BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME V

N°s 1-2

1913

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE
—
1913

Le Secrétaire-Gérant,
TERROINE.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1913

Président : M. DESGREZ, 78, boulevard Saint-Germain.
Vice-Président : M. PELLEGRIN, 1, rue Vauquelin.
Trésorier : M. RABAUD, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. FAURÉ-FRÉMIET, 46, rue des Écoles.
Vice-Secrétaire des séances : M. GERMAIN, 55, rue de Buffon.
Secrétaire du Bulletin : M. TERROINE, 35, rue de l'Arbalète.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. SCHAEFFER, 4, rue Linné.
Archiviste : M. HENNEGUY, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Lundis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. VÉZINAUD, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, Ve.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

DIXIÈME SÉRIE. — TOME V

N^{os} 1-2

1913

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE

—

1913

Membres du Conseil

pour les années 1912, 1913 *et* 1914

MM.

André, 70 *bis*, rue Bonaparte.

D. Berthelot, 21, rue de Tournon.

Dongier, 87 *bis*, Grande-Rue, Bourg-la-Reine.

Matignon, 17, boulevard Carnot, Bourg-la-Reine.

Henneguy, 9, rue Thénard.

Laisant, 162, avenue Victor-Hugo.

Hua, 254, boulevard Saint-Germain.

Lemoine, 5, rue Médicis.

Membres du Bureau

pour 1913

Président : M. Desgrez, 78, boulevard Saint-Germain.
Vice-Président : M. Pellegrin, 1, rue Vauquelin.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des Séances : M. Fauré-Frémiet, 46, rue des Écoles.
Vice-Secrétaire des Séances : M. Germain, 55, rue de Buffon.
Secrétaire des publications : M. Terroine, 35, rue de l'Arbalète.
Vice-Secrétaire des publications : M. Schaeffer, 4, rue Linné.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

Commission de publication : MM. Henneguy, Berthelot et Servant.

ABRÉVIATIONS

A. M.	Assistant au Muséum.
E. E. P.	Examinateur à l'Ecole Polytechnique.
I. P. C.	Ingénieur des Ponts et Chaussées.
I. G. M.	Inspecteur général des Mines.
I. G. A.	— — de l'Agriculture.
M. A. M.	Membre de l'Académie de Médecine.
M. I.	— de l'Institut.
M. C.	Maître de conférences.
P. C. F.	Professeur au Collège de France.
P. A. M.	— au Conservatoire des Arts et Métiers.
P. E. M.	— à l'École des Mines.
P. E. P.	— — Polytechnique.
P. P. C.	— — des Ponts et Chaussées.
P. E. Ph.	— — Supérieure de Pharmacie.
P. F. M.	— à la Faculté de Médecine.
P. F. S.	— — des Sciences.
P. M.	— au Muséum.
P. H.	Professeur honoraire.

ÉTUDE ET AMITIÉ

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Fondée en 1788

État de la Société en Mai 1913

PREMIÈRE SECTION.— SCIENCES MATHÉMATIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1860 (2 juin). Haton de La Goupillière (J.-Napoléon), M.I., 56, rue de Vaugirard.
1861 (13 avril). Tissot (Nic.-Aug.), E.E.P., à Voreppe (Isère).
1863 (28 mars). Rouché (Eugène), M.I., 213, boulevard Saint-Germain.
1871 (23 déc.). Collignon (Édouard), 6, rue de Seine.
— *id.* Darboux (Gaston), M. I. (Secrétaire perpétuel), Doyen Hon. F. S., 3, rue Mazarine.
1872 (27 janv.). Jordan (Camille), M. I., P. E. P., P. C. F., 48, rue de Varennes.
1875 (26 juin). Fouret (Georges), E.E.P., 4, avenue Carnot.
1876 (23 déc.). Picquet (Henri), E.E.P., 4, rue Monsieur-le-Prince.
— *id.* André (Désiré), P.H., 70 *bis*, rue Bonaparte
1878 (26 janv.). Leauté, M.I., 18, boulevard de Courcelles.
— (9 fév.). Laisant, E. E. P., 5, rue du Conseil, à Asnières (Seine).

MEMBRES TITULAIRES

MM.

décédé 1881 (11 fév.). ~~C. de Polignac, Radmannsdorf, Carniole (Autriche).~~
— *id.* Humbert (Georges), M. I., 6, rue d'Aubigny.
— (12 nov.). Chemin, P. P. C., 33, avenue Montaigne.
décédé 1884 (3 nov.). ~~Lévy (Lucien), E. E. P., 12, rue du Regard.~~
1887 (17 déc.). Kœnigs, P. F. S., 101, boulevard Arago.
1892 (26 janv.). Bioche, Prof. Louis-le-G., 56, rue N.-D.-des-Champs.
1900 (10 mars). Leau, Prof. Stanislas, 83, rue Denfert-Rochereau.
— (22 déc.). Le Roy, Prof. Stanislas, 117, boulevard Raspail.
1902 (27 juin). Deschamps, 195, rue de Tolbiac.
1902 (13 déc.). Grévy, Prof. Saint-Louis, 71, rue Claude-Bernard.
1905 (14 janv.). Maillet, I. P. C., 11, rue de Fontenay, à Bourg-la-Reine (Seine).
1905 (27 mai). Servant, Chef des tr. F. S., à Bourg-la-Reine (Seine).
1906 (24 fév.). Lebon (Ernest), P. H., 4 *bis*, rue des Écoles.
1906 (12 mai). Tarry (Gaston), 182, boulevard de Strasbourg, Le Havre.
— (8 déc.). Fatou, astronome adjoint à l'Observatoire, 172, boulevard Montparnasse.
— (22 déc.). Henri (Victor), M. C. (Hautes Études), 8, rue du Puits-de-l'Hermite.
1907 (11 mai). Chapelon (J.-J.), Ing. au Corps des M., 21, rue Bréa.
1908 (9 mai). Rousier, 62, boulevard Montparnasse.
1909 (26 juin). Léauté (André), 18, boulevard de Courcelles.
1912 (11 mai). Perrier (cap. Georges), 34, avenue La Bourdonnais.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (28 mars). Lieutenant-Colonel du Génie Brocard, 75, rue des Ducs, Bar-le-Duc.
1905 (11 fév.). Berdon (Louis), 39, Cadogan Street, Londres S. W.
1906 (25 juin). Guccia, Palerme.
1907 (9 fév.). Desmoulin, P. F. S., 10, rue Joseph-Plateau, Gand.
1908 (12 déc.). A. Gérardin, 32, quai Claude-le-Lorrain, Nancy.

DEUXIÈME SECTION. — SCIENCES PHYSIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1863 (18 juill.). Grandeau (Louis), I. G. A., 4, avenue de La Bourdonnais.
1864 (31 janv.). Wolf (Charles), M. I., P. H. F. S., 36, avenue de l'Observatoire.
1874 (23 mai). Branly, M. I. Prof. Inst. Cath., 21, av. de Tourville.
1876 (27 mai). Bouty, M. I., P. F. S., 5, faubourg Saint-Jacques.
1877 (24 fév.). Lippmann (Gabriel), M. I., P. F. S., 10, rue de l'Éperon.
1882 (11 fév.). Cochin, député, M. I., 53, rue de Babylone.
1884 (9 avril). Bourgeois (Léon), A. M., 1, boulevard Henri-IV.
1886 (17 avril). Bordet (Lucien), 181, boulevard Saint-Germain.
1887 (9 juillet). Vallot (Joseph), Directeur de l'Obs. du Mont-Blanc, 37, rue Cotta, à Nice.
1901 (26 janv.). Vincent, Prof. Saint-Louis, 26, rue de Staël.
— (14 déc.). Benoist, Prof. Henri-IV, 26, rue des Écoles.
1901 (28 déc.). Dongier, Météor. tit. Obs. de Paris, 99, Grande-Rue, à Bourg-la-Reine (Seine).
1902 (13 déc.). Matignon, P. C. F., 17, boul. Carnot, Bourg-la-Reine.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1903 (28 fév.). Winter, 44, rue Saint-Placide.
— (14 mars). Berthelot (Daniel), P. E. Ph., 31, rue de Tournon.
— *id.* Desgrez, P. A. F. M., 78, boulevard Saint-Germain.
— (12 déc.). Darzens, Répét. E. P., 22, avenue Ledru-Rollin.
1904 (23 janv.). Chauveau, Météor. adj. Obs. de Paris, 51, rue de Lille.
1904 (29 mai). Moureu, M. I., M. A. M., P. E. Ph., 17, rue Soufflot.
— *id.* Mahler, Ing. civil des Mines, 2, rue Decamps.

1904 (9 juillet). Marage, 19, rue Cambon.
1905 (14 janv.). Hallion, chef de Lab. C. F., 54, faub. Saint-Honoré.
— (11 mars). Valeur, Agrégé E. Ph., 73, bould Montparnasse.
— (1er avril). Goutal, P., suppl. E. M., 60, boulevard Saint-Michel.
— (13 mai). Mouneyrat, 15, rue Soufflot.
1906 (13 janv.). Mayer, M. C. (Hautes Études), 33, rue du Faubourg-Poissonnière.
— (24 fév.). Joannis, P. F. S., 7, rue des Imbergères, Sceaux.
1907 (14 déc.). Becquerel (Jean), I. P. C., P. M., 15, boulevard Saint-Germain.
1910 (12 mars). Nicolardot, 95, rue de Vaugirard.
1912 (10 fév.). Terroine, M. C. E. H., 35, rue de l'Arbalète.
— (28 avril). Schaeffer (G.), Prép. E. H., 4, rue Linné.
1912 (22 juin). Morel (L.), C. de T. E. H., 31, boulevard Raspail.
— (22 juin). Stodel, M. C. E. H., 15, boulevard Delessert.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1905 (13 mai). Mathias, P. F. S., Clermont-Ferrand.
— (22 juil.). Monpillard, 22, boulevard Saint-Marcel.
1912 (9 (déc.). Lalou, Prof. Jassi, Piatra N (Roumanie).
1913 (13 janv.). Larguier des Bancels, Prof. Université, Lausanne.
— (14 avril). Tournay, 10, rue de Castellane, Paris.

TROISIÈME SECTION. — SCIENCES NATURELLES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1856 (20 déc.). Prillieux (Ed.), M. I., sénateur, 14, rue Cambacérès.
1862 (7 mai). Bureau (Ed.), P. H. M., M. A. M., 24, quai de Béthune.
1863 (31 janv.). Vaillant (L.-L.), P. H. M., 8, quai Henri-IV.
— (23 déc.). Grandidier (A.), M. I., 71 *bis*, rue du Ranelagh.
— (26 déc.). Van Tieghem (Philippe), M. I., P. M., 22, rue Vauquelin.

1879 (10 mai). Henneguy (Louis-Félix), M. I., M. A. M., P. C. F., 9, rue Thénard.

1883 (26 mai). Mocquard, A. M. hon., 55, rue du Mont-Valérien, à Suresnes (Seine).

1886 (13 fév.). Bouvier (E.-L.), M. I., P. M., 55, rue de Buffon.

1888 (11 fév.). Morot, A. M., 9, rue du Regard.

1890 (21 fév.). Roché, 4, rue Dante.

1893 (11 mars). Hua, Direct. adj. de Lab. (Htes Etudes), 254, boulevard Saint-Germain.

— (10 juin). Jousseaume, 29, rue Gergovie.

1893 (27 oct.). De Guerne, 6, rue de Tournon.

1894 (17 mars). Roland Bonaparte, M. I., 10, avenue d'Iéna.

1899 (14 janv.). Lecaillon, P. F. S. Toulouse, 1, rue Mondran.

1899 (25 mars). Neuville, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.

1901 (12 janv.). Pellegrin (J.), A. M., 1, rue Vauquelin.

— (18 mai). Guieysse, Chef de Lab. F. M., 63, boulevard Saint-Michel.

1902 (12 janv.). Chauveaud, Direct. adj. de Lab. (Hautes Etudes), 16, avenue d'Orléans.

— (8 fév.). Rabaud, M. C. F. S., 3, rue Vauquelin.

1902 (27 juin). Lesage, Méd. des Hôp., 226, boulevard Saint-Germain.

— (22 nov.). Anthony, A. M., 12, rue Chevert.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1903 (28 fév.). Coutière, P. E. Ph., 118, avenue d'Orléans.

— (11 avril). Langeron, Prép. F. M., 78, rue de l'Abbé-Groult.

— (27 juin). Noé, Prép. F. M., 51, boulevard Montparnasse.

1889 (10 fév.). Ménégaux, A. M., 55, rue de Buffon (réintégré le 23 avril 1904).

1904 (9 janv.). Grandidier (G.), 2, rue Gœthe.

— (23 janv.). Joubin, P. M., 21, rue de l'Odéon.

— (26 mars). Gravier, A. M., 55, rue de Buffon.

— (29 mai). Michel (Auguste), Prof. Michelet, 7, rue Nicole.

— (9 juil.). Launoy (L.), Prép. Inst. Pasteur.

1905 (28 janv.). Cayeux, P. C. F., P. I. A., 6, pl. Denfert-Rochereau.

— (8 juil.). Lemoine (Paul), Chef des tr. Mus., 5, rue Médicis.

1909 (13 mars). Legendre (R.), Prép. Mus., 24, rue Boissonnade.

1909 (26 juin). Rivet, A. M., 61, rue de Buffon.
1911 (11 mars). Fauré-Frémiet, Prép. C. F., 46, rue des Écoles.
1912 (10 fév.). Germain, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.
id. Lamy, A. M., 55, rue de Buffon.
— (28 avril). Sémichon, Prép. Mus., 27, rue Cassette.
1913 (13 janv.). Viguier, M. C. F. S., 16 *bis*, quai de Bercy (magasins généraux), Charenton.
— (13 janv.). Guyénot, P. F. S., 12, rue Linné, Paris-V^e^.
— (14 avril). Poutrain, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (27 juin). L. Petit, 211, rue de l'Église-Saint-Seurin, à Bordeaux.
— (28 nov.). Devez, Cayenne.
— (23 avril). Tur, Ass. à l'Univ. de Varsovie.
— *id.* Malard, Chef de travaux Lab. de Zool. marit., St-Vaast-la-Hougue (Manche).
— (29 mai). Marceau, P. E. M., Besançon, à l'École de Médecine.
1905 (26 nov.). Maignon, Chef des trav. de Physiol., E. Vét. de Lyon.
— (11 mars). Neveu-Lemaire, P. A. F. M., Lyon, à l'École de Médecine.
— (15 avril). Diguet (L.), 16, rue Lacuée.
1906 (24 févr.). Osman Galeb Bey, le Caire (Égypte).

CONTRIBUTIONS A L'HISTOIRE DE LA SYNTHÈSE DE L'ACIDE NITRIQUE

Par Camille MATIGNON.

I. — Une prétendue synthèse de l'acide nitrique en 1798.

Un certain J.-L. Odier a décrit en 1798 dans le *Journal de Physique et de Chimie*, tome III, page 464, une expérience dans laquelle la synthèse de l'acide nitrique aurait été réalisée fortuitement. A cause du grand intérêt que prend à l'heure actuelle le problème de la fixation industrielle de l'azote, il m'a paru intéressant de reproduire cette communication vieille de cent quinze ans ; elle rentre aujourd'hui en pleine actualité.

« *Sur la production de l'acide nitrique par l'oxygène, tenu à un haut degré de chaleur et mis en contact avec l'air atmosphérique.*

« Paul, célèbre artiste de Genève, ayant construit et perfectionné l'appareil de Watt pour la production de gaz, en retire, au moyen de cet appareil, le gaz oxygène de quelques oxydes noirs de manganèse, en ayant la précaution de ne fermer l'appareil que le manganèse ne fût rouge afin de laisser échapper toute l'eau et tout l'acide carbonique que contient toujours cet oxyde, tel qu'on le vend dans le commerce. Pendant que le gaz se dégageait en grande abondance, on ouvrit, par hasard, un instant, un des robinets du tube où le gaz passait, en sorte qu'une portion de ce gaz encore chaud et très pur fut répandue dans l'atmosphère ; à l'instant, tous les assistants furent surpris par une odeur manifeste d'acide nitrique, et l'on vit une légère fumée s'élever de l'endroit par où le gaz était sorti. Le professeur Pictet, qui était présent, fit le premier remarquer aux autres assistants la singularité de ce fait et son importance. En effet, cette observation paraît prouver que lorsque le gaz oxygène chaud et bien pur est mis en contact avec l'air atmosphérique, à la température ordinaire, il se forme de l'acide nitrique par la combinaison chimique des deux principes constituants de cet acide ; en sorte qu'en faisant passer dans un ballon de verre ou tout autre vase fermé, du gaz oxygène pur et chaud d'un côté, et de l'air atmosphérique de l'autre, on obtiendrait une grande quantité de gaz acide nitrique qui pourrait être condensé et absorbé par de l'eau mise d'avance au fond du vase. D'autre part, le manganèse a la propriété bien connue d'absorber l'oxygène de l'air ou de l'eau lorsqu'on l'a privé du sien par le moyen du feu. On pourrait donc, au moyen d'une quantité limitée d'oxyde noir de manganèse, retirer successivement de l'air atmosphérique lui-même, une quantité illimitée d'acide nitrique, qui aurait de plus l'avantage d'être parfaitement pur, si on a eu le soin de purifier l'air atmosphérique dont on se servirait dans cette opération. »

Les remarques du professeur Pictet, l'un des ancêtres de Raoul Pictet, sont des plus curieuses. Il entrevoit immédiatement l'importance de la réaction et appelle de suite l'attention sur la pureté de l'acide azotique qu'on obtiendrait par une telle méthode. Les vapeurs nitreuses reconnues par tous les assistants ont-elles été produites par synthèse ? Au cours des leçons que j'ai faites dans ces deux dernières années sur les réactions du gaz azote, j'ai été amené à discuter cette curieuse expérience et à conclure que ces vapeurs devaient avoir une toute autre origine.

Tout d'abord la synthèse aurait été réalisée par la projection du jet d'oxygène chaud dans l'air froid ? Admettons que la température eût atteint dans la cornue, en comptant largement, une valeur de 1.000°, l'azote et l'oxygène sont sans action à cette température, par conséquent il ne pourrait se produire de l'oxyde azotique transformable ensuite en vapeur nitreuse. Ce n'est en effet qu'à partir de 1.200° que la réaction sort de sa zone de frottement ou d'inertie pour se réaliser directement. Si donc il y a eu synthèse, celle-ci n'a donc pu se produire qu'à l'intérieur de la cornue. Or, en admettant qu'il restât encore assez d'azote pour la réaction, l'oxyde de manganèse pourrait fort bien jouer le rôle de catalyseur pour rendre la réaction de combinaison des deux gaz élémentaires déjà sensible à cette température. Mais quelle proportion de bioxyde d'azote pourrait se former dans ces conditions à l'équilibre? En admettant que l'azote et l'oxygène coexistent à volumes égaux, c'est-à-dire dans les conditions optima de la réaction, on ne pourrait produire au maximum que 6/10000 de bioxyde d'azote en volume ; avec un grand excès d'oxygène, la limite est encore plus petite. Or un bioxyde d'azote aussi dilué, en arrivant au contact de l'air froid, ne pourrait fournir des vapeurs rutilantes d'une concentration suffisante pour être visibles et pour être sensibles à l'odorat.

La conclusion ne me semble pas douteuse. L'azote et l'oxygène n'ont pu se combiner entre eux dans les conditions de l'expérience.

Mais alors d'où proviennent ces vapeurs nitreuses ? Il est très facile d'en fournir l'explication. Le bioxyde de manganèse naturel contient toujours, à côté des carbonates de calcium et de baryum, de petites quantités de nitrates alcalino-terreux, qui sont fort stables, comme l'on sait, et ne se décomposent qu'à température élevée. Aussi Troost, dans son *Traité de chimie classique* (13^{e} édition), dit textuellement que l'oxygène préparé à partir du bioxyde de manganèse n'est jamais pur, car il contient toujours les gaz provenant de la décomposition des azotates et des carbonates et que, s'il est possible de retenir le gaz carbonique et les vapeurs nitreuses dans un laveur alcalin, il reste toujours mêlé à l'oxygène de l'azote impossible à éliminer.

Il paraît donc probable que le bioxyde de manganèse utilisé dans l'expérience précédente contenait des quantités non négligeables de nitrates. Ces nitrates, en se décomposant dans le centre de la cornue moins chauffé, ont engendré du bioxyde d'azote qui reste sans action sur l'oxygène à température élevée; mais dès que le jet gazeux chaud est arrivé au contact de l'air intérieur, le refroidissement a rendu possible l'oxydation du bioxyde d'azote avec formation de vapeurs rutilantes.

Ces considérations, que j'avais exposées, je le répète, dans mon cours de l'an dernier, se trouvent confirmées par des recherches que viennent d'effectuer MM. Askenasy et Rényi. En chauffant, pendant 20 heures, 10 grammes de bioxyde de manganèse dans un courant d'air, ils ont pu recueillir au maximum 0^{mg},2 de bioxyde d'azote et les conditions de l'opération montrent que ce bioxyde provient non de l'azote de l'air, mais d'un composé azoté qui préexistait à l'état de traces infinitésimales dans le bioxyde employé.

Il importe d'insister en terminant sur cette association presque constante du bioxyde de manganèse naturel avec des carbonates alcalino-terreux et de petites quantités de nitrates. Les azotates doivent provenir, sans doute, de l'oxydation de l'ammoniaque, produit constant de l'air, oxydation facilitée d'une part par les excellents catalyseurs oxydants que sont les oxydes de manganèse et, d'autre part, par la présence des carbonates qui fixent aussitôt l'acide formé.

II. — Le premier essai de synthèse industrielle de l'acide nitrique.

Le problème qui domine aujourd'hui la chimie minérale est incontestablement celui de la fixation de l'azote élémentaire en vue d'en dériver des composés azotés assimilables par les plantes. Le procédé Birkeland et Eyde appliqué en Norvège aux usines de Nottoden et de Saaheim a déjà fourni une solution pratique de ce problème, l'azotate de chaux synthétique concurrence maintenant, sur le marché, le nitrate de soude naturel du Chili.

Il est intéressant de constater que la première personne qui se soit préoccupée de fabriquer industriellement l'acide azotique à partir des éléments de l'air fut une femme et une Française, « Madame Louise-Jenny-Paméla-Blanche Lefebvre de Paris, dans l'empire français », comme l'indique le brevet qu'elle prit en Angleterre, le 26 avril 1859, sous le titre suivant : *Perfectionnement dans la fabrication de l'acide nitrique et dans son application à la production des sels nitreux et nitriques artificiels.*

L'importance qui s'attache maintenant à toutes les réactions industrielles de l'azote donne aujourd'hui à ce brevet un intérêt tout particulier, tant par le sujet traité que par la personnalité de l'auteur ; aussi ai-je pensé qu'il serait intéressant d'en reproduire les parties essentielles.

« Cette invention se rapporte, en premier lieu, à la production de l'acide nitrique ou des sels par la combinaison des éléments de l'air atmosphérique au moyen d'électricité statique et dynamique, et, en second lieu, à l'absorption consécutive (de l'acide nitrique ainsi produit) par l'eau, de façon à former l'acide nitrique du commerce, ou par ses combinaisons avec des bases alcalines convenables, pour former les sels nitreux ou nitriques. Dans ce but, on renferme l'air atmosphérique dans un vase (sphérique de préférence) ; ce vase, qui a un col étroit, est renversé sur un autre contenant l'eau ou la solution alcaline qui doit absorber le gaz résultant de la décomposition de l'air. Au centre du vase renversé, on rapproche les deux pôles d'une batterie, et, en faisant jaillir l'étincelle électrique, l'air contenu dans le vase est décomposé (*fig.* 1) ; un courant continu d'air arrivant dans le vase par une ouverture convenable, cette action peut être poursuivie aussi longtemps que l'on veut. L'eau du vase inférieur peut aussi être décomposée par l'électricité et fournir ainsi l'oxygène qui se combinera avec l'azote que donne l'air, pour former l'acide nitrique. Au lieu ou en plus de l'eau du vase inférieur, on peut utiliser des solutions ou des préparations alcalines pour absorber le gaz nitreux aussitôt qu'il est produit.

« On comprend naturellement que si l'on introduit cette invention

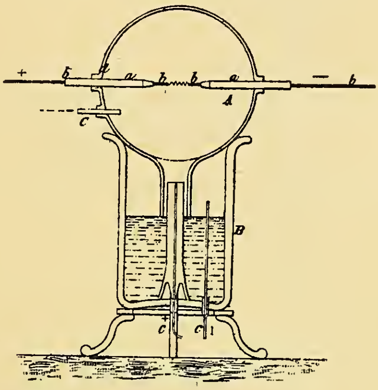


FIG. 1.

dans le commerce, on puisse faire agir simultanément un grand nombre de courants électriques sur l'eau et l'air, pour les décomposer, et, mettant en présence l'azote et l'oxygène à l'état naissant, on puisse produire ainsi le gaz nitreux.

« Pour opérer sur une grande échelle, au lieu du vase sphérique, on utilise une grande chambre close. Cette chambre doit être construite avec des matériaux qui ne sont pas attaqués par les acides. Au centre de cette chambre est un vase qui contient l'eau destinée à absorber les vapeurs nitreuses pour former l'acide nitrique. Les parois verticales de la chambre sont munies d'ouvertures servant au passage des fils électriques, entre lesquels jaillit l'étincelle. Cette chambre est pourvue d'un nombre convenable de ces ouvertures, de façon à produire le nombre des courants nécessaires, suivant les dimensions de la chambre et la quantité d'acide que l'on veut produire. Les parois de la chambre sont aussi percées d'un nombre suffisant de trous pour fournir de l'air de l'extérieur, comme nous l'avons mentionné plus haut (*fig.* 2).

« Je ferai remarquer ici que si l'on désire produire des nitrates au lieu d'acide nitrique, on doit faire arriver dans le vase inférieur, au lieu d'eau, une solution alcaline convenable, ayant par exemple la potasse ou la soude comme base, si l'on veut produire les sels de ces substances. Les sels ainsi produits seront d'autant plus purs que les solutions employées le seront elles-mêmes ; ce qui ne pouvait pas avoir

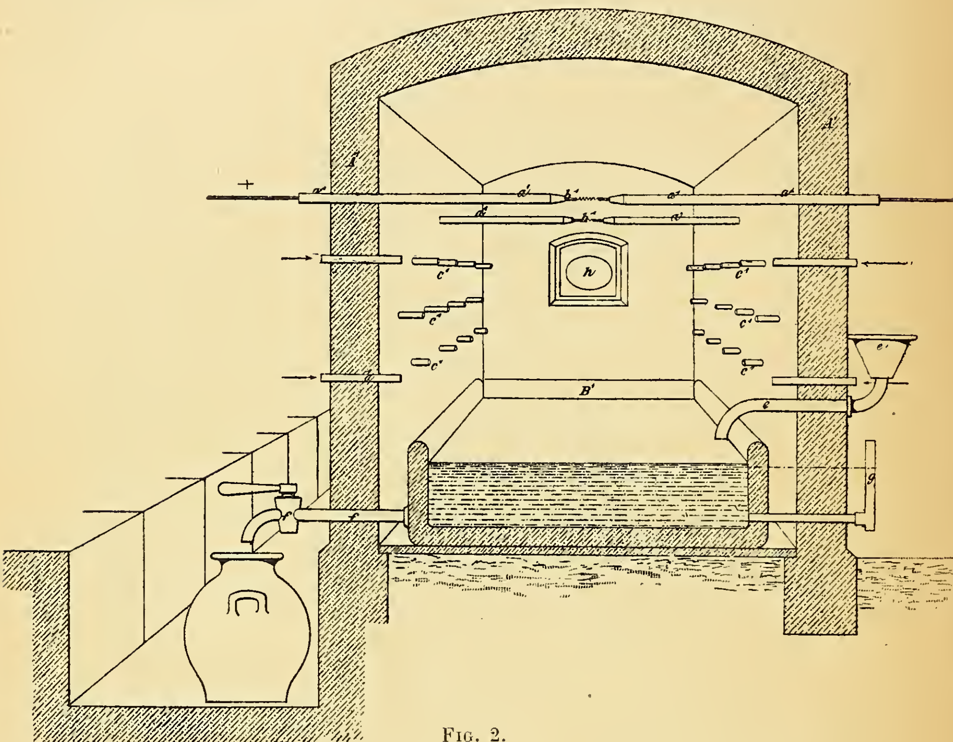


Fig. 2.

lieu avec la méthode de préparation ordinaire, car l'acide est trop cher pour qu'on puisse l'utiliser directement à la préparation de ces sels. »

« En utilisant des cendres, rendues convenablement humides, sur lesquelles on fait agir un courant électrique, on peut produire presque instantanément des nitrates qui ne se produiraient pas naturellement en moins de plusieurs années. »

De la lecture de ce brevet trois remarques importantes se dégagent.

Pour produire des étincelles, M^{me} Lefebvre recommande déjà l'emploi d'un appareil d'induction. Il est vrai que Böttger, dès 1843, puis Frémy, Becquerel, Masson, Morren avaient déjà montré que le rôle chimique de l'étincelle d'induction était le même que celui de l'étincelle des machines statiques; mais c'est seulement quelques années plus tard, en 1861, que Perrot, dans une étude comparative des plus importantes entre les deux étincelles, devait établir nettement la supériorité de l'étincelle d'induction sur la seconde et montrer ensuite que, pour une même quantité d'électricité consommée, les longues étincelles sont plus actives que les courtes étincelles.

M^{me} Lefebvre signale aussi l'introduction de l'oxygène afin de rendre l'opération plus économique et plus rémunératrice ; aujourd'hui les avantages que procure l'emploi d'un air suroxygéné sont bien connus, mais là encore M^{me} Lefebvre a été une initiatrice de la première heure car l'utilisation d'un air enrichi n'est pas encore passé dans la pratique, mais il est probable qu'un tel mélange s'imposera bientôt dans l'industrie de l'acide azotique.

Enfin l'auteur du brevet appelle l'attention sur un autre fait important. L'acide nitrique ainsi préparé sera un produit pur, neutralisé par les bases, il fournira des nitrates purs. Or cette propriété est vraiment, au point de vue pratique, la qualité dominante des produits nitriques de synthèse. Les matières azotées préparées en Norvège sont particulièrement recherchées à cause de leur pureté par toutes les usines chimiques qui préparent les cotons nitriques, la nitroglycérine et la dynamite, les différents corps aromatiques, les matières colorantes azoïques, etc., et d'une façon générale toutes les industries chimiques où interviennent l'acide nitrique, le nitrate d'ammoniaque, le nitrite de soude.

L'acide nitrique de synthèse paraît tout particulièrement recommandable pour la fabrication des celluloses nitrées, base de nos poudres de guerre modernes.

Un Anglais du nom de Newton construisit l'appareil de M^{me} Lefebvre, mais nous n'avons aucune indication sur les résultats obtenus.

Il m'a paru utile de rappeler les mérites scientifiques de cette Française, qui n'eut qu'un tort, celui de trop devancer son époque.

Ses projets ne pouvaient entrer dans la période de réalisation qu'avec une énergie électrique produite à bon marché.

La construction de puissants alternateurs, branchés directement sur des turbines mues économiquement par de puissantes chutes d'eau, devait permettre aux idées de M^{me} Lefebvre de quitter le domaine de la conception pour passer dans celui de l'exécution. Plus de mille brevets accordés dans ces dix dernières années sur la synthèse de l'acide azotique et plus de 200 millions engagés dans cette industrie naissante, attestent la justesse des vues de M^{me} Lefebvre.

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LA BAGUETTE DIVINATOIRE

Par M. Paul LEMOINE.

De tous temps on a cru que certains hommes avaient le pouvoir de révéler la présence d'objets invisibles et que ce pouvoir se manifestait par les oscillations d'une baguette mise entre leurs mains. Naturellement l'objet de la recherche portait sur les amas de métaux ou sur la présence d'eau. On a beaucoup employé la baguette et même beaucoup écrit à son sujet; récemment M. von Klinckowstroem a consacré à sa seule bibliographie deux importantes brochures.

Pendant longtemps les savants professionnels n'ont pas pris au sérieux ces phénomènes, les reléguant dans le domaine de la sorcellerie; leur incrédulité était justifiée soit par le vague des résultats obtenus, soit par l'ignorance des gens qui s'adonnaient à la baguette divinatoire. L'opinion publique, cependant, leur conservait une certaine faveur, comme il arrive pour tous les mystères.

Dans ces dernières années, les idées nouvelles que des découvertes insoupçonnées ont pu suggérer, le fait que des sources ont pu être mises en lumière par des porteurs de baguette là où aucune donnée géologique ne pouvait permettre d'en préciser l'emplacement, ont appelé à nouveau l'attention sur la baguette divinatoire, et quelques-uns ont pensé qu'elle méritait d'être étudiée avec plus de soin.

Laissant de côté le parti que des fourbes et des charlatans ont pu tirer de la crédulité publique, il pouvait venir à l'esprit de rechercher, avec le concours d'un « porteur de baguette » hors de tout soupçon, comment se présentaient ces phénomènes et de les soumettre à certaines expériences d'un caractère scientifique.

Attaché à une sous-commission du Ministère de l'Agriculture, chargée d'étudier les questions de cette nature, j'ai pensé qu'il fallait essayer de se rendre compte des faits sans *aucun parti pris*.

J'ai été amené à ne pas m'étonner des divergences des premiers résultats obtenus, en songeant que le phénomène peut être extrêmement complexe au point de vue physique.

De plus, nous ne pouvons le mesurer que par l'intermédiaire de l'homme qui est un « réactif » tout à fait déplorable, susceptible d'être influencé par une foule de causes, tant psychiques que physiques.

Pour éviter toute cause de suggestion, en ce qui me concerne, je me suis astreint à ne faire, avant les expériences, aucune bibliographie, bien que cela fût facile, de façon à ne pas être influencé par les résultats des autres.

J'ai cherché également à utiliser, au moins d'une façon préliminaire, des baguettisants relativement « peu instruits dans les sciences physiques et naturelles », de façon à ne pas risquer de leur voir mettre en évidence, inconsciemment, un système préconçu.

PREMIÈRE PARTIE

OBSERVATIONS SUR L'ACTION DES SELS ET DES MÉTAUX

Par MM. J.-B. SENDERENS et PAUL LEMOINE.

1. La baguette. — 2. Réalité du phénomène. — 3. Suggestion. — 4. Nature de la baguette. — 5. Nature du corps agissant (Métaux. Oxydes et sels. Dissolutions). — 6. Nature de l'action (Distance de sensibilité. Mesure de la force rhabdoactive. Rémanence). — 7. Phénomènes de réfraction. — 8. Isolement. — 9. Modifications de la sensibilité de l'observateur. — Conclusions.

Ces considérations m'ont conduit à profiter de l'heureuse circonstance qui, par l'intermédiaire de M. Senderens, professeur de chimie à l'Institut catholique de Toulouse, me mettait en relation avec un « porteur de baguette [1] », M. l'abbé Caubin, pour le prier de nous laisser faire par son intermédiaire quelques expériences. M. Senderens et M. Paul Lemoine avaient eu antérieurement, chacun de leur côté, l'occasion de se trouver en relations avec quelques personnes ayant le même pouvoir et d'observer leur façon de procéder, sans pouvoir les soumettre à des expériences méthodiques.

Le cas a été autre avec M. l'abbé Caubin, curé de Momères (Hautes-Pyrénées), qui a bien voulu, sur notre demande, se mettre à notre disposition pendant trois journées consécutives au Laboratoire de Chimie de l'Institut catholique de Toulouse : nous y trouvions le calme qui convient à toute expérience et aussi les produits dont nous pouvions avoir besoin. M. l'abbé Caubin avait, au plus haut degré, la faculté de faire tourner la baguette, faculté que nous n'avons pas retrouvée chez la plupart des personnes qui accidentellement assistèrent à une partie de ces expériences. Nous devons dire cependant que le neveu de M. l'abbé Senderens, un jeune garçon de dix ans, nous a paru également doué; nous n'avons pas cru cependant devoir tenir compte des résultats obtenus avec son concours.

Nous exposerons ici les faits tels qu'ils se sont passés, les expé-

[1] Nous emploierons partout ici le mot « porteur de baguette » dans le sens d'individu doué de la faculté de sentir la baguette tourner entre ses mains sous l'influence de l'eau souterraine ou de masses métalliques.

riences telles que nous avons pu les concevoir avec une préparation rudimentaire et insuffisante, ne nous dissimulant pas qu'elles auraient pu être plus rationnelles et mieux contrôlées ; nous désirons seulement qu'elles puissent suggérer des recherches, et nous nous proposons nous-mêmes d'en faire de nouvelles sur cette intéressante question.

1. — *La baguette.*

On sait que la baguette se compose d'une tige recourbée qui peut être en bois ou en cuivre (*fig.* 1). On la porte, la tige C en l'air, en en tenant les extrémités AA′, BB′, fortement serrées entre les mains,

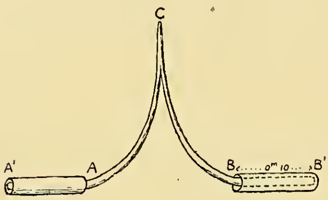


Fig. 1.

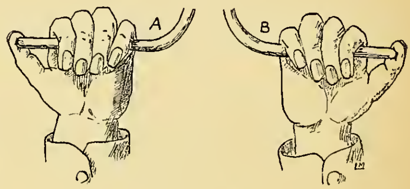


Fig. 2.

la paume de la main en l'air, le pouce allongé le long de la baguette (*fig.* 2).

Au moment où l'on arrive sur un objet susceptible de la faire tourner, la baguette quitte sa position verticale pour prendre une position plus ou moins oblique.

Il est à noter que, lorsque la position est prise convenablement et que l'on serre fortement la baguette, il est impossible de la faire tourner par un mouvement volontaire. Les recherches faites en Angleterre, il y a quelques années, l'ont d'ailleurs établi d'une façon qui paraît certaine : tous les muscles sont tendus ; seuls des réflexes peuvent les faire agir à nouveau ; il s'agirait de savoir si ces réflexes se produisent sous l'action de la suggestion ou sous celle d'une force inconnue, agissant sur l'organisme. Il y a là une question d'ordre physiologique qui sort complètement de notre compétence.

Deux faits sont à retenir dans ce mouvement de la baguette :

1° Lorsqu'il s'agit d'une baguette en bois, les parties AA′, BB′ qui se trouvent dans la main de l'observateur ne bougent pas ; l'observateur emploie même une grande force à empêcher la baguette de tourner. La portion ABC a tendance à tourner seule et la baguette se brise même parfois en A et B. En tous cas, au bout d'un certain nombre d'opérations, elle est très abîmée en ces deux points ;

2° Lorsqu'il s'agit d'une baguette en cuivre, ce phénomène de torsion ne peut pas se produire : la baguette tourne tout entière. Aussi, pour diminuer le frottement contre les mains, lui adapte-t-on souvent une gaine en bois AA′ (*fig.* 1), dans laquelle elle tourne à frottement ultra-doux.

Il est à noter [1] que l'on peut obtenir des résultats de la façon suivante : Le « porteur de baguette » tient de la main gauche la partie AA′ de la baguette ; de la main droite il tient la main gauche d'une personne non douée. Celle-ci tient de la main droite la partie BB′ de la baguette. Dans cette position, la baguette arrive à tourner ; cependant le « porteur de baguette » ne la tenant que par la partie AA′ munie de sa gaine, ne peut avoir aucune action sur elle ; la personne, qui la tient en BB′ et qui, en temps normal, n'a nullement la faculté de faire tourner la baguette, la sent tourner dans sa main, malgré elle.

2. — *Réalité du phénomène.*

Les premières expériences eurent pour but de constater la réalité du phénomène. M. l'abbé Caubin se promena dans le jardin et dans les cours de l'Institut catholique ; sa baguette marcha à diverses reprises et mit en évidence de nombreux filets d'eau souterraine, très rapprochés. Leur existence est très vraisemblable dans ces alluvions de la Garonne en un point voisin du niveau de base ; mais elle n'a pas été vérifiée. Leur emplacement a seulement été marqué avec soin, pour situer les expériences futures dans leur intervalle et éviter qu'ils vicient par trop leurs résultats.

Ces premières expériences nous ont montré simplement que la baguette tourne réellement seule dans les mains de son porteur, sans aucune intervention volontaire de sa part.

D'autres expériences ont eu pour but de chercher s'il y avait une cause à ce phénomène. Nous avons alors abandonné les recherches sur l'eau souterraine pour nous livrer à des études sur l'influence des masses métalliques qui agissent elles aussi sur la baguette, de l'existence desquelles on peut s'assurer et dont on peut faire varier, à son gré, la nature et la quantité.

Des masses métalliques (Cu, Pb, Au, etc.) furent cachées derrière

[1] Expérience faite par M. Paul Lemoine à Chalon-sur-Saône, avec le concours de M. Quincy, « porteur de baguette ».

des murs et leur emplacement fut retrouvé facilement par M. l'abbé Caubin.

3. — *Suggestion.*

Nous nous sommes demandé s'il n'était pas possible d'expliquer ce phénomène par des phénomènes d'autosuggestion quand il s'agissait de la découverte de cours d'eau souterrains, de suggestion par autrui quand il s'agissait de la recherche de masses métalliques.

Pour nous assurer qu'il n'en était rien, nous avons pris des précautions spéciales, dans le cas de l'expérience de la grande Salle (p. 32, fig. 6 et p. 39, expérience IV). Les masses métalliques ont été cachées par M. Paul Lemoine, lequel a disparu complètement pendant le reste des recherches; celles-ci ont été faites par M. l'abbé Caubin, sous la surveillance de M. l'abbé Senderens. M. l'abbé Caubin a trouvé les trois masses (voir *fig.* 6). M. l'abbé Senderens, qui ignorait la position des masses métalliques, a vérifié alors leur emplacement. Il n'en avait d'abord aperçu que deux au lieu des trois signalées par M. l'abbé Caubin. Cette troisième existait cependant : c'était un étui d'or, dissimulé et mal visible.

Ces expériences tendent à montrer que la suggestion ne joue pas de rôle, tout au moins de rôle prédominant dans le phénomène de la rhabdomancie. Elles devaient être multipliées en présence d'un médecin; elles n'ont pu l'être; les circonstances ne s'y étant pas prêtées.

Nous avons admis, comme hypothèse provisoire, que le phénomène était réel, et nous l'avons dès alors étudié comme un phénomène physique ordinaire. Dans la majeure partie des cas, nous avons fait les expériences sans nous cacher en rien de M. l'abbé Caubin. Nous avons pensé qu'il y avait intérêt à ne pas absorber inutilement son attention et à obtenir, au contraire, de lui le maximum de sensibilité pour l'étude du phénomène.

Cela n'est pas à dire que la suggestion ou l'autosuggestion ne puisse jouer aucun rôle. Il nous paraît certain qu'un certain nombre d'expériences, en particulier celles du mercredi soir sur l'azotate d'urane (p. 28, 29) ont été viciées par l'autosuggestion et par la fatigue de l'observateur, qui ignorait à quoi il avait à faire et qui craignait que sa bonne foi ne soit suspectée ; de plus, dans ce cas, il pouvait être gêné par l'action rémanente de ces sels.

Dans toutes ces expériences, la baguette est tenue très fortement entre les mains de l'opérateur; elle y tourne à force, malgré sa volonté ; dans certains cas, quand la baguette tourne à fond, il a beaucoup de peine à la retenir ; quelquefois cela lui est même impossible.

A la fin de ces recherches, au cours desquelles on a fait tourner la baguette plus de 300 fois, les mains de M. l'abbé Caubin étaient couvertes de callosités non seulement à la paume des mains, mais aussi aux articulations des diverses phalanges.

Le neveu de l'abbé Senderens, qui avait spontanément renouvelé les expériences de M. l'abbé Caubin pendant les premiers jours, y avait renoncé à la fin, parce que « cela lui faisait mal aux mains ».

Toutes ces constatations éliminent, à notre sens, l'hypothèse d'une supercherie, consistant à faire tourner la baguette volontairement.

4. — *Nature de la baguette.*

M. l'abbé Caubin se sert normalement d'une baguette d'un bois quelconque (chêne ou noisetier). Mais on sait que certains rhabdomanciens préconisent l'emploi de baguettes métalliques, notamment en cuivre. Nous avons donc demandé à M. l'abbé Caubin d'essayer des baguettes en cuivre, en fer et même en verre ; les résultats ont été médiocres ; ils sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	BAGUETTE DE BOIS	BAGUETTE DE CUIVRE	BAGUETTE DE FER	BAGUETTE DE VERRE
Eau souterraine présumée	+	+		—
Fer	+			—
Cuivre	+	—	+	—
Aluminium	+	—	—	—
Plomb	+	—	—	—
Zinc	+	+		
Argent	+	+	+	
Or	+	+		

La baguette de verre n'a jamais donné de résultats.

Il est curieux de constater que la baguette de cuivre donne avec certains corps des résultats négatifs, par exemple avec le cuivre, l'aluminium, le plomb. Au contraire, avec d'autres corps, elle donne des résultats analogues à ceux de la baguette de bois, par exemple vis-à-vis de l'eau souterraine, de l'argent, de l'or.

On a fait quelques expériences pour mesurer la sensibilité comparée des deux sortes de baguettes [1].

[1] Les chiffres du tableau de la p. 24 indiquent la distance à laquelle la baguette commence à tourner.

	BAGUETTE DE BOIS	BAGUETTE DE CUIVRE	BAGUETTE DE FER
Cuivre 248 grammes.........	6m,30 6 ,50	rien rien	6,30 6,50
— 2 kg. 730.............	9 ,00 10 ,00 8 ,90	rien rien rien	5,15 7,80 7,10
Zinc.........................	6 ,00	6,50	
Argent (5 francs)............	4 ,00	4,50	4,00
— (15 —)...........	5 ,59	faible	
Or (40 francs)...............	8 ,80	8,00	

D'une façon générale on peut dire que les baguettes de cuivre, de fer, sont influencées à peu près à la même distance que la baguette de bois, mais qu'elles ne tournent pas à fond quand on s'approche de l'objet.

Des poignées de caoutchouc ne produisent aucun effet avec la baguette de cuivre ; elles paraissent augmenter un peu la sensibilité de la baguette de coudrier [1].

Le pouvoir isolant de la brique ne paraît pas être rigoureusement le même avec la baguette de bois et avec la baguette de cuivre. En ce qui concerne l'or, on trouve bien pour le pouvoir isolant (v. p. 37) une valeur comprise entre 10 et 20 francs d'or avec les deux baguettes. Mais avec l'eau souterraine présumée, les chiffres ont été un peu différents (voir p. 41) ; la brique se comporte comme un isolant moins parfait vis-à-vis de la baguette de cuivre [2].

5. — *Nature du corps agissant.*

Sauf indication contraire, toutes ces expériences ont été faites dans la cour de l'Institut catholique de Toulouse, près du Labora-

(1) M. Quincy, à Chalon-sur-Saône, se servait d'une baguette en cuivre, comportant une poignée en bois, dans laquelle la baguette tournait à frottement ultra-doux. Les résultats paraissaient les mêmes, qu'il y eût ou non une poignée (P. L.).

(2) Ceci explique que certains rhabdomanciens, recherchant simplement de l'eau et se servant de baguette en cuivre, n'éprouvent pas l'action isolante de la brique (expériences faites à Chalon-sur-Saône par M. Quincy, devant M. Paul Lemoine). Une ou deux briques donnent dans ce cas un isolement très imparfait (P. L.).

toire de M. l'abbé Senderens, en un point A (*fig.* 3) où une reconnaissance préliminaire de M. l'abbé Caubin avait montré l'absence de sources.

Les divers objets à expérimenter étaient placés en A, soit direc-

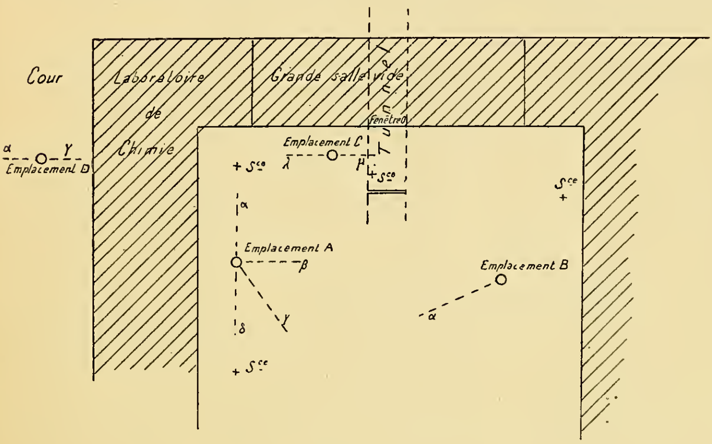


Fig. 3.

tement sur le sol, soit dans un verre, soit dans un papier, et on mesurait à quelle distance se faisait sentir leur action dans les quatre directions α, δ, γ, β (1).

Les expériences ont d'abord porté sur des métaux, puis sur des oxydes et des sels solides, enfin sur des dissolutions.

