遵照三十年修正課程標準編著

新中國教科書
初級中學
代數學

第二册

（第二學年第二學期用）

編著者 黃泰 戴維清

正中書局印行

目　次

第八章

一次方程式及應用問題

59. **一元一次方程式**　一方程式內祇有一個未知數，且此未知數祇是一次的，則此方程式叫做一元一次方程式，前面解過的簡易方程式，都屬於這一種.

60. **一元一次方程式的解法**　此類方程式的解法，前面都已說過了，用過了，大家都會解了，現在再綜合起來，可得下列數種：

I. 係數是整數的

例　解方程式　$8x+13=90+x$.

解　原式移項，　$8x-x=90-13$.

合併，　$7x=77$.

$\therefore\ x=11$.

校驗　左端 $=8\times11+13=101$.

右端 $=90+11=101$.

II. 係數是分數的

例　解方程式　$\dfrac{2x}{5}-6=\dfrac{x}{3}-15$.

解　原式兩端用 15 乘（15 是 5，3 的 L.C.M.），得

$$6x-90=5x-225.$$

移項後合併，　$x=-135.$

校驗　左端 $=\frac{2}{5}(-135)-6=-60.$

右端 $=\frac{-135}{3}-15=-45-15=-60.$

III. 係數是小數的

例　解方程式 $0.5x=0.03x+1.41.$

解　原式兩端用 100 乘，

$$50x=3x+141.$$

移項，合併，　$47x=141.$

$$\therefore x=3.$$

校驗　左端 $=0.5\times3=1.5.$

右端 $=0.03\times3+1.41=1.5.$

IV. 方程式內含括弧的

例　解方程式 $5x-9(2x+4)=2(x-9).$

解　消括弧，$5x-18x-36=2x-18.$

移項，合併，　$-15x=18.$

$$x=-\frac{6}{5}.$$

校驗　$左端=5\left(-\frac{6}{5}\right)-9\left[2\left(-\frac{6}{5}\right)+4\right]=-6-\frac{72}{5}=-\frac{102}{5}$,

$右端=2\left(-\frac{6}{5}-9\right)=2\left(-\frac{51}{5}\right)=-\frac{102}{5}$.

習題四十

解下列各方程式:

1. $4x+3-x+5=x+10$.　　2. $3x+9+2x+6=18+4x$.

3. $3y-4+2y-6=y+7+y+3+10$.

4. $x+9+2x=2x+3x+x$.

5. $32+8y=13y+12+5y$.　　6. $\frac{x}{4}+\frac{x}{2}=\frac{7}{8}$.

7. $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=25$.　　8. $\frac{n}{4}+4n-\frac{5n}{3}=\frac{3n}{2}+26$.

9. $4y+\frac{y}{2}-15=\frac{y}{4}+2$.　　10. $m+\frac{m}{5}+\frac{3m}{10}=225$.

11. $1.25x-8.4+0.73x=11.4$.

12. $0.8x+4.29=7.09x-2$.

13. $0.5x-0.3x=0.25x-1$.　　14. $0.2x-0.16x=0.6-0.3$.

15. $3+\frac{x}{0.5}=7-\frac{x}{0.2}$.　　16. $2(x+5)+5(x-4)=32$.

17. $7(y+6)+10y=42-8(2y+2)+181$.

18. $3(x-2)+2(x-3)+(x-4)=3x+5$.

19. $(x^2-9)-(x^2-16)+x=10$.

20. $7x-5\{x-[7-6(x-3)]\}=3x+1$.

21. $\dfrac{8x-1}{11}-\dfrac{2-x}{10}=\dfrac{6}{5}$.

22. $\dfrac{6x-11}{4}-\dfrac{3-4x}{6}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{x}{8}$. 23. $\dfrac{60-x}{14}-\dfrac{3x-5}{7}=\dfrac{3x}{4}$.

61. **文字方程式** 一方程式中除未知數是文字外，係數也是文字的，則此方程式叫做文字方程式.

如$ax+b=0$，x是未知數，a,b都是文字係數. 解文字方程式時，只要將文字係數當做已知數看待，用通常解法，照樣可解，不過解答是許多已知文字係數組成的一個代數式罷了。

例一 解文字方程式 $5(a+x)=10a$.

解 $5(a+x)=10a$.

消括弧， $5a+5x=10a$.

移項， $5x=10a-5a$.

合併， $5x=5a$,

$\therefore\ x=a$.

校驗 左端$=5(a+a)=10a=$右端.

例二 解方程式$bx+4b=b^2+2x+4$.

解　整理原式，將含 x 的項列在一端，不含 x 的項列在他端，得

$$bx-2x=b^2-4b+4.$$

即　$$(b-2)x=b^2-4b+4. \qquad \text{(E)}$$

*設 $b\neq 2$，用 $(b-2)$ 除兩端，得

$$x=b-2.$$

校驗　左端 $=b(b-2)+4b=b^2-2b+4b=b^2+2b.$

右端 $=b^2+2(b-2)+4=b^2+2b.$

習題四十一

解下列各文字方程式，並校驗其結果：

1. $2x-4c=-2c.$　　2. $5(b-x)=10b.$

3. $bx-(b+c)=5b-c.$　　4. $4bx-7a^2b=6ab^2+3bx.$

5. $cx+bx=ac+bc.$　　6. $a^2x+1-a^4-x=0.$

7. $ax-ac+bc=2ac-5bc+2bx.$

8. $100x-50b=75x-50a.$

9. $2x+a=3x-2$　　10. $x+a=2x+b.$

11. $15(x-a)-6(x+a)=3(5a-3x).$

12. $3ax-4ab=2ax-6ac.$

---

* 若 $b=2$ 則 $b-2=0$，此時方程式(E)變為 $0x=0$，x 等於任何數皆合。

62. **應用問題**　用方程式解應用問題，除第二章所說的幾點應當注意外，還要注意所得的解答是否合理．如問題中，所求的是人數，而解方程式所得的根是分數或小數，這是不合理的．

例　二年級甲乙兩組共有學生 92 人，甲組人數的 2 倍等於乙組人數的 3 倍減 40，問甲組有學生幾人？

解　設 x 爲甲組的學生數．則 $92-x$ 爲乙組的學生數．依題意得方程式

$$2x=3(92-x)-40.$$

解之，得　　$x=47\frac{1}{5}.$

人數決不能用分數表示，故本題不合理．

又有用方程式解應用問題所得的根是負數的，如題問幾年後適合某條件，而求得的解答是負數，此表示幾年後無此情形，應作幾年前，方能適合該條件．

例　父年 50 歲，子年 24 歲，問幾年後父年是子年的 3 倍？

解　設 x 年後父年是子年的 3 倍．

則 x 年後父年是 $(50+x)$ 歲，子年是 $(24+x)$ 歲．

應得方程式　　$50+x=3(24+x).$

解之，得　　$x=-11.$

此表示 11 年前父年是子年的 3 倍，在何若干年後，父年不能爲子年的 3 倍．按 11 年前父年 39 歲，子年 13 歲，正爲 $39=3\times13.$

又有解應用問題得負根是不能用的. 如問題中是求某校學生的人數, 若按方程式解得的根是負數, 當然是不合理的.

常見的應用問題, 可用一元一次方程式來解的很多, 玆特舉數例如下:

1. 年齡問題

例一 A 年較 B 年的 2 倍多 2 歲, C 年比 A 年少 7 歲, 6 年後三人年齡和是 70, 求各人年齡.

解 設 B 年爲 x 歲.

則 A 年爲 $(2x+2)$ 歲,

C 年是 $(2x+2-7)$ 歲,

6 年後三人年齡之和是

$$\{x+(2x+2)+(2x+2-7)+3\times 6\}\text{歲}.$$

故 $$x+(2x+2)+(2x-5)+18=70.$$

去括弧, 合併, $$5x+15=70.$$

解之, 得 $$x=11.$$

答 B 年 11 歲, A 年 = 11 歲 × 2 + 2 歲 = 24 歲,

C 年 = 24 歲 − 7 歲 = 17 歲.

校驗 $$11+24+17+18=70.$$

例二 三數的和是 68, 第二數較第一數小 3, 第三數較第二數大 8. 求各數.

解 設 x 爲第一數.

則 $x-3$ 為第二數，$x-3+8$為第三數.

三數的和應為 $x+(x-3)+(x-3+8)$.

得方程式 $x+(x-3)+(x-3+8)=68$.

去括弧，合併，$3x+2=68$.

解之，得 $x=22$.

答 第一數是 22；第二數是 $22-3=19$，第三數是 $19+8=27$.

校驗 $22+19+27=68$.

習題四十二

1. 父年 40歲，子年 8 歲，問幾年後，父年為子年的 3 倍?

2. 父年為子年的 4 倍，18 年後，父年為子年的 2 倍，問父子年齡各若干?

3. 某甲年齡為長子年齡的 2 倍，為次子年齡的 3 倍，10 年後，他的年齡為二子年齡的和，問三人的年齡各多少?

4. A 的年齡，較 B 的 2 倍多 8 歲，16 年前，A 為 B 的 4 倍，問現在的年齡各多少?

5. 將 75 分為兩份，第一份的 3 倍加第二份的 2 倍等於 190，問兩分各多少?

6. 三個相鄰整數的和為 75，求各數.

7. 將 80 分為兩份，第一份的$\frac{1}{3}$比第二份的$\frac{1}{5}$多3，問每

份各多少?

8. 某工包運玻璃缸 100 個，言明每個運費 5 元，倘使損壞一個，則須反賠 15 元. 今僅得運費 300 元，問損壞幾個?

9. 上等酒每斤 98 元，中等酒每斤 42 元，現在用銀 1680 元，買酒 20 斤，問上等酒中等酒各買幾斤?

10. 假如 7 支毛筆的價值比 153 元所少的值，等於 10 支毛筆的價值比 153 元所多的值. 求毛筆每支的價值.

11. 有銀 1400 元，將其一部分以年利率 5% 貸出，其餘以 6% 貸出，一年後得利息共 76 元，問兩部分各幾元?

12. 第一種金額以年利率 6 % 貸出，第二種金額以 8 % 貸出，總計每年收入利金 53 元. 已知第一種金額超過第二種金額 125 元，問各多少?

13. 兩種金額的和爲 1240 元，其一以年利率 5% 貸出，每年所得的利息較他一金額以 6% 貸出者少 15 元，問此兩種金額各多少?

II. 等速運動問題　等時間內所經距離亦相等，這種運動，叫做等速運動.

等速運動的公式是: 距離 = 速度 × 時間.

或 $$d = vt. \tag{1}$$

此式中任知兩數卽可求第三數.

$$v = \frac{d}{t}. \quad (2) \qquad t = \frac{d}{v}. \quad (3)$$

例一 A, B 二人同向前行, A 的速度 2 倍於 B, 若 A 行 3 小時而止, B 行 5 小時而止, 二人相距有 7 里, 求各人的速度, 及各人所行的路程.

解 設 B 每小時行 x 里.

則 A 每小時行 $2x$ 里.

A 3 小時應走 $(2x\times 3)$ 里.

B 5 小時應走 $5x$ 里.

依題意得方程式 $6x-5x=7$,

即 $x=7$,

答 B 的速度是每小時 7 里, A 的速度是每小時 14 里. 又 A 所行距離是 14 里 $\times 3=42$ 里. B 所行距離是 7 里 $\times 5=35$ 里.

例二 A, B 二列車, 自同站開出, 背道而行, B 在 A 開出後兩小時始出發. 若 B 車每小時行 42 里, A 車每小時行 24 里, 問 B 車開出後, 經幾小時兩車相距 246 里?

解 設所需時間為 x 小時,

則 B 車所行距離為 $42x$ 里,

A 車所行距離為 $24(x+2)$ 里.

依題意得方程式 $42x+24(x+2)=246$.

解之, 得 $66x=198$.

$\therefore \quad x=3$.

答 需3小時.

校驗 $42\times3+24\times5=246$.

習題四十三

1. A,B二人,同時同地相背而行,A速2倍於B速,5小時後,二人相距135公里,問二人的速度每小時各多少公里?

2. 接前題,倘A速每小時較B速多2公里,8小時後,二人相距96公里,則二人的速度各若何?

3. 兩汽車相距180里,相向而行,他們的速率是每小時52里與38里.幾小時後,他們的距離還是180里?

4. P,Q二地相距196里,甲乙二人同時各從P,Q二地出發,相向而行,每小時甲速10里,乙速8里,但甲在途中休息2小時,問經幾小時,二人可以相會?

5. 甲艦追乙艦,每小時甲速76浬,乙速58浬,今兩艦相距45浬,問幾小時後,可以追到?

