小森數藏先生編纂

下卷

受驗應用

代數理論的問答

附諸官立學校試驗問題

大阪書肆

積善館出版

受驗應用代數理論的問答　下ノ卷

大阪　小森數藏編

○界說問題

●有比數トハ如何

有比數トハ一整指數ヲ有スルモノナリ

●無比數トハ如何

無比數トハ分指數ヲ有スルモノナリ

●無法根數トハ如何

無法根數トハ可度數(整數或ハ分數)アリ之レガ他ノ可度數ノ某方乘ニ相當セザルモノ(ニ)アリ語ヲ換ヘテ云ヘバ某數ガ某方根ニ開キ盡ス能ハザルモノナリ

●虚量トハ如何

虚量トハ負數ノ平方根ヲ含有スルモノナリ設令バ $\sqrt{(-a)}$ ノ如シ單純ノ虚量トハ負一個ノ平方根ナリ設令バ $\sqrt{(-1)}$ ナリ

●二乘比及三乘比トハ如何

二ツノ比ノ前率ノ相乘積ノ後率ノ相乘積ニ於ケル比ヲ二乘比ト云ヒ三ツノ比ノ前率ノ連乘積ノ後率ノ連乘積ニ於ケル比ヲ三乘比ト云フ

●比例トハ如何

比例トハ両比ノ相等シキヲ顯スモノナリ

●變數トハ如何

變數トハ一量ガ變ズレバ他ノ量ガ從ツテ變ズルモノナリ而シテ之レニ自變數因變數ノ別アリ而シテ之レヲ顯スニ (∞) ナル記号ヲ用フ

●自變數ト因變數トノ區別

設令バ $y=Ax+B$ ニ於テ A 及ビ B ハ常數ナルトキ x ニ任意ノ數ヲ與フレバ y ハ之レニ從ツテ變ズ然ルトキ x ハ自變數ニメ y ハ因變數ナリ又自變數ト因變數トガ常ニ定比ヲ有スルモノヲ x ハ y ノ如ク變スト云フ設令ハ $\frac{x}{y}=A$ ノ如シ但シ A ハ常數ナリ

●二次方程式トハ如何

二次方程式トハ二乘冪以下ノ變數ヲ含有スル方程式ナリ而シテ之レニ完全式不完全式ノ別アリ設令ハ $ax^2+bx+c=0$ 此ノ如キハ完全式ニシテ $ax^2+b=0$ 此ノ如キハ不完全式ナリ

●不等式トハ何ヲ云フカ

不等式トハ大小二量ヲ顯ス式ナリ而シテ之レヲ顯スニ $(>)$ $(<)$ ノ如キ記號ヲ用フ設令バ $a>b$ 此ノ如ク記スルハ a ハ b ヨリ大ナリト云フヿヲ顯シタルモノニシテ $a<b$ 此ノ如ク記スルハ a ハ b ヨリ小ナリト云フヿヲ顯シタルモノナリ

●代數上ニ於テ二量ノ大小ヲ如何ニシテ分ツヤ

二量ノ差正ナレバ被減量大ニシテ負ナレバ被減量小ナリ

●一函數ノ極大極小トハ如何

$f(x)$ ナル函數ニ於テ x ニ漸次大ナル數或ハ小ナル數ヲ與フルトキ此函數ノ値漸次ニ增大スルモ無究大トナラズシテ遂ニ $f(a)$ トナリ夫ヨリ減小ヲ始メ漸次ニ減少シテ遂ニ $f(b)$ トナリ又增大ヲ始ム逐テ此ノ如ク增大スルモ減小スルモ無究大トナラズ又無究小トモナラズ極ニ至レハ其ヨリ后戻リヲナスモノナリ而シテ此 $f(a)$ $f(b)$ ハ $f(x)$ ノ極大値極小値ト云フ

●級數トハ如何

級數トハ一定ノ差或ハ一定ノ比ヲ以テ成ル所ノ一連數ナリ

●等差級數トハ如何

等差級數トハ等差ヲ以テ增大シ或ハ減小スルモノナリ

●等比級數トハ如何

等比級數トハ等比ヲ以テ増大或ハ減小スルモノナリ

●諸音級數トハ如何

諸音級數トハ第一量ノ第三量ニ於ケル比第一量ト第二量ノ差ノ第二量ト第三量ノ差ノ比ニ等シク又第二量ノ第四量ニ於ケル比第二量ト第三量ノ差第三量ト第四量ノ差ノ比ニ等シ逐テ此ノ如キ理ニ合フ所ノ量ナリ

●順列トハ如何ナルモノナルヤ

順列トハn個ノ異物ヲr個ツヽ排列シ其配合物及ビ位次ヲ尽セルモノナリ設令ハ a b c ノ三異物ヲ二個ツヽ排列セハ ab ac bc ba ca cb 此ノ如シ而シテ其總數ヲ記スルニ $_nP_r$ 此ノ如ク記スルナリ

●錯列トハ如何ナルモノナルヤ

錯列トハn個ノ異物ヲr個ツヽ排列シ只其配合スル物件ノミヲ盡セルモノナリ設令バ a b c ナル三異物ヲ二個ツヽ排合セバ ab bc ac 此ノ如シ之ヲ $_nC_r$ 此ノ如ク記スルナリ

●二項法トハ如何

二項法トハ二項式ノ某方乘或ハ某方根ヲ一ノ公式ニ由テ求メ得ル所ノ簡便法ナリ

●多項法トハ如何

多項法トハ多項式ノ某方乘或ハ某方根ヲ求メンカ爲メ某變數ノ某方冪ノ係數ヲ求ムル法ナリ

●一數ノ某底ノ對數トハ如何

一數ノ某底ノ對數トハ底ヲ幾方乘シテ一數ニ等シカラシムヘキ指數ナリ設令ハ一數ヲbトシテ某底ヲaトスルハ $a^x=b$ ナル式ニ於テxハ其對數ナリ

○理論問題

●$\sqrt[n]{(P)}$ ニ於テnノ奇偶トPノ正負ニ由テ方根ノ變化如何

n若シ奇數ナレバ $\sqrt[n]{(P)}=+r$ ニシテ $\sqrt[n]{(-P)}=-r$ ナリ何トナレバ $(+r)^n=+P$ ニシテ $(-r)^n=-P$ トナルガ故ナリ又n偶數ナルバ $\sqrt[n]{(+P)}=\pm r$ ニシテ $\sqrt[n]{(-P)}=\pm r\sqrt[n]{(-1)}$ ナリ何トナレバ $(\pm r)^n=+P$ トナルト雖𪜈 $(+r)^n=-P$ 或ハ $(-r)^n=-P$ トナルヿ能ハザレバナリ

●nノ奇偶ニ拘ハラズ $\sqrt[n]{(-P)}=r\sqrt[n]{(-1)}$ トナルハ何故ナルヤ

n奇數ナレバ $\sqrt[n]{(-1)}=-1$ ニシテn偶數ナレバ $\sqrt[n]{(-1)}=\sqrt[n]{(-1)}$ ナルガ故ナリ

●$a^{\frac{q}{p}}\times a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{q}{p}+\frac{r}{s}}$ ナルヿヲ證明セヨ

$x=a^{\frac{q}{p}}\times a^{\frac{r}{s}}$ トスレバ $x^{ps}=a^{qs}\times a^{pr}=a^{qs+pr}$ 故ニ $x=a^{\frac{qs+pr}{ps}}=a^{\frac{q}{p}+\frac{r}{s}}$ トナルナリ

●$a^{\frac{q}{p}}\div a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{q}{p}-\frac{r}{s}}$ ナルヿヲ證セ

$x=a^{\frac{q}{p}}\div a^{\frac{r}{s}}$ トスレバ $x^{ps}=a^{qs}\div a^{pr}=a^{qs-pr}$ トナル故ニ $x=a^{\frac{q}{p}-\frac{r}{s}}$

● $a^{\frac{q}{p}} \times b^{\frac{q}{p}} = (ab)^{\frac{q}{p}}$ ナルヲ證セ

$x = a^{\frac{q}{p}} \times b^{\frac{q}{p}}$ トスレバ $x^{p} = \left(a^{\frac{q}{p}} \times b^{\frac{q}{p}}\right)^{p} = \left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{p} \times \left(b^{\frac{q}{p}}\right)^{p} = a^{q} \times b^{q} = (ab)^{q}$ 故ニ

$a^{\frac{q}{p}} \times b^{\frac{q}{p}} = (ab)^{\frac{q}{p}}$

● $\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{q}{p} \times \frac{r}{s}}$ ナルコトヲ證セ

$x = \left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{r}{s}}$ トスレバ $x^{ps} = \left\{\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{r}{s}}\right\}^{ps} = \left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{pr} = a^{qr}$ トナル故ニ

$x = a^{\frac{qr}{ps}} = a^{\frac{q}{p} \times \frac{r}{s}}$ トナル故ニ $\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{q}{p} \times \frac{r}{s}}$

● $\left(a^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{p}$ ナルヲ證セ

$\left(a^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{p \times \frac{1}{p}} = \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{p}$ ナリ

●前問ノ範式ニ由レバ $(4^{2})^{\frac{1}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^{2}$ ナリ然ルニ之レヲ演算スレバ $(16)^{\frac{1}{2}} = (\pm 2)^{2}$ 故ニ $\pm 4 = 4$ トナル是レ則チ不合理ナリ然レバ前問ノ範式ハ不合理ナルヤ

$(4^{2})^{\frac{1}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^{2}$ 即チ $+(4^{2})^{\frac{1}{2}} = +(4^{\frac{1}{2}})^{2}$ ニシテ正量ヲ以テ適當セシメタルモノナリ然レバ演算スルニ複號ヲ用フベキモノニアラズ則チ $+(16)^{\frac{1}{2}} = +(2)^{2}$ 即チ $+4 = +4$ ニシテ範式ハ合理ナルモノナリ

● $x^{-n} = \frac{1}{x^{n}}$ ナルヲ證セ

$x^{-n} \times x^{n} \div x^{n} = x^{-n+n} \div x^{n} = \frac{x^{-n+n}}{x^{n}} = \frac{1}{x^{n}}$

● $\frac{b^{n}}{a^{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ ナルヲ證セ

$\frac{b^{n}}{a^{n}} = b^{n} \times \frac{1}{a^{n}} = b^{n} \times a^{-n} = b^{n} \times (a^{-1})^{n} = (b \times a^{-1})^{n} = \left(b \times \frac{1}{a}\right)^{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

● $x^{\frac{q}{p}}$ ニ如何ナル數ヲ乘スレバ有比數トナルヤ

$x^{\frac{p-q}{p}}$ ヲ乘ズレバ可ナリ何トナレバ $x^{\frac{q}{p}} \times x^{\frac{p-q}{p}} = x^{\frac{q}{p} + \frac{p-q}{p}} = x^{\frac{q+p-q}{p}} = x$ ナレバナリ

● $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ ニ如何ナル因子ヲ乘ズレバ有比ノ量トナルヤ

$a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$ ヲ乘ズレバ有比ノ量トナル何トナレバ $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}})^{2} - (b^{\frac{1}{2}})^{2} = a - b$ ナレバナリ

● $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ ニ如何ナル因子ヲ乗ズレバ有比ノ量トナルヤ
$a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ ヲ乗ズレバ可ナリ何トナレバ $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3$
$=a-b$ ナレバナリ

● $a^{\frac{1}{n}}\pm b^{\frac{1}{n}}$ ニ如何ナル因子ヲ乗スレバ有比ノ量トナルヤ
$(a^{\frac{n-1}{n}}\mp a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}}\cdots\cdots+a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}}\mp b^{\frac{n-1}{n}})$ ヲ乗スレバ得何トナレバ
$(a^{\frac{1}{n}}\pm b^{\frac{1}{n}})(a^{\frac{n-1}{n}}\mp a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}}\cdots\cdots a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}}\mp b^{\frac{n-1}{n}})=(a^{\frac{1}{n}})^n\pm(b^{\frac{1}{n}})^n$
$=a\pm b$ ナレバナリ

● $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ニ如何ナル因子ヲ乗ズレバ有比ノ量トナルヤ
$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{(ab)})$ ヲ乗スレバ可ナリ何トナレバ $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})=\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}\}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}\}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2$
$=a+2\sqrt{(ab)}+b-c=a+b-c+2\sqrt{(ab)}$
又 $(a+b-c)+2\sqrt{(ab)}$ ニ $(a+b-c)-2\sqrt{(ab)}$ ヲ乗ズレバ $(a+b-c)^2-\{2\sqrt{(ab)}\}^2=(a+b-c)^2$
$-4ab$ トナルガ故ナリ

● 二個ノ等狀無究平方根數ノ相乘積ハ有比量ナリ
二個ノ等狀無究平方根數ヲ $a\sqrt{x}$ 及ビ $b\sqrt{x}$ トスレバ $a\sqrt{x}\times b\sqrt{x}=ab(\sqrt{x})^2=abx$ ナリ

● 二個ノ等狀無究某根數ノ除商ハ有比量ナリ

二個ノ等狀無究某根數ヲ $a\sqrt[n]{x}$ 及ビ $b\sqrt[n]{x}$ トスレバ $a\sqrt[n]{x}\div b\sqrt[n]{x}=\frac{a\sqrt[n]{x}}{b\sqrt[n]{x}}=\frac{a}{b}$ ナリ

● $\sqrt{a}=p+q\sqrt{b}$ ナル式ハ合理ナルヤ不合理ナルヤ
不合理ナリ何トナレバ $\sqrt{a}=p+q\sqrt{b}$ ニ於テ兩邊ヲ自乘スレバ $a=(p+q\sqrt{b})^2$ 則チ
$a=p^2+2pq\sqrt{b}+q^2b$ 則チ $a-p^2-q^2b=2pq\sqrt{b}$ トナリ前邊ハ常數ニシテ後邊ハ無究根數
ナリ然ルニ常數ト無究數ト適當スベキ理ナシ故ニ本式ハ不合理ナルコト明カナリ

● $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$ ニ於テ a b x y ハ有比量ニシテ $\sqrt{b}$ $\sqrt{y}$ ハ無究根數ナレバ $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}$
$=x-\sqrt{y}$ ハ成立スルコトヲ証セ
$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$ 兩邊ヲ三乘スレバ $a+\sqrt{b}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}$ 即チ
$a+\sqrt{b}=x^3+3xy+(3x^2+y)\sqrt{y}$ 故ニ $a=x^3+3xy$, $\sqrt{b}=(3x^2+y)\sqrt{y}$ ナリ
兩式相減ズレバ $a-\sqrt{b}=x^3+3xy-3x^2\sqrt{y}-y\sqrt{y}$ 兩邊ヲ立方ニ開ケバ
$\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$ ナリ

