所產的能展曲面縮減爲一個平面.

由此甚易作出定曲面及平面的相應法的公式.自方程式(équation intrinsèque) $\frac{1}{R}=\varphi(\sigma)$ 所定平曲線 C 爲公式

$$x_1=\int\cos\theta d\sigma,\quad y_1=\int\sin\theta d\sigma,\quad \left(其中\ \theta=\int\frac{d\sigma}{R}\right)$$

所表($n°224$);若在此曲線的切線上取一個長度l,所得的點的坐標是 $u=x_1+l\cos\vartheta$, $v=y_1+l\sin\vartheta$. 計算着公式(64)立即可見

$$ds^2=du^2+dv^2.$$

能展曲面S上的點和平面上的點的相應法根據於以上的証明.自方程式(équation intrinseque) $\frac{1}{R}=\varphi(s)$所定平曲線C的形狀是完全確定的($n°224$),Γ上諸點及C上諸點的相應法定出此兩曲線的切線的方向的相應法.此附已經說明,設P是曲面S上一點,補在曲線Γ的M點的切線上,距離$MP=l$;命曲線C上和M的相應點爲m,自C在m點的切線上,依和MP相應的方向取一個長度$mp=l$;如此所得的點p和S上P點相應.可見對於S上的點,平面中只有一個區域Π內的點相應,這個區域是接觸點掃出C時C的切線所掃的區域,普通的這個相應法不是惟一的(univoque).譬如取一個圓螺旋線(hélice circulaire)其曲度半徑是常數R,在其上取一個螺線圈(spire) AB. 在螺線圈的每一點的切線上向一個方向取一個半切線,如此所產的曲面和平面中一個區域Π點和點相應,此區域Π在一個半徑等於R的圓周外,但是這個螺旋線的所有點上的切線所產能展曲面的相應點掩蓋區域R無量數的次數.

250. **量地曲度**(courbure géodésique). **量地線**(ligne géodésique).——設Γ是在一個曲面S上的一個曲線,取曲面S在Γ的一點M上的切平面,Γ在此平面上的垂直射影是一個曲線γ.此平曲線在M點的曲度$\frac{1}{\rho_g}$叫作曲線Γ的量地曲度.這個原素的重要由於以下的性質:設有兩個能合曲面S及S',

Γ及Γ'是兩曲面上的兩個相應曲線,相應曲線在相應的點上有相同的量地曲度.若要證此,只須表明若已知曲線Γ的方程式$v=\Pi(u)$,則量地曲度半徑ρ_g能够惟一的由係數E, F, G所表明.我們假定曲面S標誌在一系的垂直曲線坐標(coordonneés curvilignes orthogonales);曲線Γ的方程式假定是$v=v_0$.若要計算Γ在$M_0(u_0, v_0)$點的量地曲度半徑,假定取M_0點為原點,切平面為xy平面,Γ在原點的切線為ox軸.用此一系的坐標軸,我們有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0=\sqrt{E_0},\quad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0=o,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0=o,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0=o,\quad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0=\sqrt{G_0},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0=o,$$

曲線γ是Γ在xOy平面上的射影,γ在原點上的曲度半徑的算式是

$$\rho_g=\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)_0-\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_0\right|}=\frac{E_0}{\left|\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right|_0}.$$

自兩個關係式

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=E,\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=o,$$

取得

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=o;$$

對於 $u=u_0, v=v_0$,由這些關係式取得

$$\sqrt{G_0}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u}\right)_0=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_0,$$

蓋地曲度 $\frac{1}{\rho_g}$ 的算式是

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{}{2}\frac{\left|\frac{\partial E}{\partial v}\right|_0}{E_0\sqrt{G_0}}, \tag{66}$$

即此可証所提出的定理.

盡在一個曲面上的曲線若是在每一點上,蓋地曲度皆等於零,則此曲線叫作蓋地線.若是兩個曲面 S, S' 是能合曲面,上兩曲面上的蓋地線相應,這是由方纔所証的定理可見的.蓋地線的定義又可以看成曲面上的線牠們的吻合平面經過曲面的的法線.誠然,設 Γ 是曲面上一個曲線,γ 是牠在切平面上的垂直射影,R 及 ρ_g 是 Γ 及 γ 的曲度半徑,θ 是 Γ 的吻合平面和切平面作的角.試取 Γ 的垂直射影柱面,γ 是牠的一個直截線.應用莫尼萊的定理在此柱面上,我們有

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{\cos\theta}{R}.$$

若是 Γ 是一個最地線，$\dfrac{1}{\rho_g}$ 等於零，因而 $\cos\theta=o$；所以 Γ 的吻合平面包有曲面的法線；逆定理亦爲確實．

由此看來，沿一個最地線上，x, y, z 都是一個變數的函數祇能滿足關係式

$$(66)\qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=o,$$

A, B, C 是曲面的法線的方向率．坐標 x, y, z 既是爲兩個變率 u 及 v 所表明，譬如取 u 爲自變數，展開以上的方程式，即得一個第二級的微分方程式

$$(67)\qquad \frac{d^2v}{du^2}=F\left(u, v, \frac{dv}{du}\right),$$

其積分顯出最地線．這些曲線關係兩個任意常數；自曲面上每一點（非奇點）有無量數的最地線經過，然而在一點上只有一個切於一個固定方向．一個平面的最地線都是直線；一個球面的最地線都是大圓；在一個能展曲面上，若令曲面和一個平面爲保存長度的相應，則凡曲面中和平面中的直線的相應曲線都是最地線（$n°$ 249）．

例如一個曲線 Γ 及牠的一個閉縮線 D（圖四十），D 在 M_1 點上的吻合平面包有 Γ 在 M 點的切線，因而包有 Γ 的極曲面在 M_1 點的法線，這是因爲 Γ 的極曲面就是 Γ 的法平面

的包封的線故.所以Γ的閉縮線都是極曲面的短地線.依閉縮線的幾何關係,甚易証明若將極曲面合於一個平面,則Γ的閉縮線變爲經過同一定點的直線.

自一個空間曲線Γ的每一點M上引一個平面垂直於主法線,則這些平面包封一個能展曲面S從Γ經過,並且Γ是S的一個短地線,這是因爲S的法線和Γ的主法線相合的緣故.若將曲面S舒展在一個平面上,曲線Γ將變爲一個直線;因此,所以垂直於主法線的平面有直線平面 (plan rectifiant) 之名 (Lancret).

仍取一個曲面S的閉縮面的兩張Σ及Σ'.沿S的一個曲度線上,S的法線MN產出一個能展曲面以Σ上一個曲線Γ爲逆退稜.我們已見此曲線Γ在A點的吻合平面切曲面Σ'於A'點 (n° 241).那麼,此吻合平面垂直於Σ在A點的切平面,因而Γ是Σ的一個短地線.一個曲面S的曲度線的閉縮線,在此曲面的閉縮面的一張上的都是此一張閉縮面的短地線.

倒轉來,在一個任何曲面Σ上,取一類的短地線關係於一個變率,其方法總使在Σ的每一點上這些曲線中有一個而只有一個經過 (通常的).牠們的切線都垂直於一類的平行曲面.若要証此,只須表明這些切線所成的相合組的焦點平面互相垂直 (n° 231).設Γ是一個短地線,MT是其上一點的切線.經過MT的一個焦點平面顯然是Γ在M點的吻合平面.若要求第二個焦點平面,只須求相合組的經過MT的第二能展曲面.但是若取短地線Γ的共軛曲線,特別的若是取經過M點的共

軛曲線Γ',相合組的經過MT的第二個能展曲面是Σ沿Γ'上的切平面的包封(n° 239).所以經過MT的第二個焦點平面是Σ在M點的切平面;這兩個焦點平面誠然是互相垂直.

注意.—若是選擇曲線坐標,取一類的量地線爲(v),牠們的垂直軌線爲(u),則二次形式ds^2成爲简單的形狀.

我們有$F=o$,依定一個曲線(v)的量地曲度的公式(65),當得$\dfrac{\partial E}{\partial v}=o$;那麽,係數$E$單獨是$u$的一個函數$U$.將$u$代以$\int\sqrt{U}du$,則定$ds^2$的公式的形狀成爲$ds^2=du^2+Gdv^2$;係數$G$是變數$u$及$v$的一個任何函數.