6. 甲以每小時4里的速度前進,6小時後,乙從原處動身追甲,若乙每小時行6里,問乙行幾小時後可以追及甲?

7. 某客車於同站較貨車遲2小時出發,設兩車相背而行客車速度爲每小時42公里,貨車爲每小時24公里,問自客車出發後幾小時兩車相距246公里?

8. P至Q的距離爲108公里;甲乙二人同時自P向Q出

發，乙的速度 5 倍於甲．乙先到達 Q 點後，即行旋歸．問甲與乙相遇時，二人已各走多少公里？

9.　甲乙二人，繞着池塘競走；甲繞一周，需時 1 小時 45 分，乙繞 1 周，需時 2 小時．若二人同時同地同向出發，問過幾小時後再相遇？

III.　面積問題

公式　　　矩形面積＝長×闊．

例　有長方形，長比闊多 10 尺．若長與闊同增 5 尺，則面積增加 800 方尺，求其長與闊．

解　設長爲 x 尺，

則闊爲 $(x-10$ 尺$)$，

面積應爲 $x(x-10)$ 方尺．

若長與闊各增 5 尺，則其面積當爲

$$(x+5)(x-10+5)\text{方尺}.$$

題云　$(x+5)(x-10+5)-x(x-10)=800.$

解之，得　$10x-25=800,$

$$\therefore\quad x=82.5$$

答　矩形長 82.5 尺，闊 72.5 尺．

校驗　$87.5\times77.5-82.5\times72.5=800.$

習題四十四

解下列各方程式:

1. $(x+4)(x+3)-42=(x+2)(x+1)$.

2. $(x-2)(x-5)=(x+3)(x+2)$.

3. $(x+4)(x+6)=(x+18)(x+13)$.

4. $(h-7)(5+h)-(h-5)(h+7)+5=0$.

5. $(2x-5)(4x-7)=8x^2+52$.

6. 某正方形的面積，恰與某長方形的面積相等. 長方形的長比正方形的一邊多4尺，長方形的闊比正方形的一邊少3尺，問他們的面積各多少?

7. 長方形的長比闊多1尺，若長加5尺，闊減4尺，其面積仍舊不變，問闊及長各若何?

8. 長方形的闊較長少10尺，若每邊加2尺，則面積增加96方尺. 求此形的長及闊.

9. 有紅布一塊，闊比長少13寸，又綠布一塊，比紅的長10寸，窄8寸，但紅綠兩塊的面積相同. 問兩塊布的長和闊各多少寸?

10. 有兵一隊，適可排成正方形，若長加9人，闊減少6人，又適可排成一長方形，問共有兵多少人?

11. 有兵一隊，排成正方形後，尚餘25人，若每邊增加1人，則不足16人，問共有兵多少?

IV. 數字排列問題 設有三位數如以 x 代個位數字，y 代

十位數字，z 代百位數字，則此數應爲 $x+10y+100z$. 餘類推.

例 有一個二位數，其數字的差爲 2. 若將數字次序顚倒，則所成的數，較原數的 $\frac{1}{2}$ 大 3. 求此數.

解 設 x 是個位數字，則 $x+2$ 爲十位數字，此數卽爲 $x+10(x+2)$.

數字次序顚倒後所成的數應爲 $10x+(x+2)$.

題云 $$10x+(x+2)=\frac{1}{2}[x+10(x+2)]+3.$$

簡化，得 $$11x-1=\frac{1}{2}(11x+20).$$

用 2 乘， $$22x-2=11x+20.$$

解之，得 $$x=2.$$

$$x+2=4.$$

答 此數是 42.

校驗 $$24=\frac{1}{2}\times 42+3=24.$$

習題四十五

1. 一個兩位數，個位數字與十位數字的和爲 6，若個位數字與十位數字顚倒，所成的數比原數小 18，求原數.

2. 一個兩位數，個位數字比十位數字大 3，若原數加 9，卽等於原數的數字和的 5 倍. 求原數.

3. 一個兩位數的數字和爲 9，其顚倒數比原數大 45. 求原數.

4. 一個兩位數，十位數字比個位數字大 4，若個位數字與十位數字對調，所成的數比 2 倍原數的數字和多 3. 求原數.

5. 十位數字比 2 倍個位數字大 1，其顛倒數比原數小 36. 求原數.

6. 個位數字比 2 倍十位數字多 2，此數加 45，其和適為原數的顛倒數. 求原數.

7. 有一個三位數，百位數字是十位數字的 2 倍，個位數字是百位數字的 4 倍，此數加上 2，等於原數數字和的 20 倍，求原數.

V. 時鐘問題 解決時鐘問題應注意下列事項:

(a) 時針速度是分針速度的 $\frac{1}{12}$.

(b) 兩針成直角時是相距 15 分鐘.

(c) 兩針成直線時是相距 30 分鐘.

例 下午兩點與三點之間，兩針成直角當在何時?

解 當兩點與三點之間，分針不能在時針後和他成直角，必須行至時針前纔能成直角，故分針比時針應多行 10 分 + 15 分 = 25 分.

設 x 為分針所行分數，則 $\frac{x}{12}$ 為時針所行分數. 依題意得方程式　　$x-\frac{x}{12}=25$,

用 12 乘，得　　$11x=300$,

$$x=27\frac{3}{11}.$$

答 在兩點 $27\frac{3}{11}$ 分時，兩針成直角.

校驗 $$27\frac{3}{11}-27\frac{3}{11}\times\frac{1}{12}=25.$$

習題四十六

1. 下午四點與五點之間，兩針成直角，當在何時?
2. 下午五點與六點之間，兩針相重，當在何時?
3. 上午七點至八點之間，兩針成一直線，當在何時?
4. 四時與五時之間，何時分針和時針成直線?

復習題八

1. 某數的四分之一比他的五分之一大 27，求某數.

2. 父子年齡之和爲 80，子年的 2 倍比父年大 10 歲. 求父子二人的歲數.

3. 甲年爲乙年的 5 倍，5 年後，則爲乙的 3 倍，求各人的歲數.

4. 兩連續整數的平方差爲 101，求這兩數.

5. 甲乙丙丁四人共分金 400 元，已知甲乙二人所得的和爲 230 元，甲丙二人所得的和爲 210 元，甲丁二人所得的和爲

200 元，求各人所得的元數.

6. 甲乙丙三人分金若干元，已知甲乙二人所得的和爲 85 元，甲丙二人所得的和爲 90 元，乙丙二人所得的和爲 75 元；求各人所得的元數.

7. 中等酒每斤價 120 元，與每斤價 200 元的上等酒混合，造成每斤價 140 元的酒一石，問中等酒和上等酒各用多少？

8. 甲乙兩車相距 108 公里，同時相向出發，甲車每小時行 10 公里，乙車每小時行 12 公里，已知乙車曾在途中停駛 2 小時，問相遇於何時？又各行多少公里？

9. A，B 各從相距 144 里的兩處同時相向而行，A 速每小時 7 里，B 速每小時 9 里，在途中 A 耽擱 3 小時，B 耽擱 5 小時，問相遇時在出發後幾小時？

10. 一矩形之地，長比闊多 3 尺．若長增 3 尺，闊減 2 尺，則其面積不變，求原矩形的長及闊.

11. 兵士若干人，等分爲二隊，一以列作三層的中空方陣，一以列作五層的中空方陣，五層的陣適可置入三層陣內的空處．問兵士共多少？

12. 學生若干人，分住宿舍內．若規定每舍住 5 人，則有兩舍祇住 4 人，若規定每舍住 4 人，則有 3 人無舍可住，求學生數及宿舍數.

13. 在什麽溫度時，華氏溫度計和攝氏溫度計的度數相等？

14. 某農夫上城，步行需 9 小時到達，騎行需 6 小時到達，今行 7 小時即到達，問其中騎行幾小時？

第九章

聯立一次方程式

63. **二元一次方程式** 前面見過的方程式，都是一元一次方程式．假如一次方程式內，含兩個未知數，如 $y+3-x=0$ (x, y 都是未知數)，便叫做二元一次方程式．

二元一次方程式的兩個未知數值，是不定的．如將 $y+3-x=0$，寫成 $y=x-3$，任設一 x 值，y 總有一對應值．如令 $x=1$，則 $y=1-3=-2$，令 $x=2$，則 $y=-1$．這樣求得的 x, y 的對應值有無限之多，可排成一表．其中每一組 x, y 對應值，都叫做二元一次方程式的解．

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$

所以單獨一個二元一次方程式，是無定解的．

64. **聯立二元一次方程式** 若有兩個二元一次方程式，有公有的兩個未知數，如

$$\begin{cases} 2x-3y=9, & (1) \\ 3x+\ y=8, & (2) \end{cases}$$

我們知道每一式,都是無定解,倘能在雙方無限多的解中,找出一對相同的 x, y 的對應值,豈不是(1),(2)兩式都能適合嗎?這個解是(1),(2)兩式的公解,也就是(1),(2)兩式聯立起來做成的一組聯立方程式的解.

但聯立二元一次方程式究竟如何解法呢?現在分述如下.

65. **加減消去法**　解聯立二元一次方程式,須將兩式併成一式,消去兩個未知數之一,得出一個一元一次方程式,然後依前法解出一元,代入原式,再求第二元.加減消去法便是此類方法中的一種.

例一　解聯立方程式 $\begin{cases} 2x-3y=9, & (1) \\ 3x+y=8. & (2) \end{cases}$

解一　第(2)式乘3,

$$9x+3y=24, \qquad (3)$$

(1)+(3),消去 y,得　$11x=33,$

$$\therefore\ x=3.$$

代入(2)式,得　$y=-1.$　　答 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

校驗　把求得的 x, y 值代入聯立方程式,看他是否都適合.

(1)　$6+3=9,$　　(2)　$9-1=8.$　　(適合)

解二　用3乘(1)式，2乘(2)式，得

$$6x-9y=27, \qquad (3)$$

$$6x+2y=16. \qquad (4)$$

(4)−(3)，消去 x，得　$11y=-11$；故　$\left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x=3 \end{array}\right\}$答

代入(1)，卽得

所得結果與前相同.

加減消去法：

1．先決定消去 x 或 y.

2．將兩方程式各乘一常數，使要消去的未知數的係數有相同的絕對值.

3．如果二係數同號，則兩式可相減；異號，則兩式可相加，以消去一個未知數，得到含他一未知數的一元一次方程式.

4．解此式，得一未知數值，代入原式，再求他一未知數值.

5．校驗 x, y 的值是否適合聯立方程式.

習題四十七

用加減消去法解下列各聯立方程式：

1．$\begin{cases} 2x\quad 3y=7, \\ 4x-5y=3. \end{cases}$　　　2．$\begin{cases} 7x+2y=30, \\ y-3x=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+4y=58, \\ 3x+7y=67. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} x=y+5, \\ y=5-x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-\dfrac{y}{2}=3, \\ 2x-y=0. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} \dfrac{5x-3y}{3}=7, \\ \dfrac{x+5}{4}=\dfrac{10+2y}{3}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y=0.6, \\ 17x-y=0.58. \end{cases}$　　8. $\begin{cases} 0.5x+0.75y=8, \\ 0.2x+0.1y=0.16. \end{cases}$

66. 代入消去法

例　解聯立方程式 $\begin{cases} 2x-3y=9, & (1) \\ 3x+y=8. & (2) \end{cases}$

解一　先由(2)式得　$y=8-3x,$　(3)

代入(1),　$2x-3(8-3x)=9$

解之,得　$11x=33,$　$\therefore$　$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right\}$答

代入(3),得

校驗　見前.

解二　先由(1)式解 x,　$x=\dfrac{1}{2}(3y+9),$　(3)

代入(2),　$\dfrac{3}{2}(3y+9)+y=8,$

用2乘,　$3(3y+9)+2y=16$

解之，得 $\left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x=3 \end{array}\right\}$答

代入(3)，得

解一與解二那個便利?

代入消去法:

1. 先由一方程式，用含一未知數的式 (A) 表出他一未知數值.

2. 將(A)式代入第二方程式，消去一未知數，得到含他一未知數的一元一次方程式.

3. 解此式，得一未知數值.

4. 代入(A)，再求他一未知數值.

5. 校驗解答.

