

Department of Public Instruction, Bombay.

A

TREATISE ON ARITHMETIC

IN

THEORY AND PRACTICE.

PART 2.

BY

PROF. LAKSHMAN CHHATRE,

PROFESSOR OF MATHEMATICS, DECCAN COLLEGE.

Second Edition 15,000 Copies.

For Copy-right under the Government of India's
Act XXV of 1867

—••••—
BOMBAY:

GOVERNMENT CENTRAL BOOK DEPOT.

1885.

All Rights Reserved.

Price 6½ Annas.

This Edition has been revised by Mr. Moro Ballal Dharap second assistant Master Poona Training College, under the supervision of Raosaheb Sitaram Vishwanath Patwardhan formerly Principal of the college and now Educational Inspector Southern Division.

BOMBAY.

PRINTED AT GANPAT KRISHNAJI'S PRESS, BY THE

PROPRIETOR ATMARAM KANOBA.

मुंबई इलाख्यांतील सरकारी विद्याशाळाखातें.

अंकगणित.

उपपत्ति व उदाहरणें ह्यांसहित

भाग दुसरा.

हें पुस्तक,

केरो लक्ष्मण छत्रे,

डेकन कालेजांतील गणितशास्त्राचे माजी प्रोफेसर
ह्यांनीं केले.

सुधारलेली दुसरी आवृत्ति - १५,००० प्रती.

ह्या पुस्तकाची मालकी सन १८६७ च्या २५ व्या आवटाप्रमाणें
नोंदिली आहे.



मुंबई.

गवर्नमेंट सेंट्रल बुक डिपो.

सन १८८५ इ०.

ह्या पुस्तकासंबंधी सर्व अधिकार सरकारांनें आपणाकडे ठेविले आहेत.

किंमत सव्वा सहा आणे.

मुंबई.

गणपत कृष्णाजी ह्यांचे अपखान्याचे मालक
आत्माराम कान्होबा ह्यांनीं छापिलें.

प्रस्तावना.



हा अंकगणिताचा दुसरा भाग तयार करितांना आम्हीं पुष्कळ परिश्रम केले आहेत. जागोजागी जुने प्रतीत जिथें जिथें चुका आढळल्या त्या सर्व नीट केल्या. जिथें अधिक मजकूर घालावा असें अवश्य वाटलें त्या त्या ठिकाणीं अधिक मजकूर घालून चालू विषय चांगला समजण्याजोगा केंला. ज्याज्या ठिकाणीं अधिक लिहिणें आलें आहे असें वाटलें तें तें काढून टाकिलें. व्यवहारी अपूर्णाकांत आणि दशांश अपूर्णाकांत, विविध परिमाणांच्या रूपांतराच्या संबंधानें पुष्कळ नवा विषय जोडावा लागला, आणि पुष्कळ नवी उदाहरणें घालावीं लागलीं. प्रमाण गणिताच्या संबंधानें पुष्कळ फारफेर करावे लागले. पुस्तकाच्या शेवटीं सुमारें ४० नवे प्रश्न घालून ते सर्व सोडवून दाखविले आहेत. ह्या सोडविलेल्या प्रश्नांपासून विद्यार्थ्यांस प्रश्न सोडविण्याच्या कित्येक चमत्कारिक रीतींची माहिती होणार आहे. या भागांत अभ्यासाकरितां घातलेले प्रश्न एक हजारहून अधिक आहेत. ते सर्व पुनः एकवार तपासून त्यांच्या उत्तरांत जिथें जिथें चुका आढळल्या त्या सर्व नीट केल्या आहेत.

पूर्वींचे पुस्तकाचे शेवटीं, अंकचिन्हपद्धति, भिन्न भिन्न अंकांच्या पद्धति, परिमाणांची वेगळाल्या प्रांतांतोल वेगळालीं मानें वगैरे विषय दिलेले आहेत ते विषय विद्यार्थ्यांस फारसे उपयोगाचे नाहींत असें दिसल्यावरून ते ह्या भागांत दिले नाहींत.

ह्या भागांत जे विषय आले आहेत, त्यांचा उपयोग, ४ थ्य इयत्तेपासून ६ व्या इयत्तेपर्यंत अंकगणित शिकणारे जितके विद्यार्थी त्यांस होणारा आहे.

हे पुस्तक तयार करितांना, पुण्यांतील कित्येक मराठी शाळांचे हेडमास्तर व वर्नाक्युलर कालेजांतील असिस्टंट मास्तर यांचें चांगलें साहाय्य मिळालें. त्यामुळें विषयांची जुळणी, व अभ्यासाकरितां उदाहरणें, यांची देखरेख चांगल्या रीतीनें करितां आली; अभ्यासाकरितां दिलेले सर्व प्रश्न तपासून त्यांची उत्तरे शुद्ध करितां आलीं; आणि हे पुस्तक शुद्ध करून व्यवस्थेनें छापितां आलें मु० पुणे,

सन १८८३ इ.

}

केरो लक्ष्मण छत्रे.

ही नवीन आवृत्ति, राव साहेब सीताराम विश्वनाथ पटवर्धन पूना ट्रेनिंग कालेजाचे माजी प्रिन्सिपाल आणि दक्षिणभागचे हल्लींचे एज्युकेशनल इन्स्पेक्टर ह्यांचे देखरेखी खाली, मोरो बह्दाळ घारप सेकन्ड असिस्टंट मास्तर पूना ट्रेनिंग कालेज ह्यांना तपासून सुधारून वाढविली आहे.

पुणे, सेप्टेंबर सन १८८५ इ.



अनुक्रमणिका.

	पृष्ठ
व्यवहारी अपूर्णांक.	१
रूपांतर ३	३
मिळवणी. १४	१४
वजावाकी. १७	१७
गुणाकार. १८	१८
भागकार. १९	१९
विविध परिमाणांचें रूपांतर. २१	२१
दशांश अपूर्णांक २६	२६
मिळवणी व वजावाकी. ३१	३१
गुणाकार ३२	३२
भागकार ३४	३४
व्यवहारी अपूर्णांकास दशांश अपूर्णांकाचें रूप देण्याचा प्रकार. ३६	३६
आवर्त दशांशाविपर्यी विशेष विचार. ३७	३७
आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देण्याचा प्रकार. ४०	४०
मिश्र आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देण्याची रिती. ४१	४१
कसर ४३	४३
संक्षिप्त गुणाकार ४५	४५
संक्षिप्त भागकार ४८	४८
विविध परिमाणांचें रूपांतर ५१	५१
प्रमाण गणित ५६	५६
विविध परिमाणांचें प्रमाण ६३	६३
व्यस्त प्रमाण ७१	७१
त्रैराशिक. ७४	७४
बहुराशिक. ७८	७८
व्याज, सरळव्याज ८४	८४
चक्रवाढव्याज ८७	८७

व्याजाचे दुसरे प्रकार	९१
विमा, कमिशन, वगैरे	९६
टेव	९८
नफा तोटा	१०२
सर्कतवांटणी	१०५
घातप्रकरण	११२
मूळप्रकरण	११९
वर्गमूळ काढण्याची रीति	१२२
घनमूळ काढण्याची रीति	१२७
घनमूळ काढण्याची हार्नर साहेबांची रीति	१३२
श्रेढी-गणितप्रमाण श्रेढी	१३७
भूमितिप्रमाण श्रेढी	१४२
क्षेत्रफळ व घनफळ	१४६
प्रश्नसमुदाय	१५०
सोडविलेले प्रश्न	१७०



अंकगणित.

भाग २ रा.

व्यवहारी अपूर्णांक.

पूर्णांकांत एकंच्या पटींना परिमाणें समजून त्यांच्या संख्यांचे हिशेव केले. आतां अपूर्णांकांत एकंच्या हिश्यांना परिमाणें समजून त्यांच्या संख्यांचे हिशेव करावयाचे आहेत.

अंश व छेद— एक पाचे कांहीं समान भाग कल्पिले असतां त्या प्रत्येक भागाला अंश किंवा हिस्सा म्हणतात, आणि त्या भागांच्या संख्येला छेद म्हणतात.

अंश व्यवहारी रीतीने लिहिणें असला, तर एका आडव्या रेषेवरती एक लिहून, खाली भाग संख्या अथवा छेद लिहावा. जसें— १ याचे ४ समान भाग कल्पून त्यांतील एक भाग लिहिणें तर $\frac{1}{4}$ असा लिहावा. १ चे ५ समान भाग कल्पून त्यांतील एक भाग लिहिणें तर $\frac{1}{5}$ असा लिहावा. हे अंश चतुर्थांश किंवा चवथा हिस्सा, पंचमांश किंवा पांचवा हिस्सा, असे वाचावे.

समान अंश— अंश व छेद यांच्या लक्षणांवरून पाहतां $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ इ० अंशांत ज्याचा छेद लहान तो अंश मोठा असून, ज्याचा छेद मोठा तो अंश लहान असला पाहिजे. यावरून समान छेदांचे जे अंश ते मात्र समान असतील हे उघड आहे.

अपूर्णांक— सजातीय एक यांच्या समान अंशांच्या मोजदातीला अपूर्णांक म्हणतात. जसें— $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$ इ०.

हे अपूर्णांक ३ चतुर्थांश व २ पंचमांश असे वाचतात. यांत चतुर्थांश व पंचमांश हीं अपूर्ण परिमाणें आहेत आणि ३ व २ या त्यांच्या संख्या आहेत. यावरून अपूर्णांक हे पूर्णांकां प्रमाणेंच परिमाण संख्या दाखवितात हे उघड आहे.

समान परिमाणांची संख्या ही त्यांतील एका परिमाणाची पट दाखविते सणून $\frac{3}{3}$ याचा अर्थ १ चे ४ समान भाग कल्पून त्यांतून ३ घेतले असा होत असून, १ ला ४ नीं भागून त्याची ३ पट घेतली असाही होतो. सणून

$$\frac{3}{3} = \frac{1}{1} \text{ ची ३ पट.}$$

तसेंच $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} \text{ ची २ पट.}$

एकंच्या ४ थ्या हिस्शाची ३ पट ही त्या एकंच्या ३ पटीचा ४ था हिस्सा दाखविते. यावरून $\frac{3}{4}$ याचा अर्थ ३ चा ४ था हिस्सा असाही होतो. तसाच $\frac{2}{5}$ याचा अर्थ २ चा ५ वा हिस्सा असाही होतो. सणून

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4$$

व $\frac{2}{5} = 2 \div 5$

उपलक्षण—प्रत्येक अपूर्णांक हा आडव्या रेषे वरील संख्येच छेदा इतक्यावा हिस्सा दाखवितो. सणजे प्रत्येक अपूर्णांक हा आडव्या रेषेवरील संख्या हा भाज्य व छेद हा भाजक यांचा भागकार दाखवितो.

$\frac{5}{8}$ हा अपूर्णांक वरील लक्षणाप्रमाणें ५ अष्टमांश रूपये असा वाचतात, आणि त्या उपलक्षणाप्रमाणें ५ रुपयांचा ८ वा हिस्सा असा वाचतात.

व्यवहारी अपूर्णांक—वर दिलेल्या अपूर्णांकांतील अंश किंवा परिमाणें हीं एकं खालीं प्रत्यक्ष छेद लिहून दाखविलीं आहेत. अशा रीतीनें मांडिलेल्या अपूर्णांकांना व्यवहारी अपूर्णांक हें नांव देतात.

$\frac{5}{8}$ हा एकमेतील उभ्या आडव्या रेषा त्या $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ हे व्यवहारी अपूर्णांक दाखवितात, तथापि त्यांचीं ४ थ्या हिस्शांनें घटणारीं परिमाणें किंवा अंश हे आपण एकं खालीं प्रत्यक्ष छेद लिहून दाखवित नाहीं. या अंशांच्या संख्या रेषांनीं दाखवून त्या रेषांच्या १ल्या, २-या इ० स्थलांनीं हे अंश दाखवितो. त्या वेगळ्या संकेतामुळे त्या रेषांना चतुर्थांश अपूर्णांक किंवा रेषांचे अपूर्णांक असें वेगळें नांव येतें.

त्या पुढील उदाहरणांत रेषांचे अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांकांत कसे लिहावे हें दाखविलें आहे.

$$\begin{array}{lll} \cdot 1 \cdot = \frac{1}{2}; & \cdot 11 \cdot = \frac{2}{3}; & \cdot 111 \cdot = \frac{3}{4}. \\ \text{८} = \frac{9}{10}; & \text{८८} = \frac{2}{3}; & \text{८८८} = \frac{3}{4}; \\ \text{८1} = \frac{9}{10}; & \text{८11} = \frac{2}{3}; & \text{८111} = \frac{3}{4}. \end{array}$$

टीप- अपूर्ण परिमाणाला अंश हें नांव आहे तरी व्यवहारांत आडव्या रेषेवरील संख्येला अंश स्मरण्याचा प्रचार आहे.

जेव्हां छेदांकापेक्षां अंशांक कमी असतो, तेव्हां त्या अपूर्णाकास सम अपूर्णांक स्मरतात. (उ. $\frac{2}{3}$).

जेव्हां छेदांकापेक्षां अंशांक अधिक असतो, तेव्हां त्यास विषम अपूर्णांक स्मरतात. कारण तो खरा अपूर्णांक नव्हे, त्यास तें रूप मात्र आहे. (उ. $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, इ०).

अंश व छेद बरोबर असले तर तोही विषम अपूर्णांक होय, कारण तो पूर्णांकच आहे. (उ. $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$).

अंश छेदांपेक्षां कमी असोत किंवा अधिक असोत किंवा बरोबर असोत, वर अंश आणि खाली छेद असला स्मरणजे तो भागजाति अपूर्णांक आहे असें समजावें.

पूर्णांक लिहून त्याचे पुढे अपूर्णांक लिहिला स्मरणजे त्यास भागानुबंध पूर्णांक स्मरणजे भाग जोडलेला पूर्णांक स्मरतात. (उ. $2\frac{1}{2}$).

भागचे जे प्रतिभाग ते प्रभाग, स्मरणून अपूर्णाकाचा जो अपूर्णांक त्यास प्रभागजाति अपूर्णांक स्मरतात.

$$\text{उ. } \frac{1}{2} \text{ चा } \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \text{ चे } \frac{4}{3}; \cdot 1 \cdot \text{ चा } \cdot 1 \cdot \text{ इ०.}$$

जेव्हां अंश व छेद हे दोन्ही किंवा एक अपूर्णांक किंवा भागानुबंध पूर्णांक असतात तेव्हां त्यांस मिश्र अपूर्णांक स्मरतात.

$$\text{उ. } \frac{1}{2}; \frac{11}{11}; \frac{211}{21}; \frac{53}{53} \text{ इ०.}$$

पूर्णांकारखाली छेद १ लिहिला स्मरणजे त्यास अपूर्णाकाचें रूप येतें.

$$(\text{ उ. } \frac{3}{1}; \frac{4}{1} \text{ इ०. })$$

व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूपांतर.

पहिल्या परिमाण संख्येच्या बरोबरीची जी दुसरी परिमाण

संख्या येते, तिला पहिलीचें रूपांतर झणतात, व दुसऱ्या परिमाणाचें रूप झणतात. जसें— २ रुपयांचे पावले किंवा चतुर्थांश केले झणजे २ रुपयांना पावल्यांचें किंवा चतुर्थांशांचें रूप दिलें असें झणतात, आणि २ रुपयांचें रूपांतर ८ पावले किंवा $\frac{८}{२}$ आहेत असें झणतात. ह्या रूपांतरांचा उपयोग अपूर्णाकांची मिळवणी, वजाबाकी, इत्यादि कृत्यांत करावा लागतो.

पहिला प्रकार. पूर्णाकास इच्छिलेला अंक छेदस्थळीं येई असें हलक्या परिमाणाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.— इच्छिलेले छेदांकानें पूर्णाकांस गुणून तो गुणाकार अंशस्थळीं लिहावा, व इच्छिलेला छेदांक छेदस्थळीं लिहावा.

उदाहरण. छेदस्थळीं ६ येतील असें ५ ह्या पूर्णाकास अपूर्णाकाचें रूप दे.

$$५ = \frac{५ \times ६}{६} = \frac{३०}{६} \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति— ६ हा छेद $\frac{१}{६}$ या परिमाणाला असतो झणून वरच्या उदाहरणाचा अर्थ ५ या पूर्णाकाचे षष्ठमांश करणें असा होतो. १ मध्ये षष्ठमांश ६ राहतात तेव्हां ५ मध्ये ३० राहतील. येथें $\frac{१}{६}$ हें परिमाण व ३० ही संख्या आहे हीं गुण्य गुणकांप्रमाणें जोडलीं झणजे $\frac{३०}{६}$ असें रूप येतें. यांत दिलेला पूर्णांक व छेद यांचा गुणाकार अंशस्थळीं आला आहे व दिलेला छेद छेदस्थळीं आला आहे. याप्रमाणेंच काणत्याही उदाहरणांत येईल.

चिचिधांत भारी परिमाणाचे संख्येला हलक्या परिमाणाचें रूप देतों त्याच नमुन्याचा हा प्रकार आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. ८ आणि २७ ह्यांस प्रत्येकीं ५ आणि २७ हे छेद येतील अशीं अपूर्णाक रूपें दे.

२ उ. ३४ आणि १३५ ह्यांस प्रत्येकीं ११ आणि १७ हे छेद येतील अशीं अपूर्णाक रूपें दे.

३ उ. ६, ९, १२ आणि २० ह्यांच्या अपूर्णाक रूपांत सर्वांस १५ छेद येतील असें कर.

४ उ. २५, ३४, १७, १११, ह्यांस ३४ हे छेद येतील अशीं अपूर्णाक रूपें दे.

दुसरा प्रकार. भागानुबंध पूर्णाकास विषम अपूर्णाकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.- पूर्णाकास अपूर्णाकाच्या छेदानें गुणून त्या गुणाकारांत अंश मिळवावा आणि त्या बेरजेखाली अपूर्णाकाचा छेद लिहावा.

१ उ. $७\frac{२}{३}$ ह्यांस विषम अपूर्णाकाचें रूप दे.

$$७\frac{२}{३} = \frac{७ \times ३ + २}{३} = \frac{२१ + २}{३} = \frac{२३}{३} \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति- $७\frac{२}{३}$ ह्यांस विषम अपूर्णाकाचें रूप देणें ह्याचा अर्थ ७ पूर्णांक व $\frac{२}{३}$ मिळून एक अपूर्णांक करणें असा आहे. सजातीय व समान अंशांच्या संख्येला अपूर्णांक लक्षणतात. या लक्षणावरून ७ या पूर्णाकाचे तृतीयांश करावे तेव्हां त्यांत $\frac{२}{३}$ मिळून एक अपूर्णांक होईल हें उघड आहे. पहिल्या प्रकाराप्रमाणें ७ ना तृतीयांशाचें रूप देतां $७ = \frac{७ \times ३}{३}$ असें येतें. या बरोवरीत $\frac{२}{३}$ मिळविलें लक्षणजे-

$$७\frac{२}{३} = \frac{७ \times ३}{३} + \frac{२}{३} = \frac{२३}{३}$$

हें इच्छिलें रूप येतें. येथें जी कृति केली तीच असल्या कोणत्याही उदाहरणांत केली पाहिजे, लक्षण हीच कृति वरील रीतीत सांगितली आहे.

हा प्रकार विविधांतल्या उतरत्या भांजणी सारखाच हुबेहूब आहे.

२ उ. २॥ ह्यांस विषम अपूर्णाकाचें रूप दे.

$$२॥ = २\frac{१}{२} = \frac{२ \times २ + १}{२} = \frac{५}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

खाली दिलेल्या संख्यांस विषम अपूर्णाकांचीं रूपें दे.

१. $३\frac{३}{६}$	८. $१५५\frac{११}{१५}$	१५. २॥.
२. $१०\frac{२}{२}$	९. $१२८\frac{११}{१८}$	१६. ३॥.
३. $२२१\frac{५}{११}$	१०. $३७\frac{१५}{३७}$	१७. ४॥.
४. $१३\frac{१५}{१७}$	११. $२००\frac{२७}{३०}$	१८. ५॥.
५. $३२\frac{१३}{३३}$	१२. $१२५\frac{२२}{२५}$	१९. ७॥.
६. $२००\frac{२९}{३०}$	१३. $५१४\frac{५}{१४}$	२०. ८॥.
७. $७१\frac{११}{१२}$	१४. $१०१\frac{१०}{२१}$	२१. ९॥.

तिसरा प्रकार. विषम अपूर्णाकास पूर्णाकाचें, अथवा भागानुबंध पूर्णाकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.- अंशांस छेदानें भागवें, भाग बरोबर तुटल्यास भागकार येईल तो पूर्णांक झाला. बाकी राहिल्यास तो पूर्णांक व बाकी छेद हा अपूर्णांक मिळून भागानुबंध पूर्णांक झाला.

$$१ \text{ उ. } \frac{४५}{५} = ९.$$

$$२ \text{ उ. } \frac{११३}{५५} = ७ \frac{८}{५५}.$$

$$३ \text{ उ. } \frac{९१}{५} = १८.$$

$$४ \text{ उ. } \frac{९१}{२} = ४५ \frac{१}{२}.$$

विषम अपूर्णाकांत अंशांपेक्षां छेद नेहेमी कमी असतो म्हणून त्याचा त्यांस भाग बरोबर जातो किंवा कांहीं शेष उरतात. शेष रहातो तो पूर्णाकांस जोडावा लागतो तेव्हां ते भागानुबंध पूर्णांक होतात.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

खाली दिलेले विषम अपूर्णाकांस भागानुबंध पूर्णाकांचीं रूपें दे.

१.	$\frac{३७}{५९}$	८.	$\frac{३०}{२९}$	१५.	$\frac{३५७७}{१०२}$
२.	$\frac{७९}{११}$	९.	$\frac{५६}{३२९०}$	१६.	$\frac{४१४८}{११७}$
३.	$\frac{३१३}{१३}$	१०.	$\frac{२३३}{१०२३}$	१७.	$\frac{४६४१}{२२१}$
४.	$\frac{२२९१}{८७}$	११.	$\frac{२५}{३१२७}$	१८.	$\frac{८२}{१६}$
५.	$\frac{१२४७}{७७}$	१२.	$\frac{७५}{६०००}$	१९.	$\frac{१३१}{६४}$
६.	$\frac{३१३६}{२५}$	१३.	$\frac{३७५}{३०००}$	२०.	$\frac{१९}{८}$
७.	$\frac{४९}{४}$	१४.	$\frac{७५}{३०००}$	२१.	$\frac{५१}{६}$

चवथा प्रकार. अपूर्णाकांस पूर्णाकानें गुणावयाचा.

रीति १ - दिलेल्या पूर्णाकानें अंशांस गुणवें

अथवा

२ - दिलेल्या पूर्णाकानें छेदाला भाग तुटल्यास भागवें.

१ उदा. $\frac{३}{५}$ ह्यांस २ ह्यांनीं गुण.

$$\frac{३}{५} \times २ = \frac{३ \times २}{५} = \frac{६}{५} \text{ उत्तर.}$$

अथवा $\frac{३}{५} \times २ = \frac{३}{\frac{५}{२}} = \frac{६}{५} \text{ उत्तर.}$

उपपत्ति- एका राशीचे कांहीं समान भाग केले आहेत अशी कल्पना करा. आतां भाग संख्या काईम ठेऊन रास दुप्पट अगर तिप्पट घेतली तर प्रत्येक भाग दुप्पट अगर तिप्पट होईल. आणि रास निमे अगर तृतीयांश केली तर प्रत्येक भाग निमे अगर तृतीयांश होईल. राशी, भाग संख्या व एक भाग ह्यांना भाज्य, भाजक व भागकार हीं नावें आहेत. ह्यावरून-

भागाकार प्र. १ - भाजक कायम ठेऊन भाज्य गुणला अगर भागला, तर भागाकार गुणला अगर भागला जाईल.

आतां रास कायम ठेऊन भाग संख्या निमे अगर तृतीयांश केली तर प्रत्येक भाग दुप्पट अगर तिप्पट होईल, आणि भाग संख्या दुप्पट अगर तिप्पट केली तर प्रत्येक भाग निमे अगर तृतीयांश होईल. ह्यावरून-

भागाकार प्र. २ - भाज्य कायम ठेऊन भाजक भागला अगर गुणला, तर भागाकार गुणला अगर भागला जाईल.

अंश, छेद व अपूर्णांक हे भाज्य, भाजक व भागाकार आहेत ह्मणून.

अपूर्णांक प्र. १ - छेद कायम ठेऊन अंश गुणला, अगर अंश कायम ठेऊन छेद भागला, तर अपूर्णांक गुणला जाईल.

अपूर्णांक प्र. २ - छेद कायम ठेऊन अंश भागला, अगर अंश कायम ठेऊन छेद गुणला, तर अपूर्णांक भागला जाईल.