● $\sqrt{\left(\frac{4}{75}\right)}=\frac{2}{15}\sqrt{3}$ ナルコトヲ證セ
$\sqrt{\left(\frac{4}{75}\right)}=\sqrt{\left(\frac{4\times3}{75\times3}\right)}=\sqrt{\left(\frac{4}{225}\times3\right)}=\sqrt{\left(\frac{4}{225}\right)}\sqrt{3}=\frac{2}{15}\sqrt{3}$

● $\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}=\sqrt{\left\{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}\pm\sqrt{\left\{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}$ ナルヲ證セ

今 $\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ ト假定スレバ $a\pm\sqrt{b}=x\pm2\sqrt{(xy)}+y$ ナリ故ニ $a=x+y$……(二)
$\pm\sqrt{b}=\pm2\sqrt{(xy)}$……(三)ナラザルヲ得ズ (二) ヨリ (三) ヲ減ズレバ $a\mp\sqrt{b}=x\mp2\sqrt{(xy)}+y$
トナル平方ニ開ケバ $\sqrt{(a\mp\sqrt{b})}=\sqrt{x}\mp\sqrt{y}$……(四)トナル (一) ト (四) ヲ相乘ズレバ
$\sqrt{(a^2-b)}=x-y$……(五)トナル (二) ニ (五) ヲ加減スレバ $a+\sqrt{(a^2-b)}=2x$……(六)
$a-\sqrt{(a^2-b)}=2y$……(七)トナル (六) 及 (七) ヨリ $x=\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}$ $y=\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}$ ヲ得故ニ

$$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=\sqrt{\left\{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}\pm\sqrt{\left\{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}$$

即チ

$$\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}=\sqrt{\left\{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}\pm\sqrt{\left\{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}$$

●前題ヲ應用シテ $69+28\sqrt{5}$ ヲ平方ニ開ケ

$28\sqrt{5}=\sqrt{(3920)}$ ナルガ故ニ $69=a$ 及 $3920=b$ トスレバ

$x=\frac{69+\sqrt{(69^2-3920)}}{2}=49$, $y=\frac{69-\sqrt{(69^2-3920)}}{2}=20$ トナル故ニ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7+2\sqrt{5}$

故ニ $\sqrt{(69+28\sqrt{5})}=7+2\sqrt{5}$

●虚量ハ有値ナル實量ト適當スル場合アルヤ

決シテ有ルヿナシ其故ハ實量ハ $+\infty$, $+1$, 0, -1, $-\infty$ ノ連數中ニアリ虚量ハ $\infty\sqrt{(-1)}$, $\sqrt{(-1)}$, 0, $-\sqrt{(-1)}$, $-\infty\sqrt{(-1)}$ ナル連數中ニアリ故ニ $0\sqrt{(-1)}=0$ ナル場合ノ外適當スルヿナシ

●$a=b\sqrt{(-1)}$ ナル場合アルヤ

是レハ $a=0$ $b=0$ ナル片ノ場合アルノミ何トナレバ $a=b\sqrt{(-1)}$ ニ於テ $b\sqrt{(-1)}$ ガ實數トナル場合ハ b ガ零ナル片ノミナリ b ガ零ナレバ $b\sqrt{(-1)}=0$ ナリ然レバ a モ亦零ナラザルヲ得ザレバナリ

●$a+b\sqrt{(-x)}=p+q\sqrt{(-x)}$ ハ $a=p$, $b=q$ ナル片ノ外ナルヿナシ

$a+b\sqrt{(-x)}=p+q\sqrt{(-x)}$ ヲ轉項スレバ $a-p=q\sqrt{(-x)}-b\sqrt{(-x)}$ ナリ故ニ $a-p=0$
$q\sqrt{(-x)}-b\sqrt{(-x)}=0$ 故ニ $a=p$, $q\sqrt{(-x)}=b\sqrt{(-x)}$ 即チ $q=b$

●二個ノ虚量ノ和モ差モ虚量ナリ

今二個ノ虚量ヲ $\sqrt{(-a)}$ $\sqrt{(-b)}$ トスレバ $\sqrt{(-a)}+\sqrt{(-b)}=\sqrt{a}\sqrt{(-1)}+\sqrt{b}\sqrt{(-1)}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{(-1)}$ ニシテ $\sqrt{(a)}-\sqrt{(-b)}=\sqrt{a}\sqrt{(-1)}-\sqrt{b}\sqrt{(-1)}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{(-1)}$ ナリ

●二個ノ虚量ノ相乘積ハ實量ニシテ積ノ正負ヲ定ムルノ法ハ常數ノ乘法ト相反ス

今二個ノ虚量ヲ $\sqrt{(-a)}$ 及ビ $\sqrt{(-b)}$ トスレバ $\sqrt{(-a)}\times\sqrt{(-b)}=\sqrt{a}\sqrt{(-1)}\times\sqrt{b}\sqrt{(-1)}$
$=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\{\sqrt{(-1)}\}^2=\sqrt{(ab)}\times\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{(ab)}\times(-1)=-\sqrt{(ab)}$……(一)ナリ

又二個ノ虚量ヲ $\sqrt{(-a)}$ 及ビ $-\sqrt{(-b)}$ トスレバ $\sqrt{(-a)}\times\{-\sqrt{(-b)}\}=\sqrt{a}\sqrt{(-1)}\{-\sqrt{b}\sqrt{(-1)}\}$

$=\sqrt{a}\times(-\sqrt{b})\times\sqrt{(-1)^2}=-\sqrt{(ab)}(-1)=+\sqrt{(ab)}$……(二)ナリ則チ(一)ハ同号相乗ニシテ其積ハ負トナリ(二)ハ異号相乗ニシテ其積ハ正トナル故ニ常數ノ乗法ト相反スルヲ知ル

●二個ノ虚量ノ除商ハ實數ニシテ積ノ正負ヲ定ムルノ法ハ常數ノ除法ニ同シ

今二個ノ虚量ヲ$\sqrt{(-a)}, \sqrt{(-b)}$トスレバ$\frac{\sqrt{(-a)}}{\sqrt{(-b)}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{(-1)}}{\sqrt{b}\sqrt{(-1)}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$(一)ニシテ又二個ノ虚量ヲ$\sqrt{(-a)}, -\sqrt{(-b)}$トスレバ$\frac{\sqrt{(-a)}}{-\sqrt{(-b)}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{(-1)}}{-\sqrt{b}\sqrt{(-1)}}=\frac{\sqrt{a}}{-\sqrt{b}}$

$=-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$……(二)トナル則チ(一)ハ實法同号ニシテ商正ヲ得(二)ハ實法異号ニシテ商負ヲ得故ニ常數ノ除法ト相同シ

●二個ノ相属混量ノ和或ハ相乗積ハ實量ナリ

今二個ノ相属混量ヲ$a+\sqrt{(-b)}, a-\sqrt{(-b)}$トセバ其和$\{a+\sqrt{(-b)}\}+\{a-\sqrt{(-b)}\}$
$=a+\sqrt{(-b)}+a-\sqrt{(-b)}=2a$ニシテ實量トナル又其積$\{a+\sqrt{(-b)}\}\{a-\sqrt{(-b)}\}$
$=a^2-\{\sqrt{(-b)}\}^2=a^2+b$トナリ是レ亦實量トナルナリ

●二個ノ混量ノ和ト積ガ各實量トナレバ此二量ハ實量ニアラザレバ相属量ナリ

今相属量ニアラザル両混量ヲ$a+b\sqrt{(-1)}, c+d\sqrt{(-1)}$トスレバ
$\{a+b\sqrt{(-1)}\}+\{c+d\sqrt{(-1)}\}=S$……(一)$\{a+b\sqrt{(-1)}\}\{c+d\sqrt{(-1)}\}=P$……(二)即チ

$a+b\sqrt{(-1)}+c+d\sqrt{(-1)}=S$……(一)′ $ac+ad\sqrt{(-1)}+cb\sqrt{(-1)}-bd=P$……(二)′
(一)′ヨリ$a+c=S$……(三)$b+d=0$……(四)(二)′ヨリ$ac-bd=P$……(五)$ad+bc=0$……(六)ヲ得四ヨリ$b=-d$, ヲ以テ(六)ニ代入スレバ$ad-cd=0$故ニ$a=c$トナル故ニ原両量ハ$a+b\sqrt{(-1)}$……(七)$a-b\sqrt{(-1)}$……(八)トナリ(七)ト(八)トハ相属量ナルヲ證セリ

●$\frac{\sqrt{(-a)}}{\sqrt{(b)}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{(-1)}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{(-1)}$ニシテ$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(-b)}}=\sqrt{\frac{a}{-b}}=\sqrt{\frac{-a}{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{(-1)}$ナリ

然レバ$\frac{\sqrt{(-a)}}{\sqrt{(b)}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(-b)}}$ナルカ

然ラズ何トナレバ前ノ解法ハ正解ナレドモ後ノ解法ハ虚量ヲ實量ト視做シテ解スルヲ以テ誤レバナリ

今此正解左ノ如シ$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(-b)}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{(-1)}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{(-1)}}{\sqrt{b}\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{(-1)}}{\sqrt{b}\{\sqrt{(-1)}\}^2}=\frac{\sqrt{a}}{-\sqrt{b}}\sqrt{(-1)}$

$=-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\sqrt{(-1)}$トナルナリ

●比ノ大小ハ如何ニシテ定ムルヤ

比ノ値ヲ顕ワス所ノ分數式ヲ同分母ニ化シ其分子ノ大ナルモノヲ以テ分子ノ小ナルモノヨリ大トナスナリ何トナレバ分數ハ分母ノ倒數ト分子トノ相乗積ナルヲ以テ同シ分母ノ倒數ニ乗スル所ノ因子ガ大ナレバ其値モ亦大ナリ

●$a:b$ ナル比ニ於テ b ガ a ヨリ大ナレバ $(a+x):(b+x)$ ハ $a:b$ ヨリ大ニシテ b カ a ヨリ小ナレバ $(a+x):(b+x)$ ハ $a:b$ ヨリ小ナリト云フ其理如何

今此両比ヲ分數式トナシ同分母ニ化スレハ $\frac{b(a+x)}{b(b+x)}, \frac{a(b+x)}{b(b+x)}$ トナル即チ $\frac{ab+bx}{b(b+x)}, \frac{ab+ax}{b(b+x)}$ トナル是ニ於テ両式ノ分子ノ大小ヲ定ムルニ ab ハ両式ニ通スルヲ以テ bx ト ax ノ大小ヲ定ムレバヨシ今 b ガ a ヨリ大ナレバ bx ハ ax ヨリ大ナリ是レニ由テ $\frac{ab+bx}{b(b+x)}$ ハ $\frac{ab+ax}{b(b+x)}$ ヨリ大ナリ即チ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ大ナリ 同理ニヨリテ b ガ a ヨリ小ナレバ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ小ナル了明カナリ

●$a:b$ ニ於テ b ガ a ヨリ大ナレバ $(a-x):(b-x)$ ハ $a:b$ ヨリ小ニシテ b ガ a ヨリ小ナレバ $(a-x):(b-x)$ ハ $a:b$ ヨリ大ナリト云フ此理如何

$\frac{a-x}{b-x}$ 及ビ $\frac{a}{b}$ ナル分數ヲ同分母ニ化スレバ $\frac{b(a-x)}{b(b-x)}$ 及ビ $\frac{a(b-x)}{b(b-x)}$ 即チ $\frac{ab-bx}{b(b-x)}$ 及ビ $\frac{ab-ax}{b(b-x)}$ トナル今此分子ノ大小ヲ定ムルニハ bx ト ax トノ大小ヲ定ムルニアリ故ニ b ガ a ヨリ大ナレバ $(ab-bx)$ ハ $(ab-ax)$ ヨリ小ニシテ b ガ a ヨリ小ナレバ $(ab-bx)$ ハ $(ab-ax)$ ヨリ大ナリ故ニ題言ノ眞ナルヲ知ルナリ

●$\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}$ ノ三比ガ同値ナレバ $\sqrt[n]{\left\{\frac{pA^n+qC^n+rE^n}{pB^n+qD^n+rF^n}\right\}}=\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$ ナル了ヲ證明セヨ

今 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=x$ トスレバ $Bx=A$……(一) $Dx=C$……(二) $Fx=E$……(三) ナリ故ニ

$p(Bx)^n=pA^n$……(一)′ $q(Dx)^n=qC^n$……(二)′ $r(Fx)^n=rE^n$……(三)′ 此三邊々相加フレバ

$pB^nx^n+qD^nx^n+rF^nx^n=pA^n+qC^n+rE^n$ 即チ

$x^n(pB^n+qD^n+rF^n)=pA^n+qC^n+rE^n$……(四)トナル故ニ

$x^n=\frac{pA^n+qC^n+rE^n}{pB^n+qD^n+rF^n}$ ナリ両邊ヲ n 乘根ニ開ケバ $x=\sqrt[n]{\left\{\frac{pA^n+qC^n+rE^n}{pB^n+qD^n+rF^n}\right\}}$ トナル故ニ

$\sqrt[n]{\left\{\frac{pA^n+qC^n+rE^n}{pB^n+qD^n+rF^n}\right\}}=\frac{A}{B}=\frac{C}{D}+\frac{E}{F}$ ナル了明カナリ此理ヲ推ストキハ

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\frac{G}{H}=\frac{K}{L}\cdots\cdots=\left\{\frac{mA^n+nC^n+pE^n+qG^n+rK^n\cdots\cdots}{mB^n+nD^n+pF^n+qH^n+rL^n\cdots\cdots}\right\}^{\frac{1}{n}}$ ナリ

●$\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}$ ノ三比皆等値ナレバ $\frac{pA+qC+rE}{pB+qD+rF}$ ハ原各比ニ等シ其理如何

前題ノ $\sqrt[n]{\left\{\frac{pA^n+qC^n+rE^n}{pB^n+qD^n+rF^n}\right\}}$ ニ於テ n ハ任意ノ數ナルヲ以テ n ヲ一個トスレバ本題ハ容易ニ證シ得ヘシ

● $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}$ ノ三比皆同値ナレバ $\frac{A+C+E}{B+D+F}=\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$ ナリ此理如何