251. 全曲度(courbure total).高斯的定理.——我們曾經說過一個曲面的全曲度是主曲度半徑的積的倒數$\dfrac{1}{RR'}$.高斯有一個緊要定理:設S及S'是兩個能合曲面,在相應點上,二曲面的全曲度相同.若要証此,只須顯明全曲度但爲ds^2的係數E, F, G所表明.假定取公式(4)中因數k等於-1;由關係式(26)(n° 236)得

$$\frac{1}{RR'}=\frac{DD''-D'^2}{(EG-F^2)^2},$$

我們只須顯明$DD''-D'^2$爲係數E, F, G及牠們的導來式所表明.爲運算简單計,假定曲面標誌在一系的曲線坐標,此系的坐標由一類的量地線及牠們的垂直軌線所成.如此,則$E=1$,$F=o$.自公式(58),由疊次微分法,得

$$(68)\quad \begin{cases} S\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}=o,\quad S\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=o,\quad S\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}=o, \\ S\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}+S\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=o, \\ S\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u},\quad S\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial v}, \end{cases}$$

因而

$$(69)\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

再由微分法,得

$$S\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u\partial v^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2},$$

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u\partial v^2}+S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2=o,$$

最後得

$$(70)\quad S\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

此時已經說明,由普通定規作出兩個定準式的積 DD'' [公式(15)及(16)],合計著以上的關係式,此積成爲 $G\times S\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}$.

同樣 D'^2 成爲 $G\times S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2$，依 (26) 的末一個公式得

$$DD''-D'^2=G\times S\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2\right]=-\frac{1}{2}G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

由此得在 (u, v) 點的全曲度的算式

$$\frac{1}{RR'}=-\frac{1}{2G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}, \tag{71}$$

高斯的定理於以証明.從前所証關於曲面及平面的能合定理(n° 249)是高斯定理的一個直接的結果;誠然,此曲面在每一點上的全曲度當爲零,因而 $rt-s^2$ 當爲零.所以曲面是一個能展曲面(n° 204).

高斯的定理又可以補足第 248 節關於螺旋曲面所得的結果.一般,設 S 及 S' 是兩個彼此能合的曲面,牠們的全曲度不是常數;若令全曲度等於一個常數,則兩曲面上和此全曲度相應的點所成曲線成爲兩類的曲線,依高斯的定理,牠們對於所作的變形法當是相應.特別的若是 S 及 S' 是兩個螺旋曲面,則全曲度相同的線顯然是些螺線,一個螺旋曲面其全曲度不是常數,所以第 248 節的公式給與能合於一個螺旋曲面的所有的螺旋曲面.

252. **同形變形法** (transformation conforme).——現在論兩個曲面上諸點間的保存角度的變形法.設 (x, y, z) 是 S 上一點的直交坐標,(x', y', z') 是 S' 上的相應點的直交坐標;假定這些

坐標x, y, z, x', y', z'爲兩個變率u, v的函數所表明,其方法使兩個曲面上的相應點都和一系的變率u, v相應.

設C及D是曲面S上的兩個曲線,經過m點,C'及D'是曲面S'上的相應曲線,經過m'點.沿曲線C上,變率u, v都是一個輔助變數t的函數.我們用du, dv表牠們的微分;同樣,沿曲線D上,u, v都是一個變數t'的函數.我們用$\delta u, \delta v$表牠們的微分.一般,用文字d及δ區別關於在曲線C及曲線D上的變位的微分.曲線C上的切線的方向率(paramétres directeurs)各等於

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv, \quad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv;$$

曲線D上的切線的方向率是

$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial u}\delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\delta v, \quad \delta y=\frac{\partial y}{\partial u}\delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\delta v, \quad \delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\delta v;$$

用ω表曲線C及D的切線所作的角;$\cos\omega$爲以下的公式所與,

$$\cos\omega=\frac{dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}}$$

此式又可寫爲,

$$(72)\quad \cos\omega=\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$

其中E, F, G仍是習慣上的意義.同樣,ω'表曲線C'及D'上的切

線所作的角,

$$(73)\quad \cos\omega'=\frac{E'du\delta u+F'(du\delta v+dv\delta u)+G'dv\delta v}{\sqrt{E'du^2+2F'dudv+G'dv^2}\sqrt{E'\delta u^2+2F'\delta u\delta v+G'\delta v^2}}.$$

若要所取的變形法不改變角的價值,必須要 $\cos\omega'=\cos\omega$, du, dv, δu, δv 如何不論;$\cos^2\omega$, $\cos^2\omega'$ 都是兩個比 $\frac{\delta v}{\delta u}$, $\frac{dv}{du}$ 的有理函數,

Fig. 42a.

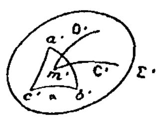
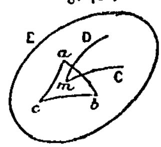


Fig. 42b.



無論此二比如何,此兩比都當相等.為此必須要此兩個分數的相關係數成為比例,就是說

$$(74)\qquad \frac{E'}{E}=\frac{F'}{F}=\frac{G'}{G}=\lambda^2,$$

λ 是變率 u, v 的一個任何函數;這些條件顯然是充足的,這是因為 $\cos\omega$ 及 $\cos\omega'$ 關於 E, G, F, 及 E', G', F' 各是同質函數,次數等於零.

公式(74)可以用一個惟一的關係式替代

$$ds'^2=\lambda^2 ds^2,$$

或

(75) $$ds'=\lambda ds;$$

牠表明這兩個弧無限減小時,牠兩個的比的極限不關係 du 及 dv. 這個條件使我們的結果幾乎成為直觀的.誠然,在第一個曲面上取一個無限小三角形 $a\,b\,c$, 設 $a'\,b'\,c'$ 是第二個曲面上的相應三角形.將這兩個三角形看成直線的三角形;既是 $\dfrac{a'b'}{a\,b}$, $\dfrac{a'c'}{a\,c}$, $\dfrac{b'c'}{b\,c}$ 都漸近於同一的極限 $\lambda(u,v)$, 這兩個三角形在極限上是相似的,所以相應的角各相等.

可見兩個曲面上的兩個無限小的圖形可以看作相似,這是因為弧的長度成比例而角相等的緣故.所以凡一個保存角度的變形法也往往稱為<u>同形表示法</u>.在以上所論的特別場合,$\lambda=1$, 可見這個變形法同時保存長度及度角,然而這只是最普通的同形變形法的一個特別場合.

已知兩個曲面 S, S' 及一個確定的相應法使這兩個曲面點和點相應,我們總能夠辨認條件 (74) 是否滿足,就是知道在這兩個曲面間是否有一同形表示.然而我們仍有別的問題所以解決.譬如已知兩個曲面 S 及 S', 我們求定出牠們的點和點間一切的不變角度的相應法,假定 S 的一點的坐標 (x,y,z) 為兩個變率 (u,v) 所表明, S' 的一點的坐標 (x',y',z') 為牠兩個變率 (u',v') 所表明;設

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,\quad ds'^2=E'\,du'^2+2F'\,du'\,dv'+G'\,dv'^2$$

是線原素的平方的算式.我們所要解決的問題成為以下的問題:求兩個函數

$$u'=\pi_1(u,v),\quad v'=\pi_2(u,v)$$

使我們有恒等式

$$E'd\pi_1^2+2F'd\pi_1d\pi_2+G'd\pi_2^2=\lambda^2(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)$$

λ 是變數 u, v 的未定函數.依微分方程式的普通定理,此問題常有無量數的解;我們只討論幾個特別場合.

253. 一個平面在一個平面上的同形表示.—— 設有兩個平面各爲直交坐標 (x, y) 及 (X, Y) 所標誌,在此兩個平面諸點間的相應法,都是由以下的形狀的公式所定:

$$X=P(x,y),\qquad Y=Q(x,y);\tag{76}$$

由方纔所見,若要這個變形法保存角度,必須要且只須要

$$dX^2+dY^2=\lambda^2(dx^2+dy^2),$$

λ 是 x, y 的任一函數,牠不關係微分.將微分 dX, dY 展開,令兩邊相等,可見函數 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 當滿足兩個關係式

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2,\quad \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}=o.\tag{77}$$

偏導來函數 $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ 不能同時爲零,這是因爲如果如此,(77) 的第一個關係式就令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial x}=o$,函數 P 及 Q 就成爲常數了.

依最後關係式,我們可寫爲

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\mu\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\mu\frac{\partial P}{\partial y},$$

μ是一個補助未知數.將這些價值代入(77)的第一個關係式中,牠成爲

$$(\mu^2-1)\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right]=0,$$

由此取得$\mu=\pm1$.所以函數P及Q當滿足以下的兩個關係式中的一個:

$$(78)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(79)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}=-\dfrac{\partial Q}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \end{cases}$$

若將Q代以$-Q$,則第二組變爲第一組.如此所得無量數的變形法也叫作平面的等角變形法.牠們和一個複變數的函數有密接的關係(參觀第二本).