अपूर्णांकाच्या १ ल्या प्रत्यक्षप्रमाणांत ज्या रीति आहेत त्याच वरच्या चवथ्या प्रकारांत दिल्या आहेत. अपूर्णांकाच्या २ च्या प्रत्यक्षप्रमाणाचा उपयोग कळण्यासाठी पुढील पांचवा प्रकार पहा.

उप. २ री- परिमाण संख्या राशि दाखविते, ह्मणून संख्येची पट केली तर राशीची पट होईल, व परिमाणाची पट केली तरी राशीची पट होईल. आपण परिमाणाला गुण्य, संख्येला गुणक, व राशीला गुणाकार, अशीं नावे दिली आहेत. ह्मणून.

गुणाकार प्र- गुण्य व गुणक यांतून कोणालाही गुणलें किंवा भागलें, तर गुणाकार गुणला किंवा भागला जाईल.

अपूर्णांकाचे संख्या व परिमाण हे दोन अवयव आहेत, ह्मणून पूर्णांकास पूर्णांकानें गुणणें असेल तर ह्या दोहोपैकी एक अवयव तितके पट मोठा करावा ह्मणजे झालें. ३ या अपूर्णांकांत ३ ही संख्या व $\frac{1}{3}$ हें परिमाण आहे, ह्मणून ३ चो दुप्पट करून ती $\frac{2}{3}$ या परिमाणाला जोडावी, अगर $\frac{1}{3}$ या परिमाणाची दुप्पट करून ती ३ ह्या संख्येला जोडावी. परिमाणाच्या छेदास पूर्णांकानें भा-

गिलें असतां तें त्या पूर्णांका इतके पट होतें (भा. प्र. २) ह्मणून $\frac{3}{2} \times 2 = 3$ व $\frac{3}{4}$ अशीं दोन रूपें येतात. हीच कृति हर-एक उदाहरणांत केली पाहिजे ह्मणून वरील रीति.

$$\begin{array}{l} २ \text{ उ. } \frac{3}{2} \times २ = \frac{३०}{१०} = ३; \quad | \quad ४ \text{ उ. } \frac{१३}{२०} \times २ = \frac{१३}{१०} = १\frac{३}{१०}. \\ ३ \text{ उ. } \frac{३}{४} \times ४ = \frac{३०}{१०} = ३; \quad | \quad ५ \text{ उ. } \frac{१५}{२४} \times ६ = \frac{१५}{४} = ३\frac{३}{४}. \end{array}$$

पांचवा प्रकार. अपूर्णाकास पूर्णाकानें भागावयाचा.

रीति १ - दिलेल्या पूर्णाकानें छेदाला गुणावे.

अथवा

२ दिलेल्या पूर्णाकानें अंशास भाग तुटल्यास भागावें.

१ उदा. $\frac{५}{४}$ यास २ नीं भाग.

$$\frac{५}{४} \div २ = \frac{५}{४ \times २} = \frac{५}{८} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{अथवा } \frac{५}{४} \div २ = \frac{५ \div २}{४} = \frac{२}{४} \text{ हें उत्तर.}$$

हा प्रकार वरील प्रकाराचे उलट आहे ह्मणून याची उपपत्ति वरील प्रकाराचे उपपत्तीवरून मनांत आणावी.

$$\begin{array}{l} २ \text{ उ. } \frac{७}{६} \div ६ = \frac{७}{६ \times ६} = \frac{७}{३६}; \quad | \quad ४ \text{ उ. } \frac{६}{८} \div २ = \frac{६ \div २}{८} = \frac{३}{४}. \\ ३ \text{ उ. } \frac{२}{३} \div ५ = \frac{२}{३ \times ५} = \frac{२}{१५}; \quad | \quad ५ \text{ उ. } \frac{१०}{३} \div ५ = \frac{१० \div ५}{३} = \frac{२}{३}. \end{array}$$

आभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. $\frac{३५}{३६}$ ह्यांस ९, १२, १८, २५, ह्यांनीं गुणव ५, ७, ८, १२, ह्यांनीं भाग.

२ उ. $\frac{१२५}{१२८}$ ह्यांस ७, ८, ९, १६, ह्यांनीं गुण व ५, ८, १२, २५, ह्यांनीं भाग.

३ उ. $\frac{३२०}{३२३}$ ह्यांस २, ३, ४, ५, ७, ह्यांनीं गुण व ६, ९, ह्यांनीं भाग.

४ उ. $\frac{३२०}{६९३}$ ह्यांस ७, ८, ९, १०, ११, ह्यांनीं भाग व ३, ४, ह्यांनीं गुण.

सहावा प्रकार. अंश व छेद ह्या दोर्हींस एकाच संख्येनें गुणिलें किंवा भागिलें तर त्या अपूर्णाकाची किंमत बदलत नाहीं.

$$१ \text{ उ. } \frac{५}{६} = \frac{५ \times २}{६ \times २} = \frac{१०}{१२} = \frac{२०}{२४} \text{ इ०.}$$

$$२ \text{ उ. } \frac{३६}{४८} = \frac{३६ \div २}{४८ \div २} = \frac{१८}{२४} = \frac{१२}{१६} = \frac{९}{१२} = \frac{३}{४} \text{ इ०.}$$

उपपत्ति—कोणतेहि संख्येनें अंशास गुणिलें ह्मणजे अपूर्णाकांस गुणिल्याप्रमाणें होतें, आणि छेदास गुणिलें ह्मणजे भागिल्याप्रमाणें होतें; हें चवथ्या व पांचव्या प्रकारावरून लक्षांत आलेंच असेल. ह्मणून अपूर्णाकांस ज्या अंकानें गुणिलें त्याच अंकानें भागिलें, तर अपूर्णाकांची किंमत बदलणार नाहीं हें उघड

आहे. याप्रमाणें अपूर्णाकाचे अंश छेदास कोणतेही संख्येनें भागिलें तरी किंमत बदलणार नाही.

सातवा प्रकार. अपूर्णाकांस अति संक्षेपरूप द्यावयाचा.

रीति.— अंश व छेद ह्यांस जो साधारण भाजक असेल, त्यानें ते अंश व छेद यांस भागवें. जो नवा अपूर्णांक येईल त्यास पुन्हा त्याचे अंश व छेद ह्यांस जो साधारण भाजक असेल, त्यानें भागवें. ह्याप्रमाणें करीत करीत शेवटीं दोर्हीस साधारण भाजक नाहीसा होईतोपर्यंत भागीत जावें.

उपपत्ति— अंश व छेद ह्या दोर्हीस एकाच संख्येनें भागलें असतां त्या अपूर्णाकाची किंमत बदलत नाही, हें सहावे प्रकारावरून लक्षांत आलेंच असेल. ह्मणून वर सांगितलेल्या रीतीप्रमाणें केलें ह्मणजे दिलेल्या अपूर्णाकाची किंमत न बदलतां त्याला अति संक्षेपरूप देतां येतें.

उ. $\frac{२७०}{३७५}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.

$$\frac{२७०}{३७५} = \frac{२७० \div ५}{३७५ \div ५} = \frac{५४}{७५} = \frac{५४ \div ३}{७५ \div ३} = \frac{१८}{२५} \text{ हें उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

पुढील अपूर्णाकांस अतिसंक्षेप रूपें दे

१ उ.	$\frac{३२४}{७२०};$	$\frac{७२०}{८५६};$	$\frac{३२४}{४९५};$	$\frac{१५८४}{५९४०}.$
२ उ.	$\frac{१६२०}{१८७२};$	$\frac{२१७८}{९९०};$	$\frac{१२१०}{३०००};$	$\frac{१७२८}{२५९२}.$
३ उ.	$\frac{२०१६}{१४८५};$	$\frac{१९३५}{८६४};$	$\frac{३३७५}{३३००};$	$\frac{३४५६}{५९३०}.$
४ उ.	$\frac{२१६०}{५५४४};$	$\frac{३०७२}{७०४०};$	$\frac{४२३५}{११३८५};$	$\frac{८११८}{२२१७६}.$
५ उ.	$\frac{६५५२}{७३९२};$	$\frac{७३९२}{७३९२};$	$\frac{१६३३५}{२३३२८};$	$\frac{२३३२८}{२३३२८}.$

सूचना—अंश व छेद ह्यांचा दृढभाजक काढून त्यानें ते भागून अतिसंक्षेपरूप एकदम देतां येतें. परंतु ह्या रीतीनें कृत्य फार लांब पडतें, ह्मणून लोक दृढभाजक काढण्याच्या खटपटींत बहुधा पडत नाहीत. परंतु एकाद्या अपूर्णाकास अतिसंक्षेपरूप देतां येईल किंवा नाही ह्याचा अजमास समजत नाही, तेथें मात्र दृढभाजकाचा उपयोग करितात. उदाहरण $\frac{२५९१}{१९८९}$ ह्याचे अंश व छेद ह्यांस ११३ ह्यांनीं भागून $\frac{२३}{२३}$ हें अतिसंक्षेपरूप येतें, परंतु ही भाजक संख्या

दृढभाजक काढल्यावांचून समजणें कठीण झणून अशा ठिकाणीं दृढभाजकच काढावा लागतो.

१ उ. $\frac{१११७}{१४८७}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.

आतां ४११७ आणि ९४८७ ह्यांचा दृढभाजक १७९ आहे. झणून १७९) $\frac{१११७}{१४८७} = \frac{२३}{५३}$ हें उत्तर.

२ उ. $\frac{१३५३६}{१७४८४}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.

अंश व छेद ह्यांचा दृढभाजक ५६४ आहे. झणून ५६४) $\frac{१३५३६}{१७४८४} = \frac{२४}{३९}$ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

पुढील अपूर्णाकांस अतिसंक्षेपरूपें दे.

१ उ.	$\frac{३२९}{७४९}$;	$\frac{५१०}{११२२}$;	$\frac{२९९}{५२९}$.
२ उ.	$\frac{१४०७}{४३३२}$;	$\frac{१९०५}{३१७५}$;	$\frac{८२५१}{१४७१८}$.
३ उ.	$\frac{६५०९}{७८८९}$;	$\frac{१५८९}{२७७०}$;	$\frac{१७१५}{१०७५९}$.
४ उ.	$\frac{३५७५}{४७१९}$;	$\frac{१२६१}{४४२३२}$;	$\frac{१०७५९}{२०४०५}$.

आठवा प्रकार. प्रभागजाति अपूर्णाकांस भागजाति अपूर्णाकाचें रूप द्यावयाचा.

रिति— सर्व अंशांचा गुणाकार अंशस्थलीं लिहावा आणि छेदांचा गुणाकार छेदस्थलीं लिहावा झणजे इच्छिलें रूप येईल.

सूचना १ ली— चा, चे, यांनीं जोडलेल्या अवयवांत भागानुबंधपूर्णांक अगर नुसते पूर्णांक असले, तर त्यांस प्रथम विषम अपूर्णाकार्चीं रूपे द्यावीं आणि मग वरील रिति लावावी.

सूचना २ री.— प्रभागजाति अपूर्णाकांत कोणताही अंश व कोणताही छेद ह्यांत संक्षेप गेल्यास संक्षेप द्यावा झणजे अति संक्षेपरूप येईल.

१ उ. $\frac{३}{३}$ चे $\frac{४}{१५}$ हें उत्तर.

उपपत्ति— $\frac{३}{३}$ चे $\frac{४}{१५}$ घ्यावयाचे झणजे $\frac{३}{३}$ ह्यांची $\frac{४}{१५}$ पट घ्यावयाची, झणजे $\frac{३}{३}$ ह्यांच्या ४ पटीचा ५ वा हिस्सा घ्यावयाचा. आतां, चवथे प्रकाराप्रमाणें, जितकी पट करावयाची तितक्यांनीं अंशांस गुणावें असें आहे, आणि पांचवे प्रकाराप्रमाणें जितका यावा हिस्सा घ्यावयाचा तितके पट छेद वाढवावा असें आहे,

हणून वरची रीति अंशांनी अंश गुणावे आणि छेदांनी छेद गुणावे अशी निघाली.

२ उ. $२\frac{३}{४}$ चे ५ चे $३\frac{१}{२}$. प्रथम सू. १ प्र. सर्वास विषम अपूर्णाकांचीं रूपें दिलीं तेव्हां $१\frac{१}{२}$ चे $\frac{५}{१}$ चे $\frac{७}{२} = \frac{११ \times ७ \times ५}{२ \times १ \times २} = \frac{३८५}{२} = १९२\frac{१}{२}$ हें उत्तर.

३ उ. $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{१}$ चे $\frac{२७}{१०}$. सू. २ प्र.

$$\frac{३}{४} \text{ चे } \frac{५}{१} \text{ चे } \frac{२७}{१०} = \frac{३}{४} \text{ चा } \frac{५}{१} \text{ चे } \frac{३}{४}$$

$$= \frac{३ \times ५ \times ३}{४ \times १ \times ५} = \frac{९}{४} = २\frac{१}{४} \text{ हें उत्तर.}$$

४ उदा. २॥ चा १० चे ४८ हे व्यवहारी अपूर्णांक रूपानें लिहिले तर $\frac{५}{२}$ चे $\frac{१}{४}$ चे $\frac{६५}{१६}$ होतात. हणून

$$\frac{५}{२} \times \frac{१}{४} \times \frac{६५}{१६} = \frac{५ \times १ \times ६५}{२ \times ४ \times १६}$$

$$= \frac{३२५}{१२८} = २\frac{६९}{१२८} \text{ हें उत्तर.}$$

टीप १ ली.- $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{१}$ याचा अर्थ $\frac{३}{४}$ ची $\frac{५}{१}$ पट असा होतो. कोणत्याही प्रभागजातीचा असाच अर्थ व्हावयाचा. ह्यावरून प्रभागजातीचा एक अवयव परिमाण किंवा गुण्य दाखवितो, दुसरा अवयव संख्या किंवा गुणक दाखवितो, आणि चा, चे, हे वर्ण × ह्या गुणन चिन्हाचें कार्य करितात, असें ह्मटलें पाहिजे.

टीप २ री.- परिमाण परिमाणांचा गुणाकार संभवत नाहीं, ह्यावरून प्रभागजातीमध्ये एकच अवयव परिमाणवाचक संभवेले. अर्थात् वरच्या चवथ्या उदाहरणांत २॥ हे रूपये असले तर १० व ४८ हे भावसंख्या दाखविणारे असले पाहिजेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

पुढील प्रभागजाति अपूर्णाकांस भागजाति अपूर्णाकांचीं रूपें दे.

- १ उ. $\frac{१}{२}$ चे $\frac{५}{६}$ चे ४; $\frac{१}{३}$ चे $\frac{५}{६}$ चे $६\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$ चे ३.
- २ उ. $\frac{३}{४}$ चा $\frac{५}{१}$ चे $३\frac{१}{२}$; $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$ चे $\frac{५}{६}$; $\frac{३}{४}$ चे $३\frac{१}{११}$ चे $९\frac{१}{६}$.
- ३ उ. $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$ चे $\frac{३}{१०}$; $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$ चे $३\frac{१}{२}$; $\frac{३}{४}$ चे $३\frac{३}{४}$ चे १०.
- ४ उ. $२\frac{१}{२}$ चे $\frac{३}{५}$ चे $७\frac{१}{३}$; $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$ चे $७\frac{१}{६}$; $३\frac{१}{४}$ चे $१\frac{५}{६}$ चे $३\frac{३}{४}$.
- ५ उ. $\frac{६}{८}$ चे $\frac{११}{१२}$ चे ९ चे $६\frac{१}{२}$; $\frac{१२}{१३}$ चे $२\frac{२}{३}$ चा $१\frac{१}{२५}$ चे $१\frac{११}{६४}$.
- ६ उ. $\frac{५}{१५}$ च $\frac{१}{२१}$ चे $\frac{५}{६}$ चे ७; $\frac{३}{४}$ चे $६\frac{१}{२}$ चे $\frac{१३}{१४}$ चे २६.

- ७ उ. $\frac{3}{99}$ चे $9\frac{2}{3}$ चे $5\frac{1}{3}$ चा 9 ; $9\frac{1}{2}$ चे $2\frac{1}{2}$ चे $3\frac{3}{4}$ चे $8\frac{1}{4}$.
 ८ उ. $3\frac{1}{2}$ चे $2\frac{1}{4}$ चे $\frac{3}{2}$ चे $\frac{6}{99}$; $\frac{6}{99}$ चे $2\frac{1}{2}$ चे $\frac{3}{2}$ चे $90\frac{1}{2}$.
 ९ उ. $2||$ चे $3|||$ चे $2\frac{3}{4}$ चे 7 ; $5||$ चे 31 चे $2\frac{1}{4}$ चे 7 .
 १० उ. $9\frac{1}{2} =$ चे 6 चे $1 =$ चे 5 ; 11 चा 6 चा 1 चा 6 .
 ११ उ. 561 चे 3 चे $7||$; 6 चा 6 चा 6 चे $5||$.

नववा प्रकार. मिश्र अपूर्णाकांस भागजाति अपूर्णाकांचें रूप द्यावयाचा.

रीति.- अंशांचे अंश आणि छेदांचे छेद यांचा गुणाकार अंशस्थानी लिहावा. आणि अंशाचे छेद आणि छेदाचे अंश यांचा गुणाकार छेदस्थानी लिहावा ह्मणजे मिश्र अपूर्णाकांस भागजाति रूप येते.

$$१ \text{ उदा. } \frac{2\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{90}{92} = \frac{5}{6} \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति- या उदाहरणाचा अर्थ असा कीं $\frac{2}{3}$ ह्यांस $\frac{4}{4}$ ह्यांनी भागवयाचें आहे. आतां हें स्पष्ट आहे कीं $\frac{2}{3}$ ह्यांस 4 च्या पांचमांशांनी भागण्याबद्दल नुसत्या 4 नीच जर भागलें तर भागकार यावा त्याच्या पांचव्या हिशानें येईल (भा. प्र. २). ह्मणून पहिल्यानेच $\frac{2}{3}$ ह्यांची 4 पट केली आणि नंतर त्यास 4 नीं भागलें ह्मणजे अपूर्णाकाचे किमतीत फरक पडणार नाहीं.

सूचना- सातवे प्रकारावरून असेही लक्षांत येईल कीं मिश्र अपूर्णाकांचे अंश व छेद यांत अंशा अंशांत व छेदा छेदांत संक्षेप गेला असतां बेलाशक द्यावा.

$$२ \text{ उदा. } \frac{2\frac{4}{6}}{6} = \frac{24}{6} = \frac{3}{9} = \frac{3}{3}.$$

$$३ \text{ उदा. } \frac{6}{3\frac{3}{4}} = \frac{6}{\frac{15}{4}} = \frac{6 \times 4}{15 \times 4} = 9\frac{1}{3}.$$

$$४ \text{ उदा. } \frac{9\frac{6}{90}}{90\frac{6}{9}} = \frac{96}{90} = \frac{96}{90} = \frac{32}{30} = \frac{16}{15} = \frac{9 \times 9}{2 \times 3} = \frac{9}{2}.$$

दाहावा प्रकार. अपूर्णाकांस समच्छेदरूप देण्याचा ह्मणजे दिलेल्या अपूर्णाकांचीं परिमाणें सारखीं करण्याचा.

रीति.- दिलेल्या सर्व छेदांचा लघुतम साधारण भाज्य काढावा, नंतर प्रत्येक छेदानें त्या भाज्यास भागून भागाकार येईल त्या संख्येनें त्या त्या अंशास गुणून ते गुणाकार अंश स्थानीं लिहावे आणि तो लघुतम साधारण भाज्य त्या सर्वांस छेद लिहावा ह्मणजे लघुतम समछेद रूपें येतील.

उ. $\frac{4}{2}, \frac{99}{92}, \frac{6}{92}$, ह्यांस समच्छेदरूपें दे.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{2} = \frac{4 \times 92}{2 \times 92} = \frac{368}{184} \\ \frac{99}{92} = \frac{99 \times 2}{92 \times 2} = \frac{198}{184} \\ \frac{6}{92} = \frac{6 \times 2}{92 \times 2} = \frac{12}{184} \end{array} \right\} \text{ह्या उदाहरणांत } 2, 92, 92, \text{ ह्यांचा लघु-} \\ \text{तम साधारण भाज्य } 184 \text{ आहे. ह्यांस दि-} \\ \text{लेल्या अपूर्णाकांच्या छेदांनीं, ह्मणजे } 2, \\ 92, 92, \text{ ह्यांनीं भागून भागाकार } 9, 6, 2 \text{ हे आले, ह्यांनीं त्या}$$

त्या अपूर्णाकांच्या अंशांस गुणून गुणाकार अंशस्थळीं लिहिले आणि लघुतम साधारण भाज्य 184 हा छेदस्थळीं लिहिला.

उपपत्ति-सहावे प्रकारांत सांगितल्याप्रमाणें ह्या कृत्यांत अंश व छेद ह्यांस एकाच संख्येनें गुणल्यासारखें होतें, यामुळें दिलेल्या अपूर्णाकांच्या मूळ किमतींत कांहीं भेद न पडतां $\frac{\text{एक}}{\text{छेद}}$ यांनीं दाखविलेलीं परिमाणें सारखीं होतात. ह्मणजे सर्व अपूर्णाकांचे छेद सारखे झाल्यामुळें वस्तूचे भाग सारखे केले आहेत असें होतें. $\frac{\text{एक}}{\text{छेद}}$ यांनीं दाखविलेल्या तुकड्याचे जातीचे अमुक तुकडे घेतले हें अंश दाखवितात, ह्मणून छेदस्थळीं एकच संख्या असल्यामुळें समच्छेद असणाऱ्या अपूर्णाकांचीं परिमाणें समान होतात.

दुसरी रीति.- प्रत्येक अपूर्णाकाचा अंश, व त्याचे छेदावांचून दुसऱ्या सर्व अपूर्णाकांचे छेद हे परस्पर गुणावे; ह्याप्रमाणें जितके अपूर्णाक असतील तितके वेगळाले गुणाकार करून ते अंशस्थळीं लिहावे, आणि सर्व अपूर्णाकांचे छेद परस्पर गुणून तो गुणाकार सर्वांचे छेदस्थळीं लिहावा.

उ. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, ह्यांस समच्छेदरूपें दे.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times 4 \times 5 = 40 \\ 3 \times 3 \times 5 = 45 \\ 4 \times 4 \times 3 = 48 \end{array} \right\} \text{हे सर्व अंश झाले, आणि}$$

$$\frac{40}{40}, \frac{45}{40}, \frac{48}{40}, \text{ हा छेद झाला, तेव्हां} \\ \frac{40}{40}, \frac{45}{40}, \frac{48}{40}, \text{ हें उत्तर.}$$

उप० - वरील रीतीनें समच्छेद कां होतात, हें स्पष्टपणें दाखवितां येतें. वरील कृतींत हें बीज आहे कीं, कोणतेही अपूर्णाकाचे अंशास ज्या संख्येनें गुणावें त्या संख्येनें त्याच्या छेदासही गुणिलें तर अपूर्णाकाच्या किंमतींत फरक होत नाहीं. त्याचें रूपांतर मात्र होतें. (६ वा प्रकार पहा). वरील उदाहरणांतील दुसरे व तिसरे अपूर्णाकांच्या छेदांचा गुणाकार २० होतो. त्यानें पहिले $\frac{३}{५}$ ह्या अपूर्णाकाचे अंश व छेद या दोहींस गुणिलें तर त्याचें रूपांतर $\frac{१२}{१०}$ असें होतें. त्याचप्रमाणें पहिल्या व तिसऱ्या अपूर्णाकांच्या छेदांचा गुणाकार १५ होतो, त्यानें दुसऱ्या ह्मणजे $\frac{३}{५}$ ह्या अपूर्णाकाचे अंश व छेद ह्या दोहींस गुणिलें ह्मणजे $\frac{१५}{१०}$ असें त्याचें रूपांतर होतें. आणि पहिल्या व दुसऱ्या दिलेल्या अपूर्णाकांचा छेदांचा गुणाकार १२ होतो, त्यानें तिसरे ह्मणजे $\frac{३}{५}$ ह्याचे अंश व छेद ह्यांस गुणिलें ह्मणजे त्याचें $\frac{१२}{१०}$ असें रूपांतर होतें. वरील १ ले रीतींत हीच कृति वेगळ्या प्रकारानें दाखविली आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

पुढील अपूर्णाकांस समच्छेद रूपें दे.