前題ノ $\frac{pA+qC+rE}{pB+qD+rE}$ ニ於テ p q r ハ任意ノ數ナリ故ニ $p=q=r=1$ トナス片ハ $\frac{A+C+E}{B+D+F}=\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$ ……(二) ナルヲ證シ得ヘシ

● 比例式ノ内外率ハ轉置スルモ尙ホ比例スヘシ其理如何

比例式ヲ $a:b::c:d$ トスル片ハ $b:a::d:c$ ナリ何トナレバ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナル両邊ヲ以テ1個ヲ除スレバ $1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$ 即チ $1\times\frac{b}{a}=1\times\frac{d}{c}$ 即チ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ トナル故ニ $b:a::d:c$ ナルヲ証セリ

● 比例式ノ内率或ハ外率ハ互ニ對換スルモ尙ホ比例ス其理如何

比例式ヲ $a:b::c:d$ トスレバ $a:c::b:d$ 或ハ $d:b::c:a$ ナリ何トナレバ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ両邊ヘ各 $\frac{b}{c}$ ヲ乗スレバ $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}$ 即チ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ トナル故ニ $a:c::b:d$ 又 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ両邊ニ各 $\frac{d}{a}$ ヲ乗スレバ $\frac{a}{b}\times\frac{d}{a}=\frac{c}{d}\times\frac{d}{a}$ 即チ $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ 故ニ $d:b=c:a$ ナリ

● 比例式ノ両内率ノ相乗積ハ両外率ノ相乗積ニ等シ其理如何

比例式ヲ $a:b=c:d$ トセバ $ad=bc$ ナリ何トナレバ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ両邊ヘ bd ヲ乗ズレバ $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$ 即チ $ad=bc$ ナリ

● $a:b=c:d$ ナレバ $a=\frac{bc}{d}$, $b=\frac{ad}{c}$, $c=\frac{ad}{b}$, $d=\frac{bc}{a}$ ナリ其理如何

前題ノ方程式 $ad=bc$ ヨリ容易ニ發見スルヿヲ得ルナリ

● 両相乗積相等シケレバ此各因子ハ比例ヲナスナリ其理如何

$ad=bc$ ナレバ $a:b=c:d$, $b:a=d:c$ ナリ何トナレバ $ad=bc$ ノ両邊ヲ bd ヲ以テ除スレバ $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ 即チ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ トナル故ニ $a:b=c:d$ ナリ又 ac ヲ以テ除スレバ $\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac}$ 即チ $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ トナル故ニ $d:c=b:a$ 即チ $b:a=d:c$ ナリ

● $a:b=c:d$ ナレバ $(a+b):(c+d)=a:c$ 或ハ $(a+b):(c+d)=b:d$ ナリ此證ヲ問フ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ両邊ヘ一個ヲ加フレバ $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ 即チ $\frac{(a+b)}{b}=\frac{(c+d)}{d}$ トナル故ニ $(a+b):b=(c+d):d$ トナル内率ヲ對換スレバ $(a+b):(c+d)=b:d$

同理ニテ $(a+b):(c+d)=a:c$ ナリ

● $a:b=c:d$ ナレバ $(a-b):(c-d)=b:d=a:c$ ナルヲ證セヨ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ両邊ヨリ一個ヲ減ズレバ $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ 即チ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ トナル故ニ $(a-b):b=(c-d):d$ トナル內率ヲ對換スレバ $(a-b):(c-d)=b:d$ トナル同理ニ由テ $(a-b):(c-d)=a:c$ ナルヿモ證シ得ベシ

● $a:b=c:d$ ナレハ $(a+b):(c+d)=(a-b):(c-d)$ 或ハ $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$ ナルヲ證セヨ

本題ハ前ニ題ヨリ容易ニ證スルヿヲ得ルナリ

● $a:b=c:d$, $p:q=r:s$ ナレバ $ap:bq=cr:ds$ ナリ此證如何

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$……(一) $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$……(二) (一)(二)ヲ相乘スレバ $\frac{a}{b}\times\frac{p}{q}=\frac{c}{d}\times\frac{r}{s}$ 即チ $\frac{ap}{bq}=\frac{cr}{ds}$ トナル故ニ $ap:bq=cr:ds$ ナルヿ明カナリ

● $a:b=c:d$ 及ビ $A:B=C:D$ ナレバ $\frac{a}{A}:\frac{b}{B}=\frac{c}{C}:\frac{d}{D}$ ナルヲ證セ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$……(一) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$……(二) (二)ヲ以テ(一)ヲ除スレバ $\frac{a}{b}\times\frac{B}{A}=\frac{c}{d}\times\frac{D}{C}$ 即チ $\frac{a}{A}\times\frac{B}{b}=\frac{c}{C}\times\frac{D}{d}$ 即チ $\frac{\frac{a}{A}}{\frac{b}{B}}=\frac{\frac{c}{C}}{\frac{d}{D}}$ トナル故ニ $\frac{a}{A}:\frac{b}{B}=\frac{c}{C}:\frac{d}{D}$ ナルヲ證セリ

● $a:b=c:d$ ナレハ $ma:mb=nc:nd$ ナルヲ證セ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ニ於テ $\frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}$ トナスヿヲ得故ニ $ma:mb=nc:nd$ ナルヲ證セリ

● $a:b=c:d$ ナレバ $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{c}{n}:\frac{d}{n}$ ナルヿヲ證セ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ニ於テ $\frac{a\div m}{b\div m}=\frac{c\div n}{d\div n}$ 則チ $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}=\frac{\frac{c}{n}}{\frac{d}{n}}$ トスルヿヲ得故ニ $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{c}{n}:\frac{d}{n}$ ナルヿ明カナリ

● $a:b=c:d$ ナレバ $a^m:b^m=c^m:d^m$ ナリ此理如何

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ両邊ヲ m 方乘スレバ $\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$ ナリ故ニ $a^m:b^m=c^m:d^m$ ナルヤ明カナリ

● $a:b=c:d$ ナレバ $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$ ナリ此理如何

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ兩邊ヲ m 方根ニ開ケバ $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\sqrt[m]{\left(\frac{c}{d}\right)}$ 即チ $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$ トナル故ニ
$\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$ ナルヿ明カナリ

● $a:b=c:d$, $A:B=C:D$ ナレバ $(a+A):(b+B)=(c+C):(d+D)$ ナル場合ヲ問フ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=x$……(一) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=y$……(二) $\frac{a+A}{b+B}=\frac{c+C}{d+D}$……(三) (三)ヨリ

$(a+A)(d+D)=(b+B)(c+C)$ 即チ $ad+aD+Ad+AD=bc+bC+Bc+BC$……(四)

然ルニ(一)(二)ニ由レバ $ad=bc$, $AD=BC$ 故ニ(四)ハ變シテ $aD+Ad=bC+Bc$……(五)

トナル之レヲ變ズレバ $aD\times\frac{b}{b}+Ad\times\frac{B}{B}=bC\times\frac{D}{D}+BC\times\frac{d}{d}$ 即チ $bD\times\frac{a}{b}+Bd\times\frac{A}{B}$
$=bD\times\frac{C}{D}+Bd\times\frac{c}{d}$ 即チ $bDx+Bdy=bDy+Bdx$ トナル轉項スレバ $bDx-bDy$
$=Bdx-Bdy$ 即チ $bD(x-y)=Bd(x-y)$ トナル $bD(x-y)-Bd(x-y)=0$

即チ $bD-Bd=0$ トナル故ニ(三)ノ成立ツ場合ハ $bD=Bd$, $x=y$ ノ成立ツ場合則チ二件ノ比例ノ比ガ等シキ場合カ $b:B=d:D$ 此ノ如キ場合ニ限ル

● 三量若シ連比ヲナストキハ第一量ト第三量ノ比ハ第一量ト第二量ノ二乘比或ハ第二量ト第三量ノ二乘比ナリ其理如何

設令バ $a:b=b:c$ ナレバ $a:c=a^2:b^2=b^2:c^2$ ナリ今 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ノ兩邊ニ $\frac{a}{b}$ ヲ乘ズレバ
$\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\times\frac{a}{b}$ 則チ $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{c}$ トナル故ニ $a^2:b^2=a:c$ ナリ

又前方程式ノ兩邊ニ $\frac{b}{c}$ ヲ乘ズレバ $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}$ 即チ $\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}$ トナル故ニ
$a:c=b^2:c^2$ トナルガ故ナリ

● $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}$ ナル三比アリ其内 $\frac{A}{B}$ 最大ニシテ $\frac{E}{F}$ 最小ナレバ $\frac{A+C+E}{B+D+F}$ ハ $\frac{A}{B}$ ヨリ小ニシテ $\frac{E}{F}$ ヨリ大ナリ此理如何

$\frac{A}{B}=x$ トスレバ A ハ Bx ニ等シク C ハ Dx ヨリ小ニシテ E モ亦 Fx ヨリ小ナリ故ニ
$(A+C+E)$ ハ $(Bx+Dx+Fx)$ 即チ $x(B+D+F)$ ヨリ小ナリ故ニ $\frac{A+C+E}{B+D+F}$ ハ x ヨリ小ナリ
之レニ由テ $\frac{A+C+E}{B+D+F}$ ハ $\frac{A}{B}$ ヨリ小ナルヿ明カナリ又 $\frac{E}{F}=y$ トスレバ E ハ Fy ニ等シク C ハ
Dy ヨリ大ニシテ A ハ By ヨリ大ナリ故ニ $(A+C+E)$ ハ $(By+Dy+Fy)$ 即チ $y(B+D+F)$
ヨリ大ナリ故ニ $\frac{A+C+E}{B+D+F}$ ハ y ヨリ大ナリ是ニ由テ $\frac{A+C+E}{B+D+E}$ ハ $\frac{E}{F}$ ヨリ大ナルヿ明カ

ナリ

● $a:b=c:d$ ナレバ $a^2+ab:c^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd$ ナリ此證ヲ問フ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=x$ トスレバ $a=bx$……(一) $c=dx$……(二) 各自乘スレバ $a^2=b^2x^2$……(三)

$c^2=d^2x^2$……(四) 又(一)ニ b ヲ乘シ(二)ニ d ヲ乘ズレバ $ab=b^2x$,……(五) $cd=d^2x$……(六)

(三)ニ(五)ヲ加ヘ(四)ニ(六)ヲ加フレバ $a^2+ab=b^2x^2+b^2x$……(七) $c^2+cd=d^2x^2+d^2x$……(八)

(八)ヲ以テ(七)ヲ除スレバ $\frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{b^2x^2+b^2x}{d^2x^2+d^2x}=\frac{b^2(x^2+x)}{d^2(x^2+x)}=\frac{b^2}{d^2}$……(九)

又 $b^2=b^2$……(十) $d^2=d^2$……(十一) (十)ヨリ(三)ノ二倍ヲ減ジ(十一)ヨリ(四)ノ二倍ヲ減ズ

レバ $b^2-2ab=b^2-2b^2x$……(十二) $d^2-2cd=d^2-2d^2x$……(十三) (十三)ヲ以テ(十二)ヲ除ス

レバ $\frac{b^2-2ab}{d^2-2cd}=\frac{b^2-2b^2x}{d^2-2d^2x}=\frac{b^2(1-2x)}{d^2(1-2x)}=\frac{b^2}{d^2}$……(十四) (九)ト(十四)トヲ比較スレバ

$\frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{b^2-2ab}{d^2-2cd}$ 即チ題言ヲ證セリ

● $A:B=C:D=E:F$ ナレバ $A^3+C^3+E^3:B^3+D^3+F^3=ACE:BDF$ ナリト云フ其理如何

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=x$ トスレバ $A=Bx$……(一) $C=Dx$……(二) $E=Fx$……(三)

(一)(二)(三)ヲ三乘スレバ $A^3=B^3x^3$……(四) $C^3=D^3x^3$……(五) $E^3=F^3x^3$……(六)トナル

(四)(五)(六)ヲ相加フレバ $A^3+C^3+E^3=(B^3+D^3+F^3)x^3$ 故ニ

$x^3=\frac{A^3+C^3+E^3}{B^3+D^3+F^3}$……(七) 又(一)(二)(三)ノ邊邊連乘スレバ $ACE=BDFx^3$ トナル故ニ

$x^3=\frac{ACE}{BDF}$……(八) (七)(八)ヲ比較スレバ $\frac{A^3+C^3+E^3}{B^3+D^3+F^3}=\frac{ACE}{BDF}$ 故ニ

$A^3+C^3+E^3:B^3+D^3+F^3=ACE:BDF$ ナルヿヲ證セリ

● $A:B=C:D=E:F=G:H$ ナレバ $A^4+C^4+E^4+G^4:B^4+D^4+F^4+H^4=ACEG:BDFH$

ナルヲ證セ

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\frac{G}{H}=x$ トスレバ $A=Bx$……(一) $C=Dx$……(二) $E=Fx$……(三)

$G=Hx$…(四) 各ヲ四乘スレバ $A^4=B^4x^4$, $C^4=D^4x^4$…(六) $E^4=F^4x^4$…(七) $G^4=H^4x^4$…(八)

(五)(六)(七)(八)ノ邊邊ヲ加フレバ $A^4+C^4+E^4+G^4=(B^4+D^4+F^4+H^4)x^4$ 故ニ

$x^4=\frac{A^4+C^4+E^4+G^4}{B^4+D^4+F^4+H^4}$……(九) 又(一)(二)(三)(四)ノ邊邊ヲ連乘スレバ $ACEG=BDFHx^4$

故ニ $x^4=\frac{ACEG}{BDFH}$……(十) (九)(十)ヲ比較スレバ $\frac{A^4+C^4+E^4+G^4}{B^4+D^4+F^4+H^4}=\frac{ACED}{BDFH}$ 即チ

$A^4+C^4+E^4+G^4:B^4+D^4+F^4+H^4=ACEG:BDFH$ ナルヲ證セリ

● $A\propto B$ ニシテ $B\propto C$ ナレバ $A\propto C$ ナリト云フ其理如何

$A=mB,\ B=nC$ ナリ故ニ $A=mnC$ ナリ然ルニ m 及ビ n ハ常數ナルヲ以テ mn モ亦常數ナリ故ニ $A\propto C$ ナルヲ證セリ

● $A\propto B$ ニシテ $C\propto D$ ナレバ $AC\propto BD$ ナリ其理如何

$A=mB$……(一) $C=nD$……(二) (一)(二)ヲ相乘スレバ $AC=mnBC$ 故ニ $AC\propto BD$ ナルヲ知ル

● $A\propto C$ ニシテ $B\propto C$ ナレバ $(A\pm B)\propto C$ ナリ此理如何

$A=mC$……(一) $B=nC$……(二) (一)ニ(二)ヲ加減スレバ $A\pm B=mC\pm nC$ 即チ $(A\pm B)=(m\pm n)C$ 故ニ $(A\pm B)\propto C$ ナルヲ知ル