254. **地圖.**—— 作一個曲面的圖,就是令此曲面上的點和一個平面上的點相應,其方法總使角度保存.假定所設曲面S上一點的坐標爲兩個變率(u,v)的函數所表明,

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

是線原素(élément linéaire)的平方.設(α,β)是平面P中和曲面上一點(u,v)相應點的坐標.我們當求得兩個函數

$$u=\pi_1(\alpha,\beta),\qquad v=\pi_2(\alpha,\beta),$$

其方法總能令

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=\lambda(d\alpha^2+d\beta^2),$$

λ是α,β的一個任何函數,牠不關係微分.這個問題有無量數的解,用前所研究的一個平面在一平面上的同形變形法,能將這一切的解自牠們中的一個演出.誠然,假定同時有

$$ds^2=\lambda(d\alpha^2+d\beta^2),\qquad ds^2=\lambda'(d\alpha'^2+d\beta'^2);$$

也就有

$$d\alpha^2+d\beta^2=\frac{\lambda'}{\lambda}(d\alpha'^2+d\beta'^2),$$

所以自平面的一個等角變形法即能由此一個表示法變為他一個表示法.

例:第一,美加多(Mercator)的射影.——我們總能夠作一個旋轉曲面的圖使經線及緯線都和坐標軸的平行線相應.誠然,設

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,\qquad z=f(\rho)$$

是以oz為軸的一個旋轉曲面上一點的坐標;我們有

$$ds^2=d\rho^2[1+f'^2(\rho)]+\rho^2d\omega^2=\rho^2\left[d\omega^2+\frac{1+f'^2(\rho)}{\rho^2}d\rho^2\right],$$

這又可寫爲

$$ds^2=\rho^2(dX^2+dY^2),$$

在此式中是令

$$X=\omega,\qquad Y=\int\frac{\sqrt{1+f'^2(\rho)}}{\rho}d\rho.$$

在半徑爲 R 的一個球面的場合,我們可將牠們的坐標寫爲

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\qquad y=R\sin\theta\sin\varphi,\qquad z=R\cos\theta,$$

$$ds^2=R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)=R^2\sin^2\theta\left(d\varphi^2+\frac{d\theta^2}{\sin^2\theta}\right),$$

再令

$$X=\varphi,\qquad Y=\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\left(\tan g\,\frac{\theta}{2}\right).$$

如此所得的叫作美加多的射影.牠的經線都爲 OY 的平行線所表,緯線爲平行於 OX 軸的線分所表.欲得球的全面積,只須令 φ 自 o 變至 2π, θ 自 o 變至 π; 因而 X 自 o 變至 2π, Y 自 $-\infty$ 變至 $+\infty$. 圖的形狀是一個無盡的長條,其廣爲 2π. 在球面上凡和經線相交成定角的線,或定角線 (loxo dromies), 在圖上都爲直線所表.

第二,固體的射影(Projection stéréographique)———球面的線原素的平方又可寫為

$$ds^2=4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{R^2d\theta^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}+R^2\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}d\varphi^2\right),$$

或是令

$$\rho=R\operatorname{tang}\frac{\theta}{2},\qquad \omega=\varphi,$$

得

$$ds^2=4\cos^2\frac{\theta}{2}(d\rho^2+\rho^2d\omega^2).$$

然而 $d\rho^2+\rho^2d\omega^2$ 是在極坐標 (ρ,ω) 系中平面的線原素的平方;若要得球面的同形表示,只須對於球面上一點 (θ,φ) 令平面上一點相應極坐標是 (ρ,ω). 若將圖畫出,可見 ρ 及 ω 是球面上 (θ,φ) 點在赤道平面 (plan de l'équateur) 上的固體射影,視點 (point de vue) 在球的一個極上.

第三,圓環 (tore) 的圖.———取一個圓環為一個半徑等於 R 的圓周繞一個軸旋轉而成,此軸在圓的平面內,離至圓心的距離為 a (我們假定 $a>R$). 旋轉軸取為 z 軸,圓環的中平面 (plan médian) 取為 xy 平面,曲面上一點的坐標可寫為

$$x=(a+R\cos\theta)\cos\varphi,\quad y=(a+R\cos\theta)\sin\varphi,\quad z=R\sin\theta,$$

只須令θ及φ自$-\pi$變至$+\pi$.自此公式得

$$ds^2=(a+R\cos\theta)^2\left\{d\varphi^2+\frac{R^2d\theta^2}{(a+R\cos\theta)^2}\right\};$$

要作此曲面的圖,我們可令

$$X=\varphi,$$

$$Y=e\int_0^\theta\frac{d\theta}{1+e\cos\theta}=\frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right),$$

其中$e=\frac{R}{a}<1$.如此,圓環的全面積和一個矩形面積點和點相應,此矩形的邊的度是2π及$\frac{2\pi e}{\sqrt{1-e}}$.

習　　題

1. 一個能展曲面牠是一個動平面的包封.此動平面的直交坐標方程式是

$$z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+R\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)},$$

α是一個變率,$\varphi(\alpha)$是此變率的一個任何函數,R是一個已知常數,求此曲面的曲度線

[Licence, Paris; août 1817.]

2. 設a, b, α, β都是一個變率的函數,求出必須有甚麼條件,直線$x=az+\alpha, y=bz+\beta$機能够產生一個能展曲面,牠的垂直於母線的曲度線都在些共心球面上?

[Licence: Paris; juillet 1872.]

3. 一個曲面轴的直交坐標方程式是

$$e^z=\cos x\cos y,$$

定出此曲面的曲度線.

4. 有一個橢圓曲面,其三個軸皆不相等,軸在直交坐標中爲方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

所表.軸在 xz 平面內的橢圓命爲 E. 在 E 的每一點 M 上,求:第一,橢圓面的主曲度半徑 R_1, R_2; 第二, R_1 及 R_2 間的關係式;第三, M 點在 E 上移動時,主截線的曲度心的軌迹.

[Licence: Paris; Novembre 1877.]

5. 1° 一個拋物面的直交坐標的方程式是

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,$$

求作出二次方程式,軸在拋物面的任何點上,定出其主曲度半徑.

2° 再取一個橢圓面,方程式是

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=2z-\lambda,$$

求將第一曲面在此第二曲面的交線的各點上的兩個主曲度半徑用變數z表明.

[Licence: Paris; novembre 1880.]

6. 有橢圓面$xy=az$,求在ox軸的各點上牠的主截線的曲度心的軌迹.

[Licence; Paris; juillet 1883.]

7. 有一個已知曲面S及其上一點M,求經過M點的平截線的曲度心的軌迹曲面的方程式.

8. 已知一個二次曲面及在其上M點的一個切線MT.經過MT引一個平面,取其平截線的曲度心O及此平截線的閉縮線的曲度心O'.求在割平面繞MT旋轉時O'點的軌迹.

[Licence: Clermont; juillet 1883.]

9. 一個圓周依牠的一個切線旋轉產出一個環形.求此環形的漸近曲線.

[Licence: Paris; novembre 1882.]

10. 設Ox, Oy, Oz是三個直交坐標軸,在zOx平面內有一個已知曲線C.一個曲面爲一個圓周所產:圓周常和Oz軸相遇,中心在曲線C上,其平面平行於xOy平面.

求作出此曲面的漸近曲線的微分方程式.變數是取一點的坐標z及角θ,θ是圓周的經過此點的半徑和圓周的平面在zOx平面上的迹(trace)所作的角.應用在曲線C是一個拋物線的場合,頂點在O,直線爲Ox爲拋物線的軸.

[Licence: Paris juillet 1880.]

11. 一個直線曲面牠在另一個直線曲面的一個母線Δ

的所有點上和此曲面相切,第一曲面的所有母線都和此直線Δ相遇,求定出此第一曲面的漸近曲線.

12. 在一個正螺旋曲面上求出所有曲線牠們的吻合平面包有曲面的法線.

[Licence: Paris; juillet 1876.]

13. 求方程式

$$x=(1+u)\cos v, \qquad y=(1-u)\sin v, \qquad z=u$$

所表的直線曲面的漸近曲線.

[Licence: Nancy; novembre 1900.]

14.* 有一個已知曲面S及一個直線Δ;經過Δ的平面和S相割成爲無量數的截線,頂點在Δ上而內切於S有無量數的錐面,証明這些截線及錐面和S的接觸曲線成爲共軛綱.

[Koenigs.]

15.* 一個直線上的三點畫出三個垂直平面時,此直線常垂直於一系的平行曲面.此直線和一個坐標平面的交點和由原點向此直線所引垂線的足限出一個線分,取此線分的中點的軌迹即得這些平行曲面中的一個.

[Darboux comptes rendus, t, XCII, 1881, p. 446.]

16. 在一個任何曲面上,都有一個虛曲度線是已知的;就是曲面上的點的規迹,對於這些點我們有$1+p^2+q^2=o$.

爲此,我們証明曲度線的微分方程式可寫爲以下的形狀

$$(dpdy-dqdx)(1+p^2+q^2)+(pdy-qdx)(pdp+qdq)=o.$$

[Darboux, Annales de l' Ecole; Normale; 1884.]

