Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 13

Analytische Fortsetzung

Definition 13.1. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X. Es seien $P, Q \in X$ Punkte. Man sagt, dass die Keime $s \in \mathcal{G}_P$ und $t \in \mathcal{G}_Q$ miteinander *verbunden* sind, wenn es eine zusammenhängende offene Teilmenge $P, Q \in U \subseteq X$ und einen Schnitt $r \in \mathcal{G}(U)$ mit $r_P = s$ und $r_Q = t$ gibt.

Bei $P = Q$ ist ein Keim nur mit sich selbst verbunden. Ohne die Voraussetzung zusammenhängend wären in einem Hausdorffraum je zwei Keime zu verschiedenen Punkten miteinander verbunden. Zu einem fixierten Keim $s \in \mathcal{G}_P$ und einem weiteren Punkt $Q \in X$ kann man sich fragen, ob s mit einem Keim aus $\mathcal{G}_Q$ verbunden ist und, wenn ja, mit wie vielen. Im Folgenden interessieren uns für diese Fragen im Fall, wenn $\mathcal{G}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf einer riemannschen Fläche ist. Die Verbundenheit ist keine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Keime, da man Schnitte auf offenen Mengen im Allgemeinen nicht auf die Vereinigung fortsetzen kann. Um dies zu erreichen, muss man Verbundenheiten aneinander legen.

Definition 13.2. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X. Es seien $P, Q \in X$ Punkte. Man sagt, dass die Keime $s \in \mathcal{G}_P$ und $t \in \mathcal{G}_Q$ miteinander *schrittweise verbunden* sind, wenn es eine Punktkette $P = P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = Q$ und Keime $s_i \in \mathcal{G}_{P_i}$ derart gibt, dass s_{i-1} und s_i für $i = 1, \ldots, n$ miteinander verbunden sind.

Auf einer Mannigfaltigkeit ist zusammenhängend das Gleiche wie wegzusammenhängend. Oft formuliert man daher die Fragen nach Verbundenheit und schrittweiser Verbundenheit entlang eines fixierten stetigen Weges, der P und Q verbindet.

Definition 13.3. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X. Es seien $P, Q \in X$ Punkte und

$$\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$$

ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma(1) = Q$. Man sagt, dass die Keime $s \in \mathcal{G}_P$ und $t \in \mathcal{G}_Q$ *längs* γ miteinander *verbunden* sind, wenn es eine offene Teilmenge mit $\gamma([0,1]) \subseteq U \subseteq X$ und einen Schnitt $r \in \mathcal{G}(U)$ mit $r_P = s$ und $r_Q = t$ gibt.

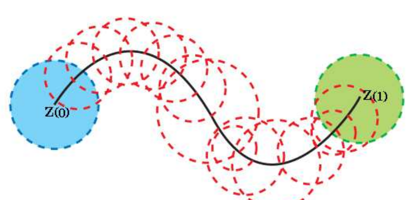
Definition 13.4. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X. Es seien $P, Q \in X$ Punkte und

$$\gamma\colon\ [0,1] \longrightarrow X$$

ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma(1) = Q$. Man sagt, dass die Keime $s \in \mathcal{G}_P$ und $t \in \mathcal{G}_Q$ *längs* γ miteinander *schrittweise verbunden* sind, wenn es Punkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n\ 1$ und Keime $s_i \in \mathcal{G}_{\gamma(t_i)}$ derart gibt, dass $s_0 = s$, $s_n = t$ und s_{i-1} und s_i miteinander längs $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ verbunden sind.

Bei der schrittweisen Verbundenheit gibt es zusammenhängende offene Mengen U_i, $i = 1, \ldots, n$, mit $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ und Schnitte $r_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{G})$, die auf die Keime an den Endpunkten einschränken. Da die r_i und r_{i+1} in den Übergangspunkten den gleichen Keim definieren, sind sie auf einer offenen Umgebung des Übergangspunktes überhaupt gleich. Das heißt aber nicht, dass sie überhaupt zu einem Schnitt über $U_i \cup U_{i+1}$ fortgesetzt werden können, da es ja auch einen nichtleeren Durchschnitt jenseits des Übergangspunktes geben kann, wie wenn γ ein voller Kreisbogen ist, den man in den oberen und den unteren Bogen aufteilt. Insbesondere ist die Verbundenheit bei $x = y$ trivial, die schrittweise Verbundenheit aber nicht. Im holomorphen Kontext wird diese schrittweise Verbundenheit verwendet, um holomorphe Funktionskeime miteinander in Beziehung zu setzen.