(1) Le sens $\alpha\delta$ est le sens W.-E. — Les chiffres dans les colonnes indiquent la distance à laquelle la baguette commence à tourner. Les chiffres soulignés indiquent les distances auxquelles la baguette tourne à fond, et dans quelques cas les chiffres obtenus avec des baguettes métalliques.

A. — Métaux (1)

	α	δ	γ	β	
Cuivre 248 gr.	6,30	6,50	»	»	
	6,30	6,50	»	»	Avec baguette de fer.
— 2 kg. 730	9,00	»	10,00	8,90	
	5,15	6,50	7,80	7,10	Avec baguette de fer.
Aluminium 218 gr.	7,40	8,80	10,50	»	La baguette est à fond à 2-3 m. Rien avec les baguettes de fer, cuivre, verre.
— 8 à 9 gr. dans un papier	4,00	4,70	4,65	4,70	
— 10 gr. à découvert	5,10	5,75	6,10	5,70	
	2,65	3,75	3,35	2,70	Distance où la baguette est à fond.
Plomb 1 kg. 615	5,70	7,30	9,50	11,90	
— 0 kg. 665	5,55	6,55	9,50	11,90	
Zinc 2 kg. 575	7,45	9,10	11,30	10,20	On peut garder la baguette entre les mains; mais c'est tout juste.
— 450 kg.	»	»	»	»	6 m. dans une pièce fermée où il y avait une série d'autres objets métalliques (6 m. 50 avec la baguette de cuivre).
Fer 17 kg.*					4 mètres dans les mêmes conditions.
— 2 kg.*	6,05	6,20	8,60	8,50	
— 0 kg. 544	5,70	7,15	8,50	8,30	
— 0 kg. 027	3,40	4,60	5,50	8,00	
Nickel 0 kg. 027	4,80	6,25	7,30	8,00	
Platine 0 kg. 204	6,90	9,00	10,40	11,90	
— 0 kg. 013	4,80	6,00	»	»	
Argent** 5 francs (25 gr.)	1,50	»	»	»	Le mardi soir.
	4,00	»	»	»	Le mercredi matin.
	4,50	»	»	»	— avec baguette de cuivre; la sensibilité n'augmente pas en se rapprochant.
	4,00	»	»	»	Le mercr. mat. avec baguette de fer; la sensibilité n'augmente pas.
— 10 francs (50 gr.)	2,17	»	»	»	Le mardi soir.
— 15 francs (75 gr.)	4,80	»	»	»	Le mercredi matin.
	5,59	»	»	»	— avec baguette de chêne.

(1) Sauf indications contraires, les expériences sur les métaux ont été faites le mercredi matin.

(*) Poids de balance en fonte avec culot en plomb.

(**) Alliage monétaire.

	α	δ	γ	β	
Argent** (Suite)............	5,69	»	»	»	Le mercredi matin avec baguette de chêne et poignée de caoutchouc.
	»	»	»	»	Le mercredi matin action insignifiante avec la baguette de cuivre.
— 16 francs (80 gr.)....	2,80	»	»	»	Le mardi soir.
— 20 francs (100 gr.)...	7,90	9,50	9,80	»	Jeudi matin.
	3,30	3,70	4,30	»	— distance où la baguette est à fond.
Bronze** (sous) 50 gr. (0 fr. 50).	2,17	»	»	»	Le mardi soir.
— — 90 gr. (0 fr. 90).	2,64	2,90	»	»	—
Or** 10 francs ($3^{gr},2$).......	1,90	1,70	»	»	Le mardi soir.
— 50 francs (16 gr.).......	2,48	2,20	»	»	—
— 100 francs (32 gr.).......	3,30	2,66	»	»	—
— 150 francs (48 gr.).......	3,91	3,28	»	»	—
— 200 francs (64 gr.).......	4,80	3,96	»	»	—
— 280 francs ($57^{gr},6$.)	»	4,60	»	»	—

On notera que, contrairement à ce qui se passe pour les autres corps, les distances de sensibilité pour l'or sont moins grandes dans le sens δ que dans le sens α.

	α	δ	γ	β	
— 40 francs (12 gr. 8)	5,70	»	»	»	Le jeudi soir.
— 70 francs (22 gr. 4)	11,40	»	»	»	

B. — Sels solides (1)

	α	δ	γ	β	
SO_4Cu 100 gr...............	7,90	8,40	9,40	»	
— dans du papier.	2,00	1,90	2,45	»	
— une fois enlevé.	»	»	»	»	
dans une assiette de porcelaine pesant 0 kg. 263 : 837 gr..............	6,70	8,90	10,35	8,40	Le mercredi soir.
12 gr.............	5,40	5,50	8,70	8,40	—
3 gr.............	5,40	»	»	»	—
2 gr.............	4,85	»	7,75	7,00	—
$1^{gr},5$ recouvert de papier........	4,70	7,65	7,15	»	—
$0^{gr},0$ (rien) recouvert de papier.........	4,90	»	7,00	6,30	Mercredi soir ; autosuggestion ou action rémanente !
$0^{kg},837$ recouvert de papier...........	4,80	»	6,75	6,25	

(1) Sauf indications contraires, les expériences sur les sels solides ont été faites le jeudi matin.

	α	δ	γ	β	
Assiette neuve $0^{gr},0$ (rien) de SO_4Cu.	3,00	»	4,65	4,35	Mercredi soir; autosuggestion ou action de la porcelaine.
$(AzO_3)_2UO_2$. *a*) $0^{kg},075$ dans du papier...	6,50	6,55	8,20	»	Pas de secousse.
après retrait............	»	»	1,00	»	L'abbé Caubin savait qu'il n'y avait rien. Action rémanente.
Dans du verre.............	6,00	6,55	8,20	»	L'action de la baguette quand on approche est plus forte que lorsque $(AzO_3)_2UO_2$ est dans du papier.
Verre seul.................	2,15	»	»	»	
Verre seul avant l'opération.	2,20	2,60	»	»	
Verre seul sur brique.......	1,65	1,80	»	»	
Après retrait du verre.......	»	»	»	»	Pas d'action rémanente du verre seul.
Toutes ces expériences du mercredi soir paraissent faussées par l'autosuggestion. *b*) ? gr. dans du verre couvert de papier...	1,80	1,90	2,60	2,60	Le mercredi soir (force très faible, « ça et rien c'est la même chose »).
Verre seul, couvert de papier......	1,80	2,10	2,60	2,60	
? gr. dans du pap.	5,80	»	»	»	
34 gr. de porcelaine dans du verre, sans azotate d'urane...........	5,90	8,60	9,55	8,80	
	2,60	3,50	4,50	4,25	Distance où la baguette est à fond. Cette expérience nous a fait penser qu'il y avait certainement autosuggestion.
Porcelaine neuve recouv. de papier sans azotate d'urane...........	5,75	»	6,45	»	
	2,00	»	3,20	»	Distance où la baguette est à fond.
16 gr. $(AzO_3)_2UO_2$ dans un verre recouvert de papier..	6,20	8,60	9,55	8,40	
	2,60	3,25	4,40	4,00	
Toutes ces expériences du mercredi soir paraissent faussées par l'autosuggestion. 2 gr......	6,80	8,55	9,55	»	
	2,85	3,30	4,30	»	
1 gr......	7,00	»	9,15	»	
	2,30	»	3,40	»	

		α	δ	γ	β	
Toutes ces expériences du mercredi soir paraissent faussées par l'autosuggestion.	Verre lavé recouvert de papier...	6,10 2,10	» »	6,65 3,00	» »	Autosuggestion ou action rémanente.
	Id. dans une autre cour (emplacement D).........	5,25 2,50	» »	6,40 2,50	» »	— —
	Verre neuf, recouvert de papier dans une autre cour (emplacement D).........	6,55 2,75	» »	6,50 2,65	» »	— —
(NiO) 100 gr. dans du papier.		6,55	7,00	8,20	»	Pas de secousses.
— dans du verre..		6,05	7,40	8,55	»	Plus en un point situé dans une direction intermédiaire entre α et β.
—		8,10	»	»	»	Sur un autre emplacement (Séminaire) (B).
Le verre seul (ayant contenu le NiO)..		3,85 3,80	3,70 »	» »	» »	Sur un autre emplacement (B).
Après retrait du tout (verre et nickel)..		2,00	2,60	»	»	Action résiduelle. Elle disparaît peu à peu.
PO_4Al. — 75 gr............		6,80	7,60	8,40	»	Action très faible jusqu'à mi-chemin, puis plus forte, mais sans secousses.
$(SO_4)_3\ Al_2$. — 50 gr..........		7,50	8,10	8,90	»	
ThO_2. — 50gr. dans du papier.		6,65 3,95	9,45 5,10	9,10 5,60	» »	Il n'y a pas de secousses, mais on arrive très vite à fond à la distance soulignée.
Id. dans du papier sur brique.......		5,40	7,60	7,85	»	La baguette est à fond quand on arrive sur le corps. Il n'y a pas d'action rémanente.
BaO (probablement hydraté carbonaté). 100 gr........		5,50	6,30	7,75	»	La baguette est à fond, seulement quand on arrive sur le corps. Celui-ci n'a même pas la force de l'oxyde de thorium, posé sur brique.

	α	δ	γ	β	
CaO, un peu hydraté 100 gr.	5,00	5,85	»	»	Pas fort.
SO_4K_2 100 gr.	7,20	8,70	»	»	Pas très fort, malgré cette distance considérable.
$BaCl^2$ 100 gr.	7,60	»	»	»	Plus fort que SO_4K_2 ; mais ne va pas à fond.
C. — Dissolutions [1].					
Verre vide, plus petit que ceux employés précédemment. .	2,70	3,20	»	»	Pas fort, mais il y a quelque chose.
$BaCl_2$ à 10 0/0 — 100 cm^3. . . .	6,20	8,70	»	»	Pas très fort.
320 cm^3.	8,50	9,40	»	»	Pas très fort ; mais plus fort que précédemment (100 cm^3); la baguette ne va pas à fond.
SO_4Ca à 2 0/0 — 125 cm^3 (Solution de plâtre du commerce)	5,50	6,40	»	»	
Eau de Janos.	»	»	»	»	Rien que l'action du verre; presque rien.
SO_4Ca à 2 0/0 — 125 cm^2 (Solution de plâtre du commerce)	4,40	6,00	»	»	A noter ce chiffre plus faible que précédemment.
SO_4Cu à 10 0/0 — 100 cm^3. . .	8,60	9,45	»	»	L'action augmente au fur et à mesure qu'on avance, mais en restant assez faible.
SO_4Fe à 10 0/0 — 100 cm^3. . . .	7,30	8,10	»	»	N'a pas une très grande force.
Eau de Toulouse.	»	»	»	»	Rien que l'action du verre.

(1) Expériences faites le jeudi soir.

D. — *Mélange de plusieurs métaux.*

Aucune expérience systématique n'a été faite dans ce sens ; cependant on a eu l'occasion de mesurer l'influence que les barreaux de fer d'une fenêtre pouvaient avoir sur une masse métallique placée soit devant eux, soit derrière eux.

	SENS β	POUR LE MÊME POIDS, LE CHIFFRE NORMAL ÉTAIT :
Barreaux de fer seuls....................	2 m 80	
avec 248 gr. Cu devant	5,30	6,30 (sens α)
2,730 Cu derrière....	5,30	7,10 (sens β)
218 gr. aluminium ...	9,00[1]	10,50 (sens γ)
204 gr. platine.......	8,30	11,90 (sens β)

Il semble donc que la présence des barreaux de fer ait diminué la distance à laquelle les masses métalliques faisaient sentir leur influence.

4. — *Nature de l'action.*

Il résulte de ces données que l'action de ces différents corps est très variable et qu'elle se manifeste de plusieurs façons :

1° Certains corps ont une action *très pénétrante ;* ils la font sentir à une distance considérable.

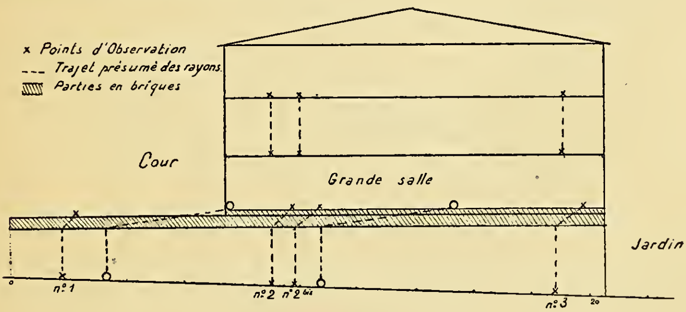


Fig. 4.

Pour un même corps, cette distance est variable suivant le poids du corps employé ; mais elle ne paraît pas augmenter indéfiniment avec celui-ci ; il semble qu'il y ait une distance-limite au delà de laquelle la baguette ne sent rien, quelle que soit la masse du corps.

(1) Le chiffre 7 mètres a été obtenu par le jeune Jean-Baptiste.

Cette distance-limite est variable suivant les corps.

2° D'autres corps agissent avec une *force très grande*. Cette force est variable suivant le poids du corps.

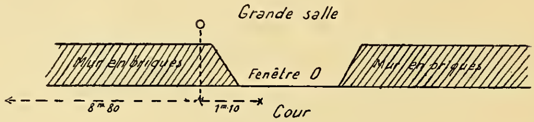


Fig. 5.

Elle dépend surtout de la nature des corps; certains corps font marcher la baguette à fond; d'autres, même en grosses quantités, ne paraissent pas posséder ce pouvoir.

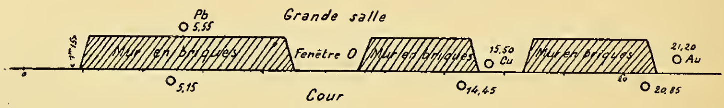


Fig. 6.

Il paraît n'y avoir aucune relation entre la distance de sensibilité et la force.

Certains corps paraissent même produire une double action, ils

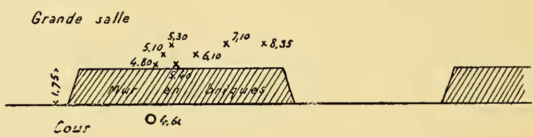


Fig. 7.

agissent sur la baguette à une distance relativement considérable. A une distance plus faible, ils la font marcher à fond et donnent au porteur une sorte de secousse.

3° Quelques-uns possèdent une *action rémanente*, c'est-à-dire que leurs émanations présumées continuent à agir sur la baguette, pendant quelque temps, après même qu'on a enlevé ces corps du voisinage de celle-ci.

Ces divers phénomènes de *pénétration*, de *force*, de *persistance* peuvent se comparer aux phénomènes produits soit par les parfums, soit par la radioactivité.

1. *Pénétration.* — L'action à distance des masses métalliques paraît varier suivant le poids du métal employé.

On peut, pour s'en rendre compte, construire des courbes où l'on

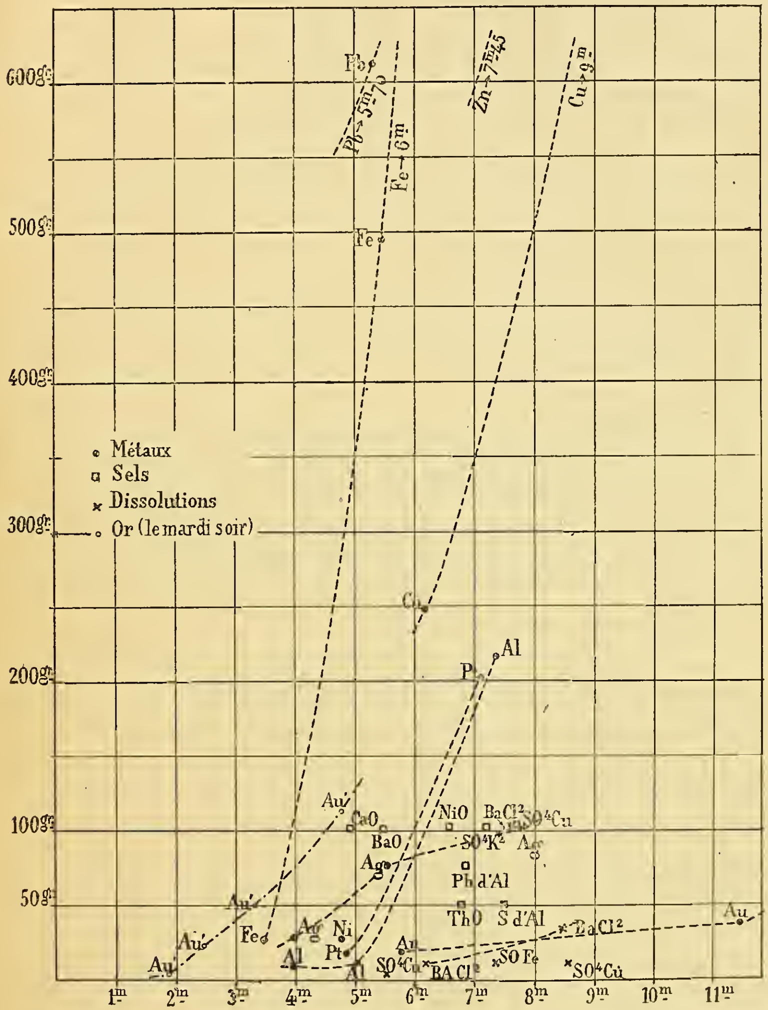


FIG. 8.

porte en abscisses la distance à laquelle l'action commence à être sensible et en ordonnées le poids de matière (*fig.* 8).

Nous avons dû en construire deux séries, l'une se rapportant aux expériences du mardi soir, l'autre aux expériences dn mercredi et du jeudi. La sensibilité de l'observateur paraît, en effet, avoir été très différente ces deux jours-là, comme le montre l'examen des chiffres obtenus pour l'or. (Il est possible que les distances notées le mardi soir, courbes de l'Or, se rapportent aux secousses fortes, les distances notées le mercredi et le jeudi aux secousses faibles, préliminaires.)

L'examen de ces courbes montre que la distance de sensibilité paraît proportionnelle au poids, quand ce poids reste dans des limites convenables. Il semble que cette distance de sensibilité tende vers une *distance-limite*, quelle que soit la masse du corps employé. Ainsi, pour plus de 450 kilogrammes de zinc, on a trouvé 6 mètres comme distance de sensibilité, dans des conditions un peu défavorables, il est vrai, de sorte que l'on ne doit considérer dans ce chiffre que son ordre de grandeur. Il semble de même qu'au-dessous d'un *poids-limite*, la distance de sensibilité reste la même (voir la courbe de l'aluminium).

Il résulte aussi de l'examen de ces courbes que à poids égaux :

1° Les sels sont généralement plus actifs que les métaux ;

2° Les dissolutions sont plus actives que les sels (on sait que les dissolutions sont plus ionisées, donc plus radioactives que les sels) ;

3° Dans une même famille de métaux on a des classifications comme celles-ci :

CaO	BaO	ThO_2
Fe	Ni	

où dans chaque groupe l'activité rhabdoactive croit du premier terme au dernier, en même temps que le poids moléculaire.

4° La classification des métaux, sels et dissolutions essayés est par ordre d'action :

Métaux....	Pb	Fe	Cu	Ni	Pt	Al	Au
Oxydes et sels......	CaO	BaO	NiO	SO_4K_2	$BaCl^2$	$(SO_4)_3Al_2$	
				PO_4Al	SO_4Cu		
Dissolutions........	SO_4Ca		$BaCl_2$		SO_4ThO^2	SO_4Cu	

La distance de sensibilité paraît proportionnelle au poids pour des masses faibles; on a la sensation qu'elle ne croît pas au delà d'une certaine limite.

Ainsi, pour le zinc (plus de 460 kilogrammes), on a trouvé 6 mètres comme distance de sensibilité.

Il paraît y avoir une distance minimum et une distance maximum de sensibilité.

On ne possède encore de chiffres suffisamment nombreux que pour l'or (pièces de monnaie) [1].

II. *Mesure de la force rhabdoactive des différents corps.* — Ainsi qu'il a été dit, les diverses matières agissent sur la baguette d'une façon très variable.

Quelques-unes agissent à grande distance et ne font jamais aller la baguette à fond, si ce n'est parfois lorsque l'observateur arrive immédiatement au-dessus d'elles.

D'autres font aller la baguette à fond à une distance assez faible ou donnent une secousse :

Secousses	Pas de secousses
SO_4Cu	NiO
Az_4O^3U (mercredi soir)	$(AzO_3)_2UO_2$ (jeudi soir)
Cu	PO_4Al
Al	$(SO_4)_3Al_2$

Nous avons fait également quelques mesures dans le but d'essayer de comparer la force rhabdoactive de divers corps.

A cet effet, deux masses métalliques ont été placées à une certaine distance l'une de l'autre, et l'on a cherché une position où la baguette était également attirée par ces deux masses.

Nous avons fait ainsi les expériences suivantes :

$1^k,070$ Cu	à	$5^m,05$	=	$1^k,710$ Cu	à	$3^m,75$
$1^k,710$ Cu	à	$4^m,55$	=	$1^k,070$ Cu		$4^m,30$
$2^k,460$ Cu	à	$6^m,40$	=	$0^k,323$ Cu		$2^m,45$
$0^k,323$ Cu	à	$3^m,30$	=	$2^k,460$ Cu		$5^m,60$
218 gr. Al	à	$3^m,30$	=	$2^k,783$ Cu		$5^m,60$
$2^k,783$ Cu	à	$5^m,00$	=	218 gr. Al		$3^m,85$

Elles montrent que le procédé peut être susceptible d'aboutir à des mesures ; mais qu'il faut s'en servir comme d'une balance qui ne serait pas juste, qu'il faut adopter le système de la double pesée.

On a alors fait les expériences suivantes :

Une masse de cuivre ($1^{kg},210$) a été placée à 3 mètres de l'observateur ; une autre masse de $1^{kg},580$, placée à 5 mètres, équilibrait son

[1] Ces chiffres se rapportent à des expériences, faites le mardi soir. Ils ne sont pas comparables à ceux obtenus pour les jours suivants avec les autres métaux.
La distance de sensibilité est variable suivant les dispositions et l'état d'entraînement de l'observateur.

effet, de façon à annuler l'action sur la baguette placée entre les deux masses. L'observateur s'en assurait en se déplaçant légèrement tantôt en avant, tantôt en arrière.

Ceci fait, on a remplacé la masse de $1^{kg},580$ de cuivre par d'autres masses métalliques, dont on faisait varier le poids jusqu'à ce que l'équilibre soit obtenu pour la même position de l'observateur.

On a eu ainsi :

1,580 gr. Cu	à 5 mètres	= 1,210 gr. Cu	à $3^m,85$
935 Pb	—	—	—
195 Al	—	—	—
550 Zn	—	—	—
12,8 Au (1) (40 francs).		—	—

Ce qui permet de mesurer, au moins grossièrement, le pouvoir rhabdoactif des divers métaux.

H. Mager (*Les moyens de découvrir les eaux souterraines et de les utiliser.* Paris, Dunod et Pinat, 1912, p. 359-361) a signalé des faits analogues et a indiqué l'équivalence rhabdoactive des métaux suivants, équivalence obtenue d'ailleurs par un procédé différent :

B) 10 kgr. acier = $1^k,400$ plomb = 1 kgr. cuivre = $0^k,050$ Nickel = $0^k,010$ d'argent.
C) 100 kgr. cuivre = 1 kgr. argent.
D) $19^k,5$ cuivre = 1 kgr. nickel.
E) $3^k,3$ cuivre = 1 kgr. aluminium.
F) $14^k,5$ cuivre = 1 kgr. zinc.
G) $1^k,7$ cuivre = 1 kgr. plomb.
H) $7^k,4$ cuivre = $0^k,006$ or (20 francs).
I) $2^k,5$ cuivre = $0^k,025$ argent (5 francs).

Le livre de M. Mager ayant paru après les expériences que je relate, il est difficile de parler de suggestion pour expliquer l'analogie des résultats.

Ceux-ci ne peuvent d'ailleurs être comparés que d'une façon grossière ; car j'ai montré précédemment l'influence sur la baguette du poids du métal mis en expérience et celle de la distance.

Ainsi, par l'examen des courbes (*fig.* 8), on peut se rendre compte que l'argent, par exemple, serait moins actif que l'aluminium pour un poids faible et à une distance de 4 mètres et qu'il serait plus actif pour des poids plus élevés et aux distances supérieures à 6 mètres.

Malgré ces causes d'erreur, qui peuvent être considérables, il m'a paru

(1) Alliage monétaire.

intéressant de rendre ces données comparables en les rapportant à 1 gramme d'or, puis, pour les expériences de Mager, à 124 grammes de cuivre, chiffre obtenu dans mes expériences.

On a ainsi :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Or	1								
Argent		1,24	1,24						1,24
Nickel		6,20		6,30					
Aluminium	15				37				
Zinc	43					8,5			
Plomb	73	173					73		
Cuivre	124							3^{k}, 700	
Acier		1^{k}, 240							

chiffres qui sont très suffisamment comparables, étant donné que l'on ne connaît pas les conditions exactes des expériences.

La même méthode a permis de mesurer le pouvoir isolant de la brique.

$19^{gr},2$	(60 francs) Au	+	1 brique	=	1,210 gr. Cu	à $3^{m},85$
$25^{gr},6$	(80 francs) Au	+	2 briques		—	—
32^{gr}	(100 francs) Au	+	3 briques		—	—
$35^{gr},2$	(110 francs) Au	+	4 briques		—	—
	(120 francs d'or est trop fort)					
$38^{gr},4$	(120 francs) Au	+	5 briques		—	—

On peut en déduire que l'épaisseur d'une brique annihile l'effet rhabdoactif de 16 francs d'or environ.

4 ronds de caoutchouc + 30 fr. d'or = 1,210 gr. Cu, à $3^{m},85$.

Le rond de caoutchouc (1) annihile donc l'effet rhabdoactif de 2 fr. 50 d'or environ.

Une expérience, unique, a été faite pour se rendre compte de la décroissance de la force rhabdoactive avec la distance : 40 francs d'or à $5^{m},70$ ont la même force que 70 francs d'or à $11^{m},40$.

III. *Action rémanente.* — Elle n'a pu être observée avec certitude que pour un certain nombre de corps.

SO_4Cu (le mercredi seulement)
$(AzO_3)_2UO_2$ (mercredi soir et jeudi matin)
NiO

(1) Un seul rond placé sous les pieds de l'opérateur ne produit aucun effet.

Elle disparaît assez vite (5 à 10 minutes environ) ; aucune observation n'a été faite sur la vitesse de disparition.

Il semble, d'après certaines observations dues au hasard et malheureusement pas faites méthodiquement, que le cuivre possède également une action rémanente.

7. — *Phénomènes de réfraction?*

Les expériences préliminaires, faites pour s'assurer de la réalité du phénomène, nous avaient montré que le porteur de baguette décelait bien les masses métalliques cachées, mais qu'il les décelait avec une légère erreur, qui paraissait rester à peu près constante.

Ces expériences ont donc été renouvelées pour voir si cette différence était réelle et si elle pouvait s'expliquer d'une façon quelconque.

I. L'abbé Caubin avait noté sous le tunnel l'existence de quatre filets d'eau souterraine présumés (*fig.* 4).

Il les a retrouvés dans la grande salle, mais avec une légère erreur, erreur qui d'ailleurs ne s'est pas reproduite aux étages supérieurs [1].

	Tunnel	Rez-de-chaussée	1er étage	2e étage
N° 1.....	1,91	2,34 (D = 0,43)	»	»
N° 2.....	9,00	9,85 (D = 0,83)	9,12	9,00
N° 2 *bis*..	9,61	10,58 (D = 0,83)	9,86	9,85
N° 3.....	18,81	19,91 (D = 1,10)	19,00	19,32

La figure 4 (p. 31) schématise ces données.

On remarquera que pour la grande salle, où il y a une épaisseur double de briques (briques du tunnel, plus carrelage), la différence moyenne $0^{m},90$ est sensiblement double de la différence $0^{m},45$ observée pour le tunnel au point n° 1, où il y a une épaisseur de brique moitié moindre.

Cette déviation peut donc être attribuée à une réfraction à travers la brique, réfraction sensiblement proportionnelle à l'épaisseur de briques traversée.

(1) Les distances sont comptées à partir d'une origine commune (*fig.* 4, 5, 6, 7).

II. L'expérience a été renouvelée en mettant une masse de cuivre (2^{kg},730) en deux points du tunnel. Son influence a été notée au rez-de-chaussée avec une erreur notable.

Tunnel....................	2^{m},60	10^{m},70
Rez-de-chaussée...........	7^{m},90	14^{m},60

D'autres expériences ont été faites dans le sens horizontal.

III. Le métal (cuivre 2^{kg},730) a été placé dans la salle dallée du rez-de-chaussée. L'observateur s'est placé au dehors. Il a senti l'approche de l'objet à 1^{m},10 et à 8^{m},80.

IV. Différents corps ayant été placés dans la grande salle, M. l'abbé Caubin les a recherchés au dehors (*fig.* 6). Il a signalé leur présence à tous avec une certaine erreur :

0^{m},50 pour	Pb	la déviation	était toujours à droite.
1^{m},05 —	Cu	—	—
0^{m},35 —	Au	—	—

V. L'expérience a été renouvelée dans l'autre sens (*fig.* 7). La masse de cuivre a été placée à une distance moyenne de 4^{m},61 (entre 4^{m},45 et 4^{m},78). M. l'abbé Caubin l'a sentie aux distances suivantes :

7^{m},10 (entre 5^{m},30 et 8^{m},35, avec maximum à 7^{m},10) étant sur le dallage en briques de la salle et ne touchant pas le mur (déviation à droite de *2^{m},51*).

6^{m},10 (entre 5^{m},10 et —[1] avec maximum à 6^{m},10) étant sur le dallage et touchant le mur (déviation à droite de *1^{m},51*).

La masse de cuivre a été ensuite rapprochée du mur jusqu'à le toucher, tout en restant à la même distance de 4^{m},61 de l'origine. M. l'abbé Caubin l'a sentie à :

5^{m},40 (entre 4^{m},80 et —[1] avec maximum à 5^{m},40) étant sur le dallage et touchant le mur (déviation à droite de *0^{m},80*).

VI. Au bout d'un certain temps, pour laisser les émanations possibles du cuivre se dissiper, ces expériences ont été reprises avec 100 grammes d'oxyde de nickel, placé à 4^{m},25 de l'origine. M. l'abbé Caubin étant dans la salle et touchant le mur, l'a senti entre 4 mètres et 6^{m},10 avec maximum à 4^{m},95 (déviation à droite de *0^{m},70*).

Conclusions. — Il résulte de ces expériences que les émanations provenant des corps métalliques et traversant une paroi de briques subissent une déviation assez considérable.

Cette déviation paraît être de 1 mètre environ (il ne s'agit que de

(1) Chiffre non mesuré.

l'ordre de grandeur; des mesures précises sont évidemment sujettes à de nombreuses causes d'erreurs), l'épaisseur du mur en brique étant de $0^m,60$ environ.

S'il s'agissait de rayons acoustiques ou lumineux, on dirait qu'il y a *réfraction*.

5. — *Isolement.*

Ces recherches nous ont amené à nous demander si la brique [1] ne possédait pas un pouvoir d'absorption pour ces rayons rhabdoactifs présumés et si, par suite, elle ne possédait pas un pouvoir isolant comme M. l'abbé Senderens avait cru le reconnaître dans des expériences antérieures.

Ces expériences ont été faites devant la grande salle de l'Institut catholique.

100 grammes d'oxyde de nickel ont été posés dans un papier ; on a essayé à quelle distance M. l'abbé Caubin ressentait leur effet [2] :

	λ	μ
Sur le sol....................	$5^m,20$	$7^m,15$
Isolé par une brique..........	$3^m,65$	$5^m,65$
Isolé par deux briques........	$3^m,20$	$4^m,90$

L'expérience a été ensuite renversée ; on a isolé le sel au moyen de briques et cherché la distance à laquelle M. l'abbé Caubin ressentait leur action :

Sel isolé par une brique.......	$4^m,30$	$4^m,90$
— deux briques.....	$3^m,60$	$4^m,25$

On a tenté ensuite quelques autres expériences :

M. l'abbé Caubin a été placé à une distance d'environ $3^m,50$ de l'oxyde de nickel et isolé au moyen de trois briques ; la baguette ne tournait pas. Dès qu'un homme le touchait la baguette recommençait à tourner. Un fil de sonnerie électrique rétablissait le contact, qu'il soit tenu par un homme au moyen du cuivre ou du coton qui le recouvre ou qu'il traîne à terre. Si l'homme de communication se place sur une brique qui l'isole, ou s'il se place en arrière, la baguette ne tourne pas. Si cet homme ou une chaîne d'hommes se

(1) Briques de 5 centimètres de hauteur.
On a essayé les carreaux de porcelaine comme isolant, on n'a obtenu aucun résultat.

(2) Les directions λ et μ sont indiquées figure 3, page 25.

transporte en avant, la baguette tourne avec d'autant plus de force que l'extrémité de cette chaîne d'hommes est plus près de l'oxyde de nickel.

Le porteur de baguette, levant un pied, la baguette cesse de tourner ; si on le touche directement ou indirectement, celle-ci se remet à tourner.

Il est à noter que la brique se comporte comme un isolant moins parfait vis-à-vis de la baguette de cuivre. Sur une source présumée, on a obtenu les résultats suivants:

4 briques..............	Baguette de coudrier peu sensible.
	Baguette de cuivre diminuée.
5 briques..............	Baguette de coudrier à peine sensible.
—	Sensiblité moins grande avec la baguette de Cu; vitesse de rotation diminuée.
6 briques..............	Baguette de Cu presque annihilée.

Des expériences ont été faites ultérieurement en plaçant de l'or sur une brique (emplacement A); elles ont confirmé ces résultats.

Il convient d'ajouter que, dans la grande salle, dallée en carreaux, il était impossible à M. l'abbé Caubin de déceler au moyen de la baguette 4 masses métalliques, posées sur les carreaux.

D'autres expériences ont été faites avec du cuivre.

Du sulfate de cuivre a été placé isolé dans du verre (verre à pied surmonté d'un entonnoir) ; la distance de sensibilité est tombée de $6^m,30$ ou de $5^m,10$ à $3^m,20$; quand on enlève les couvercles elle remonte progressivement à $4^m,35$ et $5^m,10$.

Mais, chose curieuse, un double isolement ne produit aucun effet ; la distance de sensibilité reste $5^m,10$.

9. — *Modifications de la sensibilité de l'observateur.*

En dehors de l'action isolante de la brique, on peut produire diverses modifications à la sensibilité de l'observateur :

La baguette cesse de tourner si les deux poignets de l'opérateur sont reliés d'une façon quelconque : fil électrique, brique, verre. Quand il tient deux baguettes, une seule paraît susceptible de tourner.

Les poignets de l'opérateur étant ainsi reliés par un fil quelconque, des hommes en communication avec la terre peuvent le toucher ; il ne se produit rien.

Il est à noter que si un homme, même isolé par une brique, touche de ses deux mains les poignets du « porteur de baguette », la baguette continue à tourner.

Le cuivre étant posé sur un mur de briques, la baguette est susceptible de tourner (probablement à cause du mortier qui est conducteur). Une brique supplémentaire rajoutée arrête plus ou moins le phénomène.

L'isolement est le même quand l'opérateur est posé sur des briques ou sur une plaque de fer posée sur des briques. Dans ce cas, une plaque de cuivre établissant la communication entre le sol et la plaque de fer permet de faire tourner à nouveau la baguette.

Une plaque de cuivre mise dans la ceinture de l'opérateur diminue plutôt la faculté qu'a la baguette de tourner.

Une plaque de fer, un tabouret en bois ne constituent pas des isolants.

Conclusions.

Il semble difficile d'expliquer tous ces faits par des phénomènes de suggestion. Ils sont trop nombreux et ils constituent un ensemble trop conforme aux possibilités physiques.

Il paraît plus probable que divers corps produisent des émanations, que nous appellerions *rhabdoactives.*

Celles-ci sont susceptibles d'agir sur certains organismes pour y produire les réflexes qui font tourner la baguette.

Ces divers phénomènes permettent d'expliquer certains faits, que les rhabdomanciens ont toujours affirmé et qui ont toujours étonné et rendus sceptiques les hommes de science et en particulier certains géologues.

Puisque le *pouvoir rhabdoactif* est si universellement répandu, il n'est pas absurde de supposer que les eaux souterraines le possèdent, grâce aux sels dissous qu'elles contiennent. Ces émanations rhabdoactives disparaîtraient plus ou moins rapidement à l'air, ce qui expliquerait pourquoi dans certains cas la baguette ne pourrait mettre en évidence ni les cours d'eau superficiels, ni les conduites artificielles (aqueducs, etc.). Cette absence d'action peut dans d'autres cas être due à la nature de la baguette employée (voir p. 23).

DEUXIÈME PARTIE

EXPÉRIENCES DIVERSES

Par M. Paul LEMOINE

J'ai également eu l'occasion de faire faire devant moi un certain nombre d'autres expériences dont il me paraît intéressant de rapporter quelques-unes.

Une série d'expériences a été faite à Chalon-sur-Saône; le baguettisant était M. Quincy, instituteur en retraite, âgé d'environ soixante ans. Les expériences ont porté tout d'abord sur le jardin de M. Camille Rouyer, avoué, habitant 50, rue d'Autun, maison appar-

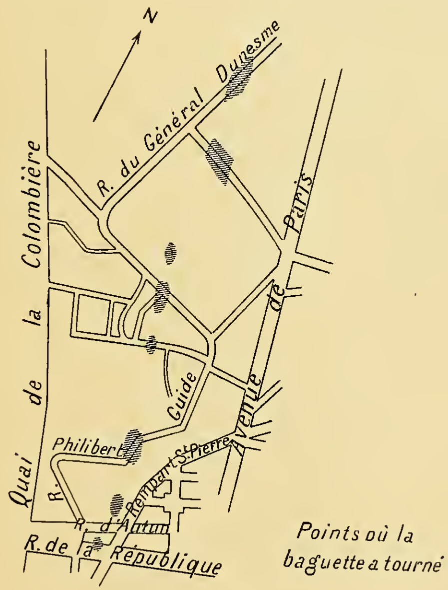


Fig. 9.

tenant à M. Janin Besson; elles ont montré l'existence dans ce jardin d'une zone active qui a été repérée à deux jours différents d'une façon concordante; il est à noter qu'il existe réellement dans les caves de la maison de M. Rouyer et sur l'emplacement déterminé par M. Quincy une source dont ce dernier ignorait l'existence; de plus, en hiver ou à la suite de fortes pluies, il existe d'autres sources qui disparaissent en été et pendant les périodes de sécheresse, sources éphémères dont M. Quincy ignorait l'existence.

J'ai alors cherché à faire étudier par M. Quincy le prolongement de cette zone aquifère vers le Nord; une série d'expériences ont été faites sur les rues du faubourg de Saint-Cosme que M. Quincy ne connaissait pas; par suite des détours effectués au cours de ces expériences il était complètement perdu dans ce faubourg et croyait même avoir découvert un second ruisseau souterrain ; or tous les points reconnus ont été portés sur le plan et s'alignent d'une façon admirable. La largeur de la zone aquifère semble s'accroître vers l'amont, soit que sa profondeur soit plus grande, soit que sa largeur augmente réellement (*fig.* 9).

Etude faite au moyen de la baguette divinatoire aux environs de Bray-sur-Seine et de Montigny-le-Guesdier (*fig.* 10).

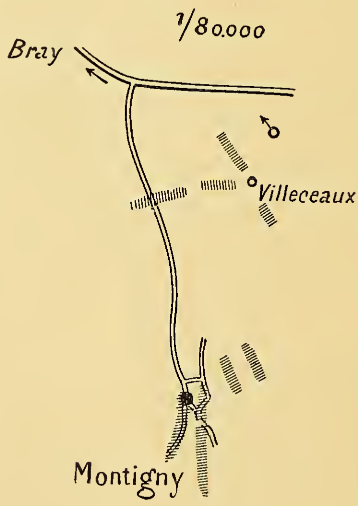


Fig. 10.

L'eau circulant dans la région du Sud de Bray-sur-Seine, au moyen de fissures dans la craie, qu'une étude préalable m'avait montré être assez localisées, j'ai pensé que cette région était très favorable pour y faire des recherches au moyen de la baguette divinatoire.

M. Barba, ingénieur à la Compagnie générale des Eaux à Paris, qui possède un pouvoir très remarquable de rhabdomancien, a bien voulu m'y accompagner.

Environs de la source de Villeceaux. — La source de Villeceaux est extrêmement abondante ; elle naît dans un fond bas à une altitude voisine de 63 mètres, et elle est constituée par une multitude de petites sources qui se trouvent les unes sur le flanc droit du vallon, les autres sur le flanc gauche et enfin quelques-unes dans le fond du vallon près du château de Villeceaux. On pourrait croire *a priori* qu'il y a là le débouché d'une rivière souterraine qui passant à l'Est de Montigny-le-Guesdier vient de la région de Compigny. Cette hypothèse est peut-être partiellement vraie, mais elle ne correspond pas complètement à la réalité des choses, ainsi que l'on peut s'en rendre compte par un examen détaillé sur le terrain.

Tout d'abord on voit bien que les sources de la rive droite du vallon qui alimentent un petit lavoir proviennent du plateau, probablement de la région qui s'étend à l'Est entre Villeceaux et Villenauxe-la-Petite. Aucune expérience à la baguette n'a été faite sur ce point.

Les sources qui se trouvent près du château de Villeceaux et un puits qui a été creusé dans la ferme de ce château sont alimentés, au dire du plus vieil ouvrier de cette exploitation, par des sources venant également du plateau. La baguette a mis en évidence effectivement des fractures supposées venant des plateaux, et elle n'a mis en évidence aucune zone aquifère suivant le vallon.

Enfin il existe un grand nombre de sources, drainées par un même fossé, dans lequel les apparitions d'eau sont multiples, sources qui se trouvent à l'Ouest sur la rive gauche de la dépression de Villeceaux. La baguette a permis de montrer que les portions aval de ces sources sont tout à fait limitées au bord de la vallée ; mais plus haut, à hauteur du château de Villeceaux, il existe sur le flanc gauche de la vallée un point où la baguette a mis en évidence une zone aquifère très importante. Un recoupement fait ensuite sur la route de Bray-sur-Seine à Montigny-le-Guesdier a mis en évidence une autre zone aquifère.

Une série d'autres zones aquifères ont été reconnues aux environs de Montigny-le-Guesdier. Les deux plus importantes sont effectivement jalonnées par les puits du village.

Dans ces expériences, on ne peut parler de suggestion de M. Barba par moi-même ; car je croyais alors que le régime hydrologique était tout autre.

Ces considérations m'ont porté à rechercher un certain nombre de personnes susceptibles de faire marcher la baguette, mais ne faisant pas profession de cette disposition spéciale ; j'en ai d'ailleurs trouvé sans difficulté ; il y a un grand nombre de ces individus ; on peut admettre comme première approximation qu'il y a environ 10 à 20 0/0 des hommes qui possèdent ce pouvoir; je l'ai trouvé en particulier chez mon beau-frère, M. Barba, ingénieur à la Compagnie générale des eaux. Depuis la constatation de cette sensibilité, M. Barba a fait de nombreuses expériences sur lui-même dans la banlieue de Paris, et il a pu mettre en évidence un grand nombre de conduites de gaz et d'eau.

L'une de ces expériences a été faite à Massy-Verrières en présence de M. Vlès, qui a bien voulu cinématographier les opérations. Il s'agissait de mettre en évidence un petit raccord en plomb qui reliait un bec de gaz à la conduite principale. Le film développé montre parfaitement la coïncidence du mouvement de la baguette avec le passage sur la ligne droite qui réunit la conduite au bec de gaz ; il est à noter que, dans ces expériences, l'opérateur avait les yeux bandés.

Une autre série d'expériences qui a été également cinématographiée consistait à présenter au baguettisant qui avait les yeux bandés une masse métallique au bout d'un bâton; ce bâton permettait de mettre à volonté la masse métallique dans le champ de sensibilité de l'opérateur ou de la placer en dehors; les coïncidences obtenues ont été très remarquables. Enfin une dernière série d'expériences ont été faites avec un pendule. Lorsque le baguettisant laisse d'une main pendre un pendule, par exemple une montre au bout de sa chaîne, et tient de l'autre main l'extrémité de la chaîne, ce pendule, au lieu d'osciller dans un plan, se met à tourner, suivant les masses métalliques agissantes, il tourne tantôt dans le sens des aiguilles d'une montre pour l'or, tantôt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour l'argent.

Expériences défavorables.

A côté de ces expériences favorables, il convient d'en citer un certain nombre d'autres qui ont été absolument négatives, en particulier des recherches de masses métalliques cachées dans des boîtes ont été faites dans le jardin de l'école des Mines ; quelques-unes de ces boîtes contenaient des masses métalliques, d'autres étaient vides; les résultats obtenus sont plutôt inférieurs à ceux que donnerait le calcul des probabilités. Il semble que le phénomène soit très complexe, qu'il faille des conditions spéciales pour obtenir une sensibilité maximum, en particulier il semble que la fatigue de l'observateur joue un rôle prédominant ; en effet, tandis que les premières expériences donnent généralement un résultat favorable, les dernières donnent généralement un résultat nettement défavorable ; d'autre part, la plupart des résultats négatifs ont été obtenus lorsque la pression atmosphérique était faible.

M. Lauby, docteur ès sciences, collaborateur au Service de la Carte géologique de France, qui possède également la sensibilité rhabdoactive, m'a dit avoir souvent constaté le même fait.

Il me paraît donc que lorsque l'on a des résultats négatifs, il ne faut pas en déduire immédiatement la non-existence du phénomène ou des supercheries de la part du baguettisant ; il est plus scientifique de chercher quelles sont les causes qui peuvent avoir empêché le phénomène de se manifester.

Tours, imprimerie Deslis Frères et Cie, 6, rue Gambetta.

Pour les échanges, adresser toutes les demandes et toutes les publications à

M. HENRI TEULIÉ,

BIBLIOTHÉCAIRE DE L'UNIVERSITÉ

RENNES (France).

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME V

N^{os} 3-4

1913

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

1913

Le Secrétaire-Gérant,

TERROINE.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1913

Président : M. Desgrez, 78, boulevard Saint-Germain.
Vice-Président : M. Pelegrin, 1, rue Vauquelin.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Fauré-Frémiet, 46, rue des Écoles.
Vice-Secrétaire des séances : M. Germain, 55, rue de Buffon.
Secrétaire du Bulletin : M. Terroine, 35, rue de l'Arbalète.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Schaeffer, 4, rue Linné.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Lundis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit [illegible] leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires [illegible] publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, Ve.

QUELQUES EXPÉRIENCES SUR LE PENDULE DES SOURCIERS;

Par M. MARAGE

Depuis qu'une commission a été nommée par l'Académie des Sciences pour étudier la question des sourciers, il a paru un grand nombre de travaux.

Je pense que, dans l'état actuel de nos connaissances, il faut limiter ces recherches à un seul point qui est le suivant :

Existe-t-il actuellement des sujets capables d'indiquer en dehors de tout sondage et de tout phénomène apparent de nature géologique, botanique ou physique, l'emplacement, la profondeur et le débit de courants d'eau artificiels ou naturels?

Lorsqu'il sera prouvé, d'une façon indiscutable, que la réponse à cette question est nettement affirmative, il sera temps de faire des expériences pour chercher l'explication du phénomène.

C'est pourquoi, aujourd'hui, j'ai l'honneur de présenter à la Société deux sortes d'expériences faites en Tunisie par M. Landesque, conducteur des ponts et chaussées.

Cet observateur, qui n'est qu'un sourcier amateur, se sert uniquement du pendule, la baguette ne donnant, entre ses mains, aucun résultat [1].

I. — Expériences sur les conduites d'eau

1° Existence du courant d'eau. — *a*) M. Larcade, sourcier professionnel, est placé par M. Landesque sur une conduite d'eau.

Quand l'eau passe, le pendule oscille, quand l'eau ne passe pas, le pendule reste vertical.

L'expérience, renouvelée plusieurs fois, réussit toujours.

b) M. Landesque refait les mêmes expériences dans les mêmes conditions, il réussit toujours également; quand l'eau passe, et seulement quand elle passe, le pendule oscille.

Objections. — M. Landesque ne semble pas attacher une grande

[1] Ces recherches ont été décrites en détail par M. Landesque dans un rapport à l'ingénieur en chef des ponts et chaussées de Tunisie; ce rapport a été envoyé à la commission nommée par l'Académie des Sciences.

importance à ces expériences, car, dans son rapport de 600 lignes contenues dans 21 pages, elles n'occupent que 7 lignes ; or, ces expériences sont capitales, car si elles étaient reconnues exactes, elles résoudraient définitivement la question que nous étudions aujourd'hui.