17.* 拉蓋爾(Laguerre)的公式.——設

$$F(x, y, z)=o$$

是一個曲面S的方程式;在(x, y, z)點畫出此曲面上一個曲線Γ時,其前三級的微分當滿足以下的三個關係式($n^\circ 24$)

$$(1)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=o,$$

$$(2)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z+\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}=o,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}d^3x+\frac{\partial F}{\partial y}d^3y+\frac{\partial F}{\partial z}d^3z$$

$$+3d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)d^2x+3d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)d^2y+3d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)d^2z$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(3)}=o,$$

其第一個關係式表明有一個切平面.至於第二關係式則和莫尼葉的定理同值.若要在幾何的觀點上解釋第三個關係式,我們可將$\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$代以法線的方向餘弦$\lambda$, μ, ν. 誠然我們有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\lambda H,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\mu H,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\nu H,$$

其中是令

$$H=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

合計着關係式(2),方程式(3)可寫爲

$$\lambda d^3x+\mu d^3y+\nu d^3z$$
$$+3[d\lambda d^2x+d\mu d^2y+d\nu d^2z]=\Phi(x,y,z,dx,dy,dz),$$

Φ是關於dx, dy, dz的一個立方形式(forme cubique).其係數中只含有x, y, z.除以ds^3,可見在曲面的一點上,算式

$$\lambda\frac{d^3x}{ds^3}+\mu\frac{d^3y}{ds^3}+\nu\frac{d^3z}{ds^3}+3\left[\frac{d\lambda}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d\mu}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d\nu}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right]=K,$$

對於曲面上在此點相切的所有曲線都得到相同的價值.這個結果也可以由微分法自第233節公式(7)得來,只要計算着D, D', D''的算式.

現在將導來式$\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^3x}{ds^3}$,…代以牠們由福爾內的公式所得的價值(n° 222),以上的算式成爲

$$-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{RT}+\frac{3}{R}\left(\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}\right),$$

θ是曲面的法線和主法線所作的角.他一方面將關係式

$$\cos\theta=\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'$$

微分之,得

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}=\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}$$

$$-\lambda\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right)-\mu\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right)-\nu\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}\right).$$

因而

$$\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}=\sin\theta\left(\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}\right).$$

將$\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}$代以這個價值,可見算式

$$K=-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\cos\theta+\frac{\sin\theta}{R}\left(\frac{2}{T}-3\frac{d\theta}{ds}\right)$$

對於曲面上所有在一點相切的曲線都得到相同的價值.

18.* 厄內伯(Enneper)的公式.——一個漸近曲線的旁曲度爲公式

$$T=\pm\sqrt{-RR'}$$

所定,R及R'是主曲度半徑.

解.若要証此,只須應用福爾內公式

$$\frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T}$$

在一個漸近曲線上,並且注意於副法線合於曲面的法線.爲運算簡便計,可取曲面上的一點爲原點,曲面在此點的切平面爲 xy 平面,漸近線的切線爲 y 軸.自公式 (51′) 也可以得到厄內伯的公式 (n° 246)

19.* 拜耳特拉迷(Beltrami)的公式.——設 ρ_0 是一個漸近曲線的曲度半徑, ρ 是曲面和切平面所成交線的切於漸近曲線的一枝的曲度半徑;我們有

$$\rho=\frac{3}{2}\rho_0.$$

解.假定曲面爲方程式

$$z=2bxy+cy^2+Ax^3+3Bx^2y+\ldots$$

所表.曲面和平面 $z=o$ 所成截線有一枝切於 x 軸,其方程式是

$$y=-\frac{Ax^2}{2b}+\ldots,$$

在原點上,我們有

$$y'=o,\qquad y''=-\frac{A}{b}.$$

他一方面,對於漸近曲線, y'' 在原點上的價值甚易得自這些曲線的微分方程式

$$(6Ax+\ldots)+(4b+\ldots)y'+(2c+\ldots)y'^2=o.$$

[Beltrami, Nouvelles annales de Mathématiques, 2ᵉ série, t. IV, p. 258; 1865.]

[註一] 這是明瞭的,我們不能夠將這個因數K一次定出使牠永遠有效,譬如令$K=\pm1$. 但是關於應用上仍以留此不定的因數爲愈,以便對於每一個特別場合能自由選取使係數A, B, C在可能時成爲簡單.

[註二] Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, 1910.

[註三] 莫尼葉及包內的定理不成爲畫在曲面上的線的特別性質.一個關係式形狀是

$$Adx+Bdy+Cdz=o$$

A, B, C是x, y, z的函數,凡能滿足如此形狀的關係式的所有曲線Γ都具有這些性質,此類的曲線有無量數,關係於一個任意函數,這是因爲我們能夠選取y爲x的函數譬如是$y=f(x)$, z即爲一個第一級微分方程式所定.經過空間一點的所有曲線Γ的切線都在一個平面P內.此平面垂直於以A, B, C爲方向率的直線Δ. 此類的曲線在一點上既有相同的切線.所以對於此類的所有曲線.這兩個算式$\dfrac{\cos\theta}{R}$, $\dfrac{1}{T}-\dfrac{d\theta}{ds}$都有相同的價值. R及T仍是習慣上的意義, θ是直線Δ和Γ的主法線所作的角.

誠然,我們可取A, B, C爲平面P的法線的方向餘弦,這是

明瞭的,公式(6)中的項

$$\frac{dAdx+dBdy+dCdz}{ds^2}$$

及公式(51)中的定準式 H 只關係 $x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

〔註四〕條件(63)中的第一個表明螺旋線的垂直軌線在兩個曲面上相應,並且線原素相等.再說定 θ 為 ω 及 ρ 的函數的方程式是能積分的,即得其他的兩個條件.

〔註五〕來拜各(Lebesgue)在他的論文上曾經証明有些非直線的曲面,也能够在牠們的諸點及一個平面的諸點間,成立一個相應法,使對於平面上一個能直(rectifiable)曲線,曲面上有一個長度相等的能直曲線相應.這個結果和本文上所成立的定理不相衝突,這是因為在我們的証明法中曾切實的假定 x, y, z 有前兩級的偏導來式都是連積函數,這是來拜各的曲面所未能實現的.

附　記 (note)

關於有定積分的微分法的公式.

曲線積分或複積分若是積分的道路或積分的場不變時,符號 $\int$ 下的微分法的典型式的公式立即可以推廣到這些積分上,只要被積分的這個函數是連續的,並且關於變率有一個連續的偏導來式.若是積分的道路或積分的場是變化的,這個推廣法倍形困難.我們假定積分號下的函數及運算時所關係的牠們的導來式在積分極限內都是連續的.

1. **曲線積分**——一個曲線弧 Γ 為公式

$$x=f(t),\qquad y=\varphi(t),\qquad z=\psi(t)$$

所表, t 的變化區域自 t_0 至 $t_1>t_0$, 若是函數 f,φ,ψ 及牠們的導來式 $f'(t),\varphi'(t),\psi'(t)$ 在此區域內都是連續的,則此曲線弧 Γ 說是規則 (regulier). 有限數的規則曲線弧首尾相接而成的曲線叫作尋常曲線;如此的一個曲線能夠有有限數的尖點(point anguleux). 就是說導來式 $f'(t),\varphi'(t),\psi'(t)$ 能夠有有限數的第一類的不連續點在 t_0 及 t_1 中間.我們只論沿尋常曲線弧上的曲線積分.

設

$$x=f(t,\alpha),\qquad y=\varphi(t,\alpha),\qquad z=\psi(t,\alpha)$$

是一系 (une famille) 的曲線 Γ 的方程式,關係於一個變率 α; 函數 f,φ,ψ 及現於運算中的所有的導來式都假定在 α 及 t 所變

化的領域內是連續的;他一方面,$t_0(\alpha)$ 及 $t_1(\alpha)$ 是 α 的兩個連個連續函數,牠們也有連續的導來式.在變率 α 變化時,曲線 Γ 上的弧 AB 變位並且以連續的狀態變化形狀,此弧的兩端 A 及 B 通常的也變易位置畫出兩個曲線 γ_0, γ_1. 此兩端的坐標 (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) 都是 α 的函數,牠們的算式是

$$x_0=f(t_0,\alpha),\qquad y_0=\varphi(t_0,\alpha),\qquad z_0=\psi(t_0,\alpha),$$

$$x_1=f(t_1,\alpha),\qquad y_1=\varphi(t_1,\alpha),\qquad z_1=\psi(t_1,\alpha).$$

設有三個連續函數 $P(x,y,z,\alpha)$, $Q(x,y,z,\alpha)$, $R(x,y,z,\alpha)$, 牠們有第一級的連續的偏導來式,有定積分

$$(1)\qquad I(\alpha)=\int_{(AB)}P(x,y,z,\alpha)dx+Q(x,y,z,\alpha)dy+R(x,y,z,\alpha)dz$$

