

Singularitätentheorie

Vorlesung 10

Die lokale Fundamentalgruppe von Monoidringen

In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass im Falle der ADE-Singularitäten die operierende Gruppe als lokale Fundamentalgruppe des Invariantenringens, also als Fundamentalgruppe des punktierten Quotientenraumes wiederkehrt. Die A-Singularitäten sind Monoidringe der Form

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^n),$$

die operierende Gruppe ist die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ und dies ist auch die lokale Fundamentalgruppe. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns generell mit der lokalen Fundamentalgruppe von Monoidringen, wobei wir diese (vergleiche Lemma 8.2 und Aufgabe 8.8) als Invariantenringe zu einer kommutativen Gruppe und als Ringe der neutralen Stufe einer Graduierung auf einem Polynomring auffassen.

Die Grundidee ist folgende: Wenn M ein Monoid ist und

$$\gamma: M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Monoidhomomorphismus, so induziert dies nach Korollar 6.8 einen \mathbb{C} -Algebrahomomorphismus

$$\mathbb{C}[M] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Z}] \cong \mathbb{C}[T, T^{-1}]$$

und damit eine Spektrumsabbildung

$$\mathrm{Spek}(\mathbb{C}[T, T^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spek}(\mathbb{C}[M]),$$

also einen Morphismus der punktierten Geraden in das Spektrum des Monoidringes. In der natürlichen Topologie liegt somit eine stetige Abbildung

$$\mathbb{C}^\times \cong (\mathrm{Spek}(\mathbb{C}[T, T^{-1}]))_{\mathbb{C}} \longrightarrow Y_{\mathbb{C}} = (\mathrm{Spek}(\mathbb{C}[M]))_{\mathbb{C}}$$

vor. Durch Einschränken dieser Abbildung auf den Einheitskreis $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ erhält man eine stetige Abbildung des Kreises nach Y (bzw. in eine gewisse offene Teilmenge $U \subseteq Y$) und damit einen geschlossenen Weg. Es wird sich herausstellen, dass diese Wege, unter bestimmten Voraussetzungen, zur Berechnung der Fundamentalgruppe entscheidend sind.

Zur weiteren Durchführung dieser Idee sei das Monoid als

$$M = \ker \delta \cap \mathbb{N}^r$$

zu einem surjektiven Gruppenhomomorphismus (einer Graduierung)

$$\delta: \mathbb{Z}^r \longrightarrow D$$

gegeben. Dann ist $\mathbb{C}[M] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ der Ring der neutralen Stufe in dieser Graduierung und nach Lemma 8.2 der Invariantenring zur zugehörigen Operation der Charaktergruppe D^\vee auf $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^r$. Die zugehörige Spektrumsabbildung

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^r \longrightarrow \text{Spek}(\mathbb{C}[M])$$

induziert, wenn man sie auf geeignete offene Teilmengen einschränkt, in der natürlichen Topologie eine Überlagerung, mit deren Hilfe man in vielen Fällen (aber nicht ohne weitere Voraussetzungen) die lokale Fundamentalgruppe von $\text{Spek}(\mathbb{C}[M])_{\mathbb{C}}$ berechnen kann. Eine wichtige Voraussetzung ist, dass D endlich ist. Die Formulierung im folgenden Satz ist ziemlich aufwändig, vereinfacht sich aber wesentlich, wenn man an $r = 2$ und $T = \{(0, 0)\}$ denkt.

SATZ 10.1. *Es sei D eine kommutative endliche Gruppe und $\delta: \mathbb{Z}^r \rightarrow D$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $r \geq 2$. Diesen Gruppenhomomorphismus fassen wir als D -Graduierung auf dem Polynomring $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ und als Operation der Charaktergruppe $G = D^\vee$ auf dem \mathbb{C}^r auf. Es sei Γ der Kern von δ , $M = \Gamma \cap \mathbb{N}^r$ das zugehörige Monoid und*

$$\mathbb{C}[M] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$$

die zugehörige Inklusion des Monoidringes. Es sei

$$q: \mathbb{C}^r \longrightarrow Y = \text{Spek}(\mathbb{C}[M])_{\mathbb{C}}$$

die zugehörige Quotientenabbildung. Es sei eine Zariski-abgeschlossene G -invariante Teilmenge $T \subset \mathbb{C}^r$ derart gegeben, dass T ganz in der Vereinigung der Achsenhyperebenen liegt, dass T mindestens die Kodimension 2 besitzt und dass die induzierte Operation von G auf $\mathbb{C}^r \setminus T$ fixpunktfrei sei. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Die Fundamentalgruppe von

$$Y \setminus q(T) = (\mathbb{C}^r \setminus T) / G$$

ist G .