Il conviendrait donc de refaire ces expériences sur les conduites d'eau en se plaçant dans des conditions de contrôle telles qu'il ne pourrait être fait aucune objection ; en particulier, il faudrait être certain que le sourcier n'est guidé, ni par la vue, ni par le son, ni par la suggestion ; de plus, il faudrait faire un grand nombre d'expériences.

2° **Détermination de la direction et du sens du courant d'eau.** — *a*) Le plan des oscillations du pendule a toujours, pour un même sourcier, la même direction par rapport à la direction du courant d'eau.

Pour M. Landesque, ce plan des oscillations fait toujours un angle de 25° à gauche avec la direction du courant, l'observateur regardant dans le sens de l'écoulement de l'eau.

b) Pour M. Larcade, et pour d'autres sourciers, le tracé du plan des oscillations se confond avec la direction du courant.

c) Pour d'autres sujets, le plan des oscillations fait un angle de 90° avec la direction du courant.

3° **Relation entre le débit et l'amplitude des oscillations.** — L'amplitude des oscillations augmente avec le débit, elle est toujours sensiblement la même pour un même débit.

M. Landesque a cherché la loi donnant la relation entre le débit et l'amplitude des oscillations, il a construit une courbe de la façon suivante :

Il se plaçait sur des conduites d'eau de débit connu ; le pendule ayant toujours la même longueur, il lisait sur un mètre placé à terre la longueur interceptée par l'oscillation la plus grande; le débit variait de 0 à 300 mètres cubes par 24 heures. Sur l'axe des abscisses il portait les amplitudes des oscillations mesurées comme il a été indiqué ; sur l'axe des ordonnées, il portait les débits en mètres cubes. Il a déterminé ainsi 16 points d'une courbe qui, joints ensemble, se rapprochaient d'une courbe régulière ayant la forme d'une parabole (*fig.* 1). L'approximation est la suivante :

Entre	0 et 50^{m3}	par 24 h.	les débits	peuvent être obtenus	à 5^{m3}	près
—	50 et 100	—	—	—	à 10^{m3}	—
—	100 et 200	—	—	—	à 25^{m3}	—
—	200 et 300	—	—	—	à 50^{m3}	—

Objections. — Les expériences sont très intéressantes, mais comme je l'ai dit précédemment, étant donné l'importance de la question, elles doivent être reprises dans des conditions de contrôle indiscutables.

II. — Expériences sur les sources naturelles

1° **Découverte des sources.** — En employant le procédé du pendule, M. Landesque a déterminé sept points d'eau, près de la route n° 38 d'Enfidaville à Kairouan, et deux points d'eau près de la route n° 3 d'Enfidaville à Zaghouan. Dans les neuf points, les sondages permirent de trouver de l'eau.

2° **Profondeur des sources.** — Dans les neuf cas, au moyen du pendule, M. Landesque avait indiqué d'avance la profondeur maximum de la couche imperméable, cette profondeur variait entre 5 et 18 mètres comme l'indique le tableau suivant ; dans tous les points indiqués des sondages ont été faits.

Les figures 2, 3 et 4, indiquent les coupes des terrains trouvés aux kilomètres. Dans le mémoire original se trouvent les neuf coupes des terrains des neuf sondages.

Les profondeurs prévues et trouvées sont résumées dans le tableau suivant :

ROUTE N° 3

Emplacement	Profondeur prévue	Profondeur trouvée
4.112 kilom.	18	17,10
8.120	15	16
15.893	13	13
21.253	13	*25*
23.750	11	15,80
27.455	12	12,20
31.693	5	5,50

ROUTE N° 38

8.930	18	16
19.540	18	*3*

Objections. — Sur neuf expériences, il y a eu deux erreurs complètes ; la première au kilomètre 21, route 38, la deuxième au kilomètre 19, route 3.

Des sondages supplémentaires ont montré que ces erreurs étaient dues aux causes suivantes :

Pour le kilomètre 21, il y avait deux courants d'eau parallèles, le deuxième courant, que M. Landesque ne s'était pas donné la peine de chercher, influençait les oscillations du pendule, produites sous l'influence du premier courant.

Pour le kilomètre 19, route 3, le courant avait une largeur de 30 mètres, et M. Landesque ne s'était pas donné la peine de déterminer la largeur du courant.

Des sondages supplémentaires ont permis de prouver qu'il s'agissait, non pas de nappes d'eau, mais de courants d'eau ; il ne semble donc pas que l'on puisse objecter qu'il y avait une vaste nappe d'eau souterraine et par conséquent de l'eau partout.

3° **Débits.** — M. Landesque avait indiqué les débits, mais comme ces chiffres n'ont pas été vérifiés puisque l'on a fait des sondages et non des puits, il n'y a pas lieu d'insister.

CONCLUSIONS

Ces expériences sont très intéressantes parce qu'elles ont été faites sans parti pris et avec un véritable esprit scientifique; j'ai conseillé à M. Landesque de les continuer en prenant les précautions que j'ai indiquées, j'espère dans quelques mois pouvoir communiquer à la Société les résultats de ces nouvelles recherches.

NOTES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

COMPLÉMENTS A NOS IDENTITÉS FONDAMENTALES (1)

Par M. le Dr Joseph DESCHAMPS.

Pour la commodité de l'exposition, nous allons réunir ici un certain nombre d'identités nouvelles et de relations dont nous aurons à faire usage dans les applications que nous nous proposons de joindre par la suite aux premières déjà données.

I. — Changements de variables dans les formes quadratiques.

1° *Forme quadratique à deux variables.* — Considérons la forme

$$S(xy) \equiv S \equiv ax^2 + by^2 + 2hxy$$

à laquelle se rattache son discriminant

$$C = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2,$$

et aussi le déterminant réciproque de celui-ci :

$$Cr = \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}.$$

Remplaçons les variables x et y par de nouvelles variables λ et μ, les formules de transformation étant supposées linéaires et de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_1\lambda + x_2\mu \\ y = y_1\lambda + y_2\mu, \end{cases}$$

x_1, y_1, x_2 et y_2 désignant des constantes.

Par cette substitution, la fonction $S(xy)$ devient une fonction $S(\lambda\mu)$ dont nous nous proposons de trouver l'expression.

Pour cela nous rappellerons qu'on a l'identité

$$S(xy) \equiv - \begin{vmatrix} A & H & x \\ H & B & y \\ x & y & 0 \end{vmatrix}.$$

(1) Voir *Bulletin de la Société Philomatique*, année 1909, t. I, nos 4-5-6, et année 1910, t. II, n° 1.

En y remplaçant x et y par leurs valeurs (1), il vient

$$S(x_1\lambda + x_2\mu,\ y_1\lambda + y_2\mu) \equiv -\begin{vmatrix} A & H & x_1\lambda + x_2\mu \\ H & B & y_1\lambda + y_2\mu \\ x_1\lambda + x_2\mu & y_1\lambda + y_2\mu & 0 \end{vmatrix},$$

d'où en développant le second membre en somme de déterminants :

$$S(x_1\lambda + x_2\mu,\ y_1\lambda + y_2\mu) \equiv -\begin{vmatrix} A & H & x_1\lambda \\ H & B & y_1\lambda \\ x_1\lambda & y_1\lambda & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & H & x_2\mu \\ H & B & y_2\mu \\ x_2\mu & y_2\mu & 0 \end{vmatrix}$$
$$-\begin{vmatrix} A & H & x_1\lambda \\ H & B & y_1\lambda \\ x_2\mu & y_2\mu & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & H & x_2\mu \\ H & B & y_2\mu \\ x_1\lambda & y_1\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

et finalement à l'aide de nos notations.

$$(2) \qquad S(\lambda_1\mu) \equiv S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + 2S_{12}\lambda\mu.$$

Le discriminant de la nouvelle fonction est

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix},$$

et comme nous avons démontré l'identité

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h \\ h & g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}^2,$$

on vérifie à nouveau le fait connu que ce discriminant est un invariant.

2° *Forme quadratique à trois variables.* — Considérons la forme

$$S(xyz) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

à laquelle se rattache, en même temps que son discriminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix},$$

le déterminant réciproque de celui-ci :

$$D_r = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}.$$

Remplaçons les variables x, y, z par les nouvelles variables λ, μ, ν, les formules de transformation étant supposées linéaires et de la forme

$$\begin{cases} x = x_1\lambda + x_2\mu + x_3\nu \\ y = y_1\lambda + y_2\mu + y_3\nu \\ z = z_1\lambda + z_2\mu + z_3\nu, \end{cases}$$

$(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ et $(x_3y_3z_3)$ désignant des constantes. Le module de cette transformation est

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

En procédant comme dans le cas de deux variables, on trouve que la fonction S (xyz) devient

$$(3) \quad \mathrm{S}(\lambda\mu\nu) = \mathrm{S}_{11}\lambda^2 + \mathrm{S}_{22}\mu^2 + \mathrm{S}_{33}\nu^2 + 2\mathrm{S}_{23}\mu\nu + 2\mathrm{S}_{31}\mu\nu + 2\mathrm{S}_{12}\lambda\mu.$$

Le discriminant de cette nouvelle fonction

$$\begin{vmatrix} \mathrm{S}_{11} & \mathrm{S}_{12} & \mathrm{S}_{13} \\ \mathrm{S}_{21} & \mathrm{S}_{22} & \mathrm{S}_{23} \\ \mathrm{S}_{31} & \mathrm{S}_{32} & \mathrm{S}_{33} \end{vmatrix}$$

est un invariant à cause de l'identité démontrée

$$\begin{vmatrix} \mathrm{S}_{11} & \mathrm{S}_{12} & \mathrm{S}_{13} \\ \mathrm{S}_{21} & \mathrm{S}_{22} & \mathrm{S}_{23} \\ \mathrm{S}_{31} & \mathrm{S}_{32} & \mathrm{S}_{33} \end{vmatrix} = \mathrm{D} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2.$$

3° *Forme quadratique à quatre variables.* — Considérons la forme

$$\mathrm{S}(xyzt) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + 2fyz + 2gzx \\ + 2hxy + 2lxt + 2myt + 2nzt,$$

à laquelle se rattache son discriminant

$$\mathrm{E} = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix},$$

lequel admet pour déterminant réciproque

$$\mathrm{E}_r = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{H} & \mathrm{G} & \mathrm{L} \\ \mathrm{H} & \mathrm{B} & \mathrm{F} & \mathrm{M} \\ \mathrm{G} & \mathrm{F} & \mathrm{C} & \mathrm{N} \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{D} \end{vmatrix}.$$

Remplaçons les variables x, y. z, t par les nouvelles variables λ, μ, ν, ρ, les formules de transformation étant supposées linéaires et de la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_1\lambda + x_2\mu + x_3\nu + x_4\rho \\ y &= y_1\lambda + y_2\mu + y_3\nu + y_4\rho \\ z &= z_1\lambda + z_2\mu + z_3\nu + z_4\rho \\ t &= t_1\lambda + t_2\mu + t_3\nu + t_4\rho, \end{aligned}\right.$$

$(x_1, y_1, z_1, t_1,)$. ..., désignant des constantes. Le module de cette transformation est

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}.$$

En procédant toujours de la même matière et en tenant compte de nos identités et notations, il vient :

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} S(\lambda\mu\nu\rho) \equiv {} & S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + S_{33}\nu^2 + S_{44}\rho^2 \\ & + 2S_{12}\lambda\mu + 2S_{13}\lambda\nu + 2S_{14}\lambda\rho \\ & + 2S_{23}\mu\nu + 2S_{24}\mu\rho + 2S_{34}\nu\rho. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette nouvelle fonction

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}$$

est un invariant à cause de l'identité démontrée

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} \equiv E \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}^2.$$

II. — Relations entre les formes ponctuelles et les formes tangentielles.

Il est clair que les règles qui viennent d'être obtenues pour le changement de variables s'appliquent aux formes tangentielles aussi bien qu'aux formes ponctuelles.

C'est ainsi, par exemple, que, si l'on considère la forme tangentielle à trois variables

$$\Sigma(uvw) \equiv Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv,$$

la substitution linéaire

$$\begin{cases} u = u_1\alpha + u_2\beta + u_3\gamma \\ v = v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma \\ w = w_1\alpha + w_2\beta + w_3\gamma, \end{cases}$$

dans laquelle α, β, γ, désignent les nouvelles variables, tandis que (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) représentent des constantes, transforme la fonction donnée en la suivante

$$\Sigma(\alpha\beta\gamma) \equiv \Sigma_{11}\alpha^2 + \Sigma_{22}\beta^2 + \Sigma_{33}\gamma^2 + 2\Sigma_{23}\beta\gamma + 2\Sigma_{31}\gamma\alpha + 2\Sigma_{12}\alpha\beta,$$

laquelle admet pour discriminant

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

Or une forme tangentielle, telle que $\Sigma\,(uvw)$, est liée à la forme ponctuelle correspondante S (xyz) non seulement par les valeurs des coefficients, lesquels sont, pour la forme tangentielle, les déterminants mineurs pris dans le discriminant de la forme ponctuelle des coefficients des termes correspondants de celle-ci, mais encore par les significations des variables (uvw) d'une part, $(x\ y\ z)$ d'autre part, ces deux sortes de variables étant en outre liées par la relation générale :

$$ux + vy + wz = 0.$$

Il suit de là qu'un changement de coordonnées pour la forme ponctuelle entraîne un changement corrélatif de coordonnées pour la forme tangentielle correspondante et l'on sait que la seconde substitution a reçu le nom de subtitution *inverse* de la première. Si, par exemple, on a effectué la substitution ponctuelle.

$$\begin{cases} x = x_1\lambda + x_2\mu + x_3\nu \\ y = y_1\lambda + y_2\mu + y_3\nu \\ z = z_1\lambda + z_2\mu + z_3\nu, \end{cases}$$

dont le module est

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

il faut en même temps effectuer la substitution tangentielle

$$\begin{cases} u = u_1\alpha + u_2\beta + u_3\gamma \\ v = v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma \\ w = w_1\alpha + w_2\beta + w_3\gamma, \end{cases}$$

dans laquelle les coefficients $(u_1\ v_1\ w_1)\ldots..$, sont liés aux coefficients $(x_1 y_1 z_1)\ldots..$ de la transformation précédente par les relations

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{u_1}{X_1}=\dfrac{v_1}{Y_1}=\dfrac{w_1}{Z_1}\\[2mm]\dfrac{u_2}{X_2}=\dfrac{v_2}{Y_2}=\dfrac{w_2}{Z_2}\\[2mm]\dfrac{u_3}{X_3}=\dfrac{v_3}{Y_3}=\dfrac{w_3}{Z_3}.\end{array}\right.$$

Il en résulte que le module

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

de la seconde substitution est, à un facteur près, le déterminant réciproque

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

du module de la première substitution.

Or ces relations entre les coefficients des deux substitutions corrélatives entraînent entre les discriminants

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}$$

et leurs mineurs des divers ordres des relations que nous nous proposons d'établir, en examinant successivement les formes à deux, trois et quatre variables.

1° *Formes à deux variables.* — Considérons la forme ponctuelle

$$S(xy) \equiv ax^2 + by^2 + 2hxy \equiv - \begin{vmatrix} A & H & x \\ H & B & y \\ x & y & 0 \end{vmatrix},$$

en posant

$$A = b \qquad B = a, \qquad H = -h.$$

La forme tangentielle correspondante est

$$\Sigma(u_1 v) = Au^2 + Bv^2 + 2Huv = -\begin{vmatrix} a & h & u \\ h & b & v \\ u & v & 0 \end{vmatrix}.$$

Les coordonnées tangentielles u, v étant supposées liées aux coordonnées ponctuelles x, y par la relation

$$ux + vy = 0,$$

on tire de là

$$\frac{x}{v} = \frac{y}{-u} = k.$$

En remplaçant dans S (xy) les coordonnées x et y par leurs valeurs fournies par ces dernières égalités, on vérifie aisément qu'on a

$$\text{(5)} \qquad S(xy) = k^2\Sigma(uv).$$

Cela étant, si à deux systèmes particuliers de coordonnées ponctuelles $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, on fait correspondre deux systèmes de coordonnées tangentielles $(u_1 v_1)$, $(u_2 v_2)$ déterminés par les relations

$$u_1 x_1 + v_1 y_1 = 0,$$
$$u_2 x_2 + v_2 y_2 = 0,$$

et moyennant que les valeurs de $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ tirées de là répondent à la même valeur de k, on voit qu'on a

$$\text{(6)} \qquad \frac{S_{11}}{\Sigma_{11}} = \frac{S_{22}}{\Sigma_{22}} = \frac{S_{12}}{\Sigma_{12}},$$

relations qu'il s'agissait d'établir.

2° *Formes à trois variables.* — La forme ponctuelle à trois variables

$$S(xyz) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

admet comme forme tangentielle correspondante la forme

$$\Sigma(uvw) \equiv Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv,$$

dans laquelle A, B, C, F, G, H sont les déterminants mineurs respectifs des éléments a, b, c, f, g, h dans le discriminant

$$D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix},$$

les coordonnées tangentielles u, v, w étant liées aux coordonnées ponctuelles par la relation générale

$$ux + vy + wz = 0.$$

A un changement de coordonnées ponctuelles défini par les formules de transformation

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_1\lambda + x_2\mu + x_3\nu \\ y = y_1\lambda + y_2\mu + y_3\nu \\ z = z_1\lambda + z_2\mu + z_3\nu \end{array} \right.$$

dont le module

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro, on fait correspondre le changement de coordonnées tangentielles défini par les formules de transformation

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_1\alpha + u_2\beta + u_3\gamma \\ v = v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma \\ w = w_1\alpha + w_2\beta + w_3\gamma, \end{array} \right.$$

dont les constantes u_1, v_1, w_1, sont déterminées par les relations

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1x_2 + v_1y_2 + w_1z_2 = 0 \\ u_1x_3 + w_1y_3 + w_1z_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2x_3 + v_2y_3 + w_2z_3 = 0 \\ u_2x_1 + v_2y_1 + w_2z_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_3x_1 + v_3y_1 + w_3z_1 = 0 \\ u_3x_2 + v_3y_2 + w_3z_2 = 0. \end{array} \right.$$

desquelles on tire

$$(10) \quad \frac{u_1}{y_2z_3 - z_2y_3} = \frac{v_1}{z_2x_3 - x_2z_3} = \frac{w_1}{x_2y_3 - y_2x_3}$$

ou abréviativement

$$(10),\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_1}{X_1}=\dfrac{v_1}{Y_1}=\dfrac{w_1}{Z_1} \\ \dfrac{u_2}{X_2}=\dfrac{v_2}{Y_2}=\dfrac{w_2}{Z_2} \\ \dfrac{u_3}{X_3}=\dfrac{v_3}{Y_3}=\dfrac{w_3}{Z_3}, \end{array}\right.$$

en désignant par X_1, Y_1, Z_1,..., les mineurs respectifs des éléments $x_1 y_1 z_1$,..., dans le module de la transformation ponctuelle. Il en résulte que le module

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

est à un facteur constant près le déterminant réciproque

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3. \end{vmatrix}$$

du module de la transformation ponctuelle. Il devient même identiquement égal à ce déterminant réciproque si l'on prend, ce qui est toujours possible et permis :

$$\begin{array}{lll} u_1 = X_1, & v_1 = Y_1, & w_1 = Z_1 \\ u_2 = X_2, & v_2 = Y_2, & w_2 = Z_2 \\ u_3 = X_3, & v_3 = Y_3, & w_3 = Z_3. \end{array}$$

C'est pourquoi la seconde transformation est dite réciproque ou inverse de la première.

Les propriétés des déterminants réciproques nous fournissent alors les relations

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_1}{U_1}=\dfrac{y_1}{V_1}=\dfrac{z_1}{W_1} \\ =\dfrac{x_2}{U_2}=\dfrac{y_2}{V_2}=\dfrac{z_2}{W_2} \\ =\dfrac{x_3}{U_3}=\dfrac{y_3}{V_3}=\dfrac{z_3}{W_3}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \end{array}\right.$$

analogues aux relations (11). Ces mêmes relations peuvent d'ailleurs se déduire directement des équations (7), (8), (9) groupées de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_2x_1 + v_2y_1 + w_2z_1 = 0 \\ u_3x_1 + v_3y_1 + w_3z_1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_3x_2 + v_3y_2 + w_3z_2 = 0 \\ u_1x_2 + v_1y_2 + w_1z_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_1x_3 + v_1y_3 + w_1z_3 = 0 \\ u_2x_3 + v_2y_2 + w_2z_3 = 0. \end{cases}$$

Cela étant, les fonctions transformées

$$S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + S_{33}\nu^2 + 2S_{23}\mu\nu + 2S_{31}\nu\lambda + 2S_{12}\lambda\mu$$
$$\Sigma_{11}\alpha_2 + \Sigma_{22}\beta^2 + \Sigma_{23}\gamma^2 + \Sigma_{23}\beta\gamma + 2\Sigma_{31}\gamma\alpha + 2\Sigma_{12}\alpha\beta$$

admettent pour discriminants respectifs les déterminants

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}$$

et nous nous proposons, comme il a été annoncé, d'établir les relations qui existent entre ces déterminants et aussi entre leurs éléments ou mineurs de divers ordres.

Pour cela, nous rappellerons l'identité

$$\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & H & G & x_2 & x_3 \\ H & B & F & y_2 & y_3 \\ G & F & C & z_2 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

qui donne par développement du second membre en somme de produits de déterminants :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = {} & A(y_2z_3 - z_2y_3)^2 + B(z_2x_3 - x_2z_3)^2 + C(x_2y_3 - y_2x_3)^2 \\ & + 2F(z_2x_3 - x_2z_3)(x_2y_3 - y_2x_3) \\ & + 2G(x_2y_3 - y_2x_3)(y_2z_3 - z_2y_3) \\ & + 2H(y_2z_3 - z_2y_3)(z_2x_3 - x_2z_3). \end{aligned}$$

Or si, d'après les formules (10) ou (10'), on prend, comme nous l'avons dit :

$$u_1 = X_1, \qquad v_1 = y_1, \qquad w_1 = Z_1,$$

l'identité précédente devient

$$\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{32} \end{vmatrix} \equiv Au_1^2 + Bv_1^2 + Gw_1^2 + 2Fv_1w_1 + 2Gw_1u_1 + 2Hu_1v_1,$$

c'est-à-dire enfin

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} \equiv \Sigma_{11}.$$

De la même manière

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} S_{33} & S_{31} \\ S_{13} & S_{11} \end{vmatrix} \equiv \Sigma_{22}$$

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \Sigma_{33}$$

En ce qui concerne les mineurs non symétriques du discriminant de la forme ponctuelle transformée, nous nous appuierons sur l'identité démontrée

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & H & G & x_1 & x_2 \\ H & B & F & y_1 & y_2 \\ G & F & C & z_1 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

qui donne par développement du second membre

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} &= A(y_1z_2 - z_1y_2)(y_1z_3 - z_2y_3) \\ &+ B(z_1x_2 - x_1z_2)(z_1x_3 - x_1z_3) \\ &+ C(x_1y_2 - y_1x_2)(x_1y_3 - y_1x_3) \\ &+ F\{(z_1x_2 - x_1z_2)(x_1y_3 - y_1x_3) + (x_1y_2 - y_1x_2)(z_1x_3 - x_1z_3)\} \\ &+ G\{(x_1y_2 - y_1x_2)(y_1z_3 - z_1y_3) + (y_1z_2 - z_1y_2)(x_1y_3 - x_1y_3)\} \\ &+ H\{(y_1z_2 - z_1y_2)(z_1x_3 - x_1z_3) + (z_1x_2 - x_1z_2)(y_1z_3 - z_1y_3)\}. \end{aligned}$$

et alors en faisant encore

$$\begin{array}{lll} u_1 = X_1, & v_1 = Y_1, & w_1 = Z_1 \\ u_2 = X_2, & \dots\dots & \dots\dots \\ u_3 = X_3, & \dots\dots & \dots\dots, \end{array}$$

on voit que l'on a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} &= -Au_2u_3 - Bv_2v_3 - Cw_2w_3 \\ &- F(v_2w_3 + w_2v_3) \\ &- G(w_2u_3 + u_2w_3) \\ &- H(u_2v_3 + v_2u_3), \end{aligned}$$

c'est-à-dire enfin

$$(15) \qquad - \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} = \Sigma_{23} = \Sigma_{32}$$

De même

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} \\ S_{22} & S_{23} \end{vmatrix} = \Sigma_{31} = \Sigma_{13}$$

$$(17) \qquad - \begin{vmatrix} S_{21} & S_{23} \\ S_{31} & S_{33} \end{vmatrix} = \Sigma_{12} = \Sigma_{21}.$$

Les relations (12), (13), (14), (15), (16), (17) sont les premières relations cherchées. Nous les grouperons sous la forme suivante qui permet de les retenir et de les interpréter plus facilement :

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Sigma_{11}}{\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{12}}{-\begin{vmatrix} S_{21} & S_{23} \\ S_{31} & S_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{13}}{\begin{vmatrix} S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix}} \\ = & \frac{\Sigma_{21}}{-\begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{22}}{\begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{23}}{-\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix}} \\ = & \frac{\Sigma_{31}}{\begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} \\ S_{22} & S_{23} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{32}}{-\begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{21} & S_{23} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{33}}{\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}} = 1. \end{aligned} \right.$$

On voit ainsi que les éléments du discriminant de la forme tangentielle transformée sont les mineurs respectifs des éléments homologues du discriminant de la forme ponctuelle correspondante, exactement comme cela avait lieu pour les formes primitives et que par conséquent le discriminant de la nouvelle forme tangentielle est le réciproque du discriminant de la nouvelle forme ponctuelle, et, comme tel, égal à son carré, ainsi qu'il est facile d'ailleurs de le constater à l'aide de nos identités fondamentales. Nous avons en effet démontré qu'on a

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix} = D^2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}^2;$$

et comme

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2,$$

il en résulte

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}^2.$$

Enfin les propriétés connues des déterminants réciproques nous fournissent entre les éléments et les mineurs correspondants des deux nouveaux discriminants des relations que nous pouvons écrire comme il suit :

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{S_{11}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}} = \frac{S_{12}}{-\begin{vmatrix} \Sigma_{21} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}} = \frac{S_{13}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} \end{vmatrix}} \\ = & \frac{S_{21}}{-\begin{vmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}} = \frac{S_{22}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}} = \frac{S_{23}}{-\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} \end{vmatrix}} \\ = & \frac{S_{31}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \end{vmatrix}} = \frac{S_{32}}{-\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{23} \end{vmatrix}} = \frac{S_{33}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix}} \\ = & \frac{1}{\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right.$$

En résumé, il existe entre les deux discriminants nouveaux

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix},$$

et leurs éléments de diverses natures les mêmes relations qui existent entre les discriminants primitifs

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix};$$

et aussi entre les modules

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix},$$

des deux transformations.

3° *Forme à quatre variables.* — La forme ponctuelle à quatre variables

$$\begin{aligned}S(xyzt) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \\ + 2lxt + 2myt + 2nzt\end{aligned}$$

admet comme correspondante la forme tangentielle

$$\begin{aligned}\Sigma(uvw\omega) = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + D\omega^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv \\ + 2Lu\omega + 2Mv\omega + 2Nw\omega,\end{aligned}$$

dans laquelle A, B, C, ..., sont les déterminants mineurs des éléments a, b, c, dans le discriminant

$$E = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix},$$

les coordonnées tangentielles u, v, w, ω étant liées aux coordonnées ponctuelles par la relation générale

$$ux + vy + wz + \omega t = 0.$$

A un changement de coordonnées ponctuelles défini par les formules de transformation

$$\begin{cases} x = x_1\lambda + x_2\mu + x_3\nu + x_4\rho \\ y = y_1\lambda + y_2\mu + y_3\nu + y_4\rho \\ z = z_1\lambda + z_2\mu + z_3\nu + z_4\rho \\ t = t_1\lambda + t_2\mu + t_3\nu + t_4\rho \end{cases}$$

dont le module

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro, on fait correspondre le changement de coordonnées tangentielles défini par les formules de transformation :

$$\begin{cases} u = u_1\alpha + u_2\beta + u_3\gamma + u_4\delta \\ v = v_1\alpha + v_2\beta + v_3\gamma + v_4\delta \\ w = w_1\alpha + w_2\beta + w_3\gamma + w_4\delta \\ \omega = \omega_1\alpha + \omega_2\beta + \omega_3\gamma + \omega_4\delta, \end{cases}$$

dont les constantes u_1, v_1, w_1, ω_1, u_2, ..., sont déterminées par les relations

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1x_2 + v_1y_2 + w_1z_2 + \omega_1t_2 = 0 \\ u_1x_3 + v_1y_3 + w_1z_3 + \omega_1t_3 = 0 \\ u_1x_4 + v_1y_4 + w_1z_4 + \omega_1t_4 = 0 \end{array}\right.$$

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_2x_3 + \dots\dots\dots\dots = 0 \\ u_2x_4 + \dots\dots\dots\dots = 0 \\ u_2x_1 + \dots\dots\dots\dots = 0 \end{array}\right.$$

les relations non écrites se déduisant des précédentes par permutation circulaire.

De ces relations on tire

$$(23)\qquad \begin{array}{l} \dfrac{x_1}{X_1} = \dfrac{y_1}{Y_1} = \dfrac{z_1}{Z_1} = \dfrac{t_1}{T_1} \\ \dfrac{x_2}{X_2} = \dfrac{y_2}{Y_2} = \dfrac{z_2}{Z_2} = \dfrac{t_2}{T_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}$$

en désignant par X_1, Y_1, Z_1, T_1, ..., les mineurs respectifs des éléments x_1, y_1, z_1, t_1, ..., dans le module de la transformation ponctuelle. Il en résulte que le module

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \omega_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & \omega_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & \omega_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & \omega_4 \end{vmatrix}$$

est à un facteur constant près le déterminant réciproque

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & T_4 \end{vmatrix}$$

du module de la transformation ponctuelle. Il devient même identique à ce déterminant réciproque si l'on prend, ce qui est toujours possible et permis,

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{llll} u_1 = X_1, & v_1 = Y_1, & w_1 = Z_1, & \omega_1 = T_1 \\ u_2 = X_2, & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u_4 = X_4, & v_4 = Y_4, & w_4 = Z_4 & \omega_4 = T_4. \end{array}\right.$$

C'est pourquoi la seconde transformation est dite *réciproque* ou *inverse* de la première.

Les propriétés des déterminants réciproques nous fournissent alors, indépendamment de la relation fondamentale

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \omega_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & \omega_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & \omega_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & \omega_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}^3,$$

deux séries de relations.

Les relations de la première série sont

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{x_1}{U_1} = \frac{y_1}{V_1} = \frac{z_1}{W_1} = \frac{t_1}{\Omega_1} \\ = {} & \frac{x_2}{U_2} = \frac{y_2}{V_2} = \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & \frac{x_4}{U_4} = \frac{y_4}{V_4} = \frac{z_4}{W_4} = \frac{t_4}{\Omega_4} \\ & \qquad = \frac{1}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}^2}. \end{aligned}\right.$$

Les relations de la seconde série sont de la forme

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{x_1y_2 - x_1z_2}{w_3\omega_4 - \omega_3 w_4} = \frac{x_1z_2 - z_1x_2}{v_3\omega_4 - \omega_3 v_4} = \ldots \\ = {} & \frac{y_1z_2 - z_1y_2}{u_3\omega_4 - \omega_3 u_4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & \frac{x_1y_3 - y_1x_3}{w_2\omega_4 - w_2\omega_4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & \frac{x_2y_3 - y_2x_3}{w_1\omega_4 - \omega_1 w_4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & \frac{1}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right.$$

Ces relations peuvent d'ailleurs se déduire directement des équations (21), (22) ..., convenablement groupées.

— Cela étant, les fonctions transformées

$$S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + S_{33}\nu^2 + S_{44}\rho^2 + 2S_{12}\lambda\mu + 2S_{13}\lambda\nu \\ + 2S_{14}\lambda\rho + 2S_{23}\mu\nu + 2S_{24}\mu\rho + 2S_{34}\nu\rho,$$

$$\Sigma_{11}u^2 + \Sigma_{22}v^2 + \Sigma_{33}w^2 + \Sigma_{44}\omega^2 + 2\Sigma_{12}uv + 2\Sigma_{13}uw \\ + 2\Sigma_{14}u\omega + 2\Sigma_{23}vw + 2\Sigma_{24}v\omega + 2\Sigma_{34}w\omega$$

admettent comme discriminants respectifs les déterminants

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{vmatrix}$$

et nous nous proposons d'établir les relations qui existent entre ces déterminants et aussi entre leurs éléments et mineurs de divers ordres.

Pour cela, nous rappellerons l'identité

$$\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_2 & x_3 & x_4 \\ H & B & F & M & y_2 & y_3 & y_4 \\ G & F & C & N & z_2 & z_3 & z_4 \\ L & M & N & D & t_2 & t_3 & t_4 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

dans laquelle le second membre développé sous forme d'une somme de produits de déterminants est

$$A \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & t_2 \\ y_3 & z_3 & t_3 \\ y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ 2F \begin{vmatrix} x_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & t_4 \end{vmatrix} + \ldots$$

c'est-à-dire

$$AX_1^2 + BY_1^2 + CZ_1^2 + DT_1^2 + 2FY_1Z_1 + 2GZ_1X_1 + 2HX_1Y_1 \\ + 2LX_1T_1 + 2MY_1T_1 + 2NZ_1T_1.$$

Or, si, d'après les formules (23), on prend, comme nous avons fait remarquer la chose possible

$$u_1 = X_1, \qquad v_1 = Y_1, \qquad w_1 = Z_1, \qquad W_1 = T_1,$$

l'expression précédente devient

$$\begin{aligned}Au_1^2 + Bv_1^2 + Cw_1^2 + D\omega_1^2 + 2Fv_1w_1 + 2Gw_1u_1 + 2H\omega_1v_1 \\ 2Lw_1\omega_1 + 2Mv_1\omega_1 + 2Nw_1\omega_1,\end{aligned}$$

c'est-à-dire enfin

$$\Sigma\,(u_1v_1w_1\omega_1) = \Sigma_{11}.$$

Il en résulte l'identité

$$(26)\quad \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = \Sigma_{11}.$$

Les autres déterminants mineurs symétriques du discriminant de la fonction transformée S nous fournissent des identités analogues. C'est ainsi qu'on a :

$$(27)\quad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{14} \\ S_{31} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = \Sigma_{22}.$$

En ce qui concerne les mineurs non symétriques du troisième ordre, et en prenant l'un d'eux comme exemple, nous rappellerons l'identité

$$\begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_3 & x_4 \\ H & B & F & M & y_1 & y_3 & y_4 \\ G & F & C & N & z_1 & z_3 & z_4 \\ L & M & N & D & t_1 & t_3 & t_4 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

dont le second membre développé devient

$$\begin{aligned} & A \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + F \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} \right\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} -AX_1X_2 - BY_1Y_2 - CZ_1Z_2 - DT_1T_2 - F\,(Y_1Z_2 + Z_1Y_2) \\ - G(Z_1X_2 + X_1Z_2)\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ou enfin

$$- Au_1u_2 - Bv_1v_2 - Cw_1w_2 - D\omega_1\omega_2 - F(v_1w_2 + w_1v_2) \\ \ldots = - \Sigma_{12},$$

d'ou l'identité

$$(28) \qquad \begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{31} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{44} \end{vmatrix} = - \Sigma_{12},$$

et avec elle les autres analogues.

Les identités (26), (27), (28) et les identités analogues non écrites peuvent être groupées d'une manière commode sous la forme suivante :

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Sigma_{11}}{\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{12}}{-\begin{vmatrix} S_{21} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{13}}{\begin{vmatrix} S_{21} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}} = \\ & = \frac{\Sigma_{14}}{-\begin{vmatrix} S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{21}}{-\begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma_{22}}{\begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{14} \\ S_{31} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}} = \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & = 1. \end{aligned} \right.$$

On voit ainsi que les élémentsdu discriminant de la forme tangentielle transformée sont les mineurs respectifs des éléments homologues du discriminant de la forme ponctuelle correspondante, exactement comme cela avait lieu pour les formes primitives, et que, par conséquent, le discriminant de la nouvelle forme tangentielle est le réciproque du discriminant de la nouvelle forme ponctuelle et, comme tel, égal à son cube, ainsi qu'il est facile d'ailleurs de le vérifier à l'aide de nos identités fondamentales. Nous avons en effet démontré qu'on a :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = E \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{vmatrix} = E^3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \omega_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & \omega_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & \omega_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & \omega_4 \end{vmatrix}^2,$$

et comme

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \omega_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & \omega_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & \omega_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & \omega_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & T_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}^3,$$

il en résulte :

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}^3.$$

Cela étant, les propriété des déterminants réciproques nous fournissent entre les éléments et les mineurs des deux nouveaux discriminants deux nouvelles séries de relations qui sont :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{S_{11}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} \\ \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{42} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{vmatrix}} = \frac{S_{12}}{-\begin{vmatrix} \Sigma_{21} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{vmatrix}} = \dots \\ &= \frac{S_{22}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{vmatrix}} = \dots \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{21} & S_{23} \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} \Sigma_{32} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{42} & \Sigma_{44} \end{vmatrix}} = \dots \\ &= \frac{\begin{vmatrix} S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{44} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} S_{21} & S_{23} \\ S_{31} & S_{33} \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{42} & \Sigma_{44} \end{vmatrix}} = \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right.$$

Il existe donc entre les deux nouveaux discriminants

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} \end{vmatrix},$$

et leurs éléments ou mineurs de divers ordres les mêmes relations qui existent entre les discriminants primitifs

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}' & \mathrm{H} & \mathrm{G} & \mathrm{L} \\ \mathrm{H} & \mathrm{B} & \mathrm{F} & \mathrm{M} \\ \mathrm{G} & \mathrm{F} & \mathrm{C} & \mathrm{N} \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{D} \end{vmatrix},$$

et aussi entre les modules

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \omega_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & \omega_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & \omega_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & \omega_4 \end{vmatrix},$$

des deux transformations.

— En résumé, les relations que nous venons de mettre en évidence sont celles qui existent entre deux déterminants réciproques quelconques et leurs éléments ou mineurs de divers ordres.

III. — Systèmes linéaires de formes quadratiques.

1° *Systèmes à deux variables.* — Considérons les deux formes quadratiques à deux variables

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(xy) &\equiv a_1x^2 + b_1y^2 + 2h_1xy, \\ \mathrm{T}(xy) &\equiv a_2x^2 + b_2y^2 + 2h_2xy, \end{aligned}$$

dont les discriminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ h_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_1b_1 - h_1^2$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & h_2 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_2b_2 - h_2^2$$

sont des fonctions du second degré de leurs coefficients respectifs, et que, pour cette raison, nous désignerons par C_{12} et par C_{12}, d'où les identités conventionnelles

$$\mathrm{C}_{12} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ h_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{C}_{22} \equiv \begin{vmatrix} a_2 & h_2 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Formons alors la combinaison linéaire

$$pS + qT = (pa_1 + qa_2)x^2 + (pb_1 + qb_2)y^2 + 2(ph_1 + qh_2)xy,$$

dans laquelle p et q désignent deux constantes arbitraires. Nous obtenons une forme générale à deux variables dont le discriminant

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} pa_1 + qa_2 & ph_1 + qh_2 \\ ph_1 + qh_2 & pb_1 + qb_2 \end{vmatrix}$$

peut être développé suivant les puissances croissantes et décroissantes de p et q. Ce développement est le suivant :

$$(32') \qquad \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ h_1 & b_1 \end{vmatrix} p^2 + \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & h_2 \\ h_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & h_1 \\ h_2 & b_1 \end{vmatrix} \right\} pq + \begin{vmatrix} a_2 & h_2 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix} q^2.$$

Les coefficients de p^2 et q^2 sont les discriminants C_{12}, C_{22} ; quant au coefficient de pq, il s'obtient en remplaçant dans le discriminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ h_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

l'indice 1 par l'indice 2 alternativement dans la première et la seconde colonne et faisant la somme des deux déterminants ainsi obtenus. La fonction C_{12} des coefficients de la première forme se trouve ainsi remplacée par une fonction du second degré des coefficients des deux formes que nous désignerons par C_{12}, et dont la valeur développée est

$$(33) \qquad C_{12} = a_1b_2 + b_1a_2 - 2h_1h_2.$$

La forme de ce développement se déduit d'ailleurs aisément du développement

$$C = ab - h^2$$

du discriminant quadratique général en donnant dans chaque terme toutes les positions possibles aux indices 1 et 2.

Cela étant, effectuons dans chacune des formes S et T et aussi dans la forme $pS + qT$ le changement de variables indiqué précédemment. Nous aurons d'après ce qui a été démontré les identités

$$S(\lambda\mu) \equiv S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + 2S_{12}\lambda\mu,$$
$$T(\lambda\mu) \equiv T_{11}\lambda^2 + T_{22}\mu^2 + 2T_{12}\lambda\mu.$$

Il en résultera l'identité

$$(34)\qquad \begin{aligned} pS(xy) + qT(xy) &= pS(\lambda\mu) + qT(\lambda\mu) \\ &= (pS_{11} + qT_{11})\lambda^2 + (pS_{22} + qT_{22})\mu^2 + 2(pS_{12} + qT_{12})\lambda\mu. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette dernière forme quadratique en λ et μ est

$$(35)\qquad \begin{vmatrix} pS_{11} + qT_{11} & pS_{12} + qT_{12} \\ pS_{21} + qT_{21} & pT_{22} + qT_{22} \end{vmatrix}$$

Ce discriminant peut être développé, comme le discriminant (32), suivant les puissances des constantes p et q, ce qui donne

$$(35')\qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} p^2 + \left\{ \begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} \\ S_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} \\ T_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \right\} pq + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} q^2,$$

et l'on sait, d'après la théorie générale des invariants, que les coefficients des divers termes de ce développement sont des invariants de la combinaison linéaire $pS + qT$. En ce qui concerne les coefficients de p^2 et de q^2, cette invariance résulte directement de nos identités fondamentales; nous avons en effet démontré l'identité générale

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2,$$

le coefficient de C étant précisément le carré du module de la transformation effectuée. On a donc en particulier

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = C_{12} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{22} & T_{22} \end{vmatrix} = C_{22} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2.$$

et par suite aussi :

$$(36)\qquad \begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} \\ S_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} \\ T_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = C_{12} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}^2.$$

Il est facile d'ailleurs de démontrer directement cette dernière identité. On a en effet :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} \\ S_{21} & T_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1 S'_{x1} + y_1 S'_{y1}), & \frac{1}{2}(x_1 T'_{x2} + y_1 T'_{y2}) \\ \frac{1}{2}(x_2 S'_{x1} + y_2 S'_{y1}), & \frac{1}{2}(x_2 T'_{x2} + y_2 T'_{y2}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2} S'_{x1} & \frac{1}{2} S'_{y1} \\ \frac{1}{2} T'_{x2} & \frac{1}{2} T'_{y2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} \\ T_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1 T'_{x1} + y_1 T'_{y1}), & \frac{1}{2}(x_1 S'_{x2} + y_1 S'_{y2}) \\ \frac{1}{2}(x_2 T'_{x1} + y_2 T'_{y1}), & \frac{1}{2}(x_1 S'_{x2} + y_2 S'_{y2}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2} T'_{x1} & \frac{1}{2} T'_{y1} \\ \frac{1}{2} S'_{x2} & \frac{1}{2} S'_{y2} \end{vmatrix},$$

D'où en ajoutant :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} \\ S_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} \\ T_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \times \left\{ \begin{vmatrix} \frac{1}{2} S'_{x1} & \frac{1}{2} S'_{y1} \\ \frac{1}{2} T'_{x2} & \frac{1}{2} T'_{y2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} T'_{x1} & \frac{1}{2} T'_{y1} \\ \frac{1}{2} S'_{x2} & \frac{1}{2} S'_{y2} \end{vmatrix} \right\}$$

Or

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} S'x_1 & \frac{1}{2} S'x_2 \\ \frac{1}{2} T'y_1 & \frac{1}{2} T'y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x_1 + h_1y_1, & a_1x_2 + h_1y_2 \\ h_2x_1 + b_2y_1, & h_2x_2 + b_2y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1h_1 \\ h_2b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} T'x_1 & \frac{1}{2} T'x_2 \\ \frac{1}{2} S'y_1 & \frac{1}{2} S'y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2x_1 + h_2y_1, & a_2x_2 + h_2y_2 \\ h_1x_1 + b_1y_1, & h_1x_2 + b_1y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2h_2 \\ h_1b_1 \end{vmatrix}.$$

Il en résulte

$$\begin{vmatrix} S_{11}T_{12} \\ S_{21}T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11}S_{12} \\ T_{21}S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \end{vmatrix}^2 \times \left\{ \begin{vmatrix} a_1h_1 \\ h_2b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2h_2 \\ h_1b_1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \end{vmatrix}^2 \times \left\{ \begin{vmatrix} a_1h_2 \\ h_1b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2h_1 \\ h_2b_1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= C_{12} \begin{vmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \end{vmatrix}^2.$$

c'est-à-dire l'identité (36).

2° *Systèmes à trois variables.* — Considérons les deux formes quadratiques à trois variables :

$$S(xyz) = a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + 2f_1yz + 2g_1zx + 2h_1xy$$
$$T(xyz) = a_2x^2 + b_2y^2 + c_2z^2 + 2f_2yz + 2g_2zx + 2h_2xy,$$

dont les discriminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_1 \\ h_1 & b_1 & f_1 \\ g_1 & f_1 & c_1 \end{vmatrix} = a_1b_1c_1 + 2f_1g_1h_1 - a_1f_1^2 - b_1g_1^2 - c_1h_1^2$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & h_2 & g_2 \\ h_2 & b_2 & f_2 \\ g_2 & f_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_2b_2c_2 + 2f_2g_2h_2 - a_2f_2^2 - b_2g_2^2 - c_2h_2^2$$

sont des fonctions du troisième degré de leurs coefficients respectifs et que, pour cette raison, nous désignerons par D_{13} et par $D_2{}^3$, d'où les identités conventionnelles :

$$D_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_1 \\ h_1 & b_1 & f_1 \\ g_1 & f_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_2 & h_2 & g_2 \\ h_2 & b_2 & f_2 \\ g_2 & f_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Formons alors la combinaison linéaire

$$\begin{aligned} pS + qT \equiv {} & (pa_1 + qa_2)\,x^2 + (pb_1 + qb_2)\,y^2 + (pc_1 + qc_2)z^2 \\ & + 2\,(pf_1 + qf_2)\,yz + 2\,(pg_1 + qg_2)\,zx + 2\,(ph_1 + qh_2)\,xy, \end{aligned}$$

dans laquelle p et q désignent deux constantes arbitraires. Nous obtenons ainsi une forme générale à trois variables dont le discriminant

$$(37) \qquad \begin{vmatrix} pa_1 + qa_2 & ph_1 + qh_2 & pg_1 + qg_2 \\ ph_1 + qh_2 & pb_1 + qb_2 & pf_1 + qf_2 \\ pg_1 + qg_2 & pf_1 + qf_2 & pc_1 + qc_2 \end{vmatrix}$$

peut être développé suivant les puissances croissantes et décroissante de p et q. Ce développement est le suivant :

$$(38) \quad \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_1 \\ h_1 & b_1 & f_1 \\ g_1 & f_1 & c_1 \end{vmatrix} p^3 + \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & h_1 & g_1 \\ h_2 & b_1 & f_1 \\ g_2 & g_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & h_2 & g_1 \\ h_1 & b_2 & f_1 \\ g_1 & f_2 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_2 \\ h_1 & b_1 & f_2 \\ g_1 & f_1 & c_2 \end{vmatrix} \right\} p^2q$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & h_2 & g_2 \\ h_1 & b_2 & f_2 \\ g_1 & f_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & h_1 & g_2 \\ h_2 & b_1 & f_2 \\ g_2 & f_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & h_2 & g_1 \\ h_2 & b_2 & f_1 \\ g_2 & f_2 & c_1 \end{vmatrix} \right\} pq^2 + \begin{vmatrix} a_2 & h_2 & g_2 \\ h_2 & b_2 & f_2 \\ g_2 & f_2 & c_2 \end{vmatrix} q^3.$$

Les coefficients de p^3 et q^3 sont les discriminants D_{13} et D_{23}. Quant au coefficient de p^2q, il s'obtient en remplaçant dans le discriminant D_{13} l'indice 1 par l'indice 2 alternativement dans la première, la seconde et la troisième colonne et faisant la somme des trois déterminants ainsi obtenus. La fonction D_{13} des coefficients de la première forme se trouve ainsi remplacée par une autre qui est fonction du second degré des coefficients de la première forme et du premier degré de ceux de la première ; pour cette raison, nous la désignerons par D_{1^22}. De même, le coefficient de pq^2 qui est du premier degré par rapport aux coefficients de la première forme et du second degré par rapport à ceux de la deuxième sera désigné par $D_{1^2 2}$.