● $A\propto C$ ニシテ $B\propto C$ ナレバ $\sqrt{AB}\propto C$ ナリ此理如何

前問ノ(一)(二)ヲ相乘スレバ $AB=mnC^2$ ナリ兩邊ヲ平方ニ開ケバ $\sqrt{AB}=\sqrt{(mn)}C$ ナリ故ニ $\sqrt{AB}\propto C$ ナルヲ知ル

● $A\propto B$ ナレバ $Ax\propto Bx$ ナリ此理如何

$A=mB$ 兩邊ヘ x ヲ乘ズレバ $Ax=mBx$ ナリ故ニ $Ax\propto Bx$ ナルコト明カナリ

● $a\propto bc$ ナレバ $b\propto \frac{a}{c}$, $c\propto \frac{a}{b}$ ナリ此理如何

$a=mbc$ ナリ故ニ $b=\frac{a}{mc}$ 即チ $b=\frac{1}{m}\cdot\frac{a}{c}$ 故ニ $b\propto\frac{a}{c}$ ナリ

又 $c=\frac{a}{mb}$ 即チ $c=\frac{1}{m}\cdot\frac{a}{b}$ ナリ故ニ $c\propto\frac{a}{b}$ ナルヲ證セリ

● $a\propto b$ ナレバ $a^n\propto b^n$ ナリ此證ヲ問フ

$a=mb$ ナリ兩邊ヲ n 乘スレバ $a^n=m^nb^n$ ナリ故ニ $a^n\propto b^n$ ナルヲ知ル

● $a\propto b$ ナレバ $\sqrt[n]{a}\propto\sqrt[n]{b}$ ナリ此證ヲ問フ

$a=mb$ ナリ兩邊ヲ n 乘根ニ開ケバ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{m}\sqrt[n]{b}$ ナリ故ニ $\sqrt[n]{a}\propto\sqrt[n]{b}$ ナルヲ知ル

● C ハ A B ノ因變數ニシテ亦 A 若シクバ B ノミニ從フテ因變シ而シテ B 常數ナル片 $C\propto A$ 又 A 常數ナル片 $C\propto B$ ナラバ A B ノ同時ニ變スル片ハ $C\propto AB$ ナリト云フ其理如何

$\frac{C}{A}=\frac{c}{a}$……(一) トスレバ A ノミ變ズル片 B ハ常數ナルヲ以テ $\frac{c}{B}=\frac{c'}{b}$……(二)

(一)ト(二)ヲ相乘スレバ $\frac{C}{A}\times\frac{c}{B}=\frac{c}{a}\times\frac{c'}{b}$ 即チ $\frac{C}{AB}=\frac{c'}{ab}$ トナル AB ヲ乘ズレバ

$C=\frac{ABc'}{ab}$ 即チ $C=\frac{c'}{ab}AB$ ナリ故ニ $C\propto AB$ ナルコト明カナリ

● 一元二次方程式ハ $ax^2+bx+c=0$ ナル形トナスコトヲ得其理如何

二次方程式ハ二乘冪以下ノ變數ヲ含有スルモノナルガ故ニ $Ax^2+3Bx^2+5Cx-7Dx$

$=8E-9H$ 等ノ如キモノナリ今之ヲ轉項シ括レバ $(A+3B)x^2+(5C-7D)x+9F-8E=0$ トナル今 $A+3B=a$, $5C-7D=b$, $9F-8E=c$ トセバ $ax^2+bx+c=0$ 此ノ如クナルナリ而シテ a b c 等ハ整數ナルコアリ分數ナルコアリ正ナルコアリ負ナルコアルト知ルベシ

● $ax^2+bx+c=a(x-R)(x-R')$ ナルコヲ證セヨ

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}=$$

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left[\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)\right]^2\right\}=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}$$

$$=a\left\{x-\left[-\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right]\right\}\left\{x-\left[-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right]\right\}$$ トナル今

$-\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}=R$, $-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}=R'$ トセバ

$ax^2+bx+c=a(x-R)(x-R')$ トナルナリ是故ニ $ax^2+bx+c=0$ ナル式ノ二根ハ

$x=\frac{1}{2a}\{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}$ 及ヒ $x=\frac{1}{2a}\{b+\sqrt{(b^2-4ac)}\}$……(チ) ナリ

● 前題ニ由テ a 増大スレバ x ハ減小シ a 減小スレバ x ハ増大ス其理如何

前題ノ二根ノ因子 $\frac{1}{2a}$ ハ a 大ナレバ其値小トナリ a 小ナレバ其値大トナルガ故ナリ

● 一元二次方程式ハ總テ $x^2+px+q=0$ 此ノ如ク括ルコヲ得其理如何

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ x^2 ノ係數則チ a ヲ以テ除スレバ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ トナル今 $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$ トスレバ $x^2+px+q=0$ トナルナリ

● 一元二次方程式ノ二根ハ總テ $\frac{1}{2}\{-p+\sqrt{(p^2-4q)}\}$ 及ビ $\frac{1}{2}\{-p-\sqrt{(p^2-4q)}\}$ ナリ此理如何

$x^2+px+q=0$ ニ於テ $x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0$ 即チ $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left\{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)\right\}^2=0$

即チ $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{(p^2-4q)^2}}{4}=0$ 即チ $\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)+\frac{\sqrt{(p^2-4q)}}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)-\frac{\sqrt{(p^2-4q)}}{2}\right\}=0$

即チ $\left\{x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{(p^2-4q)}}{2}\right\}\left\{x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{(p^2-4q)}}{2}\right\}=0$ $\left\{x-\left[-\frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}\right]\right\}$

$\left\{x-\left[-\frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}\right]\right\}=0$ トナル故ニ $=x\frac{1}{2}\{-p+\sqrt{(p^2-4q)}\}$ 及ビ

$x=\frac{1}{2}\{-p-\sqrt{(p^2-49)}\}$ ナリ

● 一元二次方程式ハ必ズ二根ヲ有ス然レ圧三根以上ヲ有スルコナシ其理如何

$ax^2+bx+c=a(x-R)(x-R')$ ニ於テ $x=R$, $x=R'$ ノ外本式ヲ0トナスベキモノナキヲ以テナリ

● 一元二次方程式ノ二根ハ倶ニ實量ナルヿアリ二根等シキヿアリ倶ニ虚量ナルヿアルハ何故ナルヤ

$\frac{1}{2}\left\{-p\pm\sqrt{(p^2-4q)}\right\}$ ニ於テ $4q$ 若シ p^2 ヨリ小ナレバ倶ニ實量ニシテ相等シケレバ等根ナリ若シ $4q$ ガ p^2 ヨリ大ナレバ二根倶ニ虚量ナリ何トナレバ $4q$ ガ p^2 ヨリ小ナレバ $\sqrt{(p^2-4q)}$ ハ實量ナルヲ以テ之レヲ $-p$ ニ加減スルモ實量ナリ又 $4q$ 若シ p^2 ニ等シケレバ $\sqrt{(p^2-4q)}$ ハ零ナルヲ以テ $-p$ ニ零ヲ加減スルモ $-p$ ハ増減スルヿナシ故ニ両根倶ニ $-p$ ナリ又 $4q$ 若シ p^2 ヨリ大ナレバ $\sqrt{(p^2-4q)}$ ハ負量ノ平方根則チ虚量ナルヲ以テ $-p$ ニ虚量ヲ加減スルモ尚ホ虚量ナレバナリ

● $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ二根ヲ R 及ビ R' トスレバ $R+R'=-\frac{b}{a}$ ニシテ $RR'=\frac{c}{a}$ ナリト云フ此理如何

$ax^2+bx+c\equiv x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\equiv(x-R)(x-R')\equiv x^2-(R+R')x+RR'$ 故ニ

$R+R'=-\frac{b}{a}$, $RR'=\frac{c}{a}$, 是ニ由テ二次方程式ガ $x^2+px+q=0$ ナレバ $R+R'=-p$ ニシテ $RR'=q$ ナリ

● $ax^2+bx+c=0$ ナル式ニ於テ a b c 實量ナルトキハ一根實量ニシテ一根虚量ナルヿ能ハズ其理如何

$\frac{1}{2a}\left\{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}\right\}$ ニ於テ虚量ヲ得ルハ $\sqrt{(b^2-4ac)}$ ノ虚量ナルトキニ限ル故ニ $-b$ ナル實量ニ虚量ヲ加減スレバ亦虚量ナリ故ニ一根虚量ヲ得レバ他ノ一根モ亦虚量ナラザルヲ得ズ

● $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ a ハ他ノ量ノ平方ニアラザルトキ解中分數ヲサケントス其解法如何

今此式ノ b ガ偶數ニシテ $2b'$ トナスヿヲ得バ $ax^2+2b'x+c=0$ 両邊ヘ a ヲ乗ズレバ $a^2x^2+2b'ax+ac=0$ 即チ $(ax)^2+2b'(ax)+ac=0$ 即チ $(ax)^2+2b'(ax)+(b')^2-(b')^2+ac=0$ 即チ $\{(ax)+b'\}^2-\{(b')^2-ac\}=0$ 即チ $\{(ax)+b')+\sqrt{(b'^2-ac)}\}\{ax+b'-\sqrt{(b'^2-ac)}\}=0$ 即チ $\{ax+b'+\sqrt{(b'^2-ac)}\}\{ax+b'-\sqrt{(b'^2-ac)}\}=0$ トナル故ニ $ax=-b'-\sqrt{(b'^2-ac)}$ 及ビ $ax=-b'+\sqrt{(b'^2-ac)}$ ヲ得故ニ $x=\frac{1}{a}\left\{-b'\pm\sqrt{(b'^2-ac)}\right\}$ ……(ヌ) ヲ得 b 若シ奇數ニシテ $2b'$ ノ如クナラザルトキハ $ax^2+bx+c=0$ ノ両邊ヘ $4a$ ヲ乗ズレバ $4a^2x^2+4abx+4ac=0$ 即チ $(2ax)^2+2b(2ax)+4ac=0$ トナル即チ $(2ax)^2+2b(2ax)+b^2-b^2+4ac=0$ 即チ $(2ax+b)^2-\{\sqrt{(b^2-4ac)}\}^2=0$ 即チ

$\{(2ax+b)+\sqrt{(b^2-4ac)}\}\{(2ax)+b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}=0$ 即チ $\{2ax+b+\sqrt{(b^2-4ac)}\}\{2ax+b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}=0$ トナル故ニ $2ax=-b-\sqrt{(b^2-4ac)}$ 及ビ $2ax=-b+\sqrt{(b^2-4ac)}$ ヲ得故ニ $x=\frac{1}{2a}\{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}\}$ トナル是レ前則チ（チ）ノ公式ニ適合ス故ニ一元二次方程式ヲ解スルハ如何ナル狀勢ナルモ此ノ公式ニ由テ解スレバ出來ザルヿナシ

● $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ ナル三次方程式ニ於テ一根ヲ發見セバ他ノ二根ハ二次方程式解法ニ由テ解スルヿヲ得其理如何

一根 a ヲ發見セバ $x^3+Ax^2+Bx+C=(x-a)(x^2+px+q)=0$ 此ノ如ク括ルヿヲ得而シテ $x^2+px+q=0$ ナル式ノ二根ハ（ヌ）ニ由テ解スルヿヲ得ルナリ又一根 a ヲ發見スルハ C ヲ分割シ其因子ノ正負ヲ反シ本式ノ x ニ代入シ本式ガ零トナレバ此因子ハ本式ノ一根則チ a ナリ（上巻因子分割ノ部ヲ見ヨ）

● $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ ニ於テ二根ヲ發見セバ二次方程式解法ニ由テ解スルヿヲ得其理如何

今二根 a b ヲ發見セリトセバ $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=(x^2+px+a)(x^2+qx+b)$ 或ハ $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=(x-a)(x-b)(x^2+Rx+S)$ 此ノ如ク括ルヿヲ得ルガ故ナリ

● $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ ナル方程式ノ三根ヲ a b c トセバ $a+b+c=\frac{B}{A}$, $ab+bc+ca=\frac{C}{A}$, $abc=\frac{D}{A}$ ナル關係アルヿヲ證セ

$x^3+\frac{B}{A}x^2+\frac{C}{A}x+\frac{D}{A}=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$ トナルガ故ニ $\frac{B}{A}=-(a+b+c)$, $\frac{C}{A}=(ab+bc+ca)$, $\frac{D}{A}=-abc$ ナルヲ知ル

● $ax^2+bxy=c$ 及ビ $a'x^2+b'y^2=c'$ ナル二元二次通同方程式ハ $Av^2+Bv=C$ トナシ v ノ値ヲ發見シ以テ x y ヲ求ムルヿヲ得此作式ノ法ヲ問フ

$ax^2+bxy=c$……（一） $a'x^2+b'y^2=c'$……（二） トシ $x=vy$ トスレバ

$av^2y^2+bvy^2=c$……（三） $a'v^2y^2+b'y^2=c'$……（四） 此（三）（四）ヨリ y^2 ノ値ヲ求ムレバ

$y^2=\frac{c}{av^2+bv}$……（五） $y^2=\frac{c'}{a'v^2+b'}$……（六） （五）（六）ヲ比較スレバ

$\frac{c}{av^2+bv}=\frac{c'}{a'v^2+b'}$ 分母ヲ去レバ $a'cv^2+b'c=ac'v^2+bc'v$ 轉項スレバ

$a'cv^2-ac'v^2+bc'v+b'c=0$ トナル今 $a'c-ac'=A$, $bc'=B$, $b'c=C$ トスレバ

$Av^2+Bv+C=0$ トナルナリ

● 不等式ノ両邊ニ同量ヲ加フレバ其不等号變セズ其理如何

$a>b$ ナリトセバ $a-b>0$ 而シテ $a-b=a-b+c-c=a+c-b-c=(a+c)-(b+c)$ トナル而シテ此結果ハ必ズ正ナリ故ニ $a+c>b+c$ ナルヲ知ル

●不等式ノ両邊ヨリ同量ヲ減ズレバ其不等号變セズ其理如何
$a>b$ トセバ $a-b>0$ 然ルニ $a-b=a-b+c-c=a+c-b-c=(a+c)-(b+c)$ ナリ然ルニ
此結果必ズ正ナリ故ニ $a+c>b+c$ ナルヿ明カナリ