習題四十八

用代入消去法解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+2y=11, \\ 3x-y=-2. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} 4x+9y=-1, \\ 2x-6y=10. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -5y+3x=-1, \\ 2x+7y=20. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-y=1, \\ x-\dfrac{y}{2}=5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{y}{5}-\dfrac{x}{10}=1, \\ \dfrac{2y}{3}-\dfrac{x}{4}=5. \end{cases}$　　　6. $\begin{cases} 8x+3y=24, \\ 2x-y=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-4y=18, \\ 3x=-2y. \end{cases}$　　　8. $\begin{cases} x+0.2y=-1.4, \\ 0.4x-y=1.6. \end{cases}$

67. 比較消去法

例　解聯立方程式$\begin{cases} 2x-3y=9, & (1) \\ 3x+y=8. & (2) \end{cases}$

解一　從兩式用同一未知數的式表出他一未知數值.

$$x=\tfrac{1}{2}(9+3y), \qquad (3)$$

$$x=\tfrac{1}{3}(8-y). \qquad (4)$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}(9+3y)=\tfrac{1}{3}(8-y).$$

用6乘，　　$3(9+3y)=2(8-y)$.

解之，得　　$y=-1$

代入(3)，得　　$x=3$　　答

校驗　見前.

若先就(1)，(2)解出同一未知數 y，再依法求解，所得的結果也是一樣的.

比較消去法：

1. 先從兩式用同一未知數的式表出他一未知數值.

2. 把兩等式結合,得一元一次方程式.

3. 解此式,得一未知數值.

4. 代入一適當方程式,再求他一未知數值.

5. 校驗答案.

習題四十九

用比較消去法解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+15y=33, \\ x+2y=7. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y=7, \\ 5x-2y=11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y=4, \\ 3x-y=21 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 7m-n=2, \\ n-2m=-3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x-8y=-30, \\ x+11y=20. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x+2y=0, \\ 3x+y=3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 10x+2y=22, \\ y-5x=11. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x=3y-19, \\ y=3x-23. \end{cases}$

68. **無解方程式** 設有聯立二元一次方程式,竟無一組 x,y 對應值可作兩式的公解,則此種聯立方程式,叫做無解方程式.

例如聯立方程式 $\begin{cases} 3x-2y=8, & (1) \\ 6x-4y=9. & (2) \end{cases}$

$(1)\times 2,\qquad 6x-4y=16.\qquad (3)$

此(2),(3)兩式,顯然矛盾,決無一組 x,y 對應值可以同時適合;因可作(3)式的解,纔可作(1)式的解,今(2),(3)兩式無公解,所以(1),(2)兩式無公解,如此(1),(2)爲無解方程式.有時叫做矛盾方程式.

無解方程式的特點,是兩方程式中 x,y 的係數成比例,不與常數項成比例.如上例 x 的係數之比,等於 y 的係數之比,不等於常數項之比:

$$\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{8}{9}.$$

凡是屬於這類情形的都無解.

69. **無定解方程式**　設聯立二元一次方程式,第一式中 x,y 的係數及常數項,順次與第二式中 x,y 的係數及常數項比例,如

$$\begin{cases} 3x-2y=8, & (1) \\ 6x-4y=16, & (2) \end{cases}$$

有　$$\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.$$

則此表示(1)式乘2就成(2)式,可知(1)之解,便是(2)之

解，但就(1)式論是無定解，其任一解，都能適合(2)式．所以這組聯立方程式是無定解．

70. 聯立二元一次方程式解的判別

設聯立二元一次方程式

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \qquad (1)\\ a'x+b'y&=c' \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

解 $(1)\times b'-(2)\times b$，得

$$(ab'-a'b)x=cb'-c'b. \qquad (3)$$

又$(2)\times a-(1)\times a'$，得

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c. \qquad (4)$$

(A) 若 $ab'-a'b\neq 0$ 即 $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$,

則由(3)，(4)，解得

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

(B)若 $ab'-a'b=0$, $cb'-c'b\neq 0$, 即 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$,

則此時沒有一組 x,y 值能適合(3)，(4)兩式，故無一組 x,y 值能適合(1)，(2)兩式，即原方程式無解．

(C)若 $ab'-a'b=0$, $cb'-c'b=0$, 即 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$,

則(3),(4)兩式變爲　$0x=0$,　$0y=0$.

x, y 等於任何數皆合.此時原方程式無定解.

結論　設聯立二元一次方程式

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

(A) 若 $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$, 則(I)有獨解[就是(I)的公解祇有一個的意思].

(B) 若 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$, 則(I)無解,

(C) 若 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$, 則(I)無定解.

習　題　五　十

解聯立方程式:

1. $\begin{cases} 2x+3y=22, \\ 5x-7y=-3. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x+2y=12. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 12n-2m=18, \\ 3m=18n+10. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 3x+14y=7, \\ 12+5y=-x. \end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{2x}{9}-\dfrac{y}{2}=-1,\\[2ex] x=\dfrac{9y}{4}-4\dfrac{1}{2}.\end{cases}$　　6. $\begin{cases}\dfrac{x+3}{7}-\dfrac{y}{5}=0,\\[2ex] 5x+2=7y.\end{cases}$

71. **應用問題** 用聯立二元一次方程式解應用問題，必須假定兩個適當的未知數，立出兩個一次方程式，聯立起來，照前法求得此聯立式的解，然後對題意作一語言答案．這類問題到手，先辨明題意，大都題意的中堅部分，可分作兩段．每段語言，可做成一方程式；兩段話，可做成兩個方程式．

例一 A, B 二人相距 27 里，(i)若同時同方向前行，則經 18 小時 A 追及 B．(ii)若二人相向而行，則經 6 小時而相會．求 A, B 的速度．

解 設　　x 為 A 每小時所行里數，

y 為 B 每小時所行里數．

按題內(i)的語言，可變作一方程式，即

$$18(x-y)=27. \qquad (1)$$

按(ii)的語言，又可立出一方程式

$$6(x+y)=27. \qquad (2)$$

解(1)，(2)兩式，得　$x=3,\ y=\frac{3}{2}$．

答 A 每小時行 3 里，B 每小時行 $\frac{3}{2}$ 里．

例二 A 與 B 各有若干元，(i)若 A 給 10 元與B，則 B 所

有當 A 的 3 倍. (ii)若是 B 給 10 元與 A, 則 A 所有當 B 的 2 倍. 問 A, B 各有幾元?

解　設 A 有 x 元, B 有 y 元.

由(i)得方程式　　$y+10=3(x-10)$.　　(1)

由(ii)得方程式　　$x+10=2(y-10)$.　　(2)

由(1), (2)兩式, 得　$x=22$　$y=26$.

答　A 有 22 元, B 有 26 元.

習題五十一

1.　二數的差為 3, 其和為 33, 求二數.

2.　二數的商為 9, 其和為 60, 求二數.

3.　A 與 B 各有若干元, 若 A 給 B 15 元, 則兩人所有元數相等, 若 B 給 A 58 元, 則 A 所有當B的 3 倍, 問每人有幾元?

4.　父子二人, 不知其歲數, 但知 7 年前, 父年為子年的 4 倍, 7 年後, 父年為子年的 2 倍, 問父年子年各若干?

5.　有一兩位數, 加上 9, 則得顛倒數, 且知原數與顛倒數的和為 33, 求原數.

6.　某帆船順流而行, 每小時行 19 里, 逆流而行, 每小時行 5 里. 問流速划速各多少?

7.　貨物 385 斤, 用 5 馬 14 牛搬運, 或用 8 馬 7 牛搬運, 都能一次運完. 問每馬每牛所能運的重量各多少?

8. A,B二人,月薪合計 1400 元,A 每月用去他月薪的$\frac{2}{3}$;B 每月用去他月薪的$\frac{3}{4}$,其餘合計尚有 404 元,求各人所得月薪.

9. 甲 8 小時所行的路,比乙 7 小時所行的多 12 里,乙 13 小時所行的路,比甲 9 小時所行的多 7 里. 問每小時各行幾里?

10. 筆 7 枝墨 5 錠之價共 88 元,筆 4 枝墨 9 錠之價共 81 元,問筆與墨每件之價各多少?

11. 有一矩形,若長減 3 尺,闊增 2 尺,則成正方形,而其面積比原面積少 5 方尺. 求此矩形的長及闊.

12. 兒童分桃若干枚,若人數多 6 人,則各人所得少 3 枚,若人數少 3 人,則各人所得多 3 枚. 求兒童數及桃數.

13. 兒童分桃若干枚,若每人給 5 枚,則不足 10 枚,若每人給 4 枚,則餘 5 枚,求兒童數及桃數.

14. 客車每秒鐘行 66 尺,貨車每秒鐘行 44 尺. 現在兩車在平行軌道上過着,經 15 分鐘,才互相過完. 但知貨車的長是客車的兩倍,求各車的長.

72. **聯立三元一次方程式** 含三個未知數的一組方程式,叫聯立三元方程式.

例 解聯立三元一次方程式

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=10 \\ 2x-3y-z&=-1 \\ 3x+y-2z&=9 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(1)\\ &(2)\\ &(3) \end{aligned}$$

解 先消去一未知數，合併三式組成聯立二元一次方程式．依前法，解出此二未知數值，代入原式之一，再求他一未知數值．

今先就三式消去 z．

(1)+3×(2)，得 $7x-7y=7$．

即 $\left.\begin{aligned} x-y&=1 \\ x-7y&=-11 \end{aligned}\right\}$ (4)

2×(2)－(3)，得 (5)

解(4)，(5)兩式，得 $x=3$，

$y=2$．

代入(2)，得 $z=1$． 答 $\begin{cases} x=3, \\ y=2, \\ z=1. \end{cases}$

校驗 (1) $3+4+3=10$，

(2) $6-6-1=-1$， (3) $9+2-2=9$．

聯立三元一次方程式解法：

1．先就三式消去一未知數，得出一組聯立二元一次方程式．

2．依聯立二元一次方程式解法，解出此二未知數值．

3．代入原式之一，再求他一未知數值．

4．校驗解答．

若遇聯立四元一次方程式，則先就原式消去一未知數，得出一個聯立三元式，再依上法求解．四元以上的照此類推．

習題五十二

解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+y-2z=13, \\ x-3y-z=-3, \\ x+y+4z=-17. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 3x-y-5z=13, \\ 5x+3y+2z=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 3x+z=5, \\ y-2z=9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3m+5n=74, \\ m-2p=-16, \\ 7p-4n=44. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=6, \\ y+\dfrac{z}{2}+\dfrac{x}{3}=-1, \\ z+\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=17, \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{p}=1, \\ \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=0, \end{cases}$

（註： 此題無須去分母）

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=2, \\ \dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{C}=3, \\ \dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}=4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=26, \\ \dfrac{4}{y}-\dfrac{10}{z}=3, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{z}=\dfrac{25}{2}, \end{cases}$

復習題九

有時可先將兩個方程式相加，或相減，再做加減消去法，可以使解法更簡單.這種方法在係數有特殊情形時，方可適用.

1. 解$\begin{cases}53x+y=160,\\x+53y=56.\end{cases}$　　2. 解$\begin{cases}73x+15y=395,\\15x+73y=221.\end{cases}$

未知數在分母中時，假如兩個方程式，其相當的分母相同，往往可以不去分母.

3. 解$\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=7,\\\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=2,\end{cases}$　　4. 解$\begin{cases}\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{3}{y-3}=8,\\\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{2}{y-3}=2.\end{cases}$

(提示：令$u=\dfrac{1}{x}$，$v=\dfrac{1}{y}$)

有時，可把三個方程式相加，解法卻簡便.

5. 解$\begin{cases}x+2y+3z=10,\\2x-3y-z=-1,\\3x+y-2z=9.\end{cases}$　　6. 解$\begin{cases}x+y=7,\\y+z=2,\\z+x=1.\end{cases}$

7. 解$\begin{cases}-x+y+z=8,\\x-y+z=10,\\x+y-z=12.\end{cases}$　　8. 解$\begin{cases}x+y+z=6,\\y+z+u=9,\\z+u+v=8,\\u+x+y=7,\end{cases}$

9. 解 $\begin{cases} x+2y=5, \\ y+2z=8, \\ z+2u=11, \\ u+2x=6. \end{cases}$

10. 解 $\begin{cases} 3x+7y=17a, \\ 10x-4y=2a. \end{cases}$

11. 解 $\begin{cases} 3x-y=105, \\ 4x+9y=35. \end{cases}$

12. 解 $\begin{cases} 11x+5y=33c, \\ \frac{x}{c}-\frac{y}{2c}=3. \end{cases}$

13. 有一分數，設分子加 5，分母減 5，他的值是 1；若分母加 4 他的值是 $\frac{1}{3}$，求這分數.

14. 有一分數，設分子的 2 倍減 3，分母加 1，他的值是 $\frac{1}{2}$；若分子加 4，用 12 減去分母做分母，他的值是 1. 求這分數.