Avec ces notations le développement (38) prend la forme simple

$$D_{1^3}p^3 + D_{1^2 2}p^2q + D_{1 2^2}pq^2 + D_{2^3}q^3. \tag{38'}$$

Quant aux valeurs développées de $D_{1^2 2}$ et $D_{1 2^2}$, nous les écrirons de la manière suivante :

$$\begin{aligned} D_{1^2 2} &= A_{1^2}a_2 + B_{1^2}b_2 + C_{1^2}c_2 + 2F_{1^2}f_2 + 2G_{1^2}g_2 + 2H_{1^2}h_2 \\ D_{1 2^2} &= A_{2^2}a_1 + B_{2^2}b_1 + C_{2^2}c_1 + 2F_{2^2}f_1 + 2G_{2^2}g_1 + 2H_{2^2}h_1, \end{aligned}$$

en indiquant ainsi que les mineurs A_{1^2}, B_{2^2},..., sont des fonctions du second degré de la première forme, et les mineurs A_{2^2}, B_{2^2}, ..., des fonctions du second degré de la deuxième.

Cela étant, effectuons sur chacune des formes S et T et aussi sur la forme $pS + qT$ le changement de variables indiqué précédemment. Il nous viendra

$$\begin{aligned} pS(xyz) + qT(xyz) &= pS(\lambda\mu\nu) + qT(\lambda\mu\nu) \\ &= (pS_{11} + qT_{11})\lambda^2 + (pS_{22} + qT_{22})\mu^2 + (pS_{33} + qT_{33})\nu^2 \\ &+ 2(pS_{23} + qT_{23})\mu\nu + 2(pS_{31} + qT_{31})\nu\lambda + 2(pS_{12} + qT_{12})\lambda\mu, \end{aligned}$$

le discriminant de cette dernière forme quadratique en λ, μ, ν, étant

$$\begin{vmatrix} pS_{11} + qT_{11}, & pS_{12} + qT_{12}, & pS_{13} + qT_{13} \\ pS_{21} + qT_{21}, & pS_{22} + qT_{22}, & pS_{23} + qT_{23} \\ pS_{31} + qT_{31}, & pS_{32} + qT_{32}, & pS_{33} + qT_{33} \end{vmatrix}, \tag{39}$$

Ce discriminant peut être développé, comme le discriminant (38), suivant les puissances des constantes p et q, et l'on sait, d'après la théorie générale des invariants, que les coefficients des divers termes de ce développement sont des invariants de la combinaison linéaire $pS + qT$. En ce qui concerne les coefficients de p^3 et de q^3, cette invariance résulte directement de nos identités fondamentales; nous avons en effet démontré l'identité générale

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2,$$

le coefficient de D étant précisément le carré du module de la transformation effectuée. On aura donc en particulier

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = D_{1^3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = D_{2^3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2,$$

et par suite pour le coefficient de $\alpha^2\beta$:

$$(40) \quad \begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} & S_{13} \\ T_{21} & S_{22} & S_{23} \\ T_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} & S_{13} \\ S_{21} & T_{22} & S_{23} \\ S_{31} & T_{32} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & T_{13} \\ S_{21} & S_{22} & T_{23} \\ S_{31} & S_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = D_{1^2 2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2$$

On a une identité analogue pour le coefficient de pq^2.

Il est facile d'ailleurs de démontrer directement l'identité (40). On a en effet :

$$\begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} & S_{13} \\ T_{21} & S_{22} & S_{23} \\ T_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1T'_{x1}+y_1T'_{y1}+z_1T'_{z1}), & \frac{1}{2}(x_1S'_{x2}+y_1S'_{y2}+z_1S'_{z2}), & \frac{1}{2}(x_1S'_{x3}+y_1S'_{y3}+z_1S'_{z3}) \\ \frac{1}{2}(x_2T'_{x1}+y_2T'_{y1}+z_2T'_{z1}), & \frac{1}{2}(x_2S'_{x2}+y_2S'_{y2}+z_2S'_{z2}), & \frac{1}{2}(x_2S'_{x3}+y_2S'_{y3}+z_2S'_{z3}) \\ \frac{1}{2}(x_3T'_{x1}+y_3T'_{y1}+z_3T'_{z1}), & \frac{1}{2}(x_3S'_{x2}+y_3S'_{y2}+z_3S'_{z2}), & \frac{1}{2}(x_3S'_{x3}+y_3S'_{y2}+z_3S'_{z3}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2}T'_{x1} & \frac{1}{2}T'_{y1} & \frac{1}{2}T'_{z1} \\ \frac{1}{2}S'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \\ \frac{1}{2}S'_{x3} & \frac{1}{2}S'_{y3} & \frac{1}{2}S'_{z3} \end{vmatrix}$$

De même :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} & S_{13} \\ S_{21} & T_{22} & S_{23} \\ S_{31} & T_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}T'_{x2} & \frac{1}{2}T'_{y2} & \frac{1}{2}T'_{z2} \\ \frac{1}{2}S'_{x3} & \frac{1}{2}S'_{y3} & \frac{1}{2}S'_{z3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & T_{13} \\ S_{21} & S_{22} & T_{23} \\ S_{31} & S_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}S'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \\ \frac{1}{2}T'_{x3} & \frac{1}{2}T'_{y3} & \frac{1}{2}T'_{z3} \end{vmatrix}$$

En ajoutant ces trois identités, on obtient une identité nouvelle dont le premier membre est le coefficient de p^2q qu'on cherche à transformer et dont le second membre est

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\times \left\{ \begin{vmatrix} \frac{1}{2}T'_{x1} & \frac{1}{2}T'_{y1} & \frac{1}{2}T'_{z1} \\ \frac{1}{2}S'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \\ \frac{1}{2}S'_{x3} & \frac{1}{2}S'_{y3} & \frac{1}{2}S'_{z3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}T'_{x2} & \frac{1}{2}T'_{y2} & \frac{1}{2}T'_{z2} \\ \frac{1}{2}S'_{x3} & \frac{1}{2}S'_{y3} & \frac{1}{2}S'_{z3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}S'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \\ \frac{1}{2}T'_{x3} & \frac{1}{2}T'_{y3} & \frac{1}{2}T'_{z3} \end{vmatrix} \right\}.$$

Or on constate aisément que la somme des trois déterminants entre parenthèses peut être remplacée par la suivante :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}T'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}T'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \\ \frac{1}{2}T'_{x3} & \frac{1}{2}S'_{y3} & \frac{1}{2}S'_{z3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S'_{x1} & \frac{1}{2}T'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}S'_{x2} & \frac{1}{2}T'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \\ \frac{1}{2}S'_{x3} & \frac{1}{2}T'_{y3} & \frac{1}{2}S'_{z3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}T'_{z1} \\ \frac{1}{2}S'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}T'_{z2} \\ \frac{1}{2}S'_{x3} & \frac{1}{2}S'_{y3} & \frac{1}{2}T'_{z3} \end{vmatrix}.$$

On a d'ailleurs :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}T'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}T'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \\ \frac{1}{2}T'_{x3} & \frac{1}{2}S'_{y3} & \frac{1}{2}S'_{z3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2x_1 + h_2y_1 + g_2z_1, & h_1x_1 + b_1y_1 + f_1z_1, & g_1x_1 + f_1y_1 + c_1z_1 \\ a_2x_2 + h_2y_2 + g_2z_2, & h_1x_2 + b_1y_2 + f_1z_2, & g_1x_2 + f_1y_2 + c_1z_2 \\ a_2x_3 + h_2y_3 + g_2z_3, & h_1x_3 + b_1y_3 + f_1z_3, & g_1x_3 + f_1y_3 + c_1z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & h_2 & g_2 \\ h_1 & b_1 & f_1 \\ g_1 & f_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & h_1 & g_1 \\ h_2 & b_1 & f_1 \\ g_2 & f_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

De même :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,S'_{x1} & \frac{1}{2}\,T'_{y1} & \frac{1}{2}\,S'_{z1} \\ \frac{1}{2}\,S'_{x2} & \frac{1}{2}\,T'_{y2} & \frac{1}{2}\,S'_{z2} \\ \frac{1}{2}\,S'_{x3} & \frac{1}{2}\,T'_{y3} & \frac{1}{2}\,S'_{z3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & h_2 & g_1 \\ h_1 & b_2 & f_1 \\ g_1 & f_2 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,S'_{x1} & \frac{1}{2}\,S'_{y1} & \frac{1}{2}\,S'_{z1} \\ \frac{1}{2}\,S'_{x2} & \frac{1}{2}\,S'_{y2} & \frac{1}{2}\,S'_{z2} \\ \frac{1}{2}\,S'_{x3} & \frac{1}{2}\,S'_{y3} & \frac{1}{2}\,S'_{z3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_2 \\ h_1 & b_1 & f_2 \\ g_1 & f_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

En portant ces résultats dans l'expression (41), celle-ci devient

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 \times \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & h_1 & g_1 \\ h_2 & b_1 & f_1 \\ g_2 & f_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & h_2 & g_1 \\ h_1 & b_2 & f_1 \\ g_1 & f_2 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_2 \\ h_1 & b_1 & f_2 \\ g_1 & f_1 & c_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\equiv D_1{}^2{}_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2,$$

ce qui est précisément le second membre de l'identité à démontrer (40).

Considérons maintenant dans le discriminant (39) le mineur symétrique

$$\begin{vmatrix} pS_{11} + qT_{11} & pS_{12} + qT_{12} \\ pS_{21} + qT_{21} & pS_{22} + qT_{22} \end{vmatrix}$$

que nous pouvons développer et ordonner suivant les puissances de p et de q, ce qui nous donne

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} p^2 + \left\{ \begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} \\ S_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} \\ T_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \right\} pq + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} q^2.$$

Nous avons démontré dans nos identités fondamentales que les coefficients de p^2 et de q^2 pouvaient être transformés d'après les identités

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_1{}^2 & H_1{}^2 & G_1{}^2 & x_1 & x_2 \\ H_1{}^2 & B_1{}^2 & F_1{}^2 & y_1 & y_2 \\ G_1{}^2 & F_1{}^2 & C_1{}^2 & z_1 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} A_2^2 & H_2^2 & G_2^2 & x_1 & x_2 \\ H_2^2 & B_2^2 & F_2^2 & y_1 & y_2 \\ G_2^2 & F_2^2 & C_2^2 & z_1 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \end{matrix} \right|.$$

Nous nous proposons de chercher un développement du coefficient de pq.

Nous avons d'abord, en remplaçant les éléments par leurs valeurs développées et appliquant les règles de multiplication des tableaux rectangulaires :

$$\left| \begin{matrix} S_{11} & T_{22} \\ S_{21} & T_{22} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}(x_1 S'_{x1} + y_1 S'_{y1} + z_1 S'_{z1}), & \frac{1}{2}(x_1 T'_{x2} + y_1 T'_{y2} + z_1 T'_{z2}) \\ \frac{1}{2}(x_2 S'_{x1} + y_2 S'_{y1} + z_2 S'_{z1}), & \frac{1}{2}(x_2 T'_{x2} + y_2 T'_{y2} + z_2 T'_{z2}) \end{matrix} \right|$$

$$= \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} S'_{x1} & \frac{1}{2} S'_{y1} & \frac{1}{2} S'_{z1} \\ \frac{1}{2} T'_{x2} & \frac{1}{2} T'_{y2} & \frac{1}{2} T'_{z2} \end{matrix} \right\|$$

$$(42) = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} a_1x_1 + h_1y_1 + g_1z_1, & h_1x_1 + b_1y_1 + f_1z_1, & g_2x_1 + f_1y_1 + c_1z_1 \\ a_2x_2 + h_2y_2 + g_2z_2, & h_2x_2 + b_2y_2 + f_2z_2, & g_2x_2 + f_1y_2 + c_2z_2 \end{matrix} \right\|$$

De même :

$$(43) \qquad \left| \begin{matrix} T_{11} & S_{12} \\ T_{21} & S_{22} \end{matrix} \right| = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|$$

$$\times \left\| \begin{matrix} a_2x_1 + h_2y_1 + g_2z_1, & h_2x_1 + b_2y_1 + f_2z_1, & g_2x_1 + f_2y_1 + c_2z_1 \\ a_1x_2 + h_1y_2 + g_1z_2, & h_1x_2 + b_1y_2 + f_1z_2, & g_1x_2 + f_1y_2 + c_2z_2 \end{matrix} \right\|.$$

Ajoutons les égalités (42) et (43) en effectuant les produits des seconds membres suivant les règles connues, il vient après réduction :

$$\left| \begin{matrix} S_{11}T_{12} \\ S_{21}T_{22} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} T_{11}S_{12} \\ T_{21}S_{22} \end{matrix} \right|$$

$$\begin{aligned} &= (y_1z_2 - z_1y_2)\,[A_{12}(y_1z_2 - z_1y_2) + H_{12}(z_1x_2 - x_1z_2) + G_{12}(x_1y_2 - y_1x_2)] \\ &+ (z_1x_2 - x_1z_2)\,[H_{12}(y_1z_2 - z_1y_2) + B_{12}(z_1x_2 - x_1z_2) + F_{12}(x_1y_2 - y_1x_2)] \\ &+ (x_1y_2 - y_1x_2\,[G_{12}(y_1z_2 - z_1y_2) + F_{12}(z_1x_2 - x_1z_2) + C_{12}(x_1y_2 - y_1C_2)] \end{aligned}$$

Or, on peut reconnaître dans le second membre de cette dernière égalité le développement sous forme de produits de déterminants du déterminant suivant :

$$\left| \begin{matrix} A_{12} & H_{12} & G_{12} & x_1 & x_2 \\ H_{12} & B_{12} & F_{12} & y_1 & x_2 \\ G_{12} & F_{12} & C_{12} & z_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \end{matrix} \right|$$

On est donc conduit à l'identité

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} S_{11} T_{12} \\ S_{21} S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} S_{12} \\ T_{21} S_{22} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_{12} & H_{12} & G_{12} & x_1 & x_2 \\ H_{12} & B_{12} & F_{12} & y_1 & y_2 \\ G_{12} & F_{12} & C_{12} & z_1 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

qu'il s'agissait d'établir.

De la même manière, si l'on considère dans le discriminant (39) le mineur non symétrique

$$\begin{vmatrix} pS_{11} + qT_{11} & pS_{12} + qT_{12} \\ pS_{31} + qT_{31} & pS_{32} + qT_{32} \end{vmatrix}$$

dont le développement en p et q est

$$\begin{vmatrix} S_{11} S_{12} \\ S_{31} S_{32} \end{vmatrix} p^2 + \left\{ \begin{vmatrix} S_{11} T_{12} \\ S_{31} T_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} S_{12} \\ T_{31} S_{31} \end{vmatrix} \right\} pq + \begin{vmatrix} T_{11} T_{12} \\ T_{31} T_{32} \end{vmatrix} q^2$$

on démontrerait qu'on a

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} S_{11} T_{12} \\ S_{31} T_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} S_{12} \\ T_{31} S_{32} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_{12} & H_{12} & G_{12} & x_1 & x_2 \\ H_{12} & B_{12} & F_{12} & y_1 & y_2 \\ G_{12} & F_{12} & C_{12} & z_1 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

Nous terminerons cette question en rappelant que, d'après nos notations et conventions, on a

$$(46)\qquad \left\{ \begin{aligned} A_{12} &= b_1 c_2 + c_1 b_2 - 2 f_1 f_2 \\ B_{12} &= c_1 a_2 + a_1 c_2 - 2 g_1 g_2 \\ C_{12} &= a_1 b_2 + b_1 a_2 - 2 h_1 h_2 \\ F_{12} &= g_1 h_2 + h_1 g_2 - a_1 f_2 - f_1 a_2 \\ G_{12} &= h_1 f_2 + f_1 h_2 - b_1 g_2 - g_1 b_2 \\ H_{12} &= f_1 g_2 + g_1 f_2 - c_1 h_2 - h_1 c_2. \end{aligned} \right.$$

3° *Systèmes à quatre variables.* — Ce que nous venons de dire sur les formes à trois variables va nous permettre d'énoncer, sans entrer dans d'autres développements d'écriture, les résultats, analogues aux précédents, relatifs aux systèmes à quatre variables.

Soient donc les deux formes à quatre variables :

$$\begin{aligned} S(xyzt) &\equiv a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 t^2 + 2 f_1 yz + 2 g_1 zx + 2 h_1 xy \\ &\qquad + 2 l_1 xt + 2 m_1 yt + 2 n_1 zt, \\ T(xyzt) &\equiv a_2 x^2 + b_2 y^2 + c_2 z^2 + d_2 t^2 + 2 f_2 yz + 2 g_2 zx + 2 h_2 xy \\ &\qquad + 2 l_2 xt + 2 m_2 yt + 2 n_2 zt, \end{aligned}$$

dont les discriminants sont des fonctions du quatrième degré de leurs coefficients respectifs, en sorte que nous poserons

$$E_1{}^4 = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_1 & l_1 \\ h_1 & b_1 & f_1 & m_1 \\ g_1 & f_1 & c_1 & n_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

$$E_1{}^4 = \begin{vmatrix} a_2 & h_2 & g_2 & l_2 \\ h_2 & b_2 & f_2 & m_2 \\ g_2 & f_2 & c_2 & n_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

Formons la combinaison linéaire $pS + qT$. Nous obtenons ainsi une forme générale à quatre variables dont le discriminant

$$(47) \qquad \begin{vmatrix} pa_1 + qa_2 & ph_1 + qh_2 & pg_1 + qg_2 & pl_1 + ql_2 \\ ph_1 + qh_2 & pb_1 + qb_2 & pf_1 + qf_2 & pm_1 + qm_2 \\ pg_1 + qg_2 & pf_1 + qf_2 & pc_1 + qc_2 & pn_1 + qn_2 \\ pl_1 + ql_2 & pm_1 + qm_2 & pn_1 + qn_2 & pd_1 + pd_2 \end{vmatrix}$$

développé suivant les puissances de p et q peut s'écrire

$$E_{1^4}p^4 + E_{1^32}p^3q + E_{1^22^2}p^2q^2 + E_{12^3}pq^3 + E_{2^4},$$

en posant

$$E_1{}^3{}_2 = \begin{vmatrix} a_2 & h_1 & g_1 & l_1 \\ h_2 & b_1 & f_1 & m_1 \\ g_2 & f_1 & c_1 & n_1 \\ l_2 & m_1 & n_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & h_2 & g_1 & l_1 \\ h_1 & b_2 & f_1 & m_1 \\ g_1 & f_2 & c_1 & n_1 \\ l_1 & m_2 & n_1 & d_1 \end{vmatrix} + \cdots\cdots$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} a_2 & h_1 & g_1 & l_1 \\ h_2 & b_1 & f_1 & m_1 \\ g_2 & f_1 & c_1 & n_1 \\ l_2 & m_1 & n_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

$$E_{1^22^3} = \Sigma \begin{vmatrix} a_2 & h_2 & g_1 & l_1 \\ h_2 & b_2 & f_1 & m_1 \\ g_2 & f_2 & c_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

$$E_{12^2} = \Sigma \begin{vmatrix} a_1 & h_2 & g_2 & l_2 \\ h_1 & b_2 & f_2 & m_2 \\ g_1 & f_2 & c_2 & n_2 \\ l_1 & m_2 & n_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Effectuons alors sur les formes S et T et aussi sur la forme

$pS + qT$ le changement de variables indiqué précédemment. Il nous viendra

$$\begin{aligned}
&pS(xyzt) + qT(xyzt) = pS(\lambda\mu\nu\rho) + qT(\lambda\mu\nu\rho) \\
&= (pS_{11} + qT_{11})\lambda^2 + (pS_{22} + qT_{22})\mu^2 + (pS_{33} + qT_{33})\nu^2 \\
&+ (pS_{44} + qT_{44})\rho^2 + 2(pS_{23} + qT_{23})\nu\mu + 2(pS_{31} + qT_{31})\nu\lambda \\
&+ 2(pS_{12} + qT_{12})\lambda\mu + 2(pS_{14} + qT_{14})\lambda\rho + 2(pS_{24} + qT_{24})\mu\rho \\
&\qquad\qquad + 2(pS_{34} + qT_{34})\nu\rho
\end{aligned}$$

forme quadratique en λ, μ, ν, ρ, dont le discriminant

$$(48)\qquad \begin{vmatrix} pS_{11} + qT_{11}, & pS_{12} + qT_{12}, & pS_{13} + qT_{13}, & pS_{14} + qT_{14} \\ pS_{21} + qT_{21}, & pS_{22} + qT_{22}, & pS_{23} + qT_{23}, & pS_{24} + qT_{24} \\ pS_{31} + qT_{31}, & pS_{32} + qT_{32}, & pS_{33} + qT_{33}, & pS_{34} + qT_{34} \\ pS_{41} + qT_{41}, & pS_{42} + qT_{42}, & pS_{43} + qT_{43}, & pS_{44} + qT_{44} \end{vmatrix}$$

peut être, comme le discriminant (47), développé suivant les puissances de p et q. On sait, d'après la théorie générale des invariants, que les coefficients des divers termes de ce développement sont des invariants de la combinaison $pS + qT$. Or, de même que, en ce qui concerne les coefficients de p^4 et de q^4 cette invariance résulte directement de nos premières identités fondamentales, de la même manière nous pouvons démontrer directement l'invariance des autres coefficients et obtenir par exemple l'identité

$$(49)\qquad \Sigma \begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ T_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ T_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ T_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = E_{1}{}^{3}{}_{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}^2$$

Enfin, nous pouvons dans le discriminant (48) considérer le mineur symétrique du troisième ordre

$$(50)\qquad \begin{vmatrix} pS_{11} + qT_{11}, & pS_{12} + qT_{12}, & pS_{13} + qT_{13} \\ pS_{21} + qT_{21}, & pS_{22} + qT_{22}, & pS_{23} + qT_{23} \\ pS_{31} + qT_{31}, & pS_{32} + qT_{32}, & pS_{33} + qT_{33} \end{vmatrix},$$

susceptible lui aussi d'être développé suivant les puissances de p et q. Les coefficients des termes en p^3 et q^3 sont des déterminants susceptibles d'être transformés d'après nos premières identités fondamentales, d'après lesquelles en remarquant que les mineurs désignés par A, B, ..., F, G, ..., L, M, N sont ici du troisième ordre, nous pouvons écrire

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_{1^3} & H_{1^3} & G_{1^3} & L_{1^3} & x_1 & x_2 & x_3 \\ H_{1^3} & B_{1^3} & F_{1^3} & M_{1^3} & y_1 & y_2 & y_3 \\ G_{1^3} & F_{1^3} & C_{1^3} & N_{1^3} & z_1 & z_2 & z_3 \\ L_{1^3} & M_{1^3} & N_{1^3} & D_{1^3} & t_1 & t_2 & t_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_{2^3} & H_{2^3} & G_{2^3} & L_{2^3} & x_1 & x_2 & x_3 \\ H_{2^3} & B_{2^3} & F_{2^3} & M_{2^3} & y_1 & y_2 & z_3 \\ G_{2^3} & F_{2^3} & C_{2^3} & N_{2^3} & z_1 & z_2 & z_3 \\ L_{2^3} & M_{2^3} & N_{2^3} & D_{2^3} & t_1 & t_2 & t_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Quant aux coefficients de p^2q et de pq^2 qui sont l'un et l'autre la somme de trois déterminants, ils sont transformables par les mêmes procédés de calculs que dans le cas de trois variables, et ceux-ci nous conduisent aux identités

$$(50) \qquad \begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} & S_{13} \\ T_{21} & S_{22} & S_{23} \\ T_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} & S_{13} \\ S_{21} & T_{22} & S_{23} \\ S_{31} & T_{32} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & T_{13} \\ S_{21} & S_{22} & T_{23} \\ S_{31} & S_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} A_{1^2 2} & H_{1^2 2} & G_{1^2 2} & L_{1^2 2} & x_1 & x_2 & x_3 \\ H_{1^2 2} & B_{1^2 2} & F_{1^2 2} & M_{1^2 2} & y_1 & y_2 & y_3 \\ G_{1^2 2} & F_{1^2 2} & C_{1^2 2} & N_{1^2 2} & z_1 & z_2 & z_3 \\ L_{1^2 2} & M_{1^2 2} & N_{1^2 2} & D_{1^2 2} & t_1 & t_2 & t_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(51) \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & T_{12} & T_{22} \\ S_{21} & T_{22} & T_{23} \\ S_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & S_{12} & T_{13} \\ T_{21} & S_{22} & T_{23} \\ T_{31} & S_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & S_{13} \\ T_{21} & T_{22} & S_{23} \\ T_{31} & T_{32} & S_{33} \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} A_{12^2} & H_{12^2} & G_{12^2} & L_{12^2} & x_1 & x_2 & x_3 \\ H_{12^2} & B_{12^2} & F_{12^2} & M_{12^2} & y_1 & y_2 & y_3 \\ G_{12^2} & F_{12^2} & C_{12^2} & N_{12^2} & z_1 & z_2 & z_3 \\ L_{12^2} & M_{12^2} & N_{12^2} & D_{12^2} & t_1 & t_2 & t_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La combinaison linéaire de deux formes quadratiques tangentielles conduit à des résultats analogues à ceux que nous venons de trouver pour les formes ponctuelles.

Considérons par exemple les deux formes tangentielles à trois variables :

$$\Sigma\,(uvw) \equiv A_1u^2 + B_1v^2 + C_1w^2 + 2F_1vw + 2G_1wu + 2H_1uv,$$
$$\Theta\,(uvw) \equiv A_2u^2 + B_2v^2 + C_2w^2 + 2F_2vw + 2G_2wu + 2H_2uv,$$

dont les discriminants

$$\begin{vmatrix} A_1 & H_1 & G_1 \\ H_1 & B_1 & F_1 \\ G_1 & F_1 & C_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & H_2 & G_2 \\ H_2 & B_2 & F_2 \\ G_2 & F_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

sont des fonctions du troisième degré de leurs coefficients respectifs et que, pour cette raison, nous désignerons par Dr_{1^2} et Dr_{2^2}.

En effectuant la combinaison linéaire $p\,\Sigma + q\,\Theta$, nous obtenons une nouvelle forme tangentielle générale dont le discriminant

$$(52)\qquad \begin{vmatrix} pA_1 + qA_2 & pH_1 + qH_2 & pG_1 + qG_2 \\ pH_1 + qH_2 & pB_1 + qB_2 & pF_1 + qF_2 \\ pG_1 + qG_2 & pP_1 + qP_2 & pC_1 + qC_2 \end{vmatrix}$$

développé suivant les puissances de p et de q peut être mis sous la forme

$$(52')\qquad Dr_{1^3}p^3 + Dr_{1^2 2}p^2q + Dr_{1 2^2}p^2q + Dr_{2^3}q^3.$$

Si maintenant nous effectuons sur chacune des formes Σ et Θ et aussi sur la forme $p\,\Sigma + q\,\Theta$ le changement de variables indiqué plus haut, le discriminant de cette dernière sera :

$$(53)\qquad \begin{vmatrix} p\Sigma_{11} + q\Theta_{11} & p\Sigma_{12} + q\Theta_{12} & p\Sigma_{13} + q\Theta_{13} \\ p\Sigma_{21} + q\Theta_{21} & p\Sigma_{22} + q\Theta_{22} & p\Sigma_{23} + q\Theta_{23} \\ p\Sigma_{31} + q\Theta_{31} & p\Sigma_{32} + q\Theta_{32} & p\Sigma_{33} + q\Theta_{33} \end{vmatrix}$$

pourra, comme le discriminant (52), être développé suivant les puissances de p et de q, les coefficients des différents termes de ce développement étant des invariants de la forme $p\Sigma + q\Theta$.

Enfin, si nous considérons dans le discriminant (53) le mineur symétrique

$$\begin{vmatrix} p\Sigma_{11} + q\Theta_{11} & p\Sigma_{12} + q\Theta_{12} \\ p\Sigma_{21} + q\Theta_{21} & p\Sigma_{22} + q\Theta_{22} \end{vmatrix},$$

nous pourrons encore le développer suivant les puissances de p et de q, ce qui nous donne

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11}\Sigma_{12} \\ \Sigma_{21}\Sigma_{22} \end{vmatrix} p^2 + \left\{ \begin{vmatrix} \Sigma_{11}\Theta_{12} \\ \Sigma_{21}\Theta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Theta_{11}\Sigma_{12} \\ \Theta_{21}\Sigma_{22} \end{vmatrix} \right\} pq + \begin{vmatrix} \Theta_{11}\Theta_{12} \\ \Theta_{21}\Theta_{22} \end{vmatrix} q^2.$$

Désignant alors par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, les mineurs respectifs de A, B, C, F, G, H dans le discriminant général

$$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix},$$

nous remarquerons que, d'après nos identités fondamentales, les coefficients de p^2 et de q^2 sont transformables d'après les identités

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{1^2} & \mathcal{H}_{1^2} & \mathcal{G}_{1^2} & u_1 & u_2 \\ \mathcal{H}_{1^2} & \mathcal{B}_{1^2} & \mathcal{F}_{1^2} & v_1 & v_2 \\ \mathcal{G}_{1^2} & \mathcal{F}_{1^2} & \mathcal{C}_{1^2} & w_1 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 0 & 0 \\ v_2 & u_2 & w_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{2^2} & \mathcal{H}_{2^2} & \mathcal{G}_{2^2} & u_1 & u_2 \\ \mathcal{H}_{2^2} & \mathcal{B}_{2^2} & \mathcal{F}_{2^2} & v_1 & v_2 \\ \mathcal{G}_{2^2} & \mathcal{F}_{2^2} & \mathcal{C}_{2^2} & w_1 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Quant au coefficient de pq, la méthode employée dans le cas des formes ponctuelles conduit à l'identité suivante :

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Theta_{12} \\ \Sigma_{21} & \Theta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Sigma_{12} \\ \Theta_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{12} & \mathcal{H}_{12} & \mathcal{G}_{12} & u_1 & u_2 \\ \mathcal{H}_{12} & \mathcal{B}_{12} & \mathcal{F}_{12} & v_1 & v_2 \\ \mathcal{G}_{12} & \mathcal{F}_{12} & \mathcal{C}_{12} & w_1 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{54}$$

les coefficients du second membre ayant pour valeurs développées

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}_{12} &= B_1\ C_2 + C_1\ B_2 - 2F_1F_2 \\ \mathcal{B}_{12} &= C_1\ A_2 + A_1\ C_2 - 2G_1G_2 \\ \mathcal{C}_{12} &= A_1\ B_2 + B_1\ A_2 - 2H_1H_2 \\ \mathcal{F}_{12} &= G_1\ H_2 + H_1\ G^2 - A_1F_2 - F_1A_2 \\ \mathcal{G}_{12} &= H_1\ F_2 + F_1\ H_2 - B_1G_2 - G_1B_2 \\ \mathcal{H}_{12} &= F_1\ G_2 + G_1\ F_2 - A_1H_2 - H_1A_2. \end{aligned} \right. \tag{55}$$

Telles sont, avec nos premières identités fondamentales, les relations dont nous donnerons des applications importantes et nombreuses.

NOTES SUR L'INTERPOLATION ;

Par C.-A. LAISANT.

INTRODUCTION.

Les notes qui suivent sont anciennes déjà. J'aurais voulu pouvoir les développer davantage et les compléter sur certains points. Telles quelles, cependant, elles peuvent avoir une certaine utilité ; c'est là ce qui m'a déterminé à les communiquer à la Société Philomathique.

Le problème de l'interpolation présente un réel intérêt au point de vue de la science pure, et une importance plus grande encore peut-être en ce qui touche les applications. Il s'offre à chaque instant, sous les formes les plus diverses, au physicien, au chimiste, à l'ingénieur ; et, même dans les circonstances de la vie ordinaire, il ne serait pas difficile de montrer que les occasions sont fréquentes, dans lesquelles nous avons à résoudre des questions d'interpolation, quelquefois à notre insu.

Dans l'étude rapide qui va suivre, je me propose de rappeler des méthodes d'interpolation, dont quelques-unes sont très connues et même classiques, mais qu'on trouverait difficilement réunies. J'y ajouterai quelques réflexions et quelques observations personnelles ; et je ferai surtout une large part au domaine de l'application, en montrant, sous une forme brève, quelle est la variété des questions qui viennent se poser, et comment peuvent quelquefois s'aplanir de grandes difficultés algébriques, par l'emploi des méthodes graphiques. Des solutions, pratiquement impossibles à cause de la complication des calculs, s'obtiennent souvent ainsi avec une exactitude très satisfaisante et à beaucoup moins de frais.

CHAPITRE PREMIER

Le problème général de l'interpolation

1. *Définition algébrique.* — On dit d'ordinaire que l'interpolation a pour objet de déterminer une fonction inconnue, par exemple d'une seule variable indépendante x, lorsque l'on connaît un certain nombre de valeurs :

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots \quad u_n$$

de cette fonction, correspondant à des valeurs données :

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots \quad x_n$$

de la variable.

La même définition s'appliquerait à une fonction de plusieurs variables x, y, z, ... ; mais il faudrait alors se donner, pour chaque valeur connue particulière u_i de la fonction, un ensemble de valeurs

$$x_i, y_i, z_i, \ldots$$

des variables indépendantes.

Le cas d'une seule variable est de beaucoup le plus fréquent et le plus étudié ; il y a cependant des applications où l'interpolation des fonctions de plusieurs variables présente un grand intérêt. Nous n'examinerons pas ce problème dans l'étude actuelle.

2. *Indétermination du problème.* — Dans tous les cas, le problème de l'interpolation, tel que nous venons de le définir, est essentiellement indéterminé. On va voir, dans les chapitres suivants, comment on le précise, au prix de conditions nouvelles auxquelles on assujettit la fonction cherchée.

Pour se rendre compte de la nature de cette indétermination, il suffit de remarquer (en nous en tenant à une fonction d'une seule variable) qu'on peut représenter un couple quelconque de valeurs correspondantes u_i, x_i, par un point d'un plan qui aurait pour abscisse x_i, et pour ordonnée u_i dans un système quelconque de coordonnées cartésiennes. Dès lors les points M_1, M_2, ..., M_n étant ainsi construits, le problème consiste à faire passer une courbe par ces divers points, ce qui peut se faire évidemment d'une infinité de manières.

3. *Conditions diverses d'application.* — Pour juger de l'importance capitale du problème dont il s'agit, nous allons montrer maintenant comment il peut s'introduire dans les sciences appliquées, et sous quelles faces multiples il doit être envisagé.

Considérons un phénomène physique simple, dans lequel une grandeur variable (U) dépend uniquement, ou du moins est considérée comme dépendant uniquement d'une autre grandeur variable (X). L'expérience peut nous permettre d'obtenir les valeurs correspondantes u_1, u_2, ... et x_1, x_2, ... dont nous parlions plus haut. La relation analytique qui unit u à x sera la *loi physique* du phénomène considéré. Par exemple, si u représente la température d'un corps placé dans un milieu plus froid, et x le temps écoulé à partir d'une certaine origine, cette relation exprimera la loi du refroidissement.

L'interpolation peut être regardée comme ayant pour objet la recherche de cette loi. Si les couples de valeurs correspondantes u_i, x_i sont assez nombreux, si les valeurs de la variable x s'étendent sur un champ assez vaste, le tableau de toutes les valeurs résultant de l'expérience pourra aider puissamment à la découverte de la loi cherchée, sous certaines réserves dont nous parlerons tout à l'heure. Il est bien nécessaire, toutefois, de remarquer que les valeurs u_i sont supposées absolument exactes, quand on se pose la question au point de vue purement mathématique, tandis qu'en réalité elles sont toujours entachées d'erreurs.

Dans d'autres circonstances, il arrive que la loi du phénomène est connue, et les résultats d'expériences fournissant les couples de valeurs u_i, x_i, ne servent qu'à une vérification.

Enfin, et ce n'est pas le cas le moins fréquent, surtout dans les sciences physiques, il arrivera que, par des considérations théoriques ou par des expériences antérieures, on soit fixé sur la *forme analytique* de la loi cherchée, mais sans connaître la valeur numérique de certains paramètres a, b, c,... entrant dans la formule. Le problème de l'interpolation aura alors pour objet de fixer la valeur de ces paramètres. Il restera indéterminé si le nombre des paramètres est supérieur à celui des expériences, et se déterminera si ces deux nombres deviennent égaux. Enfin, si le nombre des expériences est supérieur à celui des paramètres, il y aura en général impossibilité, au point de vue purement analytique, parce qu'on obtiendra des conditions incompatibles. C'est cependant ce cas qu'on tâchera de réaliser, chaque fois que la chose sera possible, parce que les valeurs données de la fonction ne sont qu'approchées, ainsi que nous venons de l'indiquer. L'interpolation aura alors pour objet la détermination des paramètres, en faisant concourir toutes les expériences à cette détermination.

4. *Extrapolation.* — Le champ des valeurs connues x_1, $x_2, \ldots, x_n$ de la variable indépendante, auxquelles correspondent des valeurs connues de la fonction, s'étend depuis la plus petite, x_1 par exemple, jusqu'à la plus grande x_n, en supposant ces valeurs rangées dans l'ordre croissant.

Lorsque, ayant résolu le problème de l'interpolation, on aura trouvé une fonction $u = f(x)$ qui satisfait à toutes les conditions indiquées, on pourra se servir de cette formule pour trouver toute valeur de u correspondant à une valeur de x *comprise entre la plus petite x_1 et la plus grande x_n*, bien que ne figurant pas dans le tableau $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et c'est à cette opération qu'on donnera spécialement le nom d'*interpolation*, suivant le sens étymologique du mot.

Si, au contraire, on se servait de la même formule $u = f(x)$ pour déterminer une valeur de u correspondant à une valeur de x inférieure à x_1 ou supérieure à x_n, on ferait de l'*extrapolation*. C'est une opération qui, en principe, ne présente pas de sécurité dans les applications, et dont il est prudent de s'abstenir autant que possible.

Il y a cependant des cas où l'extrapolation s'impose ; lorsque, par exemple, notre champ d'observation et d'expérience est restreint entre certaines limites, au delà desquelles nous avons cependant intérêt à connaître la loi cherchée. Mais il faut alors contrôler les résultats de l'extrapolation par tous les moyens en notre pouvoir. Il y a encore une réelle sécurité pour les valeurs de x qui ne s'écartent que légèrement de x_1 ou de x_n, en dessous de la première de ces deux valeurs ou au-dessus de la seconde.

Tout dépend d'ailleurs de la nature de la question; si le problème concerne une question de mathématique pure, et que les données soient supposées rigoureusement exactes, l'extrapolation devient alors légitime sans aucune réserve. Si par exemple, ayant tracé deux axes coordonnés OX, OU, on donne les coordonnées (x_1, u_1) (x_2, u_2) (x_3, u_3) de trois points M_1, M_2, M_2 et si l'on cherche une parabole passant par ces trois points et dont l'axe soit parallèle à OU, la formule qu'on obtiendra donnera exactement l'ordonnée d'un point quelconque de cette parabole, correspondant à une abscisse déterminée, quelle que soit cette abscisse, qui peut s'éloigner autant qu'on voudra de l'intervalle x_1 x_3.

5. *Données diverses.* — Nous avons supposé jusqu'ici, comme on le fait le plus souvent, que les données consistaient en un certain nombre de valeurs de la fonction, correspondant à un nombre égal

de valeurs de la variable. Il peut arriver, et il arrivera souvent dans les applications, qu'à ces données viennent s'en ajouter d'autres ; par exemple, il est possible qu'on connaisse, pour certaines valeurs de la variable, celles de la dérivée de la fonction, au lieu de la fonction elle-même. Il y a quelquefois des valeurs remarquables de la variable pour lesquelles on sait que la fonction prend des valeurs de plus en plus grandes, pouvant analytiquement être assimilées à l'infini.

D'autres fois, par la nature même de la question, on sait que la fonction ne peut dépasser certaines valeurs limites, ou qu'elle ne peut prendre aucune valeur comprise dans un certain intervalle.

Toutes ces conditions peuvent varier à l'infini, et on ne saurait se proposer d'indiquer une méthode générale les englobant toutes. Seulement, il importe de bien se rendre compte que les questions multiples qui s'ensuivent, très simples quelquefois, souvent d'une extrême difficulté, font partie du problème général de l'interpolation, qui pourrait, après les explications précédentes, se traduire sous la forme que voici :

« Trouver une fonction qui satisfasse le mieux possible à un ensemble de conditions d'égalité ou d'inégalité données. »

En terminant ce chapitre, nous ferons simplement remarquer que nous avons supposé des fonctions uniformes, c'est-à-dire ne prenant qu'une seule valeur pour une valeur de la variable (ou pour un système de valeurs des variables). Il n'en est pas forcément toujours ainsi, notamment dans les questions de géométrie. Mais, lorsqu'il s'agit des applications pratiques, on peut, presque toujours, assimiler avec avantage la fonction que l'on cherche à une fonction uniforme, sauf à recourir à autant de formules analytiques différentes que la fonction peut prendre de valeurs.

CHAPITRE II

Formule de Lagrange

6. *Détermination.* — Le problème qu'il s'agit de résoudre est celui que nous avons indiqué ci-dessus (1), pour une fonction d'une seule variable. On fait disparaître l'indétermination qu'il présente en assujettissant la fonction cherchée :

1° A être un polynôme algébrique ;

2° A avoir au plus pour degré le nombre n de valeurs correspondantes données de u et de x, diminué d'une unité.

S'il en est ainsi, et en appelant :

$$f(x) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

le polynôme cherché en question, nous voyons que les conditions données peuvent s'écrire :

$$\begin{array}{l} a_0x_1^{n-1} + a_1x_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} = u_1, \\ a_0x_2^{n-1} + a_1x_2^{n-2} + \dots + a_{n-1} = u_2. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0x_n^{n-1} + a_1x_n^{n-2} + \dots + a_{n-1} = u_n. \end{array}$$

Dans ces relations, tout est connu à l'exception des a.

Le nombre des inconnues a_0, a_1, ..., a_{n-1} est de n, c'est-à-dire égal à celui des équations ; et, comme celles-ci sont linéaires, on aura un système bien déterminé en général, le déterminant du système ne pouvant pas s'annuler dans l'hypothèse admise où toutes les valeurs x_1, x_2, ..., x_n sont différentes les unes des autres.

7. *Première forme de la solution.* — La question, sous la forme même où nous venons de la poser, comporte une solution toute naturelle, qui consiste à résoudre le système écrit ci-dessus, et à transporter les valeurs obtenues pour a_0, a_1, ..., a_{n-1} dans le polynôme $f(x)$. En appelant Δ le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

et Δ_{n-1} Δ_{n-2}, ..., Δ_1, Δ_0, ceux qu'on obtient en remplaçant les x par des u dans la première, la deuxième colonne, ..., on a :

$$a_0 = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta}, \quad \dots \quad a_{n-1} = \frac{\Delta_0}{\Delta},$$

et par conséquent :

$$f(x) = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{n-1}\,x^{n-1} + \Delta_{n-2}\,x^{n-2} + \dots + \Delta_1 x + \Delta_0).$$

Si le déterminant Δ_{n-1} vient à s'annuler, on voit que le degré du polynôme $f(x)$ peut s'abaisser.

8. *Solution de Lagrange.* — La forme que nous venons d'obtenir, et qui donne le polynôme ordonné suivant les puissances de x, n'est

pas d'un usage commode dans les applications. Lagrange lui en a substitué une autre, fondée sur la remarque suivante. Chacun des déterminants $\Delta_{n-1}, \ldots, \Delta_1, \Delta_0$ est une fonction linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$; par conséquent le polynôme cherché $f(x)$ est lui-même une fonction linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qui peut s'écrire :

$$(1) \qquad f(x) = X_1 u_1 + X_2 u_2 + \ldots + X_n u_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions de x.

Pour déterminer ces fonctions, supposons que dans cette relation nous venions à remplacer x par l'une des valeurs x_i données à la variable. Le premier membre deviendra u_i; le second membre se réduira aussi à u_i si, pour $x = x_i$ tous les polynômes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se réduisent à zéro, excepté X_i qui se réduit à l'unité. La même remarque, appliquée à chacune des valeurs x_i, nous montre que X_i doit s'annuler pour une valeur de x dont l'indice est l'un des nombres.

$$1, 2, \ldots, \quad i-1, \quad i+1, \ldots n,$$

et devenir égal à 1 pour $x = x_i$.

Donc

$$X_i = k(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)$$

et

$$1 = k(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n),$$

c'est-à-dire qu'on a :

$$(2) \quad X_i = \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} \text{ [1]}.$$

Avec cette définition de chacune des fonctions X_i, la formule (1) n'est autre que la formule de Lagrange.

9. On peut encore l'écrire sous une forme différente.

[1] Il est aisé de reconnaître que la somme

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

est identiquement égale à l'unité. En effet cette fonction $S(x)$ est de degré $n-1$ au plus. Si nous supposons $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 1$, nous aurons $f(x) = (S(x) = 1$, pour les n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable. Donc $S(x) - 1$ s'annule pour ces n valeurs, ce qui n'est possible que si elle est identiquement nulle. C'est là d'ailleurs une proposition classique.

Posons :

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

De là,

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n},$$

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x - x_1} + \frac{\varphi(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{\varphi(x)}{x - x_n}.$$

Si nous remplaçons x par x_i, tous les termes du second membre s'annulent, sauf un seul, et $\frac{\varphi(x)}{x - x_i}$ représente la valeur de $\varphi'(x_i)$ pour $x = x_i$.

Il suit immédiatement de là que X_i peut s'écrire :

$$X_i = \frac{\varphi(x)}{(x - x_i)\,\varphi'(x_i)},$$

et par conséquent la formule de Lagrange peut prendre la forme :

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - x_1)\,\varphi'(x_1)}\,u_1 + \frac{\varphi(x)}{(x - x_2)\,\varphi'(x_2)}\,u_2 + \ldots = \Sigma\,\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_i)}\,\frac{u_i}{x - x_i}$$

10. La formule de Lagrange ayant ainsi fourni le polynôme $f(x)$, il est clair que la fonction :

$$f(x) + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)\,\Phi(x)$$

ou

$$f(x) + \varphi(x)\,\Phi(x)$$

satisfera aussi à toutes les conditions imposées, $\Phi(x)$ étant une fonction arbitraire simplement assujettie à rester finie pour chacune des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ données à x. Si, par exemple $\Phi(x)$ est un polynôme arbitraire en x, cette expression donne tous les polynômes de degré quelconque qui satisfont aux mêmes conditions.

Nous aurons occasion d'utiliser plus loin cette simple remarque.

11. Considérons maintenant une fonction quelconque de x,

$$u = F(x)$$

et supposons que nous venions à lui substituer la fonction :

$$\Sigma\,\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_i)}\,\frac{F(x_i)}{x - x_i}$$

par application de la formule de Lagrange. On peut calculer la différence entre les deux fonctions, ou, comme l'on dit souvent, l'erreur commise

$$F(x) - \Sigma \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_i)} \frac{F(x_i)}{x - x_i} = \psi(x).$$

Cette différence, s'annulant pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, a la forme :

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \frac{\psi^n(X)}{n!},$$

en vertu d'une proposition connue, X représentant une valeur moyenne entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mais le second terme de l'expression de $\psi(x)$ est un polynôme en x de degré, $n - 1$, si bien que $\psi^n(x) = F^n(x)$.

L'erreur est donc $\varphi(x) \dfrac{F^n(X)}{n!}$, et l'on a :

$$F(x) = \Sigma \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_i)} \frac{F(x_i)}{x - x_i} + \varphi(x) \frac{F^n(X)}{n!}.$$

12. La formule de Lagrange doit être considérée comme capitale dans la théorie de l'interpolation. Elle se prête à des généralisations parmi lesquelles nous en examinerons plus loin un petit nombre, et elle a fourni matière à beaucoup de travaux intéressants. Au point de vue des applications, elle présente, sous sa forme primitive, l'inconvénient d'assigner à la fonction que l'on cherche la forme invariable d'un polynône entier; cela peut souvent ne pas s'accorder avec la nature de la question et les observations constatées ; ou, du moins, cela peut jeter dans les expressions et dans les calculs des complications qu'on éviterait par le choix d'autres fonctions mieux appropriées au problème que l'on se pose.

CHAPITRE III

Formule de Newton

13. *Hypothèse sur les valeurs de la variable.* — Jusqu'ici, nous avons supposé quelconques les valeurs de la variable indépendante. On peut admettre qu'elles se succèdent en progression par différence,

et cette hypothèse est d'autant plus naturelle que c'est justement ce qui se produit dans la plupart des cas que présentent les applications.

En partant de cette supposition, Newton, bien avant Lagrange, a donné une formule d'interpolation qui est restée classique, et que nous allons rapidement établir.

14. *Démonstration de la formule.* — Pour la commodité des notations et des calculs, nous supposerons ici que les valeurs correspondantes de la fonction cherchée u et de la variable soient au nombre de $n+1$, savoir

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n$$

et

$$x_0, \quad x_0+h, \quad x_0+2h, \quad \ldots \quad x_0+nh.$$

Dans la suite (u), on sait qu'un terme quelconque u_p est donné par l'expression :

$$u_p = (1+\Delta)^p u_0 = u_0 + \frac{p}{1}\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta_2 u_0 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots 2.1}{p!}\Delta^p u_0,$$

que fait connaître le calcul des différences; les Δ représentent ici les différences successives de u_0.