●不等式ノ一項ヲ他邊ニ移セバ正負ヲ變ズ其理如何
不等式ヲ $(a+b)>c$ ナリトセバ前題ニ因テ $a+b-b>c-b$ 即チ $a>c-b$ トナルナリ

●不等式ノ両邊ノ各項ノ正負ヲ變換セバ不等号相反ス其理如何
今不等式ヲ $a>b$ トシ此両邊正量ナレバ a ノ素價ハ b ノ素價ヨリ大ナリ故ニ此二量ノ正負ヲ變換スル片ハ $-a$ $-b$ トナル而シテ負量ハ素價ノ大ナルモノヲ以テ素價ノ小ナルモノヨリ小トス故ニ $-a<-b$ トナリ則チ不等号相反セリ又原式ノ a ハ正量ニシテ b ガ負量ナル場合ニ於テハ b ノ素價ハ a ノ素價ヨリ大ナルカ小ナルカ得テ知ルベカラズ然レ圧此両量ノ正負ヲ變ズレバ $-a$ 及ビ $-(-b)=+b$ ナル故ニ b ノ素價ノ大小ニ拘ラズ $-a<+b$ ナルヿ明カナリ又両量倶ニ負量ナル片ハ a ノ素價ハ b ノ素價ヨリ小ナルベシ故ニ其正負ヲ變ズレバ $-a$ ハ $+a$ トナリ $-b$ ハ $+b$ トナル故ニ $+a<+b$ トナル其不等号ヲ變ズ故ニ題言ノ如シ

●$0>-a$ ナルヲ證セヨ
不等式ノ界說ニ由リ正量ノ差ヲ得ル片ハ被減量ハ減量ヨリ大ナルヲ以テ $0-(-a)=0+a=+a$ トナル故ニ 0 ハ $-a$ ヨリ大ナルヲ知ル

●$a>b$ ニシテ $c>d$ ナル片ハ各量ノ正量負量ニ拘ラズ $a+c>b+d$ ナレ圧 $ac>bd$ ナル能ハザル場合アルハ何故ナルヤ
今原両式ヲ變ズレバ $a-b>0$……(一) $c-d>0$……(二) トナル今両式ヲ加フレバ $a-b+c-d>0$ 即チ $(a+c)-(b+d)>0$ 故ニ $a+c>b+d$……(三) トナル然レ圧 $ac>bd$ ニ於テハ原式ノ左邊各正數ニシテ右邊各負數ナル片ハ此不等号相反スルヿアリ設令バ $a=3,\ b=-5,\ c=4,\ d=-7$ ナル如キ片ハ $3>-5,\ 4>-7$ ナル不等式ノ両邊ヲ互ニ相乘ズレバ $3\times4=12,\ (-5)\times(-7)=35$ トナルガ故ニ $12<35$ 則チ $3\times4>(-5)\times(-7)$ トナル又両式ノ両邊各負量ナル片設令バ $-5>-7,\ -3>-4$ ナル片ハ $(-5)\times(-3)=+15\ (-7)\times(-4)=+28$ トナル故ニ $15<28$ 則チ $(-5)\times(-3)<(-7)\times(-4)$ 此ノ如クナル則チ題言ノ能ハザル場合此ノ如シ

●二量各正量ナレバ其和ハ其中比例數二倍ヨリ大ナリ此證ヲ問フ
設令バ二量ヲ a b トセバ $(a-b)^2$ ハ a b ノ大小ニ拘ハラズ正量ナリ故ニ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=a^2+2ab+b^2-4ab=(a+b)^2-4ab$ ハ正量ナリ故ニ $(a+b)^2>4ab$ ナリ
今両邊ヲ平方ニ開ケバ $a+b>2\sqrt{(ab)}$ ナルヿ明カナリ

●a ハ b ヨリ大ナル片ハ $a^{m+n}+b^{m+n}>a^mb^n+a^nb^m$ ナルヲ證セ
$a^m-b^m>0$……(一) $a^n-b^n>0$……(二) (一)(二)ヲ相乘ズレバ $(a^m-b^m)(a^n-b^n)=0$ 則チ
$a^{m+n}-a^mb^n-a^nb^m+b^{m+n}>0$ 則チ $a^{m+n}+b^{m+n}-a^mb^n-a^nb^m>0$ 則チ $a^{m+n}+b^{m+n}>a^mb^n$

ナαヶ甘ナルヲ知ル

● $\frac{A}{B}>\frac{C}{D}>\frac{E}{F}\cdots\cdots\frac{M}{N}$ ナレバ $\frac{A+C+E\cdots\cdots M}{B+D+F\cdots\cdots N}<\frac{A}{B},>\frac{M}{N}$ ナリ此理如何

$\frac{A}{B}=x$ トスレバ $\frac{C}{D}<x, \frac{E}{F}<x\cdots\cdots\frac{M}{N}<x$ ナリ故ニ $A=Bx, C<Dx,$ $E<Fx\cdots\cdots M<Nx$ 邊々相加フレバ $A+C+E+\cdots\cdots M<Bx+Dx+Fx+\cdots\cdots Nx$ 則チ $A+C+E+\cdots\cdots M<(B+D+F+\cdots\cdots N)x$ 故ニ $\frac{A+C+E+\cdots\cdots M}{B+D+F+\cdots\cdots N}<x$ 故ニ $\frac{A+C+E+\cdots\cdots M}{B+D+F+\cdots\cdots N}<\frac{A}{B}$ 次ニ $\frac{M}{N}=y$ トスレバ $\frac{A}{B}>\frac{C}{D}>\frac{E}{F}\cdots\cdots>y$ 故ニ $A>By, C>Dy, E>Fy\cdots\cdots$ 邊々相加フレバ $A+C+E+\cdots\cdots M>By+Dy+Ey\cdots\cdots Ny$ 則チ $A+C+E\cdots\cdots M>(B+D+F\cdots\cdots N)y$ 故ニ $\frac{A+C+E\cdots\cdots M}{B+D+F\cdots\cdots N}>y$ 故ニ $\frac{U+C+E\cdots\cdots M}{B+D+F\cdots\cdots N}>\frac{M}{N}$

● $7x-3>5x+6$ ニシテ $8x-9<6x+7$ ナレバ整數ナル x ノ値ハ 5 6 7 ノ外ニ出デズト云フ其理如何

$7x-3>5x+6\cdots\cdots(一)$ $8x-9<6x+7\cdots\cdots(二)$ トスレバ (一) ニ由テ $7x-5x>6+3$. 即チ $2x>9$ トナル故ニ $x>4\frac{1}{2}$ 又 (二) ニ由リ $8x-6x<7+9$ 即チ $2x<16$ トナル故ニ $x<8$ トナル是ニ由 x ノ値ハ前者ハ $4\frac{1}{2}$ ヨリ大ニシテ後者ハ 8 ヨリ小ナリ然レバ其間ノ整數ハ 5 6 7 ノ外ニ出デザルヲ知ル

● 不等式ニ方程式ヲ加フルモ減ズルモ不等号變ゼザルハ何故ヤ

不等式ヲ $a>b$ トシ方程式ヲ $c=d$ トスレバ $a-b>0, c=c$ トナスヿヲ得故ニ $a-b+c-c>0$ 即チ $a+c>b+c$ 或ハ $a-c>b-c$ トナル則チ題言ノ如シ

● 方程式ニ不等式ヲ加フレバ不等号變ゼズト雖モ減ズレバ不等号相反ス其理如何

今方程式ヲ $a=a$ トシ不等式ヲ $b>c$ トセバ $b+a-a>c$ 即チ $a+b>a+c$ トナル而シテ此形ハ前方程式ノ邊々ニ不等式ノ邊々相加ヘタルモノニシテ其不等號故ノ如シ則チ題言ノ前者ヲ証セリ次ニ不等式ノ各邊ノ正負ヲ變スレバ $-b<-c$ トナル今此前邊ニ同量ヲ加減セバ $-b+a-a<-c$ 則チ $a-b<a-c$ トナル此形ハ原方程式ヨリ不等式ヲ減シタルモノニシテ其不等號相反セリ則チ題言ノ後者ヲ証シタルモノナリ

● $f(x)$ 若シ數件ノ極大値及ビ極小値ヲ有スルドハ大小極交互ニ起ルベシ其理如何

此ノ如キ函數ハ其値連續シテ漸々大トナリ遂ニ極大値ニ至レバ又漸々小トナリ遂ニ極小値ニ至ル亦再ビ大トナル逐テ此ノ如ク極大トナリ極小トナリ其兩極ノ間ヲ増減スルハ明カナリ

● $f(x)$ 若シ $x=a$, $x=b$ ノ𪜈消滅シ且ツ a 及ビ b ノ間ニ連續シテ變スル𪜈ハ a b ノ間ニ少クモ一ノ極大値或ハ一ノ極小値ヲ有ス其理如何

$f(x)$ ニ於テ $x=a$, $x=b$ ナル𪜈ニ消滅スルガ故ニ此 x ハ a ト b トノ間ヲ漸々大トナリ小トナルガ故ニ必ス $x=a$, $x=b$ ノ間ニ於テ少クモ一ノ極大値或ハ極小値アルヿ明カナリ

● ax^2+bx+c ナル式ニ於テ a 若シ正量ナレバ此式ハ極小値ヲ有シ a 若シ負量ナレバ極大値ヲ有ス其理如何

此式ノ a 若シ正量ナレバ $ax^2+bx+c=c-\frac{b^2}{4a}+ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=c-\frac{b^2}{4a}+a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=c-\frac{b^2}{4a}+a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 此式ノ x 正量負量ニ拘ラズ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ常ニ正ナリ故ニ $c-\frac{b^2}{4a}$ ニ加フレバ x ノ素價漸大シ遂ニ無究大ニ至レバ本式ハ無究大トナリ極大値ヲ有スルヿナシ然レ𪜈 x ノ値 $-\frac{b}{2a}$ ナル𪜈ハ $x+\frac{b}{2a}$ ハ零トナル此時ハ本式ノ極小値ナリ

又 a 若シ負量ナレバ $-ax^2+bx+c=c+\frac{b^2}{4a}-ax^2+bx-\frac{b^2}{4a}=c+\frac{b^2}{4a}-a\left(x^2-\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=c+\frac{b^2}{4a}-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2$ 此式ノ x 正量負量ニ拘ラズ $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ常ニ正量ナリ故ニ x ノ素價漸大スレバ本式ハ漸小スルヿ際限ナカルベシ故ニ遂ニ無究小トナリテ極小値ヲ有スルヿナシ今本式ヲ極大ナラシメンニハ $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2$ ヲ最小ニスルニアリ此最小ナルハ零ナリ故ニ $x=\frac{b}{2a}$ ナル𪜈ハ本式ハ極大値ナリ故ニ a 負量ナレバ極大値ヲ有スルヿ明カナリ

● 一數ヲ二分シテ其両分ノ相乘積ヲ最大ナラシメンニハ一數ヲ二等分スベシ其理如何

今一數ヲ a トシ其一分ヲ x トスレバ他ノ一分ハ $a-x$ ナリ故ニ其両分ノ相乘積ハ $x(a-x)$ 即チ $ax-x^2$ 今之レヲ變スレバ $ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a^2}{4}-ax+x^2\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$ トナル之レヲ最大ナラシメンニハ $\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$ ヲ零ナラシムルニアリ之レヲ零ナラシムルニハ $x=\frac{a}{2}$ トナセバ可ナリ即チ a ヲ二等分スレバ其両分ノ相乘積ハ最大値ヲ得ルヤ明ラケシ

● 一數ヲ三部ニ分チ其三部分ヲ連乘シテ其乘積ヲ最大ナラシメンニハ一數ヲ三等分スヘシト云フ其理如何

今一數ヲaトシ其三分セシ一分ヲxトスレバ其殘リハ$a-x$ナリ今又之レヲy zノ二部ニ分チ其積ヲシテ最大ナラシメンニハ$a-x$ヲ二等分スレバ得（前問）又yヲ一部トシ其殘リ卽チ$a-y$ヲx zノ二部ニ分チ其積ヲ最大ナラシメンニハx zヲ等シクスルニアリ同理ニ由テzヲ一部分トナシ其殘リ$a-z$ヲx yノ二部ニ分チ其積ヲ最大ナラシメンハx yヲ等シクスルニアリ故ニx y zノ三部ヲ等シクスレハ其連乘積ノ最大値ヲ得ルナリ卽チx y z皆ナ$\frac{a}{3}$トナスナリ

●一數ヲ數部ニ分チ其連乘ノ最大値ハ其一數ヲ部數ノ如ク等分スル片ニアリ其理如何

本題ハ前二問ノ理ヲ推シテ知ルヘシ

●等差級數ノ尾項ハ項數ト一個リ差ニ等差ヲ乘シ之レヲ首項ニ加減スレバ得其理如何

等差級數ノ首項ヲa尾項ヲl等差ヲd項數ヲnトスレバ級數ノ形象ハ
a, $(a\pm d)$, $(a\pm 2d)$, $(a\pm 3d)$……ナリ今此形象ヲ覩ルニ第一項ハaニシテ第二項ハaニd一段ヲ加減シ第三項ハaニd二段ヲ加減シ第四項ハaニd三段ヲ加減ス逐テ此ノ如ク一項ヲ增ス每ニd一段ヲ增ス而シテ其段數ハ項數ヨリ一個少シ故ニ第n項ニ至レバ$a\pm(n-1)d$ナルヲ知ル故ニ第n項ノ尾項ヲ得ル公式ハ次ノ如シ

$l=a\pm(n-1)d$……（ル）

●等差級數ノ增級數ノ尾項ハ減級數ノ首項トナリ減級數ノ尾項ハ增級數ノ首項トナル其理如何

增級數ハ首項ヨリ漸次等差ヲ遞加スルモノナルヲ以テ尾項ヨリ漸次前項ヲ得ンニハ等差ヲ遞減スレバ得ヘシ故ニ增級數ノ尾項ハ減級數ノ首項トナルナリ是ニ由テ增級數ト減級數ハ首項ト尾項ガ相反スルモノト知ルヘシ

●等差級數ノ首尾兩項ヨリ等シク隔タリタル兩項ノ和ハ常ニ兩外項ノ和ニ等シ其理如何

今首項ヨリ第p項ヲxトシ尾項ヨリ第p項ヲyトセバ$x=a\pm(p-1)d$……（一）
$y=l\mp(p-1)d$……（二）今（一）（二）ヲ加フレバ$x+y=a\pm(p-1)d+l\mp(p-1)d$ 卽チ
$x+y=a+l$トナル則チ題言ノ如シ