- (2) Es sei $m \in \mathbb{N}_+$ derart, dass¹ $m\mathbb{Z}^r \subseteq \Gamma$ ist. Die Zuordnung

$$F: \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{C}^\times), \gamma \longmapsto F(\gamma) = \left(e_j \mapsto e^{\frac{2\pi i \gamma(m e_j)}{m}} \right),$$

induziert einen Gruppenisomorphismus

$$\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) / \text{bild}(\text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})) \longrightarrow G.$$

- (3) Die zu $\gamma \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$ gehörende Abbildung

$$\gamma^*: \mathbb{C}^\times \longrightarrow (\mathbb{C}^\times)^r \subseteq Y \setminus q(T), t \longmapsto (t^{\gamma(u_1)}, \dots, t^{\gamma(u_r)}),$$

(u_j sei eine Basis von $\Gamma \cong \mathbb{Z}^r$) ergibt durch Einschränkung auf $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ einen stetigen geschlossenen Weg

$$[0, 2\pi] \longrightarrow Y \setminus q(T).$$

¹Ein solches m gibt es stets.

- (4) Die Liftung des Weges aus (3) nach $\mathbb{C}^r \setminus T$ mit dem Anfangspunkt $(1, \dots, 1)$ ist durch

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^r \setminus T, s \longmapsto \left(e^{\frac{is\gamma(me_1)}{m}}, \dots, e^{\frac{is\gamma(me_r)}{m}} \right),$$

gegeben. Der Weg $\gamma^*|_{S^1}$ repräsentiert das nach (2) zu γ gehörende Element in der Fundamentalgruppe G .

Beweis. (1) folgt aus Satz 9.6, da $\mathbb{C}^r \setminus T$ wegen der Bedingung an die Kodimension² einfach zusammenhängend und die Operation darauf nach Voraussetzung fixpunktfrei ist. (2). Die Abbildung F ist wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ein Gruppenhomomorphismus. Die Abbildung $F(\gamma)$ ist auf der Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}^r$ trivial. Für $u \in \Gamma$ ist ja $\gamma(mu) = m\gamma(u)$ und somit ist

$$e^{\frac{2\pi i\gamma(mu)}{m}} = e^{\frac{2\pi im\gamma(u)}{m}} = e^{2\pi i\gamma(u)} = 1.$$

Daher ist $F(\gamma)$ in natürlicher Weise ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}^r / \Gamma \cong D \longrightarrow \mathbb{C}^\times,$$

also ein Charakter auf D . Zur Bestimmung des Kerns von F sei zunächst γ die Einschränkung eines Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\gamma}: \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z}$$

auf $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}^r$. Doch dann ist natürlich $\gamma(me_j) = m\tilde{\gamma}(e_j)$ für die Basis e_j von \mathbb{Z}^r und somit ist der zugehörige Charakter trivial. Wenn umgekehrt der zugehörige Charakter trivial ist, so muss $\frac{\gamma(me_j)}{m} \in \mathbb{Z}$ für jedes e_j gelten. Doch dann ist durch

$$\tilde{\gamma}(e_j) := \frac{\gamma(me_j)}{m}$$

eine Fortsetzung von γ nach \mathbb{Z}^r gegeben. Es liegt also ein injektiver Gruppenhomomorphismus

$$\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) / \text{bild}(\text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})) \longrightarrow G$$

vor. Die Surjektivität folgt aus Aufgabe 10.5. (3). Der Monoidhomomorphismus

$$M \hookrightarrow \Gamma \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}$$

führt zu einem \mathbb{C} -Algebrahomomorphismus

$$\mathbb{C}[M] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Z}] \cong \mathbb{C}[W, W^{-1}]$$

²Dies beruht auf dem Satz, dass bei einer reellen Mannigfaltigkeit M und einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ der reellen Kodimension ≥ 3 die natürliche Abbildung $\pi_1(M \setminus N) \rightarrow \pi_1(M)$ ein Isomorphismus ist. In unserer Situation ist die reelle Kodimension zumindest 4, allerdings ist T nicht unbedingt eine glatte Untervarietät. Man kann aber mit einer Stratifizierung von T durch glatte Untervarietäten arbeiten und so das Ergebnis erhalten.