Si l'on suppose successivement $p = 0, 1, \ldots, n$, cette formule se limite à $1, 2, \ldots n+1$ termes, et donne $u_0, u_1, \ldots, u_n$. Par conséquent, si nous y regardons p, dans les numérateurs, comme une variable, et si nous créons entre p et x une relation telle que pour les valeurs de p

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \quad n,$$

x prenne respectivement les valeurs :

$$x_0, \quad x_0+h, \quad x_0+2h, \quad \ldots \quad x_0+nh,$$

nous obtiendrons le résultat cherché, en poussant la formule jusqu'au terme en $\Delta^n u_0$. Il suffit évidemment pour cela d'écrire :

$$x = x_0 + ph, \quad \text{ou} \quad p = \frac{x-x_0}{h},$$

et nous avons finalement :

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{\frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)}{2!} \Delta^2 u_0 + \ldots +$$
$$\frac{\frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) \ldots \left(\frac{x - x_0}{h} - p + 1\right)}{n!} - \Delta^n u_0.$$

Telle est la formule d'interpolation de Newton. Elle donne, on le voit, un polynôme de degré n, et comme résultat elle ne diffère pas de celle de Lagrange, deux polynômes de degré n étant identiques quand ils prennent les mêmes valeurs pour $n + 1$ valeurs de la variable.

Seulement, la forme de l'expression est tout à fait dissemblable, ce qui est loin d'être indifférent dans la pratique.

En écrivant z au lieu de $\frac{x - x_0}{h}$, on a la formule plus simple :

$$u = u_0 + z \Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{2!} \Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!} \Delta^n u_0,$$

qui résout la question suivante : déterminer un polynôme entier en z, de degré n, qui prenne les valeurs :

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n$$

pour les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n$$

de la variable z.

15. *Remarque.* — On doit constater, parmi les avantages qu'offre la formule de Newton, une propriété fort précieuse ; c'est que, l'ayant appliquée jusqu'à une certaine limite, $x_n = x_0 + nh$ par exemple, correspondant à u_n, elle pourra servir encore si l'on vient à connaître un nouveau couple de valeurs u_{n+1} et $x_0 + (n + 1) h$ de la variable et de la fonction.

Pour ne pas compliquer les écritures, et pour faire comprendre en même temps l'application de la formule au point de vue du calcul, nous allons montrer ceci sur un exemple des plus simples.

A une heure, trois heures et cinq heures, on a observé les hauteurs barométriques 757, 759, 762 en millimètres, et l'on cherche une formule indiquant cette variation.

Ici,

$$\Delta u_0 = 2, \quad \Delta^2 u_0 = 1, \quad x_0 = 1, \quad h = 2, \quad z = \frac{x-1}{2},$$

et la formule nous donne :

$$757 + \frac{x-1}{2} \cdot 2 + \frac{\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2} - 1\right)}{2} \cdot 1$$
$$= 757 + x - 1 + \frac{(x-1)(x-3)}{8}.$$

Une nouvelle observation nous fait connaître qu'à sept heures, la hauteur du baromètre est 763. En nous servant de tous les calculs déjà faits, nous trouvons — 3 pour valeur de $\Delta^3 u_0$, et nous n'avons qu'à ajouter le terme de correction :

$$\frac{\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2} - 1\right)\left(\frac{x-1}{2} - 2\right)}{3!}(-3) = -\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{16}$$

pour obtenir une représentation plus complète du phénomène, dans la période comprise entre une heure et sept heures.

La formule donnant la hauteur sera ainsi :

$$\mathrm{H} = 756 + x + \frac{(x-1)(x-3)}{8} - \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{16},$$

et, pour l'obtenir, on aura utilisé les calculs antérieurement faits, au lieu d'en perdre le bénéfice.

CHAPITRE IV

Formule de Cauchy

16. *Interpolation par une fonction rationnelle.* — « La formule de Lagrange est comprise dans une autre plus générale à laquelle on se trouve conduit, lorsqu'on cherche à déterminer d'après un certain nombre de valeurs supposées connues, non plus une fonction entière, mais une fonction rationnelle de la variable x [1]. »

[1] Cauchy, *Analyse algébrique* (*Œuvres*, t. III, 2e série, p. 431).

On voit, d'après cette citation, que le problème que s'est proposé Cauchy consiste à trouver une fonction fractionnaire $\frac{P}{Q}$, P et Q étant deux polynômes en x, qui prenne n valeurs données $u_1, u_2, \dots, u_n$ pour n valeurs correspondantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ de la variable.

La question devient déterminée si l'on se donne les degrés p et q des deux polynômes P, Q, pourvu que l'on ait la condition

$$n = p + q + 1.$$

Pour le démontrer, et pour trouver en même temps une première solution au problème, supposons que l'on ait :

$$\begin{aligned} -P &= a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p, \\ Q &= b_0 + b_1 x + \dots + b_q x^q. \end{aligned}$$

Il résulte des données même qu'en chassant le dénominateur, et remplaçant x par $x_1, x_2, \dots, x_n$, on aura les équations linéaires et homogènes en $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q$:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_px_1^p + b_0u_1 + b_1x_1u_1 + \dots + b_qx_1^qu_1 = o, \\ &a_0 + a_1x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + b_qx_2^qu_2 = o, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_0 + a_1x_n + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + b_qx_n^qu_n = o. \end{aligned}$$

Les a et les b étant considérés comme inconnues, nous avons $p + q + 2 = n + 1$ inconnues et n équations homogènes. Les rapports mutuels des inconnues sont donc déterminés; et cela montré du même coup que si $p + q + 1$ était supérieur à n, la question deviendrait indéterminée, et généralement impossible si au contraire $p + q + 1$ était inférieur à n.

En désignant par u une valeur particulière quelconque de la fonction cherchée, différente de celles déjà données, et par x la valeur correspondante de la variable, on a aussi :

$$a_0 + a_1 x + \dots\dots\dots\dots + b_q x^q u = o.$$

Si l'on adjoint cette équation aux précédentes, on obtient $n + 1$ équations homogènes, entre lesquelles on peut éliminer les $n + 1$ inconnues, ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x^2 & \dots & x^p & u & xu & \dots & x^q u \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^p & u_1 & x_1u_1 & \dots & x_1^q u_1 \\ \dots & & & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x^p{}_n & u_n & x_nu_n & \dots & x^q{}_n u_n \end{vmatrix} = 0$$

et cette équation, de la forme $F(x) + u\, G(x) = 0$, donne la valeur de u sous la forme demandée, et fournit ainsi une solution.

17. *Forme explicite de la fonction.* — Ce que nous venons de dire constitue plutôt une indication théorique qu'un résultat applicable. Pour avoir une formule explicite, et arriver à la forme indiquée par Cauchy, cherchons les valeurs des a et des b, ou plutôt des valeurs proportionnelles, et à cet effet formons le tableau des coefficients :

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^p & u_1 & x_1 u_1 & x_1^2\, u_1 & \ldots & x_1^q u_1 \\ 1 & x_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & x^{2q} u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^p & u_n & x_n u_n & x_n^2\, u_n & \ldots & x_n^q u_n \end{array} \right\|$$

En supprimant dans ce tableau une colonne quelconque, on obtient un déterminant. Représentons ainsi par :

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_p,\ B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_q$$

les déterminants qui résultent de la suppression des colonnes successives. Ces quantités, affectées de signes convenables, que nous supposons implicitement pour ne pas compliquer l'écriture, sont proportionnelles aux coefficients a_0, ..., b_q, et il en résulte que nous avons pour u la forme :

$$\frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p}{B_0 + B_1 x + \ldots + B_q x^q}.$$

Ce n'est pas encore celle de Cauchy; mais elle permet d'y arriver assez facilement. L'inspection du tableau ci-dessus montre que chaque terme d'un déterminant A contient $q + 1$ facteurs u d'indices différents, et que chaque terme d'un déterminant B en contient q.

Appelons $k_0 k_1, \ldots, k_q$ l'une quelconque des combinaisons $q + 1$ à $q + 1$ des indices 1, 2, ..., n; et $j_1 j_2 \ldots j_q$ l'une quelconque des combinaisons q à q des mêmes indices. On voit que le numérateur sera de la forme : $\Sigma\, X u_{k_0} u_{k_1} \ldots u_{k_q}$, et le dénominateur de la forme $\Sigma\, Y u_{j_1} u_{j_2} \ldots u_{j_q}$; dans ces expressions les coefficients X et Y sont des polynômes en x qu'il nous reste maintenant à déterminer.

Pour cela, prenons en particulier au dénominateur le terme en $u_{k_1} u_{k_2} \ldots u_{k_q}$, et soit Y son coefficient. Si nous pouvons faire en sorte;

1° Que pour une valeur de x dont l'indice est différent de $k_0, k_1, \ldots, k_q$, le coefficient X s'annule;

2° Que pour un indice compris dans les k, excepté k_0, Y s'annule ;

3° Que pour $x = x_{k_0}$, X et Y prennent la même valeur, la question sera complètement résolue. En effet, comme il en sera de même pour tous les termes du numérateur contenant u_{k_0}, le quotient se réduira précisément à u_{k_0}.

Il est facile de satisfaire à ces trois conditions ; si nous appelons $i_1, i_2, \ldots, i_p$ les indices étrangers aux k et qui sont évidemment au nombre de p, puisque $p + q + 1 = n$, nous voyons que X et Y doivent respectivement avoir en facteur :

$$(x - x_{i_1})\,(x - x_{i_2})\,\ldots\,(x - x_{i_p})$$

et

$$(x - x_{k})\,(x - x_{k_2})\,(x - x_{k_q}).$$

En écrivant :

$$X = \frac{(x - x_{i_1})\,(x - x_{i_2})\,\ldots\,(x - x_{i_p})}{(x_{k_0} - x_{i_1})\,\ldots\,(x_{k_0} - x_{i_p})\,(x_{k_1} - x_{i_1})\,\ldots\,(x_{k_q} - x_{i_p})},$$

$$Y = \frac{(-1)^q\,(x - x_{k_1})\,(x - x_{k_2})\,\ldots\,(x - x_{k_q})}{(x_{k_1} - x_{i_1})\ldots(x_{k_1} - x_{i_p})\,(x_{k_2} - x_{i_1})\ldots(x_{k} - x_{i_p})\,(x_{k_1} - x_{k_0})\ldots(x_{k} - x_{k_0})},$$

on satisfera évidemment à la troisième condition ci-dessus.

En résumé, la formule d'interpolation de Cauchy peut se mettre sous la forme assez concise :

$$u = (-1)^q \frac{\sum \dfrac{\Pi\,(x - a_i)}{\Pi\,(x_k - x_i)}\, u_{k_0} u_{k_1} \ldots u_{k^q}}{\sum \dfrac{\Pi\,(x - a_{k'})}{\Pi\,(x_{k'} - x_{i'})}\, u_{k'_1} u_{k'_2} \ldots u_{k'_q}},$$

où les i représentent tous les indices étrangers aux k, et les i' tous ceux étrangers aux k'.

D'une application assez pénible, elle peut cependant rendre des services dans certains cas. Elle se réduit d'ailleurs à celle de Lagrange, comme Cauchy le fait remarquer, lorsque $q = 0$.

Si $p = 0$, au contraire, on obtient immédiatement le résultat en remplaçant u par $\frac{1}{u}$ et u_i par $\frac{1}{u_i}$ dans la formule de Lagrange :

$$u = X_1 u_1 + X_2 u_2 + \ldots + X_n u_n,$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{\dfrac{X_1}{u_1}+\dfrac{X_2}{u_2}+\ldots+\dfrac{X_n}{u_n}}.$$

18. Pour achever d'éclaircir par un exemple ce qui concerne l'application de la formule de Cauchy, supposons qu'on ait $p=2$, $q=3$, et par conséquent $n=6$.

Le numérateur contiendra un terme en $u_1u_3u_5u_6$ et ce terme sera

$$\frac{(x-x_2)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_4)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_5-x_2)(x_5-x_4)(x_6-x_2)(x_6-x_4)}u_1u_3u_5u_6.$$

De même, il y aura au dénominateur un terme en $u_1u_5u_6$, qui sera :

$$-\frac{(x-x_1)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)}u_1u_5u_6.$$

Pour $x=x_1$, x_5 ou x_6, le terme du dénominateur s'annule ; pour $x=x_2$ ou x_4, le terme du numérateur s'annule ; pour $x=x_3$, le quotient des deux termes devient égal à u_3, et on en pourra dire autant pour tous les termes qui contiennent u_3 au numérateur. Or, ce qui s'applique à u_3 s'applique tout aussi bien aux autres termes u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, ce qui permet de vérifier facilement la formule dans ce cas particulier, sans avoir même eu besoin de l'écrire en son entier.

CHAPITRE V

Fonctions interpolaires d'Ampère. — Interpolation successive.

19. *Fonctions interpolaires ; définitions ; propriétés.* — Les fonctions imaginées par Ampère [1] et désignées par lui sous le nom de fonctions interpolaires, sont définies de la manière suivante : $f(x)$ étant une fonction donnée de la variable x, et $a, b, c, \ldots, h, k$ des valeurs données, posons :

[1] *Annales de Gergonne*, 1826.

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
f(a,b) &= \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \\
f(a,b,c) &= \frac{f(a,b) - f(a,c)}{b - c}, \\
f(a,b,c,d) &= \frac{f(a,b,c) - f(a,b,d)}{c - d}, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Cauchy [1] a consacré un mémoire à l'étude de ces fonctions, et en a donné d'importantes propriétés. Quelques-unes, les seules qui nous intéressent ici, peuvent avoir des applications dans le problème de l'interpolation, et nous les signalerons rapidement d'après l'étude précitée du grand géomètre.

Nous passerons sous silence les autres, qui se rapportent plus exclusivement à l'analyse.

20. Si, dans les équations de définition qui précèdent, on remplace respectivement le dernier élément b, c, d, ..., par x, on obtient très facilement les relations

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + (x-a)\,f(a,x), \\
f(x) &= f(a) + (x-a)\,f(a,b) + (x-a)(x-b)\,f(a.b,x), \\
f(x) &= f(a) + (x-a)\,f(a,b) + (x-a)(x-b)\,f(a,b,c) \\
&\qquad + (x-a)(x-b)(x-c)\,f(a,b,c,x), \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

De là,

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + (b-a)\,f(a,b), \\
f(c) &= f(a) + (c-a)\,f(a,b) + (c-a)(c-b)\,f(a,b,c), \\
f(d) &= f(a) + (d-a)\,f(a,b) + (d-a)(d-b)\,f(a,b,c) + \\
&\qquad (d-a)(d-b)(d-c)\,f(a,b,c,d), \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Par conséquent, si l'on connaît les termes de l'une des deux suites :

$$
\begin{array}{llll}
f(a), & f(b), & f(c), & f(d), \\
f(a), & f(a,b), & f(a,b,c), & f(a,b,c,d), \ldots,
\end{array}
$$

les termes de l'autre s'en déduisent immédiatement.

On constate très aisément que *si $f(x)$ représente un polynôme entier en x, de degré n, les fonctions :*

$$
f(x), \qquad f(a,x), \qquad f(a,b,x), \qquad f(a,b,c,x), \ldots,
$$

[1] *Œuvres*, t. V (1re série), p. 409.

sont des polynômes entiers en x, de degrés

$$n, \qquad n-1, \qquad n-2, \qquad n-3, \quad \ldots,$$

21. *Soit* $F(x)$ *un polynôme entier en* x, *de degré* n, *défini par la formule :*

$$(4) \qquad \begin{aligned} F(x) = f(a) + (x-a)\,f(a,b) + \ldots \\ + (x-a)\,(x-b)\ldots(x-k)\,f(a,b,\ldots,k,x)\,; \end{aligned}$$

on aura :

$$(5) \qquad F(a) = f(a), \qquad F(b) = f(b), \ldots, \qquad F(k) = f(k)$$

et

$$(6) \quad f(x) = F(x) + (x-a)\,(x-b)\ldots(x-k)\,f(a,b,\ldots k,x).$$

On voit en effet que les identités (5) résultent du rapprochement des relations (4) et (3), et que l'on obtient la formule (6) en retranchant de l'équation de définition (4) l'une des relations (2), convenablement choisie.

22. *Les fonctions interpolaires* $f(a,b)$, $f(a,b,c), \ldots f(a,b,c,\ldots,k)$ *sont des fonctions symétriques.*

« En effet, si dans la formule (4) on échange entre elles les lettres $a, b, c, \ldots, k$ d'une manière quelconque, les diverses valeurs de $F(x)$ que l'on obtiendra seront identiques, puisque chacune d'elles devra vérifier les conditions (5) et qu'une seule fonction de x, entière et du degré n, peut vérifier ces conditions dont le nombre est $n+1$. Donc le coefficient de x^n, dans le second membre de la formule (4), ou l'expression $f(a, b, c, \ldots, k)$, sera une fonction symétrique de $a, b, c, \ldots, k$ [1]. »

Remarquons enfin que si, dans l'une des relations (2), on suppose que les valeurs particulières de la variable deviennent égales, on tombe sur la formule de Taylor, d'où il suit qu'on a les identités :

$$f(x,x) = f'(x), \quad f(x,x,x) = \frac{f''(x)}{2!}, \ldots$$

23. *Interpolation successive.* — Lorsqu'on sait calculer les fonctions interpolaires successives $f(a,b)$, $f(a,b,c), \ldots$, la formule (4) ci-dessus devient une formule d'interpolation qui fournit un poly-

[1] Cauchy, *loc. cit.*

nôme entier prenant les valeurs données $f(a), f(b), \ldots$, pour les valeurs données $a, b, \ldots$, de la variable.

Dans un ordre d'idées qui se rattache à cette théorie, mais avec quelques différences dans l'application effective, j'ai indiqué [1] un procédé qui permet de trouver de proche en proche une fonction prenant des valeurs données correspondant à des valeurs données de la variable, et auquel j'ai donné le nom d'interpolation successive. J'en reproduis l'exposé à peu près textuellement, d'après la note publiée sur ce sujet.

Supposons qu'une fonction y d'une seule variable indépendante, et représentant par exemple un phénomène dont il s'agit de trouver la loi, ait été déterminée pour n valeurs particulières de la variable :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

et qu'elle prenne les valeurs correspondantes :

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Si, par une formule ou une méthode quelconque, on a obtenu une fonction u de x qui satisfait aux conditions que nous venons de dire, la loi cherchée sera convenablement exprimée par la relation :

$$y = u$$

dans la limite des observations enregistrées.

A ces mêmes conditions satisfera aussi la fonction :

$$y = u + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) f(x),$$

pourvu que $f(x)$ reste finie pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$; et, plus particulièrement, si $f(x)$ est remplacé par k,

$$(1) \qquad y = u + k(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_p).$$

Soit maintenant qu'une observation ou une expérience nouvelle nous apprenne que, pour une valeur x_{n+1} de la variable, différente des précédentes, la fonction doit prendre la valeur connue y_{n+1}. La formule $y = u$ cesserait généralement alors de convenir ; car, si on y remplaçait x par x_{n+1}, la fonction u prendrait une valeur u_{n+1} différente de y_{n+1}.

[1] *Bulletin de la Soc. math. de France*, 1891, p. 121.

Cherchons à employer la formule (1) qui précède, en y considérant k comme un coefficient indéterminé. En faisant la même substitution de x_{n+1} à x, nous devrons avoir :

$$(2) \quad y_{n+1} = u_{n+1} + k\,(x_{n+1} - x_1)\,(x_{n+1} - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_n),$$

et cette relation nous déterminera la valeur numérique du coefficient k,

$$k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{(x_{n+1} - x_1)\,(x_{n+1} - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_n)},$$

qui, substitué à k dans la formule (2), transformera celle-ci en une formule d'interpolation qui remplacera la formule $y = u$, par l'adjonction d'un simple terme de correction. On remarquera que le numérateur de k est la différence entre la valeur *observée* et la valeur *calculée* de la fonction, pour la nouvelle valeur attribuée à la variable. En continuant de la sorte, on aura de proche en proche des formules successives qui permettront de serrer pour ainsi dire le phénomène de plus en plus, à mesure qu'on acquiert des données nouvelles, et sans jamais perdre le bénéfice des calculs précédemment effectués.

Si la différence $y_{n+1} - u_{n+1}$ devient tellement faible que la valeur qui s'ensuivra pour le terme de correction soit inférieure aux erreurs inévitables d'observation et de mesure, on devra supprimer ce terme, et la formule primitive $y = u$ restera applicable, même avec une observation de plus.

Dans le cas particulier où les valeurs de x données se succèdent en progression par différence, de raison h, la valeur de k devient :

$$k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{h^n n\,!}$$

24. Nous donnerons ici une application très simple, en supposant qu'on cherche la loi du mouvement d'un mobile qui, à partir d'une certaine origine, a parcouru les espaces, 7, 8, 11, 16, 23 aux époques mesurées respectivement par 0, 1, 2, 3, 4.

D'après les deux premières observations, la loi du mouvement est convenablement représentée par la formule $y = 7 + x$.

Écrivons $y = 7 + x + kx\,(x - 1)$, et remplaçons y par 11 et x par 2. Alors $2 = 2k$, $k = 1$, et $y = 7 + x^2$ est une nouvelle formule convenant aux trois premières observations.

Écrivons $y = 7 + x^2 + k'x\,(x - 1)\,(x - 2)$, et faisons $y = 16$,

$x = 3$; alors $k' = o$, et la formule $y = 7 + x^2$ convient aux quatre premières observations.

Enfin, dans $y = 7 + x^2 + k''x(x-1)(x-2)$, remplaçons y par 23, x par 4; on a $k'' = 0$, et la formule $y = 7 + x^2$ suffit à représenter tout le phénomène observé.

Si la dernière valeur de y, au lieu de 23, était 22, on aurait $k'' = -\frac{1}{24}$, et la formule cherchée serait alors :

$$y = 7 + x^2 - \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3).$$

CHAPITRE VI

Autres formules. — Généralisations diverses

25. *Formule trigonométrique de Gauss.* — Dans un mémoire qui n'a été publié qu'après sa mort[1], Gauss a établi une formule d'interpolation qui résout d'une manière très élégante le problème suivant :

« Trouver une fonction linéaire des sinus et cosinus d'un arc x et de ses n premiers multiples, qui, pour $2n + 1$ valeurs données à x, prenne $2n + 1$ valeurs correspondantes, également données. »

La méthode de Gauss est un peu longue. M. Fouret ayant été amené, il y a quelques années, à s'occuper de cette question qu'il croyait nouvelle, en a donné une solution extrêmement simple[2] que nous allons indiquer.

Posons :

$$(1) \quad A_0 + B_1 \sin x + A_1 \cos x + \ldots + B_n \sin nx + A_n \cos nx = F(x).$$

Il est clair que la fonction cherchée $F(x)$ s'obtiendrait en éliminant $A_0, B_1, \ldots, B_n, A_n$ entre (1) et les $2n + 1$ équation qu'on déduirait de cette relation en y remplaçant x par les $2n + 1$ valeurs données $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$, et $F(x)$ par les $(2n + 1)$ valeurs correspondantes $F(\alpha_0), F(\alpha_1), \ldots, F(\alpha_{2n})$. Il résulte de cette remarque que $F(x)$ est une fonction linéaire et homogène de $F(\alpha_0), \ldots, F(\alpha_{2n})$, et que le coefficient

(1) *Œuvres* de GAUSS, t. III, p. 265-327.

(2) *C. R.*, t. XCIX, p. 1062-1064. — Le présent exposé est rédigé presque textuellement d'après une note que nous devons à l'obligeance de M. Fouret, et dont nous le remercions ici.

de l'une quelconque de ces quantités est une fonction linéaire des sinus et cosinus de x et de ses n premiers multiples.

Or, on a, quel que soit l'entier m, les formules bien connues :

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1,2} \cos^{m-2} x \sin^2 x + \ldots,$$

$$\sin mx = m \cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1,2,3} \cos^{m-3} x \sin^3 x + \ldots;$$

d'autre part,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

En vertu de ces deux groupes de relations, les coefficients de $F(\alpha_0)$, $F(\alpha_1)$, ..., dans $F(x)$ peuvent être supposés mis sous la forme :

$$\frac{\varphi\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^n},$$

φ désignant un polynôme entier de degré $2n$ en $\operatorname{tg} x$. Or le coefficient de $F(\alpha_i)$ doit s'annuler pour $x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$, et se réduire à l'unité pour $x = \alpha_i$. Ces conditions déterminent le coefficient, que l'on peut écrire :

$$\left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_i}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right)^n \Pi_j \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha_j}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha_j}{2}},$$

ou, réductions faites,

$$\Pi_j \frac{\sin \frac{1}{2}(x - \alpha_j)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)},$$

Π_j désignant le produit des $2n$ facteurs qu'on obtient en attribuant à j successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, 2n$ dans l'expression soumise à ce symbole.

On a par conséquent :

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{i=0}^{i=2n} F(\alpha_i)\, \Pi \frac{\sin \frac{1}{2}(x - \alpha_j)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)}.$$

C'est la formule de Gauss. On peut aussi l'écrire :

$$(3) \quad F(x) = \prod_{i=0}^{i=2n} \sin \frac{1}{2}(x - \alpha_i) \sum_{i=0}^{i=2n} \frac{F(\alpha_i)}{\Pi_j \sin \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)} \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(x - \alpha_i)}.$$

En posant :

$$G(x) = \prod_{i=2}^{i=2n} \sin \frac{1}{2}(x - \alpha_i),$$

et observant que l'on a :

$$G'(\alpha_i) = \frac{1}{2} \Pi_j \sin \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)$$

on obtient encore :

$$(4) \qquad F(x) = \frac{1}{2} G(x) \sum_{i=0}^{i=2n} \frac{F(\alpha_i)}{G'(\alpha_i)} \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(x - \alpha_i)}.$$

On remarquera, d'après les expressions (2), (3), (4), l'analogie frappante entre la formule d'interpolation de Gauss et celle de Lagrange, et qui se poursuit dans les conséquences que l'on peut en déduire. C'est ainsi que la formule (4) fournit immédiatement la décomposition en éléments simples de la fonction trigonométrique $F(x)$, et que l'on en tire l'identité remarquable

$$(5) \qquad \sum_{i=0}^{i=2n} \frac{G'(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} = 0,$$

analogue à l'identité d'Euler pour le cas des polynômes entiers. On a notamment, dans le cas où $F(x)$ se réduit à une constante,

$$\sum_{i=0}^{i=2n} \frac{1}{G'(\alpha_i)} = 0.$$

D'après son origine même, la formule d'interpolation de Gauss est particulièrement propre à certaines applications du domaine de l'astronomie et de la physique mathématique.

26. *Autres généralisations.* — La formule (2) du numéro précédent suggère tout naturellement une généralisation de celle de Lagrange.

Si dans les coefficients

$$X_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\dots(x_1 - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)}, \dots$$

on remplace tous les facteurs binômes par des fonctions de ces facteurs qui s'annulent avec eux, tels que des sinus, des tangentes, par exemple, la nouvelle valeur de X_i satisfera encore à la condition de s'annuler pour $x = x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ et de devenir égale à l'unité pour $x = x_i$. Donc la formule :

$$u = X_1 u_1 + X_2 u_2 + \dots + X_n u_n$$

sera encore valable avec cette nouvelle définition des fonctions X.

Brassime (*J. de Liouville*, 1re série, t. II) a donné aussi la formule suivante, où $F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$, et où $A_1, A_2, \dots$, sont des quantités arbitraires :

$$\frac{A_1 u_1 F(x)(x - x_1)^{-1} + A_2 u_2 F(x)(x - x_2)^{-1} + \dots}{A_1 F(x)(x - x_1)^{-1} + A_2 u_2 F(x)(x - x_2)^{-1} + \dots}.$$

On peut encore l'écrire :

$$\frac{A_1 u_1 (x - x_1)^{-1} + A_2 u_2 (x - x_2)^{-1} + \dots}{A_1 (x - x_1)^{-1} + A_2 (x - x_2)^{-1} + \dots}$$

27. Je tiens enfin à signaler une généralisation très étendue, que j'ai donnée pour la première fois dans le *Bulletin de la Soc. Math. de France* (1891, p. 44).

Considérons une fonction quelconque φ, et soit φ^{-1} la caractéristique de la fonction inverse, en sorte qu'on ait toujours :

$$\varphi[\varphi^{-1}(z)] = \varphi^{-1}[\varphi(z)] = z.$$

Puis reprenons la formule de Lagrange sous la forme :

$$u = X_1 u_1 + X_2 u_2 + \dots + X_n u_n.$$

Si nous remplaçons les u du second membre par $\varphi^{-1}(u_1)$, $\varphi^{-1}(u_2)$, ... et si nous prenons la fonction φ de ce second membre ainsi transformé, la formule deviendra :

$$U = \varphi\left[X_1\varphi^{-1}(u_1) + X_2\varphi^{-1}(u_2) + \ldots + X_n\varphi^{-1}(u_n)\right].$$

Il est clair que si l'on y remplace x par x_i, tous les X s'annulent, sauf X_i qui devient égal à 1 ; et la valeur correspondante de U est $\varphi[\varphi^{-1}(u_i)] = u_i$.

La formule nouvelle satisfera donc à toutes les conditions du problème, tout comme celle de Lagrange; mais elle présente une souplesse pour ainsi dire infinie, résultant de l'indétermination de la fonction φ.

Il y a lieu de constater que cette généralisation peut s'étendre à la formule de Cauchy, étudiée au chapitre IV, et plus généralement à une formule d'interpolation quelconque :

$$u = F(x, u_1, u_2, \ldots u_n).$$

En effet, si dans le second membre on remplace les u par $\varphi^{-1}(u_1)$, ..., pour la valeur particulière $x = x_i$, ce second membre deviendra $\varphi^{-1}(u_i)$. Par conséquent la formule :

$$U = \varphi[F(x, \varphi^{-1}(u_1), \varphi^{-1}(u_2), \ldots \varphi^{-1}(u_n))]$$

donnera pour valeur particulière $\varphi[\varphi^{-1}(u_i)] = u_i$, c'est-à-dire conviendra encore.

CHAPITRE VII

Fonctions numériques. — Applications algébriques

28. *Fonctions numériques.* — L'étude de certaines questions, surtout en théorie des nombres, amène à considérer des fonctions qui ne sont définies que pour des valeurs spéciales de la variable, par exemple pour les valeurs entières. Il y aurait un intérêt très grand à pouvoir substituer à cette définition numérique une définition analytique, c'est-à-dire qu'on trouverait une fonction prenant toutes les valeurs indiquées, et prenant en outre des valeurs déterminées pour des valeurs quelconques de la variable.

C'est là un problème résolu dans quelques cas particuliers. En général, il présente de grandes difficultés et conduit à des remarques intéressantes et importantes au point de vue de l'analyse [1]. Nous ne l'aborderons pas ici, car ce serait sortir de notre cadre, lequel est beaucoup plus élémentaire. Seulement, pour préciser par un exemple, nous indiquerons la fonction $x! = 1.\ 2.\ 3 \ldots.\ x$, ou *factorielle* de x, définie par le produit des x premiers nombres entiers. On sait que la fonction transcendante eulérienne $\Gamma(x+1)$ donne la solution, c'est-à-dire qu'on a $\Gamma(x+1) = x!$ pour toutes les valeurs entières positives de x et que la fonction Γ est définie pour toute autre valeur de x.

L'interpolation traitée sous cette forme intéresse la science pure beaucoup plus que les applications. Dans les numéros qui suivent, nous allons, à un point de vue beaucoup plus élémentaire, montrer comment les considérations présentées jusqu'ici peuvent être utiles à l'algèbre.

29. *Une sommation.* — Soit qu'on se propose de déterminer la somme des p premiers coefficients du développement de $(a+b)^x$. Par définition, cette somme est :

$$u_{n,p} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{(p-1)!}$$

Si dans cette expression on considère p comme constant, et n comme variable, on voit que cette fonction est entière et de degré $p-1$. Elle est donc déterminée par p valeurs correspondantes. Or pour $n = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, elle prend les valeurs $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{p-1}$. La question se trouve donc ramenée à un problème d'interpolation. En appliquant la formule de Newton, on retomberait sur l'expression précédente, qui définit $u_{n,p}$; en appliquant celle de Lagrange, on a :

$$u_{n,p} = n(n-1)\ldots(n-p+1) \times$$
$$\left[\frac{2^{p-1}}{(p-1)!(n-p+1)} - \frac{2^{p-2}}{1!(p-2)!(n-p+2)} + \frac{2p^{p-3}}{2!(p-3)!(n-p+3)} - \right.$$
$$\left. \cdots \pm \frac{2}{(p-2)!\,1!\,(n-1)} \mp \frac{2}{(p-1)!\,n}\right]$$

et incidemment se trouve établie l'identité des deux formes de l'expression $u_{n,p}$ qui, directement, est loin de l'évidence.

[1] Voir H. Laurent, *Traité d'analyse*, t. III, p. 418 et suiv.

30. *Un problème sur les différences finies.* — La différence première Δx d'une variable indépendante étant constante et prise pour unité, on cherche une fonction $F(x)$ telle qu'il existe entre $F(x+1)$ et $F(x)$ une relation donnée. Ce problème a été repris récemment par M. E.-M. Lémeray, qui en a donné une solution nouvelle, et qui, sur la prière que nous lui avons faite, a bien voulu résumer cette solution dans une note à laquelle nous empruntons l'exposé qui va suivre.

Si l'on pose $F(x) = y$, $F(x+1) = y_1$, on devra avoir :

$$y_1 = \varphi(y), \tag{1}$$

φ étant une fonction donnée. De l'équation (1) on tire :

$$y_2 = \varphi(y_1) = \varphi_2(y), \; \ldots \; y_{m+1} = \varphi[\varphi_m(y)] = \varphi_{m+1}(y), \; \ldots$$

et, si l'on se donne pour y une valeur arbitraire y_0, on pourra calculer autant de valeurs de la fonction que l'on voudra, pourvu que φ ne cesse pas d'exister ; φ_{-1} désignant la fonction inverse de φ, on aura de même :

$$y_{-1} = \varphi_{-1}(y), \quad y_{-2} = \varphi_{-1}[\varphi_{-1}(y)] = \varphi_{-2}(y), \; \ldots$$

Le problème consiste à interpoler les valeurs trouvées.

Une remarque fondamentale, et connue depuis longtemps, est la suivante : il arrive souvent que les valeurs qu'on vient d'obtenir en répétant soit la substitution directe, y, $\varphi(y)$, soit la substitution inverse y, $\varphi_{-1}(y)$, tendant vers une limite. Cette limite, si elle existe, est nécessairement un zéro de $\varphi(y) - y$, puisque, si α est la limite, on a $\varphi(\alpha) = \alpha$, ou, ce qui revient au même, $\varphi_{-1}(\alpha) = \alpha$. Mais l'équation $\varphi(y) - y = 0$ peut avoir des racines en nombre fini ou infini ; si en partant de y_0 la substitution converge vers une racine déterminée α, on dit que y_0 appartient au domaine de α.

Si l'on prend α pour origine, et si pour plus de simplicité on désigne encore par φ la fonction rapportée à cette nouvelle origine ; en admettant de plus que la fonction soit développable dans son voisinage en série entière, on a trois cas à considérer :

$$\varphi(y) = Ay + \frac{B}{2!}y^2 + \ldots,$$

$$\varphi(y) = iy + \frac{P}{p!}y^p + \ldots,$$

$$\varphi(y) = \frac{P}{p!}y^p + \ldots,$$

i désignant une racine de l'unité. Ce qui suit suppose de plus que tous les coefficients des seconds nombres sont réels ; que dans le premier cas A est positif, différent de 1 et de 0 ; que dans le second, $i = +1$; que dans le troisième P est positif si p est impair. Le problème envisagé est indéterminé comme la plupart des problèmes d'interpolation. On en a *une* solution dans les expressions suivantes :

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
F(x,y_0) &= \lim \varphi_{-m} \left| A^x \varphi_m(y_0) \right|, \\
F(x,y_0) &= \lim \varphi_{-m} \left\{ \left(1 - \frac{x}{m(p-1)\,\varphi_m(y_0)}\right\}, \right. \\
F(x,y_0) &= \lim \varphi_{-m} \left\{ \frac{1}{K} [K\varphi_m(y_0)]^{p^x} \right\}.
\end{aligned}
$$

m est considéré comme infini pour le calcul des limites ; et dans le troisième cas, on a posé $\left(\frac{P}{p!}\right)^{\frac{1}{p-1}} = K$. Dans les hypothèses faites pour chacun des trois cas, les formules représentent une fonction qui peut être réelle quand x et y_0 sont réels. Elles sont relatives à la convergence par la substitution directe ; dans le cas de la convergence par la substitution inverse, on a des formules analogues.

La fonction φ et son inverse étant supposées bien connues, on peut admettre qu'on a (par un procédé quelconque) construit des tables donnant leurs valeurs pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable. Les formules (2) permettent alors le calcul effectif de la fonction F ; elles pourront souvent être appliquées, même quand y_0 est pris en dehors de la région où $\varphi(y)$ est régulière ; mais la détermination *générale* des conditions nécessaires et suffisantes pour que les formules soient valables est délicate ; les fonctions φ et φ_{-1} peuvent avoir plusieurs déterminations, et il faut savoir laquelle choisir. Or, la considération des surfaces de Riemann, sur lesquelles on peut représenter les fonctions φ et φ_{-1} n'est pas suffisante ; car lorsqu'on calcule les valeurs y_{m+1}, $y_{m+2}, \ldots$ de la fonction, la variable ne suit pas un chemin continu, mais prend les valeurs discontinues y_m, $y_{m+1}, \ldots$ Dans les cas où l'on n'aura pas d'indécision, les formules pourront être employées.

Les limites vers lesquelles tendent les fonctions (2) peuvent d'ailleurs devenir infinies pour certaines valeurs de x qui seront des pôles de F.

Il s'en faut de beaucoup que tous les zéros de $\varphi(y) - y$ possèdent un domaine, c'est-à-dire que dans n'importe quel cas, on puisse trouver une valeur y_0 telle que l'une des substitutions converge vers l'un de ces zéros. M. Lémeray a notamment signalé un cas dans lequel aucun des zéros ne possède de domaine, et où l'on est conduit pour F à une fonction doublement périodique.

On peut ramener à l'équation (1) l'équation aux différences finies du premier ordre.

$$\Delta y = f(y).$$

Il suffit en effet de poser $\Delta y = y_1 - y$ et $y + f(y) = \varphi(y)$.

CHAPITRE VIII

Interpolation des suites récurrentes

31. La question que nous comptons traiter ici rentre en partie dans celles du chapitre précédent ; mais elle présente cependant des particularités assez remarquables pour mériter d'être étudiée à part.

Rappelons tout d'abord qu'une suite

$$u_0 \qquad u_1 \qquad \dots \qquad u_p$$

est récurrente et du n^e ordre lorsqu'un terme quelconque peut s'exprimer par une fonction linéaire homogène donnée des n termes qui le précèdent, en sorte qu'on a :

$$(1) \qquad u_{n+k} = c_{n-1}\, u_{n+k-1} + c_{n-2}\, u_{n+k-2} + \dots + c_0 u_k,$$

relation qu'on peut écrire symboliquement

$$u_k \varphi(u) = 0$$

et qu'on appelle l'échelle de récurrence de la suite.

L'équation algébrique :

$$\varphi(x) = 0$$

donnerait aussi tous les éléments de l'échelle de récurrence ; et en y ajoutant les n premiers termes de la suite $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, ou même n termes quelconques de rangs connus, on aurait tous les éléments permettant de déterminer complètement la suite.

Les suites récurrentes du premier ordre, par exemple, où $\varphi(x)$ est $x - a$, ne sont autres que les progressions par quotient, où la raison

a et la connaissance d'un terme quelconque suffisent pour déterminer la progression.

L'insertion des moyens dans une progression par quotient se fait en mettant l'expression du terme u_n sous la forme $u_0 a^n$, puis en écrivant :

$$F(z) = u_0 a^z$$

et en substituant à z les valeurs correspondant aux intervalles égaux en lesquels est partagé celui qui sépare deux termes, u_p, u_{p+1} par exemple. Ce procédé constitue en réalité une interpolation des valeurs u_0, u_1 ..., u_m ... correspondant à 0, 1, ..., m ...

C'est ce même problème que nous nous proposons ici d'étendre à une suite récurrente quelconque.

Dans ce but, désignons par a_1, a_2, ..., a_n les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ ci-dessous, en sorte que :

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

et posons :

$$u_z = A_1 a_1^z + A_2 a_2^z + \ldots + A_n a_n^z.$$

Si l'on donne à z les $n+1$ valeurs entières u_{k_1}, u_{k+1}, u_{k+n}, il est évident que la relation de récurrence (1) sera vérifiée.

Donc on aura interpolé complètement la suite par la formule que nous venons d'écrire, à la condition de remplacer les coefficients A_1, A_2, ... par des valeurs telles que pour $z = 0, 1, 2, \ldots n-1$, on ait u_0, u_1, u_2, ..., u_{n-1}. Ceci conduit aux équations linéaires :

$$\begin{array}{c}
A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = u_0, \\
A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_n a_n = u_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1 a_1^{n-1} + A_2 a_2^{n-1} + A_3 a_3^{n-1} + \ldots + A_n a_n^{n-1} = u_{n-1}.
\end{array}$$

En appelant Δ le déterminant des coefficients des A, et Δ_1, Δ_2, ... Δ_n les déterminants obtenus par la substitution des seconds membres u_0, u_1, ... dans la première, la deuxième colonne, ... il nous vient en définitive :

$$u = \frac{\Delta_1}{\Delta} a_1^z + \frac{\Delta_2}{\Delta} a_2^z + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta} a_n^z$$

et cette formule interpole entièrement la suite.

Si l'on veut par exemple s'en servir pour interpoler m_1 moyens entre deux termes consécutifs quelconques u_p, u_{p+1}, il n'y aura qu'à donner à z les valeurs $p+\frac{1}{m}$, $p+\frac{2}{m}$, ... $p+1$; en posant $a_1^{\frac{1}{m}}=b_1$, $a_2^{\frac{1}{m}}=b_1$, ... $a_n^{\frac{1}{m}}=b_n$, on vérifie tout de suite que $n+1$ termes de la nouvelle suite

$$v_0 = u_p \; v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_{m-1} v_m = u_{p+1}, \; \ldots$$

ainsi obtenue vérifient la relation :

$$v_k \, \psi(v) = 0,$$

écrite sous forme symbolique, $\psi\,(x)$ étant la fonction qu'on obtient en remplaçant, dans $\varphi(x)$, x par $x^{\frac{1}{m}}$. Donc, la suite obtenue par une insertion uniforme de moyens est encore récurrente et de même ordre. Seulement, les racines de l'échelle de récurrence $\psi(x)=0$ sont les racines $m^{\text{èmes}}$ de celles de $\varphi(x)=0$, échelle de récurrence de la suite primitive :

Ce sont là des généralisations trop évidentes des résultats qui concernent les progressions par quotient, pour qu'il soit utile d'y insister.

32. Pour éclaircir par un exemple des plus simples la méthode indiquée au numéro précédent, proposons-nous d'interpoler la suite de Fibonacci :

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad \ldots,$$

dont l'échelle de récurrence est :

$$u_{k+2} = u_{k+1} + u_k,$$

ou symboliquement :

$$u_k\,(u_2 - u_1 - 1) = 0.$$

On a donc :

$$\varphi\,(x) = x^2 - x - 1 = (x - a_1)\,(x - a_2).$$

Nous écrirons :

$$u = A_1 a_1^z + A_2 a_2^z,$$

avec

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Faisant $z = 0$, $z = 1$, il vient :

$$A_1 + A_2 = 0,$$
$$A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1,$$

d'où :

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

et

$$u_z = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^z - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^z\right].$$

On vérifie aisément que cette formule interpole entièrement la suite proposée, et permet par suite l'insertion de moyens, et en général de termes intercalés, en aussi grand nombre qu'on voudra. Il est seulement utile de remarquer, comme nous le montre cet exemple, que les termes intercalaires peuvent parfaitement devenir imaginaires. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, en insérant un seul moyen entre deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

33. En supposant que toutes les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ soient positives, le cas que nous venons de signaler à l'instant ne peut se produire, et la formule d'interpolation :

$$u = A_1 a_1^z + A_2 a_2^z + \ldots + A_n a_n^z$$

ne donne que des valeurs réelles pour toute valeur de z.

Dans cette hypothèse, cette fonction u admet une dérivée réelle aussi pour chaque valeur de z, et c'est :

$$\begin{aligned} v &= A_1\, la_1\, a_1^z + \ldots + A_n\, la_n\, a_n^z \\ &= A'_1 a_1^z + \ldots + A'_n a_n^z. \end{aligned}$$

On peut considérer la suite

$$v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad \ldots$$

qui correspond aux valeurs entières de z, et appeler cette suite la dérivée première de celle primitivement donnée.

La forme obtenue montre que cette suite dérivée est elle-même récurrente et du même ordre, et de plus que l'échelle de récurrence est la même. De proche en proche, on voit que toutes les suites dérivées successives d'une suite récurrente donnée sont elles-mêmes des suites récurrentes de même échelle, les termes initiaux variant seuls, puisque les racines a_1, a_2, ..., a_n restent les mêmes dans toutes les formules.

CHAPITRE IX

Interpolation cinématique

34. La question qui fait l'objet du présent chapitre a été exposée et traitée par moi pour la première fois, je le crois du moins, dans une note présentée à l'*Association française pour l'avancement des sciences* (1). C'est à cette note que j'emprunte la plupart des considérations qui vont suivre.

Le problème d'interpolation qu'il s'agit ici de résoudre est celui-ci : *Sachant qu'un point mobile* M *a occupé des positions déterminées* M_1, M_2, ..., M_n, *à des époques correspondantes connues* t_1, t_2, ..., t_n, *trouver une loi du mouvement.*

Par ce seul énoncé, on comprend l'intérêt que la question peut présenter dans certains cas, et notamment en astronomie. Elle est évidemment indéterminée au plus haut degré, comme tous les problèmes d'interpolation. Mais, en s'assujettissant à certaines conditions, il devient possible d'appliquer quelques-unes des formules précédemment étudiées.

O étant une origine arbitraire, considérons les vecteurs $OM_1 = \mathrm{m}_1$, ..., $OM_n = \mathrm{m}_n$. Si nous appliquons exactement la formule de Lagrange, nous aurons pour le vecteur variable m :

$$\mathrm{m} = T_1\mathrm{m}_1 + \ldots + T_n\mathrm{m}_n,$$

les coefficients T_1, ..., T_2 étant des polynômes algébriques en t, de degré $n - 1$. L'expression obtenue est donc une fonction linéaire et homogène de vecteurs, et par conséquent exprime un vecteur.

On résout ainsi du même coup (bien entendu avec une hypothèse particulière) le problème consistant à faire passer une courbe par n points donnés dans l'espace. Mais il est remarquable de constater que le résultat est indépendant non seulement de tout choix particulier de coordonnées, mais même de l'origine arbitraire O que l'on a choisie. On sait en effet (voir plus haut, 8, note) que $T_1 + \ldots + T_n$ est identiquement égal à l'unité.

(1) Congrès de Limoges, 1890.

Donc, si nous prenons une autre origine O′, en posant $O'O = c$, la formule deviendra :

$$\begin{aligned} O'M' &= T_1 (c + M_1) + \ldots + T_n (c + M_n) \\ &= (T_1 + \ldots + T_n) c + OM = O'O + OM = O'M. \end{aligned}$$

Il en résulte bien que les deux points M, M′ coïncident pour toute valeur de t.

Rien ne serait plus facile que de traduire ces résultats en coordonnées cartésiennes, si l'on voulait déterminer chaque position M_1, ..., M_n par ses trois coordonnées, avec un système d'axes quelconque. Nous laissons au lecteur le soin de cette transformation, si elle l'intéresse.

35. Une autre forme, résultant des remarques ci dessus, peut être donnée à la formule précédente. Chacun des polynômes T_1 ..., T_n est de degré $n - 1$ et peut s'écrire :

$$\begin{aligned} T_1 &= \alpha_{1,1} t^{n-1} + \alpha_{2,1} t^{n-2} + \ldots + \alpha_{n,1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_n &= \alpha_{1,n} t^{n-1} + \alpha_{2,n} t^{n-2} + \ldots + \alpha_{n,n}. \end{aligned}$$

Si donc nous écrivons :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} M_1 + \alpha_{1,2} M_2 + \ldots + \alpha_{1,n} M_n &= P_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n,1} M_1 + \alpha_{n,2} M_2 + \ldots + \alpha_{n,n} M_n &= P_n, \end{aligned}$$

la formule devient :

$$M = P_1 t^{n-1} + P_2 t^{n-2} + \ldots + P_n,$$

c'est-à-dire qu'on a la position du mobile par une fonction développée suivant les puissances du temps, le coefficient de chaque terme étant un vecteur connu.