Definition 13.5. Es sei X eine riemannsche Fläche und sei $\gamma\colon\ [0,1] \to X$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Man sagt, dass ein holomorpher Funktionskeim $g \in \mathcal{O}_{X,y}$ aus einem holomorphen Funktionskeim $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ durch *analytische Fortsetzung* längs γ hervorgeht, wenn es Punkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n\ 1$, zusammenhängende offene Mengen $U_i \subseteq X$ mit $\gamma([t_{i-1}, t_i] \subseteq U_i$ und holomorphe Funktionen $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ derart gibt, dass $f_1 = f$, $f_n = g$ und f_i und f_{i+1} in einer offenen Umgebung von $\gamma(t_i)$ übereinstimmen.



Eine wichtige Beobachtung ist, dass wenn man mit verschiedenen stetigen Wegen von x nach y gelangt und wenn entlang beider Wege eine analytische Fortsetzung eines Keimes in x möglich ist, das man dann keineswegs im gleichen Keim landen muss. Das folgende Beispiel ist typisch.

Beispiel 13.6. Wir betrachten die riemannsche Fläche $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und den geschlossenen Weg

$$\gamma\colon\ [0, 2\pi] \longrightarrow (\cos t,\, \sin t)$$

mit Anfangs- und Endpunkt 1. Zu jedem Punkt $a \in X$ besitzt die Quadratüberlagerung (siehe Beispiel 6.2)

$$X \longrightarrow X,\, w \longmapsto w^2,$$

in einer lokalen offenen Umgebung von a zwei Schnitte. Diese sind durch Potenzreihen mit Entwicklungspunkt a der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

gegeben, wobei

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \right)^2 = z$$

und $c_0^2 = a$ gilt. Wenn man c_0 mit dieser letzten Bedingung fixiert, wird dadurch die gesamte Potenzreihe festgelegt. Die andere erhält man durch Negation. Wir behaupten, dass im Punkt 1 die beiden Potenzreihen der Wurzel durch analytische Fortsetzung längs γ auseinander hervorgehen. Dies folgt daraus, dass zu jedem Punkt auf dem Einheitskreis durch den Funktionswert bereits die gesamte Potenzreihe der Quadratwurzel festgelegt ist. Wenn man in 1 mit $c_0 = 1$ startet, so legt dies die Potenzreihe im Entwicklungspunkt 1 mit einem gewissen Konvergenzradius (nämlich 1) fest. Auf den Punkten auf dem Einheitskreis innerhalb des Konvergenzradius wird dadurch der Wert festgelegt, nämlich durch die Halbierung des Winkels. Dieser Wert legt wiederum in diesen Punkten die Potenzreihen fest. So erhält man in den Punkten $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ zueinander passende Potenzreihen, deren Werte auf dem Einheitskreis durch die Halbierung des Winkels gegeben sind. Daher erhält man nach einer Volldrehung die Potenzreihe der Wurzel um 1 mit dem Wert -1.

Aufgrund dieses Phänomens, dass verschiedene Wege zu verschiedenen Fortsetzungen führen, sagt man manchmal, dass die komplexe Quadratwurzel (und viele andere Funktionen) eine *mehrdeutige Funktion* ist. Sie ist aber auf $\mathbb{C}$ oder auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definitiv keine Funktion, sie kann nur auf gewissen offenen Teilmengen eindeutig definiert werden, diese Funktionen (*Zweige*) passen aber nicht zusammen. Eine naheliegende Frage ist es, ob man die riemannsche Fläche durch eine andere Fläche ersetzen kann, auf der die verschiedenen, durch analytische Fortsetzung entstandenen Zweige eine globale holomorphe Funktion definieren. Dies wird positiv in Lemma 13.14 beantwortet.

Lemma 13.7. *Es sei X eine riemannsche Fläche und sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Es seien $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{X,x}$ und*

$g_1, g_2 \in \mathcal{O}_{X,y}$ holomorphe Funktionskeime, wobei g_1 aus f_1 und g_2 aus f_2 durch analytische Fortsetzung längs γ hervorgeht. Dann geht auch $g_1 + g_2$ aus $f_1 + f_2$ und $g_1 \cdot g_2$ aus $f_1 \cdot f_2$ durch analytische Fortsetzung längs γ hervor.