15. 某人投資生息，一部分年利率是 4%，又一部分年利率是 7%，每年得利息 145 元. 若利率各減 $\frac{1}{2}$%，則每年得利息 132 元 5 角，問兩部分本金各多少？

16. 有一工程，甲乙丙三人合作，30 日可成，甲乙二人合作，32 日可成，乙丙二人合作，120 日可成，問三人獨做此工程，各需幾日？

17. 有三數，第一數同第二數的和是 54，第二數同第三數的和是 65，第一數同第三數的和是 59，求此三數.

18. 一個三位數，他的數字和是 7，若十位數字與百位數字交換，則比原數大 180. 又他的顛倒數比原數小 99，求原數.

第十章

函數及其圖解

73. **常數與變數**　在一問題中可以變動的量，叫做變量，代表變量的數，叫做變數．反之，不能變動的數，就叫做常數．

如等速運動中，物體所經的距離 d 隨時間 t 而變動．那麼距離與時間是變量，代表這變量的數，是為變數．而速度 v 是不變的，所以代表它的數，就是常數．

如以方程式表之：　　$d=vt$．

那麼，此式中的 v 為常數，d 和 t 為變數．

又如在式 x^2+4x+5 中，x 是變數，4，5 是常數．

在式 $ax+by+c$ 中，x，y 是變數，a，b，c 是常數．

由上面等速運動的例中，時間可以自由變動，而距離則跟着時間而變動．這樣自由變動的變數，叫自變數；跟着自變數而變動的變數，叫因變數．

74. **函數**　如上面所說，甲數跟着乙數而變動，這可以稱為甲數是乙數的函數．含有變數 x 的代數式，它的值跟着 x 的值而變動，所以也就是 x 的函數．在方程式 $y=ax+b$ 中，y 是 x 的函數．

x 的函數可用 $f(x)$ 符號代表之.

假如變數是 y 或 t 等, 它們的函數就可以依次用 $f(y)$ 或 $f(t)$ 等表示之.

如有一函數爲 $3x+2$, 則可以寫爲:

$$f(x)=3x+2.$$

令 $x=1$ 代入上式的兩端,

$$f(1)=3\times1+2=5.$$

此 $f(1)=5$ 就叫做函數(1)的函數值.

如令 $x=2$, 就得函數值 $f(2)=8$, 由是類推, 知道 $f(3)=11$, $f(-2)=-4$ 等.

在 x 函數中, 如所含的 x 只有一次方的, 這函數就稱爲一次函數. x 最高有二次方的, 就稱爲二次函數.

75. **數的圖解與正坐標制** 設 $X'X$ 是一無限直線, 在線上取定點 O, 稱爲原點; 在原點右邊取 $U, A, B, \cdots\cdots$ 等點, 左邊

$$\begin{array}{c} -3\ -2\ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3 \\ \overline{X' \qquad B'\ A'\ U'\ O\ U\ A\ B \qquad X} \end{array}$$

取 $U', A', B', \cdots\cdots$ 等點, 且令 $\cdots\cdots B'A'=A'U'=U'O=OU=UA=AB\cdots\cdots$, 如選定 OU 爲長度的單位, 右向爲正向, 則

$$OU=1 \qquad OA=2, \qquad OB=3, \cdots\cdots\cdots\cdots;$$

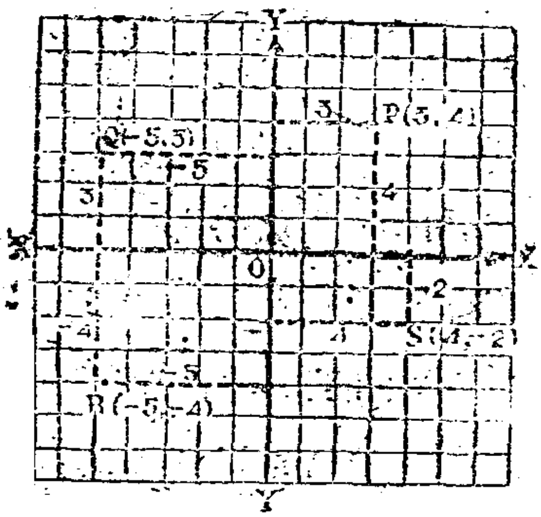
而 $OU'=-1,\ OA'=-2,\ OB'=-3, \cdots\cdots\cdots$.

因 O 是定點, 我們就用 $U, A, B, \cdots\cdots$ 等點表 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 等

數, U', A', B', ……等點表 $-1, -2, -3,$ ……等數. 定點 O 表零, 點 O 右邊的點表正數, 左邊的點表負數.

可見在無限直線上選定 O, U 二點後, 任舉一數可求得代表這數的點, 直線上任取一點必代表一數. 點和數之間有一一相應的關係.

右圖中 $X'X$ 和 $Y'Y$ 是二直線互相垂直於點 O, 兩線都用交點 O 爲原點, 另在二線上選定代表1 的點.



設點 P 是 $X'X, Y'Y$ 二線所決定的平面上的一點, 由點 P 作二直線, 一垂直於 $X'X$, 一垂直於 $Y'Y$. 點 P 在 $X'X$ 上的垂足所代表的數, 叫做點 P 的橫坐標; 而在 $Y'Y$ 上的垂足所代表的數, 叫做 P 點的縱坐標.

上圖中, 如每格代表單位長度, 則 P 點的橫坐標是 3, 縱坐標是 4, 通常用 $(3, 4)$ 表出. 圖上 Q, R, S 各點的坐標各爲 $(-5, 3)$ $(-5, -4)$, $(4, -2)$.

$X'X, Y'Y$ 各稱爲 x 軸 y 軸, 又稱爲橫軸, 縱軸; 二軸合稱爲坐標軸. 坐標軸分平面爲四部分, 稱爲象限. XOY 稱爲第一象限, $X'OY$ 爲第二象限, $X'OY'$ 爲第三象限, XOY' 爲第四象限.

一平面上選定坐標軸後，平面上每點都有一定的坐標．知道某點的坐標，便可在平面上作出某點．

習 題 五 十 三

1．常數和變數有何區別？

2．何謂函數？

3．已知 t 的函數爲 $3t+5=0$，問可用什麼符號代表它？設 $t=3, -2, 1, 3$ 等時，求其函數值．

4．設 $f(x)=2x-7$，求 $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$等的值．

作出下列各點．

5．$(4, 2)$, $(-4, 2)$, $(-4, -2)$, $(4, -2)$.

6．$(5, -1)$, $(-1, 5)$, $(-3, -3)$, $(6, -4)$.

7．$(0, 2)$, $(0, -6)$, $(2, 0)$, $(-5, 0)$.

8．$(2, 2)$, $(0, 6)$, $(-1, 4)$, $(6, 0)$.

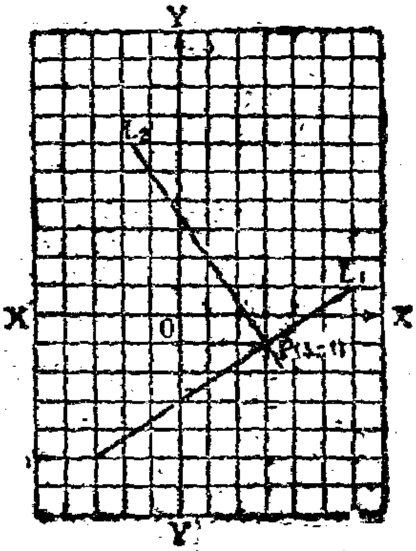
9．$(0, -5)$, $(-5, 0)$, $(0, 0)$.

76．**一次函數的圖形** 設 $f(x)$ 爲 x 的函數，它的數值用 y 代表，那麼 y 的數值跟着 x 的數值而變動．現在把 x 爲橫坐標，y 爲縱坐標，依 x 與 y 的關係在平面上作出許多的點，將這許多點連成一線，這線就叫做 $f(x)$ 的圖形．

例一 求 $f(x)=x-3$ 的圖形．

解 設 y 代表 $f(x)$ 的值，

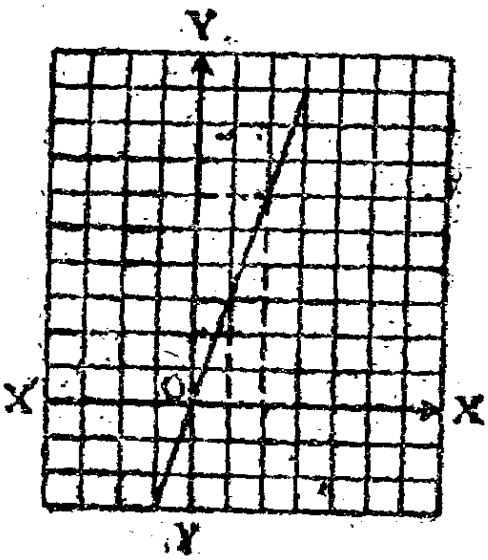
如任設一 x 值，y 總有一對應值，爲數無限，排列如下表：



x	·5	4	3	2	1	0	−1…
y	·2	1	0	−1	−2	−3	−4…

然後把各對的值，在平面上作點，再把許多點聯結起來，所成的一條線，如右圖，就是 $f(x)$ 的圖形。

例二 求 $y=3x$ 的圖形。



解

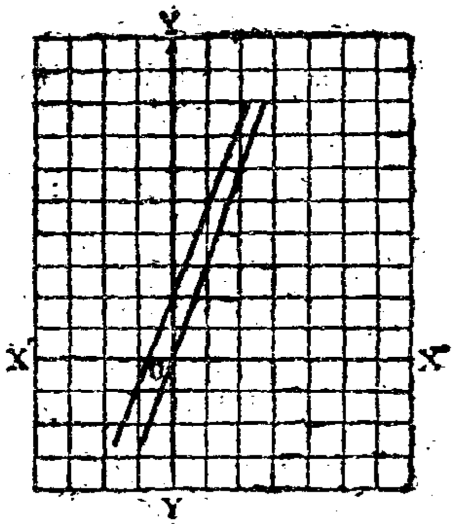
x	0	1	2	3…
y	0	3	6	9…

x,y 的對應值除 0 外，其比無不相等，故聯結以此等對應値爲坐標的諸點，必成一直線，且通過 O 點。

一般的說，凡缺少常數項的函數的圖形，都是通過原點的直線。

例三　求 $y=3x+2$ 的圖形.

解　設於例二的圖形上，每點各增加縱坐標二單位，則可得適合於 $y=3x+2$ 的諸點，故聯結此諸點的圖形，必與前一圖形平行.



一般的說，凡 $y=mx+b$ 的圖形，都是平行於 $y=mx$ 的直線.

由上舉的例，可以看出凡一次函數的圖形，都是一直線.

按兩點即可決定一直線，故圖解時，祇要任作兩點，則由此決定的直線，即為該函數的圖形.

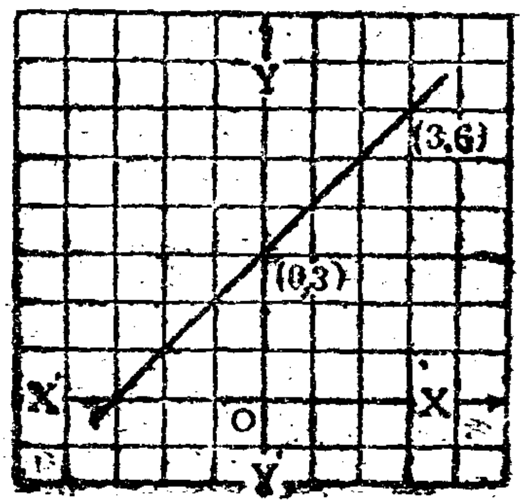
例四　求作 $f(x)=x+3$ 的圖形.

令　$x=3$.

則　$f(3)=6$.

又　$x=0$.

則　$f(0)=3$.



先求以 $(3,6)$ 與 $(0,3)$ 做坐標的兩點，聯這兩點所成的直線，就是 $f(x)$ 的圖形.

校驗　隨意再令 $x=-3$.

則 $f(-3)=0$.

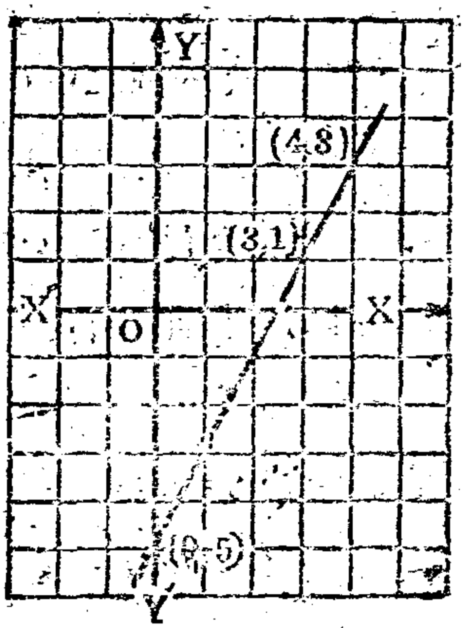
作$(-3,0)$點，如果是在所做直線的上面，那麼所得的圖形是對的.