Comme conséquence de cette remarque, nous pouvons constater que trois positions observées d'un mobile donneront lieu à la formule

$$M = P_1 t^2 + P_2 t + P_3,$$

ce qui montre que ces trois positions pourront toujours correspondre à un mouvement plan parabolique. C'est sensiblement ce qui se produit dans les observations de comètes.

36. La méthode d'interpolation successive indiquée au chapitre v

pourra être intégralement appliquée à l'interpolation cinématique. Une observation donne, comme formule, le repos ; deux donnent un mouvement rectiligne uniforme ; trois, comme nous venons de le voir, un mouvement parabolique de même nature que celui des projectiles dans le vide.

La généralisation du numéro 27 qui donnerait :

$$\varphi[T_1\varphi^{-1}(M_1) + \dots + T_n\varphi^{-1}(M_n)]$$

peut également s'appliquer ici, à la condition que les fonctions de facteurs φ, φ^{-1} ... soient nettement définies et bien déterminées. Il importe seulement de remarquer que le déplacement de l'origine influerait alors sur la loi du mouvement et la nature de la trajectoire.

Plus généralement, si une méthode quelconque d'interpolation nous a conduit à la formule $M = F(t, M_1 \dots, M_n)$, nous pourrons la remplacer par :

$$M = \varphi\,(F(t, \varphi^{-1}(M_1), \dots \varphi^{-1}(M_n))$$

sous les réserves que nous venons de dire.

Tours, imprimerie Deslis Frères et C[ie], 6, rue Gambetta.

	25 ex.	[illegible]	[illegible]5 ex.	[illegible]	[illegible]x.	250 ex.
[illegible]e feuille..........	4.50	5.85	7.20	[illegible].60	12.85	14.85
[illegible]rois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille......	3.15	4 »	5 [illegible]	8.[illegible]20	8.10	9 [illegible]
Un quart de feuille...	2.70	3.60	[illegible]80	[illegible]5.60	6.[illegible]	[illegible].85
Un huitième de feuille.	2 »	2.[illegible]	[illegible]	4.0[illegible]	[illegible]4.50	5 »
[illegible]sieurs feuilles..	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] »	11.70	14 »

CENT… FONDATIO…

…88-1888

sion… …eil des mémoires origi… par la Société Philomathique à l'occa-
accompa… …naire de sa fondation… forme un volume in-4° de 437 pages,
qu'il contient s…mbreuses figures… …xte et de 24 planches. L…
siré André; E. Becqu… *pour les sc…* …*ques et mathématiques*, à
titut; Bouty, de l'Institut; Bourgeoi… secrétaire perpétuel… …ouret; Ger-
nez; Hardy; Haton de La Goupillère, … Laussedat; Léauté,
de l'Institut; Mannheim; Moutier; Pé…nd, … de l'In…t; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ, A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES ET Cie, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOMES VI ET VII

Années 1914 et 1915

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1916

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

DIXIÈME SÉRIE. — TOMES VI ET VII

ANNÉES 1914 & 1915

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE

—

1916

La Société Philomathique de Paris se réunit à la Sorbonne; une convocation est envoyée à chaque membre.

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université.

Ils ont droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour l'achat des publications, s'adresser à M. VÉZINAUD, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, Ve.

LE PRIX DES TIRAGES A PART EST :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille. .	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille......	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille ...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles....	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

AVERTISSEMENT

Par suite d'événements divers, le *Bulletin* de 1913 n'a eu que 4 numéros en deux fascicules et le *Bulletin* n'a pas paru en 1914.

Comme le Secrétaire général est mobilisé, l'Assemblée générale du 15 janvier 1916 a prié le Président actuel de vouloir bien se charger de publier un fascicule du *Bulletin* pour les années 1914 et 1915, afin de ne pas interrompre la continuité de la publication.

J'ai consenti à prendre les soins nécessaires à la publication ci-jointe de ce fascicule[1].

Paris, le 12 Avril 1916.

Le Président,
ERNEST LEBON.

(1) *MM. les Membres sont priés de lire la Note de la page* 14.

INTERPRÉTATION NOUVELLE DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

(*Assemblée générale du* 22 *juin* 1912)

Dans sa séance du 22 juin 1912 l'Assemblée générale, appliquant d'une façon plus rigoureuse et interprétant d'une manière plus précise les Statuts et le Règlement, a voté à l'unanimité les résolutions suivantes :

1° L'article 43 du Règlement stipule que des Conférences seront faites de temps en temps aux séances ordinaires afin de mettre la Société au courant des principales actualités scientifiques.

Cet article sera interprété de la façon suivante : une séance sur deux sera consacrée à une Conférence ou causerie d'ordre assez général pour intéresser tous les philomathes. Elle aura lieu en principe le 4e lundi du mois à l'heure habituelle.

Les Conférences ou causeries seront faites par les membres, ou, sur invitation de la Société et conformément à l'article 46 du Règlement, par des personnes étrangères à celle-ci. Elles seront nécessairement suivies de discussions. Ces Conférences seront annoncées et des cartes d'invitation pourront être distribuées aux personnes étrangères à la Société qui s'intéresseraient aux questions traitées.

2° Avant chaque séance, une convocation imprimée sera envoyée à tous les membres par les soins du Secrétaire des publications. Elle comportera l'ordre du jour de ladite séance et le compte rendu de la précédente.

3° L'article 49 du règlement est interprété comme suit :

Le *Bulletin* contiendra obligatoirement les résumés des communications et des discussions. La Commission des Publications sera chargée de régler les limites des publications trop étendues ou trop spéciales qui seraient proposées pour le *Bulletin*.

4° L'article 31 des Statuts (article 30 du règlement) sera interprété comme suit :

Le Secrétaire des publications remplira le rôle de *Secrétaire général*. Il veillera à la périodicité régulière du *Bulletin*, à l'élaboration des ordres du jour, à la rédaction des résumés des séances, à la rédaction du *Bulletin*, à l'envoi des convocations. Il provoquera et organisera les Conférences et veillera à l'envoi des invitations.

Une indemnité de 600 francs lui sera allouée.

5° L'article 41 du règlement sera ainsi modifié :

Au lieu des 2e et 4e samedis, les séances auront lieu les 2e et 4e lundis du mois.

6° Les séances auront lieu pendant les mois de Novembre à Juin inclusivement. La séance de rentrée aura lieu le 4e lundi d'Octobre, et les séances de Juillet seront supprimées.

Membres du Bureau
en 1914

Président : M. Pellegrin, 1, rue Vauquelin.
Vice-Président : M. Er. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Trésorier : M. A. Michel, 7, rue Pierre-Nicole.
Secrétaire des Séances : M. Fauré-Frémiet, 46, rue des Écoles.
Vice-Secrétaire des Séances : M. Germain, 55, rue de Buffon.
Secrétaire du Bulletin : M. Terroine, 35, rue de l'Arbalète.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Schaeffer, 4, rue Linné.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

Membres du Bureau
en 1915

Président : M. Er. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Trésorier : M. A. Michel, 7, rue Pierre-Nicole.
Secrétaire des Séances : M. Fauré-Frémiet, 46, rue des Écoles.
Vice-Secrétaire des Séances : M. Germain, 55, rue de Buffon.
Secrétaire des Publications : M. Terroine, 35, rue de l'Arbalète.
Vice-Secrétaire des Publications : M. Schaeffer, 4, rue Linné.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

Commission de Publication : MM. Henneguy, Berthelot et Servant.

Membres du Conseil
en 1914 *et en* 1915

MM.
André, 70 *bis*, rue Bonaparte.
Berthelot (Daniel), 31, rue de Tournon.
Desgrez, 78, boulevard Saint-Germain.
Henneguy, 9, rue Thénard.
Hua, 254, boulevard Saint-Germain.
Laisant, 162, avenue Victor-Hugo.
Lemoine, 5, rue Médicis.
Matignon, 17, boulevard Carnot, Bourg-la-Reine.
Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Servant, Bourg-la-Reine.

ABRÉVIATIONS

A. M.	Assistant au Muséum.
E. E. P.	Examinateur à l'Ecole Polytechnique.
I. P. C.	Ingénieur des Ponts et Chaussées.
I. G. M.	Inspecteur général des Mines.
I. G. A.	— — de l'Agriculture.
M. A. M.	Membre de l'Académie de Médecine.
M. I.	— de l'Institut.
M. C.	Maître de conférences.
P. C. F.	Professeur au Collège de France.
P. A. M.	— au Conservatoire des Arts et Métiers.
P. E. M.	— à l'École des Mines.
P. E. P.	— — Polytechnique.
P. P. C.	— — des Ponts et Chaussées.
P. E. Ph.	— — Supérieure de Pharmacie.
P. F. M.	— à la Faculté de Médecine.
P. F. S.	— — des Sciences.
P. M.	— au Muséum.
P. H.	Professeur honoraire.

ÉTUDE ET AMITIÉ

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Fondée en 1788

État de la Société au 1er Janvier 1915

PREMIÈRE SECTION. — SCIENCES MATHÉMATIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1860 (2 juin). Haton de La Goupillière (J.-Napoléon), M. I., 56, rue de Vaugirard.
1871 (23 déc.). Darboux (Gaston), M. I. (Secrétaire perpétuel), Doyen Hon. F. S., 3, rue Mazarine.
1872 (27 janv.). Jordan (Camille), M. I., P. E. P., P. C. F., 48, rue de Varennes.
1875 (26 juin). Fouret (Georges), E. E. P., 4, avenue Carnot.
1876 (23 déc.). Picquet (Henri), E. E. P., 4, rue Monsieur-le-Prince.
— *id.* André (Désiré), P. H., 70 *bis*, rue Bonaparte.
1878 (26 janv.). Leauté, M. I., 18, boulevard de Courcelles.
— (9 fév.). Laisant, E. E. P., 5, rue du Conseil, à Asnières (Seine).

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1881 (11 fév.). Humbert (Georges), M. I., 6, rue d'Aubigny.
— (12 nov.). Chemin, P. P. C., 33, avenue Montaigne.
1887 (17 déc.). Kœnigs, P. F. S., 77, Faubourg Saint-Jacques.
1892 (26 janv.). Bioche, Prof. Louis-le-G., 56, rue N.-D.-des-Champs.
1900 (10 mars). Leau, Prof. Stanislas, 83, rue Denfert-Rochereau.
— (22 déc.). Le Roy, Prof. Stanislas, 27, rue Cassette.
1902 (27 juin). Deschamps, 195, rue de Tolbiac.
1902 (13 déc.). Grévy, Prof. Saint-Louis, 71, rue Claude-Bernard.
1905 (14 janv.). Maillet, I. P. C., 11, rue de Fontenay, à Bourg-la-Reine (Seine).
1905 (27 mai). Servant, Chef des tr. F. S., à Bourg-la-Reine (Seine).
1906 (24 fév.). Lebon (Ernest), P. H., 4 *bis*, rue des Écoles.
— (8 déc.). Fatou, astronome adjoint à l'Observatoire, 172, boulevard Montparnasse.
— (22 déc.). Henri (Victor), M. C. (Hautes Études), 8, rue du Puits-de-l'Hermite.
1907 (11 mai). Chapelon (J.-J.), Ing. au Corps des M., 21, rue Bréa.
1908 (9 mai). Rousier, 62, boulevard Montparnasse.
1909 (26 juin). Léauté (André), 18, boulevard de Courcelles.
1912 (11 mai). Perrier (cap. Georges), 34, avenue La Bourdonnais.
1914 (26 janv.). Vlès, 46, boulevard Saint-Michel.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (28 mars). Lieutenant-Colonel du Génie Brocard, 75, rue des Ducs, Bar-le-Duc.
1907 (9 fév.). Desmoulin, P. F. S., 10, rue Joseph-Plateau, Gand.
1908 (12 déc.). A. Gérardin, 32, quai Claude-le-Lorrain, Nancy.

DEUXIÈME SECTION. — SCIENCES PHYSIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1864 (31 janv.). Wolf (Charles), M. I., P. H. F. S., 36, avenue de l'Observatoire.
1874 (23 mai). Branly, M. I. Prof. Inst. Cath., 21, av. de Tourville.
1876 (27 mai). Bouty, M. I., P. F. S., 5, faubourg Saint-Jacques.
1877 (24 fév.). Lippmann (Gabriel), M. I., P. F. S., 10, rue de l'Éperon.
1882 (11 fév.). Cochin (Denys), député, M. I., 53, rue de Babylone.
1884 (9 avril). Bourgeois (Léon), A. M., 1, boulevard Henri-IV.
1886 (17 avril). Bordet (Lucien), 181, boulevard Saint-Germain.
1887 (9 juillet). Vallot (Joseph), Directeur de l'Obs. du Mont-Blanc, 37, rue Cotta, à Nice.
1901 (26 janv.). Vincent, Prof. Saint-Louis, 26, rue de Staël.
— (14 déc.). Benoist, Prof. Henri-IV, 26, rue des Écoles.
1901 (28 déc.). Dongier, Météor. tit. Obs. de Paris, 99, Grande-Rue, à Bourg-la-Reine (Seine).
1902 (13 déc.). Matignon, P. C. F., 17, boul. Carnot, Bourg-la-Reine.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1903 (28 fév.). Winter, 44, rue Saint-Placide.
— (14 mars). Berthelot (Daniel), P. E. Ph., 31, rue de Tournon.
— *id.* Desgrez, P. A. F. M., 78, boulevard Saint-Germain.
— (12 déc.). Darzens, Répét. E. P., 22, avenue Ledru-Rollin.
1904 (23 janv.). Chauveau, Météor. adj. Obs. de Paris, 51, rue de Lille.
1904 (29 mai). Moureu, M. I., M. A. M., P. E. Ph., 17, rue Soufflot.
— *id.* Mauler, Ing. civil des Mines, 2, rue Decamps.

1904 (9 juillet). Marage, 19, rue Cambon.
1905 (14 janv.). Hallion, chef de Lab. C. F., 54, faub. Saint-Honoré.
— (11 mars). Valeur, Agrégé E. Ph., 73, bould Montparnasse.
— (1er avril). Goutal, P., suppl. E. M., 60, boulevard Saint-Michel.
— (13 mai). Mouneyrat, 15, rue Soufflot.
1906 (13 janv.). Mayer, M. C. (Hautes Études), 33, rue du Faubourg-Poissonnière.
— (24 fév.). Joannis, P. F. S., 7, rue des Imbergères, Sceaux.
1907 (14 déc.). Becquerel (Jean), I. P. C., P. M., 15, boulevard Saint-Germain.
1910 (12 mars). Nicolardot, 95, rue de Vaugirard.
1912 (10 fév.). Terroine, M. C. E. H., 35, rue de l'Arbalète.
— (28 avril). Schaeffer (G.), Prép. E. H., 4, rue Linné.
1912 (22 juin). Morel (L.), C. de T. E. H., 31, boulevard Raspail.
— (22 juin). Stodel, M. C. E. H., 15, boulevard Delessert.
1914 (26 janv.). Monpillard, 22, boulevard Saint-Marcel.
— (26 janv.). Tournay, 10, rue de Castellane.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1905 (13 mai). Mathias, P. F. S., Clermont-Ferrand.
1912 (9 déc.). Lalou, Prof. Jassi, Piatra N (Roumanie).
1913 (13 janv.). Larguier des Bancels, Prof. Université, Lausanne.

TROISIÈME SECTION. — SCIENCES NATURELLES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1856 (20 déc.). Prillieux (Ed.), M. I., sénateur, 14, rue Cambacérès.
1862 (7 mai). Bureau (Ed.), P. H. M., M. A. M., 24, quai de Béthune.
1863 (23 déc.). Grandidier (A.), M. I., 26, avenue Marceau.
1879 (10 mai). Henneguy (Louis-Félix), M. I., M. A. M., P. C. F., 9, rue Thénard.
1883 (26 mai). Mocquard, A. M. hon., 55, rue du Mont-Valérien, à Suresnes (Seine).
1886 (13 fév.). Bouvier (E.-L.), M. I., P. M., 55, rue de Buffon.

1888 (11 fév.). Morot, A. M., 9, rue du Regard.
1890 (21 fév.). Roché, 4, rue Dante.
1893 (11 mars). Hua, Direct. adj. de Lab. (Htes Etudes), 254, boulevard Saint-Germain.
— (10 juin). Jousseaume, 29, rue Gergovie.
1893 (27 oct.). De Guerne, 6, rue de Tournon.
1894 (17 mars). Roland Bonaparte, M. I., 10, avenue d'Iéna.
1899 (14 janv.). Lecaillon, P. F. S. Toulouse, 1, rue Mondran.
1899 (25 mars). Neuville, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.
1901 (12 janv.). Pellegrin (J.), A. M., 1, rue Vauquelin.
— (18 mai). Guieysse, Chef de Lab. F. M., 63, boulevard Saint-Michel.
1902 (12 janv.). Chauveaud, Direct. adj. de Lab. (Hautes Etudes), 16, avenue d'Orléans.
— (8 fév.). Rabaud, M. C. F. S., 3, rue Vauquelin.
1902 (27 juin). Lesage, Méd. des Hôp., 226, boulevard Saint-Germain.
— (22 nov.). Anthony, A. M., 12, rue Chevert.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1903 (28 fév.). Coutière, P. E. Ph., 118, avenue d'Orléans.
— (11 avril). Langeron, Prép. F. M., à Bourg-la-Reine.
— (27 juin). Noé, Prép. F. M., 51, boulevard Montparnasse.
1889 (10 fév.). Ménégaux, A. M., 55, rue de Buffon (réintégré le 23 avril 1904).
1904 (9 janv.). Grandidier (G.), 2, rue Gœthe.
— (23 janv.). Joubin, P. M., 21, rue de l'Odéon.
— (26 mars). Gravier, A. M., 55, rue de Buffon.
— (29 mai). Michel (Auguste), Prof. Michelet, 7, rue Nicole.
— (9 juil.). Launoy (L.), Prép. Inst. Pasteur, 17, rue de Lorraine, à Saint-Germain-en-Laye.
1905 (28 janv.). Cayeux, P. C. F., P. I. A., 6, pl. Denfert-Rochereau.
— (8 juil.). Lemoine (Paul), Chef des tr. Mus., 5, rue Médicis.
1909 (13 mars). Legendre (R.), Prép. Mus., 126, rue d'Assas.
1909 (26 juin). Rivet, A. M., 61, rue de Buffon.
1911 (11 mars). Fauré-Frémiet, Prép. C. F., 46, rue des Écoles.

1912 (10 fév.). Germain, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.
id. Lamy, A. M., 55, rue de Buffon.
— (28 avril). Sémichon, Prép. Mus., 27, rue Cassette.
1913 (13 janv.). Viguier, M. C. F. S., 16 *bis*, quai de Bercy (magasins généraux), Charenton.
— (13 janv.). Guyénot, P. F. S., 12, rue Linné.
— (14 avril). Poutrain, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.
— (22 déc.). Mawas, 167, boulevard Montparnasse.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (27 juin). L. Petit, 211, rue de l'Église-Saint-Seurin, à Bordeaux.
— (28 nov.). Devez, Cayenne.
— (23 avril). Tur, Ass. à l'Univ. de Varsovie.
— (29 mai). Marceau, P. E. M., Besançon, à l'École de Médecine.
1905 (26 nov.). Maignon, Chef des trav. de Physiol., E. Vét. de Lyon.
— (11 mars). Neveu-Lemaire, P. A. F. M., Lyon, à l'École de Médecine.
— (15 avril). Diguet (L.), 16, rue Lacuée.
1906 (24 févr.). Osman Galeb Bey, le Caire (Égypte).

Note

Le Président prie MM. les Membres qui auraient à faire quelques rectifications à cette Liste de les lui transmettre le plus tôt possible, pour qu'il en soit tenu compte dans la Liste des Membres au 1er *janvier* 1916.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Assemblée générale annuelle du 13 *janvier* 1913.

Présidence de M. Desgrez, président.

Sont élus à l'unanimité :

Vice-Président : M. Pellegrin ;
Secrétaire des Séances : M. Fauré-Frémiet ;
Secrétaire des Publications : M. Terroine ;
Vice-Secrétaire des Séances : M. Germain (Louis) ;
Vice-Secrétaire des Publications : M. Schaeffer ;
Membres du Conseil : MM. André, Berthelot (Daniel), Henneguy, Hua, Laisant, Lemoine, Matignon, Servant.

La Société vote à l'unanimité des félicitations à M. Er. Lebon, fait Chevalier de la Légion d'Honneur.

M. Lemoine expose les recherches de Walcott.

MM. Mayer, Joubin et Terroine posent la question du mode de fixation des organismes.

Enfin sont élus : *Membres titulaires* dans la section III : MM. Guyénot et Viguier, et *membre correspondant* dans la section II : M. Larguier des Bancels.

Séance du 10 *février* 1913.

Présidence de M. Desgrez, président.

MM. Berthelot (Daniel), Henneguy et Servant sont élus à l'unanimité *Membres de la Commission des Publications.*

Une discussion est ouverte au sujet du nombre de pages des Mémoires.

MM. Mayer, Schaeffer et Terroine sont nommés pour examiner les titres d'un candidat à la section II.

Sont nommés membres de la *Commission du Banquet* : MM. Pellegrin, Mayer et Fauré-Frémiet.

La date du banquet est fixée au lundi 10 mars.

M. Schaeffer expose des recherches récentes sur la désaturation des acides gras dans l'organisme.

M. Matignon expose d'anciennes expériences sur la synthèse de l'acide nitrique.

Séance du 3 mars 1913.

PRÉSIDENCE DE M. PELLEGRIN, VICE-PRÉSIDENT.

M. Rivet lit son rapport sur la candidature de M. Poutrin et M. Terroine sur celle de M. Tournay.

M. Cayla fait une Conférence sur les faits relatifs à la culture du caoutchouc et plus particulièrement à l'extension que cette culture peut prendre au Brésil. Il ajoute à sa Conférence un certain nombre de projections montrant les régions productrices du caoutchouc qu'il a visitées.

Seance du 14 avril 1913.

PRÉSIDENCE DE M. DESGREZ, PRÉSIDENT.

Est élu *membre titulaire* dans la section III : M. Poutrin et *membre correspondant* dans la section II : M. Tournay.

M. Lemoine fait une très intéressante communication sur la baguette des sourciers.

Cette communication est suivie d'une longue discussion.

Séance du 28 avril 1913.

Présidence de M. Desgrez, président.

M. Rabaud expose comment pondent deux Larinus.

M. Terroine expose les résultats de ses recherches sur l'absorption des corps gras. Plus un corps est attaqué par le suc pancréatique, plus vite et en plus grande quantité ce corps est absorbé. L'absorption dépend de la composition du corps.

Séance du 19 mai 1913.

Présidence de M. Pellegrin, vice-président.

M. Henneguy fait une observation sur l'immobilité des publications reçues et sur la dualité du lieu des séances.

M. Terroine propose que les prochaines élections soient reportées à l'année prochaine.

M. Tournay fait une Conférence sur la physiologie du cervelet et ses canaux semi-circulaires.

Séance du 27 octobre 1913.

Présidence de M. Desgrez, président.

M. Victor Henri fait une communication sur quelques groupements chimiques nécessaires au fonctionnement cellulaire.

Séance du 24 novembre 1913.

Présidence de M. Pellegrin, vice-président.

M. Pellegrin informe l'Assemblée que la Société vient de faire des pertes douloureuses dans la personne de M. Tarry et dans la personne de M. le comte de Polignac.

M. Mayer annonce la candidature du Dr J. Mawas dans la section II. MM. Henneguy, Guieysse et Fauré-Frémiet sont nommés membres de la Commission d'examen des titres de M. Mawas.

M. Schaeffer fait une communication sur le Bériberi et sur les Vitamines de Hunke.

M. Marage fait une communication sur la recherche et la découverte des sources par la baguette et le pendule.

Séance du 8 décembre 1913.

PRÉSIDENCE DE M. DESGREZ, PRÉSIDENT.

M. Desgrez annonce à la Société que les papiers scientifiques du regretté Tarry sont à la disposition de la Société. MM. André, Deschamps et Er. Lebon sont priés de voir ce qu'il est nécessaire de faire.

M. Fauré-Frémiet lit un rapport sur la candidature du Dr Mawas.

M. Deschamps fait une communication sur la biologie de quelques chenilles.

M. Deschamps fait une communication sur une théorie générale des coniques, des quadriques.

M. Viré se déclare converti au sujet de la baguette des sourciers. Il relate des expériences personnelles et des expériences faites avec M. Pelaprat dans la région du Lot. Ils découvrirent des masses métalliques, des squelettes, des cavités. Les sourciers ont donné un plan plus exact que celui qui a été fait des grottes de Grottes.

A ce sujet, intéressante discussion à laquelle prennent part surtout MM. Hua et Marage.

Séance du 22 décembre 1913.

PRÉSIDENCE DE M. PELLEGRIN, VICE-PRÉSIDENT.

M. Mawas est élu *membre titulaire* dans la section I.

MM. Vlès, Monpillard et Tournay se présentent comme *membres titulaires* dans la première section, respectivement dans les sections I, II et III.

Assemblée générale annuelle du 12 janvier 1914.

PRÉSIDENCE DE M. DESGREZ, PRÉSIDENT.

Sont élus à l'unanimité :

Vice-Président : M. Er. Lebon ;

Trésorier : M. Michel ;

Membres de la Commission des Finances : MM. Perrier, Morel et Poutrain.

Membres du Conseil : MM. André, Desgrez et Rabaud.

M. Terroine lit des rapports sur les candidatures de MM. Tournay et Monpillard.

M. Monpillard fait une communication sur la microradiographie, avec une projection.

M. Deschamps fait une communication sur la construction des lentilles hyperboliques. La fabrication des nouvelles lentilles permettrait, en supprimant les aberrations de sphéricité, d'augmenter considérablement le champ de vision.

Séance du 26 janvier 1914.

PRÉSIDENCE DE M. PELLEGRIN, PRÉSIDENT.

MM. Monpillard, Tournay et Vlès sont élus *membres titulaires* respectivement dans les sections II, III et I.

MM. Mayer, Stodel et Fauré-Frémiet sont élus membres de la *Commission du Banquet.*

La date du banquet est fixée au lundi 11 mai.

M. Terroine expose les recherches récentes sur le rôle des sels ammoniacaux dans le métabolisme de l'azote chez les animaux supérieurs.

Séance du 9 février 1914.

PRÉSIDENCE DE M. PELLEGRIN, PRÉSIDENT.

M. Pellegrin fait part de la perte douloureuse de la Société en la personne de M. Malard-Duméril, membre correspondant.

M. Er. Lebon propose de compléter la Commission d'examen des papiers du regretté Tarry, en y ajoutant comme membres MM. Laisant et Chapelon.

Il est décidé par l'Assemblée que cette Commission aura plein pouvoir pour s'adjoindre des collaborateurs.

M. Fauré-Frémiet fait une communication sur le mécanisme de la fécondité.

Séance du 9 mars 1914.

PRÉSIDENCE DE M. PELLEGRIN, PRÉSIDENT.

M. Terroine expose qu'il n'a pas été possible de remettre au Ministère de l'Instruction publique les fascicules 1 et 2 du *Bulletin* de 1912. Une tentative est faite à ce sujet auprès de l'éditeur.

Au nom de la *Commission des Finances*, M. le capitaine Perrier expose la situation financière de la Société.

M. Fauré-Frémiet fait une communication sur le problème de la vacuole contractile chez les Infusoires.

Séance du 25 mai 1914.

PRÉSIDENCE DE M. PELLEGRIN, PRÉSIDENT.

M. Pellegrin propose d'adresser les condoléances de la Société à la famille Van Tieghem au sujet du décès de M. Ph. Van Tieghem.

M. Vlès expose ses recherches sur la dispersion de l'Hémoglobine et l'anomalité au niveau de ses bandes d'absorption dans l'ultraviolet.

M. Deschamps fait connaître ses recherches sur l'aplanétisme et ses applications.

Séance du 8 juin 1914.

PRÉSIDENCE DE M. PELLEGRIN, PRÉSIDENT.

M. Pellegrin annonce que la subvention annuelle du Ministère de l'Instruction publique à la Société a été réduite, qu'elle n'est plus que de 700 francs au lieu de 1.000 francs.

Une mesure semblable ayant frappé un certain nombre de sociétés scientifiques, l'Assemblée émet le vœu que les Secrétaires généraux de ces Sociétés se réunissent pour examiner la situation et décider ce qu'il y aurait lieu de faire.

Le Dr Morel expose les diverses méthodes employées pour évaluer les quantités de sang que l'on doit fournir, et que l'on peut fournir, au récipient et celle qu'on lui fournit pendant la transfusion.

M. Matignon fait une communication sur l'emploi des corps gras dans le traitement du diabète et les relations entre l'acidité urinaire et l'acétonurie.

Assemblée générale annuelle du 11 janvier 1915.

Présidence de M. Desgrez, ancien président.

Au début de la Séance, M. le Professeur Desgrez, remplaçant le Président de l'année 1914, M. Pellegrin, mobilisé, lit une Lettre de M. Ernest Lebon, vice-président, où il s'excuse, pour cause de maladie, de ne pouvoir assister à la Séance annuelle, et lit l'*Allocution* que M. Ernest Lebon se proposait de prononcer en qualité de Président de l'année 1915.

Ensuite, M. Terroine attire l'attention de la Société sur la question de l'Absinthe, qui pourra, après la guerre, soulever de graves questions d'intérêt. Il serait à souhaiter, dit-il, que toutes les Sociétés savantes manifestassent par un vœu leur approbation des mesures prohibitives prises par le Gouvernement. M. le Professeur Desgrez, Président, propose que l'Assemblée émette un vœu dans ce sens. Après discussion, ce vœu est adopté.

Enfin, M. Desgrez informe la Société de la perte douloureuse qu'elle éprouve en la personne de M. Vaillant, professeur au Muséum.

Allocution de M. Ernest Lebon.

Mes chers Collègues,

Permettez-moi de vous exprimer le regret que j'ai de ne pouvoir vous remercier de vive voix de m'avoir élevé à la dignité de Président de notre Société, et, puisque le Destin a voulu que cet honneur me fût conféré à une heure aussi solennelle de notre Histoire nationale, de ne pouvoir me faire publiquement l'interprète de vos sentiments.

Non plus que vous, je ne parlerai des maux inhérents à la guerre et contre lesquels, en ces jours de deuil et de tristesse, nul bon Français ne se révolte, chacun de nous, pour les supporter et consentir de bon cœur les plus durs sacrifices, mettant son âme en harmonie avec celles de nos purs et braves héros. Et si, dans cette Société, nous déplorons la perte de tant de jeunes intelligences qui eussent honoré les Sciences, c'est sans amertume, car, pleins d'enthousiasme et d'espérance, ces jeunes hommes d'élite, ainsi que tous leurs frères d'armes, ont donné joyeusement leur vie à la Patrie et à l'Avenir, se créant par là le plus beau des noms.

Ce que je veux hautement flétrir avec vous, c'est l'acte inique de l'Allemand violant la neutralité de la Belgique en dépit des traités signés par lui, c'est le geste mensonger des 93 intellectuels allemands signant le trop fameux manifeste, c'est la méchanceté brutale de l'envahisseur détruisant les monuments de l'art, du sentiment ou de la pensée et dans lesquels vivait toujours l'âme des générations disparues, ce sont aussi les atrocités que l'armée ennemie se plaît à commettre et qui bientôt seront portées à la connaissance du monde entier dans toute leur horreur et leur étendue.

Toutefois, laissez-moi vous dire combien je suis heureux d'être celui que vos suffrages ont désigné pour prendre la parole en cette Assemblée Générale annuelle de la Société Philomathique, car c'est pour moi une bien intime joie d'avoir à insister sur le côté glorieux de cette période que nous vivons. Glorieuse par le succès de nos armes, cette période l'est encore par l'élan magnifique, la bravoure, l'endurance de nos soldats, par la sublime beauté du sacrifice de nos défenseurs, par la grandeur, la noblesse de la cause défendue.

Je suis fier aussi que ce soit à moi que revienne l'honneur d'associer notre Société aux autres Corps savants de notre chère France pour exalter nos fidèles et nobles Alliés, pour célébrer la nation martyre, la vaillante Belgique, qui, afin de sauver son indépendance et barrer la route à la traîtrise, s'est levée héroïque et généreuse, et enfin pour envoyer à nos chers et braves défenseurs, à ceux qui sont tombés, comme à ceux qui demeurent face à l'ennemi ou prêts à lui faire face — parmi lesquels se trouve, qu'il me soit permis de le rappeler, notre distingué Président sortant, M. Pellegrin — le salut fraternel, l'admiration émue et la reconnaissance de leurs aînés.

Paris, 11 janvier 1915.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE

Pour les Années 1914 et 1915

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES ET Cie.

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES ET Cie, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME VIII

Année 1916

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

1916

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

DIXIÈME SÉRIE. — TOME VIII

ANNÉE 1916

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE

—

1916

La Société Philomathique de Paris se réunit à la Sorbonne ; une convocation est envoyée à chaque membre.

Les Membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, Ve.

LE PRIX DES TIRAGES A PART EST :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille...........	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille......	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille ...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles.....	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

AVERTISSEMENT

Comme le Secrétaire général est mobilisé, l'Assemblée générale du 15 janvier 1916 a prié le Président actuel, qui y consent, de vouloir bien se charger de publier le *Bulletin* pendant l'année 1916.

Paris, le 20 novembre 1916.

Le Président,
Ernest LEBON.

Prière de lire la Note de la page 12.

Membres du Bureau

en 1916

MM.

André, 70 *bis*, rue Bonaparte.
Berthelot (Daniel), 31, rue de Tournon.
Desgrez, 78, boulevard Saint-Germain.
Henneguy, 9, rue Thénard.
Hua, 254, boulevard Saint-Germain.
Laisant, 162, avenue Victor-Hugo.
Lemoine, 5, rue Médicis.
Matignon, 17, boulevard Carnot, Bourg-la-Reine.
Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Servant, Bourg-la-Reine.

Membres du Conseil

en 1914, 1915 *et en* 1916

Président : M. Er. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Vice-Président : M. Ch. Moureu, 17, rue Soufflot.
Trésorier : M. A. Michel, 7, rue Pierre-Nicole.
Secrétaire des Séances : M. É. Fauré-Frémiet, 46, rue des Écoles.
Vice-Secrétaire des Séances : M. Germain, 55, rue de Buffon.
Secrétaire des Publications : M. Terroine, 35, rue de l'Arbalète.
Vice-Secrétaire des Publications : M. Schaeffer, 4, rue Linné.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

Commission de Publication : MM. Henneguy, Berthelot et Servant.

ABRÉVIATIONS

A. M.	Assistant au Muséum.
E. E. P.	Examinateur à l'Ecole Polytechnique.
I. P. C.	Ingénieur des Ponts et Chaussées.
I. G. M.	Inspecteur général des Mines.
I. G. A.	— — de l'Agriculture.
M. A. M.	Membre de l'Académie de Médecine.
M. I.	— de l'Institut.
M. C.	Maître de conférences.
P. C. F.	Professeur au Collège de France.
P. A. M.	— au Conservatoire des Arts et Métiers.
P. E. M.	— à l'École des Mines.
P. E. P.	— — Polytechnique.
P. P. C.	— — des Ponts et Chaussées.
P. E. Ph.	— — Supérieure de Pharmacie.
P. F. M.	— à la Faculté de Médecine.
P. F. S.	— — des Sciences.
P. M.	— au Muséum.
P. H.	Professeur honoraire.

ÉTUDE ET AMITIÉ

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Fondée en 1788

État de la Société au 20 Novembre 1916

PREMIÈRE SECTION.— SCIENCES MATHÉMATIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1860 (2 juin). Haton de La Goupillière (J.-Napoléon), M.I., 56, rue de Vaugirard.
1871 (23 déc.). Darboux (Gaston), M. I. (Secrétaire perpétuel), Doyen Hon. F. S., 3, rue Mazarine.
1872 (27 janv.). Jordan (Camille), M. I., P. E. P., P. C. F., 48, rue de Varennes.
1875 (26 juin). Fouret (Georges), E. E. P., 4, avenue Carnot.
1876 (23 déc.). Picquet (Henri), E. E. P., 4, rue Monsieur-le-Prince.
— *id.* André (Désiré), P. H., 70 *bis*, rue Bonaparte.
1878 (9 fév.). Laisant (C.-A.), E. E. P., 5, rue du Conseil, à Asnières (Seine).
1881 (11 fév.). Humbert (Georges), M. I., 6, rue d'Aubigny.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1881 (12 nov.). Chemin, P. P. C., 33, avenue Montaigne.
1887 (17 déc.). Kœnigs, P. F. S., 77, faubourg Saint-Jacques.
1892 (26 janv.). Bioche, Prof. Louis-le-G., 56, rue N.-D.-des-Champs.
1900 (10 mars). Leau, Prof. Stanislas, 83, rue Denfert-Rochereau.
— (22 déc.). Le Roy, Prof. Stanislas, 27, rue Cassette.
1902 (27 juin). Deschamps, 195, rue de Tolbiac.
1902 (13 déc.). Grévy, Prof. Saint-Louis, 71, rue Claude-Bernard.
1905 (14 janv.). Maillet, I. P. C., 11, rue de Fontenay, à Bourg-la-Reine (Seine).
1905 (27 mai). Servant, Chef des tr. F. S., à Bourg-la-Reine (Seine).
1906 (24 fév.). Lebon (Ernest), P. H., 4 *bis*, rue des Écoles.
— (8 déc.). Fatou, astronome adjoint à l'Observatoire, 172, boulevard Montparnasse.
— (22 déc.). Henri (Victor), M. C. (Hautes Études), 8, rue du Puits-de-l'Hermite.
1907 (11 mai). Chapelon (J.-J.), Ing. au Corps des M., 21, rue Bréa.
1908 (9 mai). Rousier, 62, boulevard Montparnasse.
1909 (26 juin). Léauté (André), 18, boulevard de Courcelles.
1912 (11 mai). Perrier (cap. Georges), 34, avenue La Bourdonnais.
1914 (26 janv.). Vlès, 46, boulevard Saint-Michel.
1916 (12 avril). Boberil (Comte R. du), 10, rue Michel-Ange, Paris, et 114, rue d'Antibes, Cannes.
1916 (24 oct.). Belot (Émile), Direct. de la Manuf. de Tabacs de Paris-Reuilly, 319, rue de Charenton.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (28 mars). Brocard, Lieutenant-Colonel du Génie, 75, rue des Ducs, Bar-le-Duc.
1907 (9 fév.). Desmoulin, P. F. S., 10, rue Joseph-Plateau, Gand.
1908 (12 déc.). A. Gérardin, 32, quai Claude-le-Lorrain, Nancy.

DEUXIÈME SECTION. — SCIENCES PHYSIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1864 (31 janv.). Wolf (Charles), M. I., P. H. F. S., 36, avenue de l'Observatoire.
1874 (23 mai). Branly, M. I. Prof. Inst. Cath., 21, av. de Tourville.
1876 (27 mai). Bouty, M. I., P. F. S., 5, faubourg Saint-Jacques.
1877 (24 fév.). Lippmann (Gabriel), M. I., P. F. S., 10, rue de l'Éperon.
1882 (11 fév.). Cochin (Denys), député, Ministre d'État, M. I., 53, rue de Babylone.
1884 (9 avril). Bourgeois (Léon), A. M., 1, boulevard Henri-IV.
1886 (17 avril). Bordet (Lucien), 181, boulevard Saint-Germain.
1887 (9 juillet). Vallot (Joseph), Directeur de l'Obs. du Mont-Blanc, 37, rue Cotta, à Nice.
1901 (26 janv.). Vincent, Prof. Saint-Louis, 26, rue de Staël.
— (14 déc.). Benoist, Prof. Henri-IV, 26, rue des Écoles.
1901 (28 déc.). Dongier, Météor. tit. Obs. de Paris, 99, Grande-Rue, à Bourg-la-Reine (Seine).
1902 (13 déc.). Matignon, P. C. F., 17, boul. Carnot, Bourg-la-Reine.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1903 (28 fév.). Winter, 44, rue Saint-Placide.
— (14 mars). Berthelot (Daniel), P. E. Ph., 31, rue de Tournon.
— *id.* Desgrez, P. A. F. M., 78, boulevard Saint-Germain.
— (12 déc.). Darzens, Répét. E. P., 22, avenue Ledru-Rollin.
1904 (23 janv.). Chauveau, Météor. adj. Obs. de Paris, 51, rue de Lille.
1904 (29 mai). Moureu, M. I., M. A. M., P. E. Ph., 17, rue Soufflot.
— *id.* Mahler, Ing. civil des Mines, 2, rue Decamps.

1904 (9 juillet). Marage, 19, rue Cambon.
1905 (14 janv.). Hallion, chef de Lab. C. F., 54, faub. Saint-Honoré.
— (11 mars). Valeur, Agrégé E. Ph., 73, bould Montparnasse.
— (1er avril). Goutal, P., suppl. E. M., 60, boulevard Saint-Michel.
— (13 mai). Mouneyrat, 15, rue Soufflot.
1906 (13 janv.). Mayer, M. C. (Hautes Études), 33, rue du Faubourg-Poissonnière.
— (24 fév.). Joannis, P. F. S., 7, rue des Imbergères, Sceaux.
1907 (14 déc.). Becquerel (Jean), I. P. C., P. M., 15, boulevard Saint-Germain.
1910 (12 mars). Nicolardot, 95, rue de Vaugirard.
1912 (10 fév.). Terroine, M. C. E. H., 35, rue de l'Arbalète.
— (28 avril). Schaeffer (G.), Prép. E. H., 4, rue Linné.
1912 (22 juin). Morel (L.), C. de T. E. H., 31, boulevard Raspail.
— (22 juin). Stodel, M. C. E. H., 15, boulevard Delessert.
1914 (26 janv.). Monpillard, 22, boulevard Saint-Marcel.
— (26 janv.). Tournay, 10, rue de Castellane.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1905 (13 mai). Mathias, P. F. S., Clermont-Ferrand.
1912 (9 déc.). Lalou, Prof. Jassi, Piatra N (Roumanie).
1913 (13 janv.). Larguier des Bancels, Prof. Université, Lausanne.

TROISIÈME SECTION. — SCIENCES NATURELLES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1862 (7 mai). Bureau (Ed.), P. H. M., M. A. M., 24, quai de Béthune.
1863 (23 déc.). Grandidier (A.), M. I., 26, avenue Marceau.
1879 (10 mai). Henneguy (Louis-Félix), M. I., M. A. M., P. C. F., 9, rue Thénard.
1883 (26 mai). Mocquard, A. M. hon., 55, rue du Mont-Valérien, à Suresnes (Seine).
1886 (13 fév.). Bouvier (E.-L.), M. I., P. M., 55, rue de Buffon.

1888 (11 fév.). Morot, A. M., 9, rue du Regard.
1890 (21 fév.). Roché, 4, rue Dante.
1893 (11 mars). Hua, Direct. adj. de Lab. (Htes Études), 254, boulevard Saint-Germain.
— (10 juin). Jousseaume, 29, rue Gergovie.
1893 (27 oct.). De Guerne, 6, rue de Tournon.
1894 (17 mars). Roland Bonaparte, M. I., 10, avenue d'Iéna.
1899 (14 janv.). Lecaillon, P. F. S. Toulouse, 1, rue Mondran.
1899 (25 mars). Neuville, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.
1901 (12 janv.). Pellegrin (J.), A. M., 1, rue Vauquelin.
— (18 mai). Guieysse, Chef de Lab. F. M., 63, boulevard Saint-Michel.
1902 (12 janv.). Chauveaud, Direct. adj. de Lab. (Hautes Études), 16, avenue d'Orléans.
— (8 fév.). Rabaud, M. C. F. S., 3, rue Vauquelin.
1902 (27 juin). Lesage, Méd. des Hôp., 226, boulevard Saint-Germain.
— (22 nov.). Anthony, A. M., 12, rue Chevert.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1903 (28 fév.). Coutière, P. E. Ph., 118, avenue d'Orléans.
— (11 avril). Langeron, Prép. F. M., à Bourg-la-Reine.
— (27 juin). Noé, Prép. F. M., 51, boulevard Montparnasse.
1889 (10 fév.). Ménégaux, A. M., 55, rue de Buffon (réintégré le 23 avril 1904).
1904 (9 janv.). Grandidier (G.), 2, rue Gœthe.
— (23 janv.). Joubin, P. M., 21, rue de l'Odéon.
— (26 mars). Gravier, A. M., 55, rue de Buffon.
— (29 mai). Michel (Auguste), Prof. Michelet, 7, rue Nicole.
— (9 juil.). Launoy (L.), Prép. Inst. Pasteur, 17, rue de Lorraine, à Saint-Germain-en-Laye.
1905 (28 janv.). Cayeux, P. C. F., P. I. A., 6, pl. Denfert-Rochereau.
— (8 juil.). Lemoine (Paul), Chef des tr. Mus., 5, rue Médicis.
1909 (13 mars). Legendre (R.), Prép. Mus., 126, rue d'Assas.
1909 (26 juin). Rivet, A. M., 61, rue de Buffon.
1911 (11 mars). Fauré-Frémiet, Prép. C. F., 46, rue des Écoles.

1912 (10 fév.). Germain, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.
id. Lamy, A. M., 55, rue de Buffon.
— (28 avril). Sémichon, Prép. Mus., 27, rue Cassette.
1913 (13 janv.). Viguier, M. C. F. S., 16 *bis*, quai de Bercy (magasins généraux), Charenton.
— (13 janv.). Guyénot, P. F. S., 12, rue Linné.
— (14 avril). Poutrain, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.
— (22 déc.). Mawas, 167, boulevard Montparnasse.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (27 juin). L. Petit, 211, rue de l'Église-Saint-Seurin, à Bordeaux.
— (28 nov.). Devez, Cayenne.
— (23 avril). Tur, Ass. à l'Univ. de Varsovie.
— (29 mai). Marceau, P. E. M., Besançon, à l'École de Médecine.
1905 (26 nov.). Maignon, Prof. de Physiol., E. Vét. de Lyon.
— (11 mars). Neveu-Lemaire, P. A. F. M., Lyon, à l'École de Médecine.
— (15 avril). Diguet (L.), 16, rue Lacuée.
1906 (24 févr.). Osman Galeb Bey, le Caire (Égypte).

Note

Le Président prie MM. les Membres qui auraient à faire quelques rectifications à cette Liste de les lui transmettre le plus tôt possible, pour qu'il en soit tenu compte dans la Liste des Membres au 1er janvier 1917.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Assemblee générale annuelle du 15 *janvier* 1916.

Présidence de M. Er. Lebon, président.

Assistaient à la Séance : MM. L. Bourgeois, A. Desgrez, E. Fauré-Frémiet, G. Fouret, Henneguy, H. Hua, L. Leau, Er. Lebon, Malher, A. Michel, E. Rabaud.

Actuellement mobilisé, M. Pellegrin, ancien Président, s'est excusé de ne pouvoir assister à la Séance.

M. Er. Lebon, Président, prononce l'Allocution suivante :

Mes chers Collègues,

Lors de la Séance générale de l'an passé, je ne pensais pas que, par suite des événements cruels que nous voyons se dérouler, l'honneur de présider notre Société me reviendrait cette année encore.

Je ne crois pas devoir parler des faits de la guerre; tout ce que je pourrais dire aujourd'hui, je l'ai déjà dit l'an dernier, et je n'aurais à modifier que le nombre — toujours croissant — des crimes commis par nos ennemis.

Je fais des vœux pour que ce soit l'année 1916 qui voie la ruine définitive des projets ambitieux de tous nos ennemis ; pour qu'elle rende à leurs foyers nos vaillants combattants et qu'elle assure aux peuples et aux populations martyrs le retour et la sécurité dans leurs contrées libérées ou dans leurs Patries reconstituées et à jamais glorieuses.

Je vais maintenant, mes chers Collègues, vous présenter une requête qui, je l'espère, réunira tous les suffrages.

Quelques-uns, parmi nous, ont été mobilisés; mais, en général, les Membres de la Société Philomathique ne sont pas allés sur le front, à cause de leur âge, hélas!... Cependant la Guerre a pu cruellement frapper dans leurs affections plusieurs d'entre nous. Afin qu'il en soit fait mention dans nos Actes, je serai obligé, à chacun des Membres à qui la Patrie en danger a demandé de durs ou de sublimes sacrifices, de vouloir bien me tenir au courant des deuils ou des disparitions qu'ils ont à déplorer, ainsi que des blessures ou des maladies glorieusement reçues ou contractées au service de la France par les êtres qui leur sont particulièrement chers.

L'Assemblée approuve cette requête.

Le Président signale deux Circulaires adressées à la Société par le Ministre de l'Instruction publique, contenant : l'une, des questions relatives à l'histoire des biens dits communaux; l'autre, des questions relatives à certains événements dus à la guerre actuelle. Il met un certain nombre de Circulaires à la disposition des membres présents et dépose un exemplaire de chaque Circulaire dans les Archives de la Société.