是 α 的一個函數,我們試行計算牠的導來式.顯然可見只須對於積分

$$I_x(\alpha)=\int_{(AB)}P(x,y,z,\alpha)dx$$

實行計算;我們將這個積分變爲一個通常的有定積分

$$I_x(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1}P(f,\varphi,\psi,\alpha)\frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

對於這個積分我們能應用微分法的典型的公式 (n° 94),

如此得

$$I'_x(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial P}{\partial\alpha}+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}P\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial t}dt+P(x_1,y_1,z_1,\alpha)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_1\frac{dt_1}{d\alpha}$$

$$-P(x_0,y_0,z_0,\alpha)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0\frac{dt_0}{d\alpha};$$

對於第二積分用部分積分法,得

$$\int_{t_0}^{t_1}P\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial t}dt=\left(P\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)_{t_0}^{t_1}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dt,$$

回復到第一個記法上,得

$$I'_x(\alpha)=\int_{(AB)}\frac{\partial P}{\partial\alpha}dx+\int_{(AB)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)dx$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dy-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dz+\left(P\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\alpha}+P\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)_{t_0}^{t_1}.$$

已經積分的項有一個顯明的意義;誠然,α 的合成函數 $x_0=f(t_0,\alpha)$ 的導來式 $\dfrac{dx_0}{d\alpha}$ 等於

$$\frac{\partial f}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial \alpha}+\frac{\partial f(t_0,\alpha)}{\partial \alpha}$$

那麼已經積分的項等於差數

$$P(x_1,y_1,z_1,\alpha)\frac{dx_1}{d\alpha}-P(x_0,y_0,z_0,\alpha)\frac{dx_0}{d\alpha}=\left[P(x,y,z,\alpha)\frac{dx}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}.$$

積分

$$I_y(\alpha)=\int_{(AB)}Qdy \quad 及 \quad I_z(\alpha)=\int_{(AB)}Rdz$$

的導來式的算式也是同樣的計算法;我們也可以對於文字 x, y, z 用循環排列法 (permutation circulaire) 由 $I'_x(\alpha)$ 得到此兩個導來式.將這三個算式相加,終得 $I'(\alpha)$ 的價值如下:

$$(2)\qquad I'(\alpha)=\int_{(AB)}\frac{\partial P}{\partial \alpha}dx+\frac{\partial Q}{\partial \alpha}dy+\frac{\partial R}{\partial \alpha}dz$$

$$+\int_{(AB)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dx-\frac{\partial f}{\partial \alpha}dy\right)$$

$$+\int_{(AB)}\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dy-\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dz\right)$$

$$+\int_{(AB)}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}dz-\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dx\right)$$

$$+\left[P(x,y,z,\alpha)\frac{dx}{d\alpha}+Q(x,y,z,\alpha)\frac{dy}{d\alpha}+R(x,y,z,\alpha)\frac{dz}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}.$$

若要移至平曲線的場合,只須令 $z=\psi=o$,公式成爲

$$(3)\quad I'(\alpha)=\int_{(AB)}\frac{\partial P}{\partial\alpha}dx+\frac{\partial Q}{\partial\alpha}dy+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}dx-\frac{\partial f}{\partial\alpha}dy\right)$$

$$+\left[P(x,y,\alpha)\frac{dx}{d\alpha}+Q(x,y,\alpha)\frac{dy}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}.$$

我們借用變分法 (calcul des variations) 上一個記法將這些公式寫爲稍異的形狀.設 U 是變率 α 的一個函數,牠也能夠關係別的變數,積 $\frac{\partial U}{\partial\alpha}\partial\alpha$ 叫作 U 的變分,我們表以 δU,這就是給 α 一個增長 $\delta\alpha$ 而 U 所能關係的別的變數都保有固定價值時 U 的相應增長的主部分.如此我們有

$$\delta x=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\delta\alpha,\qquad \delta P=\frac{\partial P}{\partial\alpha}\delta\alpha,\quad \ldots\ldots$$

關於極限點 A 及 B 的坐標仍有加以區別的必要;譬如 $x_0=f(t_0,\alpha)$ 能夠看作兩個自變數 t_0 及 α 的一個函數,我們有

$$\delta x_0=\frac{\partial f(t_0,\alpha)}{\partial\alpha}\delta\alpha.$$

但是 t_0 既是 α 的一個函數,x_0 實際上是 α 的一個合成函數,我們令

$$\Delta x_0=\frac{dx_0}{d\alpha}\delta\alpha=\left[\frac{\partial f(t_0,\alpha)}{\partial t_0}\frac{dt_0}{d\alpha}+\frac{\partial f(t_0,\alpha)}{\partial\alpha}\right]\delta\alpha,$$

同樣定出 $\Delta y_0, \Delta z_0, \Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1$. 將公式(2)的兩邊乘以 $\partial\alpha$, 得變分 $\partial I = I'(\alpha)\partial\alpha$ 的算式

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad \partial I = &\int_{(AB)} \partial P dx + \partial Q dy + \partial R dz \\
&+ \int_{(AB)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\partial y dx - \partial x dy) \\
&+ \int_{(AB)} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)(\partial z dy - \partial y dz) \\
&+ \int_{(AB)} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)(\partial x dz - \partial z dx) \\
&+ \Big[P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z\Big]_A^B,
\end{aligned}
$$

在其中我們是令

$$[P\Delta x]_A^B = P(x_1, y_1, z_1, \alpha)\Delta x_1 - P(x_0, y_0, z_0, \alpha)\Delta x_0.$$

餘仿此.

公式(4)的第二邊含有三項:第一個積分由於在 α 增加 $\partial\alpha$ 時函數 P, Q, R 的變分,此一項可直接得來,只須略去積分的道路的形狀的變化.其符號 $\int$ 以外的項只關係積分道路的兩端 A 及 B 的極小變位;若要得到這一項,可在沿曲線 AB 的積分上加上沿 $A'A$ 及 BB' 上的兩個積分原素, A' 及 B' 是積分的新道路 $A'B'$ 的兩端,此新道路是和變率的價值 $\alpha+\partial\alpha$ 相應

的第二積分我們不久當再論到牠由於積分道路自身的變形得來.

公式(2)及(4)的成立只是對於一個規則曲線弧而言,但是這些公式甚易推廣到積分道路具有有限的尖點的場合上.譬如弧 AB 由於兩個規則弧 AC, CB 而成,牠們在一點 C 相接,此點的坐標是 (x_2, y_2, z_2), 我們可應用公式 (4) 在每一個弧 AC, CB 上;將兩個公式相加, $P(x_2,y_2,z_2,\alpha)\Delta x_2+\ldots$ 諸項消滅,所以公式 (4) 仍能應用在全弧 AB 上.特別的,若是積分是沿一個合口閉線取的,則不論組成此閉線的有若干個規則的弧,不含符號 $\int$ 的項皆消滅.試取沿兩點 A, B 間一個任何弧 Γ 上的曲線積分

$$\int P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz$$

考之.在此曲線以連續的狀態變化形狀而不變兩極端時,若要這個積分不變,由上述的公式甚易得到必要且充足的條件 (n° 147).

我們復論公式(4)的第二行的積分,牠是由於閉線的變形而來.令

$$L=\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y},\quad M=\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z},\quad N=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x},$$

設 α', β', γ' 是 Γ 的切線的正向和坐標軸的正向所作的角;以上的積分非他,只是 $\int_{(AB)} H ds$, 其中 H 等於定準式

$$
H = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ L & M & N \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}
$$

這個定準式H除符號外軸等於在以下的三個向量上所建的平行六面體的體積:第一,向量mm',原點在Γ上的$m(x,y,z)$點,終點在極近的變化曲線Γ'上的$m'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$點;第二,向量$mT$,原點在$m$,其三個分量(composante)是$L,M,N$[旋風向量(vecteur tourbillon)];第三,向量mt,是在切線的正方向上取一個單位的長度得來.設$V=\sqrt{L^2+M^2+N^2}$是旋風向量的長度,δn是m'點至切線mt的距離,θ是旋風向量和mt及mm'所定平面所作的角(自o至π).除符號外,我們有

$$H = V\delta n \sin\theta,$$

這個公式是一般的,只要適宜的給δn一個符號:在三面角$mtm'T$的位置法和三面角$Oxyz$的位置法相同時取+號,相反時取−號.