und damit zu einem Morphismus der zugehörigen Spektren, der \mathbb{C} -Spektren, und der entsprechenden metrischen Räume, also zu einer (in der natürlichen Topologie) stetigen Abbildung

$$\gamma^*: \mathbb{C}^\times \longrightarrow Y = \text{Spek}(\mathbb{C}[M])_{\mathbb{C}}.$$

Da diese Abbildung über $\text{Spek}(\mathbb{C}[\Gamma])_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^\times)^r$ faktorisiert, liegt das Bild dieser Abbildung ganz in $Y \setminus q(T)$. Die Einschränkung auf den Einheitskreis $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ ist natürlich ebenfalls stetig. (4). Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cdot m \\ \mathbb{N}^r & \longrightarrow & \mathbb{Z}^r & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \mathbb{Z}, \end{array}$$

wobei $\tilde{\gamma}$ durch $\tilde{\gamma}(e_j) := \gamma(me_j)$ definiert ist. Diesem Diagramm entspricht das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{\tilde{\gamma}^*} & \mathbb{C}^r \\ t^m \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{\gamma^*} & Y. \end{array}$$

Die Liftung spielt sich nun im Wesentlichen links ab, d.h. es muss der einfach geschlossene Weg

$$\iota: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^\times, s \longmapsto e^{si},$$

bezüglich der m -ten Potenz $t \mapsto t^m$ geliftet werden. Dies geschieht aber durch die Zuordnung

$$\tilde{\iota}: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^\times, s \longmapsto e^{\frac{si}{m}}.$$

Die j -te Komponente des Endpunkts dieser Liftung in \mathbb{C}^r ist

$$\tilde{\gamma}_j^* \tilde{\iota}(2\pi) = \tilde{\gamma}_j^* \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} \right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} \right)^{\tilde{\gamma}(e_j)} = \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} \right)^{\gamma(me_j)} = e^{\frac{2\pi i \gamma(me_j)}{m}}.$$

Durch diese Zahlen ist auch der zu γ gehörende Charakter $F(\gamma)$ aus Teil (2) gegeben. \square

BEMERKUNG 10.2. Wir betrachten eine Graduierung des Polynomringes $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ durch einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\delta: \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z}/(\ell) := D$$

in eine endliche zyklische Gruppe. Es sei vorausgesetzt, dass $\delta(e_j)$ ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/(\ell)$ für jeden Standardvektor $e_j \in \mathbb{Z}^r$ ist. Dann ist die zugehörige Operation der Charaktergruppe $G = D^\vee = \mu_\ell(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^r \setminus \{0\}$ fixpunktfrei. Zu $x \neq 0$ sei $x_j \neq 0$. Für jeden Charakter $\chi \neq 1$ gilt

$$\chi(x) = (\dots, \chi(\delta(e_j))x_j, \dots) \neq (\dots, x_j, \dots),$$

da $\delta(e_j)$ nach Voraussetzung ein Erzeuger ist und somit $\chi(\delta(e_j)) \neq 1$ ist. Bei $r \geq 2$ ist in einem solchen Fall die Fundamentalgruppe von

$$\text{Spek}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]^G)_{\mathbb{C}} \setminus \{P\}$$

(wobei P das Bild des Nullpunktes sei) aufgrund von Satz 10.1 gleich $\mathbb{Z}/(\ell)$.

BEISPIEL 10.3. Wir betrachten die durch

$$\delta: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/(\ell) =: D$$

mit

$$\delta(e_1) = 1, \delta(e_2) = \ell - 1$$

gegebene Graduierung auf $\mathbb{C}[U, V]$, die der linearen Operation der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \zeta^i & 0 \\ 0 & \zeta^{-i} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, \ell - 1$$

zu einer ℓ -ten primitiven Einheitswurzel ζ entspricht, vergleiche dazu Beispiel 8.3. Der Kern ist durch

$$\Gamma = \langle \ell e_1, e_1 + e_2 \rangle$$

und das Monoid durch

$$M = \langle \ell e_1, \ell e_2, e_1 + e_2 \rangle$$

gegeben, der Invariantenring ist $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^\ell)$. Die Bedingungen von Bemerkung 10.2 sind dabei erfüllt, es ist also $0 \in \mathbb{C}^2$ der einzige Fixpunkt und die Operation auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ist fixpunktfrei. Daher kann man Satz 10.1 anwenden und erhält, dass die Fundamentalgruppe des punktierten Spektrum des Invariantenringes, also