Beweis. Man kann zuerst zu einer gemeinsamen Verfeinerung der sukzessiven offenen Umgebungen übergehen. Beide Aussagen folgen, da man die Operationen auf den jeweiligen holomorphen Funktionen auf den U_i ausführen kann. □

Bemerkung 13.8. Lemma 13.7 ist nicht so zu verstehen, dass es zu einem gegebenen γ einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,y}$$

gibt, der die analytische Fortsetzung längs γ beschreibt. Das Problem ist, dass man im Allgemeinen einen holomorphen Funktionskeim nicht entlang eines Weges fortsetzen kann. Dies geht insbesondere nicht für Potenzreihen, die im Schnittpunkt des Weges mit dem Rand ihres Konvergenzbereiches gegen unendlich streben.

Lemma 13.9. *Es sei X eine riemannsche Fläche, es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ holomorphe Funktionen auf X und sei f ein holomorpher Funktionskeim im Punkt $P \in X$, der im Halm $\mathcal{O}_{X,P}$ die algebraische Relation*

$$a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 = 0$$

erfülle. Dann erfüllt jede analytische Fortsetzung von f ebenfalls diese Relation.

Beweis. Zu einem holomorphen Keim g, der in einem Punkt Q definiert ist und aus f durch holomorphe Fortsetzung hervorgeht, gibt es insbesondere eine Kette von offenen zusammenhängenden Teilmengen $U_1, \ldots, U_m$ mit $P = P_0 \in U_1$, mit Punkten $P_i \in U_i \cap U_{i+1}$ und $Q = P_m \in U_m$. Es sei f_i der Keim zum Punkt P_i bei der analytischen Fortsetzung. Wenn f_i die algebraische Gleichung im Halm zu P_i erfüllt, dann auch in einer offenen Umgebung von P_i und damit nach Satz 3.5 auch auf U_i und auf U_{i+1}. Deshalb folgt die Aussage durch Induktion. □

Wir werden uns später mit der umgekehrten Frage beschäftigen, inwiefern holomorphe Funktionskeime in einem Punkt, die ein-und dieselbe algebraische Relation erfüllen, durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen. Siehe insbesondere Satz 26.11.

Analytische Fortsetzung und der Ausbreitungsraum

Die analytische Fortsetzung lässt sich am besten mit dem Ausbreitungsraum zur Strukturgarbe verstehen.

Satz 13.10. *Es sei X eine riemannsche Fläche mit dem Ausbreitungsraum $p\colon E \to X$ zur Strukturgarbe. Es sei*

$$\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$$

ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und seien $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ und $g \in \mathcal{O}_{X,y}$ holomorphe Keime in den Endpunkten. Genau dann ist g eine analytische Fortsetzung von f längs γ, wenn es eine Liftung

$$\tilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow E$$

zu γ mit $(x,f),(y,g) \in E$ als Endpunkte gibt.

Beweis. Es gebe eine analytische Fortsetzung von f nach g. D.h. es gibt eine Intervallunterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1,$$

zusammenhängende offene Mengen $U_i \subseteq X$ mit $\gamma([t_{i-1},t_i] \subseteq U_i$ und holomorphe Funktionen $f_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)$ derart, dass $f_1 = f$, $f_n = g$ und f_i und f_{i+1} in einer offenen Umgebung von $\gamma(t_i)$ übereinstimmen. Die zugehörigen offenen Mengen $(U_i,f) \subseteq E$ bilden unter p nach Lemma 12.9 homöomorph auf U_i ab. Wir definieren die Liftung $\tilde{\gamma}$ durch

$$\tilde{\gamma} = \left(p|_{(U_i,f_i)}\right)^{-1} \circ \gamma_i.$$

In einer offenen Umgebung von $\gamma(t_i)$ (innerhalb von $U_i \cap U_{i+1}$) stimmen f_i und f_{i+1} überein und daher stimmen darauf die stückweisen Liftungen überein.

Wenn umgekehrt eine Liftung $\tilde{\gamma}$ existiert, so wird die kompakte Bildkurve $\tilde{\gamma}([0,1]) \subseteq E$ durch endlich viele offene Mengen der Form (U_i,f_i), $i = 1,\ldots,n$, mit

$$(U_i,f_i) \cap (U_{i+1},f_{i+1}) \neq \emptyset$$

überdeckt. Diese Daten konstituieren eine analytische Fortsetzung. □

Korollar 13.11. *Es sei X eine riemannsche Fläche mit dem Ausbreitungsraum $p\colon E \to X$ zur Strukturgarbe. Es seien $x,y \in X$ Punkte und seien $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ und $g \in \mathcal{O}_{X,y}$ holomorphe Keime. Genau dann ist g eine analytische Fortsetzung von f (bezüglich irgendeines stetigen Weges), wenn (x,f) und (y,g) der gleichen Zusammenhangskomponente von E angehören.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 13.10 und daraus, dass auf (wegen Satz 12.12) der Mannigfaltigkeit E die Zusammenhangskomponenten wegzusammenhängend sind. □

Lemma 13.12. *Es seien X und Y zusammenhängende riemannsche Flächen und sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Es sei f eine holomorphe Funktion auf Y und es seien $y_1,y_2 \in Y$ Punkte über x_1 bzw. x_2 Dann entstehen die holomorphen Funktionskeime $f_i \in \mathcal{O}_{X,x_i}$ die aus f durch die induzierten Ringisomorphismen*

$$\theta_i\colon \mathcal{O}_{Y,y_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x_i}$$

gestiftet werden, wechselseitig durch analytische Fortsetzung.

