

# Mathematik für Anwender I

## Arbeitsblatt 17

### Übungsaufgaben

AUFGABE 17.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x - 2}$$

im Entwicklungspunkt 0.

AUFGABE 17.2. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x \cos x,$$

im Nullpunkt.

AUFGABE 17.3. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt  $a = 3$ .

AUFGABE 17.4. Bestimme das Polynom

$$f(z) = z^3 + 3z^2 - 7z - 4.$$

in der neuen Variablen  $z - 2$  (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

- direkt durch Einsetzen,
- über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt 2.

AUFGABE 17.5. Bestimme die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für einen beliebigen Entwicklungspunkt  $a \in \mathbb{R}$ .

AUFGABE 17.6.\*

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

- Bestimme den Definitionsbereich von  $f$ .
- Skizziere  $f$  für  $x$  zwischen  $-2\pi$  und  $2\pi$ .
- Bestimme die ersten drei Ableitungen von  $f$ .
- Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von  $f$  im Punkt  $\frac{\pi}{2}$ .

AUFGABE 17.7. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  im Punkt  $a = 3$  bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 3 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 17.8.\*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt  $a = \frac{\pi}{2}$ .

AUFGABE 17.9.\*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  im Punkt  $a = 2$  bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 17.10. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Vergleiche die polynomiale Interpolation zu  $n + 1$  gegebenen Punkten und die Taylor-Polynome vom Grad  $n$  zu einem Punkt.

AUFGABE 17.11. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine im Punkt  $a$   $n$ -fach differenzierbare Funktion. Zeige, dass das  $n$ -te Taylor-Polynom zu  $f$  im Punkt  $a$ , geschrieben in der verschobenen Variablen  $x - a$ , gleich dem  $n$ -ten Taylor-Polynom der Funktion  $g(x) = f(x + a)$  im Nullpunkt (geschrieben in der Variablen  $x$ ) ist.

AUFGABE 17.12. Man mache sich klar, dass man zu einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das  $n$ -te Taylor-Polynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $b$  nicht aus dem  $n$ -ten Taylor-Polynom in einem Entwicklungspunkt  $a$  bestimmen kann.

AUFGABE 17.13. Es seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Polynome  $n$ -ten Grades und es seien  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  Punkte und  $n_1, \dots, n_k \geq 1$  natürliche Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^k n_j > n.$$

Die Ableitungen von  $f$  und  $g$  in den Punkten  $a_j$  sollen bis einschließlich zur  $(n_j - 1)$ -ten Ableitung übereinstimmen. Zeige  $f = g$ .

Man mache sich zuerst die Aussage bei  $k = 1$  und  $n_1 = n + 1$  und bei  $k = n + 1$  und  $n_j = 1$  für alle  $j$  klar.

AUFGABE 17.14. Es sei  $f(x) := \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 3}$ . Bestimme ein Polynom  $h$  vom Grad  $\leq 3$ , das in den beiden Punkten  $x = 0$  und  $x = 1$  die gleichen linearen Approximationen wie  $f$  besitzt.

## AUFGABE 17.15.\*

Es sei  $f(x) = \sin x$ . Bestimme Polynome  $P, Q, R$  vom Grad  $\leq 3$ , die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

- (a)  $P$  stimmt mit  $f$  an den Stellen  $-\pi, 0, \pi$  überein.
- (b)  $Q$  stimmt mit  $f$  in 0 und in  $\pi$  bis zur ersten Ableitung überein.
- (c)  $R$  stimmt mit  $f$  in  $\pi/2$  bis zur dritten Ableitung überein.

## AUFGABE 17.16.\*

Wir betrachten die Funktion

$$F(x) = x^4 - x^3.$$

- (1) Bestimme die Nullstellen der Funktion.
- (2) Bestimme, in welchen Abschnitten die Funktion positiv bzw. negativ ist.
- (3) Bestimme die Extrema der Funktion.

## AUFGABE 17.17.\*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

AUFGABE 17.18. Es sei  $p \in \mathbb{R}[Y]$  ein Polynom und

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung  $g'(x)$  ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom  $q$  ist.

AUFGABE 17.19. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+, x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

AUFGABE 17.20. Bestimme das Taylor-Polynom der dritten Ordnung zur Funktion  $\frac{1}{x^2+1}$  im Nullpunkt mit dem in Bemerkung 17.9 beschriebenen Potenzreihenansatz.

## AUFGABE 17.21.\*

Es sei

$$f(x) = -3x + x^3.$$

Wegen

$$f'(x) = -3 + 3x^2$$

ist diese Funktion auf dem offenen Intervall  $] - 1, 1[$  streng fallend und damit injektiv (mit dem Bildintervall  $] - 2, 2[$ ). Dabei ist  $f(0) = 0$ . Es sei

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k$$

die Umkehrfunktion, die wir als eine Potenzreihe ansetzen. Bestimme aus der Bedingung

$$(g(f(x))) = x$$

die Koeffizienten  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ .

AUFGABE 17.22. Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung der Umkehrfunktion des Sinus im Punkt 0 mit dem in Bemerkung 11.17 beschriebenen Potenzreihenansatz.

### Aufgaben zum Abgeben

## AUFGABE 17.23. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt 0 bis zum Grad 4 der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin(\cos x) + x^3 \exp(x^2).$$

## AUFGABE 17.24. (5 Punkte)

Es sei  $f(x) := \frac{x^2+2x+1}{x^2+5}$ . Bestimme ein Polynom  $h$  vom Grad  $\leq 3$ , das in den beiden Punkten  $x = 0$  und  $x = -1$  die gleichen linearen Approximationen wie  $f$  besitzt.

## AUFGABE 17.25. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = (\sin x)(\cos x),$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

## AUFGABE 17.26. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sin^3 x - \frac{1}{4} \sin x,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

AUFGABE 17.27. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung des natürlichen Logarithmus im Punkt 1 mit dem in Bemerkung 11.17 beschriebenen Potenzreihenansatz aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion.

AUFGABE 17.28. (6 Punkte)

Zu  $n \geq 3$  sei  $A_n$  der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen  $n$ -Eckes. Zeige  $A_n \leq A_{n+1}$ .



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7