$$\text{Spek}(\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^\ell))_{\mathbb{C}} \setminus \{P\},$$

gleich $\mathbb{Z}/(\ell)$ ist. Ein erzeugendes Element der Fundamentalgruppe wird auf der Monoidebene (bzw. auf dem Differenzengitter) durch

$$\gamma: \Gamma = \text{kern } \delta \longrightarrow \mathbb{Z}$$

mit

$$\gamma(\ell e_1) = 1, \gamma(e_1 + e_2) = 0 \text{ und } \gamma(\ell e_2) = -1$$

gegeben. Dieser Homomorphismus lässt sich nicht nach \mathbb{Z}^2 fortsetzen, allerdings lässt sich das ℓ -fache davon fortsetzen. Auf der Ringebene entspricht dies dem \mathbb{C} -Algebrahomomorphismus

$$\varphi: \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^\ell) \longrightarrow \mathbb{C}[T, T^{-1}]$$

mit $\varphi(X) = T$, $\varphi(Y) = T^{-1}$ und $\varphi(Z) = 1$, was wiederum der stetigen Abbildung

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow \text{Spek}(\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^\ell))_{\mathbb{C}} = V(XY - Z^\ell), t \longmapsto (t, t^{-1}, 1),$$

(bzw. ins punktierte Spektrum) entspricht. Somit ist

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \text{Spek}(\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^\ell))_{\mathbb{C}} \setminus \{P\}, s \longmapsto (e^{is}, e^{-is}, 1),$$

ein Erzeuger der lokalen Fundamentalgruppe dieses Monoidringes.

DEFINITION 10.4. Es sei A eine \mathbb{Z} -graduierte R -Algebra und $s \in \mathbb{N}_+$. Dann nennt man

$$A^{(s)} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_{sn} \subseteq A$$

den s -ten *Veronese-Ring* von A .

Der Veronese-Ring zu $K[U, V]$ und $s = 3$ ist beispielsweise

$$K[U^3, U^2V, UV^2, V^3] \subseteq K[U, V].$$

BEISPIEL 10.5. Wir betrachten die durch

$$\delta: \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z}/(\ell) =: D$$

mit

$$\delta(e_j) = 1 \text{ für alle } j$$

gegebene Graduierung auf $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$, die der linearen Operation der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \zeta^i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta^i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^i & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \zeta^i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, \ell - 1,$$

zu einer ℓ -ten primitiven Einheitswurzel ζ entspricht. Nach Aufgabe 10.14 ist der Invariantenring zu dieser Operation der ℓ -te Veronese-Ring

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]^{(\ell)}.$$

Die Bedingungen von Bemerkung 10.2 sind dabei erfüllt, es ist also $0 \in \mathbb{C}^r$ der einzige Fixpunkt und die Operation auf $\mathbb{C}^r \setminus \{0\}$ ist fixpunktfrei. Daher kann man bei $r \geq 2$ Satz 10.1 anwenden und erhält, dass die Fundamentalgruppe des punktierten Spektrum des Invariantenringes, also

$$\text{Spek}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]^{(\ell)})_{\mathbb{C}} \setminus \{P\},$$

gleich $\mathbb{Z}/(\ell)$ ist. Ein erzeugendes Element der Fundamentalgruppe wird auf der Monoidebene (bzw. auf dem Differenzengitter) durch den Homomorphismus

$$\gamma: \Gamma = \text{kern } \delta \longrightarrow \mathbb{Z}$$

gegeben, der die Erzeuger e_j des umgebenden \mathbb{Z}^r auf $\frac{1}{\ell}$ abbildet. Somit wird jeder Erzeuger des Monoids auf 1 abgebildet. Auf der Ringebene entspricht dies dem \mathbb{C} -Algebrahomomorphismus

$$\varphi: \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]^{(\ell)} \longrightarrow \mathbb{C}[T, T^{-1}]$$

mit

$$\varphi(X^\nu) = T^{\frac{|\nu|}{\ell}}$$

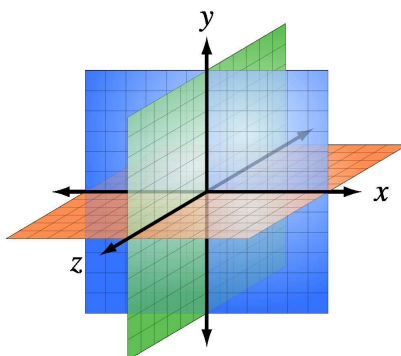
für alle Monome X^ν aus dem Veronese-Ring (die Erzeuger des Veronese-Ringes, also die Monome X^ν , $|\nu| = \ell$, werden einfach auf W abgebildet). Dies führt wiederum zur stetigen Abbildung