Beweis. Es sei $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to Y$ ein stetiger Weg von $\tilde{\gamma}(0) = y_1$ nach $\tilde{\gamma}(1) = y_2$. Der Bildweg $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ verbindet dann x_1 und x_2 und längs dieses Weges kann man f_1 in f_2 überführen. Dazu wählt man eine Überdeckung von $\tilde{\gamma}([0,1])$ mit offenen Mengen, die unter p homöomorph auf offene Mengen von X abgebildet werden, wozu eine endliche Teilüberdeckung gehört. □

KOROLLAR 13.13. *Es seien X und Y zusammenhängende riemannsche Flächen und sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Es sei f eine holomorphe Funktion auf Y und es seien $y_1, y_2 \in Y$ Punkte über $x \in X$. Dann entstehen die holomorphen Funktionskeime $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{X,x}$ die aus f durch die induzierten Isomorphismen*

$$\theta_i\colon \mathcal{O}_{Y,y_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

gestiftet werden, wechselseitig durch analytische Fortsetzung.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Lemma 13.12. □

LEMMA 13.14. *Es sei X eine riemannsche Fläche, $P \in X$ und $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ ein holomorpher Funktionskeim. Dann besitzt diejenige Zusammenhangskomponente Z des Ausbreitungsraumes E zur Strukturgarbe, die den Punkt (P,f) enthält, folgende Eigenschaften.*

(1) *Es gibt eine holomorphe Funktion $g\colon Z \to \mathbb{C}$, die den Keim f (aufgefasst in $\mathcal{O}_{Z,(P,f)}$) fortsetzt.*
(2) *Das Bild von*

$$Z \longrightarrow X$$

besteht aus allen Punkten $Q \in X$, für die es eine analytische Fortsetzung von f zu einem Keim in Q gibt.

Beweis. (1) Dies ergibt sich durch Einschränkung der holomorphen Auswertungsabbildung aus Satz 12.12 auf $Z \subseteq E$.
(2) Dies folgt aus Satz 13.10.

□

BEISPIEL 13.15. Wir betrachten die riemannsche Fläche

$$X = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Zur komplexen Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

gibt es lokal Umkehrfunktionen, die *komplexe Logarithmen* heißen. Die Existenz folgt aus dem Satz über die Umkehrabbildung oder aus der lokalen Existenz für Stammfunktionen zu $1/w$. Auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ unterscheiden sich zwei Logarithmen um ein additives Vielfaches von $2\pi \mathrm{i}$. Im Punkt 1 ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} (w-1)^k$$

die Taylorreihe eines Logarithmus mit Konvergenzradius 1. Diese Potenzreihe lässt sich auf einfach zusammenhängendes U eindeutig fortsetzen, aber nicht auf $\mathbb{C}^{\times}$. Die Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ nennt man auch den Hauptzweig des komplexen Logarithmus.

Nach Korollar 13.13 (mit $f = z$) gehen die verschiedenen Logarithmen in einem Punkt auseinander durch analytische Fortsetzung hervor. Mit jeder Umdrehung des Nullpunktes erreicht man eine Verschiebung des Logarithmus um $2\pi \mathrm{i}$.

Beispiel 13.16. Wir betrachten die riemannsche Fläche $X = \mathbb{C} \setminus [0,1]$, es wird also das reelle abgeschlossene Einheitsintervall aus den komplexen Zahlen herausgenommen. Der Funktion $\ln z - \ln (z-1)$ kann man auf X eine sinnvolle Bedeutung zuordnen. Es sei $a \in X$ fixiert. Man setzt

$$h(z) := \int_a^z \frac{1}{w} dw - \int_a^z \frac{1}{w-1} dw.$$

Dabei sind in den beiden Integralen die Integrationswege gleich zu wählen. Wenn man den Weg durch einen anderen Weg ersetzt, so ändern sich beide Wegintegrale um den gleichen Summanden, aber mit verschiedenem Vorzeichen, und die Summe bleibt gleich.

Abbildungsverzeichnis