例五 求作 $f(x)=2x-5$ 的圖形.

令 $x=4$, $f(4)=3$;

又 $x=3$, $f(3)=1$;

作成直線如右圖.



校驗 $x=0$, $f(0)=-5$.

$(0,-5)$點適在所作直線的上面，故知結果無誤.

習題五十四

圖解下例各函數:

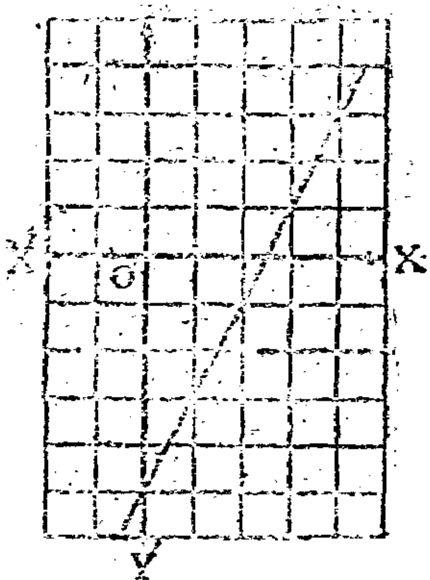
1. $f(x)=3x-8$.　　2. $f(x)=-x$.

3. $f(x)=2x+4$.　　4. $f(x)=\frac{1}{2}x$.

5. $y=-3x+2$.　　6. $x=3y$.

77. **一元一次方程式圖解** 一元一次方程式 $ax+b=0$ 的根 $x=-\frac{b}{a}$，若把它代入函數 $f(x)=ax+b$ 中的 x，則函數 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ 的值等於0. 因此知道$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$是函數 $f(x)=ax+b$

的圖形上的一點。



因為縱坐標為 0 的點是在 x 軸上，所以一元一次方程式 $ax+b=0$ 的根，就是函數 $f(x)=ax+b$ 的圖形，與 x 軸的交點的橫坐標。

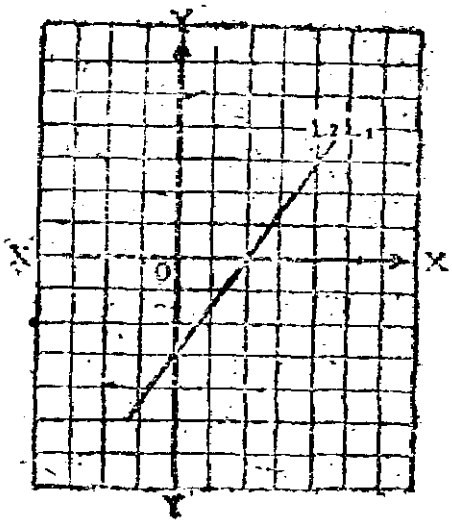
例　用圖解法求 $2x-5=0$ 的根。

解　設 $f(x)=2x-5$。

作 $f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點的橫坐標等於 $2\frac{1}{2}$，所以方程式 $2x-5=0$ 的根就是 $2\frac{1}{2}$。

78. **聯立二元一次方程式圖解**

例一　圖解 $\begin{cases} 2x-3y=9, & (1) \\ 3x+2y=7. & (2) \end{cases}$



解　先圖解(1)式 $y=\frac{1}{3}(2x-9)$ 得直線 L_1。

(1) $\begin{array}{c|cc} x & 0, & 4.5 \\ \hline y & -3, & 0 \end{array}$

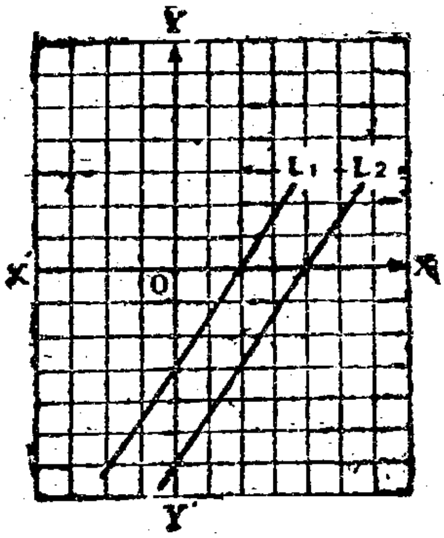
次圖解(2)式 $y=\frac{1}{2}(7-3x)$，得直線 L_2。

(2) $\begin{array}{c|cc} x & 0, & 2\frac{1}{3} \\ \hline y & 3.5, & 0 \end{array}$

此二直線相交於 P，其坐標由圖上可決定為 $(3,\ -1)$。讀者

試用聯立方程式解法求出其解答，再兩相比較．可知圖解聯立二元一次方程式，所得二直線的交點，即爲該聯立方程式的解答．

例二 圖解$\begin{cases}3x-2y=6, & (1)\\ 6x-4y=24. & (2)\end{cases}$



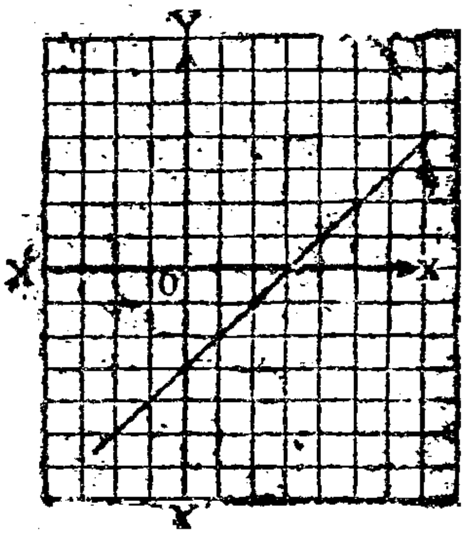
解 作(1)，(2)兩式的直線 L_1 及 L_2．

(1) $\begin{array}{c|cc} x & 0, & 2 \\ \hline y & -3, & 0 \end{array}$ (2) $\begin{array}{c|cc} x & 0, & 4 \\ \hline y & -6, & 0 \end{array}$

此 L_1, L_2 爲平行二直線，無交點，故原方程式無解，與 68 節所論相符．

可知無解的聯立二元一次方程式的圖解，是平行的二直線．

例三 圖解$\begin{cases}3x-2y=6, & (1)\\ 6x-4y=12. & (2)\end{cases}$



解

(1) $\begin{array}{c|cc} x & 0, & 2 \\ \hline y & -3, & 0 \end{array}$ (2 $\begin{array}{c|cc} x & 0, & 2 \\ \hline y & -3, & 0 \end{array}$

圖解(1)，(2)兩式得二直線相合成一直線，其公共點有無限多．故原方程式無定解，也與 69 節所論相符．

可知無定解的聯立二元一次方程式的圖解是由二直線相疊合的一直線.

結論　設$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$圖解所得二直線爲 L_1 及 L_2.

(A)　若$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$,則 L_1 與 L_2 相交,其交點的坐標,卽爲原式的解答.

(B)　若$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$,則 L_1 與 L_2 平行,表示無交點,無解.

(C)　若$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$,則 L_1 與 L_2 疊合,表示點點皆公有,故無定解.

習題五十五

用圖解法求下列一元一次方程式的根:

1. $x-\frac{1}{3}=0$.　　　　2. $4x-1=0$.

圖解下列各聯立方程式,

3. $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-1. \end{cases}$　　　　4. $\begin{cases} x+y=6, \\ x-3y=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases}2x+y=4,\\3x-y=21.\end{cases}$

6. $\begin{cases}7x-8y=-30,\\x+11y=20.\end{cases}$

7. $\begin{cases}6n-m=9,\\3m=18n+10.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dfrac{2x}{9}-\dfrac{y}{2}=-1,\\x=\dfrac{9y}{4}-4\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

第十一章

乘除公式及因子分解

79. **乘除公式** 代數學上有許多基本形式的乘法及除法，其積及商可以列爲公式．凡遇類似各公式的問題，可以直接代入公式，書出其積或商，省去中間的乘除運算，簡便得多．故此類公式當分辨清晰，練習純熟，深切記憶．

80. **指數定律** 在第五，第六兩章內講過的指數定律，兹再列舉如下：

I. $$a^m a^n = a^{m+n}.$$

II. $$a^m \div a^n = a^{m-n}. \qquad (m>n)$$

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}. \qquad (m<n)$$

III. $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

VI. $$(ab)^m = a^m b^m.$$

81. **兩數和及兩數差的平方**

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b)$$
$$= a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2.$$

又 $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)$

$$=a^2-2ab+b^2.$$

公式一 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

公式二 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

故兩數和的平方，等於兩數的平方和，加兩數相乘積的二倍.

又兩數差的平方，等於兩數的平方和，減兩數相乘積的二倍.

應用

例一 $(3m+5n)^2=(3m)^2+2(3m)(5n)+(5n)^2$

$$=9m^2+30mn+25n^2.$$

例二 $(4x-3y)^2=(4x)^2-2(4x)(3y)+(3y)^2$

$$=16x^2-24xy+9y^2.$$

推廣 $(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.$$

公式三 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

應用

例一 $(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca.$

例二 $(3x-2y+4z)^2=(3x)^2+(-2y)^2+(4z)^2$

$$+2(3x)(-2y)+2(-2y)(4z)+2(4z)(3x)$$

$$=9x^2+4y^2+16z^2-12xy-16yz+24xz.$$

習題五十六

求下列各題的乘積:

1. $(x+y)^2$.　　2. $(x+1)^2$.

3. $(a+2b)^2$.　　4. $(3a+2b)^2$.

5. $(4x+5y)^2$.　　6. $(ax+by)^2$.

7. $(4x-3y)^2$.　　8. $(2a+3)^2$.

9. $(x+\frac{1}{2}a)^2$.　　10. $(ax-by)^2$.

11. $(5m-3n)^2$.　　12. $(ax-a)^2$.

13. $(5x-3)^2$.　　14. $(1-x^2y^2)^2$.

15. $(x-1)^2$.　　16. $(a+b-c)^2$.

17. $(2-y+z)^2$.　　18. $(6x-2y+3z)^2$.

19. $(4m-5p-2n)^2$.　　20. $(3x-by-6z)^2$

32. 兩數和乘兩數差

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$$
$$=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

公式四　　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

故兩數和乘兩數差,等於兩數的平方差.

應用　　$(3x+5y)(3x-5y)=(3x)^2-(5y)^2$
$$=9x^2-25y^2.$$

推廣　　$(3x+2y-4z)(3x+2y+4z)$

$$=(3x+2y)^2-(4z)^2=9x^2+4y^2+12xy-16z^2.$$

習題五十七

求下列各題的乘積:

1. $(x+3)(x-3)$.　　2. $(5-y)(5+y)$.

3. $(2x+3)(2x-3)$.　　4. $(x+2c)(x-2c)$.

5. $(3xy+2)(3xy-2)$.　　6. $(a^2+3)(a^2-3)$.

7. $(a+b+c)(a+b-c)$.　　8. $(am-bn)(bn-am.)$

9. $(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$.

10. $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

11. $(4x+3y-4z)(4x+3y+4z)$.

12. $(2x+y-z)(2x-y+z)$.

83. $(x+a)(x+b)$.

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab.$$

公式五　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

故有公項的兩個二項式相乘積，等於此公項的平方，加公項乘二非公項的代數和，再加二非公項的相乘積。

應用

例一　$(x+3)(x+5)=x^2+8x+15.$

例二　$(x-2)(x+4)=x^2+(4-2)x-8=x^2+2x-8.$

例三　$(x-2)(x-5)=x^2-(2+5)x+10=x^2-7x+10.$

習題五十八

求下列各題的積:

1. $(x+3)(x+6)$.　　2. $(y+6)(y+4)$.

3. $(x-5)(x-6)$.　　4. $(x+y)(x+2y)$.

5. $(x-5a)(x+3a)$.　　6. $(x-13)(x+12)$.

7. $(ax+3)(ax-5)$.　　8. $(2y+3)(2y+4)$.

9. $(4ab+1)(4ab-2)$.　　10. $(3x-2)(3x+5)$.

11. $(5a-6b)(5a-7b)$.

12. $(2m-3n+p)(2m-3n-3p)$.

84. $(ax+b)(cx+d)$.

$$(ax+b)(cx+d)=ax(cx+d)+b(cx+d)$$
$$=acx^2+(ad+bc)x+bd.$$

中項 x 的係數是 $\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\times\begin{matrix}b\\d\end{matrix}$ 交叉乘積的代數和.