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow \text{Spek}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]^{(\ell)})_{\mathbb{C}}, t \longmapsto (t : |\nu| = \ell)$$

(bzw. ins punktierte Spektrum). Somit ist

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \text{Spek}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]^{(\ell)})_{\mathbb{C}} \setminus \{P\}, s \longmapsto (e^{is} : |\nu| = \ell),$$

ein Erzeuger der lokalen Fundamentalgruppe des Veronese-Ringes.



Außerhalb der drei schwarzen Achsen, die Kodimension 2 besitzen, ist die Operation fixpunktfrei. Die relevanten Wege verlaufen ganz im Komplement der drei Ebenen. Das reelle Bild lässt nicht erkennen, dass dieses Komplement im komplexen (auch einfach) zusammenhängend ist.

BEISPIEL 10.6. Wir betrachten die durch

$$\delta: \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) =: D$$

mit

$$\delta(e_1) = (1, 0), \delta(e_2) = (0, 1), \delta(e_3) = (1, 1)$$

festgelegte Graduierung auf $\mathbb{C}[U, V, W]$. Die zugehörige lineare Operation auf dem \mathbb{C}^3 ist durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die drei letzten Matrizen besitzen jeweils eine Fixgerade, daher ist die Operation auf $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ nicht fixpunktfrei, dagegen ist die Operation auf $X = \mathbb{C}^3 \setminus Z$, wobei $Z = \mathbb{C}e_1 \cup \mathbb{C}e_2 \cup \mathbb{C}e_3$ die Vereinigung der Achsen bezeichnet, frei. Da Z die (komplexe) Kodimension 2 besitzt, ist X einfach zusammenhängend. Der Invariantenring ist $\mathbb{C}[U^2, V^2, W^2, UVW]$ mit der Relation $(UVW)^2 = U^2V^2W^2$. Daher ist nach Satz 10.1 die Fundamentalgruppe von $\text{Spek}(\mathbb{C}[U^2, V^2, W^2, UVW])_{\mathbb{C}} \setminus q(Z)$ gleich $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$.

BEISPIEL 10.7. Zum Restklassenhomomorphismus

$$\delta: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(\ell) =: D$$

ist der Kern durch $\Gamma = \mathbb{Z}\ell$ gegeben. Die zugehörige Operation ist die von $\mu_{\ell}(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C} durch Multiplikation mit dem einzigen Fixpunkt 0 bzw. fixpunktfrei auf \mathbb{C}^{\times} . Die Quotientenabbildung ist durch das ℓ -te Potenzieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^{\ell},$$

gegeben. Die Fundamentalgruppe von \mathbb{C}^{\times} ist bekanntlich \mathbb{Z} . Hier kann man Satz 10.1 nicht anwenden, da der Raum, auf dem fixpunktfrei operiert wird, nämlich $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, nicht einfach zusammenhängend ist.

BEISPIEL 10.8. Wir betrachten die durch

$$\delta: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) =: D$$

mit

$$\delta(e_1) = (1, 0), \delta(e_2) = (0, 1)$$

festgelegte Graduierung auf $\mathbb{C}[U, V]$. Die zugehörige lineare Operation auf dem \mathbb{C}^2 ist durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die beiden mittleren Matrizen besitzen jeweils eine Fixgerade, daher ist die Operation auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ nicht frei. Die Operation auf $X = \mathbb{C}^2 \setminus Z$, wobei $Z = \mathbb{C}e_1 \cup \mathbb{C}e_2$ das Achsenkreuz bezeichnet, ist frei, doch besitzt Z die Kodimension 1 in der Ebene. Der Invariantenring ist $\mathbb{C}[U^2, V^2]$, ein Polynomring in zwei Variablen, Satz 10.1 ist in diesem Fall nicht anwendbar.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = 3D coordinate system.svg , Autor = Benutzer Sakurambo auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 7
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9