१	उ. $\frac{१}{२}$,	$\frac{२}{३}$,	$\frac{३}{४}$,	$\frac{४}{५}$,	$\frac{५}{६}$,	$\frac{६}{७}$,	$\frac{७}{८}$.	
२	उ. $\frac{१}{३}$,	$\frac{२}{४}$,	$\frac{३}{५}$,	$\frac{४}{६}$,	$\frac{५}{७}$,	$\frac{६}{८}$,	$\frac{७}{९}$,	$\frac{१३}{१८}$.
३	उ. $\frac{१}{४}$,	$\frac{२}{५}$,	$\frac{३}{६}$,	$\frac{४}{७}$,	$\frac{५}{८}$,	$\frac{६}{९}$,	$\frac{७}{१०}$,	$\frac{१३}{२४}$.
४	उ. $\frac{१}{५}$,	$\frac{२}{६}$,	$\frac{३}{७}$,	$\frac{४}{८}$,	$\frac{५}{९}$,	$\frac{६}{१०}$,	$\frac{७}{११}$.	
५	उ. $\frac{१}{६}$,	$\frac{२}{७}$,	$\frac{३}{८}$,	$\frac{४}{९}$,	$\frac{५}{१०}$,	$\frac{६}{११}$,	$\frac{७}{१२}$.	
६	उ. $\frac{१}{७}$,	$\frac{२}{८}$,	$\frac{३}{९}$,	$\frac{४}{१०}$,	$\frac{५}{११}$,	$\frac{६}{१२}$,	$\frac{७}{१३}$.	
७	उ. $\frac{१}{८}$,	$\frac{२}{९}$,	$\frac{३}{१०}$,	$\frac{४}{११}$,	$\frac{५}{१२}$,	$\frac{६}{१३}$,	$\frac{७}{१४}$.	
८	उ. $\frac{१}{९}$,	$\frac{२}{१०}$,	$\frac{३}{११}$,	$\frac{४}{१२}$,	$\frac{५}{१३}$,	$\frac{६}{१४}$,	$\frac{७}{१५}$.	
९	उ. $\frac{१}{१०}$,	$\frac{२}{११}$,	$\frac{३}{१२}$,	$\frac{४}{१३}$,	$\frac{५}{१४}$,	$\frac{६}{१५}$,	$\frac{७}{१६}$.	
१०	उ. $\frac{१}{११}$,	$\frac{२}{१२}$,	$\frac{३}{१३}$,	$\frac{४}{१४}$,	$\frac{५}{१५}$,	$\frac{६}{१६}$,	$\frac{७}{१७}$.	
११	उ. $\frac{१}{१२}$,	$\frac{२}{१३}$,	$\frac{३}{१४}$,	$\frac{४}{१५}$,	$\frac{५}{१६}$,	$\frac{६}{१७}$,	$\frac{७}{१८}$.	
१२	उ. $\frac{१}{१३}$,	$\frac{२}{१४}$,	$\frac{३}{१५}$,	$\frac{४}{१६}$,	$\frac{५}{१७}$,	$\frac{६}{१८}$,	$\frac{७}{१९}$.	

व्यवहारी अपूर्णाकांची मिळवणी.

परिमाणांची बेरीज किंवा घजाबाकी करितां येण्याला त्या

परिमाणांत साम्य असावें लागतें. चार रुपयांत दोन पावले मिळवून त्यांची बेरीज साहा रुपये किंवा साहा पावले ह्मणतां येत नाही. चार रुपयांचे १६ पावले करून नंतर त्यांत २ पावले मिळवावे तेव्हां १८ पावले ही त्यांची बेरीज येते.

व्यवहारी अपूर्णांकांत अंशांची ह्मणजे तुकड्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी करणें असते. ते तुकडे एका जातीचे व एका योग्यतेचे असले पाहिजेत. एका रुपयाचे ४ तुकडे करून त्यांतून दोन घेतले, आणि ८ तुकडे करून त्यांतून दोन घेतले, तर हे दोन प्रकारचे तुकडे सारख्या योग्यतेचे नाहीत. तुकडे सारख्या योग्यतेचे असण्यास त्यांचे छेद एकसारखे पाहिजेत.

३ सप्तमांश आणि ४ सप्तमांश यांची बेरीज ७ सप्तमांश असें ह्मणतां येईल. परंतु ३ सप्तमांश आणि ४ नवमांश यांची बेरीज ७ कांहीं तरी अंश, या बोलण्यांत कांहीं अर्थ नाही. ह्मणून:-

रीति-दिलेल्या अपूर्णांकांस समच्छेदरूप द्यावें, नंतर अंशांची बेरीज करून ती अंशस्थानी लिहावी, आणि तिच्या खाली समच्छेद लिहावा ह्मणजे ती मिळवणी होत्ये.

१ उ. $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{१}{६}$ ह्यांची बेरीज कर.

ह्या उदाहरणांत दिलेले अपूर्णांकाचे छेद सम आहेत. ह्मणून $\frac{३}{४} + \frac{१}{६} = \frac{५}{६}$ हें उत्तर.

२ उ. $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{५}{६}$ ह्यांची बेरीज कर.

$\frac{२}{३} + \frac{३}{४} + \frac{५}{६} = \frac{४०}{६०} + \frac{४५}{६०} + \frac{५०}{६०} = \frac{१३५}{६०} = २\frac{१५}{६०}$ हें उत्तर.

सूचना १ ली.- उदाहरणांत कांहीं भागानुबंध पूर्णांक व कांहीं पूर्णांक असले तर, पूर्णांक व अपूर्णांक ह्यांच्या बेरजा वेगळाल्या करून मग त्या दोन बेरजा एकत्र कराव्या.

३ उ. $२\frac{३}{४} + ३\frac{१}{१०} + ५\frac{५}{१२} + ४$.

पूर्णांकांची बेरीज $२ + ३ + ५ + ४ = १४$.

अपूर्णांकांची बेरीज $\frac{३}{४} + \frac{१}{१०} + \frac{५}{१२} = \frac{३६ + ५ + २५}{६०}$
 $= \frac{६६}{६०} = १\frac{५६}{६०} = १\frac{११}{१२}$.

आतां दोन्ही बेरजा एक केल्या तेव्हां $१४ + १\frac{११}{१२} = १५\frac{११}{१२}$ हें उत्तर.

सूचना २ री.- उदाहरणांत विषम अपूर्णांक असल्यास त्यांस

भागानुबंध पूर्णांकांचें रूप द्यावें; व प्रभागजाति अपूर्णांक असले तर त्यांस भागजाति अपूर्णांकांचें रूप द्यावें, आणि मग समच्छेद करून मिळवणी अथवा वजाबाकी करावी.

$$४ उ. \frac{११३}{८} + \frac{३}{६} \text{ चे } \frac{१०}{९} + २\frac{३}{४} \text{ चे } २\frac{२}{९} \text{ चे } \frac{५}{८} + ५.$$

$$\text{आतां } \frac{११३}{८} = १४\frac{१}{८}.$$

$$\text{व } \frac{३}{६} \text{ चे } \frac{१०}{९} = \frac{२}{३}.$$

$$\text{आणि } २\frac{३}{४} \text{ चे } २\frac{२}{९} \text{ चे } \frac{५}{८} = ३\frac{३}{४}.$$

$$\begin{aligned} \text{ह्मणून } १४\frac{१}{८} + \frac{२}{३} + ३\frac{३}{४} + ५ &= १४ + ३ + ५ + \frac{१}{८} + \frac{२}{३} + \frac{३}{४} \\ &= २२ + \frac{३+१६+१८}{२४} \\ &= २२ + १\frac{१३}{२४} \\ &= २३\frac{१३}{२४} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

सूचना ३ री- उदाहरणांत कांहीं रेषांचे अपूर्णांक असल्यास अवश्य असेल तर त्यांस व्यवहारी अपूर्णांकांचें रूप द्यावें.

$$६ उ. २|| + \frac{३}{६} = २\frac{१}{२} + \frac{३}{६} = २ + \frac{१}{२} + \frac{३}{६} = २\frac{१३}{६} \text{ हें उत्तर.}$$

वरील उदाहरणांत अंशाची मिळवणी करून तिच्याखाली समच्छेद लिहित आलों ह्मणजे परिमाण संख्यांची मिळवणी करून तिला साधारण परिमाण गुण्य जोडीत आलों. प्रभागजातीतील अपूर्णांक हे संख्या व परिमाण हेच अवयव दाखवीत असतात. (प्रकार < टीप पहा) ह्यास्तव.

सूचना ४ थी- प्रभागजाति अपूर्णांकांची मिळवणी करणें-असून त्यांत साधारण अवयव असला, तर असाधारण अवयवांची मिळवणी करून तिला तो साधारण अवयव गुण्य जोडावा.

$$उ. \frac{२}{३} \text{ चे } \frac{५}{६} \text{ आणि } \frac{२}{३} \text{ चे } \frac{५}{६} \text{ ह्यांची मिळवणी कर.}$$

ह्या उदाहरणांत $\frac{२}{३}$ हा अवयव साधारण आहे ह्मणून.

$$\begin{aligned} \frac{२}{३} \text{ चे } \frac{५}{६} + \frac{२}{३} \text{ चे } \frac{५}{६} &= \frac{२}{३} \left(\frac{५}{६} + \frac{५}{६} \right) \\ &= \frac{२}{३} \left(\frac{२०}{३६} + \frac{२५}{३६} \right) \\ &= \frac{२}{३} \times \frac{४३}{३६} = \frac{१०६}{१०८} \\ &= १\frac{१}{१०८} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$$१ उ. \frac{५}{६} + \frac{२}{३} + \frac{६}{६} + \frac{५}{६} + \frac{३}{६}.$$

- २ उ. $\frac{9}{2} + \frac{9}{3} + \frac{6}{2} + \frac{4}{3}$; $\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2}$.
- ३ उ. $\frac{9}{2} + \frac{9}{3} + \frac{6}{2} + \frac{4}{3}$; $\frac{2}{3} + \frac{9}{2} + \frac{4}{2} + \frac{9}{2}$.
- ४ उ. $\frac{6}{2} + \frac{6}{2} + \frac{6}{2} + \frac{6}{2}$; $\frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{4}{2}$.
- ५ उ. $2\frac{9}{2} + \frac{6}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2}$; $2\frac{9}{2} + 2\frac{9}{2} + 8\frac{9}{2} + 4$.
- ६ उ. $2\frac{3}{2} + 2\frac{4}{2} + \frac{6}{2} + 2\frac{4}{2}$; $2\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 8 + 4\frac{4}{2}$.
- ७ उ. $9\frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{2} + 2\frac{9}{2}$; $2\frac{6}{2} + 9\frac{9}{2} + \frac{4}{2} + 2\frac{6}{2} + \frac{9}{2}$.
- ८ उ. $\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{2} + \frac{3}{2}$; $2\frac{9}{2} + \frac{4}{2} + \frac{3}{2} + 9\frac{9}{2}$.
- ९ उ. $9\frac{9}{2} + \frac{6}{2} + \frac{3}{2} + 9\frac{6}{2}$; 6 चे 9 + $2\frac{6}{2}$ चे $9\frac{9}{2}$.
- १० उ. $\frac{9}{2} + 9\frac{2}{2} + \frac{6}{2} + 2\frac{9}{2} + \frac{9}{2}$; $9\frac{9}{2} + 2\frac{3}{2} + 2\frac{4}{2} + 8\frac{3}{2}$.
- ११ उ. $4\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ चे 6 $\frac{9}{2} + 6$ $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} + 6$ $\frac{9}{2} + 6$ चे 6 चे $9\frac{9}{2}$.
- १२ उ. $2\frac{3}{2}$ चे $2\frac{3}{2} + \frac{9}{2}$ $+ 2\frac{4}{2}$ चे $8\frac{9}{2}$ चे $9\frac{3}{2} + 8\frac{4}{2}$ चे $2\frac{4}{2}$ चे $9\frac{3}{2}$.
- १३ उ. 21 चे $311 + 4\frac{9}{2} + 6\frac{3}{2}$ चे $311 + 4$.
- १४ उ. 10 चा $6 + 2\frac{4}{2} + 6\frac{2}{2} + 6$.
- १५ उ. $41 + 21 + 2\frac{3}{2} + 9\frac{9}{2}$.

व्यवहारी अपूर्णांकांची वजाबाकी.

मिळवणीत सांगितल्याप्रमाणे दिलेले अपूर्णांक समच्छेद करावे, आणि मग अधिक अंशांत थोडे अंश वजा करून बाकी राहिल तीच्या खाली समच्छेद लिहावा.

सूचना- मिळवणीत दिलेल्या सूचना येथेही लागू कराव्या.

१ उ. $\frac{9}{2}$ आणि $\frac{9}{2}$ ह्यांची वजाबाकी करावयाची, आतां $\frac{9}{2} - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$ हे उत्तर.

२ उ. $\frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{26}{30} - \frac{94}{30} = \frac{93}{30}$ हे उत्तर.

३ उ. $4\frac{4}{2} - 2\frac{9}{2} = (4-2) + (\frac{4}{2} - \frac{9}{2})$
 $= 2 + \frac{4-9}{2} = 2 + \frac{9}{2}$
 $= 2\frac{9}{2}$ हे उत्तर.

४ उ. $4\frac{3}{2} - 2\frac{9}{2} = (4-2) + (\frac{3}{2} - \frac{9}{2}) = 2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = 2 + \frac{3-9}{2}$.

आतां ३ ह्यांतून ४ वजा जात नाहीत म्हणून पूर्णांकांपैकी एक पूर्णांक म्हणजे $\frac{3}{2}$ अपूर्णांकांत नेले. तेव्हां, $2 + \frac{3-9}{2} = 2 + \frac{9-9}{2} = 2\frac{6}{2}$ हे उत्तर.

$$५ उ. ६ - ४\frac{३}{६} = २ - \frac{३}{६} = १\frac{३}{६}$$

$$६ उ. ५\frac{१}{६} \text{ चे } २\frac{१}{३} \text{ चे } १६ - १\frac{३}{६} \text{ चे } ५\frac{१}{३} = ८ - ७\frac{६}{६}$$

$$= ७\frac{६}{६} - ७ - \frac{६}{६}$$

$$= \frac{१}{६} \text{ हे उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

- १ उ. $\frac{११}{५} - \frac{८}{५}; \frac{१३}{२०} - \frac{७}{२०}; \frac{८}{१५} - \frac{२}{२०}; २ - \frac{१}{३}$.
- २ उ. $३\frac{३}{४} - १\frac{१}{४}; ३\frac{३}{४} - २\frac{५}{४}; ५ - २\frac{६}{६}; १०\frac{३}{५} - \frac{११}{६०}$.
- ३ उ. $१\frac{५}{२५} - \frac{३}{३}; ९ - ३\frac{५}{५}; ९\frac{६}{२} - ४\frac{८}{६}; ५\frac{३}{३४} - २\frac{१०}{२१}$.
- ४ उ. $१\frac{३}{६} - ३\frac{३}{५}; \frac{१}{२१} - ३\frac{१}{६}; ३\frac{२}{२} - ६\frac{१}{३}; २\frac{४}{२५} - २\frac{१}{२३}$.
- ५ उ. $१\frac{८}{२५} - \frac{४}{५}; १\frac{७}{३५} - २\frac{१}{५}; ४\frac{३}{५} - \frac{४}{५} \text{ चे } \frac{२}{३}; १० - ५ \text{ चे } \frac{६}{११}$.
- ६ उ. $१\frac{२}{३} \text{ चे } २\frac{७}{४} - ३\frac{१७}{८}; ५\frac{१}{२} \text{ चे } ४\frac{१}{२} - ३\frac{१}{४} \text{ चे } ३\frac{१}{५}$.
- ७ उ. $३\frac{१}{४} + ४\frac{२}{४} - ५\frac{१}{२} + १\frac{६}{२} - ७\frac{१}{२} + १० - १\frac{४}{६}$.
- ८ उ. $५\frac{१}{५} - २\frac{६}{५} - ३\frac{३}{१०} + \frac{१३}{२} - १\frac{६}{५} + ३\frac{१}{२} + ८\frac{१}{२}$.
- ९ उ. $५\frac{१}{५} - २\frac{१}{५}; \frac{८}{३} - ७ \text{ चे } \frac{११}{४८}$.
- १० उ. $५\frac{१}{५} \text{ चे } \frac{२}{३} + \frac{५}{६} - २\frac{१}{५} \text{ चे } \frac{४}{५} + \frac{२}{६} - २\frac{१}{५}$.
- ११ उ. $३\frac{१}{२} - २\frac{३}{४} + १\frac{३}{५} \text{ चे } \frac{२}{३} \text{ चे } १०$.

व्यवहारी अपूर्णाकांचा गुणाकार.

गुणणें ह्याचा अर्थ पठ करणें असा आहे, ह्मणून $\frac{२}{३}$ ना $\frac{३}{३}$ नीं गुणणें ह्याचा अर्थ $\frac{२}{३}$ ची $\frac{३}{३}$ पठ करणें आसा होतो, ह्मणजे $\frac{२}{३} \times \frac{३}{३}$ याचा अर्थ $\frac{२}{३}$ चे $\frac{३}{३}$ काढणें असा होतो. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{३}{३}$ हें रूप प्रभागजाति अपूर्णाकाचें आहे. ह्यावरून दिलेल्या गुण्य गुणकाचा गुणाकार करणें ह्याचा अर्थ ते गुण्य गुणक जो प्रभागजाति अपूर्णाक दाखवितात, त्याला भागजाति अपूर्णाकाचें रूप देणें असा होतो. ह्मणून $\frac{८}{५}$ व्या प्रकारांत जो रीति दिली आहे तीच येथेंही दिली आहे.

उप० २ री- $\frac{३}{५}$ ह्याचा अर्थ $३ \div ५$ असा होतो, ह्यावरून $\frac{३}{५}$ ह्याला $\frac{३}{५}$ ह्यांनीं गुणणें ह्मणजे त्याला ३ नीं गुणून ५ नीं भागणें असा अर्थ होतो. चवथें प्रकाराप्रमाणें, $\frac{३}{५}$ ह्यांस ३ नीं गुणायाचें ह्मणजे त्याचे अंशांस ३ नीं गुणायाचें, आणि त्यास ५ नीं भागवयाचें, ह्मणजे पांचवे प्रकाराप्रमाणें, त्याच्या छेदास ५ नीं गुणाव-

याचें आहे. सणून $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{3}{4}$ ह्यांचा गुणाकार $\frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$ असा झाला. ह्यावरून व्यवहारी अपूर्णाकाचा गुणाकार करण्याची रीति निघाली ती ही.

रीति.— अंशांशांचा गुणाकार करून तो अंशस्थानी लिहावा व छेदांछेदांचा गुणाकार छेदस्थानी लिहावा.

सूचना.— उदाहरणांत भागानुबंध पूर्णांक किंवा नुसते पूर्णांक असल्यास त्यांचे विषम अपूर्णांक करावे; अंश छेदांस संक्षेप गेल्यास द्यावा, आणि मग गुणाकार करावा.

उ. $2\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{2} \times 9\frac{3}{4}$ चे $\frac{2}{4}$ चे १०.

$$\frac{99}{4} \times \frac{6}{2} \times \frac{36}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{36}{4} = \frac{99}{4} \times \frac{6}{2} \times \frac{2}{3} \times 2$$

$$= \frac{306}{2} = 153 \text{ उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

१ उ. $\frac{5}{9} \times \frac{2}{3} \times 2\frac{2}{9}$; $2\frac{1}{9} \times \frac{3}{9} \times 9\frac{1}{9}$;
 $2\frac{1}{9} \times 2\frac{1}{9} \times \frac{3}{3}$.

२ उ. $\frac{99}{36} \times 2\frac{1}{2} \times 900$; $93\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{4} \times 9\frac{1}{3}$;
 $6\frac{1}{4}$ चे $2\frac{1}{4}$ चे २१.

३ उ. $2\frac{1}{2}$ चे $3\frac{2}{3} \times 8\frac{3}{4}$ चे $9\frac{1}{6}$; $2\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{6}$ चे
 $9\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ चे $9\frac{1}{4}$.

४ उ. $\frac{1}{2}$ चे $\frac{6}{9}$ चे $\frac{3}{4} \times \frac{1}{9}$ चे $3\frac{1}{6}$; $9\frac{1}{2}$ चे $\frac{1}{2}$ चे
 $\frac{1}{2}$ चे $2\frac{1}{2}$ चे ८.

५ उ. $\frac{3}{6} \times 9\frac{1}{4}$ चे $92\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{4}$ चे $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ चे
 $9\frac{1}{6} \times 2\frac{1}{4}$ चे $8\frac{3}{4}$ चे $2\frac{1}{4}$.

६ उ. $211 \times 3 + 2\frac{1}{2}$; $311 \times 21 \times 900$; $900 \times 9\frac{1}{3}$.

७ उ. 51 चे $\frac{1}{2} \times 211$; $3\frac{3}{4}$ चे $2111 \times \frac{1}{4}$; $93\frac{3}{4}$ चे $\frac{1}{6} - 51$.

८ उ. 711 चे 61 चे $\frac{2}{3} + 3$ चे $\frac{1}{4} - 711$ चे $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$.

व्यवहारी अपूर्णाकांचा भागाकार.

भागाकार करण्याची कृति गुणाकाराच्या उलट आहे. सणून:—

रीति.— भाजकाचे अंश व छेद यांची व्युत्क्रमस्थिती करून त्यांनीं भाज्यास गुणाचें सणजे इच्छिला भागाकार होतो.

उदाहरण. $\frac{3}{4}$ ह्यांस $\frac{5}{6}$ ह्यांनीं भाग.

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{27}{20} = 9\frac{7}{20} \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति- वरील कृति बरोबर आहे. कारण $\frac{3}{4}$ ह्यांस $\frac{5}{6}$ चे सप्त-मांशांनीं भागण्याबद्दल नुसत्या $\frac{5}{6}$ नीं भागलें असतें तर भागाकार सातवा हिस्सा आला असता (भा प्र०२). तो सातपट वाढविणें लक्षणजे त्याचे अंशास ७ नीं गुणलें पाहिजे हें स्पष्ट आहे.

सूचना- प्रभागजाति अपूर्णांक भागानुबंध पूर्णांक, किंवा रेघांचे अपूर्णांक हे उदाहरणांत असल्यास, भागाकार करण्यापूर्वी त्यांस भागजाति अपूर्णांकांचीं रूपें द्यावीं.

२ उ. $2\frac{2}{3} \div 2\frac{3}{4} = \frac{8}{3} \div \frac{9}{4} = \frac{8}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{27}$.

३ उ. $2\frac{2}{3}$ चे $2\frac{3}{4} \div 8\frac{1}{2}$ चे $\frac{5}{6}$ चे रूप.

आतां. $2\frac{2}{3} \times 2\frac{3}{4} = 90$, $8\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$.

$\therefore 90 \div \frac{2}{3} = \frac{90}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{1} \times \frac{6}{9} = \frac{30}{9} = 3\frac{2}{3}$.

४ उ. $\frac{\frac{2}{3} \text{ चे } 5}{\frac{5}{6} \text{ चे } 9} = \frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{40}{25} = 9\frac{3}{5}$.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

१ उ. $2 \div \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$; $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$; $2\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{3}$.

२ उ. $9\frac{2}{3} \div 9\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$; $99 \frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$.

३ उ. $6 \div 18$; $\frac{3}{4}$ चे $6 \div 6$ चे $\frac{3}{4}$.

४ उ. $8\frac{1}{2}$ चे $\frac{5}{6} \div 5\frac{3}{4}$ चे $9\frac{3}{4}$; $209 \div \frac{1}{6}$ चे 20 .

५ उ. $\frac{2}{6}$ चे $\frac{3}{4} \div \frac{3}{4}$ चे $\frac{5}{3}$; $8\frac{1}{2}$ चा $\frac{9}{3} \div 2\frac{1}{4}$ चे $6\frac{2}{5}$.

६ उ. $\frac{5}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{9}{6}$.

७ उ. $\frac{9}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{6}{3}$; $9\frac{3}{4}$.

८ उ. $\frac{32}{2+2}$; $9\frac{3}{4}$ चा $9\frac{1}{2}$; $3\frac{3}{4}$ चे $2\frac{1}{2}$.

९ उ. $2\frac{1}{2} + 9\frac{2}{3}$; $8\frac{1}{4}$ चे $2\frac{1}{2}$; 811 चे $3\frac{1}{2}$.

विविध परिमाणाचें रूपांतर.

१ ला प्रकार. भारी परिमाणाचे अपूर्णाकास हलके परिमाणांत आणावायाचा.

रीति.- दिलेल्या भारी परिमाणांचे एका परिमाणांत त्याच्या खालचे परिमाणाचे किती अंक आहेत ते पहावे, आणि त्या अंकांनं दिलेल्या अपूर्णाकाच्या अंशास गुणावे आणि छेदानें भागावे, ह्मणजे हलके परिमाणाचें रूप येतें.