公式六　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\times\begin{matrix}b\\d\end{matrix}\right)x+bd.$

故 $(ax+b)(cx+d)$ 的乘積中的首項,等於原兩式首項的相乘積,乘積中的末項,等於原兩式末項的相乘積,乘積的中項等於原兩式首末二項交叉相乘積的代數和.

應用　**例一**　$(3x+4)(2x+1)=6x^2+(8+3)x+4$
$$=6x^2+11x+4.$$

例二 $(3x-4)(2x+5)=6x^2+(15-8)x-20$

$$=6x^2+7x-20.$$

例三 $^*(5x-8)(4-7x)=-(5x-8)(7x-4)$

$$=-(35x^2-76x+32)=-35x^2+76x-32.$$

習題五十九

求下列各題的積:

1. $(2x+5)(x+1)$.
2. $(4x+3)(7x-2)$.
3. $(3x-1)(2x-5)$.
4. $(7x-8)(8x+7)$.
5. $(2+3x)(3-5x)$.
6. $(3xy+2z)(4xy-5z)$.
7. $(7+10xyz)(8xyz-7)$.
8. $(5xy^2+7z)(3xy^2-8z)$.
9. $(5x-7)(5-8x)$.
10. $(3xy-4)(3-5xy)$.

35. **兩數和及兩數差的立方.**

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$(a-b)^3=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$$

$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

公式七 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

公式八 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

---

* 將$(5x-8)(4-7x)$化爲$(5x-8)(-7x+4)$再乘亦可.

故兩數和的立方，等於兩數的立方和，加兩數和乘兩數積的三倍.

又兩數差的立方，等於兩數的立方差，減兩數差乘兩數積的三倍.

應用 例一 $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1.$

例二 $(x-2y)^3=x^3-3x^2(2y)+3x(2y)^2-(2y)^3$

$$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3.$$

習 題 六 十

求下列各題的立方:

1. $(x+y)^3$. 2. $(x+1)^3$.

3. $(x+a)^3$. 4. $(2x+y)^3$.

5. $(3x+2)^3$. 6. $(x-y)^3$.

7. $(x-1)^3$. 8. $(x-3)^3$.

9. $(2x-1)^3$. 10. $(3x-2y)^3$.

86. 除法公式

公式九 $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$

公式十 $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2.$

上兩式亦可書爲

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

故以兩數和，除兩數的立方和，等於兩數的平方和，減兩數的相乘積.

又以兩數差，除兩數的立方差，等於兩數的平方和，加兩數的相乘積.

應用　例一　$\dfrac{1+x^3}{1+x}=1-x+x^2$.

例二　$\dfrac{8y^3-1}{2y-1}=(2y)^2+(2y)+1=4y^2+2y+1$.

習題六十一

求下列各題的商:

1. $(m^3+64)\div(m+4)$.
2. $(8+a^3b^6)\div(ab^2+2)$.
3. $(p^9+27n^6)\div(p^3+3n^2)$.
4. $(1+64a^3b^3)\div(1+4ab)$.
5. $(x^3+27)\div(x^2-3x+9)$.
6. $(x^{12}+a^3b^6)\div(x^4+ab^2)$.
7. $(343y^3+1000z^3)\div(7y+10z)$.
8. $(a^{15}+b^6c^9)\div(a^5+b^2c^3)$.
9. $(x^3y^3-1)\div(x^2y^2+xy+1)$.

10. $(p^3q^6-27c^9)\div(p^2q^4+3pq^2c^3+9c^6)$.

11. $(125-b^3)\div(5-b)$.

12. $(a^{12}-x^6y^6)\div(a^4-x^2y^2)$.

87. **因子分解法** 將一式分成兩式或數式，使其乘積等於原式，此種法則叫做因子分解法.

88. **質式** 一式除常數及其自身外，沒有其他因子的，叫作質式.

因子成質式的叫做質因子.

分解一代數式的因子，卽將所有質因子全部解出.

89. **提出公因子** 多項式的各項若有公因子，可把他逐一提出.

例一 $x^2+2x=x(x+2)$.

例二 $2a^3+6a^2-4a=2a(a^2+3a-2)$.

例三 $4x^5y^3-6x^4y^4+12x^3y^5=2x^3y^3(2x^2-3xy+6y^2)$.

例四 $(x-y)^2-5a(x-y)=(x-y)(x-y-5a)$.

習題六十二

分解因子:

1. $12a^5-30a^4x$.
2. $21a^2b^3c-63ab^2c^3$.
3. $x^3+2x^2y-xy^2$.
4. $5h^3-30h^2+10h$.
5. $8pq^3-12p^2q^2+4p^3q$.
6. $3m^6n-21m^4n^2+27m^2n^3$.

7. $42x^2y-14xy+56x^3y^2$.

8. $(m+n)^3y+(m+n)^2z+(m+n)$.

9. $(x+y)(a+b)-(x+y)(a-b)$.

10. $(x+y)^3-3xy(x+y)$.

11. $ax^2(m-n)+3x(n-m)$. $[n-m=-(m-n)]$

12. $3ab(c-d)-9b^2(d-c)$.

90. **分羣分解** 將多項式分成兩羣或數羣，各羣的公因子提出後，便易發見全式的公因子.

例一 $ab+ac+bd+cd=a(b+c)+d(b+c)$

$$=(b+c)(a+d).$$

例二 $x^2+ax+bx+ab=x(x+a)+b(x+a)$

$$=(x+a)(x+b).$$

例三 $x^3-2x^2+5x-10=x^2(x-2)+5(x-2)$

$$=(x-2)(x^2+5).$$

習題六十三

分解因子：

1. y^3-y^2+y-1. 2. $1-n+3n^2-3n^3$.

3. $2+3x-8x^2-12x^3$. 4. $20mn-35pn-8mq+14pq$.

5. $33mnpq-21p^2q+22mnx-14px$.

6. y^4+2y^3+1. 7. $x^4+x^3+2x^2+x+1$.

8. $-9x^3+3x^2+3x-1$.　　9. $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$.

10. $2y+(y^2-4)a-2a^2y$.

91. 完全平方式　用公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

例一　$9x^2+12xy+4y^2=(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2$

$$=(3x+2y)^2.$$

例二　$-81x^2+180x-100=-(81x^2-180x+100)$

$$=-\{(9x)^2-2(9x)\cdot 10+(10)^2\}$$

$$=-(9x-10)^2.$$

習題六十四

分解因子:

1. $x^2+x+\frac{1}{4}$.　　2. $x^2-3xy+\frac{9}{4}y^2$.

3. $1-8x+16x^2$.　　4. $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$.

5. $9x^4+25(y-z)^2-30x^2(y-z)$

6. $(a+b)^2-6(a+b)(c-d)+9(c-d)^2$.

7. $(m+5n)^2-2(m+5n)(3m-n)+(3m-n)^2$.

8. $(x^2-5x+4)^2-2(x^2-5x+4)(5x-3)+(5x-3)^2$.

9. $x^2+9y^2+4z^2-6xy+4xz-12yz$.

92. 二次三項式　如 x^2+px+q，此式係二次而有三項，

故名二次三項式，分解此式成二因子，可用公式

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

比較 x^2+px+q 與 $x^2+(a+b)x+ab$，我們如能求得二數 a 及 b，

使 $$a+b=p,\quad ab=q,$$

則 $$x^2+px+q=(x+a)(x+b).$$

I. p 及 q 都是正數　此表示 a,b 的和及 a,b 的積，都是正數，卽須將 q 分為二正因子，使其和為 p。

例一　$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3=(x+2)(x+3)$.

例二　$x^2+7xy+10y^2=x^2+(2y+5y)x+(2y)(5y)$

$$=(x+2y)(x+5y).$$

II. p 是負數，q 是正數　此表示 a,b 的和是負數，a,b 的積是正數，卽須將 q 分為二負因子，使其代數和等於 p。

例一　$x^2-7x+12=x^2-(3+4)x+(-3)(-4)$

$$=(x-3)(x-4).$$

例二　$x^2-9xy+20y^2=x^2-(4y+5y)x+(-4y)(-5y)$

$$=(x-4y)(x-5y).$$

習題六十五

分解因子:

1.　x^2+3x+2.　　2.　a^2+5a+6.

3.　$x^2+7x+12$.　　4.　$x^2+15x+36$.

5. $m^2-37m+36$.　　6. $c^2-13c+36$。

7. $20+9a+a^2$.　　8. $120-26b+b^2$。

9. $m^2+4am+3a^2$.　　10. $z^2+29qz+100q^2$.

11. $m^8n^4+7m^4n^2+12$.　　12. $n^2p^2q^2-13npq+22$.

13. $x^2y^2+23xyz+90z^2$.　　14. $x^4y^4+20x^2y^2z+51z^2$.

15. $m^4n^4+35m^2n^2+300$.

III. q是負數(p或正或負). 此時a, b須異號,其代數和等於p.

例一　$x^2+4x-45=(x+9)(x-5)$.

例二　$x^2-5x-66=(x-11)(x+6)$.

例三　$x^2-7xy-18y^2=(x+2y)(x-9y)$.

例四　$x^4+6x^2y-16y^2=(x^2-2y)(x^2+8y)$.

IV. $q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$, 則$x^2+px+q$是完全平方$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$.

因　$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

例一　$x^2-18x+81=(x-9)^2$.

因　$81=\left(\frac{-18}{2}\right)^2$.

例二　$x^2+24x+144=(x+12)^2$.

因　$144=\left(\frac{24}{2}\right)^2$.

例三　$x^6-4x^3y^3+4y^6=(x^3-2y^3)^2$.

因 $4y^6=\left(\frac{-4y^3}{2}\right)^2$.

習題六十六

分解因子:

1. x^2+x-6　　2. n^2+n-30.

3. p^4-p^2-20.　　4. $a^2-9a-36$.

5. $x^2-5x-36$.　　6. $q^2-16q-36$.

7. $m^2-35m-36$.　　8. $y^2-7y-18$.

9. $x^2+11x-12$.　　10. $y^{10}+9y^5-10$.

11. $n^2+7n-60$.　　11. $t^2-11t-60$.

13. $c^2-28c-60$.　　14. $(a+c)^2+2(a+c)-15$.

15. $(p-q)^2-24(p-q)-112$.

16. a^2-4a+4.

17. $m^2+8m+16$.　　18. $d^2-10d+25$.

19. $64-16k+k^2$.　　20. $g^2-2gh+h^2$.

21. a^2+x^2-2ax.　　22. $x^2+49-14x$.

23. $c^4-2c^3+c^2$.　　24. $x^4+2x^2y^3+y^6$.

93. 普通二次三項式 lx^2+mx+n.

用公式 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+\left(\begin{array}{ccc}a & & b\\ & \times & \\ c & & d\end{array}\right)x+bd$;

若能將 l 分成 $a\times c$，n 分成 $b\times d$，$\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \times \begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\right)=ad+bc=m$，

則 $lx^2+mx+n=(ax+b)(cx+d)$.

例一 $6x^2+17x+7=6x^2+\left(\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix}\right)x+7$

$=(2x+1)(3x+7)$.

例二 $5x^2+2x-16=5x^2+\left(\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 \\ -8 \end{matrix}\right)x-16$

$=(x+2)(5x-8)$.

例三 $21x^2-x-2=21x^2+\left(\begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix} \times \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}\right)x-2$

$=(3x-1)(7x+2)$.

習題六十七

分解因子:

1. $12a^2+7a+1$.
2. $2x^2+5x+2$.
3. $3c^2+4c+1$.
4. $3m^2+5m+2$.
5. $4x^2-5x+1$.
6. $4a^2+a-3$.
7. $2n^2+7n+6$.
8. $3p^2-10p+3$.
9. $12x^2-23xy+10y^2$.
10. $12x^2-17xy+6y^2$.
11. $6x^2+35xz-6z^2$.
12. $21c^2+26cx-15$
13. $10(x+y)^2+7q(x+y)-6q^2$.

94. **平方差**　用公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

例一　$x^2-1=(x+1)(x-1)$.

例二　$x^6-y^4=(x^3+y^2)(x^3-y^2)$.