如此,公式(4)可以寫為簡式

$$
(5) \qquad \delta I = \int_{(AB)} \delta P dx + \delta Q dy + \delta R dz + V\delta n \sin\theta ds
$$

$$
+ [P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z]_A^B.
$$

在平曲線的特別場合,第二積分可寫為

$$\int_{(AB)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\delta y dx-\delta x dy)$$

$$\int_{(AB)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\cos\alpha'\delta y-\cos\beta'\delta x)ds,$$

α' 及 β' 是切線的正向和坐標軸所作的角；$\delta n=\cos\alpha'\delta y-\cos\beta'\delta x$ 表向量 mm' 在 Γ 在 M 點的法線上的射影.此法線的方向是和切線的正方向作成 $+\frac{\pi}{2}$ 角(自 ox 向 oy),則定 δI 的公式成爲

$$(6)\quad \delta I=\int_{(AB)}\delta P dx+\delta Q dy+\int_{(AB)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta n ds$$
$$+\left[P\Delta x+Q\Delta y\right]_A^B.$$

在這些最後公式中，δI 得自積分道路的變形部分只關係於 Γ 上每一點 m 的垂直於切線的極小變位.這個結果是可以預期的,因爲凡一個極小變位 mm' 總可以分爲一個切於 Γ 的極小變位及一個垂直於 Γ 的一個極小變位. δI 得自切變位的部分等於零,這是因爲這個變形令曲線 Γ 變爲牠自身,積分的每一個原素爲一個極近原素所替代.

這是明瞭的,在定積分道路的公式中有一個任意原素加入,就是補助變數 t 的選擇.我們能將 t 代以另一變數 τ，他及 t 爲一個關係式 $t=\pi(\tau,\alpha)$ 所聯合,在 τ 自 τ_0 增至 τ_1 時，t 自 t_0 增至 t_1. 由於這個變數更換法，δx, δy, δz 的算式都受有變化,至於 $I(\alpha)$ 連帶着 δI 都不關係變數 t 的選擇.他一方面,δI 的第一項

及第三項本身上都不關係這個選擇;那麼,δI 的惟一的關係 $\delta x, \delta y, \delta z$ 的項也是如此.由這個注意,我們能够任意選取道路 AB 上一點 $m(x, y, z)$ 和極近曲線 Γ' 上一點 $m'(x+\delta x\ y+\delta y\ z+\delta z)$ 的相應法,自然仍須要服從連續的條件.特別的對於 Γ 上一點 m,我們可令相應點 m' 在經過 m 而垂直於 Γ 的平面上,或是選取 t 使極限價值 t_0 及 t_1 不關係 α;在這個場合,這兩個弧 AB 及 $A'B'$ 以惟一的 (univoque) 狀態點和點相應.

在實行上並無須要得到 x, y, z 的陽算式

$$x=f(t, \alpha), \qquad y=\varphi(t, \alpha), \qquad z=\psi(t, \alpha).$$

這些陽算式在推理上是假定已知的.已知和 α 及 $\alpha+\delta\alpha$ 相應的兩個極近曲線 Γ, Γ', 只須取 $\delta x, \delta y, \delta z$ 為 $\delta\alpha$ 的第一級無限小,使對於 AB 弧上一點 (x, y, z) 有 Γ' 上一點 $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ 相應.

例.—第一,假定曲線 Γ 是一個直線分 AB, 連合 $A(o, \alpha)$ 點及 $B(\alpha, o)$ 點.我們可令

$$x=t, \qquad y=\alpha-t, \qquad t_0=o, \qquad t_1=\alpha,$$

如此,得

$$x_0=o, \quad y_0=\alpha, \quad x_1=\alpha, \quad y_1=o, \quad \delta x=o, \quad \delta y=\delta\alpha,$$
$$\Delta x_0=\Delta y_1=o, \quad \Delta y_0=\delta\alpha, \quad \Delta x_1=\delta\alpha,$$

若是

$$I=\int_{(AB)} P(x, y, \alpha)dx+Q(x, y, \alpha)dy$$

則

$$\delta I=\int_{(AB)} \delta P dx+\delta Q dy+\int_{(AB)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta\alpha dx$$
$$+[P(\alpha, o, \alpha)-Q(o, \alpha, \alpha)]\delta\alpha.$$

再注意於沿 AB 上 $dy+dx=o$，我們有

$$\delta I=\int_o^\alpha(\delta P-\delta Q)dx+\int_o^\alpha\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta\alpha dx$$
$$+[P(\alpha,o,\alpha)-Q(o,\alpha,\alpha)]\delta\alpha.$$

我們本來也可以令

$$x=\alpha t,\qquad y=\alpha(1-t),\qquad t_0=o,\qquad t_1=1,$$

所得結果相同.

第二,若是積分道路一部分是不變的,第二積分得自此部分的部分等於零,這是因爲相應的乘直變位 δn 等於零的緣故.譬如我們取一個合口圈線 $ABMA$，由於 ox 軸上線分 AB 及以 AB 爲直徑的半圓周所成,此直線由 $A(-r,o)$ 點至 $B(r,o)$ 點,此半圓周在 ox 軸上面,圈線是向正方向畫出的.設 $I(r)$ 是沿此圈線所取的積分

$$\int P(x,y)dx+Q(x,y)dy;$$

在 AB 上,我們有 $\delta n=o$；在 BMA 上,我們有 $\delta n=-\delta r$；所以

$$\delta I=-\delta r\int_{BMA}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)ds=-\delta r\int_o^\pi\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)rd\varphi.$$

2. 二重積分.——設

$$I(\alpha)=\iint_{(D)}F(x,y,\alpha)\,dxdy$$

是一個取在領域D內的二重積分,此領域爲一個和α同時變化的合口曲線Γ所限,此曲線由有限的規則弧所成,用$U(x,y,\alpha)$表一個函數牠關於x的導來式是F.若領域D爲一個單一的合口曲線Γ所限,此曲線不能和Ox軸的一個平行線相遇於兩點以上,這是我們最初所要假定的.我們可取在D內的一個單值且連續函數作爲$U(x,y,\alpha)$.爲此只須取微分方程式$\frac{\partial U}{\partial x}=F$的一個如此的積分:牠在領域$D$內一個輔助曲線的所有點上成爲零,此曲線和任一直線$y=C$只相遇於一點,依格林公式我們又有

$$I(\alpha)=\int_{\Gamma}U(x,y,\alpha)dy,$$

此積分是向正方向取的.曲線旣是合口的,依普通公式(6),變分δI的算式是

$$\delta I=\int_{\Gamma}\delta U dy-\int_{\Gamma}\frac{\partial U}{\partial x}(\delta y dx-\delta x dy);$$

δx及δy表x及y自Γ上一點(x,y)至新圍線一個隣點時的變化.再應用格林公式,第一積分可寫爲

$$\int_{\Gamma}\delta U dy=\delta\alpha\int_{\Gamma}\frac{\partial U}{\partial\alpha}dy$$

$$=\delta\alpha\iint_{(D)}\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x}dxdy=\delta\alpha\iint_{(D)}\frac{\partial F}{\partial\alpha}dxdy,$$

結果得

(7) $$\delta I=\iint_{(D)}\delta F dxdy+\int_{\Gamma}F(\delta xdy-\delta ydx).$$

由於一個常用的推理,這個公式能廣推到閉線 Γ 能為 Ox 的一個平行線遇於兩點以上的場合,以至於推廣到領域 D 為許多合口曲線所限的場合;在最後的積分中全閉線 Γ 當假定依正方向澂用. δI 由兩項所成,就是得自 F 的變化的兩重積分及得自閉線的變化的單積分.設 α'' 及 β'' 是法線向外的方向和坐標軸所作的角;垂直變分 δn 既是以這個方向為正方向,我們有

$$\delta x=\delta n\cos\alpha'',\qquad \delta y=\delta n\cos\beta'',$$

他一方面 (n° 92),

$$dx=-ds\cos\beta'',\qquad dy=ds\cos\alpha''$$

所以

$$\delta xdy-\delta ydx=ds\delta n,$$

曲線積分 $\int_{\Gamma}F(\delta xdy-\delta ydx)$ 轴表 I 由閉線變化所得的變分等於 $\int_{\Gamma}F\delta n\, ds.$

這個結果甚易說明.譬如 $\delta n>o$; 自 Γ 所限領域到 Γ' 所限領域時, I 的增長等於取在 Γ 及 Γ' 所限領域內的二重積分.但是這個領域既有一個度 δn 是無限小,此二重積分改縮為一個沿 Γ 的一個曲線積分;此曲線積分的原素正是 $F\delta nds$, 這是因為 δnds 表以下諸線所限無限小領域的面積: Γ 的一個弧 ds, 此弧兩端的法線及 Γ' 上的相應弧.