रुपयांचे पावले करण्यास त्यांस चौहोनीं गुणावे लागतें. त्याचप्रमाणें खंडींचे मण करण्यास त्यांला २० नीं गुणावे लागतें. हें स्पष्ट आहे.

१ उदाहरण. एका रुपयाचे $\frac{३}{४}$ व्यांचे पावले कर.

एक रुपयाचे ४ पावले ह्मणून.

$\frac{३}{४}$ रु. = $\frac{३}{४} \times ४$ पा. = $\frac{३}{१}$ पा. = ३ पा. हें उत्तर.

२ उदाहरण. एका खंडीचे $\frac{३}{४}$ व्यांस मणांचें रूप दे.

एक खंडींत २० मण असतात ह्मणून $\frac{३}{४}$ खं. = $\frac{३}{४} \times २०$ म. = $\frac{६०}{४}$ म. = १२ म. हें उत्तर.

सूचना-दिलेले अपूर्णाकास हलके परिमाणाचें रूप दे किंवा त्यांत त्याची किंमत काढ असें ह्मटलें असेल तेव्हां अपूर्णाकास हलके परिमाणांत नेतांना जर भागानुबंधपूर्णक आले, तर त्यांतील पूर्णांक तसेच ठेवून अपूर्णाकांस मात्र आणखी खालचे परिमाणांत न्यावे, याप्रमाणें शेवटपर्यंत करावे.

३ उदाहरण. एका रुपयाचे $\frac{३}{४}$ ची हलके परिमाणांत किंमत काढ.

१ रु. = ४ पा. १ पा. = ४ आ. व १ आ. = १२ पै ह्मणून.

$\frac{३}{४}$ रु. = $\frac{३}{४} \times ४$ पा. = $\frac{१२}{४}$ पा. = ३ पा.

यांतील २ पावले तसेच ठेवून राहिले.

$\frac{३}{४}$ पा. = $\frac{३}{४} \times ४$ आ. = $\frac{३ \times ४}{४}$ आ. = ३ आ. = १ $\frac{३}{४}$ आ.

यांतील एक आणा तसाच ठेवून राहिले.

$\frac{३}{४}$ आ. = $\frac{३}{४} \times १२$ पै. = $\frac{३६}{४}$ पै. = ७ $\frac{१}{४}$ पै.

$$\therefore \frac{3}{4} \text{ रु.} = 2 \quad 9 \quad 6\frac{3}{4} \text{ हैं उत्तर.}$$

दूसरी रीति- विविध भागाकारानें:

$$\begin{array}{r} \text{रु. पा. आ. पै.} \\ 9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \times 3 \\ \hline 27 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 9 \quad 6\frac{3}{4} \text{ हैं उत्तर.} \end{array}$$

तिसरी रीति- रेखांचे अपूर्णाकांनीं.

$$\begin{array}{r} 9 \text{ रु.} \\ \times 3 \\ \hline 27 \\ \hline 27 \end{array}$$

॥॥॥ $9\frac{3}{4}$ हैं उत्तर.

४ उदाहरण. ४ खंडींचे $\frac{2}{3}$ यांस बारुळे मापाने हलके परि-
माणांत आण.

$$\begin{aligned} ४ \text{ खं.} \times \frac{2}{3} &= \frac{8}{3} \text{ खं.} = २\frac{2}{3} \text{ खं.} \\ \frac{2}{3} \text{ खं.} &= \frac{2}{3} \times २० \text{ म.} = \frac{४०}{3} \text{ म.} = १३\frac{१}{3} \text{ म.} \\ \frac{१}{3} \text{ म.} &= \frac{१}{3} \times १२ \text{ पा.} = \frac{१२}{3} \text{ पा.} = ४ \text{ पायली.} \end{aligned}$$

उत्तर. २ खं. १३ म. ४ पा.

दूसरी रीति- विविधभागाकारानें.

$$\begin{array}{r} \text{खं. म. पा.} \\ ४ \quad ० \quad ० \\ \times २ \\ \hline ८ \quad ० \quad ० \\ \hline २ \quad १३ \quad ४ \text{ हैं उत्तर.} \end{array}$$

तिसरी रीति- रेखांचे अपूर्णाकाची.

$$\begin{array}{r} \times ३ \text{ खं.} \\ \hline ३ \text{) } ८ \text{ खं.} \\ \hline २॥३॥१ \text{ खं. हैं उत्तर.} \end{array}$$

५ उदा. ३ खं. ४ म. यांचे $\frac{3}{4}$ यांची हलके परिमाणांत किंमत काढ.

$$३ खं. ४ म. = ३\frac{४}{१०} खं. = ३\frac{१}{५} खं. = \frac{१६}{५} खं.$$

$$\frac{१६}{५} खं. चे $\frac{३}{४} = \frac{४८}{२०} खं. = २\frac{३}{५} खं.$$$

$$\frac{३}{५} खं. = \frac{३}{५} \times २० म. = \frac{४०}{५} म. = ८ म.$$

उत्तर. २ खं ८ म.

दुसरी रीति.

खं.	म.	
३	४	
		३
x	१	३
४) ९	१२
		२

८ हें उत्तर.

तिसरी रीति.

खं.	३०४	
x	३	
४) ९॥२	२॥३
		२॥३

२॥३ खं. हें उत्तर.

६ उ. ७ खंडांचे $\frac{3}{4}$ त्यांची किंमत काढ.

७ उ. १० गुंठे, १२ आणे यांचे $\frac{2}{3}$ किती ?

८ उ. एका दिवसाचे $\frac{3}{4}$ चे $\frac{3}{4}$ चे $\frac{3}{4}$ यांस हलके परिमाणांत आण.

९ उ. ५ रु. १३ आ. यांचे $\frac{1}{4}$ किती ?

१० उ. एका पोंडाच्या अष्टमांशाच्या सात पटीची किंमत काय ?

११ उ. एका गिनीचे $\frac{3}{4}$ आणि एका क्रौनाचे $\frac{3}{4}$ यांची बेरीज व घजावाकी कर.

१२ उ. एका मैलाचे $\frac{1}{4}$, एक फर्लीगाचे $\frac{1}{4}$ आणि एक पोलचे $\frac{1}{4}$ यांची बेरीज कर.

१३ उ. १॥॥ रु. चे $\frac{2}{3}$ आणि ॥॥ चे $\frac{1}{4}$ यांची घजावाकी काय होईल.

१४ उ. $\frac{1}{4}$ घ.यार्ड आणि $२\frac{1}{4}$ घ.फूट यांच्या बेरजेत घन हंच किती ?

१५ उ. $\frac{1}{4}$ हा १६ दि. २ आ. २० मि. यांचा अपूर्णाक $\frac{1}{4}$ चे $१\frac{1}{4}$ आहे. यांची हलके परिमाणांत किंमत काढ.

१६ उ. ३ खं. ७ म. ही संख्या कोणत्या संख्येच्या $\frac{1}{4}$ शां-बरोबर आहे.

२ रा प्रकार. हलके परिमाणांचे अपूर्णाकाला भारी परिमाणांचे अपूर्णाक रूप द्यावयाचा.

रीति.- १ ली. अपूर्णाकांतल्या हलके परिमाणाचे जागी, त्या बरोबरीची भारी परिमाणांतली अपूर्ण किंमत ठेवावी; किंवा २ री. दिलेल्या हलके परिमाणांची संख्या भारी परिमाणांत जितकी मावत असेल, त्या संख्येने दिलेले हलके परिमाणाचे अपूर्णाकांस किंवा संख्येस भागावे; लक्षणजे भारी परिमाणाचें रूप येते.

उप०- पावल्यांचे रूपे करणें झाल्यास ४ नीं भागावे लागतें. मणाच्या खंडी करणें झालें तर २० नीं भागावे लागतें. हें स्पष्ट आहे. हीच कृति वरच्या दोन्ही रीतीनीं होते.

१ उदा. ५ पयांना आण्याचें रूप दे.

१ पै = $\frac{१}{१२}$ आणा लक्षण

५ पया = $५ \times \frac{१}{१२}$ आ. = $\frac{५}{१२}$ आ. हें उत्तर.

२ उदा. ३ आणे २ पै यांस रुपयांचें रूप दे.

३ आ. २ पै = $३\frac{१}{६}$ आ. = $\frac{१९}{६}$ आ.

= $\frac{१९}{६} \times \frac{१}{१६}$ रु. = $\frac{१९}{९६}$ रु. हें उत्तर.

३ उदा. ४ मण १४ शेर यांच्या $\frac{२}{३}$ स खंडींचें रूप दे.

४ म. १४ शे. = $४\frac{१४}{२०}$ म. = $४\frac{७}{२०}$ म. = $\frac{८७}{२०}$ म.

∴ (४ म. १४ शे.) चे $\frac{२}{३}$ = $\frac{८७}{२०}$ म. $\times \frac{२}{३}$ = $\frac{१७४}{२०}$ म. व

(४ म. १४ शे.) चे $\frac{२}{३}$ च्या खं. = $\frac{१७४}{२०}$ म. $\div २०$ म. = $\frac{१७४}{२००}$ खं. हें उत्तर.

४ उदा. $६\frac{३}{४}$ दिवस यांस वर्षाचें रूप दे. $३६५\frac{३}{४}$ दि. = १ वर्ष.

$३६५\frac{३}{४}$ दि. = $\frac{१४६१}{४}$ दि.

$६\frac{३}{४}$ दि. = $\frac{३३}{४}$ दि.

लक्षण

$६\frac{३}{४}$ दि. ची वर्षे = $\frac{३३}{४}$ दि. = $\frac{१४६१}{४}$ दि. = $\frac{३३}{४} \times \frac{१४६१}{४}$ व. = $\frac{११}{४}$
 $\times ४८७$ व. = २४३७ व. हें उत्तर.

५ उदा. ११५॥ आणे आणि २५॥ पावले यांची बेरीज व घजावाकी यांस रुपयांचीं रूपे दे.

२५॥ पा. = १०१ आ.

लक्षण

बेरीज.

११५॥ आ.

१०१ आ.

२१६॥ आ.

घजावाकी.

११५॥ आ.

१०१ आ.

११॥ आ.

२१६॥ आ. = $\frac{२१६॥}{१६}$ रु.

११॥ आ. = $\frac{११॥}{१६}$ रु.

$$= १३ \frac{१७}{३२} \text{ रु. बेरीज.} \quad = \frac{२९}{३२} \text{ रु. वजा.}$$

६ उदा. एक गुंज ही ४॥ तोळ्यांचा कितवा अंश आहे.

$$९६ \text{ गुं.} = १ \text{ तोळा.}$$

$$\frac{१ \text{ गुं.}}{४॥ \text{ तो.}} = \frac{\frac{१}{९६} \text{ तो.}}{\frac{१}{९६} \text{ तो.}} = \frac{१}{९६} \times \frac{२}{२} = \frac{१}{४३२} \text{ हें उत्तर.}$$

७ उदा. १ $\frac{१}{३}$ पौंड हा २ $\frac{२}{३}$ गिनींचा कितवा अंश आहे.

८ उदा. एका मैलाचे $\frac{३}{४०}$ हे एका यार्डाचे काय अंश होतील?

९ उदा. अर्ध्या कौनाचे $\frac{१}{३}$ चे $\frac{१}{१०}$ हे ९ पौंडांचे काय अपूर्णाक होतील ?

१० उदा. एका मणाचे ३ यांची जर ५७१ पट केली तर ती एका खंडीत वजा जाईल किंवा नाही. त्या दोहीत फरक किती असेल ?

३ रा प्रकार. एका देशातील परिमाणांस दुसऱ्या देशातील परिमाणांत नेण्याचा.

रिति.- सांगितले परिमाणाचे जातीपैकी जें परिमाण इच्छिलेले परिमाणाचे जातीच्याशी ताडलेलें असेल त्या परिमाणांत पहिल्याने दिलेल्या परिमाणाचें रूपांतर करावें. नंतर त्यास इच्छिलेल्या जातीच्या ताडलेल्या परिमाणांत न्यावें. नंतर त्या संख्येचें इच्छिलेले परिमाणांत रूपांतर करावें.

एका देशातील परिमाणास दुसऱ्या देशातील परिमाणांत नेण्याचें झालें तर त्यास ताडलेले परिमाणांचे वाटेनेच न्यावें लागेल हें स्पष्ट आहे.

१ उदा. १४ रु. १२ आ. ह्यांस इंग्लिश चलनी पौंड शिलिंग यांत ने.

$$१ \text{ रु.} = \frac{१}{१०} \text{ पौंड. लक्षण}$$

$$१४ \text{ रु. } १२ \text{ आ.} = १४ \frac{३}{४} \text{ रु.} = \frac{५९}{४} \text{ रु.}$$

$$= \frac{५९}{४} \times \frac{१}{१०} \text{ पौं.} = १ \frac{१९}{४०} \text{ पौं.}$$

$$= १ \text{ पौं. } ९ \text{ शि. } ६ \text{ पे. हें उत्तर.}$$

२ उदा. ५ तो. ३ मा. १ गुंजा, इतक्या वजनाचा एक सोन्याचा दागिना आहे. तर त्याचें इंग्लिश मानाप्रमाणें काय वजन होईल ?

$$१ \text{ तोळा} = १८८ \text{ त्राय ग्रेन.}$$

$$\begin{aligned}
 ५ \text{ तो. } ३ \text{ मा. } २ \text{ गुं} &= ५ \frac{१३}{४८} \text{ तो.} \\
 &= \frac{२५३}{४८} \text{ तो.} \\
 &= \frac{२५३ \times १८८}{४८} \text{ त्रा. ग्रे.} \\
 &= \frac{२५३ \times ४७}{१२} \text{ त्रा. ग्रे.} \\
 &= ९९० \frac{११}{१२} \text{ त्रा. ग्रे.} \\
 &\quad \text{औं. पे. ग्रे.} \\
 &= २ \quad १ \quad ६ \frac{११}{१२} \text{ हैं उत्तर.}
 \end{aligned}$$

३ उदा. २ दिवस ४ अ. १२ मि. ह्यांत १ दि. १५ घ.
१२ प. वजा करून बाकीला दिवसांचें रूप दे.

$$\begin{aligned}
 १ \text{ अवर} &= २॥ घटिका. \text{ सणून} \\
 २ \text{ दि. } ४ \text{ अ. } १२ \text{ मि.} &= २ \text{ दि. } १० \text{ घ. } ३० \text{ प.} \\
 \text{यांत वजा} &\quad \begin{array}{r} १ \quad १५ \quad १२ \\ ० \quad ५५ \quad १८ \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore ५५ \text{ घ. } १८ \text{ प.} &= ५५ \frac{१}{३०} \text{ घ.} = ५५ \frac{१}{३०} \times \frac{१}{६०} \text{ दि.} \\
 &= \frac{१६५१}{१८००} \text{ दि.} \\
 &= \frac{५५३}{६००} \text{ दि. हैं उत्तर.}
 \end{aligned}$$

४ उदा. एका हौदांत दर तासास ४९० ग्यालन पाणी येतें,
तर एका दिवसाचे $\frac{१}{८}$ इतक्या वेळांत त्या हौदांत किती हांडे पाणी
येईल तें सांग. १ हांडा = ७ ग्यालन.

५ उदा. १२० सिक्किनच्या मोहरा कर.

६ उदा. २२० ग्यालनाचे $\frac{१}{६}$ चे फरे कर.

७ उदा. १२॥२॥ खंडी धान्याचे बुशेल किती होतील ?

४ पुण्याच्या पायली = ५ ग्या.

८ उदा. एक लक्ष फ्रेंच मिटर, एका कोसाचा किती पट होतील ?

९ उदा. एका विध्याचे $\frac{१०}{१७}$ ह्यांस एकरांचें रूप दे.

१० उदा. बारूळे मापाच्या खं. १५८३ यांचा $\frac{१}{३}$ व सोळुले
मापाच्या खं. ५८२ याची वजावाकी सोळुले मापांत सांग.

दशांश अपूर्णांक.

पूर्णांकांत स्थलां प्रमाणें अंकांचीं परिमाणें बदलतात. उ०
२३४५ ह्या संख्येंतील अंक अनुक्रमें १०००, १००, १० व १ हीं
परिमाणें दाखवितात. १० हा १० चा पहिला घात आहे; १० ×

१०=१०० हा १० चा दुसरा घात आहे; $१० \times १० \times १० = १०००$ हा १० चा तिसरा घात आहे. ह्याप्रमाणें जितके १० अवयव रूपानें मांडून गुणाकार करावा तितक्यावा तो १० चा घात होतो. व तितकीच शून्ये १ वर दिलीं ह्मणजे तो घात दाखविला जातो. ह्यावरून उघड आहे कीं १०, १००, १०००, इत्यादि परिमाणेंही १० चे घात आहेत. यांत कोणताही अंक एकंपासून जितकीं स्थळें डावीकडे असेल तितक्यावा तो १० चा घात दाखवितो असें समजावयाचें. हा पूर्णांकांतला स्थल संकेत आहे.

आतां एकंच्या उजवेकडे एक बिंदु करून त्या पुढें अंक मांडीत गेलीं, आणि त्यांचीं परिमाणें पूर्णांकांप्रमाणेंच उजवे बाजूकडे १० व्या हिशानें लहान होत जातात असें मानिलें, तर ते अंक पूर्णांकांच्याच पद्धतीनें दशांश परिमाणें दाखवितील. जसें— २३४५.६७८९ ह्या संख्येंत ५ हे एक आहेत, त्यापुढचें ६ हे दशांश दाखवितील, त्यापुढचे ७ हे शतांश दाखवितील, व त्यापुढचे ८ हे सहस्रांश दाखवितील. अशा रीतीनें ह्या अंकांचीं परिमाणें त्यांच्या स्थलांवरून जाणतां येतील. ह्या संख्येंत दोन्ही जातींच्या परिमाणांना एक साधारण असून त्याचे डावीकडचा पहिला अंक दशक दाखवितो, व उजवीकडचा पहिला अंक दशांश दाखवितो; डावीकडचा दुसरा अंक शतक दाखवितो, व उजवीकडचा दुसरा अंक शतांश दाखवितो; ह्याप्रमाणें एकंपासून डावीकडचीं परिमाणें दसपटीनें मोठीं होत जातात, व उजवीकडचीं दहावे हिशानें लहान होत जातात; ह्मणून ह्यांना दशक परिमाणें व दशांश परिमाणें अशीं नांवें येतात. एक पुढें दिलेल्या बिंदूला दशांश बिंदु ह्मणतात. ह्यावरून दशांशाचें लक्षण असें होतें.

दशांश अपूर्णांक — ज्या संख्यांना १०, १००, १०००, इत्यादि १० चे घात छेद असून ते दशांश बिंदू पुढच्या स्थलांनीं दाखविले असतात, त्यांस दशांश किंवा दशांश अपूर्णांक ह्मणतात.

उ० २३४५.६७८ ह्या संख्येंतील ६, ७, व ८ हे अंक पहा. वरील संख्येचा अर्थ $२०० + ४० + ५ + \frac{६}{१०} + \frac{७}{१००} + \frac{८}{१०००}$ असा आहे.

दशांश बिंदू पुढें जितक्याव्या स्थलीं अंक असेल तितक्या-
वा १० चा घात हा त्याला छेद असतो, व तो त्या बिंदूपुढच्या
प्रत्येक अंकाच्या स्थलानें दाखविला जातो. ह्यावरून दशांशांक
हे पूर्णांकांप्रमाणेंच स्थलपरिमाणें दाखवितात हें लक्षांत येईल.

वरील प्रकारच्या दशांश अपूर्णांकांच्या रांगा ह्या पूर्णांकां-
च्याच पद्धतीनें उत्पन्न होतात, ह्यास्तव पूर्णांकांसंबंधी एकंदर
नियम ह्या रांगांना लागू असले पाहिजेत.

पूर्ण संख्येंतील वेगळाले अंक वेगळालीं स्थल परिमाणें दाख-
वितात, पण ते अंक जुळून वाचिले ह्मणजे ती संख्या त्या
रांगेंतील लघुतम परिमाणें दाखविते. जसें- २५ ह्या अंक पंक्तीची
वाचणी पंचवीस ही एकडे दाखविते. ह्मणून

नियम १- दशांश पंक्ति जुळून वाचिली ह्मणजे ती संख्या-
र्तीतील लघुतम परिमाणें दाखवील. जसें- ३७५ ही संख्या तीनशे
पंचाहत्तर सहस्रांश दाखवील कारण ह्या रांगेंतील शेवटचा अंक
५ हा सहस्रांश हे लघुतम परिमाण दाखवीत आहे.

$$\begin{aligned} \text{पडताळा- } ३७५ &= \frac{३}{१०} + \frac{७}{१००} + \frac{५}{१०००} \\ &= \frac{३००}{१०००} + \frac{७०}{१०००} + \frac{५}{१०००} \\ &= \frac{३७५}{१०००} = ३७५ \text{ सहस्रांश.} \end{aligned}$$

३७५ या संख्येंतील ३, ७ व ५ ह्या दशांशांची बेरीज
 $\frac{३७५}{१०००}$ अशी येते. आतां बेरजेची संख्या ३७५ हिला १० चा
३ घात हा छेद असून तो दशांश चिन्हा पुढच्या ३ स्थलांनीं
दाखविला आहे, यास्तव ३७५ ह्या एकंदर संख्येलाही वरील
लक्षणाप्रमाणें दशांश अपूर्णांक ह्मटले पाहिजे हें उघड आहे.

व्यवहारि अपूर्णांकांत जसे भागानुबंध पूर्णांक असतात तसे
दशांशांतही असतात. पण त्यांना वेगळें नांव नसून दशांश अपूर्णां-
कच ह्मणतात. तरी ते भागानुबंध पूर्णांका प्रमाणेंच वाचावे लागता-
त. जसें २३४ .५६७ ही संख्या दोनशें चौतीस पूर्णांक पांचशें
सदसष्ट सहस्रांश अशी वाचितात.

दशांश अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांकांप्रमाणें वाचितात,
परंतु व्यवहारी अपूर्णांकांप्रमाणें दशांश अपूर्णांकांत छेद अंशाखा

लीं मांडीत नाहीत, तर छेदावर जितकी शून्ये असतात तितकी स्थले अंशांत उजवेकडून डावेकडे मोजून तेथे दशांश चिन्ह करतात. स्थले पुरी नसलीं तर अंकामार्गे शून्ये देऊन पुरी करतात.

१ उ. $\frac{37}{900}$ ह्यांत छेदांत दोन शून्ये आहेत म्हणून ७ पारून दोन स्थले मोजून दशांश चिन्ह केले म्हणजे ३.४७ हे वरचा व्यवहारी अपूर्णांक दाखवितात.

२ उ. $\frac{93}{9000} = \frac{90+3}{9000} = \frac{9}{900} + \frac{3}{9000} = .093.$

३ उ. $\frac{2924}{9000} = 2.924; \frac{999}{9000} = .999; \frac{37}{90000} = .0037.$

यावरून असे लक्षांत येईल की दशांश अपूर्णांकास व्यवहारी अपूर्णांकांचे रूप द्यावयाचे झाल्यास,

रिति— दशांश संख्या अंशस्थलीं मांडावी, आणि तिजमधल्या दशांश स्थलांतकी शून्ये एकावर मांडून तो तिच्या खाली छेद मांडावा.

उदाहरणे.

१ उ. $2.03 = 2\frac{3}{900} = \frac{203}{900}.$

२ उ. $.379 = \frac{3}{90} + \frac{7}{900} + \frac{9}{9000} = \frac{300+70+9}{9000} = \frac{379}{9000}.$

३ उ. $82.037 = 82\frac{37}{9000}$ अथवा $\frac{72037}{9000}.$

४ उ. $.0029 = \frac{29}{90000}.$

५ उ. $94.009 = 94\frac{9}{9000}$ अथवा $\frac{94009}{9000}.$

६ उ. $93.75 = 93\frac{75}{900} = 93\frac{3}{4}$ अथवा ९३।।।

७ उ. $23.0625 = 23\frac{625}{90000} = 23\frac{5}{72} = 23\frac{6}{72}.$

पूर्ण संख्येला १० नीं गुणणे असले तर त्या संख्येवर आपण एक शून्य देतो. त्या योगाने त्या संख्येतले एकचे स्थान एक स्थळ उजवेकडे सारले जाते. तसेच पूर्ण संख्येला १० नीं भागणे असले तर आपण त्या संख्येवरचे एक शून्य कापितो. त्या योगाने त्या संख्येतले एकचे स्थान एक स्थळ डावेकडे सारले जाते. दशांशांची परिमाणेही एक किंवा दशांश बिंदु ह्यावर अवलंबून असतात. म्हणून

नियम— दशांश संख्येला १० नीं गुणणे असले तर दशांश चिन्ह एक स्थळ उजवेकडे सारावे; आणि दशांश संख्येला १०

नीं भागणें असलें तर दशांश चिन्ह एक स्थल डावेकडे सारावे.

$$उ० \quad १ले \quad २४.६८ \times १० = २४६.८$$

$$उ० \quad २रें \quad २४.६८ \div १० = २.४६८$$

उपपत्ति— उ० १ले— यांत दशांश चिन्ह ४ पुठें होतें तें ६ पुठें नेल्यानें ४ एकडे होते ते दशक झाले, ६ दशांश होते ते एकडे झाले. याममाणें प्रत्येक अंकाचें परिमाण दसपट मोठें झालें. सर्व अंकांचीं परिमाणें (गुण्य) दसपट झाल्यानें त्या संख्येची किंमत दसपट झालीच पाहिजे (गु. प्र. पहा.). दसपटीचा संबंध हा कोणत्याही दशांशांत असा वयाचा ह्मणून हा नियम कोणत्याही दशांशाला लागू झाला पाहिजे.