●等差級數ノ總和ハ首尾兩項ノ和ニ項數ヲ乘シ之レヲ折半スレバ得其理如何

今等差級數ノ總和ヲSトシ之レヲ順逆二層ニ排列スレバ

$S=a+(a\pm d)+(a\pm 2d)+(a\pm 3d)+(a\pm 4d)\cdots\cdots l$……（一）

$S=l+(l\mp d)+(l\mp 2d)+(l\mp 3d)+(l\mp 4d)\cdots\cdots a$……（二）（一）ニ（二）ヲ加フ

$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+(a+l)+(a+l)\cdots\cdots(a+l)$……（三）此三式ノ後邊各項$(a+l)$ニシテ其數ハ項數ニ等シ故ニ$2S=n(a+l)$トナル之レヲ折半スレバ

$S=\frac{n}{2}(a+l)$……（ヲ）トナル題言ノ如シ

●等比級數ノ首項ヲa尾項ヲl項數ヲn等比ヲr總數ヲSトセバ$l=ar^{n-1}$, $S=\frac{a(r^{n}-1)}{r-1}$

或ハ $S=\frac{rl-a}{r-1}$ ヲ得其理如何

等比級數ノ象ハ $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3\cdots\cdots ar^{n-1}$ 此各項ノ r ノ指數ヲ見ルニ第二項ハ1第三項ハ2第四項ハ3ニシテ其項數ヨリ1個少キモノナリ故ニ第 n 項ニ至レバ $(n-1)$ ナルコ明カナリ故ニ $l=ar^{n-1}\cdots\cdots$(ワ)ナリ

又 $S=a+ar+ar^2+ar^3\cdots\cdots ar^{n-1}\cdots\cdots$(一) (一)ニ r ヲ乗スレバ

$rS=\quad ar+ar^2+ar^3+ar^4\cdots\cdots ar^{n-1}+ar^n\cdots\cdots$(二) (二)ヨリ(一)ヲ減スレバ

$rS-S=ar^n-a\cdots\cdots$(三) 即チ $S(r-1)=a(r^n-1)$ トナル是ニ由テ

$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots\cdots$(カ) 又(三)ヲ變スレバ $S(r-1)=rl-a$ トナル是ニ由テ

$S=\frac{rl-a}{r-1}\cdots\cdots$(ヨ) トナル則チ題言ノ如シ

●無究級數ノ總和ハ一個ト公比ノ差ヲ以テ首項ヲ除スレバ得其理如何

無究級數ノ等比ハ必ズ一個ヨリ少シ故ニ前問ノ(カ)式ハ變シテ $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ トナル

然ルニ n ハ無究大ナルヲ以テ $r^n=r^\infty=0$ トナル故ニ $S=\frac{a(1-0)}{1-r}=\frac{a}{1-r}\cdots\cdots$(タ)

トナル則チ題言ノ如シ

●諧音級數ノ各項ノ反數ハ等差級數トナルト云フ其理如何

$a,\ b,\ c$ ヲ諧音級數ノ三項トセバ $a:c=a-b:b-c$ ナリ故ニ $a(b-c)=c(a-b)$ 即チ

$ab-ac=ac-bc$ 各項ヲ abc ニテ除スレバ

$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$ トナル即チ題言ノ如シ

●諧音級數ノ両外項ヲ a b トセバ其中項ハ $\frac{2ab}{a+b}$ ナリ其理如何

今中項ヲ x トスレバ $a:b=a-x:x-b$ ナリ故ニ $a(x-b)=b(a-x)$ 即チ

$ax-ab=ab-bx$ 即チ $ax+bx=2ab$ 故ニ $x=\frac{2ab}{a+b}$ トナルナリ

●両數ノ等差中項ト諧音中項ノ相乘積ハ等比中項ノ平方ニ等シ其理如何

今両數ヲ a b トセバ等差等比諧音各中項ハ順次ニ $\frac{a+b}{2},\ \sqrt{ab},\ \frac{2ab}{a+b}$ ナリ今此等差諧音

両中項ヲ相乘スレバ $\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab$ 又等比中項ヲ自乘スレバ $(\sqrt{ab})^2=ab$ トナル故ニ

$\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=\sqrt{(ab)^2}$ ナリ則チ題言ノ如シ

● ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ ナルコヲ証明セヨ

n 個ノ物件〔設令バ a b c d ……〕ノ中第一 (a) ヲ取リ其殘リノ物件 $(n-1)$ 個〔b c d ……〕

ヲ第一ノ右ノ方ニ配スレバ其順列ノ數 $(n-1)$ 個アルヘシ(A)又第二 (b) ヲ取リ其殘リノ物件 $(n-1)$ 個〔$a\ c\ d$ ……〕ヲ第二ノ右ノ方ニ配スレバ其順列ノ數 $(n-1)$ 個アルヘシ (B) 又第三 (c) ヲ取リ其殘リノ物件 $(n-1)$ 個〔$a\ b\ d$ ……〕ヲ第三ノ右ノ方ニ配スレバ其順列ノ數 $(n-1)$ 個アルヘシ (C) 逐テ此ノ如クシテ第一ヨリ第 n ニ至レバ各物件一順ス而シテ其順列ノ數ハ $(n-1)$ 個宛ノ物ガ n 個アルナリ故ニ其總數ハ $n(n-1)$ ナルヘシ故ニ物件 n 個一列ニ二個宛ヲ排列シタル順列ノ總數ハ $n(n-1)$ ナリ

次ニ第一第二〔$a\ b$〕ヲ取リ之レニ殘リノ物件 $(n-2)$ 個〔$c\ d$ ……〕ヲ ab ノ右ノ方ニ配スレバ其順列ノ數 $(n-2)$ 個アルヘシ (E) 又第一第三 $(a\ c)$ ヲ取リ之レニ他ノ物件 $(n-2)$ 個〔$b\ d$ ……〕ヲ配スレバ其順列ノ數 $(n-2)$ 個アルヘシ (F) 次ニ第一第四 $(a\ d)$ ヲ取リ之レニ他ノ $(n-2)$ ヲ配スレバ其順列ノ數 $(n-2)$ 個アルヘシ (G) 逐テ此ノ如ク變化ヲ盡ストキハ其二個宛取ル數ハ前ニ得タル $n(n-1)$ 個アリ故ニ n 個ノ物件ヲ三個宛排列シタル順列ノ數ハ $n(n-1)(n-2)$ ナリ此理ヲ推ストキハ

$_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$, $_nP_5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, ナルヘシ而シテ此各順列數ノ末ノ因子ハ二個宛ノトキハ $(n-1)$ 三個宛ノトキハ $(n-2)$ 四個宛ノトキハ $(n-3)$ 排列ノ數ヨリ一個少キモノヲ n ヨリ減ス故ニ r 個ヲ排列スルトキハ其末ノ因子ハ $n-(r-1)$ $=n-r+1$ ナルヿ明カナリ故ニ $_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\cdots\cdots(V)$ ナルヲ知ル

今 n ヲ4トシ r ヲ2トスルトキハ左ノ如シ

$$n=4\left\{\begin{array}{llll} (A) & \overbrace{ab, & ac, & ad}^{n-1=3} \\ (B) & ba, & bc, & bd \\ (C) & ca, & cb, & cd \\ (D) & da, & db, & dc \end{array}\right.$$

$(A)+(B)+(C)+(D)$
$=4\times3=4\times(4-1)=12$
$=n(n-1)$

是レ四個ノ物件ヲ二個宛排列シタル順列ノ數ナリ

$$n(n-1)=4\times(4-1)=4\times3=12\left\{\begin{array}{lll} (E) & \overbrace{abc, & abd}^{4-2=n-2} \\ (F) & acb, & acd \\ (G) & adb, & adc \\ (H) & bac, & bad \\ (I) & bca, & bcd \\ (J) & bda, & bdc \\ (K) & cab, & cad \\ (L) & cba, & cbd \\ (M) & cda, & cdb \\ (N) & dab, & dac \\ (P) & dba, & dbc \\ (Q) & dca, & dcb \end{array}\right.$$

$(E)+(F)+(G)+(H)+$
$(I)+(J)+(K)+(L)+$
$(M)+(N)+(P)+(Q)=$
$12\times2=$
$4\times3\times2=4\times(4-1)$
$(4-2)=n(n-1)(n-2)$

是レ四個ノ物件ヲ三個宛排列シタル順列ノ數ナリ

● ${}_nP_n=\underline{|n}$ ナルヲ証明セヨ

前問得ル所ノ(ソ)式即チ ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ ニ於テ $r=n$ ナルガ故ニ

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-n+1)=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(1)=\underline{|n}\cdots\cdots(ソ)$$

● n個ノ字母中aガp個bガq個cガr個其他ハ皆一個宛ナルトキ順列ノ總數ハ $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}$ ナリト云フ此証ヲ求ム

今所要ノ順列數ヲPトシ今p個ノa字母ヲ盡ク異リタル字母ナリト視做ストキハ此字母ヨリ$\underline{|p}$個ノ順列數ヲ得ヘシ故ニ其總數ハ$P\times\underline{|p}$ヲ得ヘシ又q個ノb字母ガ盡ク異リタル字母ナリト視做ストキハ此字母ヨリ$\underline{|q}$個ノ順列數ヲ得ヘシ故ニ此總數ハ$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}$ヲ得ヘシ又$r$個ノ$c$字母ヨリ$\underline{|r}$ノ順列數ヲ得ヘシ故ニ其總數ハ$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}$ナリ而シテ此數ハ$n$個ノ物ヲ盡ク取リタル順列ノ總數ナルガ故ニ$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}=\underline{|n}$ナリ是ニ由テ $P=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}\cdots\cdots(ツ)$ナルヲ知ル

● ${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$ ナルヿヲ證セ

n個ノ物件(設令バ$a\ b\ c\cdots\cdots$)ノ中第一(a)ヲ除キテ$(n-1)$個ノ物件アリ今之レヲ總數トシテ一時ニ$(r-1)$個宛ヲ取リタル錯列ノ數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}\cdots\cdots(A)$ ナリ今此錯列ノ數ニ第一(a)ヲ附スルトキハ${}_nC_r$中ノaヲ含ムモノヽ總數(B)ナリ而シテ其數ハ${}_{n-1}C_{r-1}$ナリ

同理ニ由リテ${}_nC_r$中bヲ含ムモノヽ總數モ亦${}_{n-1}C_{r-1}$ナリ逐テ此ノ如ク$c\ d\cdots\cdots$等ヲ含ムモノ何レモ${}_{n-1}C_{r-1}$ナリ今此各ヲ加フレバ$({}_{n-1}C_{r-1})n$トナル而シテ此各錯列ハr個ノ物件ヲ含ムヲ以テ${}_nC_r$ノr倍ヲ得ベシ故ニ $r({}_nC_r)=n({}_{n-1}C_{r-1})\cdots\cdots(一)$

同理ニ由リテ$(r-1)({}_{n-1}C_{r-1})=(n-1)({}_{n-2}C_{r-2})\cdots\cdots(二)$

$(r-2)({}_{n-2}C_{r-2})=(n-2)({}_{n-3}C_{r-3})\cdots\cdots(三)$

$(r-3)({}_{n-3}C_{r-3})=(n-3)({}_{n-4}C_{r-4})\cdots\cdots(四)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$2({}_{n-r+2}C_2)=(n-r+2)({}_{n-r+1}C_1)\cdots\cdots(r-1)$

$1({}_{n-r+1}C_1)=(n-r+1)\cdots\cdots(r)$

上ノ方程式ノ邊々連乘スレバ

$r({}_nC_0)(r-1)({}_{n-1}C_{0-1})(r-2)({}_{n-2}C_{r-2})(r-3)({}_{n-3}C_{0-3})\cdots\cdots2({}_{n-0+2}C_2)({}_{n-0+1}C_1)$

$=n({}_{n-1}C_{0-1})(n-1)({}_{n-2}C_{0-2})(n-2)({}_{n-3}C_{0-3})(n-3)({}_{n-4}C_{0-4})\cdots\cdots(n-r+2)({}_{n-0+1}C_1)(n-r+1)$

通因子ヲ省ケバ ${}_nC_0r(r-1)(r-2)\cdots\cdots1=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

即チ ${}_nC_0\underline{|r}=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

故ニ $ {}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\cdots\cdots\cdots\cdots$(チ)

此後邊ノ各分母子ニ$\underline{|n-r}$ヲ乘ズレバ ${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\underline{|n-r}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$(ナ)

今此解中(A)ト(B)トノ等シキコトヲ a b c d e ノ五字ニ由テ之レヲ示ス

$(r-1)$		(r)	
bc	(A)	abc	(B)
bd		abd	
be		abe	
cd		acd	
ce		ace	
de		ade	

又(一)式ノ形ヲ a b c d e f ノ六字ヲ n トシ四字ヲ r トスレバ次ノ如シ

$({}_6C_4)$	$({}_5C_3)$
$abcd$	abc
$abce$	abd
$abcf$	abe
$abde$	acd
$abdf$	ace
$abef$	ade
$acde$	bcd
$acdf$	bce
$acef$	bde
$adef$	cde
$bcde$	
$bcdf$	
$bcef$	
$bdef$	
$cdef$	

今${}_6C_4$及ビ${}_5C_3$ヲ見ルニ${}_6C_4$ハ15ニシテ${}_5C_3$ハ10ナリ故ニ${}_6C_4\times4={}_5C_3\times6$ 卽チ

$15\times4=10\times6$ トナル此レ(一)式ノ形ナリ又次ニ${}_5C_3$及ビ${}_4C_2$ノ形ヲ作ルニ a b c d e ノ五字ヲ以テスレバ${}_5C_3$ハ前ノ如シ${}_4C_2$ハ bc bd be cd ce ナリ而シテ此數ハ6ナルガ故ニ${}_5C_3\times3={}_4C_2\times5$ 卽チ $10\times3=6\times5$ トナル是レ(二)式ノ形ナリ

● ${}_nP_r=({}_nC_r)\underline{|r}$ ナルヲ證セヨ

前問ニ由テ ${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\cdots\cdots$(チ) 此右邊ノ分子ハ${}_nP_r$ノ形ヲナス

故ニ ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{\underline{|r}}$ 故ニ $\underline{|r}\,{}_nC_r={}_nP_r$ ナルヲ證ス

● ${}_nC_r$ ノ極大値ハ r ノ $\dfrac{n-1}{2}$, $\dfrac{n}{2}$, $\dfrac{n+1}{2}$ ナルトキニアリ此理如何