3. 曲面積分.——設

$$I(\alpha)=\iint_S A(x,y,z,\alpha)\,dy\,dz+B(x,y,z,\alpha)\,dz\,dx+C(x,y,z,\alpha)\,dx\,dy$$

是取在一個規則曲面S上的曲面積分,在變率α變化時此曲面及其周線Γ都連續變化.函數A,B,C及牠們的偏導來式現於算式內的都假定是連續函數.在S上取曲面積分的一面作爲S的正面;對於這一面,周線Γ有一個進行的方向相應,(n°132)我們命此方向爲正方向.假定曲面S爲公式

$$x=f(u,v,\alpha),\qquad y=\varphi(u,v,\alpha),\qquad z=\psi(u,v,\alpha)$$

所定,這些公式令曲面S和平面(u,v)中一個合口周線L所限領域R點和點相應.周線L也是以連續的狀態和α同時變化的.我們又假定坐標軸ou,ov的位置法使L上的正方向和Γ上的正方向相應(n° 132),因爲補助函數u,v當消滅於最後結果中,所以這個假定總是可能的.

曲面積分$I(\alpha)$等於在平面(u,v)中領域R內的二重積分(n° 131)

$$I(\alpha)=\iint_{(R)}\Big[A(f,\varphi,\psi,\alpha)\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}+B(f,\varphi,\psi,\alpha)\frac{D(\psi,f)}{D(u,v)}$$

$$+C(f,\varphi,\psi,\alpha)\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\Big]du\,dv.$$

若要得到$I'(\alpha)$,只須將公式(7)除以$\delta\alpha$,將x及y代以u及v,然後應用這個公式在積分$I(\alpha)$上.這個導來式由兩部分所成:一個取在R內的二重積分,一個沿L上的曲線積分,我們

先從事於這個二重積分:這個二重積分關於C的一項是

$$\iint_{(R)}\left\{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}+C\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]\right\}dudv,$$

其他兩項由關於(A,B,C)及(f,φ,ψ)的一個循環排列得來.將關於$\frac{\partial A}{\partial \alpha},\frac{\partial B}{\partial \alpha},\frac{\partial C}{\partial \alpha}$各項集合,先得二重積分

$$\iint_{(R)}\left[\frac{\partial A}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}+\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{D(\psi,f)}{D(u,v)}+\frac{\partial C}{\partial \alpha}\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]dudv,$$

地等於曲面積分

$$(I)\qquad \iint_{(S)}\frac{\partial A}{\partial \alpha}dydz+\frac{\partial B}{\partial \alpha}dzdx+\frac{\partial C}{\partial \alpha}dxdy.$$

二重積分

$$\iint_{(R)}C\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]dudv$$

能夠變化如下.一個容易的運算顯明

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,v)}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,u)}\right];$$

格林公式給與我們(n° 116)

$$\iint_{(R)}C\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,v)}\right]dudv=\int_{(L)}C\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,v)}dv-\iint_{(R)}\frac{\partial C}{\partial u}\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,v)}dudv,$$

$$\iint_{(R)} C\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,u)}\right]du\,dv = -\int_{(L)} C\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,u)}du$$

$$-\iint_{(R)} \frac{\partial C}{\partial v}\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,u)}du\,dv.$$

經過這個變形法以後,二重積分中由 C 所得的項所餘的是

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+\cdots$$

其未寫明的兩項當由關於 u, v, α 的一個循環排列法得來. $\frac{\partial C}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial C}{\partial y}$ 的係數皆爲零,至於 $\frac{\partial C}{\partial z}$ 的係數是

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{D(\psi,f)}{D(u,v)}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}$$

依對稱的理由,符號 $\iint$ 下的 $\frac{\partial A}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial B}{\partial y}$ 的係數都和此相同,至於 $\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial B}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial z}$ 的係數則皆等於零.所以在 $I'(\alpha)$ 中有一個新二重積分

$$\iint_{(R)}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{D(\psi,f)}{D(u,v)}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]du\,dv,$$

牠等於曲面積分

$$(II)\qquad \iint_{(S)}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}dy\,dz+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dz\,dx+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dx\,dy\right).$$

此外又有由以上所用的部分積分法得來的單積分,其含C的項是

$$\int_{(L)} C\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,v)}dv+\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,u)}du\right].$$

最後我們有一個單積分由於圍線Γ及L的變化得來;設

$$u_0=\pi(t,\alpha),\qquad v_0=\chi(t,\alpha)$$

是L上一點的坐標爲變率α及一個輔助變數t所表明,此後者定出此點在圍線的位置.在$\Gamma(\alpha)$中由圍線變化所得來的單積分如以上所見[公式(7)]當是

$$\int_{(L)}\left[A\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}+B\frac{D(\psi,f)}{D(u,v)}+C\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]\left(\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}dv-\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}du\right);$$

將這兩個單積分相加,可見符號$\int$下C的係數是

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,v)}dv+\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,u)}du+\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}dv-\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}du\right);$$

其中u及v當代以u_0及v_0.設(x_0,y_0,z_0)是Γ上和L上(u_0,v_0)點相應的點的坐標;x_0,y_0,z_0都是α的合成函數

$$x_0=f(u_0,v_0,\alpha),\qquad y_0=\varphi(u_0,v_0,\alpha),\qquad z_0=\psi(u_0,v_0,\alpha),$$

我們有

$$\frac{dx_0}{d\alpha}=\frac{\partial f}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\alpha},\qquad \frac{dy_0}{d\alpha}=\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\cdots.$$

C 的係數可寫爲

$$\frac{dx_0}{d\alpha}dy-\frac{dy_0}{d\alpha}dx.$$

依對稱的理由,可見在 $I'(\alpha)$ 的算式中沿 L 上的曲線積分能爲沿 Γ 上的一個曲線積分所替代:

$$\text{(III)}\qquad \int_{(\Gamma)} A\left(\frac{dy_0}{d\alpha}dz-\frac{dz_0}{d\alpha}dy\right)+B\left(\frac{dz_0}{d\alpha}dx-\frac{dx_0}{d\alpha}dz\right)$$
$$+C\left(\frac{dx_0}{d\alpha}dy-\frac{dy_0}{d\alpha}dx\right).$$

將三個積分 (I), (II), (III) 相加,終得

$$\text{(8)}\qquad I'(\alpha)=\iint_{(S)}\frac{\partial A}{\partial\alpha}dydz+\frac{\partial B}{\partial\alpha}dzdx+\frac{\partial C}{\partial\alpha}dxdy$$
$$+\iint_{(S)}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}dydz+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}dzdx+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}dxdy\right)$$
$$+\int_{(\Gamma)}A\left(\frac{dy_0}{d\alpha}dz-\frac{dz_0}{d\alpha}dy\right)+B\left(\frac{dz_0}{d\alpha}dx-\frac{dx_0}{d\alpha}dz\right)$$
$$+C\left(\frac{dx_0}{d\alpha}dy-\frac{dy_0}{d\alpha}dx\right).$$

兩邊各乘以 $\delta\alpha$,得 δI 的算式

$$\text{(9)}\quad \delta I=\iint_{(S)}\delta A dydz+\delta B dzdx+\delta C dxdy$$

$$+\iint_{(S)}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)(\delta x dy dz+\delta y dz dx+\delta z dx dy)$$

$$+\int_{(\Gamma)} A(\Delta y_0 dz-\Delta z_0 dy)+B(\Delta z_0 dx-\Delta x_0 dz)$$

$$+C(\Delta x_0 dy-\Delta y_0 dx),$$

其中

$$\delta A=\frac{\partial A}{\partial \alpha}\delta\alpha,\quad \delta x=\frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha,\quad \Delta x_0=\left(\frac{\partial f}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha,\ldots$$

可見 δI 由三項所成,第一項得自函數 A, B, C 關於 α 的變分,第二項得自曲面 S 的變形,第三項得自圍線 Γ 的變形.設 λ, μ, ν 是 S 的法線的正向和坐標軸所作的角, $d\sigma$ 是面積的原素;第二積分可寫為

$$(10)\qquad \iint_{(S)}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)(\cos\lambda\,\delta x+\cos\mu\,\delta y+\cos\nu\,\delta z)d\sigma$$

$$=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\delta n\, d\sigma.$$

δn 是一個向量在法線的正方向上的射影,此向量是連合 S 上 (x, y, z) 點及極近曲面 S' 上 $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ 點的向量,就是在 S 變形時 S 上一點的極小垂直變位.如以上所見,可見第二積分只關係於這個垂直變位;我們可取法線在 S 及 S' 間的無限小的長度看作 δn,這就等於在 S 及 S' 間成立某一個相應法.