例三　$x^8-16y^4=x^8-(2y)^4=(x^4+4y^2)(x^4-4y^2)$

$$=(x^4+4y^2)(x^2+2y)(x^2-2y).$$

例四　$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

習題六十八

分解因子:

1. p^2-36.
2. $49-a^4$.
3. $25k^4-4l^2m^2$.
4. $a^{10}x^2-9y^4$.
5. $25x^{16}-121b^{12}$.
6. $9a^{18}-4p^{12}q^{16}$.
7. $(a+b)^2-c^2$.
8. $c^2-(a+b)^2$.
9. $(m+n)^2-4$.
10. $(r+2s)^2-1$.
11. $(2p-3q)^2-4x^2$.
12. $1-(a+b)^2$.
13. $(a+b)^2-(c+d)^2$.
14. $4(x+y)^2-(x-y)^2$.
15. $x^2+2x+1-y^2$
16. $25-a^2+2ax-x^2$.
17. a^4+a^2+1.
18. x^8-1.
19. $x^4+7x^2y^2+16y^4$.

95. **立方和與立方差**

用公式　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

例一　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

例二　$8y^3-1=(2y-1)(4y^2+2y+1)$.

例三　$x^6-64=x^6-2^6=(x^3+2^3)(x^3-2^3)$

$$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4).$$

習題六十九

分解因子:

1. $1+c^3$.　　2. y^3-1.
3. a^3+8.　　4. $8-z^3$.
5. $216-d^3$.　　6. a^3b^3-1.
7. $8a^3+27x^3$.　　8. $343a^3+64b^3$.
9. $a^3+3a^2+3a-26$.　　10. $(x-y)^3+b^3$.
11. $x^3+3x^2+3x+28$.　　12. x^9-8.
13. $8(a+b)^3+1$.　　14. c^9+1.

96. **因子分解公式**　總括上面所講，把公式彙集如下：

1. **提公因子**　$ax+bx+cx=x(a+b+c)$.

2. **分羣分解**　$ax+ay+bx+by=(a+b)(x+y)$.

3. **完全平方式**　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,$$

4. 二次三項式 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$,

$p=a+b$, $q=ab$.

5. 普通二次三項式 $lx^2+mx+n=(ax+b)(cx+d)$.

$l=ac, n=bd, m=ad+bc$.

6. 平方差 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

7. 設 n 爲奇數,則 a^n+b^n 必能爲 $a+b$ 除盡,a^n-b^n 必能爲 $a-b$ 除盡,如

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

$$a^7-b^7=(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6).$$

此二公式讀者可用分離係數乘法來證明.

若 n 爲偶數,則 (a^n-b^n) 可按平方差(公式 6)以分解.

若 n 爲 3 的倍數,則按下二式之一以分解.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

8. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.

習 題 七 十

分解因子:

1. $b(x+2y)+(x+2y)$.　　2. $c(c-a)-a(c-a)$.

3. $6d(c+x)-(c+x)+4k(c+x)$.

4. $k(a-b)+3(b-a)$.　　5. $5x(c-3d)-6(3d-c)$

6. $2a^4+12a^2+18$.　　7. $16b^2+1-8b$.

8. $4h^2-12h+9$.　　9. $3x^4-21x^3-54x^2$.

10. $9x^2+18x+8$.　　11. $7x^2-9ax+2a^2$.

12. $4c^2-3g^2+11cg$.　　13. $a^2+2ab+b^2-c^2$.

14. $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$.

15. $y^2-c^2+x^2-2xy$.　　16. $x^2+2x+1-4z^2$.

17. $x^2-a^2+y^2-4-2xy+4a$.

18. x^3-x.　　19. x^8-2x^4+1.

20. x^4-10x^2+9.　　21. x^4-13x^2+36.

22. $3x^4-15x^2+12$.

23. $12cd^3-6a^3x-a^6+4c^2+9d^6-9x^2$.

24. x^6+2x^3+1.　　25. $x^7-x^4-16x^3+16$.

26. $8-4x+2x^2-x^3$.　　27. $x^3+12x^2+48x+64$.

28. $8x^3-12x^2+6x-1$.　　29. $81c^{10}-64d^{10}$.

30. $x^{12}-8$.　　31. y^6+1.

32. a^5-32b^5.　　33. y^7-128.

34. a^9-b^3.

97. 用因子分解法解方程式

原理　諸因子中有任一因子為零，則諸因子相乘積必為零。反之，若諸因子相乘積為零，則諸因子中至少有一個是零。

如$(x-1)$，$(x-2)$，$(x-3)$三因子，若x為1，2，3三數之一，

則有一因子爲零,諸因子的乘積必爲零.

若有方程式 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$,則適合此式的 x 值必爲 1,2,或 3,此 1,2,3 三數都是此方程式的根.

準此理,可利用因子分解法,解次數較高的方程式.方程式中未知數是二次的,叫做二次方程式,是三次的,叫做三次方程式,餘類推.

例一　解二次方程式 $x^2-3x-10=0$.

解　$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)=0$.

令第一因子 $x-5=0$,則 $x=5$.

令第二因子 $x+2=0$,則 $x=-2$.

答　$x=5,\ -2$.

校驗　$x=5,\qquad 5^2-15-10=0$.

$x=-2,\qquad (-2)^2+6-10=0$.

例二　解方程式　$6x^2-19x+15=0$.

解　分解因子,　$(2x-3)(3x-5)=0$.

令　$2x-3=0$,　則 $x=3/2$.

令　$3x-5=0$,　則 $x=5/3$.

答　$x=\frac{3}{2},\frac{5}{3}$.

校驗　$$6\left(\frac{3}{2}\right)^2-19\left(\frac{3}{2}\right)+15=\frac{27-57+30}{2}=0.$$

又　$$6\left(\frac{5}{3}\right)^2-19\left(\frac{5}{3}\right)+15=\frac{50-95+45}{3}=0,$$

例三　解方程式 $x^3+x^2=4x+4$.

解　移項，　$x^3+x^2-(4x+4)=0$.

分解因子，　$x^2(x+1)-4(x+1)=0$.

$\therefore\quad (x+1)(x^2-4)=0.$

$(x+1)(x+2)(x-2)=0.$

由 $x+1=0$ 得 $x=-1$; 由 $x+2=0$ 得 $x=-2$; 由 $x-2=0$ 得 $x=2$.

答　$x=-1,-2,2$.

校驗　$x=-1$, $-1+1=-4+4$, 即　$0=0$.

$x=-2$, $-8+4=-8+4$, 即 $-4=-4$.

$x=2$, 　$8+4=\ 8+4$, 即 $12=12$.

依用因子分解法解方程式，應依下列規則:

1. 移項，令方程式的右端為零，如有常數公因子，可約去;

2. 將左端分解因子，令每一因子為零，則適合一因子為零的 x 值，都是方程式的根.

方程式兩端可用常數除. 如 $4x-2=0$, 可用2除，使變為 $2x-1=0$, 得 $x=\frac{1}{2}$. 若就原式求解，仍得 $x=\frac{1}{2}$.

如 $x^3+x^2=4x+4$, 分解因子，得 $x^2(x+1)=4(x+1)$, 若約去

$(x+1)$，便只有 $x^2=4$ 即 $x^2-4=0$，由此只得 $x=2$ 及 $x=-2$ 二根，而失去 $x=-1$ 一根。

故方程式兩端不能用含 x 的因子除，因爲除過後的方程式，要失去原方程式的根。

習題七十一

用分解因子法解下列各方程式，並加校驗：

1. $x^2-7x+12=0$。　　2. $x^2-9x+8=0$。

3. $x^2-x-20=0$。　　4. $x^2-9=0$。

5. $x^2=16$。　　6. $x^2-4x=0$

7. $3x^2-18x=0$　　8. $x^2-b^2=0$。

9. $9x^2=3x+2$。　　10. $4x^2+8x+3=0$。

11. $x^2+ax+3x+3a=0$　　12. $x^2+bx=4x+4b$。

13. 某數的平方減去某數的二倍，餘數爲 35，求某數。

14. 二數的差爲 6，其平方差爲 120，求二數。

15. 某教室地板的面積爲 216 方公尺，其長較闊多 6 公尺，問長與闊各多少？

16. 兩個連續奇數的平方和爲 190，求各數。

第 十 二 章

最高公因式及最低公倍式

98. **最高公因式**　一數能除盡兩數或諸數，則此數叫做兩數或諸數的公因數．一式能除盡兩式或諸式，則此式叫做那兩式或諸式的公因式．沒有公因式的兩式或諸式，稱爲互質式．兩數或諸數可有許多的公因數，其中最大的叫做最大公因數．兩式或諸式亦可有許多的公因式，其中次數最高的，叫做最高公因式，通常用符號 H.C.F. 表示，當各式有數字因子時，通常以諸數字因子最大公因數爲 H.C.F. 的數字因子．

如 $84x^3y^4z^5$ 與 $42x^5y^3z^4$ 的 H.C.F. 是 $42x^3y^3z^4$．因 42 是 84 同 42 的最大公因數，公因式中含 x 的，最高次是 3，含 y 的，最高次是 3，含 z 的，最高次是 4，所以 H.C.F. 是 $42x^3y^3z^4$．再看下例：

例　求 $8x^2y^3z^4$，$12x^3y^2z^3$ 及 $20x^4y^3z^2$ 的 H.C.F.．

解

$$8x^2y^3z^4=2^3x^2y^3z^4,$$

$$12x^3y^2z^3=2^2\cdot 3x^3y^2z^3,$$

$$20x^4y^3z^2=2^2\cdot 5x^4y^3z^2,$$

$\therefore$　H.C.F. $=2^2x^2y^2z^2=4x^2y^2z^2$.

習題七十二

求下列各題的 H.C.F.:

1.　52, 91.　　2.　apx^2, a^2px.

3.　$40p^2q^5$, $125p^3q^4$.　　4.　$17xy^2z$, $34x^2yz$, $51xyz^2$.

5.　$126e^3f^4$, $21e^2f^6g^2$, $147e^4f^5g$.

6.　$117x^7y^3z^6$, $104x^3y^4z^5$, $156x^5y^4z^3$.

7.　$(a-b)^2(a+c)^3$, $(a-b)^3(a+c)^2$.

8.　有長 180 寸闊 42 的紙，分爲面積相等的最大正方形，問每邊爲多少寸？

99.　用因子分解法求 H.C.F.　所設的式項數雖多，也可用因子分解法求出他的 H.C.F. 來.

例一　求 $x^2y^2(x-y)^2$ 及 $x^3y^3(x-y)^3$ 的 H.C.F.

解　　H.C.F. $=x^2y^2(x-y)^2$.

例二　求 $8a^2x^2-24a^2x+16a^2$ 及 $12ax^2y-12axy-24ay$ 的 H.C.F.

解

$$8a^2x^2-24a^2x+16a^2=8a^2(x^2-3x+2)$$
$$=2^3a^2(x-1)(x-2).$$
$$12ax^2y-12axy-24ay=12ay(x^2-x-2)$$
$$=2^2\cdot 3ay(x-2)(x+1).$$

$$\therefore\quad \text{H.C.F.}=2^2a(x-2)=4a(x-2).$$

例三 求 $x^2-1, x^3-1,$ 及 x^2+x-2 的 H.C.F.

解

$$x^2-1=(x+1)(x-1).$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

$$\text{H.C.F.}=x-1.$$

法則 先分解各式成質因子連乘式，提出各式公有的因子，而取其指數在各式所含該因子指數中之最低的，連乘起來，便是所求的 H.C.F.

習題七十三

用因子分解法，求下列各題的 H.C.F.

1. $a^4-1,\ a^3-1.$ 2. $x^5+x^2,\ x^4-1.$

3. $8-x^3,\ x^2-4.$ 4. $6(a+1)^2,\ 8(a^2-1).$

5. $a^2+ap+p^2,\ 5(a^3-p^3).$ 6. $k^2+9kt+14t^2,\ k^2-4t^2.$

7. $b^2+3b+2,\ b^2+6b+8.$ 8. $p^2q+3q^3,\ p^6-9p^2q^4.$

9. $a^2-15a+36,\ a^2-9a-36.$

10. $a^4-c^4,\ a^3-a^2c+c^3.$

11. $q^2-1,\ q^3-1,\ q^2+q-2.$

12. $a^2-x^2,\ (a+x)^2,\ a^2+3ax+2x^2.$

13. $a^2-4a-21,\ a^2-12a+35,\ a^2+5a-84.$

14. m^2-n^2, m^3-n^3, $m^2-7mn+6n^2$.

15. $12c^2y^2+4y^4+4c^3y+12cy^3$, $2c^3+2y^3$, $10c^5+10c^3y^2+20c^4y$.

100. **輾轉相除法** 算術上常用輾轉相除法求兩數的最大公約數.如

```
42)154(3
   126
    28)42(1
       28
       14)28(2
          28
```

則 14 就是 42 和 154 的 H.C.F. 這是什麼理由呢?是根據兩條基本原理.