前々問ノ解中ヨリ ${}_nC_r=\dfrac{n}{1}\times\dfrac{n-1}{2}\times\dfrac{n-2}{3}\times\dfrac{n-3}{4}\cdots\cdots\times\dfrac{n-r+1}{r}$ 卽チ

${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1.2.3.4.\cdots\cdots(r-1)}\times\dfrac{n-r+1}{r}$ 卽チ ${}_nC_r=({}_nC_{r-1})\times\dfrac{n-r+1}{r}$ 爰ニ於テ

$\dfrac{n-r+1}{r}$ 若シ一個ヨリ大ナレバ ${}_nC_r>{}_nC_{r-1}$ ニシテ $\dfrac{n-r+1}{r}$ 若シ一個ニ等シケレバ

${}_nC_r={}_nC_{r-1}$ ニシテ $\dfrac{n-r+1}{r}$ 若シ一個ヨリ小ナレバ ${}_nC_r<{}_nC_{r-1}$ ナリ故ニ

$\frac{n-r+1}{r} \gtreqless 1$ 即チ $n-r+1 \gtreqless r$ 即チ $n+1 \gtreqless 2r$ 即チ $r \lesseqgtr \frac{1}{2}(n+1)$ ニ従ヒテ

${}_nC_r \gtreqless {}_nC_{r-1}$ ナリ故ニ $r < \frac{1}{2}(n+1)$ ナル間ハ r 増大スルニ従ヒ ${}_nC_r$ ハ増大シ

$r > \frac{1}{2}(n+1)$ ニ至レバ r 増大スルニ従ヒ ${}_nC_r$ ハ減少ス故ニ ${}_nC_r$ ノ極大値ハ

$r=\frac{1}{2}(n+1)$ ノ時ニアリ故ニ n 若シ奇数ナレバ r ノ値 $\frac{1}{2}(n+1)$ 或ハ $\frac{1}{2}(n-1)$ ナルトキ

${}_nC_r$ ノ最大値ヲ得然ルニ r ハ整数ナル故若シ偶数ナレバ r ノ値 $\frac{n}{2}$ ナルトキ ${}_nC_r$ ノ値最

大ナリ

● n 個ノ物ヲ p 個宛ト q 個宛トノ二列ニ分ツトキハ其列数ハ各 $\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q}$ ナリ其理如何 $p+q=n$

ナリ

$${}_nC_p=\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor n-p}=\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q},\quad {}_nC_q=\frac{\lfloor n}{\lfloor q \lfloor n-q}=\frac{\lfloor n}{\lfloor q \lfloor p}\ \text{故ニ}\ {}_nC_p={}_nC_q=\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q}\cdots\cdots\text{(ラ)}$$

● n 個ノ物ヲ p 個宛ト q 個宛ト r 個宛トノ三列ニ分ツトキハ其数ハ $\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r}$ ナリ其理如何

但シ $q+p+r=n$ ナリ

今 n 物ヲ p ト $(q+r)$ トノ二列ニ分ツトキハ前題ニ由テ $\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q+r}$ ナリ又此各列ノ $(q+r)$ ヲ

q ト r トノ二列ニ分ツトキハ其列数ハ $\frac{\lfloor q+r}{\lfloor q \lfloor r}$ ナリ故ニ全列数ハ $\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q+r} \times \frac{\lfloor q+r}{\lfloor q \lfloor r}=\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r}$

……(ム) ナリ

● ${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}$ ナリ此理如何

$${}_{n+1}C_r=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots(n+1-r+1)}{\lfloor r}=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r}$$

又 ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r-1}$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{\lfloor r}+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)r}{\lfloor r}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r}\left\{(n-r+1)+r\right\}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r}(n+1)$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r}$$

是レニ由テ ${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}\cdots\cdots$(ウ) ナリ

●$(x+a)^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3\cdots\cdots+a^n$ナルヲ證セ

今$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(n$因子$)=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\cdots\cdots N$ニ由テ考フルニ
$A=(a+b+c+\cdots\cdots)$, $B=ab+ac+\cdots\cdots bc+bd\cdots\cdots$, $C=abc+abd\cdots\cdots bcd+bce\cdots\cdots$,
$\cdots\cdots$, $N=abcde\cdots\cdots$ナリ

而シテAハn個ノ物ヲ一個宛取リタル錯列數ニシテBハn個ノ物ヲ二個宛取リタル錯列數Cハn個ノ物ヲ三個宛取リタル錯列數ナリ逐テ此ノ如クn個ノ物ヲ一個宛取リタルモノヨリ初マリ一個ヲ增ス每ニ一個宛增シタル錯列ノ數ヲナス故ニ$n+1$項則チNニ至レバn個ノ物ヲn個宛取リタル錯列數ナルベシ而シテ又a b c $d\cdots\cdots$等ハ皆aナルガ故ニ $A=a+a+a+\cdots\cdots{}_nC_1a=na$, $B=a^2+a^2+a^2\cdots\cdots={}_nC_2a^2=\frac{n(n-1)}{1.2}a^2$, $C=a^3+a^3+a^3+\cdots\cdots={}_nC_3a^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3$
$\cdots\cdots$, $N={}_nC_na^n=a^n$ナリ

又首項x^nノ係數1ハaニ附テ關係ナキヲ以テ${}_nC_0$ト記スルコトヲ得故ニ
$(x+a)^n={}_nC_0x^na^0+{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2+{}_nC_3x^{n-3}a^3\cdots\cdots{}_nC_rx^{n-r}a^r\cdots\cdots$
${}_nC_nx^0a^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3\cdots\cdots a^n\cdots\cdots$(キ)

ナリ

●$(x-a)^n=x^n-nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3\cdots\cdots(-1)^na^n$ナルヲ證セ

前問ノ式ニ於テaヲ$-a$ニ代フレバ$(x-a)^n=x^n+nx^{n-1}(-a)+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}(-a)^2$
$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}(-a)^3\cdots\cdots(-a)^n$ 卽チ
$(x-a)^n=x^n-nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3\cdots\cdots(-1)^na^n\cdots\cdots$(ノ)ナリ

●二項式ノn乘冪ノ開散式ニ於テ首尾兩項ヨリ等隔ナル項ノ係數ハ相等シ其理如何

今$(x+a)^n$ノ開散式ニ於テ首項ヨリ第r項ノ係數ヲ求ムレバ${}_nC_{r-1}$
$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\underline{|r-1}}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}\cdots\cdots$(イ) 又尾項ヨリ第$r$項ハ首項ヨリ$(n+1)-r+1$則チ$(n-r+2)$項ナリ今其項ノ係數ヲ求ムレバ${}_nC_{n-r+1}$
$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\{n-(n-r+1)+1\}}{\underline{|n-r+1}}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots r}{\underline{|n-r+1}}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r+1}\,\underline{|r-1}}\cdots\cdots$(ロ)

此(一)(二)ノ最後邊相等シ則チ首項及ビ尾項ヨリ等シク隔タリタル項ノ係數ハ相等シキコト明カナリ

●二項開散式ノ係數ノ和ハ2^n或ハ零ナリ其理如何

二項式$(x+a)$或ハ$(x-a)$ノ開散式${}_0C_0x^na^0+{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2+{}_nC_3x^{n-3}a^3+{}_nC_4x^{n-4}a^4+\cdots\cdots{}_nC_nx^0a^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}a^4\cdots\cdots a^n$ 或ハ ${}_0C_0x^na^0-{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2-{}_nC_3x^{n-3}a^3+{}_nC_4x^{n-4}a^4\cdots\cdots(-1)^n{}_nC_nx^0a^n=x^n-nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}a^4\cdots\cdots(-1)^na^n$ ニ於テ兩量x及aナル各因子ヲ省ケバ其係數ハ

$${}_0C_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+{}_nC_4\cdots\cdots{}_nC_n=1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdots1\cdots\cdots(一)$$

或ハ ${}_0C_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+{}_nC_4\cdots\cdots(-1)^n{}_nC_n=1-n+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdots\cdots(-1)^n\cdots\cdots(二)$

又$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdots\cdots1$

此右邊ハ(一)ノ右邊ニ等シ故ニ ${}_0C_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+{}_nC_4\cdots\cdots{}_nC_n=2_n\cdots\cdots(オ)$ ナリ又$0=0^n=(1-1)^n=1-n+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdots\cdots(-1)^n$ トナル此右邊ハ(二)ノ右邊ニ等シ故ニ ${}_0C_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+{}_nC_4+\cdots\cdots(-1)^n{}_nC_n=0\cdots\cdots(ソ)$ ナルコトヲ證セリ

●二項法開散式ノ奇項ノ和ハ偶項ノ和ニ等シ其理如何

前問ニ由テ $0={}_0C_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+{}_nC_4-{}_nC_5\cdots\cdots={}_0C_0+{}_nC_2+{}_nC_4\cdots\cdots-({}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5\cdots\cdots)$ 故ニ ${}_0C_0+{}_nC_2+{}_nC_4\cdots\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5\cdots\cdots(ヤ)$ ナリ題言ノ如シ

●$(a+b+c)^n$ノ開散式中$a^pb^qc^r$ノ係數ハ$\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}}$ナリ此理如何

今$(a+b+c)^n=\{a+(b+c)\}^n$ノ開散式中ノ$a^p(b+c)^{n-p}$ノ係數ハ$\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{n-p}}$ナリ又$(b+c)^{n-p}$

ノ開散式中 $b^q c^{n-p-q}$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n-p}}{|\underline{p}\,|\underline{n-p-q}}$ ナリ然ルニ $n-p-q=r$ ナルガ故ニ $b^q c^r$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n-p}}{|\underline{q}\,|\underline{r}}$ ナリ故ニ $a^p b^q c^r$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{n-p}}\times\frac{|\underline{n-p}}{|\underline{q}\,|\underline{r}}=\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}}$ ナルヲ知ル

●$(a+b+c+d)^n$ ノ開散式中 $a^p b^q c^r d^s$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}\,|\underline{s}}$ ナリ此理如何

今 $(a+b+c+d)^n=\{a+(b+c+d)\}^n$ ノ開散式中 $a^p(b+c+d)^{n-p}$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{n-p}}$ ナリ又 $(b+c+d)^{n-p}$ ノ開散式中 $b^q(c+d)^{n-p-q}$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n-p}}{|\underline{q}\,|\underline{n-p-q}}$ ナリ

又 $(c+d)^{n-p-q}$ ノ開散式中 $c^r d^{n-p-q-r}$ 則チ $c^r d^s$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n-p-q}}{|\underline{r}\,|\underline{s}}$ ナリ故ニ

$a^p b^q c^r d^s$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{n-p}}\times\frac{|\underline{n-p}}{|\underline{q}\,|\underline{n-p-q}}\times\frac{|\underline{n-p-q}}{|\underline{r}\,|\underline{s}}=\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}\,|\underline{s}}$ ナルヲ知ル

●$(a+b+c+d\dots\dots)^n$ ノ開散式中 $a^p b^q c^r d^s$ ……………ノ係數ハ

$\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}\,|\underline{s}}$ ナリ此理如何

前二題ノ理ヲ推セバ本題ハ容易ニ証スルヿヲ得ルナリ

●$(a+bx+cx^2+dx^3\dots\dots)^n$ ノ開散式中 x^m ノ係數ハ $\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}\,|\underline{s}\,|\underline{t}\dots\dots}a^p b^q c^r d^s\dots\dots$

或ハ $\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(p+1)}{|\underline{q}\,|\underline{r}\,|\underline{s}\,|\underline{t}\dots\dots}a^p b^q c^r d^s\dots\dots$ ナリ此理如何

今 $bx+cx^2+dx^3\dots\dots=A$ トスレバ $(a+bx+cx^2+dx^3\dots\dots)^n=(a+A)^n=(A+a)^n$

トナル今此開散式中 a^p ノ係數ハ $\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{n-p}}$. $A^{n-p}\dots\dots$(一) ナリ又 $cx^2+dx^3\dots\dots=B$

トスレバ $A^{n-p}=(bx+B)^{n-p}=(B+bx)^{n-p}$ 今此開散式中 $(bx)^q$ ノ係數ハ

$\frac{|\underline{n-p}}{|\underline{q}\,|\underline{n-p-q}}$. $B^{n-p-q}\dots\dots$(二) 又 $dx^3\dots\dots=C$ トスレバ $B^{n-p-q}=(cx^2+C)^{n-p-q}$

$=(C+cx^2)^{n-p-q}$ トナル今此開散式中 $(cx^2)^r$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n-p-q}}{|\underline{r}\,|\underline{n-p-q-r}}$. $C^{n-p-q-r}\dots\dots$

……(三) ナリ同理ニ由テ $(dx^3)^s$ ノ係數ハ $\frac{|\underline{n-p-q-r}}{|\underline{s}\,|\underline{n-p-q-r-s}}$. $D^{n-p-q-r-s}\dots\dots$(四)

是ニ由テ $a^p\times(bx)^q\times(cx^2)^r\times(dx^3)^s\dots\dots$ 則チ $(a^p b^q c^r d^s\dots\dots)x^{q+2r+3r+4s}\dots\dots$ ノ係數

ハ $\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{n-p}}\times\frac{|\underline{n-p}}{|\underline{q}\,|\underline{n-p-q}}\times\frac{|\underline{n-p-q}}{|\underline{s}\,|\underline{n-p-q-r}}\times\frac{|\underline{n-p-q-r}}{|\underline{s}\,|\underline{n-p-q-r}}\dots\dots=\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}\,|\underline{s}\dots\dots}$

ナリ而シテ $p+q+r+s\dots\dots=n$ ニシテ $q+2r+3s+\dots\dots=m$ ナリ故ニ x^m ノ係數

ハ $\dfrac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}\,|\underline{s}\cdots\cdots}a^p b^q c^r d^s$……………(マ) ナリ

然レ圧 m ハ正整數ナレ圧 n ハ然ラズ n 正數ニアラサレバ p モ亦然リ然レバ $|\underline{p}$ ハ成立セザルモノナリ此場合ニ於テハ右公式則チ(マ)ノ分母子ヨリ $|\underline{p}$ ヲ消去シ

$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(p+1)}{|\underline{p}\,|\underline{r}\,|\underline{s}\cdots\cdots\cdots}a^p b^q c^r d^s$……………(ケ) 此ノ如ク改ムヘシ