至於單積分可仍和公式(4)的相似積分同樣解釋.設有一

個向量原點在(x_0, y_0, z_0),分量是A, B, C,命軸的長度為V;Γ的切線及Γ上(x_0, y_0, z_0)點的極小變位$\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$定出一個平面原素,命此向量和此平面原素所作的角為$\theta$;命$(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y_0, z_0+\Delta z_0)$點至$\Gamma$在$(x_0, y_0, z_0)$點的切線的距離為$\delta' n$,冠以一個適宜的符號.此積分可寫為

$$(11)\qquad \int_{(\Gamma)} V\sin\theta\,\delta'_n ds.$$

和一個曲線積分的場合同,對於Γ上一點我們能依一個任意定律令變形閉線Γ'上一個極近鄰點相應.特別的我們假定對於Γ上一點$m(x_0, y_0, z_0)$,令相應點$m'(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y_0, z_0+\Delta z_0)$在經過$m$點而垂直於$\Gamma$的平面內;那麼,我們有

$$\Delta x_0=\delta'_n\cos\lambda'', \quad \Delta y_0=\delta'_n\cos\mu'', \quad \Delta z_0=\delta'_n\cos\nu'',$$

$\delta' n$是距離mm', λ'', μ'', ν''是方向mm'和坐標軸所作的角.同樣設λ', μ', ν'是Γ的切線的正向和坐標軸所作的角;積分(11)仍等於

$$\int[A(\cos\mu''\cos\nu'-\cos\nu''\cos\mu')$$
$$+B(\cos\nu''\cos\lambda'-\cos\lambda''\cos\nu')+C\ldots]\delta'_n ds,$$

這又可寫為

$$\int_{\Gamma}(A\cos\lambda_1+B\cos\mu_1+C\cos\nu_1)\delta'_n ds.$$

在α增加一個$\delta\alpha$時,閉線Γ畫出一個帶形曲面S'', λ_1, μ_1, ν_1是

S''上的法線和坐標軸所作的角.但是$\delta'_n ds$表弧ds在α增加$\delta\alpha$時所畫面積原素,此原素可以看作一個矩形.所以以上的單積分表二重積分

$$\iint_{S''} Adydz+Bdzdx+Cdxdy$$

的價值.此二重積分取在一個極狹帶形曲面S''上.至於取積分的那一面是由以前的說明所定.

所得結果甚易用格林公式解釋之.假定自S到S'是令S上每一點依法線的正方向受一個極小變位δn.那麼,此二曲面S,S'及極狹的帶形曲面S''包圍一個領域D.對於S及Γ的變形,I的增長等於在S及S'的外面所取曲面積分的和.依格林公式此和等於取在領域D的三重積分

$$\iiint_{(D)}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dxdydz,$$

增加取在帶形S''的內面的曲面積分

$$\iint_{(S'')} Adydz+Bdzdx+Cdxdy.$$

領域D既有一個無限小的度δn,取在此領域的三重積分縮減為取在S上的二重積分,其原素是

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\delta n d\sigma,$$

這是因為$\delta n d\sigma$是一個正柱形的體積,此柱形在S及S'中間,其

底是一個面積原素$d\sigma$.同樣S''旣有一個度是無限小,取在此曲面的二重積分縮減爲取在Γ上的曲線積分,其原素是

$$(A\cos\lambda_1+B\cos\mu_1+C\cos\nu_1)\delta' n ds$$

這是因爲$\delta' n ds$是一個曲面原素的面積,這個面積原素在圍線Γ,Γ'及Γ的一個弧的兩端的極近兩法線之間.

和$n^\circ 1$相同,公式(9)可以推廣到有限數的規則曲面的小片所成的曲面上;若曲面是合口的,則曲線積分消滅.

同樣,對於一個曲線積分的變分所得結果可以附在斯多克(Stokes)公式上.

4.　三重積分.——最後,我們論三重積分

$$(12)\qquad I(\alpha)=\iiint_{(D)}F(x,y,z,\alpha)dxdydz,$$

取在一個合口曲面S所限領域D內,S是和變率α同時變化的.我們先假定Oz軸的一個平行線不能過此曲面於兩點以上.如此,有一個函數$U(x,y,z,\alpha)$存在,牠在領域D內是連續的,牠能滿足關係式(參觀$n^\circ 2$)

$$\frac{\partial U}{\partial z}=F(x,y,z,\alpha)$$

我們又得

$$(13)\qquad I(\alpha)=\iint_{(S)}U(x,y,z,\alpha)dxdy,$$

此積分是取在S外面的.應用普通公式(8)在此積分上,因爲此

曲面是合口的,得

$$I'(\alpha)=\iint_{(S)}\frac{\partial U}{\partial\alpha}dxdy$$

$$+\iint_{(S)}\frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}dydz+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}dzdx+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}dxdy\right),$$

乘以$\delta\alpha$,並且計算着U及F的關係,得

$$\delta I=\iiint_{(D)}\delta F dxdydz$$

$$+\iint_{(S)}F(x,y,z,\alpha)(\delta xdydz+\delta ydzdx+\delta zdxdy),$$

$\delta x,\delta y,\delta z$表曲面$S$上一點$(x,y,z)$的坐標的變分,曲面積分是在$S$外面取的.和以前相同($n^\circ$ 2),此公式可以推廣到任何形狀的曲面上.在δI中的二重積分又可寫為

$$\iint_{(S)}F(x,y,z,\alpha)\delta n d\sigma$$

$d\sigma$是S的面積原素,δn是極小的垂直變位.此變位沿向外的法線上計算.

但是$\delta n d\sigma$,除符號外,他是以$d\sigma$為底δn為高的一個極小正柱形的體積,然則二重積分表取在兩極近曲面S及S'所限領域內的三重積分$\iiint F dxdydz$的價值,此積分的每一個原素都帶有一個適宜的符號.

勘　誤　表

頁　數	行　數	誤	正
6	18	$dy=-$	$dy=$
	21	dx	$d\alpha$
7	6	$\mathrm{in}\alpha$	$\sin\alpha$
9	1	$\rho\frac{d\rho}{ds}$是,s	$\rho\frac{d\rho}{ds}$, s 是
	7	的法線	的法線上
18	17	綠	線
19	14	方程式關於	方程式是能相容的;倒轉來,若不論 α 如何,此四方程式關於
26	20	C' 有	C' 和 C 在預定的一點上有
32	4	(F')	(F'')
35	12	y	, y
36	1	Φ'	Φ''
42	13	$-o$	$=o$
46	1	不或	不成

頁數	行數	誤	正
	2	平面 I' 上	平面 P 上
50	3		(15)
	4	這些函數	這些公式
	15	半經	半徑
53	15	$\psi'(s)$	$\psi^2(s)$
54	15	$R\gamma$	$R\gamma'$
55	13	隣	隣點
56	16	平行於吻合平面	平行於吻合平面的平面
57	16	弧 MM	弧 MM'
62	1	$(\varepsilon\pm=1)$	$(\varepsilon=\pm1)$
66	13	山	由
68	2	及	反
69	11	M 的	M 點的切線的
	14	說	設

頁數	行數	誤	正
70	10	即γ	及γ
71	18	206	226
74	9	閼	關
	18	207	227
78	9	若是	若R是
81	18	xy	xz
83	10	$a'q'-b'p''$	$a'q'-b'p'$
86	19	$x-az+p$	$x-az-p$
88	8		(69)
89	11	(79)	(70)
90	12	徑線	經線
92	17	必須要	依方程式(76)必須要也只須要
113	22	R的	R爲
116	6	徑線	經線

頁數	行數	誤	正
126	17	牠的所有位置在牠和 Γ'	在牠所有位置上牠和 Γ'
134	11	曲線 C	曲線 C'
135	5	表主曲度	表一個主曲度
138	16	交成定角	交成定角 (n° 225)
142			在此一節中凡量地線的曲度都改爲量地線的旁曲度
145	6	軸	平面
146	6	$E(x, z)$	$F(x, z)$
149	11	面的曲度	面的全曲度
157	8	$d\zeta = dl$	$d\zeta + dl$
158	18	區域 R	區域 π
160	6	$\overline{2}$	$\frac{1}{2}$
	9	上兩	在兩
	12	的的	的
173	3	$\frac{\theta}{}$	$\frac{\theta}{2}$

頁　數	行　數	誤	正
174	7	$1-e$	$1-e^2$
182	19	$\frac{1}{T}=$	$\frac{1}{T}-$
190	16	圖	圓

本院出版部最近出版圖書價目

中國地名大辭典
十六開本洋裝一巨冊 每部定價國幣十五元
劉鈞仁著

北平各圖書館
西文書聯合目錄
分裝四巨冊 全布面定價洋十五元 半布面定價洋十二元
國立北平研究院 國立北平圖書館 合編

大豆
訂正本再版 每冊定價洋二角
李石曾著

北平附近地圖
五彩精印已出七幅 每幅定價洋一元
普意雅製

鑿井工程
洋裝十六開本每冊定價洋二元
李吟秋著

總發行所國立北平研究院出版部

中華民國二十二年十二月出版

解析數學講義 第二冊

定價國幣貳元伍角
郵費加一

原著者 法國古爾薩

譯者 王尚濟

發行者 國立北平研究院出版部

總發行所 國立北平研究院出版部

[北平大北印書局印]