उ० २रें याची उपपत्ति वरील नमुन्यानें व गुणा० प्र. प्र. या आधारानें विद्यार्थ्यांनीं लावावी. वरच्या नमुन्याप्रमाणेंच जर दशांश संख्येला १०० नीं गुणलें अगर भागलें तर दशांश चिन्ह दोन स्थलें उजवेकडे अगर डावेकडे सारलें पाहिजे. ह्याचप्रमाणें १० चे कोणतेही घातानें गुणणें अगर भागणें असलें तर द. ची. त्या घाता इतकीं स्थलें उजवीकडे अगर डावीकडे सारावें लागेल.

$$उ० \quad १ले \quad २४.६८ \times १००० = २४६८०$$

$$उ० \quad २रें \quad २४.६८ \div १००० = .०२४६८$$

पूर्ण संख्येचे मागें कितीही शून्यें मांडिली असतां त्या संख्येची किंमत बदलत नाहीं तसेंच

नियम— दशांश संख्येचे पुठें कितीही शून्यें मांडिलीं तरी त्या संख्येची किंमत बदलत नाहीं.

$$उ० \quad .२५ = \frac{२५}{१००} = \frac{२५०}{१०००} = .२५०$$

ह्यावरून लक्षांत येईल कीं दशांशावर शून्य दिलें असतां त्या अंशाची दसपट होते. पण दशांशाचें स्थळ वाढलें ह्मणजे अर्थांत छेदाचीही दसपट होते यामुलें किंमत बदलत नाहीं. ह्मणून दशांश संख्यांचे समच्छेद करणें झाल्यास ज्या संख्यांत दशांश स्थलें कमी असतील त्यांचे उजवे बाजूस शून्यें देऊन सर्वांचीं दशांश स्थलें सारकीं करावीं जसें— .२५ व, .५ यांचीं समच्छेद रूपे .२५ व .५० हीं आहेत.

दशांश अपूर्णांकाचे उजवे बाजूस कितीही शून्ये दिली तरी त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही; परंतु जर डावेकडे शून्ये दिली तर त्यास १०, १००, १०००, इ० ह्यानी भागल्याप्रमाणे होतें.

$$\begin{aligned} \cdot 3 &= \frac{3}{10} \\ \cdot 30 &= \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \\ \cdot 300 &= \frac{300}{1000} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

हिले
ह्या
हिले

$$\begin{aligned} \cdot 03 &= \frac{3}{100} \\ \cdot 003 &= \frac{3}{1000} \\ \cdot 0003 &= \frac{3}{10000} \end{aligned}$$

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

पुढील व्यवहारी अपूर्णांकांस दशांश अपूर्णांकांचीं रूपे दे.

१ उ. $\frac{6}{10}; \frac{996}{100}; \frac{23}{1000}; \frac{9094}{10000}$

२ उ. $\frac{9}{1000}; \frac{29}{10000}; \frac{996}{100000}; \frac{6}{100000000}$

३ उ. २ दशांश + ३ शतांश + ३७ दशलक्षांश.

४ उ. ११ दशांश + ११ सहस्रांश + ११ लक्षांश.

५ उ. १३ + ३ सहस्रांश + ५ दशलक्षांश.

६ उ. १०१ दशांश + १० सहस्रांश + १०१ दशलक्षांश.

पुढील दशांश अपूर्णांकांस व्यवहारी अपूर्णांकांचीं रूपे दे.

७ उ. $\cdot 036; \cdot 0002; \cdot 24; \cdot 364$

८ उ. $\cdot 0064; 9.224; \cdot 9664; 3.224$

९ उ. $\cdot 000664; \cdot 0009364; 23.036924$

१० उ. $94.203924; \cdot 00234364; 7.0066924$

दशांश अपूर्णांकांची मिळवणी व वजाबाकी.

रीति— सांगितलेल्या रकमा अशा मांडाव्या, कीं सर्व रकमांचीं दशांश चिन्हें एका उभ्या ओळीत येतील, व दशांश स्थळारखाली दशांश स्थळ, शतांश स्थळारखाली शतांशस्थळ, ह्याप्रमाणे येतील; रिकाम्या जागा राहिल्या असतील त्या शून्ये देऊन भराव्या. नंतर बेरीज किंवा वजाबाकी जी करणें असेल ती, मध्ये दशांश चिन्ह नाही असें मानून पूर्णांकाप्रमाणे करावी, आणि तीं दशांश चिन्ह वरील दशांश चिन्हाच्या अनुरोधानें करावें.

उदाहरण पहिलें.

२.८१४६, $\cdot ०९३८$, ८ , $\cdot ८७५$, ३१.२७८८ , ४.००८७
ह्यांची बेरीज कर.

२.८१४६
 .०९३८
 ८.००००
 .८७५०
 ३१.२७८८
 ४.००८७
 ४७.०७०९

उदाहरण दुसरें.

२.४१८० आणि १.२२३४ ह्यांची वजाबाकी कर.

२.४१८०
 १.२२३४
 १.१९४६

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ ड.	११.२७५ + .३४१३२ + .००४१४ + .००००१ + २३.००१.
२ ड.	३२१.४ + १२ + ३१.६१५४ + .०१ + २.२१४ + ४१५.६२.
३ ड.	.००१२१३ + ४५.६१३ + २३४००१२ + १४१००५६.
४ ड.	१.००००१२३ + ३१.१ + ११७.१५४ + २३४३.००८ + .०००२.
५ ड.	३२.००१ - १२.९९९; ३.४५ - .०००९८.
६ ड.	२३.१४१५ - २.००८; ३४१२ - २.९९९८७.
७ ड.	२२.०००१ - २.९९९९; २४१५.६ - २४१४.५९८७.
८ ड.	.००१ - .०००९९८७; २४.००४ - ९८७५१६५.
९ ड.	१.०३७४२ - .३७४२; ३.०५४ - .३०५४.
१० ड.	.०१२३ - .००९०८७; ३.३३ - २.९८७६५.

दशांश अपूर्णाकांचा गुणाकार.

रीति.- दशांश चिन्ह नाहीं, असें मानून पूर्णाकांतील गुणाकाराप्रमाणें गुणाकार करावा, आणि गुण्य व गुणक ह्यांतील दशांश स्थळें मोजून एकंदर जेवढीं भरतील तितक्या स्थळांचे मागें गुणाकारांत दशांश चिन्ह करावें. कदाचित् स्थळें कमी असल्यास मागें शून्यें देऊन स्थळसंख्येची भर करावी, आणि दशांश चिन्ह करावें.

उदाहरण पहिलें.

१.००२५ ह्यांस २.५ ह्यांनीं गुण.

१.००२५
 २.५
 ५.०१२५
 २०.०५०
 २.५०६२५

उपपत्ति- वर दिलेल्या दशांश गुण्यांतील द. चि. ४ स्थळें उजवेकडे सारावें आणि दशांश गुणकांतील द. चि. १ स्थळ उजवेकडे सारावें तेव्हां ते गुण्यगुणक पूर्णाक कल्पितां येतील. या

स्थलांवरून पहाता पूर्णांक कल्पिलेला गुण्य दशांश गुण्याचे १० ००० पट मोठा असला पाहिजे व पूर्णांक कल्पिलेला गुणक दशांश गुणकाचे १० पट मोठा असला पाहिजे. आतां गु. प्र. प्र. दशांश गुण्याचीच १० ००० पट केली तर तो गुणाकार दशांश गुणाकाराचे १० ००० पट मोठा येईल आणि गु. प्र. प्र. दशांश गुणकाचीही १० पट केली तर तो गुणाकार दशांश गुणाकाराच्या १० ००० पटीचे १० पट मोठा येईल. ह्यावरून ह्या पूर्णांक गुणाकाराला १० ०००×१० हा छेद दिला तर तो इच्छिला दशांश गुणाकार दाखवील. आतां ह्या गुणाकाराला १० ०००×१० हा छेद देण्यासाठी ह्या छेदांतील शून्यांच्या (ह्मणजे गुण्यगुणकांतील दशांश स्थलांच्या) बेरजे इतकी स्थले मोजून गुणाकारांत दशांश चिन्ह केलें पाहिजे. ह्यावरून वरील रीति सिद्ध आहे.

उदाहरण दुसरें.

००४८ ह्यांस ००००१२ ह्यांनी गुण.

$$\begin{array}{r} ००४८ \\ \times ००००१२ \\ \hline ०००००००५७६ \end{array} \text{ हे उत्तर.}$$

उदाहरण तिसरें.

$$\begin{array}{r} १००५ \times ००५ \times ००६ \\ \times १००५ \\ \times ००५ \\ \hline ००५०२५ \\ ००६५ \\ \hline २०१०० \\ ३०१५० \\ \hline ००००३२१६०० = ००००३२१६ \text{ उत्तर.} \end{array}$$

दशांश चिन्ह उजवेकडे एक, दोन, तीन, इ० स्थले सारले असता त्या दशांश अपूर्णांकांस १०, १००, १०००, इ० कांनी गुणल्याप्रमाणे होतें.

उदाहरण.

$$\begin{array}{ll} ३.२४७ \times १० = ३२.४७. \\ ००२३ \times १०० = २.३१. \\ ३.२४७ \times १०० = ३२४.७. \\ २.३ \times १००० = २३००. \end{array}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$$\begin{array}{ll} १ उ. २२.५ \times ३२.१६; ४.४१ \times ३३.२१. \\ २ उ. ०००१ \times ००१; ३२.१ \times २.३१ \\ ३ उ. ००३२ \times २३.४५; ०००२ \times ३.०१. \end{array}$$

४ उ.	२२.५	×	०.२४१	×	०.०२४	×	०.००३	×	०.१	×	५०००००.
५ उ.	२.७	×	०.२७	×	०.२७	×	२७०.				
६ उ.	०.२	×	०.४	×	०.०८	×	६४०००.				
७ उ.	१.१	×	०.११	×	१.०१	×	०.१०१.				
८ उ.	०.१३	×	१.६	×	०.०७	×	३.०५.				

दशांश अपूर्णाकाचा भागाकार.

रीति- भाज्य व भाजक ह्यांत दशांश स्थळें नाहींत असें मानून पूर्णाकांतोल भागाकाराप्रमाणेंच हा भागाकार करावा.

जर भाज्य आणि भाजक ह्यांतील दशांशस्थळांची संख्या सारखी असली तर भागाकारांतील सर्व अंक पूर्णांक समजावें.

भाजकोपेक्षां भाज्यामध्ये दशांश स्थळें जितकी अधिक असतील तितकी भागाकारांत उजवेकडून डावेकडे मोजून तितक्या स्थळांमागे भागाकारांत दशांश चिन्ह करावें.

भाजकोपेक्षां भाज्यांतील दशांश स्थळें कमी असली तर शून्ये देऊन बरोबर करावी, आणि रीतीप्रमाणें भागाकार करावा. अथवा कमी स्थळांइतके नवे भाग अगर शून्ये भागाकारावर घेऊन त्यां पुढे दशांश चिन्ह करावें.

उदाहरण पहिलें.

०.८०५ ह्यांस २.३ ह्यांनी भाग.

२.३) ०.८०५ (.३५ हें उत्तर.

$$\begin{array}{r} ६९ \\ ११५ \\ \hline ११५ \\ \hline \end{array}$$

उपपत्ति- $०.८०५ \div २.३ = \frac{८०५}{१०००} \div \frac{२३}{१०} = \frac{८०५}{१०००} \times \frac{१०}{२३}$
 $= \frac{८०५}{२३} \times \frac{१०}{१०००} = \frac{३५}{१००} = .३५$ हें उत्तर.

ह्या व्यवहारी अपूर्णाकाच्या रीतीत आपण भाज्य व भाजक ह्यांचा भागाकार (३५ हा) पूर्णाका प्रमाणेंच उत्पन्न केला. नंतर भाज्यांतील दशांश स्थळांइतक्या १००० ह्या मधल्या शून्यांतून भाजकांतील दशांश स्थळांइतकी १० मधली शून्ये वजादिली आणि बाकी (२) इतके अंक भागाकारांत (३५ त) मोजून त्याच्या मागे दशांश चिन्ह केले. हिच कृति हरएक उदाहरणांत यावयाची लक्षण रीति खरी आहे.

उदाहरण दुसरें.

८.०५ ह्यांस .२३ आणि .००२३ ह्यांनी भाग.

$$\frac{८.०५}{.२३} = ३५ \text{ व } \frac{८.०५}{.००२३} = ३५००.$$

कारण $\frac{८.०५}{.२३} = \frac{८०५}{१००} \div \frac{२३}{१००} = \frac{८०५}{१००} \times \frac{१००}{२३} = \frac{८०५}{२३} = ३५.$

तसेंच $\frac{८.०५}{.००२३} = \frac{८०५}{१००} \div \frac{२३}{१००००} = \frac{८०५}{१००} \times \frac{१००००}{२३} = \frac{८०५}{२३} \times १०० = ३५००.$

सूचना- भागाकार करतांना जेव्हां भाग बरोबर तुटत नाही, तेव्हां भाज्यांकावर आणखी शून्यें द्यावीं, व तीं भाज्यांकांतील दशांश स्थळांतलींच आहेत असें मानावें. भागाकार पुरा करतेवेळीं भाजकाच्या निमेषेक्षां अधिक बाकी राहिली, तर तो भाग एकानें वाढवावा ह्मणजे कसर कमी जाईल.

उदाहरण तिसरें.

२.५ ह्यांस .३२ ह्यांनी भाग, आणि १ ह्यांस .०१३ ह्यांनी भाग.

.३२) २.५००००० (७.८१२५ .०१३) १.००००००० (७६.९२३१

$$\begin{array}{r} २२४ \\ \underline{२६०} \\ २६६ \\ \underline{४०} \\ ३२ \\ \underline{८०} \\ ६४ \\ \underline{१६०} \\ १६० \\ \underline{०००} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ९१ \\ \underline{९०} \\ ७८ \\ \underline{१२०} \\ ११७ \\ \underline{३०} \\ २६ \\ \underline{४०} \\ ३९ \\ \underline{१०} \end{array}$$

उत्तर. ७.८१२५.

उत्तर. ७६.९२३१

रीति २ री- भाजकांतल्या डावीकडल्या ज्या अंकांनी भाग बसविणें असतील त्याचे पुढें द. चि. सारून तो अंक एकं करावा. ह्या कृतींत भाजकांतलें दशांशचिन्ह जिकडे जितकीं स्थळें सारिलें असेल तिकडे तितकींच स्थळें भाज्यांतलें द. चि. सारावें. नंतर ह्या एक मानें भाज्यांतल्या ज्या परिमाणांकाला पहिला भाग बसेल त्याच परिमाणाचा तो भाग समजावा. ह्मणजे आरंभापासूनच प्रत्येक भागाचें स्थळ परिमाण समजत जातें.

उदाहरण.

.०१५९५ ह्यांस .२७५ ह्यांनी भाग.

२.७५) .१५९५० (.०५८

$$\begin{array}{r} 93\ 94 \\ 2200 \\ \underline{2200} \\ 0000 \end{array}$$

दिलेल्या भाजकाचे द. चि. एक स्थळ उजवे-
कडे सारल्याने त्यांतला डावी कडचा अंक एक
होतो. लक्षण दिलेला भाज्य व भाजक ह्या दोहोंचीही द. चि. एक
एक स्थळ उजवेकडे सारून ते समान पट मोठे केलेले भाज्य भा-
जक घेतले. भाज्य व भाजक या दोहोंच्या समान पटी केल्या
तर भागाकार बदलत नाही (भा. प्र. पहा.). लक्षण वाजूचा भा-
गाकार हा इच्छिलेल्या भागाकारा इतकाच येईल.

आतां २ या एकने १५ या शतांशांना भागिलें तर ५ हा श-
तांशांचाच भाग लागेल. कारण २ एकं हा गुणक व ५ हा गुण्य
यांचा गुणाकार १५ शतांशांत वजा होण्यासाठी शतांश दाख-
विणारा आला पाहिजे. गुणक एकं असला तर गुणाकार गुण्याच्या
जातीचा यावयाचा लक्षण ५ हे शतांशच असले पाहिजेत. यावरून
एकने ज्या परिमाणाला भागावें त्याच परिमाणाचा भागाकार या-
वयाचा असा वहिवाटीचा नियम निघतो. ह्या नियमाप्रमाणें ५
हे शतांश स्थळीं मांडून भागाकार पुढें चालविला तेव्हां ५८ सह-
स्रांश हें उत्तर आलें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

- १ उ. १५.६२५ ÷ २५; ०१५६२५ ÷ २५
- २ उ. १५६२.५ ÷ ०००२५; १५६२५ ÷ २५०००.
- ३ उ. १८१.३ ÷ ०००३७; १७१.९९ ÷ २७.३.
- ४ उ. ९०६५ ÷ ०४९; ०३ ÷ ००१.
- ५ उ. ८ ÷ ००२; ६७.५ ÷ ७.६८.
- ६ उ. १५ ÷ ६.२५; १७.२८ ÷ ०१४४.
- ७ उ. ००१२८ ÷ ८.१९२; १७०८ ०.४५९२ ÷ ०००२४.
- ८ उ. ०००२ ÷ ०१६३; ४ ÷ ००२५५.
- ९ उ. ११.१ ÷ ३२.७६; ०१२३ ÷ ३२.१.
- १० उ. २.११७ ÷ ००७३; ०३२ ÷ २.१३७.

व्यवहारी अपूर्णाकास दशांश अपूर्णाकाचे रूप देण्याचा प्रकार.

दशांश भागाकाराच्या रीतीप्रमाणें अंशास छेदानें भागावें, भा-
गून येईल तें दशांशरूप होय. भाग बरोबर न तुटल्यास भाज्यावर
पाहिजेत तितकीं शून्यें देऊन भागाकार पुढें वाढवावा.

भागानुबंधपूर्णांक दिले असल्यास पूर्णांक तसेच एकीकडे ठेवावे.

उदाहरण.

$$\frac{9}{200} = \frac{.09}{2} = .0025.$$

$$\frac{36}{20} = \frac{3.6}{2} = .8625.$$

कधी कधी भाग बरोबर तुटत नाही व भागाकारांत तेच ते अंक पुनः पुनः येतात.

$$\frac{94}{20} = \frac{9.4}{2} = 9.050505. इ०$$

$$\frac{3}{9900} = \frac{.03}{99} = .002020. इ०$$

$$\frac{3}{7} = .428571428571. इ०$$

अशा जातीचे दशांशांस आवर्त दशांश म्हणतात आणि फिरून फिरून येणारा जो भाग त्यास आवर्त पंक्ति म्हणतात.

असे अंक फिरून फिरून येऊं लागले, म्हणजे जितके अंक फिरून येणारे आहेत तितके लिहितात; आणि ह्या आवर्त पंक्तीच्या आदि व अंतीचे अंकांवर टिबें देतात. जसें,

१०५

०००२७

०.५७१४२८

ज्या आवर्त दशांशांत आवर्त पंक्तीस दशांश चिन्हापासूनच आरंभ होतो, त्यास शुद्ध आवर्त दशांश म्हणतात, आणि ज्यांत दशांश चिन्हापुढे कांहीं अंकांची अनावर्त पंक्ति आल्यावर मग आवर्त पंक्तीस आरंभ होतो, त्यास मिश्र आवर्त दशांश म्हणतात.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

'पुढील अपूर्णांकांस दशांश रूपें दे.

१ उ.	$\frac{2}{50}$;	$\frac{93}{200}$;	$\frac{22}{5}$;	$\frac{9000}{625}$.
२ उ.	$\frac{906}{925}$;	$99\frac{97}{9250}$;	$\frac{2000}{256}$;	$\frac{3}{596}$.
३ उ.	$\frac{693}{44}$;	$\frac{928}{9025}$;	$\frac{6000}{93}$;	$99\frac{3}{9250}$.
४ उ.	$\frac{492}{952}$;	$\frac{9028}{9028}$;	$\frac{9000}{9000}$;	$\frac{4920}{4920}$.
५ उ.	$\frac{952}{96}$	चे $\frac{99}{622}$	॥चे $\frac{90}{625000}$;	$9\frac{2}{95}$ चे $9\frac{9}{75}$ चे ३

आवर्त दशांशांविषयीं विशेष विचार,

नियम१ला-अतिसंक्षेपरूप दिलेल्या अपूर्णांकाचे छेदस्थलीं

२ आणि ५ ह्यांचेच घात अवयवरूपाने असले, तर त्यांतील मोठ्या घाता इतक्यावे स्थली त्याचें दशांशरूप सांत होईल.

उपपत्ति— दशांशरूप देतांना आपण अंशांवर दशांश शून्यें भाग बरोबर तुटपर्यंत घेतों. हीं शून्यें अंशावर जितकीं घ्यावीं तितके १० चे घातांनीं ह्मणजे १०, १००, १०००, इ० ह्यांनीं तो अंशगुणला जाऊन तो गुणाकार छेदानें भागला जातो. आणि त्या शून्याइतकींच स्थले भागाकार येतो. आतां पहिल्यानें अपूर्णाकास अतिसंक्षेपरूप दिलें आहे, ह्मणून आतां अंशछेदांत साधारण अवयव उरला नाहीं, अंशावर शून्यें घेतल्यानें जर तो छेदानें बरोबर भागला जाईल, तर १० च्या अवयवावांचून दुसरा कोणताही अवयव छेदाच्या अवयवांत नसला पाहिजे; १० चे अवयव २ आणि ५ हे आहेत, ह्मणून छेदानें १० चे एकादे घातास भाग बरोबर तुटत आहे तर त्या छेदांत २ आणि ५ ह्यांतून कोणाचा तितकाच घात असला पाहिजे. अंश छेदांत समान घात झाले ह्मणजे त्यांचा संक्षेप जाऊन भागाकार खुटल हें उघड आहे.

छेदस्थळीं जर ३, ७, ११, असा एकादा अंक असून त्याचा अंश १० नें किंवा १० च्या कोणत्याहीघातानें गुणला तरी तो छेदानें निःशेष भागला जात नाहीं. ह्मणून

नियम २रा— अतिसंक्षेपरूप दिलेल्या अपूर्णाकाच्या छेदस्थळीं २ आणि ५ ह्यांच्या घाताशिवाय अंक असला तर त्या अपूर्णाकाचें दशांशरूप आवर्त दशांश होईल, आणि आवर्तस्थळें छेदांकापेक्षां कमी येतील.

कारण भागाकार करतांना बाकीवर शून्यें घेऊन भाग बसवून वजाबाकी करतां करतां शेष उरलेल्या अंकांपैकीं जर फिरून एकादा अंक आला, तर भागाकारांतही तेच ते अंक फिरून येतील, आणि आपण जर ह्याप्रमाणें भागाकार करीत गेलों, तर मागें उरलेला अंक फिरून आल्याशिवाय रहावयाचा नाहीं. भागाकारांत बाकी जी उरते ती तर भाजकापेक्षां (ह्मणजे छेदापेक्षां) कमी असली पाहिजे, तर मग जे वेगळाले शेषांक उरतात त्यांची क्रमसंख्या ही छेदांकापेक्षां कमी असली पाहिजे. जसें;

उदाहरण पहिलें.

६ ह्यास दशांशरूप दे.

७) ६.०००००० (८५७१२

$$\begin{array}{r} ६६ \\ ४० \\ \hline ३५ \\ ५० \\ \hline १० \\ ७ \\ \hline ३० \\ २८ \\ \hline २० \\ १४ \\ \hline ६ \end{array}$$

ह्या भागाकारांत वेगळाले शेपांक ६, ४, ५, १, ३, २, हे आहेत व हे सर्व ७ ह्या भाजकांपेक्षां कमी आहेत, आतां पुढें जो शेपांक येणार तो ह्या आलेल्या शेपांकांतलाच कोणता तरी एक आला पाहिजे, आणि त्याप्रमाणें ह्या उदाहरणांत पुढचा शेपांक ६ हा आहे, व शेपांका-

वर वारंवार शून्यच घ्यावयाचें आहे म्हणून भागांचा व शेपांकांचा क्रम फिरून पहिल्याप्रमाणें येईल. ह्या उदाहरणांत भाजकापेक्षां कमी अंक जितके आहेत, तितके सर्व शेपांकांत आले आहेत. म्हणून आवर्त होणारे अंक येण्याचे जितके शक्य होते तितके आले आहेत.