右(マ)(ケ)ハ多項式 n 乘冪中ノ任項ヲ求ムル公式ナリ

●如何ナル底ニテモ一個ノ對數ハ零ナリ其理如何

$a^x=1$ トセハ $x=\log_a 1$ ニシテ $x=0$ ナリ故ニ $\log_a 1=0$ ナルヲ知ル

●如何ナル底ニテモ底ノ對數ハ一個ナリト云フ其理如何

$a^x=a$ ナレバ $x=\log_a a$ 又 $x=1$ 故ニ $\log_a a=1$ ナリ

●乘積ノ對數ハ兩因子ノ對數ノ和ニ等シ其理如何

兩因子ヲ p q トセバ $p=a^x$, $q=a^y$ ナリ今之レヲ相乘セバ $pq=a^{x+y}$ 然ルニ $x=\log_a p$, $y=\log_a q$ ナリ故ニ $x+y=\log_a p+\log_a q$ 故ニ $\log_a(pq)=\log_a p+\log_a q$ ナルヲ知ル

●除商ノ對數ハ實ノ對數ヨリ法ノ對數ヲ減セシモノナリ其理如何

前問ノ p ヲ實トシ q ヲ法トスレバ $p\div q=a^x\div a^y=a^{x-y}$ ナリ是ニ由テ

$\log_a\left(\dfrac{p}{q}\right)=\log_a p-\log_a q$ ナルヲ知ル

●方乘冪ノ對數ハ根數ノ對數ニ指數ヲ乘スレバ得其理如何

$p^n=(a^x)^n=a^{nx}$ 故ニ $\log_a p^n=nx=n\log_a p$ ナルヲ知ル

●開方根ノ對數ハ冪數ノ對數ヲ指數ニテ除セシモノナリ其理如何

$p^{\frac{1}{n}}=(a^x)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{x}{n}}$ 故ニ $\log_a p^{\frac{1}{n}}=\dfrac{\log_a p}{n}$ ナルヲ知ル

●$a^x=b$ ニ於テ $a=1+c$, $b=1+d$ トセバ

$$\log_a b=\frac{d-\frac{1}{2}d^2+\frac{1}{3}d^3-\frac{1}{4}d^4+\frac{1}{5}d^5-\cdots\cdots}{c-\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{4}c^4+\frac{1}{5}c^5\cdots\cdots\cdots}$$ ナリ此証ヲ問フ

$a^x=b$ ヲ變スレバ $(1+c)^x=1+d$ トナル之レヲ n 乘スレバ $(1+c)^{nx}=(1+d)^n$ 此兩邊ヲ開散スレバ $1+nxc+\dfrac{nx(nx-1)}{1.2}c^2+\dfrac{nx(nx-1)(nx-2)}{1.2.3}c^3+\dfrac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{1.2.3.4}c^4\cdots\cdots$

$=1+nd+\dfrac{n(n-1)}{1.2}d^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}d^4\cdots\cdots\cdots\cdots$ 最簡式ニ化スレバ $x\left\{c+\dfrac{nx-1}{2}c^2+\dfrac{(nx-1)(nx-2)}{2.3}c^3+\dfrac{(x-1)(nx-2)(nx-3)}{2.3.4}c^4\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}=$

$d+\frac{n-1}{2}d^2+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}d^3+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}d^4\cdots\cdots$此式$n$ノ値如何ナルニ係ラズ両邊適等ナリ故ニ $n=0$ トセバ $x\left(c-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}-\frac{c^4}{4}\cdots\cdots\right)=d-\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}-\frac{d^4}{4}\cdots\cdots$

故ニ $x=\frac{d-\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}-\frac{d^4}{4}\cdots\cdots}{c-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}-\frac{c^4}{4}\cdots\cdots}$ 則チ $\log_a(1+d)=\log_a b=\frac{d-\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}-\frac{d^4}{4}\cdots\cdots}{c-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}-\frac{d}{4}\cdots\cdots}$

……(1)ナルヲ証シ得タリ

● $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\cdots\cdots Mx+N=0$ ナル方程式ニ於テ x ニ如何ナル數ヲ代入スレバ $y^n+B'y^{n-2}+C'y^{n-3}\cdots\cdots M'y+N'=0\cdots\cdots$(一)ノ如ク首項ヨリ第二項目ヲ消去スルヿヲ得ルヤ

先ツ本式ノ x ニ $y+b$ ヲ代入スレバ $(y+b)^n+A(y+b)^{n-1}+B(y+b)^{n-2}\cdots\cdots M(y+b)+N=0\cdots\cdots$(二)トナル此方程式ヲ開散シテ第二項トナルヘキモノハ y^{n-1} ノ項ナリ然ルニ此項ノ生スルハ首項則チ $(y+b)^n$ ヨリ nby^{n-1} 及ヒ第二項則チ $A(y+b)^{n-1}$ ヨリ Ay^{n-1} ヲ生スルノミ今此二量ヲ合スレバ $nby^{n-1}+Ay^{n-1}=(nb+A)y^{n-1}$ トナル今此項ヲ消去セシメンニハ $nb+A=0$ トスレバ可ナリ故ニ $b=\frac{-A}{n}$ トナシ(二)式ノ $(y+b)$ ニ $y+\left(-\frac{A}{n}\right)$ 則チ $y-\frac{A}{n}$ ヲ代入スレバ(一)式ノ如クナルヿ明カナリ

● 一個ノ立方根ハ 1, $\frac{1}{2}\left\{-1-\sqrt{(-3)}\right\}$ 及ヒ $\frac{1}{2}\left\{-1+\sqrt{(-3)}\right\}$ ナリ此理如何

x ヲ以テ一個ノ立方根トスレバ $x^3=1$ 則チ $x^3-1=0$ ナリ之レヲ分割スレバ $(x-1)(x^2+x+1)=0$ トナル此両因子ヨリ題意ノ如キ三商ヲ得而シテ此三商ノ中 $\frac{1}{2}\left\{-1-\sqrt{(-3)}\right\}=R$ トセバ $\frac{1}{2}\left\{-1+\sqrt{(-3)}\right\}=R^2$ ニシテ $\frac{1}{2}\left\{-1+\sqrt{(-3)}\right\}=R'$ スレバ $\frac{1}{2}\left\{-1-\sqrt{(-3)}\right\}=R'^2$ ナリ故ニ一個ノ立方根ハ1及ヒR R^2ナリ

● $x^3+a=0$ ナル方程式ノ三根ハ $\frac{1}{2}\left\{1+\sqrt{(-3)}\right\}\sqrt[3]{a}$, $\frac{1}{2}\left\{1-\sqrt{(-3)}\right\}\sqrt[3]{a}$, $-\sqrt[3]{a}$ ナリ

本題ハ前問ノ理ヲ推シテ容易ニ解スルヿヲ得ルナリ

● $x^3+Bx+C=0$ ナル方程式ノ三商ハ $-\frac{C}{2}+\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}=p$, $-\frac{C}{2}-\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}-\frac{B^2}{27}\right)}=q$ $\frac{1}{2}\left\{-1-\sqrt{(-3)}\right\}=R$ トセバ $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$……(一)$\sqrt[3]{p}.R^2+\sqrt[3]{q}.R$……(二)$\sqrt[3]{p}.R+\sqrt[3]{q}.R^2$……(三)ナリト云フ此理如何

先ツ $y+z$ ヲ以テ所題ノ x ニ代入スレバ $(y+z)^3+B(y+z)+C=0$ 則チ

$y^3+z^3+(3yz+B)(y+z)+C=0$……(い) トナル而シテ yz ハ x ヲ両分セシ各分ナルヲ以テ其分ケ方ニ於テ定リナシ故ニ今之レヲ $3yz+B=0$……(ろ) ノ如キ關係ヲ有スルモノトセバ (い) 式ハ變シテ $y^3+z^3+B=0$……(は) トナル (ろ) ニ由テ z ヲ求ムレバ $z=-\frac{B}{3y}$ トナル以テ (は) 式ニ代入スレバ $y^6+Cy^3-\frac{B^3}{27}=0$……(に) 此方程式ヨリ

$y^3=-\frac{C}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}=p$ ヲ得以テ (は) 式ニ代入スレバ $z^3=-\frac{C}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}=q$ ヲ得故ニ $x=y+z=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$……(ほ) ヲ得然ルニ立方根ハ三樣ノ變化アルガ故ニ $x=R\sqrt[3]{p}+R^2\sqrt[3]{q}$…(へ) $x=R^2\sqrt[3]{p}+R\sqrt[3]{q}$…(と) $x=R^2\sqrt[3]{p}+R^2\sqrt[3]{q}$…(ち) $x=R\sqrt[3]{p}+R\sqrt[3]{q}$……(り) $x=\sqrt[3]{p}+R\sqrt[3]{q}$……(ぬ) $x=\sqrt[3]{p}+R^2\sqrt[3]{q}$……(る) $x=R\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$……(を) $x=R^2\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$……(わ) 此(ほ)ヨリ(わ)ニ至ルモノハ各 x ノ値ナリ然ルニ三次方程式ハ其根三種ニ限ルヲ以テ此中三種ノ外ハ原式ニ合ハサルモノナルヘシ然ルニ本題ハ $3yz=-B$ 此ノ如キ關係アルガ故ニ $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$ ヲ以テ此理ニ合フモノトセバ(ほ)(へ)(と)ハ皆此理ニ合フモノナリ何トナレバ(ほ)ハ $\sqrt[3]{p}\times\sqrt[3]{q}=\sqrt[3]{(pq)}$ ニシテ(へ)ハ $R\sqrt[3]{p}\times R^2\sqrt[3]{q}=R^3\sqrt[3]{(pq)}=\sqrt[3]{(pq)}$ (と)ハ $R^2\sqrt[3]{p}\times R\sqrt[3]{q}=R^3\sqrt[3]{(pq)}=\sqrt[3]{(pq)}$ ナリ

$pq=\left\{-\frac{C}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right\}\left\{-\frac{C}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right\}=\frac{C^2}{4}-\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)$

$=\frac{C^2}{4}-\frac{C^2}{4}-\frac{B^3}{27}=-\frac{B^3}{27}$ 故ニ $27pq=-B^3$ 故ニ $3\sqrt[3]{(pq)}=-B$ 則チ $3yz=-B$ ナレバナリ

又(ち)以下ノ此理ニ合ハサルハ両量ヲ相乘スレハ R 或ハ R^2 ノ因子ヲ存スルヲ以テナリ

● 三次方程式ハ完全不完全ニ關ラズ二次方程式ノ法ニ由テ解スルヿヲ得其理如何

三次方程式ガ完全式大ル𪜈ハ第二項ヲ消去シ前題ノ如ク解スルヿヲ得ルナリ又第二項第三項ガ同時ニ消去スル𪜈ハ $x^2+a=0$ 此ノ如クナルヲ以テ容易ニ解スルヿヲ得ルナリ

● $x^4+Bx^2+Cx+D=0$ ヲ二次方程式ノ解法ニ由テ解スル法ヲ問フ

$x^4+Bx^2+Cx+D\equiv(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)\equiv x^4+bx^2-a^2x^2+cx^2-abx+acx+bc$ ト假定スレバ是レ両同式ナリ故ニ $B=b-a^2+c$……(一) $C=ac-ab$……(二) $D=bc$……(三)

(一)(二)両式ヨリ $b=\frac{1}{2}\left(B+a^2-\frac{C}{a}\right)$……(三) $c=\frac{1}{2}\left(B+a^2+\frac{C}{a}\right)$……(四)

$D=\frac{1}{4}\left(B+a^2+\frac{C}{a}\right)\left(B+a^2-\frac{C}{a}\right)$ トナル之レヲ解キ分母ヲ去レバ $a^6+2Ba^4+(B^2-4D)a^2-C^2=0$ トナル此式 a^2 ノ三次完全式ナリ故ニ a^2 ヲ求メ之レヲ平方ニ開ケハ a ヲ得以テ(三)(四)両式ニ代入セバ b c モ亦求メ得ヘシ然ル𪜈ハ原式ノ二因子ヲ $x^2+ax+b=0$ 及

ヒ $x^2-ax+c=0$ トナシ二次方程式解法ニ由リ x ノ値四件ヲ求ムルコヲ得ルナリ、

● $x^4+Cx+D=0$ ナル方程式ハ二次方程式解法ニ由テ解スルコヲ得其理如何

$x^4+Cx+D\equiv(x^2-ax-b)(x^2+ax+a^2+b)\equiv x^4-(a^3+2ab)x-a^2b-b^2$ ト假定シ此両同式ヨリ $b=-\frac{C+a^3}{2a}$ ……(一) $D=-a^2b-b^2$ ……(二) ヲ得(一)式ノ b ヲ以テ(二)式ニ代入シ之レヲ最簡式ニ化スレバ $a^6-4Da^2-C^2=0$ トナル此式ヨリ a ヲ求メ(一)ニ代入スレバ b モ亦求ムルコヲ得故ニ $x^2-ax-b=0$ 及ヒ $x^2+ax+a^2+b=0$ ヨリ原式ノ四商ヲ求ムルコヲ得ルナリ

●四次方程式ハ凡テ二次方程式解法ニ由テ解スルコヲ得其理如何

四次方程式ガ $x^4=D$ ノ如クナレバ $x^4-D=(x^2+\sqrt{D})(x^2-\sqrt{D})$ ……(一)トナスコヲ得

四次方程式ガ $x^4+Bx^2+D=0$ ノ如クナレバ $x^4+Bx^2+D\equiv(x^2+a)(x^2+b)$ ……(二)トナシ容易ニ解スルコヲ得

四次方程式ガ $x^4+Cx+D=0$ ノ如クナレバ $x^4+Cx+D=(x^2+ax+a^2+b)(x^2-ax-b)$ …(三)トナシ容易ニ解スルコヲ得

四次方程式ガ $x^4+Bx^2+Cx+D=0$ ノ如クナレバ 本式 $\equiv(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$ ……(四)トナシ解スルコヲ得ルナリ若シ四次方程式ガ完全式ナレバ第二項ヲ消去シ此ノ(四)式ノ如クナスヘシ若シ又第二第三両項ヲ同時ニ消去セシトキハ(三)ノ如クナスヘシ是ニ由テ題言ノ如シ

受験用 代數理論的問答下 終

明治二十六年一月廿七日印刷
明治二十六年一月廿八日出版

定價金四錢

版權登錄

編纂者　大阪市東區島町一丁目一番屋敷　小森數藏

發行兼印刷者　大阪市東區安土町四丁目三十八番屋敷　鈴木常松

專賣所　大阪市東區安土町四丁目十一番屋敷　積善館

專賣所　福岡市博多中島町七十六番屋敷　積善館支店