M. Michel, Trésorier, expose différentes remarques relatives au transfert des fonds de la Société et au recouvrement des cotisations des Membres titulaires et correspondants.

Par un vote unanime, l'Assemblée approuve la proposition de transférer de la Société générale au Crédit Foncier de France les titres de rente de la Société.

Par un autre vote unanime, *l'Assemblée demande aux Membres titulaires et correspondants qui n'ont pas encore acquitté la cotisation de l'année* 1914 *de vouloir bien en envoyer le montant à* M. A. MICHEL, trésorier, rue Pierre-Nicole, n° 7, Paris, V^e^.

Elle leur annonce que, si le montant de cette cotisation n'est pas payé avant le 15 *mars* 1916, *il leur sera, comme d'habitude, présenté par la poste une quittance du montant de leur cotisation, et elle espère qu'ils voudront bien donner bon accueil à cette quittance.*

Le Président expose que le Conseil propose à l'Assemblée de vouloir bien voter sur les questions suivantes :

a) Prorogation du Bureau de 1915 pour 1916.

b) Élection de M. Ch. Moureu comme vice-président, en 1916.

c) Maintien de M. A. Michel comme trésorier, en 1916.

d) Publication d'un fascicule du *Bulletin* pour les années 1914 et 1915.

A l'unanimité, ces quatre propositions sont adoptées.

M. Rabaud demande que les deux fascicules publiés en 1913 soient complétés par une Table.

Le Président propose de nommer une Commission chargée d'examiner les titres de la candidature de M. le comte Roger du Boberil pour la section des Sciences mathématiques.

L'Assemblée désigne comme membres de cette Commission : MM. Fouret, Leau, Lebon.

Séance du 12 *avril* 1916.

Présidence de M. Er. Lebon, président.

Le procès-verbal de la précédente séance est lu et adopté.

M. Er. Lebon lit un Rapport sur les titres scientifiques de M. le comte de Boberil, candidat pour la Section I.

Le Président fait remarquer que le *Bulletin* de 1912 n'est pas complet. Il n'est donc pas possible d'en publier la Table.

Le Président soulève la question des Membres titulaires depuis plus de dix ans ; ceux-ci ne peuvent demeurer membres honoraires que si leur section est complète, ce qui n'est pas le cas actuellement. La question est remise à plus tard.

Ces deux propositions sont adoptées à l'unanimité.

M. Michel, Trésorier, expose les démarches nécessaires pour le transfert des titres de la Société. Toutes les pièces sont actuellement prêtes. Le Rapport de la Commission des finances sera soumis à la prochaine Assemblée.

Le recouvrement des cotisations aura lieu pour 1916. (Sur la proposition de M. Hua, les années 1914 et 1915 sont confondues en une seule.)

L'Assemblée décide que, en raison des difficultés de réunion, une seconde séance aura lieu à 18 heures pour l'expédition des affaires courantes.

La séance est levée à 17 h. 55.

Séance (seconde) *du* 12 *avril* 1916.

PRÉSIDENCE DE M. ER. LEBON, PRÉSIDENT.

Le procès-verbal de la précédente séance est lu et adopté.

M. le comte du Boberil est, à l'unanimité, élu membre titulaire dans la Section 1.

La prochaine séance aura lieu au mois d'octobre 1916.

LA LANGUE FRANÇAISE ET LES SAVANTS

Par L.-F. HENNEGUY

« *Le respect de la langue est presque de la morale.* »

VINET.

Dans un article récent (1), j'ai appelé l'attention sur ce fait que la plupart de nos jeunes savants, à force de lire des travaux allemands, ont pris la manière d'écrire des Teutons et ne savent plus le français. Il convient d'insister sur ce sujet et de montrer que la langue française, dont la clarté et la précision ne peuvent être discutées que par nos ennemis, est menacée, grâce aux habitudes des disciples de certaines écoles, de devenir un véritable charabia. Au risque de passer pour un pédant pédagogue, je crois qu'il est de mon devoir de signaler à ces savants les fautes qu'ils commettent journellement et qu'ils éviteraient certainement s'ils possédaient une connaissance moins sommaire de la grammaire, et s'ils n'ignoraient pas le génie de leur propre langue.

Ce sont surtout les bactériologistes qui ont introduit dans le langage scientifique l'incorrection grammaticale, et cela pour ainsi dire systématiquement. Constamment, dans leurs mémoires, on trouve des phrases telles que celle-ci : « On *cultive* généralement le bacille sur gélose, mais ce microbe *cultive* aussi sur pomme de terre. » Le verbe *cultiver* est donc indifféremment employé par eux comme verbe actif et comme verbe réfléchi. Un bon élève sortant de l'école primaire ne dira cependant jamais : « La pomme de terre *cultive* bien dans les terrains sablonneux. » Or bon nombre de ces bactériologistes ont passé par l'École normale supérieure et c'est sciemment qu'ils écrivent : « Un microbe *cultive* ». Est-ce pour abréger la phrase qu'ils suppriment le *se*? Ou bien veulent-ils, en écrivant incorrectement, donner de l'originalité à leur style? On cherche vainement le but qu'ils poursuivent en adoptant une telle manière de parler.

(1) Du rôle de l'Allemagne dans l'évolution des sciences biologiques. *Revue scientifique*, numéro du 27 février-6 mars 1915.

Cette confusion entre les verbes actifs et les verbes réfléchis est devenue à peu près courante. Les physiologistes disent aussi bien : « Le liquide *coagule* par la chaleur » que « La présure *coagule* le lait » ; « L'animal *reproduit* en captivité » que « Le dessin *reproduit* l'original ». Le verbe *précipiter* sert tantôt à indiquer qu'un corps détermine la précipitation d'un autre corps, tantôt à dire qu'un corps se précipite sous l'influence d'un agent quelconque. Non seulement il s'agit, dans les exemples que je viens de citer, d'incorrections grammaticales, mais souvent une telle manière d'écrire peut rendre inintelligible la pensée de l'auteur.

Nos jeunes auteurs ne se bornent pas à méconnaître les règles grammaticales. Lorsqu'ils rédigent leurs mémoires, sous prétexte que seuls les faits et les idées qu'ils exposent sont à considérer, ils écrivent comme ils parlent, sans se donner la moindre peine pour éviter de fâcheuses répétitions, alors qu'il leur serait très facile de trouver des synonymes ou de changer la tournure de leur phrase. On lit, par exemple, des descriptions telles que celles-ci : « Cet organe est *formé* de cellules qui renferment des *formations* particulières, résultant de la *transformation* de granulations *formées* dans le protoplasma. » — « Cette cellule *constitue* un élément dont la *constitution* est exceptionnelle », etc. Par contre, on verra le même mot, ou ses dérivés, orthographié d'une façon différente dans une même page, souvent dans une même phrase : « plasm*a*, protoplasm*e*, cytoplasm*a*, endoplasm*e*, deutoplasm*a* », etc.

Sans demander à ces jeunes savants d'écrire comme Buffon ou Cl. Bernard, on est en droit d'exiger d'eux qu'ils se servent d'une langue correcte et qu'ils prouvent, en châtiant un peu leur style, qu'ils ont pris le temps de réfléchir à ce qu'ils écrivaient, ou que tout au moins ils ont relu leur manuscrit avant de le livrer à l'impression.

La manière incorrecte et négligée dont est rédigé un travail prédispose mal le lecteur qui se demande naturellement si l'auteur n'a pas observé ou expérimenté avec la même insouciance qu'il apporte à consigner le résultat de ses recherches.

Que dire de la ponctuation? Ici l'influence allemande se manifeste nettement. Nos jeunes auteurs ignorent généralement les règles élémentaires ; ils placent des virgules à tort et à travers ; il ne leur répugne pas de séparer par une virgule le sujet de son verbe, et ils ne savent comment ponctuer les phrases incidentes. Il en résulte que, dans bien des cas, on est obligé de relire deux ou trois fois une proposition pour en comprendre le sens, et quelquefois on n'y parvient pas par suite d'une ponctuation absente ou fantaisiste.

Je suis à même de pouvoir formuler ces critiques. Depuis quinze ans, en effet, je me suis imposé de lire la mise en pages de tous les mémoires parus dans les *Archives d'Anatomie microscopique*. Il reste encore malheureusement beaucoup de fautes d'impression dans ce recueil, mais je crois pouvoir avancer qu'il y en a moins que dans les autres publications similaires dont les directeurs esquivent la tâche ingrate que j'ai assumée. Les auteurs des mémoires des *Archives* ne se doutent pas du nombre de corrections que je suis obligé de faire sur les épreuves ayant reçu leur bon à tirer; corrections portant sur la ponctuation, sur l'accord des participes, sur les attentats à la grammaire et sur des négligences impardonnables de rédaction.

Lorsqu'il s'agit de travaux écrits par des savants étrangers de langue française, belges ou suisses, je trouve des mots qui ne figurent dans aucun dictionnaire et que je suis obligé de remplacer par des termes français. Je suis persuadé que les auteurs ne s'aperçoivent pas des changements apportés à leur rédaction lorsqu'ils relisent leurs mémoires imprimés, changements, inutile de le dire, qui ne modifient en rien le sens de leurs phrases, mais qui leur donnent plus de clarté et moins de lourdeur. Parmi tous les collaborateurs des *Archives*, il y en a trois ou quatre au plus qui me remettent des épreuves corrigées, pour lesquelles je pourrais donner de confiance le bon à tirer. Ces collaborateurs exceptionnels appartiennent à la vieille école; ils ne sont plus tout jeunes; ils ont fait leurs humanités et ils réfléchissent à ce qu'ils ont à dire avant d'écrire.

Personne ne conteste que la langue scientifique doit se plier aux progrès des sciences et que, pour exprimer des idées, des faits et des objets nouveaux, il est nécessaire de créer des termes nouveaux qui évitent de longues périphrases. Je ne critiquerai donc pas les nombreux néologismes introduits chaque jour dans le langage scientifique et qui deviennent internationaux; encore faut-il qu'ils soient indispensables et que ces termes nouveaux soient formés correctement. Il est accepté depuis longtemps que ces termes peuvent être constitués par un assemblage de mots empruntés au latin ou au grec, mais il est admis également qu'on ne peut associer que des mots ayant une même origine étymologique et qu'on ne doit pas accoupler un mot latin à un mot grec. Je sais bien que cette règle, absolument logique, n'est pas observée par les novateurs, et que notre langue est actuellement encombrée de nombreux néologismes barbares tels que « automobile », dus à des industriels évidemment fort intelligents, mais dépourvus de culture classique. Les erreurs des uns n'excusent pas celles des autres. Les savants, qui devraient représenter une élite intellectuelle, auraient dû, avant de les accepter, examiner l'origine de certains néologismes, formés d'une façon incorrecte, dont beaucoup sont devenus pour ainsi dire classiques, et dont il est difficile de se débarrasser, tels « *macronucleus*, *micronucleus*, *ovogonie*, *hémoculture*, etc. ». Ils auraient constaté que la plupart proviennent d'outre-Rhin, et l'on sait ce que vaut la « kultur » teutonne.

Si beaucoup de néologismes, convenablement constitués, sont utiles et même indispensables, parce qu'ils servent à désigner des choses nouvelles, quelle nécessité pousse nos jeunes savants à adopter des termes empruntés à des langues étrangères, entre autres à l'allemand, pour exprimer des choses que des locutions françaises suffiraient à faire comprendre ? Nos grands chimistes ont, pendant plus d'un siècle, publié d'admirables mémoires dans lesquels il est souvent parlé de filtration, et n'ont pas eu besoin, pour être intelligibles, d'employer le terme élégant de « *filtrat* », et lorsqu'ils ont fait de la *bibliographie* ils ne pensaient pas faire de la « *littérature* ». Enfin, étant donné des néologismes acceptables, est-il nécessaire d'enrichir la langue d'une série de dérivés, adjectifs, adverbes, verbes (*amitotiquement*, *mitoser*, *gastruler*, etc.) qu'on peut remplacer facilement par des tournures françaises ?

Un néologisme étant accepté, une faute impardonnable est de l'appliquer à une chose absolument différente de celle pour laquelle il a été créé. Le terme de *chromatolyse* a été émis, en 1885, pour désigner la dégénérescence d'une cellule, accompagnée de condensation et de fragmentation de la chromatine. Il a été depuis adapté à la disparition de la substance chromatique des corps de Nissl dans les cellules nerveuses ; de sorte que, actuellement, lorsqu'on parle d'une cellule en chromatolyse, on ne sait s'il s'agit de la dégénérescence du noyau ou de la perte de la substance chromatique intracytoplasmique. La branche de l'histologie qui a trait à l'étude de la constitution propre des éléments des tissus a reçu depuis longtemps le nom de *cytologie ;* lorsqu'on dit que l'on fait l'*examen cytologique* d'un tissu ou d'un organe, on entend par là qu'on étudie ce tissu ou cet organe au point de vue de la structure de ses éléments cellulaires. Or les pathologistes ont appliqué cette locution « *examen cytologique* » à la recherche et à la détermination des leucocytes dans un liquide (liquide céphalorachidien, épanchement pleural, etc.).

Il en résulte que l'examen cytologique des histologistes n'est pas de même nature que celui des pathologistes. On pourrait multiplier les exemples de ce genre qui prêtent à des confusions regrettables.

Nos jeunes savants ne se bornent pas à écrire incorrectement et à commettre les fautes que je viens de signaler. Ils ont pris la déplorable habitude de rendre leurs travaux difficilement compréhensibles à ceux qui ne s'occupent pas des mêmes matières. Il est bon et même nécessaire aujourd'hui de se spécialiser, le domaine de la science étant devenu tellement vaste que, habituellement, seuls ceux qui en explorent un petit coin arrivent à la faire progresser. Mais il ne doit pas exister de cloisons étanches entre les spécialités. Tout spécialiste ayant une bonne culture générale doit être en état de lire les travaux de ses confrères des spécialités voisines. Or les spécialistes emploient maintenant un jargon que seuls les initiés peuvent comprendre. Imitant les gens de sports, ils désignent les choses par des abréviations. De même qu'un chauffeur parle d'*accu*, de même un bactériologiste écrit que tel microbe *prend le Gram*, qu'on trouve dans tel liquide du *coli;* un histologiste décrit un tissu fixé *au Flemming;* un chimiste fait une extraction au *Kumagawa*. L'initié comprendra que le microbe se colore par la méthode de Gram, que le liquide renferme du *Bacillus coli communis*, que le tissu a été fixé par le liquide de Flemming et que l'extraction a été faite dans un appareil de Kumagawa. Mais un zoologiste ou un botaniste, qui n'a pas fait d'études spéciales en bactériologie, en histologie ou en chimie biologique, et qui se trouvera en présence de semblables abréviations, se demandera si le Gram, le Flemming, le Kumagawa sont des produits, des appareils, des méthodes ou autre chose encore.

En quoi ces abrévations sont-elles utiles? Les spécialistes répondront que c'est pour abréger leurs phrases et ne pas perdre leur temps précieux à désigner plus longuement des choses que tout le monde (dans leur spécialité) connaît bien; ils devraient alors, pour gagner encore du temps et économiser du papier, écrire : « *le m. p. G.* » pour « le microbe prend le Gram », « *tissu f. du F.* », etc.; les initiés comprendraient tout aussi bien.

En réalité, si les spécialistes ont adopté un tel jargon, c'est uniquement pour se singulariser, pour proclamer leur supériorité dans la branche de la science à laquelle ils se sont consacrés. Un bactériologiste se croirait déshonoré, et semblerait être étranger à la corporation, s'il ne disait pas qu'un microbe *cultive sur*, qu'un autre *prend le Gram*, et s'il désignait le *coli* par son nom de genre et d'espèce, de même qu'un chauffeur se considérerait comme indigne de conduire un (ou une?) *auto*, s'il n'appelait un *accumulateur* un *accu*.

Parmi les nombreux travers de nos savants modernes, tant étrangers que français, il en est un qui est surtout propre aux naturalistes et contre lequel on ne saurait trop s'élever, c'est celui qui consiste à changer constamment le nom des espèces. Sous prétexte d'observer la loi de priorité, qui veut qu'un être porte le nom imposé par celui qui l'a le premier dénommé, on arrive à désigner un être, animal ou végétal, universellement connu depuis longtemps sous un nom déterminé par un nom nouveau qui le rend absolument méconnaissable.

J'ai suivi pendant trois années consécutives un cours de faculté dans lequel la plante qui donne l'ipécacuanha a été désignée, la première année, sous le nom de *Cephælis ipecacuanha;* la seconde année, sous celui de *Tagopomea ipecacuanha;* la troisième, sous celui de *Uragoga ipecacuanha!* Heureusement que le nom spécifique n'avait pas changé et rappelait le produit employé en thérapeutique. Voici qui est plus grave : l'*Ascaris megalocephala*, rendu célèbre par les belles découvertes auxquelles il a donné lieu en cytologie et en embryogénie, et dont le nom figure dans tous les ouvrages classiques, est devenu l'*Ascaris equorum!* Bien mieux, le vulgaire Hanneton, le *Melolontha vulgaris*, est maintenant une Chrysomèle, *Chrysomela vulgaris*, et naturellement les Chrysomèles ont dû changer aussi de nom ! etc.

Changer le nom d'un être qui a été illustré par les travaux dont il a été l'objet est aussi inadmissible et aussi ridicule que désigner par son nom patronymique un auteur devenu célèbre sous un pseudonyme, soi-disant parce que le nom est antérieur au pseudonyme. Il est vrai que cette manie caractérise les pseudonaturalistes qui, incapables de se livrer à des travaux originaux, passent leur temps à débaptiser les êtres qu'ils ne peuvent étudier : ce sont de vrais eunuques scientifiques.

Puisque j'appelle ici l'attention sur les défauts de nos jeunes savants, je dois leur adresser un autre reproche. Hypnotisés par la production exagérée de leurs confrères d'outre-Rhin, ils ont cru que ce qui avait établi la prétendue hégémonie scientifique de l'Allemagne c'était le nombre considérable et le grand développement des mémoires publiés par les savants teutons. Ils ont cherché à les imiter ; ils se sont mis à produire hâtivement et à délayer le plus possible ce qu'ils avaient à dire. Aujourd'hui, dès qu'on est sur la trace d'un fait nouveau, ou qu'on a seulement, au cours d'une recherche, obtenu un résultat tant soit peu différent de celui auquel était arrivé un prédécesseur, on s'empresse de publier une note pour prendre date; si la découverte ou la différence de résultat se confirment, nouvelle publication d'une note ou d'une série de notes. Enfin vient un mémoire, où le contenu des notes préliminaires est exposé avec un luxe de détails généralement inutiles, et où, pour augmenter le nombre des pages, figure un historique complet du sujet, copié à peu près intégralement sur un auteur précédent. C'est la méthode allemande, adéquate à la mentalité des Teutons qui ne visent que le « kolossal » et qui cherchent à tirer profit pécuniaire de leur prose, payée à tant la page dans un grand nombre de recueils scientifiques.

Or, malheureusement, les ressources financières des périodiques français ne permettent pas de rémunérer les auteurs; la longueur de leurs mémoires devient au contraire onéreuse pour les éditeurs. Là où il y aurait place suffisante pour dix mémoires, on ne peut en faire paraître que trois ou quatre, et les auteurs sont souvent obligés d'attendre de longs mois pour voir imprimer leurs travaux.

Nos savants, dans leur propre intérêt et dans celui de la science en général, auraient donc grand profit à réduire leurs mémoires, à n'y consigner que les idées ou les faits nouveaux, sans les encombrer, à la mode germanique, d'un historique inutile. L'historique d'une question n'est intéressant que lorsque celle-ci est l'objet d'un travail important qui la présente sous un jour nouveau. Mais lorsque cet historique a été bien fait, à quoi sert-il de le répéter indéfiniment chaque fois que la dite question est abordée par un nouvel auteur qui ne fait que confirmer ce qui a déjà été trouvé, ou infirmer quelques points de détails? Ne suffit-il pas de renvoyer au premier mémoire qui le contient et de le compléter en tenant compte des publications ultérieures? Beaucoup de thèses de doctorat ès sciences, qui comptent 300 et 400 pages, se trouveraient ainsi réduites de moitié. Le lecteur ne s'en plaindrait pas, et la notoriété de l'auteur n'en serait aucunement diminuée.

Actuellement, l'activité scientifique, en dehors de ce qui a trait à la défense nationale, est à peu près complètement paralysée. Si beaucoup de nos jeunes savants ont fait généreusement sacrifice de leur vie et ont acquis en tombant au champ d'honneur une gloire impérissable que leurs travaux ne leur auraient peut-être pas donnée, un grand nombre heureusement échapperont à l'horrible massacre et se remettront à l'ouvrage après la victoire. Ils auront à cœur de se délivrer de l'assservissement que leur génération s'était laissé imposer par la méthode scientifique germanique, comme ils auront consacré toutes leurs forces et leur courage à chasser les odieux agresseurs de la patrie. La plupart d'entre eux, par esprit d'imitation, avaient adopté une manière d'écrire bien différente de celle de nos anciens maîtres, écrivains aussi distingués que savants éminents. Ils comprendront que, après la guerre, la lutte sur le terrain scientifique comme sur le terrain économique sera aussi âpre qu'elle est aujourd'hui sur les champs de bataille, et que la vieille culture gréco-latine devra encore se défendre contre les attaques perfides de la « kultur » des Barbares. Ils ne devront pas oublier que le génie de notre langue fait partie intégrante de notre patrimoine national et que le devoir de tout Français est de défendre son idiome comme il défend son sol natal.

Il était donc urgent de signaler à nos savants les attentats qu'ils commettaient, la plupart du temps inconsciemment, contre leur propre langue, et de les mettre à même de se corriger. Ils me pardonneront de l'avoir fait en termes peut-être un peu vifs. Je n'ai eu en vue que leur intérêt et le bon renom de la science française. *Qui bene amat, bene castigat.*

LA GÉOLOGIE SOUTERRAINE DU SUD DE L'ANGLETERRE

Par M. Paul LEMOINE

La géologie s'est longtemps contentée de l'observation du sol ; *mente et malleo* a été jusqu'ici la devise des géologues. Leur rôle a consisté à connaître parfaitement la nature des affleurements des diverses couches qui constituent la croûte terrestre, et par suite de les observer en détail dans les tranchées, les carrières, etc.

Mais, déduire de ces données superficielles ce qui se passe en profondeur, est un procédé d'extrapolation trop hardi et souvent inexact. Il est nécessaire que le géologue fasse maintenant une œuvre nouvelle : l'interprétation et l'utilisation des sondages, en attendant que les crédits mis à sa disposition lui permettent de faire faire des sondages de recherche en des points spécialement choisis. Il en résultera une branche nouvelle de la géologie : la *géologie souterraine*. Elle n'aura rien de commun, d'ailleurs, avec l'étude des grottes et des cavernes qui, au regard du géologue, sont encore des choses superficielles, et qui resteront du domaine propre de la spéléologie.

Déjà, de plusieurs côtés, on s'est mis à l'œuvre, et il sera intéressant, quand le jour sera venu, de synthétiser les nombreuses recherches faites sur le Sud de l'Angleterre [1], le Nord de la France [2], le bassin de Paris [3].

Mais, dès à présent, il paraît utile de faire connaître les résultats acquis dans le Sud de l'Angleterre. Ils ont mis en évidence toute une série de faits extrêmement intéressants pour la géologie, et éclairent d'un jour nouveau le mécanisme de la déformation terrestre dans les régions d'allure relativement simple.

(1) G.-W. Lamplugh and F.-L. Kitchin. On the mesozoic Rocks in some of the coal explorations in Kent. *Mém. Geol. Survey*, England and Wales, 1911, 212 pages, 5 planches (coupes).

Strahan. Anniversary Adress of the President. *Quart. Journal Geol. Soc.*, LXIX, 1913, p. XX-XCI (3 cartes hors texte).

(2) Gosselet. Les assises crétaciques et tertiaires dans les fosses et les sondages du Nord de la France. *Études des gîtes minéraux de la France*, 1904.

(3) Paul Lemoine. Résultats géologiques des sondages profonds du bassin de Paris. *Bull. Soc. ind. minérale*, 1910.

Je m'excuse d'être obligé d'entrer parfois dans des détails un peu techniques ; mais ils sont indispensables pour montrer comment on arrive aux conclusions qui seront formulées en dernier lieu.

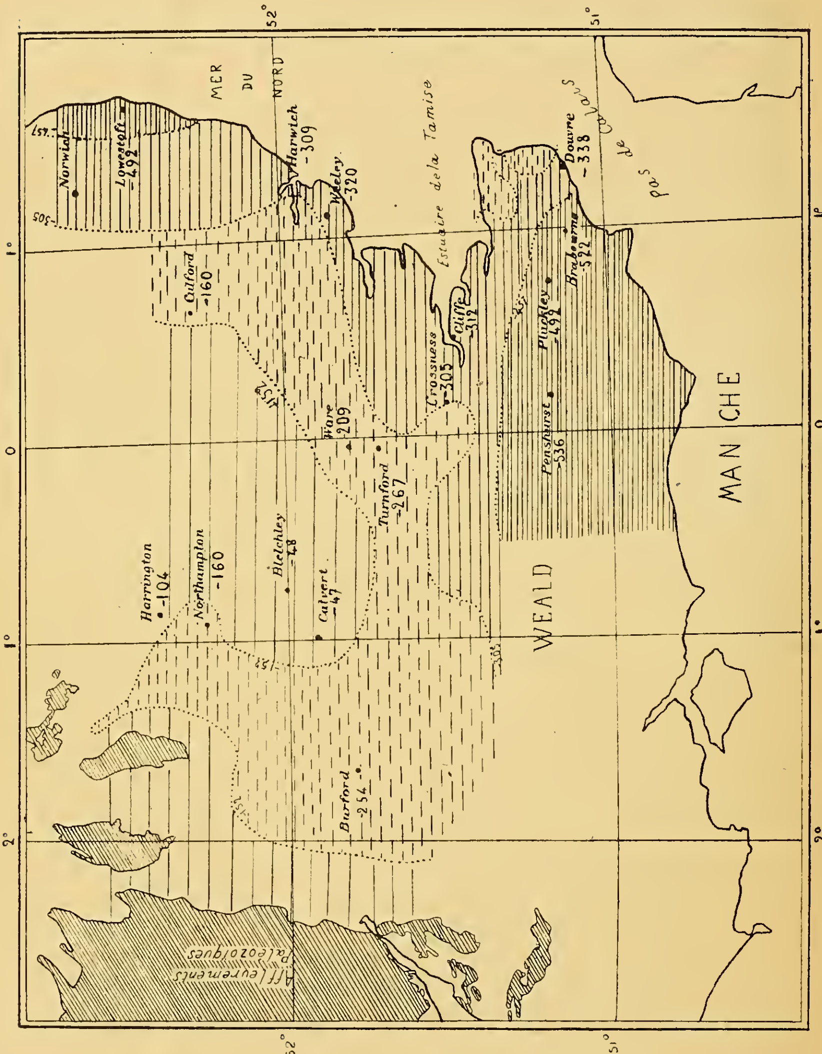


Fig. 1. — Allure du substratum paléozoïque dans le Sud de l'Angleterre (d'après Strahan).

On sait que, dans cette région, de nombreux sondages ont été faits pour la recherche de la houille. Ils ont fourni en même temps des renseignements tout à fait précieux sur les roches qui se trouvent au-dessus.

A) Le substratum paléozoique. — Tout d'abord, on a constaté que les roches paléozoïques qui forment le substratum des roches mésozoïques ne sont pas partout les mêmes ; c'est ainsi qu'à Douvres on a trouvé, à 333 mètres de profondeur, des couches appartenant au houiller, tandis qu'à Brabourne, à 486 mètres de profondeur, on a trouvé des roches dévoniennes et peut-être même plus anciennes.

On n'a malheureusement encore que trop peu de données pour dresser la carte géologique de ce substratum profond.

Par contre, on a plus de données sur son allure. On sait que sa surface est loin d'être horizontale. Le sommet du Paléozoïque est actuellement à 177 mètres plus bas à Brabourne qu'à Douvres, et cette direction n'est pas celle de la pente maximum.

Les courbes qui ont pu être tracées montrent très nettement une région haute au nord de l'estuaire de la Tamise ; une dépression profonde s'étend sous le Weald et se prolonge évidemment en s'accentuant sous la Manche. Une autre au large de Norwich amorce la fosse correspondant à la mer du Nord.

Comme on le verra, cette pente et cette structure plissée sont la résultante de mouvements successifs qui se sont produits à diverses époques.

B) Du trias au portlandien. — La première des couches sédimentaires qui vient au-dessus du Paléozoïque, le Trias, manque à Douvres et en plusieurs autres points de la partie orientale du comté de Kent; il n'est connu en profondeur qu'à Brabourne où il semble indiquer l'amorce d'un bassin synclinal qui s'étend plus loin vers l'Ouest. Le Trias serait donc disposé dans cette région dans une dépression analogue à celles que M. de Grossouvre et M. Bigot ont signalées sur la bordure du bassin de Paris. Ce Trias est constitué par un conglomérat avec des calcaires variés, des silex, des quartzites, des grès, et il passe à des marnes rougeâtres.

Au commencement de l'époque du Lias, une partie au moins de la région était au-dessus de la mer, ainsi que le montre l'absence des termes les plus inférieurs de la série liasique à Douvres et à Brabourne. Puis l'affaissement de ce district détermina une lente transgression, et permit à la mer de s'y établir et de s'y maintenir définitivement.

Le Lias a été trouvé également à Douvres (épaisseur, 11 m.) et à Brabourne (épaisseur, 42 m.). Mais son épaisseur augmente beaucoup en se rapprochant de cette ville. Toutes ses subdivisions sont représentées à Brabourne (Lias inférieur par des argiles bleues; Lias moyen par des calcaires ferrugineux ou sableux et des argiles micacées; Lias supérieur par des argiles marneuses et des sables avec bancs calcaires et ferrugineux à la base). Ces mêmes divisions, avec les mêmes caractères lithologiques, existent à Douvres, mais avec une épaisseur réduite.

La composition si constante des calcaires ferrugineux et sableux du Lias moyen montre que ce banc s'est déposé à peu près à la même profondeur à Douvres et à Brabourne.

On a donc une preuve de l'affaissement produit entre le Paléozoïque et le Lias moyen dans ce fait que les sédiments accumulés entre ces deux époques ont 31 mètres de plus à Brabourne qu'à Douvres.

Au commencement de la période OOLITHIQUE, la région paraît avoir été relevée à nouveau; car à Douvres, le Lias supérieur est érodé et l'oolithique inférieur débute par des sables grossiers. L'absence de ces dépôts d'eau peu profonde à Brabourne et leur présence dans des sondages au Nord-Ouest de Douvres indique que la ligne de rivage à cette époque était dirigée Nord-Ouest.

Les couches de Douvres ressemblent aux roches de même âge qui se trouvent dans le bas Boulonnais de l'autre côté du détroit, tandis que les couches de Brabourne correspondent plutôt à celles qui se trouvent dans l'Ouest de l'Angleterre. Ainsi, à Douvres, la série oolithique débute par un sable quartzeux incohérent qui passe à des calcaires sableux contenant des fossiles de la grande Oolithe; à Brabourne, ce type sableux manque et l'on trouve immédiatement au-dessus du Lias des calcaires oolithiques.

On doit en conclure que, de toutes façons, aussi bien au Lias qu'au commencement de l'époque oolithique, la région de Douvres était plus voisine du littoral.

Cet état de choses est renversé à l'époque *callovienne*. Cet étage, qui a 9 mètres à Douvres, est représenté à Brabourne par des couches analogues un peu plus durcies, mais dont l'épaisseur est moitié moindre. Ce sont des sables grisâtres avec des calcaires concrétionnés et des parties ferrugineuses. Ces dépôts sableux semblent indiquer une époque où l'égalité des profondeurs était réalisée à nouveau.

Entre ce Callovien sableux et les calcaires coralliens se trouvent des argiles épaisses de 52 mètres à Douvres, de 66 mètres à Brabourne qui correspondent à l'*Oxfordien*, et peut-être à une partie du Corallien inférieur. Il semble que les différences de niveau entre

Douvres et Brabourne étaient moindres à cette époque que pendant les périodes antérieures de l'Oolithique moyen et postérieures de l'Oolithique supérieur.

Un épisode coralligène important se place au milieu de cette époque, il est représenté aussi bien à Brabourne qu'à Douvres par 39 mètres de calcaires coralliens. Cette identité de facies et d'épaisseur indique une similitude dans la profondeur à laquelle se sont déposées ces couches dans les deux régions à cette époque. Nous n'avons malheureusement aucune donnée sur l'extension de ces couches vers l'Ouest, sous le Weald, où aucun sondage profond n'a encore pénétré. Il faut noter seulement que, dans les sondages du Sud du Weald, on n'a pas trouvé de calcaires analogues ; les dépôts de cet âge y seraient représentés par des sables calcaires avec cailloux de quartz, mais les renseignements à cet égard sont très confus.

Au-dessus de ces calcaires représentant un épisode coralligène viennent de puissantes couches argileuses.

A Douvres, on trouve d'abord une série (30 m.) appartenant au Corallien supérieur ; au-dessus l'argile est mélangée de calcaires ferrugineux, glauconieux et sableux, parfois pisolithiques. Les parties ferrugineuses sont oolithiques et peuvent même constituer un lit de minerai de fer utilisable (environ 5 m).

Plus haut encore (13 m.), des sables gris argileux avec un développement relativement faible d'argile contiennent des fossiles d'âge kiméridgien inférieur.

A Brabourne, le Corallien supérieur a un développement analogue (48 m.), mais les minerais de fer sont très réduits et les argiles et les marnes en bancs épais prennent un grand développement ; l'argile kiméridgienne est très développée (78 m.) avec des parties sableuses et glauconieuses et des lits d'argile pure.

Il est important de constater que la partie supérieure (36 m.) appartiendrait au Kiméridgien supérieur qui manque à Douvres ; ailleurs ces couches supérieures sont encore plus développées (75 m.).

Plus à l'Ouest, dans le milieu du Weald, au sondage de Pluckley, l'argile kiméridgienne a été traversée sur 158 mètres, sans que l'on ait atteint sa base.

Enfin, plus à l'Ouest encore, à Penshurst, on a traversé 186 mètres d'argiles kiméridgiennes sans en atteindre la base. Les fossiles prouvent que toute cette masse représente seulement le Kiméridgien supérieur qui atteindrait probablement ici le maximum de son épaisseur.

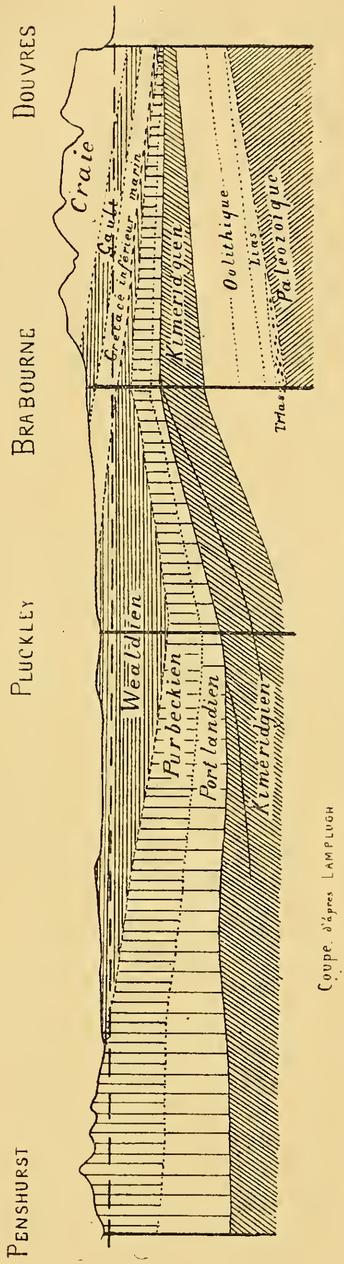


Fig. 2. — Coupe Est-Ouest du Weald à travers les forages du Weald.

Dans les vieux sondages du Sud du Weald, l'épaisseur totale de l'argile kiméridgienne est de 382 mètres, la partie supérieure (210 m.) est argileuse, la partie inférieure contient des intercalations de grès et de calcaires. Un sondage près de Battle (333 m. de Kiméridgien) a confirmé ces résultats.

Ainsi le Kiméridgien prendrait un développement considérable, quand on va de Douvres vers l'Ouest du Weald, et ce développement est surtout dû au Kiméridgien supérieur, puisque le Kiméridgien inférieur n'a pas été atteint au delà de Brabourne.

Il est difficile de dire si les autres couches (Oolithique moyen et inférieur, Lias, Trias) se développent également ; en tous cas, le substratum paléozoïque n'est plus connu au delà de Brookwood.

Portlandien. — Il n'est pas représenté à Douvres, soit qu'il ne s'y soit pas déposé, soit qu'ultérieurement à l'époque wealdienne, il ait été enlevé par l'érosion en même temps que le kiméridgien supérieur ; cette dernière supposition paraît la plus probable.

Par contre, à Brabourne, Pluckley et Penshurst, cette formation est bien développée, mais avec de considérables variations dans son épaisseur (9 m. à Brabourne ; 21 m. à Pluckley ; 31 m. à Penshurst).

Dans les forages du Sud du

Weald, le Portlandien paraît avoir le même type sableux et atteint 34 mètres d'épaisseur.

La coupe (*fig.* 2) montre bien le développement énorme du Kiméridgien vers l'Ouest et le rôle considérable qu'il joue dans la structure profonde du Weald. Il y avait dans cette région une grande dépression qui paraît avoir été pratiquement complètement comblée à la fin du Kiméridgien, car le sable portlandien est déposé partout dans des eaux peu profondes et paraît reposer en discordance sur les diverses couches du Kiméridgien.

Cette constatation montre qu'il s'est produit, depuis l'époque triasique jusqu'à l'époque kiméridgienne, un mouvement d'affaissement progressif et continu de la région du Weald. Cet affaissement paraît avoir été le facteur prédominant de sa structure depuis le commencement de l'ère mésozoïque, et il semble s'être accentué pendant la période kiméridgienne.

C'est un des faits les plus curieux mis en évidence par les forages.

C) Purbeckien et wealdien. — Ces deux étages correspondent à une époque où des lagunes ont couvert le Weald, et les sondages nous ont apporté sur eux des renseignements très intéressants.

Comme le Portlandien, le Purbeckien manque à Douvres, mais il se trouve dans les autres sondages et il augmente rapidement d'épaisseur vers l'Ouest. Partout il passe insensiblement à la série wealdienne. A Penshurst, il atteint son développement maximum (168 m.). La base (36 m.) consiste en marnes et en argiles parfois bitumineuses avec du gypse, en gros bancs, en lentilles ou en veines irrégulières; on y trouve surtout des débris de poissons. Au-dessus, on trouve des argiles noires (30 m.) avec minces bancs calcaires à la partie supérieure. Les fossiles, *Cyrena* et autres Mollusques d'eau douce, y sont très abondants ; on y trouve parfois des Mollusques saumâtres, comme *Ostrea*, *Modiola*, *Protocardium ;* le sommet (72 m.) est constitué par des argiles feuilletées, grisâtres, avec nombreux bancs de calcaires, d'argiles ferrugineuses et de grès calcaires dans lesquels on ne trouve que des fossiles d'eau douce.

Il s'ensuit que tout l'ensemble du Purbeckien s'est formé dans les lacs d'eau douce ou dans les lagunes sous une faible profondeur; par suite, il faut admettre que toute la région s'est affaissée de 168 mètres pendant l'époque purbeckienne.

Les sondages du Sud du Weald ont trouvé la même série, de sorte qu'il est probable que ces couches purbeckiennes forment partout le substratum du Weald. Dans un récent sondage, à Battle, on a trouvé le Purbeckien sur 138 mètres avec les couches habituelles de gypse à sa base ; à Pluckley la série est la même, mais beaucoup plus réduite (épaisseur totale 30 m.), à Brabourne l'épaisseur n'est plus que de 21 mètres, on n'y trouve plus le notable développement du gypse des deux autres sondages.

On se rapproche évidemment de la région littorale ; d'ailleurs les conglomérats déjà observés à Pluckley se développent et montrent des éléments plus gros ; ceux-ci proviennent probablement de l'érosion de sédiments à peu près contemporains partiellement consolidés.

On sait que l'étude des couches purbeckiennes du Boulonnais avait amené Munier-Chalmas (1) à des conclusions analogues.

L'ensemble des couches WEALDIENNES présente des phénomènes analogues.

A Douvres, l'ensemble de l'argile du Weald et des couches d'Astings est représenté par 25 mètres seulement ; à la base se trouvent environ 3 mètres de sable quartzeux grossier, avec cailloux roulés, qui reposent directement sur le Kiméridgien, qui par suite a été érodé ; c'est probablement un dépôt fluviatile dû à l'arrivée d'une rivière venant du Nord-Est.

Les mêmes couches ont 90 mètres à Brabourne et 300 mètres à Pluckley, bien que la série y soit incomplète ; enfin, à Penshurst, on est parti d'un horizon stratigraphique qui se trouve au moins à 300 mètres en profondeur dans la série, et on a pénétré encore 165 autres mètres de couches wealdiennes, ce qui amènerait à admettre plus de 465 mètres comme puissance totale du Wealdien en ce point.

Ces sédiments lacustres ou saumâtres, donc déposés sous une épaisseur d'eau minime, s'épaississent donc progressivement lorsqu'on s'avance vers l'ouest du bassin, et cet épaississement est corrélatif de l'affaissement de ce bassin à l'époque de leur dépôt.

D) CRÉTACÉ INFÉRIEUR MARIN. — Ce n'est qu'à Douvres et à Brabourne que l'on peut étudier les formations qui surmontent l'argile du Weald. Les conditions saumâtres cessent brusquement avec la fin de l'argile du Weald. et font place à des conditions nettement marines. A Douvres, le plus ancien des sédiments marins, le gravier de base de l'argile d'Atherfield, repose directement sur la surface érodée de l'argile du Weald ; de nombreux fossiles d'eau douce se

(1) MUNIER-CHALMAS. Les assises supérieures du terrain jurassique du Bas-Boulonnais. *C. R. Acad. Sc.*, CXXVIII, 19 juin 1899, p. 1532-1535.

trouvent à la limite, et immédiatement au-dessus on rencontre une faune complètement marine ; quoique moins net, ce changement est aussi brusque à Brabourne.

Les couches marines du Crétacé inférieur constituent d'abord l'argile d'Atherfield (13 m. à Douvres), compacte, brun chocolat ou bleuâtre, grisâtre avec nombreux fossiles parfaitement conservés avec leur test; puis viennent les Hythe-Beds dont les affleurements peuvent être suivis tout le long du Weald, mais qui n'ont pu être retrouvés dans les sondages ni à Douvres, ni à Brabourne. Dès lors, ou bien ses caractères lithologiques changent rapidement en se dirigeant vers le Nord, ou bien la sédimentation ne se produisait pas dans l'aire du Nord, tandis que des accumulations se produisaient plus au Sud. En faveur de cette hypothèse, on peut invoquer la présence d'une surface de corrosion avec traces de Pholades à la partie supérieure de l'Atherfield Clay de Douvres.

On voit par là quels problèmes complexes se posent dès que l'on étudie la géologie profonde, problèmes que l'on n'aperçoit même pas quand on se borne à relever les faits de la géologie superficielle.

Les couches supérieures, dites de Sandgate, puis de Folkestone (avec *Douvilleiceras mamillatum*) présentent également des variations sur lesquelles il serait oiseux de s'appesantir ici.

Gault. — Au commencement de la période du Crétacé supérieur, l'amincissement des couches vers l'Est qui s'était produit d'une façon continue depuis le commencement du Mésozoïque cesse enfin ; le Gault montre un épaississement de 10 mètres en allant de Douvres à Folkestone. L'épaisseur totale du Gault à Douvres est de 40 mètres ; à Brabourne, on ne l'a pénétré que sur 19 mètres.

De tous ces faits, il convient de tirer une conclusion unique : c'est l'épaississement considérable des sédiments dans la région du Weald; ce fait avait déjà été mis en évidence lors des premiers sondages de la région sous-wealdienne. Topley [1] en avait même conclu que cet épaississement était dû simplement à un empilement des dépôts.

Mais cette explication n'en est pas une ; pour rendre compte de ces faits, il est nécessaire d'admettre un affaissement général de ces dépôts pendant tout le Crétacé inférieur (Wealdien), comme on l'avait envisagé pendant le Lias et le Jurassique.

(1) Topley. On the correspondance between some Areas of apparent Upheaval and the thickening of subjacent beds. *Quart. Journ. Geol. Soc. London*, XXX, 1874, p. 186.

Il y a, à ces constatations, un autre intérêt non moins général ; en effet, elles nous montrent de la façon la plus nette qu'un anticlinal actuel peut se superposer à une aire synclinale ; Bigot avait déjà

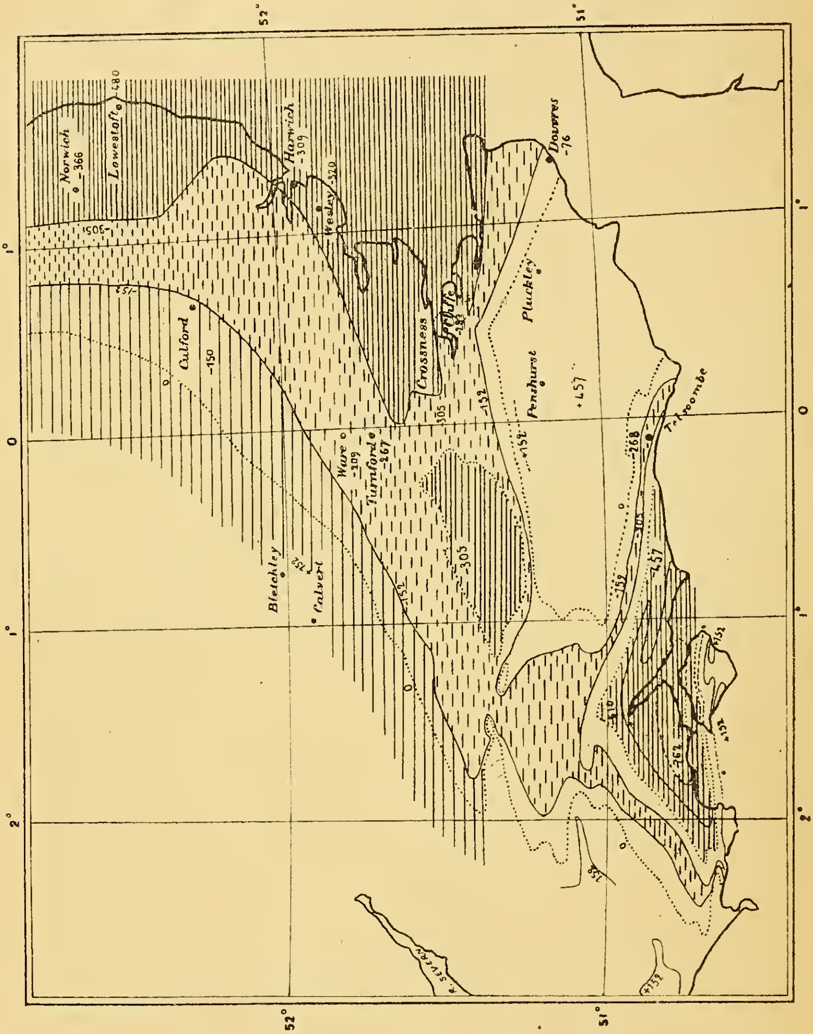


Fig. 3. — Courbes de niveau de la surface du Gault dans le Sud de l'Angleterre, d'après Strahan.

montré que les synclinaux jurassiques et crétacés se superposaient dans l'Ouest de la France à des anticlinaux paléozoïques et réciproquement ; mais le cas n'était pas absolument le même, et je crois que c'est la première fois que l'on a la preuve d'une vaste aire synclinale ayant conservé ce caractère jusqu'au milieu du Crétacé, et prenant ensuite un caractère anticlinal.

Les couches du Gault seront les dernières que nous étudierons; leur connaissance est beaucoup plus parfaite, parce que ce sont celles qui ont été atteintes par le plus grand nombre de sondages.

Ces couches, qui ont partout le même facies, et qui sont d'origine littorale, se sont évidemment déposées à peu près au même niveau; or, elles se trouvent actuellement à des profondeurs essentiellement variables; les documents sont assez nombreux pour que l'on puisse construire les courbes de niveau de sa surface.

La carte ainsi construite (*fig.* 3) montre d'une façon remarquable la différence d'intensité du plissement vers le Nord et vers le Sud; les axes des synclinaux sont beaucoup plus rapprochés de leur bord méridional. Le fait s'observe aussi bien dans le bassin de Londres que dans le bassin du Hampshire.

D'autre part, on voit très nettement que la plupart des grands anticlinaux et des synclinaux ne sont pas simples, mais qu'ils sont constitués par une série de plis secondaires plus ou moins discontinus; on voit ainsi que le bassin de Londres comprend deux fosses, l'une sous l'estuaire de la Tamise, l'autre à l'Ouest de Londres.