उदाहरण दुसरें.

$\frac{६९}{२२}$ अथवा $३\frac{३}{२२}$ ह्यास दशांशरूप दे.

२२) ३.० (१३६

$$\begin{array}{r} २२ \\ ८० \\ \hline ६६ \\ १४० \\ \hline १३२ \\ \hline ८ \end{array}$$

उत्तर ३.१३६.

आवर्त होणारे अंकांची संख्या फार असल्यास ती पुढील संक्षेप रीतीने थोडक्यांत काढतां येते.

उदाहरण तिसरें.

$\frac{१}{१९}$ ह्यास दशांश रूप घ्यावयाचें,

१९) १.०००००० (०.०५२६३ इ०

$$\begin{array}{r} ९५ \\ ५० \\ \hline ३८ \\ १२० \\ ११४ \\ \hline ६० \\ ५७ \\ \hline ३ \end{array}$$

आतां $\frac{१}{१९} = ०.०५२६३ \frac{३}{१९}$
 $\frac{१}{१९} = ०.०५२६३ \frac{३}{१९}$

$$\begin{aligned} \text{स्रणून} & \quad \frac{9}{99} = .05263950609 \frac{9}{99}. \\ \therefore & \quad \frac{9}{99} = .0836082905 \frac{9}{99}. \\ \text{स्रणून} & \quad \frac{9}{99} = .052639506090836082905 \frac{9}{99}. \end{aligned}$$

ह्याप्रमाणे पुढे करीत गेलें असतां दर खेपेस अंक दुपटीने वाढत जातात.

वरच्या उदाहरणांत १८ स्थळांपलीकडे फिरून तेच ते अंक येऊ लागले, स्रणून भागाकारांत अवर्त पंक्तोच्या खुणा खाली दाखविल्याप्रमाणे कराव्या.

$$\frac{9}{99} = .0526395060908360829$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

पुढील अपूर्णाकांस दशांश रूपें दे.

१ उ.	$\frac{93}{99}$; २९	$\frac{903}{999}$; १११	$\frac{929}{999}$; ३३	$\frac{97}{999}$; १३३५
२ उ.	$\frac{94}{99}$; ८९	$\frac{929}{999}$; १३१	$\frac{9664}{999}$; १०५	$\frac{23}{999}$; ३३३
३ उ.	$\frac{9999}{9999}$; १३५	$\frac{999}{999}$; २९७	$\frac{96900}{999}$; ३७८	$\frac{33300}{999}$; ११३९
४ उ.	$\frac{934}{99}$; १७	$\frac{999}{999}$; २३	$\frac{924}{999}$; २९	$\frac{44444}{999}$; ३९

आवर्तदशांश अपूर्णाकांस व्यवहारी अपूर्णाकांचें रूप देण्याचा प्रकार.

शुद्ध आवर्त दशांश आहेत तर त्यांस भागजाति अपूर्णाक रूप देण्याची रीति.

$$\begin{aligned} \text{आतां} & \quad \frac{9}{99} = .9999999 \text{ इ.} \\ \therefore & \quad \frac{9}{99} = .2222222 \text{ इ.} \\ \therefore & \quad \frac{9}{99} = .5555555 \text{ इ.} \end{aligned}$$

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, जेव्हां फिरून फिरून येणारा अंक एकच आहे, तेव्हां त्याचें अपूर्णाकरूप लिहिणें झाल्यास तो आवर्तीक अंशस्थानीं लिहून छेदस्थानीं ९ लिहावे.

$$\begin{aligned} \text{पुन्हा} & \quad \frac{9}{99} = \frac{9}{9} + 99 = .090909 \text{ इ.} \\ \therefore & \quad \frac{9}{99} = .0505050505 \text{ इ.} \\ \therefore & \quad \frac{9}{99} = .2323232323 \text{ इ.} \end{aligned}$$

तेव्हां दोन अंक आवर्त होणारे असले, ह्मणजे ते अंशस्थानी लिहून ९९ छेदस्थानी लिहावे.

पुन्हा

$$\begin{aligned} \frac{9}{99} &= .009009009 \text{ इ.} \\ \frac{24}{99} &= .024024024 \text{ इ.} \\ \frac{694}{99} &= .694694694 \text{ इ.} \end{aligned}$$

त्यावरून तीन अंक आवर्त होणारे असले, ह्मणजे ते अंशस्थानी लिहून छेदस्थानी ९९९ लिहावे. यावरून

रीति— शुद्ध आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णाकाचें रूप द्यावयाचें झाल्यास ते आवर्तीक अंशस्थानी लिहून त्यांच्या स्थलसंख्येइतके ९ छेदस्थानी लिहावे.

उदाहरणें.

$$\begin{aligned} .36\bar{c} &= \frac{36c}{99} \\ .036\bar{c} &= \frac{36c}{999} \\ .00036\bar{c} &= \frac{36c}{99999} \end{aligned}$$

मिश्र आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णाकाचें रूप देण्याचा प्रकार.

शुद्ध आवर्त दशांशाचे शेजारी दशांश चिन्हाच्या आलीकडे एकादा अंक (पूर्णांक) असला, तर तो भागानुबंध पूर्णांकाप्रमाणें मांडावा.

उदाहरण.

$$३.\bar{r} = ३\frac{r}{९}; ५.\bar{r}३ = ५\frac{२३}{९}$$

अथवा सर्व दिलेले अंक उणा दशांश चिन्हाच्या आलीकडचा अंक, ह्मणजे पूर्णांक, हे अंशस्थानी लिहून छेदस्थानी आवर्तीक स्थळांइतके ९ लिहावे.

उदाहरण.

$$\begin{aligned} ३.\bar{r} &= \frac{३२-३}{९} = \frac{३१}{९} = ३\frac{२}{९} \\ ५.\bar{r}३ &= \frac{५२३-५}{९९} = \frac{५१८}{९९} = ५\frac{२३}{९९} \end{aligned}$$

ही रीति कशी निघाली हें पुढील लिहिण्यावरून समजेल.

$$\begin{aligned} ३.\bar{r} &= \frac{३ \times ९ + २}{९} = \frac{३(९०-९) + २}{९} = \frac{३० + २-३}{९} = \frac{३२-३}{९} \\ ५.\bar{r}३ &= \frac{५ \times ९९ + २३}{९९} = \frac{५(९००-९) + २३}{९९} = \frac{५०० + २३-५}{९९} = \frac{५२३-५}{९९} \end{aligned}$$

मिश्र आवर्त दशांशांत दशांश चिन्हापुढें कांहीं अंक येऊन मग आवर्तांक येतात त्यांत आणि वर जीं शुद्ध आवर्तांकांची उदाहरणें सांगितलीं त्यांत, भेद इतकाच कीं, त्यांचे मिश्र आवर्तांक करायाचे असल्यास त्यांस १०, १०० इ० ह्यांनीं भागलें पाहिजे, झणून वर सांगितलेले रीतीप्रमाणें दशांश चिन्हापासून आवर्त अंकांपर्यंत जितकीं स्थळें असतील तितकीं शून्यें छेदावर द्यावीं. झणजे मिश्र आवर्त दशांशांस व्यवहारी अपूर्णाकांचें रूप आलें.

उदाहरण पहिलें.

$$\text{शुद्ध आवर्त } ३.\dot{२} = \frac{३२-३}{९} = \frac{३१}{९} = ३\frac{४}{९}$$

$$\text{मिश्र आवर्त } ०.\dot{३}\dot{२} = \frac{३२-३}{१००} = \frac{३१}{१००}$$

उदाहरण दुसरें.

$$\text{शुद्ध आवर्त } ५.\dot{२}\dot{३} = \frac{५२३-५}{९९} = \frac{५३८}{९९} = ५\frac{४३}{९९}$$

$$\text{मिश्र आवर्त } ०.\dot{५}\dot{२}\dot{३} = \frac{५२३-५}{९९०} = \frac{५३८}{९९०} = \frac{२६९}{२९५}$$

कोणत्याही आवर्त दशांशांस अपूर्णाकरूप कसें द्यावें ही रीत थोडक्यांत खालीं दाखविली आहे.

गति— दशांश संख्या अंशस्थानीं लिहून तींत पूर्णांक व आवर्त न होणारे अंक इतकी पंक्ति वजा करावी.

छेदस्थानीं, आवर्त होणारे अंका इतके वेळ ९ लिहावे, आणि आवर्त न होणाऱ्या अंकस्थानांइतकीं त्यांवर शून्यें द्यावीं.

उदाहरण. २.४६ ह्यांस जर व्यवहारी अपूर्णाकांत लिहिणें आहे तर.

$$२.४६ = \frac{२४६-२४}{१०} = \frac{२२२}{१०} = २\frac{२२}{१०} = २\frac{११}{५}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. ०३; ००५; ०५२; ०७२९.
- २ उ. ००२२; ००४३२; ३००६७५; २०४३२.
- ३ उ. ३०४९८; ०४४३; ११२५; ००४२९.
- ४ उ. ४०५३१; ७६५३१; २३२५; ०९३९८.
- ५ उ. २०९०९; ५२९५०; १०२२८५७१.
- ६ उ. २६२२८५७१; ५१९३९८; ११२८७.

कसर.

वर जी आवर्त दशांश अपूर्णाकास व्यवहारी अपूर्णाकांचें रूप देण्याची रीत सांगितली, तीवरून असें येतें कीं, जर आवर्तीक ९ हा आहे तर $\frac{१}{९} = १$ होईल. आतां ह्याच्या उलट कृति केल्यानें $१ = .९९९९$ इ० आणतां येत नाहींत हें खरें; परंतु थोडेंसें लक्ष दिलें तर ९९९ इ० पुष्कळ आवर्तीक घेतले तर त्यांपासून जो दशांशांक येईल त्यांत आणि १ ह्यांत जें अंतर पडणार तें लक्षांत आणण्याजोगें नसतें, ह्मणजे फारच थोडें असतें. पाहा,

$$१ - .९ = .१ = \frac{१}{१०}.$$

$$१ - .९९ = .०१ = \frac{१}{१००}.$$

$$१ - .९९९ = .००१ = \frac{१}{१०००}.$$

$$१ - .९९९९९९९९९९ = .००००००००००१ = \frac{१}{१०००००००००००}.$$

ह्यावरून स्पष्ट लक्षांत येईल कीं, ९ जितके जितके अधिक घ्यावे तितकी तितकी कसर कमी होत जाते. तेव्हां हें उघड आहे कीं, ९ अनंता पावेतों घेत गेले ह्मणजे शेवटीं कसर शून्य होईल.

ह्याप्रमाणें शेवटीं कसर शून्य होते ह्मणून $१ = .९$ कारण .९ या आवर्तीकानें .९९९ इ० अनंतअंकांची पंक्ति सूचित होते. ह्याचप्रमाणें कोणताही आवर्तीक आणि कोणताही व्यवहारी अपूर्णाक यांच्या मधील कसर शून्य होत आहे तर तो अपूर्णाक त्या आवर्त दशांशाबरोबर आहे असें ह्मणतां येईल; कारण आवर्तीक पाहिजे तितके वेळां घेऊन कसर हवी तितकी कमी करितां येत्ये.

ह्मणून जेव्हां दशांशांत ९ हा आवर्तीक येतो तेव्हां तो पुसून टाकून मागच्या अंकांत १ मिळविण्यास चिंता नाहीं. जसें, $४९९९९. इ० = .५$ हे रीतीप्रमाणें करून पाहिले तरीयेतील.

$$.५९ = \frac{५९}{१०} = \frac{५५}{१०} = \frac{५}{१०} = .५.$$

दशांशाचे हिशेब करतांनाना बाकी सोडावी लागते तेव्हां उत्तर बिनकसर मिळत नाहीं, परंतु आवर्त पंक्ति सांपडली असतां उत्तर बिनकसर मिळतें.

उ १३.५; २.०२५; १११.०००५; ३.१४१५९; २.०२५; ह्यांची बेरीज बरोबर येई अशी कर.

$$\begin{array}{r}
 १३५५५५५५५५५५५५५५५५ \\
 ३०२५३५३५३५३५३५३ \\
 १११००००००००००००००० \\
 ३०२५३५३५३५३५३५३५३५ \\
 २०२५०२५०२५०२५०२५ \\
 \hline
 १३१.७४६८६८६८६८६८६८६८
 \end{array}$$
 ह्या बेरजेच्या रकमांत मोठी

 अनावर्त पंक्ति तीन अंकांची आहे,

 तेव्हां ह्यांच्या बेरजेत दशांश श्वि-

ंहा पुढें तीन अंक अनावर्त येतील. ह्या रकमांत, १, २, व ३ अं-
 कांच्या आवर्त पंक्ति असून त्या अंकांचा ल. सा. भा. ६ येतो, तेव्हां
 ६ अंकांच्या रांगेत एक अंकाच्या पंक्ति ६, दोन अंकांच्या पंक्ति
 ३, व तीन अंकांच्या पंक्ति २ राहून ६ वे स्थली ह्या एकंदर पंक्ति
 पूर्ण होतील. अर्थात ह्यांच्या बेरजेत ६ अंकांच्या आवर्त पंक्ति
 येतील. ह्यावरून ३ नो ६ नऊ अंकां पावेतो बेरीज खरी आली
 पाहिजे. ह्या बेरजेत रकमा थोड्या आहेत, यासाठी ३ अंक फा-
 जील घेतल्याने ही बेरीज बिनचूक येईल, म्हणून १२ अंकां पावेतो
 बेरीज केली. ह्या बेरजेत तीन अनावर्तांकांपुढें सहा अंकांची आवर्त
 पंक्ति समग्र मिळाली आहे, हिने ही बेरीज अनंत अंकां पावेतोबिन
 चूक दाखविली जाईल हें उघड आहे. म्हणून १३१.७४६८६८६८१४०
 हें उत्तर.

आवर्त पंक्ति मोठी येत असली, तर जितके दशांशस्थळांपर्यंत
 बेरीज बरोबर पाहिजे त्यांपेक्षां दोन किंवा तीन स्थळे वाढवावीं,
 म्हणजे बेरीज तितक्या स्थळांपावेतो बिनचूक येईल.

उदाहरण.

१.०२३४१ ह्यांतून .६२८ हे वजा कर. बाकी खरी असावी
 असे कर.

$$\begin{array}{r}
 १.०२३४१३४१३ \\
 .६२८८८८८८८ \\
 \hline
 .३९४५२४५२५
 \end{array}$$

उत्तर .३९४५२

आवर्त दशांशांचा गुणाकार किंवा भागाकार करणें झाल्यास,
 त्यांस व्यवहारी अपूर्णाकांचीं रूपे देऊन त्यांत गुणाकार किंवा भा-
 गाकार करावा, आणि तदनंतर पाहिजे तर ते दशांश अपूर्णाकांत न्यावे.

१ उ. २५×३६

आतां $\frac{२३}{१०} \times \frac{३६}{११} = \frac{४६}{४९५} = .०९२$

२ उ. $१६ \div १००२७$

$\frac{१५}{१०} \div \frac{२७}{११००} = \frac{५५०}{११०} = ६१.९$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. $१३८ + १२८५७ + २२९८ + २०६ + २२६३ + ००८२९७१३३.$
- २ उ. $३७.२३ + .२६ + ७.७२ + .२९७ + ३.९७३ + ८ + २.७५ + ७४.०३६७ + ३२.४९$
- ३ उ. $.३ - .०९$ आणि $.०४ - .००७६९२३८.$
- ४ उ. $७ - ६.९२८५७$ आणि $.०४२ - .०३६.$
- ५ उ. $३७.२३ \times .२६$ आणि $७.७२ \times .२९७.$
- ६ उ. ३.९७३×८ आणि $७४.०३६७ \times २.७५.$
- ७ उ. $.३ \div .०९$ आणि $.०४ \div .०७६९२३०$
- ८ उ. $७ \div १२८५७$ आणि $.०४२ \div .०३६.$

ह्या सर्वांची उत्तरे ७ दशांशस्थळांपर्यंत बरोबर पाहिजेत.

संक्षिप्त गुणाकार.

दशांश अपूर्णाकांच्या गुणाकारांत कोठें कोठें तीन, चार, पांच इ० नियमित स्थळांपर्यंत दशांश स्थळें बरोबर येण्याची मात्र आवश्यकता असत्ये, आणि गुण्यगुणकांत तर दशांशस्थळें पुष्कळ असतात तेव्हां सर्व अंकांचा गुणाकार करण्यांत वेळ न मोडावा, ह्याकरितां गुणाकार करण्याची ही एक संक्षिप्त रीत दाखविली आहे.

उदाहरण.

२.३४७ ह्यांस ४.५४९ ह्यांनी गुण. असें कीं गुणाकारांत दशांश स्थळें २ येतील.

$\begin{array}{r} २.३४७ \\ १२५४ \\ \hline ९३९ \\ ११७ \\ \hline १०.६७ \end{array}$	}	<p>ह्या उदाहरणांत गुणाकार दोन दशांशस्थळांपर्यंत खरा असला ह्मणजे पुरे, ह्मणून गुण्यांकांतील दोन दशांशस्थळें मोजून दुसऱ्या स्थळावर एक उभी खूण केली, आणि त्या स्थळाखाली, गुणकांकांतील</p>
---	---	--

एकस्थळांचा ४ हा अंक लिहिला, आणि तेथून उलटे डावेकडे दशांशांक लिहिले. आतां गुणाकार करतांना गुण्यांकांतील रेषपलीकडचा अंक ७ हा सोडून दिला व बाकीच्या अंकांस गुणकांकांतील एकस्थळांचा अंक ४ पूर्णांक ह्याने गुणलें, ह्मणजे गुणाकारांत दशांशस्थळें २ च येतील. आतां ७ हा अंक सोडला म-

सता तर ७ चोक २८ ह्यापैकी ४ चोक १६ ह्यांत हातचे दोन वाढले असते. वरील ८ हे सोडून द्यावे लागले असते, ह्याजकरता अंक सोडल्यामुळे गुणाकार कमी येईल, तो न यावा, ह्मणून अजमासानें हातचे ३ घेतले, तेव्हां ४ चोक १६ आणि हातचे ३ मिळून १९ एकुणिसांशी ९ लिहिले. हातचा आला १; ४ त्रीक १२ आणि हातचा १ मिळून १३. तेराशी ३. हातचा आला १. ह्याप्रमाणें शेवटपर्यंत गुणाकार केला. आतां गुणकांकांतील दुसरा गुणक ५ ह्यानें गुणावयाचें, परंतु गुणाकारांत दशांशस्थळें दोनच आली पाहिजेत, ह्मणून ह्या वेळेस गुण्यांतील ४ हा अंक सोडला, आणि ३ यापासून गुणलें, ह्मणजे गुण्यांकांतील एक दशांशस्थळ, आणि गुणकांकांतील एकदशांशस्थळ मिळून गुणाकारांत २ दशांशस्थळेंच इच्छिल्याप्रमाणें येतील. गुण्यांतले ४ हे सोडल्याबद्दल कसर जाऊं नये ह्मणून हातचे २ घेतले.

तिसरा गुणक ००४ ह्यानें गुणतांना गुण्यांकांतील दशांशस्थळ मुळींच घ्यावयास नको. कारण, गुणकांकांतच दोन दशांशस्थळें आहेत. कसरीबद्दल हातचा १ घेतला.

चवथा गुणक ००९ ह्यानें गुणतांना गुण्यांकांतील एकचें स्थळही सोडलें. गुणावयास दहांचा अंक नाही, सबब कसरीबद्दल हातचे दोन घेतले.

ह्याप्रमाणें सर्व गुणकांकांनीं गुणून बेरीज केली आणि तींत दोन स्थळें उजवेकडून मोजून दशांश चिन्ह केलें ह्मणजे काम होतें.

गुणाकार करतांना सांगितलेल्या गुणकांतील दशांशांक उजवेकडे जसजसे घेत जावे तसतसा गुण्यांकांतील एक एक सोडीत जावा, ही गोष्ट गुणाकार करतांना लक्षांत रहाणें कठीण; ह्मणून गुणकच पहिल्यानें उलटा मांडला ह्मणजे सोडून देण्याचा अंक-मागें पडून जेथून गुणाकार लिहावयाचा तो अंक त्याच्या समोर वर येतो.

प्रत्येक अंकाच्या वरच्या अंकांच्या गुणाकारापासून गुणाकार लिहावा खरा, परंतु तो लिहिण्याच्या पूर्वी त्यांत, सोडलेल्या अंकास गूणून त्या गुणाकारांतील हातचे मिळवून मग लिहावा. कसर तर

सोडावयाचीच, परंतु जितकी कमी जाईल तितकी बरी, ह्याजकरितां ० पासून ४ पर्यंत हातचे ०; ५ पासून १४ पर्यंत हातचा १; १५ पासून २४ पर्यंत हातचे २; २५ पासून ३४ पर्यंत हातचे ३; ह्याप्रमाणें धरण्याची चाल आहे.

वरील उदाहरणांपासून संक्षिप्त गुणाकार करण्याची रीत सांपडली ती पुढें लिहिली आहे.

रीति.— गुण्य पहिल्यानें लिहावा नंतर गुणाकारांत जितकीं दशांशस्थळें पाहिजे असतील तितकीं दशांशस्थळें गुणकांतील मोजून शेवटल्या स्थलावर उभे रेघेची खूण करावी; नंतर ह्या खूण केलेल्या अंकाखाली गुणकांतील एकं लिहून त्यांचे उजवेकडे दशक शतक इ० पूर्णांक उलटे लिहावे; व डावेकडे दशांशांक उलटे लिहावे.

उजवेकडून गुणाकार करायला आरंभ करावा. प्रत्येक अंकाने त्याच्या वरच्या अंकापासून गुणित चालावें. कांहीं गुण्यांक सोडल्यामुळे गुणाकारांत विशेष चूक न पडावी ह्याजकरितां ज्या अंकास गुणावयाचें त्याच्या गुणाकारांत, सोडलेल्या अंकास गुणून त्या गुणाकारांतील जे हातचे येतील ते मिळवावे; गुणाकाराच्या रकमा उजवेकडील शेवटापासून लिहाव्या. शेवटीं सर्व रकमांची बेरीज घेऊन तीत सांगितलेलीं दशांशस्थळें उजवेकडूनमोजून दशांश चिन्ह करावें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. ४८०- १४९३६ ह्यांस २७२४१६ ह्यांनीं गुण; असें कीं गुणाकारांत दशांशस्थळें ४ येतील.
- २ उ. २४९०३०४८ ह्यांस ०५७३२८६ ह्यांनीं गुण; असें कीं गुणाकारांत दशांशस्थळें ५ येतील.
- ३ उ. ३२५७०१४२८ ह्यांस ७२१८३१९३ ह्यांनीं गुण; गुणाकारांत दशांशस्थळें ३ पुरे आहेत.
- ४ उ. १४-४२१३ ह्यांस २१८१३ ह्यांनीं गुण; असें कीं गुणाकारांत दशांशस्थळें २ येतील.
- ५ उ. २८२३१०३ ह्यांस ३५६७४ ह्यांनीं गुण; असें कीं गुणाकारांत १ दशांशस्थळ येईल.

- ६ उ. १११.२३७८ ह्यांस १२.२५३८९७ ह्यांनीं गुण; गुणाकारांत दशांशस्थळ मुळींच नको आहे.
- ७ उ. १.२३×५.३४ ह्या गुणाकारांत दशांशस्थळ १ पुरे आहे.
- ८ उ. ०.२३४×०.७३४; ०.२३४×०.७८५४; ०.००१×०.००९८; १.९९९९×९.९९९९ ह्या गुणाकारांत दशांशस्थळ एक पुरे आहे.
- ९ उ. ७८.१३×०.०००९७; १००×०.००० १ ह्यांत २ दशांशस्थळें आलीं लक्षणजे पुरे आहेत.

संक्षिप्त भागाकार.

दशांश भागाकारांत अपेक्षित दशांश स्थळा पुढें भागाकारकरण्याची गरज नसत्ये, तेव्हां या पुढील संक्षिप्त रीतीचा उपयोग करितात आणि भागाकारही फार जलद होतो.