I. 一數的因子,必是該數任何倍數的因子.

如 5 是 10 的因子,m 是正整數,則 10 的 m 倍,就是 $10m$,當然也含此因子 5.

II. 兩數的公因子,必是兩數任何倍數和或差的因子.

如 5 是 10 同 15 的公因子,m, n 爲正整數,則 10 的 m 倍加(或減) 15 的 n 倍,卽$(10m\pm15n)=5(2m\pm3n)$,仍含此因子 5.

看上例,14 是 28 的因數,$42=1\times28+14$,故 14 是 42 的因數. (何故?)

同理,$154=3\times42+28$,故 14 又是 154 的因數.

所以 14 是 154 和 42 的公因數.何以是最大公因數呢?試

154與42的最大公因數是 F,因 $28=154-3\times42$,故 F 是28的因數.(何故?)

同理,$14=42-1\times28$,故 F 是14的因數.(何故?)

故154與42的最大公因數就是14.(何故?)

求兩個多項式的H.C.F.,也可用這個法則.

例一 求 $2x^2+x-3$ 與 $4x^3+8x^2-x-6$ 的H.C.F..

解

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x-1 & 2x^2+x-3 & 4x^3+8x^2-x-6 & 2x+3 \\
 & 2x^2+3x & 4x^3+2x^2-6x & \\
\cline{2-3}
 & -2x-3 & 6x^2+5x-6 & \\
 & -2x-3 & 6x^2+3x-9 & \\
\cline{2-3}
 & & 2x+3 &
\end{array}$$

$\therefore$ H.C.F. $=2x+3$.

輾轉相除亦可用分離係數法演算.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1-1 & 2+1-3 & 4+8-1-6 & 2+3 \\
 & 2+3 & 4+2-6 & \\
\cline{2-3}
 & -2-3 & 6+5-6 & \\
 & -2-3 & 6+3-9 & \\
\cline{2-3}
 & & 2+3 &
\end{array}$$

即 H.C.F. $=2x+3$.

法則 1. 先按降冪排好兩式,以次數較低的作除式,次數較高的作被除式,如次數相同,則以第一項係數較大的作被除式,如能除盡,則除式便是H.C.F..

2. 第一步如不能除盡,則用其餘式做除式,去除第一步中

的除式，如再有餘式，即用此餘式來除第一步中的餘式。

3. 如仍有餘式，照樣繼續展轉除下去，至除盡爲止。那最後的除式，便是所求的 H.C.F.

各級除式或被除式，用常數乘或除，對於最後的 H.C.F. 沒有影響。（何故？）

例二 求 $8x^2+2x-3$ 及 $6x^3+5x^2-2$ 的 H.C.F.

解

4+3	8+2−3	6+5+0−2	
	8−4	4	乘4
	6−3	24+20+0−8	3
	6−3	24+6−9	
		14+9−8	
		4	
		56+36−32	7
		56+14−21	
		22−11	用11除
		2−1	

$$\therefore \quad \text{H.C.F.}=2x-1.$$

凡原式有單項因子，可先分出，因爲單項因子間的 H.C.F. 是可用觀察法決定的。

例三 求 $12x^4+30x^3-72x^2$ 及 $32x^3+84x^2-176x$ 的H.C.F.

解 $$12x^4+30x^3-72x^2=6x^2(2x^2+5x-12).$$

$$32x^3+84x^2-176x=4x(8x^2+21x-44).$$

$6x^2$ 與 $4x$ 的 H.C.F. 是 $2x$，再求兩括弧內三項式的 H.C.F.

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
2-3 & 2+5-12 & 8+21-44 & 4 \\
 & 2+8 & 8+20-48 & \\
\hline
 & -3-12 & \quad 1+4 & \\
 & -3-12 & & \\
\hline
\end{array}
$$

故所求的 H.C.F. $=2x(x+4)$.

若求 A, B, C 三式的 H.C.F.，可先求 A, B 的H.C.F.，再求此 H.C.F.與 C 的 H.C.F.，則所得爲 A, B, C 的H.C.F.依輾轉相除法，如最後的餘數是常數，就表示兩式無公因子，兩式若沒有公因式，他們的 H.C.F.是 1.

習題七十四

用輾轉相除法求下列各題的 H.C.F.：

1. $a^3-3a^2+4,\ a^3-2a^2-4a+8$.

2. $a^3+4a^2-5a,\ a^3-6a+5$.

3. $15x^3-19x^2+4,\ 9x^3-9x^2-4x+4$.

4. $y^3+5y^2-y-5,\ y^2-2y+1,\ y^3+7y^2-y-7$.

5. $x^3-7x+6,\ x^3-x^2-10x+10,\ x^3+x^2-5x+3$.

6. $2a^2x^4+2a^2x^3-4a^2x,\ 4abx^5+8abx^4-12abx^2$.

【附註】用輾轉相除法求 H.C.F. 的代數式，證明較繁，留待高中代數學中證明，現在祇要將求法先行練熟.

101. 最低公倍式 兩數或諸數能除盡的同一數，叫做這兩數或諸數的公倍數.兩式或諸式能除盡的同一式，叫做這兩式

或諸式的公倍式．兩數或諸數可有無限多的公倍數，其中最小的叫做最小公倍數．兩式或諸式亦有無限多的公倍式，其中次數最低的一個，叫做最低公倍式，通常用符號 L.C.M. 表示．當各式有數字因子時通常用諸數字因數的最小公倍數做 L.C.M. 的數字因子．例如 $84x^3y^4z^5$ 與 $42x^5y^2z^4$ 的 L.C.M. 是 $84x^5y^4z^5$，因為 84 及 42 的最小公倍數是 84，公倍式中含 x 的，最高次是 5，含 y 的，最高次是 4，含 z 的，最高次是 5，故 L.C.M. $=84x^5y^4z^5$．

例 求 $8x^2y^3z^4$，$12x^3y^2z^3$ 及 $20x^4y^3z^2$ 的 L.C.M.

解
$$8x^2y^3z^4=2^3x^2y^3z^4.$$
$$12x^3y^2z^3=2^2\cdot3x^3y^2z^3.$$
$$20x^4y^3z^2=2^2\cdot5x^4y^3z^2.$$
$$\therefore\ \text{L.C.M.}=2^3\cdot3\cdot5\cdot x^4y^3z^4=120x^4y^3z^4.$$

102．用因子分解法求 L.C.M.

例一 求 $x^3y^2(x-y)^2$ 及 $x^2y^2(x-y)^3$ 的 L.C.M.

解
$$\text{L.C.M.}=x^3y^2(x-y)^3.$$

例二 求 $8a^2x^2-24a^2x+16a^2$ 及 $12ax^2y-12axy-24ay$ 的 L.C.M.

解
$$\begin{aligned}8a^2x^2-24a^2x+16a^2&=8a^2(x^2-3x+2)\\&=2^3a^2(x-1)(x-2).\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}12ax^2y-12axy-24ay&=12ay(x^2-x-2)\\&=2^2\cdot3ay(x-2)(x+1).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \text{L.C.M.}=2^3\cdot 3a^2y(x-1)(x-2)(x+1)$$
$$=24a^2y(x-1)(x+1)(x-2).$$

例三 求 x^2-1, x^3-1 及 x^2+x-2 的 L.C.M.

解
$$x^2-1=(x+1)(x-1).$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$
$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$
$$\therefore\quad \text{L.C.M.}=(x-1)(x+1)(x+2)(x^2+x+1).$$

法則 先分解各式，成質因子連乘式，取各式中所有相異的因子連乘，而各因子的指數，均用其在諸式中最高的，則連乘積便是所求的 L.C.M.

【附註】 若二式無公因式，則兩式的 L.C.M. 即此二式的連乘積。

習題七十五

求下列各題的 L.C.M.：

1. 18, 24, 36.　　2. 21, 39, 57.

3. 5, 15, 9, 18.　　4. x^2, xy, y^2.

5. a, m^2n, x^2y.

6. $3a^2bc^3$, $5ab^3c^2$, $16a^2b^2c$, $20a^3b^3c^3$.

7. a^2+ab, a.　　8. 6, $3x$, $3y$.

9. $ax+bx$, $ay+by$.　　10. $a^2-2ab+b^2$, a^2-b^2.

11. $p^2-1,\ p^3+1,\ p^3-1.$

12. $3a-2x,\ 9a^2-4x^2,\ 9a^2-12ax+4x^2.$

13. $a^2+4a-21,\ a^2-3a,\ a^2+7a.$

14. $p^2+7p+6,\ p^2+11p+30.$

15. $4x^2-25,\ 2a^3-5a^2-4a+10.$

16. 用長 9 寸闊 6 寸的許多木板，排成一正方形，問其邊至少是幾寸？

103. 用 H.C.F. 求 L.C.M. 設 H 爲 A, B 兩式的 H.C.F.，令 $A=aH, B=bH$，則 a, b 必無公因子，(何故？)此 a, b 兩式的 L.C.M. 必爲 ab，故 A, B 的 L.C.M. $=ab\cdot H$.

但 $$abH=\frac{(aH)(bH)}{H},$$

即 $$\text{L.C.M.}=\frac{A\cdot B}{\text{H.C.F.}},$$

或 $$\text{L.C.M.}=\frac{A}{\text{H.C.F.}}\times B=A\cdot\frac{B}{\text{H.C.F.}}.$$

故求兩式的 L.C.M.，卽以其 H.C.F. 除兩式之一，以其商乘另一式卽得。

例 求 $b^4-2b^3+b^2-8b+8$ 及 $4b^3-12b^2+9b-1$ 的 L.C.M.

解

4−12+9−1	1−2+1−8+8	
7	4	
28−84+63−7	4−8+4−32+32	1+1
28−160+132	4−12+9−1	
76−69−7	4−5−31+32	
7	4−12+9−1	
532−483−49	7−40+33	4+76
532−3040+2508	7−7	7−33
2557 | 2557−2557	−33+33	
1−1	−33+33	

$$\text{H.C.F.}=b-1.$$

$$\therefore\quad \text{L.C.M.}=\frac{4b^3-12b^2+9b-1}{b-1}(b^4-2b^3+b^2-8b+8)$$

$$=(4b^2-8b+1)(b^4-2b^3+b^2-8b+8).$$

若求 A,B,C 三式的 L.C.M, 則先求 A,B 的 L.C.M., 再求此 L.C.M. 與 C 的 L.C.M., 則所得爲 A,B,C 的 L.C.M.

習題七十六

用先求 H.C.F. 法求下列各題的 L.C.M.:

1. $x^3+x^2-4x-4,\ x^3+6x^2+11x+6.$
2. $y^3-4y^2-8y+24,\ y^4-y^3+8y-8.$
3. $6q^3-7q^2+5q-2,\ 4q^4-5q^2+4q-3.$
4. $x^3+6x^2+11x+6,\ 2x^3+9x^2+7x-6.$
5. $x^4+a^2x^2+a^4,\ x^4+ax^3+a^3x+a^4.$

6. $4x^3-x^2y-3xy^2$, $8x^3-3x^2y+xy^2-y^3$。

復 習 題 十

求下列各題(1—4)的 H.C.F. 及 L.C.M.：

1. $9x^2+12x+4$, $27x^3+8$, $6ax^2+4ax^3$。

2. $a^2-b^2-c^2+2bc$; $a^2-b^2+c^2+2ac$。

3. x^2-3x+2, x^2-4x+4, $x^3-7x^2-14x-8$。

4. $4a^2-25$, $2a^3-5a^2-4a+10$。

求下列各題的 L.C.M.：

5. $ax+bx+ay+by$, $3(a^2-b^2)$, $(x+y)^2$。

6. $ax-ay-bx+by$, $x^2-2xy+y^2$, $3a^2b-3ab^2$。

7. $x^2-(a+b)x+ab$, $x^2-(b+c)x+bc$, $x^2-(a+c)x+ac$。

8. x^2-4a^2, $x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$, $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$。

9. 大小二輪，大輪 132 齒，小輪 48 齒，齒與齒相銜接，問小輪要旋轉幾周，則原相銜接的齒再相接？

10. 兩數的最大公約數與最小公倍數的積是 1,296，已知一數是 54，問這兩數的 G.C.M. 及 L.C.M. 各為若干？(最大公約數的符號是 G.C.M.)

中華民國三十三年六月初版
中華民國三十三年九月一二版正中紙本

新中國教科書 初級中學代數學

第二冊　定價國幣三角五分
(外埠酌加運費匯費)

編著者　黃泰　戴維清

發行人　高明強

印刷所　正中書局

發行所　正中書局

(1880)

(0.20)滬·本　5/3(春)

25/10/33
議局呈送

本書用有[illegible]之正中紙印刷

0,3