Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist.

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}.$$

Aufgabe 3.2.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 3.3.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 3.4. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine Dreiviertelstunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine Dreiviertelstunde?

Aufgabe 3.5. Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

Aufgabe 3.6.*

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Aufgabe 3.7. Zeige, und zwar allein unter Bezug auf Rechengesetze in $\mathbb{Z}$, dass die durch

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad+bc}{cd}$$

definierte Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen wohldefiniert ist, und dass die Assoziativität, die Kommutativität und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass man jede rationale Zahl als Bruch a/b mit teilerfremdem Zähler und Nenner darstellen kann.

(Man nennt dies die gekürzte Darstellung der rationalen Zahl.)

Aufgabe 3.9. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2(i-1)}}{3^i} = \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Aufgabe 3.10. Gabi Hochster hat die Addition und die Multiplikation der rationalen Zahlen verstanden und möchte jetzt die Operation verstehen, bei der man

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$$

setzt. Sie beschränkt sich auf positive a, b, c, d. Überprüfe ihre Behauptungen:

(1) Bei
$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$$
gilt
$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$
Dies kann man algebraisch und geometrisch beweisen.

(2) Die Verknüpfung ist für rationale Zahlen nicht wohldefiniert.
(3) Wenn man für rationale Zahlen stets ihre teilerfremde Darstellung nimmt, so ist die Verknüpfung wohldefiniert.
(4) Die Verknüpfung ist kommutativ.
(5) Die Verknüpfung ist nicht assoziativ.

Aufgabe 3.11. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Aufgabe 3.12. Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 3.13.*

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe 3.14. Es sei p eine Primzahl. Zeige unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 3.15. Besitzen Sie eine geometrische Intuition zur Addition von zwei gegebenen Zahlen auf der reellen Zahlengeraden?

Besitzen Sie eine geometrische Intuition zur Multiplikation von zwei gegebenen Zahlen auf der reellen Zahlengeraden?

Die folgende Aufgabe soll allein unter Bezug auf die Anordnungsaxiome der reellen Zahlen gezeigt werden (also ohne Bezug auf die Anschauung der Zahlengeraden).

Aufgabe 3.16. Zeige, dass für reelle Zahlen die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Es ist $1 \geq 0$.
(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
(4) Es ist $a^2 \geq 0$.
(5) Aus $a \geq b \geq 0$ folgt $a^n \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(6) Aus $a \geq 1$ folgt $a^n \geq a^m$ für ganze Zahlen $n \geq m$.
(7) Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.
(8) Aus $a > b > 0$ folgt $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Vor den nächsten beiden Aufgaben erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen x und y heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 3.17. Es seien $x < y$ reelle Zahlen. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 3.18.*

Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 3.19. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto |x| \, ,$$

(dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) Es ist $|x| \geq 0$.
(2) Es ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) Es ist $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) Es ist $|y - x| = |x - y|$.
(5) Es ist $|xy| = |x| \, |y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).
(8) Es ist $|x + y| \geq |x| - |y|$.

Aufgabe 3.20.*

Beweise die *Bernoulli-Ungleichung*, das ist die Aussage, dass für reelle Zahlen $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt.

Aufgabe 3.21. Es sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Aufgabe 3.22. Es sei $p \neq 2, 5$ eine Primzahl. Zeige, dass es eine natürliche Zahl der Form (im Dezimalsystem)

$$111\ldots111$$

gibt, die ein Vielfaches von p ist.

Tipp: Verwende Aufgabe 2.27 mit $a = 10$ und $p = d$ und die vorstehende Aufgabe.

Aufgabe 3.23. Es seien drei Punkte $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeige, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 3.24. Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck im $\mathbb{R}^2$ gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

Die Freigetränk-Aufgabe

Für die richtige Lösung der nächsten Aufgabe gibt es heute abend ein Freigetränk, nur die ersten fünf Lösungen werden prämiert. Ein Polynom (oder eine Polynomfunktion) ist ein Ausdruck der Form $a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$, wobei die Koeffizienten a_i reelle Zahlen sind.

Aufgabe 3.25. Zwei Personen A und B spielen Polynome-Erraten. Dabei denkt sich A ein Polynom $P(x)$ aus, wobei alle Koeffizienten aus $\mathbb{N}$ sein müssen. Person B darf fragen, was der Wert $P(n_1), P(n_2), \ldots, P(n_r)$ zu gewissen natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist. Dabei darf B diese Zahlen beliebig wählen und dabei auch vorhergehende Antworten berücksichtigen. Ziel ist es, das Polynom zu erschließen.

Entwickle eine Fragestrategie für B, die immer zur Lösung führt und bei der die Anzahl der Fragen (unabhängig vom Polynom) beschränkt ist.

Abbildungsverzeichnis