रीति.— दिलेल्या भाजकांतला भाग बसविण्याचा अंक एक होईल असें करण्यास दशांश चिन्ह पुढें किंवा मागे किती सारावें लागतें तें पाहून तितकीं स्थळें भाज्यांतलीं व भाजकां तलीं दशांश चिन्हे पुढें किंवा मागे सारावीं (द. भा. रीति २ री पहा). नंतर भागाकारांत दशांश स्थळें जितकीं अपेक्षित असतील तितकीं स्थळें भाज्यांत दशांश चिन्हापुढें मोजून त्या ठिकाणीं उभी (१) अशी खुणा करावी, आणि वर अंक असल्यास ते कापून टाकावे, स्थळें कमी पडत असलीं तर शून्यें देऊन तीं पुरीं करावीं.

ह्या कापून किंवा पुरा करून घेतलेल्या भाज्याला पहिला भाग बसविण्यासाठीं जेवढा भाजक पाहिजे असेल तेवढा भाजक ठेवून त्यावरचे अंक उभ्या रेषेनें कापून टाकावे, आणि ह्या कापून घेतलेल्या भाजकानें पहिला भाग बसवावा. नंतर बाकी वरतीं नवीन भाज्यांक घेऊन पुढील भाग बसविण्याबद्दल कापून घेतलेल्या भाजका वरील एक एक अंक कापून पुढील भाग बसवीत चालावे.

भाजक कापून घेतलेल्या भाज्याला पुरा होत नसला तर नेहमींच्या रीतीप्रमाणें भागाकार करण्यास आरंभ करावा. बाकीवर भाज्यांतील एक एक अंक घेण्याचा क्रम खुणेखालचा अंक येई तेथपर्यंत चालवावा, पुढें मात्र त्याप्रमाणें करूं नये.

पुढे भाजकांतील एक एक अंक कापण्याचा क्रम सुरू करावा-
आणि बाकी अंक रहातील त्यांणीं भाग बसवीत जावे. याप्रमाणें;
भाजकांतील अंक सर्व नाहींसे होत तेथपर्यंत करावें.

शेवटचा अंक कापिते वेळीं त्या अंकाचे निम्मे पेक्षा अधिक
बाकी राहिली तर शेवटचा भाग १ नें वाढवावा. नंतर भागाका-
रांत अपेक्षित अंकांइतकीं डावेकडे स्थळें मोजून दशांश चिन्ह क-
रावें म्हणजे भागाकार पुरा होतो.

भाग बसवितांना जे गुणाकार मिळवावे लागतात त्यांत फारशी
कसर जाऊं नये म्हणून कापलेले अंकांस बसविलेले भागांनैं गुणून
हातचे किती येतात तें पाहून तितके वजा करण्याचे अंकांत हा-
तचे म्हणून मिळवीत जावे. ही गोष्ट भागाकार करणारांनीं लक्षांत
ठेवावी.

१ उदा. ७.९३६२५ ह्यांस २.७४५१ ह्यांनीं भाग. भागाका-
रांत चार दशांश स्थळें येतील असें कर.

२.७४५१)७.९३६२५(२.८९११ हें उत्तर.

२.७४५)५४९०२

२.७४)२९६९१

२.७)३४९

२)३७

२)१

२)०

भाजकांत एकच पूर्णांक स्थळ आहे म्हणून भाज्य व भाजक
यांतील दशांश चिन्हांची फिरवाफिरव करावी लागली नाहीं.

२ उदा. वरील उदाहरणांत भागाकारांत एक दशांशस्थळ
मात्र यावें असें असल्यास रीतीप्रमाणें:-

२.७४५१)७.९३६२(२.९ हें उत्तर.

२)५५

२)३४

२)००

३ उदा. ७.९३६२ ह्यांस ०.२७४ ह्यांनीं भाग; भागाकारांत
दोन दशांशस्थळें मात्र येतील असें कर.

भाजकांत एक पूर्णांक स्थळ येण्यास दशांश चिन्ह उजवीकडे एक स्थळ सारावें लागतें. म्हणून भाज्यांतलें दशांश चिन्ह एक स्थळ पुढें सारून रीतीप्रमाणें भागाकार केलाः—

२.७४)७९.३६२ (२८.९९ हें उत्तर.

$$\begin{array}{r} 480 \\ 2898 \\ \hline 2512 \\ 27) \quad 2512 \\ \hline 27) \quad 96 \\ \hline 96 \\ \hline 0 \end{array}$$

४ उदा. ७.९३६२ ह्यांस २७.४५१ ह्यांनी भाग. भागाकारांत तीन दशांशस्थळें येतील असें कर.

भाजकांत पूर्णांकस्थळें दोन आहेत, तें एक करण्यास दशांशचिन्ह डावेकडे एक स्थळ सारावें लागतें. म्हणून भाज्यांतील दशांशचिन्ह एक स्थळ डावेकडे सारून रीतीप्रमाणें भागाकार करण्यास आरंभ केला.

२.७४५१)०.७९३६२ (०.२८९

$$\begin{array}{r} 489 \\ 27) \quad 279 \\ \hline 27 \\ 2) \quad 24 \\ \hline 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

म्हणून .२९० हें उत्तर.

भाजकांतलें दशांशचिन्ह जितकें मागें किंवा पुढें सारावें तितकें भाज्यांतील दशांशचिन्ह मागें पुढें सारलें तर भागाकारांत अंतर पडणार नाही. कारण भाज्य व भाजक हे दोन्ही सारखे पटीनें वाढविले किंवा कमी केले तर भागाकारांत अंतर पडणार नाही. जसें—

$$\frac{294}{72} = \frac{29.4}{7.2} = \frac{2.94}{.72} = 4.$$

भाजकांत एकच पूर्णांक असला म्हणजे भाज्यांतील दशांश स्थळांइतकीच भागाकारांत दशांशस्थळें येतात. जसें—

$$\frac{9.6}{2} = 0.2 ; \frac{9.60}{2} = 0.29 ; \frac{3.929}{2} = 0.887$$

म्हणून भागाकारांत जितकी स्थळें पाहिजे आहेत तितकीच भाज्यांत ठेविली आणि भाजकांत एक पूर्णांक स्थळ येईल अशा

रीतीनें भाज्य भाजकांचीं रूपें बदलून ठेविलीं असलीं, म्हणजे हि-
शेब करण्यांत चूक येत नाहीं.

भागाकार वाढविण्याचा नाहीं म्हणून वर शून्यें किंवा वरचे
अंक घेण्याबद्दल भाजकांतील एक एक अंक तोडीत गेलें म्हणजे
तेंच कार्य केल्याप्रमाणें होतें.—

**संक्षिप्त भागाकाराचीं
अभ्यासाकरितां उदाहरणें.**

१ उदा. या भागाकारांत ३ दशांश स्थळें येतील असें कर.

$$\begin{aligned} १५७.०३८ &+ ७९.६१८ \\ २६.८१४ &+ ७.२९ \\ ३४.०७६ &+ १८.७२९ \end{aligned}$$

२ उदा. या भागाकारांत दोन दशांश स्थळें येतील असें कर.

$$\begin{aligned} ७.४१०३६ &+ २१९.६ \\ ३२.०७९ &+ ६८४५४.७ \\ १३.७२ &+ ४.१९६ \end{aligned}$$

३ उदा. या भागाकारांत तीन दशांश स्थळें येतील असें कर.

$$\begin{aligned} १४.७२३ &+ ६.१८ \\ २.०९८ &+ ६३.५७२ \\ १४.०७३ &+ २.१९८ \end{aligned}$$

४ उदा. या भागाकारांत दोन दशांश स्थळें येतील असें कर.

$$\begin{aligned} ०.००७१ &+ ०.६९३७ \\ ८.१२४७३ &+ ६.२३८९ \\ ५१.२४७ &+ ०.८१३७६५ \end{aligned}$$

५ उदा. या भागाकारांत एक दशांश स्थळ येईल असें कर.

$$\begin{aligned} ३.५६८९ &+ ०.२७४३२ \\ ०.०१६५४१ &+ ०.७१९८ \\ ३१.२७५ &+ ०.६८५५४ \end{aligned}$$

विविध परिमाणांचें रूपांतर.

पहिला प्रकार. भारी परिमाणांचे दशांशांस हलके परिमाणांत
आणावयाचा.

रीति.— भारी परिमाणाच्या दिलेल्या एका परिमाणांत त्याच्या
खालचे परिमाणाचे किती अंक आहेत तें पहावें, आणि त्या अं-
कांनी दिलेल्या दशांश अंकांस गुणावें, म्हणजे त्यांस हलके परि-
माणाचें रूप येतें .

रूपांचे पावले करणें झाल्यास ४नीं गुणिलें पाहिजे हें स्पष्ट आहे.

१ उदा. एक रुपयाचे ०.७५ यांस पावल्यांचें रूप दे.

$$०.७५ \times ४ = ३.० \text{ पा. हें उत्तर.}$$

२ उदा. एका खंडीचे ०.६ यांचे मण कर.

$$०.६ \text{ खं.} \times २० = १२.० \text{ म. हें उत्तर.}$$

भारी परिमाणांच्या दशांश अंकांस हलके परिमाणांत नेतांना जर पूर्णांकांवर कांहीं दशांश अंक आले, तर त्यांतील पूर्णांक तसेच ठेवून वरील दशांश अंकांस मात्र हलके परिमाणांत नेत जावें.

३ उदा. एका रुपयाचे ०.६ यांची किंमत काढ.

रु.

$$०.६ \times १६ = १०.६ \text{ आणे.}$$

$$०.६ \text{ आ.} \times १२ = ७.२ = ८.० \text{ पै.}$$

उत्तर. १० आ. ८ पै.

४ उदा. ४ खंडीचें ०.७ ह्यांस हलके परिमाणांत आण. वा-
रुळें माप.

$$४ \text{ खं.} \times ०.०७ = ३.१ \text{ खं.}$$

$$०.१ \text{ खं.} \times २० = २.२ \text{ म.}$$

$$०.२ \text{ म.} \times १२ = २.६ \text{ पा.}$$

उत्तर. ३ खं. २ म. २.६ पा.

५ उदा. ३ खं. ४ म. यांचे ०.७५ यांची किंमत काय ?

$$३ \text{ खं.} ४ \text{ म.} = ३.२ \text{ खं.}$$

$$३.२ \text{ खं.} \times ०.७५ = २.४ \text{ खं.}$$

$$०.४ \text{ खं.} \times २० = ८.० \text{ म.}$$

उत्तर. २ खं. ८ म.

६ उदा. एका पोंडाचे ०.२८१२५ याची किंमत हलके परि-
माणांत काढ.

७ उदा. ३ पौं. २ शि. ६ पे. यांचे १.६०५ यांची किंमत
हलके परिमाणांत काढ.

८ उदा. ३६५१० दिवसांचे २.८१ ह्यांतून $\frac{५५}{१००}$ अवरांचे $\frac{३}{४}$
घजा कर.

९ उदा. एका चौरस घाटाचे ४.७५ आणि ७ चौ. फूट
घांची बेरीज कर.

१० उदा. तीन एकरांचे $\frac{१}{९}$ चे $\frac{३}{९}$ यांतून २.००८७५ चौ. यार्ड वजा करून बाकीत ३॥ चौ. फुटांचे ०.२२७ हे मिळीव आणि बेरीज मांग.

दुसरा प्रकार. हलके परिमाणांस भारी परिमाणांत नेण्याचा.

रिती.- ज्या परिमाणांचे अंक सांगितले असतील त्यांच्या वरच्या परिमाणांत ते किती असतात ते पहावे, आणि तितक्यांनी दिलेले अंकांस भागावे, म्हणजे वरच्या नांवाचे अंक येतात. यांत, शिवाय याच नांवाचे दुसरे अंक दिलेले असल्यास ते मिळवावे, आणि त्या बेरजेस त्यांच्या वरच्या परिमाणांत न्यावे. याप्रमाणे शेवटपर्यंत करित जावे.

१ उदा. ४९३९४ रेंस यांचे रूपये कर.

$$४९३९४ रें. \div १०० = ४९३.९४ पा.$$

$$४९३.९४ पा. \div ४ = १२३.४८५ रु. हें उत्तर.$$

२ उदा. ३.५ शेर यांस खंडींचें रूप दे.

$$३.५ शे. \div ४० = ०.०८७५ म.$$

$$०.०८७५ \div २० = ०.००४३७५ खं. हें उत्तर.$$

३ उदा. ५ आणे, ७॥ पया, यांस रुपयांचें रूप दे.

$$५ आ. ७॥ पया = ५\frac{७॥}{१२} = ५.६२५ आ.$$

$$५.६२५ आ. \div १६ = ०.३५१५६२५ रु. हें उत्तर.$$

४ उदा. सोळ्ळें माप ८३१२ यांस खंडींचें रूप दे.

$$\frac{८३१२ म.}{१००० पा.}$$

$$८३१२ = ३ \dots ६ = ३३७५ म.$$

$$३.३७५ म. \div २० = ०.१६८७५ खं. हें उत्तर.$$

५ उदा. ३३ या. २ फू. यांस मैलांचें रूप दे.

$$३३ या. २ फू. = ३३.६ यार्ड.$$

$$३३.६ या. \div ५\frac{१}{२} = ३३.६ \times \frac{२}{११} पौं.$$

$$= ३.०६ \times २ पौं.$$

$$= ६.१२ पौं.$$

$$६.१२ पौ. \div ४० = ०.१५३० फ्लॉग.$$

$$०.१५३० फ. \div ८ = ०.०१९१२८० मैल हें उत्तर.$$

६ उदा. एका हंड्रेडवेटाचे ०.८५०७६ आणि एका पौंडाचे ०.०७३२५ यांच्या बेरजेस टन यांचें रूप दे.

७ उदा. ०.०२३१ गिनि, यांत अर्धा कौनचे ०.१९ मिळव आणि उत्तर गिनीत आण.

८ उदा. ११२ दंड, २ हात यांस कोसांचें रूप दे.

९ उदा. ५॥ गुंजांचे ०.७८५४ यांस तोळ्यांचें रूप दे.

१० उदा. २ दि. ३ अ. हे १ मा. १५ दि. यांचा कितवा अंश आहेत.

तिसरा प्रकार. एका देशच्या परिमाणांतून दुसऱ्या देशच्या परिमाणांत न्यावयाचा.

रिति.-सांगितलेल्या परिमाणाचे जातीपैकी जें परिमाण इच्छिलेल्या परिमाणाचे जातीच्याशीं ताडलेलें असेल, त्या परिमाणांत पहिल्यानें दिलेल्या परिमाणाचें रूपांतर करावें. नंतर त्यास ताडलेल्या परिमाणांत न्यावें; आणि त्यांतून इच्छिलेले परिमाणांत आणावें.

१ उदा. १५ रुपयांचे पौंड कर.

$$१० रु. = १ पौंड.$$

$$\text{हणून } १५ रु. \div १० = १.५ पौं. \text{ हें उत्तर.}$$

२ उदा. १.५ अ. १.४ मि. २.५ से. इतक्यांची घटिका पळें कर.

$$१ अ. = २.५ घ.$$

$$१.५ अ. १.४ मि. २.५ से = १.५२४०२७ अ.$$

$$१.५२४०२७ अ. \times २.५ = ३.८१००६९४ घ.$$

$$= ३घ. ४८प. ३६ वि.$$

३ उदा. खंडी १२॥२॥ धान्याचें विलायती तन कर. पुण्याची एक पायली ११. ग्यालन बरोबर आहे. सोळ्ळें माप.

$$\text{खं. म. पा.}$$

$$१२॥२॥ \text{ खं} = १२ \quad १२ \quad ८$$

$$= ४०४० \text{ पायल्या}$$

$$= ४०४० \times १\frac{१}{४} \text{ ग्यालन}$$

$$= ५०५० \text{ ग्यालन}$$

$$= ५०५० \times \frac{१}{८} \text{ बु.} = ६३१.२५ \text{ बु.}$$

$$= ६३१.२५ \times \frac{१}{४} \text{ क्वा.} = ७८.९०६२५ \text{ क्वा.}$$

$$= ७८.९०६२५ \times \frac{१}{४} \text{ तन} = १५.७८१२५ \text{ तन, हें उत्तर.}$$

४ उदा. वरील उदाहरणावरून पुण्याच्या खंडीशी विलायती तन ताडून दाखीव.

$$\begin{aligned} १२॥२॥ \text{ खं.} &= १२॥२.५ \\ &= १२.५ \text{ खं.} + ०.१२५ \text{ खं.} \\ &= १२.६२५ \text{ खं} \end{aligned}$$

$$\text{हणून } १२.६२५ \text{ खं.} = १५.७८१२५ \text{ तन.}$$

$$\therefore १ \text{ खं} = \frac{१५.७८१२५}{१२.६२५} \text{ तन.} = १.२५ \text{ तन.}$$

किंवा १०० खंडी = १२५ तन होतील. हें उत्तर.

५ उदा. २१ शिलिंगांचे $\frac{२}{५}$, एका गोटचे $\frac{३}{४}$ आणि ७ शि. २ पे. यांचे $\frac{५}{२}$ यांची बेरीज करून तिला पोंडाचें रूप दे.

$$२१ \text{ शि.} \times \frac{२}{५} = \frac{४२}{५} \text{ शि.} = ८ \text{ } ४.८$$

$$१ \text{ गोट.} \times \frac{३}{४} = ४ \text{ पे.} \times \frac{३}{४} = ० \text{ } ३.०$$

$$७ \text{ शि.} \times \frac{५}{२} = \frac{३५}{२} \text{ शि.} = १७ \text{ } ६.०$$

$$२ \text{ पे.} \times \frac{५}{२} = \frac{१०}{२} \text{ पे.} = ० \text{ } ५.०$$

$$\text{एकंदर. . } १ \text{ पों. } ६ \text{ शि. } ६.८ \text{ पे.}$$

$$\text{पों. शि.}$$

$$= १ \text{ } ६.५६'$$

$$= १.३२८३' \text{ पों. हें उत्तर.}$$

६ उदा. १० मोत्यांचें वजन ३॥ रति आहे. तर १०.३ रुपये एके चवास या भावानें एक्या मोत्याची किंमत काय झाली ?

$$३॥ = ३.५$$

$$३.५ \times ३.५ = १२.२५$$

$$१२.२५ \times \frac{५५}{१६} = ७.०२$$

७.०२ \div १० = ०.७०२ हे एक्या मोत्याचे चव झाले.

$$०.७०२ \times १०.३ = ७.२३०६ \text{ रु.}$$

$$= ७ \text{ रु. } ३ \text{ आ. } ८.२७५२ \text{ पै.}$$

उत्तर, एक्या मोत्याची किंमत ७८८॥॥ सरासरी.

७ उदा. २५ हातांचे $\frac{२}{३}$ चे $\frac{१}{४}$ चे यार्ड किती होतील.

१० उदा. एका चांद्रमासाचें मान २९ दि. ३१ घ. ५०.१२ पळें इतकें आहे. एका वर्षांत म्हणजे ३६५.२५ दिवसांत चांद्रमास किती पुरे होतील, व वर दिवस किती शिल्लक राहातील ?

प्रमाण गणित.

व्यवहारांत आपल्यासमोर कोणताही पदार्थ घेऊ, आपण त्याला लागलाच त्याच्या जातीच्या दुसऱ्या पदार्थाशी ताडून पाहार्तो. ताडून पाहण्याचे दोन प्रकार आहेत. एक, अंतरानें आणि दुसरा, पटीनें.

आमच्या घराची भिंत तुमच्या घराच्या भिंतीपेक्षां ५ फूट उंच आहे असें सांगतो, अथवा दिढीनें उंच आहे असें सांगतो. या दोन्ही सांगण्यांत दुसऱ्या भिंतीची उंची पहिल्या भिंतीचे उंचीचे संबंधानें सांगितली गेल्यामुळे तिच्या वास्तविक मोठेपणाचें ज्ञान पहिल्या भिंतीच्या मोठेपणावर अवलंबून असतें. त्या दोन्ही भिंतीचें वास्तविक ज्ञान होण्यास त्या दोहोनांही एका माहितीतले मानार्शी ताडून पाहवें लागतें. एक भिंत १० फूट आणि दुसरी १५ फूट असली, तर पहिलीपेक्षां दुसरी भिंत ५ फूट उंच आहे, किंवा दुसरी पहिलीच्या दिढीनें उंच आहे असें म्हणून दोन्ही भिंतीचा मोठेपणा चांगला लक्षांत येतो.

ज्या माहितीतल्या एका मानानें, म्हणजे फुटीनें, त्या दोन्ही भिंतीची उंची मोजली, त्यास “आद्य परिमाण” अशी संज्ञा आहे.

सर्व प्रकारचीं आद्य परिमाणें ठरविलेलीं आणि लोकांच्या माहितीतलीं असतात. या आद्य मानांच्या संबंधानें सर्व प्रकारचीं मानें सांगितलेलीं असतात. हीं सर्व महत्त्वदर्शक परिमाणें संख्यांनीं दाखविलीं जातात.

चार हात उंची, किंवा पांच बिघे क्षेत्र, किंवा साहा तोळे वजन, किंवा दोन दिवसांची मजल, या शब्दांचा अर्थ बरोबर समजण्यास एक हात उंची, एक बिघा क्षेत्र, एक तोळा वजन किंवा एक दिवसाची मजल, यांचें ज्ञान आपल्यास पूर्वी बरोबर आहे असें घेऊन चालवें लागतें.

शिक्षकानें विद्यार्थ्यांस, अंतरानें फरक दाखविणें आणि पटीनें फरक दाखविणें, या दोहोत जो भेद आहे तो चांगला समजावून दिला पाहिजे. एका हौदांत दुररोज < घागरी पाणी यावयाचें

त्याबद्दल एके दिवशीं त्यांत दोन घागरी अधिक पाणी आलें आणि दुसरे दिवशीं त्यांत चार घागरी अधिक पाणि आलें, तर हौदांत दुसरे दिवशीं दुप्पट पाणी अधिक आलें ही गोष्ट स्वरी आहे, परंतु हौदांतलें पाणि दुप्पट झालें नाहीं. तें पहिले दिवशीं सव्वाईने झालें आणि दुसरे दिवशीं दिढीने झालें. कालच्यापेक्षां उष्मा हवेंत आज दुप्पट आहे असें म्हटलें तर, हवा दुप्पट गरम झाली असें समजून ये. सावकाराला कालच्यापेक्षां आज दुप्पट नफा झाला असला तरी त्याची दौलत दुप्पट झाली असें समजून ये.

गुणोत्तर—एका नांवाच्या दोन संख्यांपैकी एक दुसरीस तिच्या किती पटीबरोबर किंवा कितव्या हिशशा बरोबर आहे हें दाखविणाऱ्या संख्येस त्या दोन संख्यांचें (किंवा पहिलीचें दुसरीशीं) गुणोत्तर म्हणतात. उ० १२ ही संख्या १६ या संख्येच्या पाऊणपट आहे, येथें पाऊण हें १२ व १६ ह्यांचें (किंवा १२ चें १६ शीं) गुणोत्तर होय. हें दाखविणें झाल्यास त्या संख्यांमध्ये (:) असे दोन बिंदु मांडून किंवा पहिलीस दुसरीनें भागून दाखवितात. जसें $१२ : १६ = \frac{१२}{१६}$ हें गुणोत्तर जसे १२ स १६ असें वाचितात. ह्याचा अर्थ १२ हे १६ च्या $\frac{१२}{१६}$ पट आहेत असा समजावा.

ज्या दोन संख्यांचें गुणोत्तर दाखविणें आहे त्यांस युग्म, पहिले संख्येस अग्रसर, आणि दुसरे संख्येस उपाग्रसर, अशा संज्ञा आहेत. वरच्या उदाहरणावरून ध्यानांत येईल कीं, अग्रसर हा भाज्य व उपाग्रसर हा भाजक असून त्यांच्या भागाकाराला गुणोत्तर म्हणतात. भाज्य व भाजक हे दोन्ही भावसंख्यात्मक असले अग्र परिमाण संख्यात्मक असले तरी त्यांचा भागाकार भाव संख्यात्मकच यावयाचा, म्हणून अग्रसर व उपाग्रसर हे परिमाण संख्यात्मक असल्यास त्यांतील साधारण परिमाण नाहीं असें मानून, अग्रसर व उपाग्रसर हे अनुक्रमें अंश छेद स्थानीं लिहिल्यानें जो अपूर्णाक होईल, तो त्या संख्यांचें गुणोत्तर दाखवील. जसें:-

$$२ रु : ५ रु = \frac{२रु}{५रु} = \frac{२}{५}$$

गुणोत्तरे अपूर्णाक आहेत म्हणून अपूर्णाका संबंधी सर्व नियम गुणोत्तरांस लागू असले पाहिजेत.

उ०१ले—अग्रसर व उपाग्रसर या दोन्ही संख्यांस सारखा संक्षेप

दिला किंवा दोन्ही संख्या सारख्या पटीने वाढविल्या तर त्यांच्या गुणोत्तरांत फरक पडत नाही. जसे १२ स १६ ज्या प्रमाणाने आहेत त्याच प्रमाणाने २४ स ३२ आहेत, ६ स ८ आहेत, अथवा ३ स ४ आहेत. कारण या सर्व युग्मांत दुसऱ्या संख्येच्या पाउणपट पहिली संख्या आहे. म्हणजे प्रत्येक युग्मांतील संख्यांचे गुणोत्तर .॥॥. आहे.