On remarque aussi la corrélation qui existe entre les synclinaux et les anticlinaux d'une part, puis le cours des rivières de l'autre; les accidents tectoniques ont donc certainement influé sur l'établissement du système hydrographique[1].

Si l'on admet que les dépôts du Gault se sont formés sur une surface sensiblement horizontale, on est frappé de la grande différence d'altitude qu'ils présentent actuellement; ils se trouvent à 450 mètres dans le bassin de Londres et à 750 mètres dans le bassin du Hampshire; sur l'anticlinal du Weald, en tenant compte de la dénudation subie par les dépôts crétacés, on peut penser que le Gault s'est élevé à 450 mètres; il s'ensuit que la différence d'altitude du Gault dans le Weald et dans le bassin de Londres est de près de 200 mètres, et que la différence avec le bassin du Hampshire est de près de 1.200 mètres. Ces différences de niveau sont dues à des mouvements qui sont certainement postalbiens, et que M. Strahan considère comme postoligocènes.

(1) On se rappelle qu'en ce qui concerne le bassin de Paris, M. Dollfus est arrivé à des conclusions tout à fait analogues.

G.-F. Dollfus. Relations entre la structure géologique du bassin de Paris et son hydrographie. *Ann. de Géographie*, IX, 1900, p. 313-339, 413-433, pl. X.

Reconstitution de la plate-forme paléozoïque à l'époque albienne

On voit combien les résultats de ces sondages sont importants, et quelle lumière ils jettent sur l'histoire des mers dans cette région. Ils sont d'autant plus importants qu'ils se rapportent à des faits qui ne peuvent s'observer qu'en profondeur, et sur lesquels nous ne *saurions rien* par la méthode ordinaire de la géologie.

Il convient d'ailleurs de faire rendre plus encore à ces documents et de reconstituer la forme même de la plate-forme paléozoïque, non pas telle qu'elle est aujourd'hui, mais telle qu'elle était à une époque déterminée, par exemple, à l'époque albienne.

L'étude des sondages profonds permet de reconstituer, d'une part, l'état actuel de la plate-forme paléozoïque (*fig.* 1), d'autre part, l'état actuel de la surface du Gault (*fig.* 3). M. Strahan a eu l'idée très originale de combiner ces deux cartes et de reconstituer l'allure de la plate-forme paléozoïque à l'époque du dépôt du Gault (Albien). Les mouvements postalbiens ont gauchi cette surface ; il est facile de la *dégauchir* par la pensée, et de lui restituer la forme qu'elle avait primitivement.

On peut tracer, quoique avec quelques lacunes, les courbes de niveau de — 150 mètres et de — 300 mètres. Mais il me semble plus compréhensif de représenter les faits par un profil que je ferai passer par Ware et Penshurst (*fig.* **4**).

Dans l'état actuel des choses, on constate qu'à Ware, à 205 mètres, le Gault repose directement sur le Paléozoïque. Il en est de même dans toute la région au Sud, puis brusquement, en arrivant sur le bord du Weald, les sédiments crétacés et jurassiques se développent en même temps que les couches du Gault s'élèvent, et atteindraient dans le Weald une altitude de 450 mètres si elles n'avaient pas été enlevées par l'érosion.

Or, à l'époque albienne, les couches du Gault à facies si homogène se sont déposées suivant une surface horizontale et assez voisine du niveau de la mer. On doit la *dégauchir*, et en même temps dégauchir la surface du Paléozoïque sous-jacente. Le dégauchissement de la surface du Gault est facile; il suffit, dans une première approximation, de prendre sa projection horizontale (1).

(1) J'ai montré en effet (Paul Lemoine. Sur la valeur du rétrécissement produit par les plis du bassin de Paris, *C. R. Acad. des Sc.*, 3 déc. 1909) que dans des cas analogues à celui-ci, le rétrécissement produit était minime (de l'ordre du centimètre par kilomètre de longueur).

Pour reconstituer la surface du Paléozoïque, il suffit de reporter au-dessous du Gault supposé horizontal la profondeur qui sépare actuellement les deux couches.

Ce travail fait, on voit apparaître nettement la dépression de la

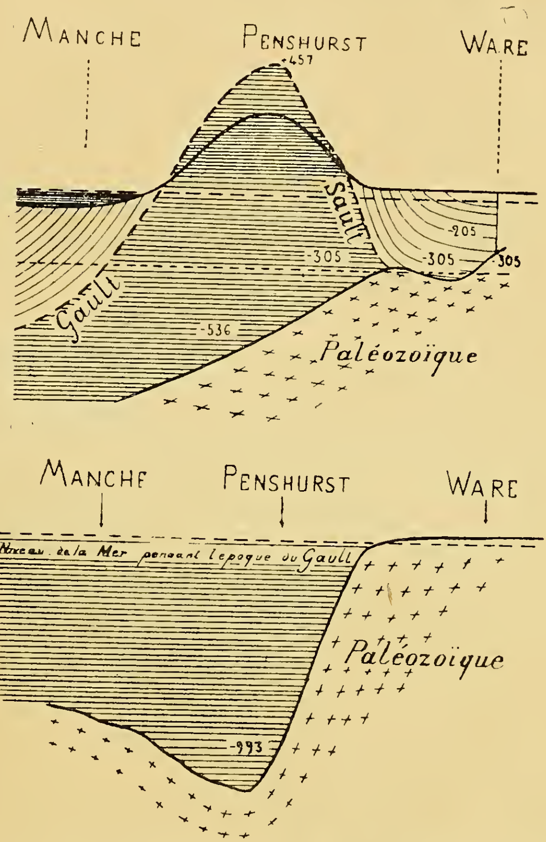


Fig. 4. — Profil montrant les relations entre le Gault et la plate-forme paléozoïque.
Allure de cette plate-forme : *a*) à l'époque actuelle (1).
b) à l'époque albienne (crét. moyen).

surface paléozoïque, telle qu'elle existait à l'époque albienne et telle qu'elle s'est formée progressivement, d'une part, par la dénudation, d'autre part, par les mouvements qui l'ont affectée pendant les époques du Trias, du Jurassique et du Crétacé inférieur.

(1) Sur la figure, au lieu de Sault, lire Gault.

On est amené à admettre l'existence d'une région haute entre Londres et Harwich. Au Sud se trouve une grande dépression qui passe par Douvres et Penshurst, et qui aurait été profonde primitivement de 200 mètres(1).

Ainsi, d'une façon générale, la distribution des reliefs paléozoïques aux époques préalbiennes diffère complètement de la distribution que nous observons actuellement, et cette distribution explique un certain nombre de faits très obscurs; on se rend compte de l'origine des matériaux paléozoïques qui entrent pour une large part dans la composition de certaines roches du Crétacé inférieur, et qui ne peuvent pas avoir été entraînées très loin ; elle explique également la diminution d'épaisseur des roches jurassiques et le caractère littoral qu'elles présentent dans le voisinage de certains des axes paléozoïques mis en évidence par cette méthode (2).

D'autre part, on peut affirmer que les accidents tectoniques, failles et plis qui s'observent dans les morts-terrains d'âge mésozoïque, ne sont pas reconnaissables dans la plate-forme ancienne; ce sont donc essentiellement des phénomènes de surface, et ils témoignent simplement des efforts que ces morts-terrains ont eu à subir pour modifier leur forme et s'adapter au substratum.

Ainsi, l'anticlinal du Weald se superpose à un synclinal ancien, et, par contre, le bassin synclinal de Londres se surimpose à une région qui avait été longtemps une zone de surélévation.

Ces constatations prennent un caractère de généralité que M. Strahan ne paraît pas avoir entrevu, dès qu'on les rapproche des résultats obtenus par Bigot (3) sur le bord de la plate-forme armoricaine.

(1) C'est dans le point le plus profond de cette dépression paléozoïque ainsi reconstituée que le sondage de Brabourne a trouvé 24 mètres de Trias reposant en discordance sur le Paléozoïque.

(2) M. Strahan déplore qu'il n'existe pas en Angleterre d'organisation permettant de conserver la trace des sondages profonds dus à l'industrie privée ; il suggère l'idée que leurs résultats soient désormais conservés d'une façon méthodique par une organisation d'état, et que de plus sur le terrain on marque d'une façon apparente l'emplacement des sondages importants.

Des considérations analogues pourraient être développées en ce qui concerne la France. En étudiant les sondages profonds du bassin de Paris, j'ai pu constater que les résultats d'un grand nombre de forages importants étaient perdus et que l'on connaissait simplement leur existence; il est probable que beaucoup d'autres sont passés complètement inaperçus.

Aujourd'hui où l'État cherche à se réserver des droits d'inventeur sur les nouvelles concessions minières, il aurait grand intérêt à posséder des dossiers importants de sondages qui pourraient à un moment donné éclairer une question et consacrer l'existence de ces droits d'inventeur.

(3) A. Bigot. Le massif ancien de la Basse Normandie et sa bordure. *Bull. Soc. Géol. France*, [4], IV, 1904 (paru 1907), p. 908-953, pl. XXIV-XXV.

A côté de la loi de Marcel Bertrand sur les mouvements posthumes qui permet d'inférer d'un pli anticlinal superficiel à un pli anticlinal profond, il y a la loi d'inversion du relief tectonique, due à Bigot, confirmée par les travaux de Strahan, qui permettra d'inférer d'un pli anticlinal superficiel à un pli synclinal profond, et qui laissera

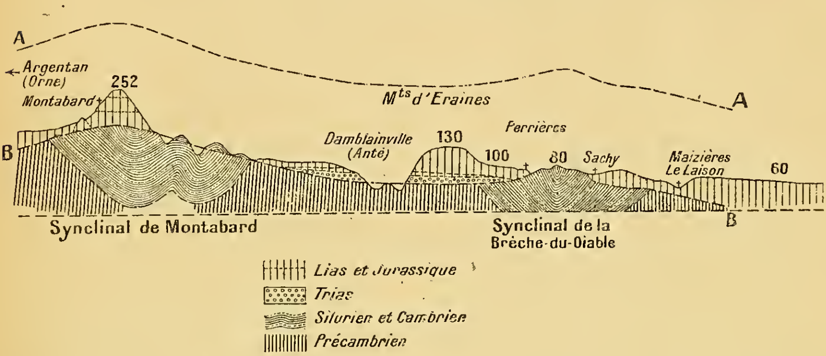


Fig. 5. — Coupe aux environs du Massif de Montabard (Orne), montrant la superposition des anticlinaux de terrains secondaires aux synclinaux de terrains primaires et réciproquement (d'après Bigot).

Cliché tiré de Paul Lemoine, *Géologie du bassin de Paris*, p. 34, *fig.* 25, et obligeamment communiqué par M. Hermann, éditeur.

aux recherches superficielles des espoirs nouveaux là où l'on désespérait.

La difficulté sera de choisir entre ces deux lois inverses; mais peut-être le problème n'est-il pas insoluble, et sera-t-il possible un jour de reconnaître à l'avance les cas où chacune d'elles doit s'appliquer.

Paul Lemoine,
Docteur ès sciences, chef des travaux de Géologie appliquée à l'École nationale supérieure des Mines.

LA RÉÉDUCATION DES SURDITÉS CONSÉCUTIVES A DES BLESSURES DE GUERRE [1]

Par M. MARAGE

Docteur en Médecine et Docteur ès Sciences,
Chargé de Cours à la Sorbonne.

I

Causes, lésions, acuité auditive [2]

Chargé par le Ministre de la Guerre de la rééducation auditive des blessés devenus sourds à la suite de traumatismes, je me suis trouvé en présence de faits absolument nouveaux.

En effet, les cas de surdité traumatique, constatés en temps de paix, se rapportaient à des officiers ayant suivi les écoles à feu. Ils étaient devenus sourds à la suite du bruit produit par la détonation des canons. Les déchirures du tympan étaient assez rares ; soignées immédiatement, elles guérissaient très vite, et tout se ramenait à une surdité due à un traumatisme de l'oreille moyenne.

Tout autres sont les cas qu'on observe depuis la guerre 1914-1916. Je vais les examiner à trois points de vue : les causes, les lésions et l'acuité auditive.

1° *Causes.* — Deux sortes : *a.* Un éclat d'obus, un shrapnell ou une balle frappe la boîte cranienne en un point quelconque plus ou moins éloigné de l'oreille [3], sans qu'il y ait des lésions directes du cerveau, par suite de l'enfoncement des os; il s'ensuit toujours des maux de tête plus ou moins généralisés, des bourdonnements, une faible perte de la mémoire, une baisse de l'audition et un léger tremblement des membres : symptômes qu'on rencontre à la suite d'un choc sur la tête plus ou moins violent.

b. Un obus de gros calibre éclate dans le voisinage du soldat (de 1 à 4 mètres). Il n'existe aucune blessure apparente, mais nous retrouvons les mêmes symptômes que précédemment, à un degré plus élevé : perte de connaissance dont la durée varie de quelques

[1] Cette Conférence a été faite aux membres de l'Institut Général Psychologique, le 24 janvier 1916, dans l'amphithéâtre de Médecine du Collège de France.

[2] *Comptes rendus*, 9 août 1915.

[3] Je n'examine pas les cas dans lesquels l'oreille est plus ou moins détruite directement.

heures à six jours; maux de tête très violents dans la région frontale qui persistent pendant des mois ; bourdonnements très forts et disparaissant peu à peu ; perte complète de la mémoire; perte absolue ou presque absolue de l'audition (parfois le malade entend mais ne comprend pas) ; tremblements très prononcés, surtout des membres supérieurs, et parfois même surdi-mutité absolue : ce sont les symptômes de la commotion cérébrale grave.

2° *Lésions.* — Elles sont de deux sortes : *a*. Des lésions de l'oreille moyenne : enfoncement, déchirure, hémorragie du tympan, et souvent, comme conséquence, une otite moyenne suppurée qui se guérit en trois semaines, ou qui se prolonge pendant des mois en devenant l'otorrhée classique.

b. Il n'y a aucune lésion apparente ; ce sont les cas les plus graves, car ils sont accompagnés des symptômes les plus sévères : on dit qu'on se trouve en présence d'une commotion labyrinthique ou cérébrale ; la mesure de l'acuité auditive, avec la méthode que j'emploie, va nous permettre d'élucider cette question.

3° *Mesure de l'acuité auditive.* — L'audition, abstraction faite de tout phénomène psychique, est une fonction qui a pour but de faire parvenir jusqu'au nerf acoustique, en les transformant ou non, les vibrations qui ont été produites dans un milieu solide, liquide ou gazeux.

Cette fonction de l'audition s'accomplit plus ou moins bien ; son degré de perfection est mesuré par l'acuité auditive.

On évalue l'acuité auditive au moyen des acoumètres, que l'on appelle encore des audiomètres.

L'acoumètre idéal serait celui qui permettrait de produire dans des conditions déterminées toutes les vibrations qui peuvent parvenir jusqu'au nerf acoustique.

Il faut donc d'abord déterminer la nature de ces vibrations.

On peut les diviser de la façon suivante :

Vibrations.	Continues. . .	*A*) Non périodiques irrégulières.	Bruits.	
		B) Périodiques régulières.	Simples.	Diapasons à branches.
			Complexes.	Plusieurs diapasons ; instruments de musique ; diapasons à anches.
	Discontinues.	(*C*) Périodiques régulières.	Parole.	

Tous les acoumètres peuvent être rangés dans une de ces catégories ; les uns reproduisent des bruits, les autres des vibrations musicales, les derniers des vibrations de la parole.

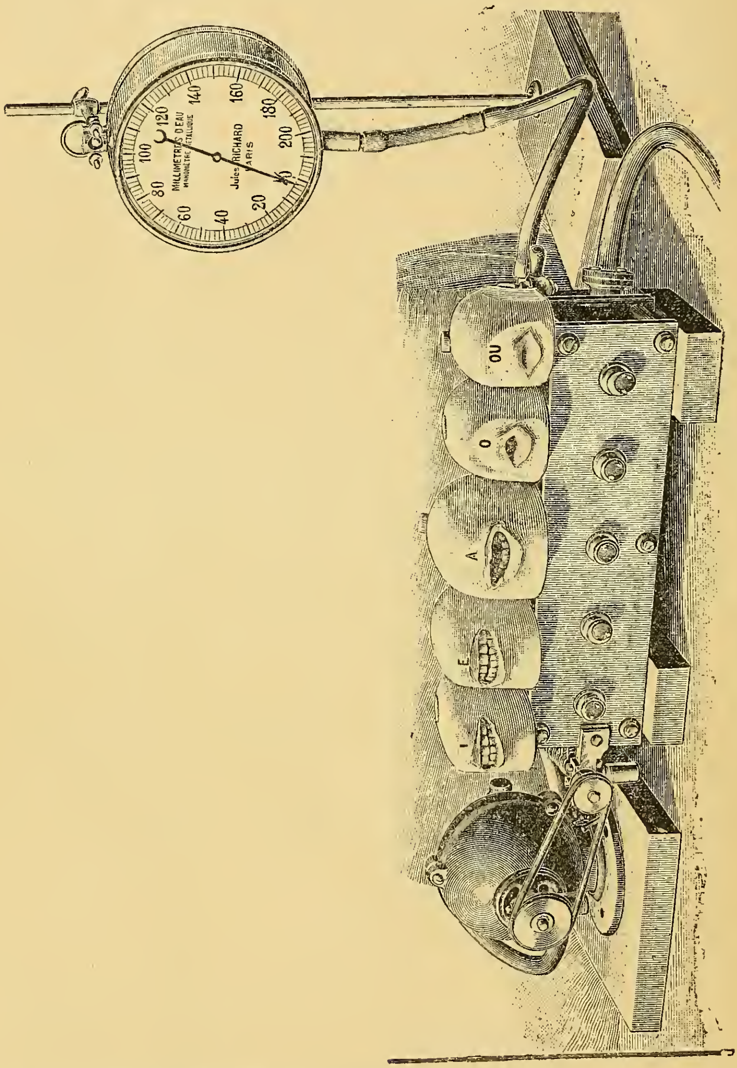


Fig. 1. — Sirène à voyelles servant à mesurer l'acuité auditive.

Les instruments des deux premières classes n'indiquent que d'une façon très approximative la façon dont la parole est entendue ; un sujet peut avoir à l'un des acoumètres précédents une acuité auditive assez bonne, et cependant entendre la voix d'une façon plus que médiocre, c'est un gros inconvénient; nous allons en chercher la cause.

Cela tient à ce que les vibrations de la parole sont beaucoup plus complexes que toutes les vibrations fournies par les appareils que nous venons de décrire; en effet, l'organe vocal, le larynx, fournit des vibrations périodiques, régulières, intermittentes, qui donnent naissance aux voyelles ; mais, sur ces vibrations, viennent s'en greffer d'autres, produites par la fourniture des tuyaux supra-laryngiens, pharynx, nez, bouche etc., ce sont ces dernières vibrations qui donnent la caractéristique de chaque voix. Ces vibrations fondamentales périodiques, régulières, intermittentes des voyelles n'ont aucun rapport avec les bruits et avec les vibrations sinusoïdales de certains acoumètres, il n'y a donc rien d'étonnant que ces instruments ne puissent pas donner des indications précises sur la façon dont la parole est perçue.

Aussi, en pratique, l'acoumètre le plus employé est-il simplement la voix de l'observateur ; c'est encore l'instrument qui donne les indications les moins inexactes.

Malheureusement, il n'y a pas deux voix comparables à cause, justement, des vibrations secondaires qui accompagnent les voyelles.

J'ai donc fait construire un apapreil dans lequel j'ai supprimé les vibrations accessoires, produites par les résonateurs supra-laryngiens, et j'ai conservé seulement les vibrations fondamentales des voyelles, OU, O, A, É, I.

J'ai démontré dans un autre travail que l'intensité du son de cet instrument était proportionnelle à la pression de l'air qui traversait l'appareil (1).

L'oreille à examiner est placée à une *distance constante* de l'instrument, et on augmente l'intensité du son en faisant croître la pression de l'air ; cette pression est mesurée au moyen d'un manomètre métallique extra-sensible, gradué en millimètres d'eau.

Le son produit sous une pression de 1 millimètre est parfaitement perçu par une oreille normale ; si la pression pour une autre oreille doit être portée à 40 millimètres pour que le son soit entendu, on pourra dire que l'acuité auditive est 1/40; à 60, 1/60; à 200, 1/200 et ainsi de suite; cette échelle a le grand avantage qu'elle correspond parfaitement à la façon dont la parole est perçue, ce qui est la chose importante pour les sourds.

(1) Rôle de la chaîne des osselets dans l'audition.

On a donc ainsi un instrument de mesure très simple, toujours le même, et qui permet de savoir ce que l'on fait, chose importante dans ces sortes de recherches.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Pour se rendre compte d'un seul coup d'œil de l'état dans lequel se trouve l'acuité auditive, on opère alors de la façon suivante (*fig.* 2) :

Sur une ligne horizontale, on inscrit les voyelles OU, O, A, É, I ; au-dessous de chacune d'elles se trouve une échelle verticale, dont les graduations représentent les pressions indiquées par le manomètre au moment où la voyelle est perçue.

Par exemple, si les voyelles OU, O, A, sont perçues sous une pression de 20, 10, 5 millimètres, on marque un point sur les chiffres de chacune des échelles correspondant à OU, O, A ; si É est entendu sous la pression 10, on marque le point 10 sur l'échelle de É ; enfin, on marque le point 20 sur l'échelle de I, si cette voyelle est entendue sous la pression 20; on réunit alors ces 5 points par un trait, et on a la courbe supérieure de la figure correspondant aux otites catarrhales.

On obtiendrait de la même façon les autres courbes.

A la première inspection de la figure, on voit les formes très différentes que prennent les courbes, et nous examinerons plus loin les conséquences que l'on peut en déduire.

Remarque. — Quand un malade commence à devenir sourd, généralement il observe sur lui-même les phénomènes suivants :

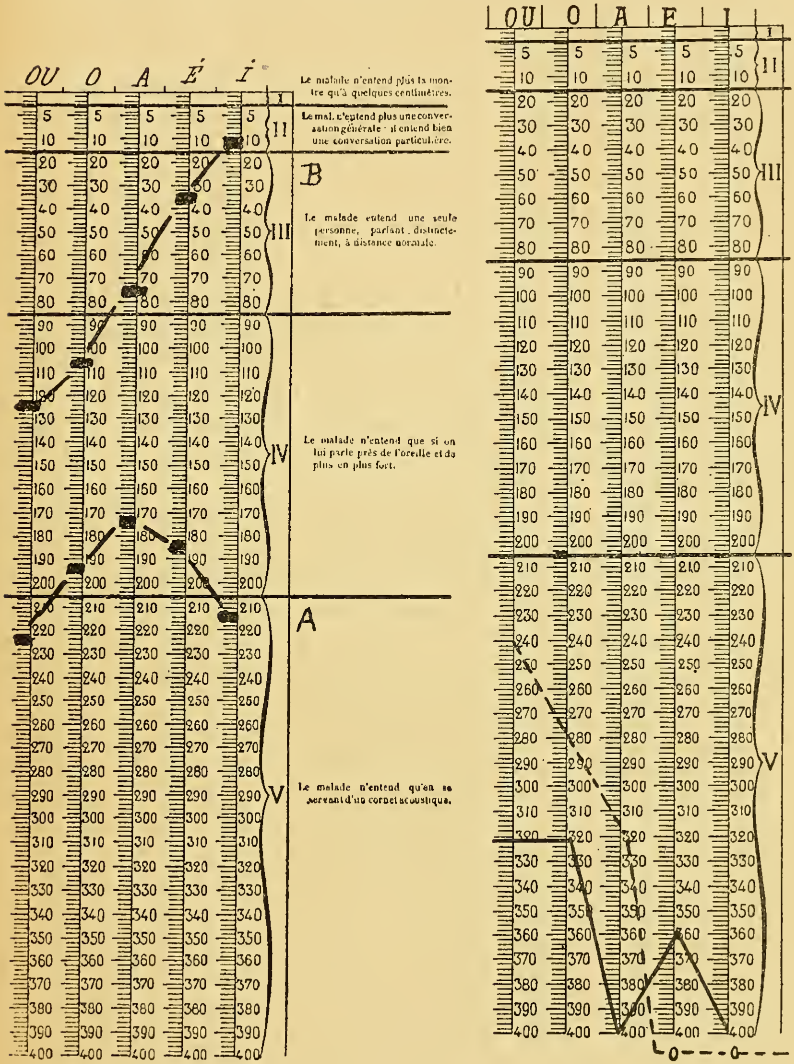
1° La montre, perçue normalement à une distance de $1^{m},50$, n'est plus perçue qu'à une distance de plus en plus faible jusqu'au contact ; à l'acoumètre, l'acuité auditive est devenue 1/3.

2° Lorsque l'acuité auditive, en diminuant, arrive à être comprise entre 1/3 et 1/13, le malade entend assez bien une conversation particulière; mais, au milieu d'une conversation générale, il perd beaucoup de mots.

3° A partir de 1/13, si l'autre oreille est normale, le malade s'habitue à ne plus écouter que de la bonne oreille, et de 1/13 jusqu'à 1/200 environ, nous avons différents degrés de surdité; à partir de 1/80 il faut s'approcher *très près* de l'oreille pour faire entendre les sons; mais il n'est pas nécessaire d'élever la voix, il suffit de parler lentement avec de bonnes vocables.

4° Entre 1/80 et 1/200, il faut parler près du malade et de plus en plus fort.

5° A partir de 1/200, la parole n'est plus entendue que par l'intermédiaire d'un cornet acoustique; si, par exemple, l'acuité est 1/240, cela veut dire que le son de la sirène produit par une pression de



Otites moyennes. FIG. 2 Otites internes.

40 millimètres n'est perçu que par l'intermédiaire d'un tube acoustique muni d'une membrane vibrante.

Conséquence. — Nous avons cinq zones de surdité, qui, sur la figure, sont séparées les unes des autres par des traits noirs horizontaux : tant que l'acuité auditive reste dans la même zone, le malade n'éprouve pas de changements sensibles : ce sont plutôt les interlocuteurs qui, n'ayant plus besoin de parler avec autant d'énergie, éprouvent un soulagement.

La sirène à voyelles a cette supériorité, sur l'observation directe, de permettre de constater des degrés, là où le malade n'en perçoit plus.

DIAGNOSTIC DIFFÉRENTIEL DES DIVERSES SORTES DE SURDITÉS

Lorsque l'on a mesuré l'acuité auditive et obtenu une courbe, la forme du tracé permet de savoir quel est le siège de la lésion. Si, par exemple, on obtient une courbe ayant plus ou moins la forme d'un U renversé (*fig.* 2, A), l'oreille moyenne est seule atteinte, et l'on se trouve en présence, soit d'une otite catarrhale, soit d'une ancienne otorrhée, soit d'une otite scléreuse, affections que la clinique permet de diagnostiquer.

Si l'otite moyenne est légère, le tracé prend la forme correspondant aux otites scléreuses au début (B).

Si l'oreille interne est atteinte, le tracé prend une forme tout à fait différente, et nous avons soit des trous dans l'audition (otites internes, trait plein), soit une chute plus ou moins brusque au niveau de la voyelle I (otites internes 0,0) : ces deux courbes caractérisent les lésions de l'oreille interne.

On voit immédiatement l'utilité de ces tracés, puisqu'ils nous permettent de diagnostiquer le siège de la lésion.

En résumé, lorsqu'on mesure l'acuité auditive avec les voyelles synthétiques, on obtient quatre sortes de courbes : les deux premières sont caractéristiques des lésions de l'oreille moyenne ; les deux autres sont celles qu'on rencontre dans la surdi-mutité ; tantôt les sons graves sont mieux entendus que les sons aigus, tantôt il y a des trous dans l'audition ; cette constatation est très importante, car elle permet peut-être d'élucider un point resté obscur dans l'étiologie de la surdi-mutité.

En effet, on ignore encore pourquoi certains enfants naissent sourds-muets. La consanguinité des parents ne saurait être invoquée, car on a vu des enfants sourds-muets dont le père et la mère avaient des nationalités différentes. L'hérédité ne semble pas en cause, car des parents sourds-muets peuvent donner naissance à des enfants normaux. L'arrêt de développement de certains centres cérébraux est une hypothèse plus logique, mais il faut expliquer cet arrêt.

Les cas de surdi-mutité observés à la suite d'explosion d'obus de gros calibre permettent de donner l'explication suivante :

Pendant la gestation, la mère fait une chute ou subit un choc qui semble sans gravité. Le choc se transmet intégralement par l'intermédiaire du liquide amniotique à toute la surface du cerveau du fœtus qui n'est pas protégé par une boîte cranienne ossifiée; il s'ensuit une commotion cérébrale bien plus faible que celle due à un projectile, mais qui, agissant sur un système nerveux bien plus sensible, produit des lésions et des effets analogues. Or, souvent, quand on recherche la cause de la surdi-mutité de l'enfant, on trouve une chute de la mère pendant la gestation.

La guerre actuelle nous met donc en présence de lésions, sinon nouvelles, du moins très rarement observées, des centres auditifs. Ces lésions sont dues, ou à des chocs directs sur la boîte cranienne, ou à un brusque déplacement d'air. Elles sont, ou visibles, si elles portent sur l'oreille moyenne, ou cachées si elles portent sur les centres nerveux, et, dans ce dernier cas, les courbes de l'acuité auditive sont de même forme que celles de la surdi-mutité, ce qui permet d'établir une cause probable de cette dernière affection.

II

Traitement (1)

Je viens d'indiquer les causes, les lésions et la gravité des hypoacousies que l'on rencontre à la suite, soit de blessures du crâne, soit d'éclatements d'obus de gros calibre.

Je vais maintenant examiner les résultats que l'on obtient dans le traitement de ces sortes de surdités.

(1) *Comptes rendus*, 13 septembre 1915.

Circulaire ministérielle 17292 c/7.

Le Ministre de la Guerre à M. le Directeur du service de santé de la ...e région.

Mon attention est appelée sur les avantages qui pourraient résulter, pour le traitement de certaines hypoacousies d'origine traumatique, de la méthode de rééducation auditive du Dr Marage. J'ai l'honneur de vous prier de vous enquérir, auprès du médecin-chef du service central d'oto-rhino-laryngologie de votre région, des blessés qui seraient justiciables de cette méthode en vue de leur évacuation sur l'hôpital 3 *bis* à la Flèche.

1° *Choix des malades.* — Le choix des malades appartenait uniquement aux médecins des hôpitaux militaires; ils envoyaient leurs sourds au chef du service d'oto-rhino-laryngologie de la région qui les examinait et me les adressait ensuite : il y avait donc une double sélection.

Je les acceptais tous, quel que fût leur degré de surdité; j'éliminais seulement ceux qui ne pouvaient pas suivre le traitement, parce qu'ils étaient atteints d'otite moyenne suppurée double.

Ma statistique est fondée sur les cent cinquante premiers cas qui sont *entrés* dans le service à partir du 15 juin 1915.

2° *Choix du traitement.* — Les malades étaient d'abord interrogés et examinés médicalement et acoustiquement, c'est-à-dire qu'après avoir fait le diagnostic clinique on déterminait le degré d'acuité auditive et le genre de surdité avec la sirène à voyelles.

Il était tenu le plus grand compte de l'état cérébral, bourdonnements, vertiges, maux de tête, perte de la mémoire, tremblements, troubles du sommeil et de la vue, etc.

Ces renseignements, transcrits sur une fiche spéciale, permettaient d'indiquer la nature du traitement qui, non seulement variait avec chaque malade, mais encore changeait suivant son état journalier.

Ces malades sont, en effet, très sensibles aux moindres variations de température et d'humidité; il suffit, par exemple, d'une grippe légère pour réveiller une otite moyenne et provoquer un nouvel écoulement qui doit être soigné immédiatement.

La rééducation auditive n'est donc nullement une œuvre pédagogique, comme les professeurs de sourds-muets semblent le croire; c'est une œuvre exclusivement médicale, et que seul un médecin peut faire et diriger, en assistant aux traitements, s'il ne peut les faire tous lui-même.

On s'exposerait non seulement à des insuccès, mais encore à des aggravations en confiant ces malades à des professeurs non médecins.

3° *Diverses sortes de surdités.* — Les malades se divisent en trois catégories :

a) Les uns présentent seulement des lésions de l'oreille moyenne (10 0/0 des cas traités);

b) Les autres, atteints de commotion cérébrale, n'ont aucune lésion apparente (38 0/0 des cas traités);

c) Les derniers présentent à la fois des lésions de l'oreille moyenne et des symptômes de commotion cérébrale (52 0/0 des cas traités).

Comme je l'ai indiqué plus haut, la courbe d'acuité auditive permet de faire facilement le diagnostic différentiel de ces trois sortes de surdités.

4° *Traitement.* — La rééducation auditive a été faite uniquement avec la sirène à voyelles. Chaque jour, pendant cinq minutes à chaque oreille, on fait agir sur le tympan les vibrations sonores d'après la méthode que j'ai décrite dans une série de communications faites de 1897 à 1901.

La pression de l'air dans les appareils n'atteignait que très exceptionnellement 5 millimètres d'eau ; il ne faut pas oublier qu'un blessé, même très sourd, est souvent très sensible aux sons les plus faibles.

5° *Résultats.* — Puisque nous sommes en état de guerre, je dis qu'un malade est un succès lorsqu'à la fin du traitement il entend suffisamment pour rejoindre son régiment.

70 0/0, c'est-à-dire un peu plus des deux tiers, peuvent retourner au front, et parmi ceux-là, il y en avait un grand nombre, presque la moitié, qui m'étaient signalés comme très sourds, plusieurs même étaient regardés comme incurables.

Les derniers se divisent en deux catégories : les uns (10 0/0) étaient et sont restés complètement sourds, les autres (20 0/0) sont arrivés à entendre quand on leur parle près de l'oreille sans forcer la voix, ils peuvent être employés dans certains services auxiliaires.

C'est aux sourds complets que la lecture sur les lèvres est utile ; il ne faut jamais l'apprendre aux demi-sourds, car ils ne se donneraient plus la peine d'écouter et la surdité augmenterait.

Je tiens à faire remarquer qu'il ne faut pas généraliser. Cette statistique ne s'applique qu'aux cas traités : on pourrait avoir des séries meilleures ou plus mauvaises, suivant les envois faits par les hôpitaux militaires.

6° *Gravité des diverses sortes de lésions.* — On peut se demander quelles sont les lésions les plus graves : la commotion cérébrale seule ou la commotion cérébrale accompagnée de lésions de l'oreille moyenne.

Dans les cas de commotion cérébrale, on trouve 50 0/0 de succès.

Dans les cas d'otite moyenne avec commotion cérébrale, les bons cas s'élèvent à 76 0/0, et quand il n'y a que des lésions de l'oreille moyenne, je n'ai pas eu jusqu'ici d'insuccès; cela ne veut pas dire que je n'en aurai pas plus tard.

En rangeant les lésions par ordre de gravité ascendante, nous avons donc en premier lieu les lésions de l'oreille moyenne, ensuite les lésions de l'oreille moyenne avec commotion cérébrale, enfin la commotion cérébrale seule.

Il est à remarquer que les blessés atteints de commotion cérébrale seule n'avaient jamais souffert des oreilles avant leurs blessures, tandis que parmi les soldats atteints d'otite moyenne avec commotion cérébrale, on en retrouve 50 0/0 qui étaient déjà sourds avant la guerre et présentaient des lésions de l'oreille moyenne.

40 0/0 de ceux qui n'ont que des lésions de l'oreille moyenne avaient eu dans leur enfance des otorrhées.

Une oreille qui a coulé est donc plus fragile qu'une oreille saine, en ce sens que le tympan est moins résistant ; mais, en présence d'une explosion, c'est un avantage, car un tympan malade cède plus facilement qu'un tympan sain qui transmet à l'oreille interne par la chaîne des osselets l'augmentation de pression due à l'explosion, quelle que soit la voie de transmission, oreille externe ou trompe d'Eustache ; il s'ensuit donc pour l'oreille interne et les centres auditifs des délabrements plus graves dans le cas de commotion cérébrale seule.

Ces résultats auraient été meilleurs si les malades avaient été placés dans un hôpital où la discipline eût été moins sévère. Les règlements hygiéniques et alimentaires d'un hôpital militaire, surtout quand ils sont appliqués d'une façon étroite, sont très souvent en contradiction avec l'intérêt de ce genre de malades.

7° *Surdi-Mutité.* — Je vais examiner maintenant un symptôme : la *mutité* qui accompagne, dans 12 0/0 des cas, ces sortes d'hypoacousies. J'en étudierai successivement la *gravité*, les *complications* et le *traitement.*

1° *Gravité.* — A la suite d'une commotion cérébrale sans lésion apparente produite par l'explosion d'un obus de gros calibre, il arrive que le sujet, après une perte de connaissance qui varie de quelques minutes à plusieurs jours, ne retrouve pas l'usage de la parole.

Dans 64 0/0 des cas, cette mutité disparaît spontanément au bout de quelques semaines.

D'autres fois, malheureusement, il n'en est pas ainsi, et, après plusieurs mois, la surdi-mutité persiste complètement *malgré tous les traitements employés.*

2° *Complications.* — Cette surdi-mutité est souvent accompagnée de vertige et de bourdonnements très pénibles. Toujours les malades se plaignent de maux de tête frontaux excessivement violents. L'insomnie est la règle : ils restent souvent deux et trois mois sans dormir plus d'une ou deux heures par nuit.

Enfin, on constate une perte de la mémoire plus ou moins grande :

non seulement les blessés ont oublié tout ce qui s'est passé depuis la bataille, mais encore ils sont incapables d'écrire une lettre, parce qu'une phrase n'est pas finie qu'ils en ont oublié le commencement. Je citerai plus loin un cas d'amnésie encore plus prononcée.

Leur nerf auditif est tellement sensible qu'ils ne peuvent supporter les sons les plus faibles produits sous une pression de 1/4 de millimètre d'eau : ces vibrations sont à peine perceptibles par une oreille normale.

3° *Traitement.* — Depuis cinq mois, j'ai eu dans mon service sept cas de surdi-mutité complète : l'un d'eux n'a pas été soigné complètement à cause de troubles cérébraux.

Le deuxième a commencé à parler et à entendre après quinze jours de traitement à la sirène.

Les cinq derniers étaient atteints depuis quatre et cinq mois de surdi-mutité : la surdité était absolue pour toutes les vibrations, et ils ne pouvaient non seulement articuler un son, mais même pousser le moindre cri. On communiquait avec eux par l'écriture, sauf avec l'un d'eux, complètement illettré.

Au bout de cinq semaines, le traitement à la sirène n'avait produit aucune amélioration.

Comme ils respiraient très mal, je pensai à leur faire exécuter les exercices respiratoires que j'ai décrits dans les *Comptes rendus* de novembre 1907.

Au bout de quinze jours, ils savaient faire sortir l'air de leurs poumons ; mais, malgré tous les procédés employés, ils ne parlaient pas : ils essayaient, mais cela leur était impossible.

Pour faire fonctionner leurs muscles vocaux, je leur fis faire alors du massage sur le larynx et les régions latérales du cou avec un de ces vibrateurs mécaniques que l'on trouve dans le commerce et qui sont mus soit à la main, soit électriquement. On agissait ainsi sur les muscles intrinsèques et extrinsèques du larynx. Au bout de quatre jours, ils commençaient à articuler en voix chuchotée des mots simples tels que papa, maman, bonjour. Après huit jours de ce seul traitement, ils répétaient des phrases qu'on leur faisait lire sur un papier. Au bout de trois semaines, il y en avait quatre qui parlaient normalement.

Le cinquième a fait des progrès moins rapides, parce qu'il était atteint d'une perte complète de la mémoire : quand il devait prononcer un mot de trois syllabes, il s'arrêtait après la deuxième, parce qu'il avait oublié la troisième. Quand il faisait des exercices respiratoires, il s'arrêtait les bras en l'air, à la fin de l'inspiration, ne se rappelant plus qu'il devait les abaisser pour l'expiration.

Actuellement, cette amnésie commence à diminuer. Il chuchote quelques mots, et chaque semaine il fait des progrès.

A ma connaissance, on ne s'est pas encore servi de cette méthode de traitement dans les cas de mutité consécutive à des blessures de guerre.

J'en parle aujourd'hui, parce que je pense que ce procédé très simple peut être employé facilement dans les hôpitaux militaires, et pourra rendre de grands services à des malheureux à qui la joie de parler fera presque oublier le chagrin de ne plus entendre.

8° *Simulateurs.* — En terminant, je crois utile de dire quelques mots des simulateurs.

Autant les mesures d'acuité visuelle sont bien déterminées, autant celles d'acuité auditive sont empiriques et peu scientifiques.

Il en résulte que, dans certaines régions militaires, on réforme des sourds qui auraient été pris dans un conseil de revision, et, inversement, qu'on maintient au régiment, ou qu'on traite de simulateurs, des hommes dont la surdité est absolument certaine pour qui sait les examiner.

Il s'ensuit une perte d'hommes pour l'armée, et des dépenses en pensions de retraite qui auraient pu être évitées.

Je vais étudier les moyens de remédier à cet état de choses, en me plaçant à un double point de vue : 1° celui des conseils de revision ; 2° celui des conseils de réforme.

1° Conseils de revision (1). — Du 1er juin au 1er décembre 1915 j'ai soigné près de 200 surdités produites, soit par des blessures de guerre, soit par des commotions cérébrales ; j'ai pu constater que, jusqu'à la division 50 de l'acoumètre, les surdités ne sont pas incompatibles avec le service actif.

Jusqu'à 100, les hommes peuvent être versés dans l'auxiliaire ; au-dessus de ce degré, la réforme est indiquée.

On a donc un moyen très simple de classer les sourds suivant leur degré d'acuité auditive, et l'on n'assisterait plus à ce spectacle bizarre d'un soldat réformé quand il marque 10 à l'acoumètre, alors qu'un de ses camarades, beaucoup plus sourd, est ailleurs déclaré bon pour le service.

2° Conseils de réforme. — L'appareil permet d'une façon très précise de dépister les simulateurs :

(1) *Bulletin de l'Académie de Médecine*, séance du 1er juillet 1902.

a. Principe. — A chaque lésion, comme on l'a vu, correspond une courbe spéciale d'acuité auditive (1); il n'existe que quatre sortes de tracés correspondant, les deux premiers aux otites moyennes, les deux autres aux lésions de l'oreille interne.

Un tracé qui ne rentre pas dans une de ces quatre classes est un tracé inexact, fourni par un simulateur.

b. Expérience. — On opère de la façon suivante : on mesure à l'acoumètre l'acuité auditive correspondant aux différentes voyelles, et l'on obtient un certain tracé.

Ce tracé rentre, ou non, dans une des classes précédentes. Le lendemain, ou même quelques minutes après le premier examen, on refait, dans les mêmes conditions, une nouvelle mesure.

Comme le sujet ne peut pas voir l'aiguille du manomètre, il indiquera, comme précédemment, s'il est de bonne foi, le moment où il commence à entendre les sons de l'acoumètre, et l'on obtiendra une courbe d'acuité auditive semblable à la première.

Au contraire, un simulateur ne pourra jamais se rappeler l'intensité exacte du son qu'il a dit entendre précédemment, et ses indications fourniront une courbe différente de la première (2).

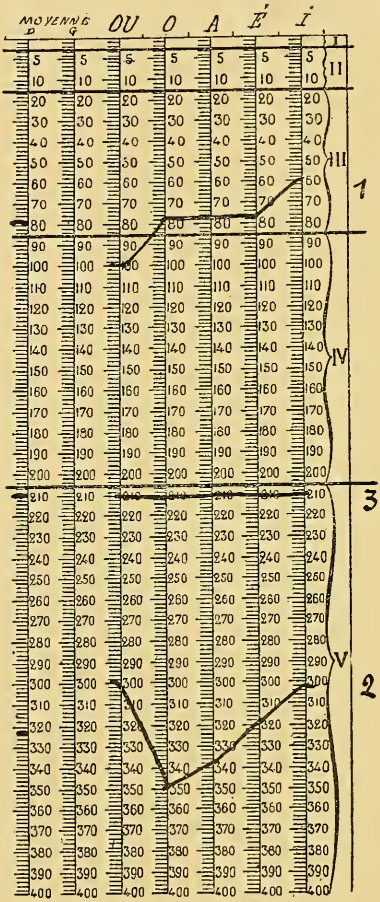


Fig. 3. — Simulateurs.

(1) *Comptes rendus*, t. 140, 1905, p. 603.

(2) Dans le cas de surdité complète simulée, l'acoumètre fera découvrir la fraude : l'oreille ne pouvant supporter les sons faux suffisamment intenses que l'appareil peut produire (*Comptes rendus*, t. 162, p. 175, séance du 24 janvier 1916).

C'est ce que montrent nettement les tracés ci-dessus, pris sur le même sujet. Celui-ci, à la fin de son traitement, avait comme audition le tracé 1 qui le faisait classer dans l'auxiliaire. Après un mois de convalescence, il déclara être devenu beaucoup plus sourd ; la mesure donna alors la courbe 2, absolument anormale, car elle ne correspondait à aucune lésion connue; de plus, cette acuité auditive était en désaccord avec la façon dont le malade entendait la voix parlée.

La mesure fut alors recommencée, en ayant soin de maintenir l'intensité du son constante à 210 pour toutes les voyelles.

Comme le blessé avait remarqué dans la mesure précédente que, plus il attendait, plus le son devenait intense, il attendit un certain temps avant de faire signe qu'il entendait; malheureusement pour lui, le son n'avait pas varié : le blessé était donc nettement un simulateur ou, du moins, un exagérateur.

Je dois dire qu'inversement, j'ai eu à examiner des blessés, regardés comme des simulateurs, menacés même de conseil de guerre, et dont la mesure à l'acoumètre a permis de reconnaître la bonne foi.

CONCLUSIONS

1° La rééducation auditive avec la sirène à voyelles peut rendre de grands services aux hypoacousies d'origine traumatique : après le traitement, les deux tiers des malades peuvent retourner au front;

2° Chaque semaine, on mesure l'acuité auditive, et on sait, après quinze jours de traitement, les résultats qu'on pourra obtenir ;

3° Ce traitement est un traitement médical et non un traitement pédagogique, il ne peut être fait que par des médecins;

4° On ne doit apprendre à lire sur les lèvres qu'à des sourds complets, c'est-à-dire à 10 0/0 des sourds traités par la rééducation auditive.

Les autres doivent écouter s'ils veulent continuer à entendre;

5° On ne doit jamais faire le traitement aux blessés atteints d'écoulements d'oreille ou d'inflammation de l'oreille moyenne; il faut attendre, pour commencer la rééducation, que tout écoulement ait cessé depuis au moins un mois;

6° Faute d'un bon acoumètre, la mesure de l'acuité auditive fait perdre à l'armée un grand nombre d'hommes. Il est regrettable qu'on n'emploie pas dans le Service de Santé des procédés de mesure plus précis que ceux dont on se sert actuellement.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS.

Séance du 24 *octobre* 1916.

Présidence de M. Er. Lebon, président.

M. Pellegrin, mobilisé, s'excuse de ne pouvoir assister à la séance.

Le Président, désirant savoir si la Société Philomathique de Paris pouvait souscrire à l'emprunt national d'octobre 1916, a demandé le 12 octobre à M. Michel, trésorier, quelle était la somme dont la Société disposait. Il résulte de la réponse du Trésorier que la Société Philomathique peut acheter de la rente. Le Président a le plaisir d'annoncer à l'Assemblée que le Conseil du 24 octobre 1916 a voté l'achat d'un titre de rente 5 0/0 de 60 francs. L'Assemblée approuve à l'unanimité.

Le Président lit un Rapport sur les titres scientifiques de M. Émile Belot, candidat à une place vacante de titulaire dans la section I. Le nombre des Membres étant insuffisant pour le vote, l'élection est remise à la séance suivante.

Séance (seconde) *du* 24 *octobre* 1916.

Présidence de M. Er. Lebon, président.

M. Hua donne lecture du Rapport qu'il a rédigé, au nom de la Commission des Finances, relativement à l'exercice 1915. Ce Rapport se termine par des remerciements à M. Michel, trésorier, au sujet des nombreuses démarches qu'il a été obligé de faire de septembre 1914 à avril 1916 afin d'opérer le transfert des titres de la *Société Générale* au *Crédit Foncier*. Ce Rapport est approuvé à l'unanimité.

M. Émile Belot est élu à l'unanimité Membre titulaire dans la section I.

Nota. — Étaient présents au Conseil : MM. Desgrez, Dongier, Fauré-Frémiet, Hua, Laisant, Lebon, Michel. Assistaient aux deux Assemblées, les Membres précédents et MM. Bourgeois, Leau, Malher, Ménégaux, Viguier.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE
DE PARIS.

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME DE L'ANNÉE 1916.

Fin de l'année 1916 du Bulletin de la Société Philomathique de Paris.

Tours. — Imprimerie Deslis Frères et Cie, 6, rue Gambetta.

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES ET Cie, 6, RUE GAMBETTA.