उ.२२—अपूर्णाकांप्रमाणेंच गुणोत्तरांची तुलना त्यांच्या समच्छेद-रूपांवरून करितां येते. उ० ६ : ५ आणि ४ : ३ ह्या गुणोत्तरांची अपूर्णाक रूपें $\frac{६}{५}$ आणि $\frac{४}{३}$ ही आहेत, आणि त्यांची समच्छेदरूपें $\frac{१८}{१५}$ आणि $\frac{२०}{१५}$ ही आहेत, म्हणून

$$६ : ५ = १८ : १५$$

$$४ : ३ = २० : १५$$

ह्या नवीन रूपांत उपाग्रसर म्हणजे छेद (१५) हा दोन्ही-मध्ये एकच असून अग्रसर म्हणजे अंश हे १८ आणि २० असे लहान मोठे आहेत. म्हणून पहिले गुणोत्तरापेक्षा दुसरें मोठे आहे.

प्रमाण— दोन गुणोत्तरांचे बरोबरीला प्रमाण म्हणतात, आणि त्यांतील संख्यांना प्रमाणसंख्या, प्रमाणपदे, किंवा प्रमाणराशि, म्हणतात. उ० १५ : ५ आणि ६० : २० ह्या दोन गुणोत्तरांत अग्रसर उपाग्रसरांच्या तिपटीबरोबर आहेत म्हणून

$$१५ : ५ = ६० : २०$$

किंवा

$$\frac{१५}{५} = \frac{६०}{२०}$$

हे प्रमाण १५ : ५ :: ६० : २० असे मांडितात आणि जसे १५ स ५ तसे ६० स २० असे वाचितात.

टीप १ ली—पूर्णाकी भागाकारांत भाज्य व भाजक यांचा संबंध दाखविण्यासाठी त्यांमध्ये उभी रेष देत असतो, तोच भागाकाराचा संबंध दाखविण्यासाठी अग्रसर व उपाग्रसर यांमध्ये त्या उभ्या रेषेबद्दल तिच्या शेवट बिंदूची योजना झाली असावी, आणि त्याच नमुन्याने दोन गुणोत्तरांची बरोबरी दाखविण्यासाठी वरच्या प्रमाणांत जोडरेषांच्या एवजी त्यांच्या शेवट बिंदूची योजना झाली असावी असे दिसते. हे सादृश्य लक्षांत ठेवण्या जोगे आहे.

टीप २ री-कोणती संख्या कोणते संख्येस तिच्या किती पटी बरोबर आहे हें गुणोत्तर दाखवितें, म्हणून हाच प्रश्न वरच्या प्रमाणांतील पहिले गुणोत्तराला करावा, म्हणजे त्याच्या वाचना पासून उत्तर मिळतें कीं, ५ हे १५ स त्यांच्या $\frac{५}{१५}$ पटी बरोबर आहेत. ह्या वरून १५ स ५ हें वाचन $\frac{५}{१५}$ हें गुणोत्तर दाखवितें, वर इंग्रजी रीतीनें सांगितलेलें $\frac{१५}{५}$ हें गुणोत्तर दाखवीत नाहीं. म्हणजे १ले पदास २रें पद हें मराठी वाचन $\frac{२रेंपद}{१लेपद}$ हें मराठी गुणोत्तर

दाखवितें, $\frac{१लेपद}{२रेंपद}$ हें इंग्रजी गुणोत्तर दाखवीत नाहीं. शिकणाराचे मनांत हें इंग्रजी गुणोत्तर वागावें यासाठीं गुणोत्तराचे लक्षणाशीं कंसांत दिलेलें वाक्य जोडीत असतात. या वाक्याप्रमाणें पाहतां १५ चें ५ रीं गुणोत्तर याचा अर्थ १५ ची ५ रीं बरोबरी करणारी पट असा होतो, म्हणून याही वाक्यानें या संख्याचें गुणोत्तर $\frac{५}{१५}$ हेंच दिसून येतें. कारण १५ ची $\frac{५}{१५}$ पट = ५ येतात. सारांश आपल्या बहिवाटींत गुणोत्तराचें वाचन एका प्रकारचें असून लेखन दुसऱ्या प्रकारचें आलें आहे, यास्तव हा मेळ कोणत्या रीतीनें घालावा हा विचार करणें भागास आलें आहे.

एका विचारें पाहतां गुणोत्तर व प्रमाण हीं इंग्रजी ग्रंथांवरून घेतलीं आहेत यासाठीं त्यांचें वाचन व लेखन हीं इंग्रजी प्रमाणेंच व्हावीं हें योग्य वाटतें. म्हणजे जसे १५ हे ५ स तसे ६० हे २० स अशी गुणोत्तरें व प्रमाण वाचण्याची सरणी मराठींत असावी हें बरें दिसतें; कारण, ज्या संख्येस “ स ” लागतो ती माप कल्पून तिनें दुसरी संख्या मोजावयाची हा मूळचा अर्थ आहे म्हणून ह्या इंग्रजी रीतीचे वाचणीनें वर अपूर्णाक रूपानें लिहिलेलीं गुणोत्तरें दाखविलीं जातात.

दुसऱ्या विचारें पाहतां इंग्रजी रीतींत पूर्वापर विरोध आढळतात, तसे मराठी रीतींत आढळत नाहींत. उदाहरणार्थ भूमिति श्रेढींतलें गुणोत्तर व प्रमाण गणितांतलें गुणोत्तर हीं एकच आहेत, असें असतां भूमितिश्रेढींत $\frac{२रेंपद}{१लेपद}$ या अपूर्णाकाला गुणोत्तर म्हणावें, आ-

णि प्रमाण गणितांत $\frac{१लेपद}{२रेपद}$ या अपूर्णाकाला गुणोत्तर म्हणावें, हा विरोध लहान नव्हे. तसेंच १ ले पदाचे जितके पद २ रे पद असेल, तितकेच ३ रे पदाचे पद ४ थे पद असले, म्हणजे त्याला सम प्रमाण म्हणतात; हे लक्षण मराठीत व इंग्रजीत ही एक सारखेच आढळते. ह्या लक्षणांत $\frac{२रेपद}{१लेपद}$ आणि $\frac{४थेपद}{३रेपद}$ या गुणोत्तरांचें साम्य दाखविलें जातें. अशा रीतीने एकाच प्रकरणांत दोन ठिकाणीं दोन प्रकारांनीं गुणोत्तरें सांगणे लागर्वा हा दोष सामान्य नव्हे. असले दोष इंग्रजी रीतीचे गुणोत्तरावर येत असून मराठी रीतीचे गुणोत्तरावर येत नाहींत, म्हणून वाचन व लेखन हीं दोन्हीं मराठी रीतीनेच चालू करावीं हे बरे दिसतें. म्हणजे $\frac{२रेपद}{१लेपद} = \frac{४थेपद}{३रेपद}$ या नमुन्याने प्रमाणाचा अर्थ समजावा, आणि तें प्रमाण जसें १ ले पदास २ रे पद तसें ३ रे पदास ४ थे पद असे वाचावें हेंच करणें विचाराचें दिसतें.

आपल्या संस्कृत ग्रंथांतून त्रैराशिक किंवा प्रमाण यांतल्या चार पदांना अनुक्रमें प्रमाण, इच्छा, फळ, व इच्छा फळ, अशीं नावे आढळतात, आणि १ ले पद जें प्रमाण त्याचा अर्थ ज्याने मापितात (म्हणजे भागितात) तें असा दिलेला आढळतो. ही गोष्ट दुसऱ्या विचारालाच साधक होते.

चार्लस डेव्हिस नावाच्या इंग्लिश विद्वानानें गणितशास्त्र या विषयावर इंग्रजीत ग्रंथ लिहून, त्यांत त्यानें गणितशास्त्र व न्यायशास्त्र यांची संगति दाखविली आहे. या ग्रंथांत गुणोत्तर व प्रमाण या संबंधानें तो असें लिहितो कीं, कितीएक ग्रंथकार $\frac{१लेपद}{२रेपद}$ या भागाकाराला गुणोत्तर म्हणतात, व कितीएक ग्रंथकार $\frac{२रेपद}{१लेपद}$ या भागाकाराला गुणोत्तर म्हणतात, ह्या पैकीं १ ल्यांचें म्हणणें अनेक प्रकारांनीं दृषित व वगैरे सोईचें आहे असें दाखवून, दुसऱ्यांचें म्हणणें सर्वाशीं निर्दोष व सोईचें आहे असें त्यानें सिद्ध केले आहे. वेबस्टरच्या डिक्शनरीतही असेंच सांगितलें आहे.

येथें संक्षेपतः दाखविलेले व दाखविणें राहिलेले गुणदोप विचारांत घेऊन ह्यां पैकीं कोणती रीति एका मेळानें चालू करावी हें ठरविण्याचें काम विचारी वाचकांनीं केलें पाहिजे.

बरोवरी संवधी प्रत्यक्ष प्रमाणें

- प्र० १ लें—बरोवरींत बरोवरी मिळविली, तर बेरजा बरोबर येतात.
- प्र० २ रें—बरोवरींत बरोवरी वजा केली, तर वाक्या बरोबर राहतात.
- प्र० ३ रें—बरोवरीस बरोवरीनें गुणिलें, तर गुणाकार बरोबर येतात.
- प्र० ४ थें—बरोवरीस बरोवरीनें भागिलें, तर भागाकार बरोबर येतात.

नियम— १ ला. वर दाखविल्याप्रमाणें चार संख्या प्रमाणांत असल्या, तर पहिली व चौथी ह्या शेवटच्या संख्यांचा गुणाकार, दुसरी व तिसरी ह्या मधल्या संख्यांच्या गुणाकाराबरोबर होईल.

उ० २ : ३ :: ४ : ६, तर $२ \times ६ = ३ \times ४$ हें सिद्ध करावयाचें.

आतां ह्या प्रमाणांतलीं दोन गुणोत्तरें अपूर्णांक रूपांनें लिहिलीं तर $\frac{२}{३} = \frac{४}{६}$ ह्या दोन समान संख्यांना दुसरी संख्या ३ व चवथी संख्या ६ ह्यांचे गुणाकारानें गुणलें तर $२ \times ६ = ४ \times ३$ येतात.

म्हणून पहिली व चवथी ह्यांचा गुणाकार दुसरी व तिसरी यांचे गुणाकाराबरोबर आहे हें सिद्ध. हीच सिद्धता कोणत्याही प्रमाणाला लागू पडते म्हणून हा नियम सामान्य आहे.

चार प्रमाणपदांपैकीं कोणतीही तीन पदें दिलीं असतां त्यांपासून चौथें पद काढतां येतें. कारण,

१ लें पद \times ४ थें प. = २ रें प. \times ३ पद आहे म्हणून,

$$१ \text{ लें पद} = \frac{२ \text{ रें प.} \times ३ \text{ रें प.}}{४ \text{ थें प.}}$$

$$२ \text{ रें पद} = \frac{१ \text{ लें प.} \times ४ \text{ थें प.}}{३ \text{ रें प.}}$$

$$३ \text{ रें पद} = \frac{१ \text{ लें प.} \times ४ \text{ थें प.}}{२ \text{ रें प.}}$$

$$४ \text{ थें पद} = \frac{२ \text{ रें प.} \times ३ \text{ रें प.}}{१ \text{ लें प.}}$$

उदाहरण. ६, ७, ८, ह्या तीन संख्या प्रमाणांत येण्यास प-हिलें किंवा दुसरें पद कोणतें असावें.

पहिलें पद काढणें असल्यास, १ लें पद = $\frac{२ रें प. \times ३ रें प.}{४ थें प.} = \frac{६ \times ७}{८} = ५\frac{१}{८}$

म्हणजे $५\frac{१}{८} : ६ : : ७ : ८$

दुसरें पद काढणें असल्यास, २ रें पद = $\frac{१ लें प. \times ४ थें प.}{३ रें प.} = \frac{६ \times ८}{७} = ६\frac{६}{७}$

म्हणजे $६ : ६\frac{६}{७} : : ७ : ८$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

खालीं संख्या दिल्या आहेत ह्यांच्याशीं प्रमाणांत येत अशा आदिप-
दीं, २ रे पदीं, ३ रे पदीं, आणि ४ थे पदीं, कोणत्या संख्या येतील तें सांग.

१ उ. २, ३, ४.	२ उ. ३, ४, ५.
३ उ. ४, ५, ६.	४ उ. ५, ६, ७.
५ उ. २, ५, ७.	६ उ. ४, ५, ८.
७ उ. २, ७, ९.	८ उ. ५, ७, ७.

टीप- ही त्रैराशिकाचे नियमाची सिद्धता मराठी गुणोत्तरां-
वरून सहज दिसून येते ती अशी— प्रमाणांत दोन गुणोत्तरें समान
असतात. म्हणजे १ ले पदाचे जितके पद २ रें पद असतें, ति-
तकेच ३ रे पदाचे पद ४ थें पद असतें. ह्यावरून पहिले गुणो-
त्तरानें ३ रें पद गुणिलें तर ४ थें पद येईल. म्हणून

$$४ थें पद = \frac{२ रें पद}{१ लें पद} \times ३ रें पद.$$

दोन परिमाणसंख्यांचाही भागाकार भावसंख्याच यावयाचा
ह्मणून हा नियम परिमाणसंख्या व भावसंख्या ह्या दोन्ही सं-
ख्यांच्या प्रमाणांना लागू होतो, परंतु दोन परिमाणसंख्यांचा गु-
णाकार संभवत नाही ह्मणून वरील नियम भावसंख्यांच्या प्रमाणांना
मात्र लागू होतो.

नियम- २ रा. कोणत्याही दोन संख्यांचा गुणाकार दुसऱ्या
दोन संख्यांच्या गुणाकाराबरोबर असला, आणि एका गुणाकारां-
तील संख्या पहिल्या व चौथ्या स्थलीं, व दुसऱ्या गुणाकारांतील
संख्या दुसऱ्या व तिसऱ्या स्थलीं मांडिल्या, तर त्या चार संख्या
प्रमाणांत असतील.

उ० $१६ \times २१ = १२ \times २८$ तर $१६ : १२ : : २८ : २१$ हें
सिद्ध करावयाचें.

दिलेल्या समान गुणाकारांना त्या प्रत्येक गुणाकारांतील एकेक संख्या २१ व १२ ह्यांचे गुणाकाराने भागिले तर.

$$\frac{१६}{१२} = \frac{२८}{२१} \text{ म्हणजे } १६ : १२ :: २८ : २१$$

ह्या वरून पहिले गुणाकारांतील संख्या दुसरे व तिसरे स्थली जाऊन, त्या चारही संख्या प्रमाणांत झाल्या ही सिद्ध. हीच सिद्धता कोणत्याही दोन समान गुणाकारांना लागू पडते म्हणून हा नियम सामान्य आहे.

नियम ३रा- चार संख्या प्रमाणांत असल्या तर, आठ प्रकारच्या स्थल भेदांनी त्या प्रमाणांत आहेत असे दाखविता येते.

$$३० \quad २० : ८ : : १५ : ६$$

$$\text{म्हणून नियम १ प्रमाणे } २० \times ६ = १५ \times ८$$

ह्या दोन समान गुणाकारांतोळ अवयव, नियम २ प्रमाणे उलट सुलट मांडले, अथवा त्यांस ८×६ , १५×६ , ८×२० आणि २०×१५ ह्या प्रत्येक गुणाकाराने भागिले तर पुढे दाखविलेली ८ प्रमाणे उत्पन्न होतात.

$$\frac{२०}{८} = \frac{१५}{६} \text{ म्हणजे } २० : ८ : : १५ : ६.$$

$$\frac{२०}{१५} = \frac{८}{६} \text{ म्हणजे } २० : १५ : : ८ : ६.$$

$$\frac{८}{६} = \frac{२०}{१५} \text{ म्हणजे } ६ : ८ : : १५ : २०.$$

$$\frac{६}{१५} = \frac{८}{२०} \text{ म्हणजे } ६ : १५ : : ८ : २०.$$

$$\frac{१५}{६} = \frac{२०}{८} \text{ म्हणजे } १५ : ६ : : २० : ८.$$

$$\frac{१५}{२०} = \frac{६}{८} \text{ म्हणजे } १५ : २० : : ६ : ८.$$

$$\frac{८}{२०} = \frac{६}{१५} \text{ म्हणजे } ८ : २० : : ६ : १५.$$

$$\frac{६}{१५} = \frac{८}{२०} \text{ म्हणजे } ६ : १५ : : ८ : २०.$$

ह्यांत ६×२० ह्या गुणाकाराचे दोन्ही अवयव पहिल्या चार ओळीत शेवटचे अंक झाले आहेत; आणि १५×८ हे मधले अंक झाले आहेत. खालच्या चार ओळीत ह्याच्या उलट झाले आहे.

विविध परिमाणांचे प्रमाण.

माणे साधारण संख्यांच्या गुणोत्तराविषयी विचार झाला. आतां विविध परिमाणांच्या गुणोत्तराविषयी पाहू.

१०८ रु. : १४४ रु., किंवा ९ शेरांस १२ शेर, किंवा १५ खंडोस २० खंडी, किंवा ३९ हातांस ५२ हात, ह्या सर्वांची गुणोत्तरे अनुक्रमेण $\frac{१०८}{१२०}$, $\frac{९}{१२}$, $\frac{१५}{२०}$, $\frac{३९}{५२}$, हीं आहेत आणि ह्या प्रत्येक अपूर्णाकास संक्षेप दिला तर सर्वांस $\frac{३}{४}$ हें रूप येते. म्हणून १०८ रु. : १४४ रु. हें गुणोत्तर $\frac{३}{४}$ आहे, आणि ह्याचप्रमाणे बाकीच्या विविध परिमाणांतही आहे. परंतु येथे इतकें मात्र लक्षांत ठेवावें कीं, ज्या परिमाणांचें गुणोत्तर काढावयाचें तीं परिमाणे एका नांवाचीं पाहिजेत, तशीं नसलीं तर एक परिमाण दुसऱ्या परिमाणाच्या किती पट आहे हें समजणार नाहीं. कारण १०८ पावल्यांच्या किती पट १४४ दिवस आहेत, हें विचारण्यांत अर्थ नाही. १०८ पावल्यांचे किती पट ५४० पावले आहेत असें विचारिलें तर $\frac{५४०}{१०८} = ५$. पांच पट आहेत असें उत्तर देतां येते.

परिमाणें कोणत्याही जातीचीं असलीं तरी त्याचें गुणोत्तर केवळ साधारण संख्या येत्ये, आणि तिच्या योगानें एका परिमाणाच्या किती पट किंवा अंशानें दुसरें परिमाण आहे हें मात्र समजतें. १९८आणे : ६६आणे हें गुणोत्तर ३ आहे, हे तीन आणे असें समजण्याचें नाही. ह्याचा अर्थ इतकाच कीं, एक परिमाण दुसऱ्या परिमाणाच्या तिप्पट आहे. ह्याचप्रमाणें १९८ हातांस : ६६ हात, १९८ दिवसांस ६६ दिवस, ह्यांचेही गुणोत्तर ३ आहे. हें उघड आहे. यावरून जेव्हां निराळ्या प्रकारच्या परिमाणांचे जोडांचीं गुणोत्तरे एकसारखीं असतात, तेव्हां त्यांपासून प्रमाण उत्पन्न होतें. जसें १०८ रु. : १४४ रु. : : ९ हा. : १२ हात. ह्या प्रमाणांत नि० ३ रा ह्यांत सांगितल्याप्रमाणें पदांची स्थळें पाहिजे तशीं जरी बदलतां येत नाहींत, तरी गुणोत्तर काढण्यास येईल अशा रीतीनें तीं बदलतां येतात. जसें १०८ रु. : १४४ रु. : : ९ हा. १२ हात, ह्याबद्दल ९ हात. : १२ हा. : : १०८ रु. : १४४ रु. असें लिहितां येईल. परंतु १४४ रु. : १२ हा. : : १०८ रु. : ९ हात असें लिहितां येणार नाही; कारण १४४ रु. आणि १२ हा. किंवा १०८ रु. आणि ९ हा. ह्यांची

गुणोत्तरे काढतां येत नाहींत. कदाचित् १४४ रु. : १०८ रु. : : १२ हा. : ९ हात असें म्हटलें तर चालेल. ह्या अशा प्रमाणांत रुपये व हात ह्यांचा गुणाकार व्हावयाचा नाहीं, म्हणून येथे दोन शेवटील परिमाणांचा गुणाकार मध्यांच्या गुणाकाराबरोबर आहे असें म्हणतां येत नाहीं. वरील प्रमाणांतील अंक कोणत्याही परिमाणाचे न मानतां केवळ अंक आहेत असें मानलें तर मात्र दोन शेवटांचा गुणाकार मध्यांचें गुणाकाराबरोबर आहे असें म्हणतां येईल; आणि असें मानून तीन पदे घेतलीं तर त्यांपासून चवथें पद काढतां येईल. मग ते ज्या युग्मांतलें असेल, त्या युग्मांतल्या दुसऱ्या पदाच्या नांवाचें असें म्हणावयास चिंता नाहीं.

पहा १०८ रु. १०० रु. आणि ९ हात ह्या तीन राशींपासून चवथें पद काढणें आहे, तर $\frac{१०० \times ९}{१०८} = ८\frac{१}{३}$. हे हात आहेत असें म्हणावयास चिंता नाहीं, कारण हा अंक हातांच्या जातीचाच असला पाहिजे. म्हणून १०८ रु. : १०० रु. : : ९ हा : $८\frac{१}{३}$ हात. हें प्रमाण झालें.

त्रैराशिक- प्रमाणांत असणाऱ्या चार पदांपैकी पहिलीं तीन पदे दिलीं असतां त्यांपासून चौथें पद काढणें झाल्यास-२ रें प. व ३ रें प. ह्यांच्या गुणाकारास पहिल्या पदानें भागावें म्हणजे चौथें पद निघतें.-ही जी रीति वर सांगितली तीस त्रैराशिकाची रीति म्हणतात

व्यवहारांत जेव्हां ह्या रीतीचा उपयोग करितात, तेव्हां दिलेल्या तीन पदांपैकी दोन सजातीय असून त्यांतून एका पदाचा संबंध दुसरे पदार्शी दाखविलेला असतो त्याच्या वरून तिसरे पदापासून, त्याच जातीच्या चौथे पदाची किंमत काढावयाची असते. हें उघड आहे कीं. पहिल्या पदाच्या दुप्पट, तिप्पट, अर्धे इ० जसें दुसरे पद असेल, त्याप्रमाणें तिसरे पदाच्या दुप्पट, तिप्पट, अर्धे इ० चवथें पद येईल; म्हणजे साधारणपणें पहिल्या पदाच्या जितके पट दुसरे पद असेल त्याप्रमाणें तिसरे पदाच्या तितक्या पटीबरोबर चवथें पद असतें. अथवा पहिल्या दोन पदांच्या गुणोत्तराबरोबर दुसऱ्या दोन पदांचें गुणोत्तर असतें म्हणून हीं चार पदे प्रमाणांत येतात. आणि ह्यांस चौथें पद काढण्याची वरील रीत लागू करतां येत्ये.

उदाहरण पहिलें.

३७शेर साकरेस १११रुपये पडतात, तर १९शेर साकरेस काय पडेल.

३७. शे. : १९ शे. : : १११ रु. : उत्तर.

$$\text{उत्तर} = \frac{१११ \times १९}{३७} = ५७$$

$$\begin{array}{r} १११ \\ \times १९ \\ \hline ९९९ \\ १९९ \\ \hline ३७) २१०९ (५७ \\ \underline{१८५} \\ ३५९ \\ \underline{३५९} \\ ००० \end{array}$$

ह्या उदाहरणांत उत्तर ५७. हैं अर्थात् तिसऱ्या राशीच्या जातीचें, म्हणजे रुपये आहे हैं उघड आहे.

उदाहरण दुसरें.

५७ रुपयांस १९ शेर साकर येती, तर १११ रुपयांस किती शेर साकर येईल ?

५७ रु. : १११ रु. : : १९ शे. : उत्तर.

$$\begin{array}{r} १९ \\ \times १११ \\ \hline १९९ \\ १९९ \\ १९९ \\ \hline ५७) २१०९ (३७ \\ \underline{१९९} \\ ३११ \\ \underline{३११} \\ ००० \end{array}$$

ह्या उदाहरणाचें उत्तर ३७. हैं तिसऱ्या राशीच्या जातीचें म्हणजे शेर आहेत असें समजावें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. १२ हात वस्त्रास १५ रुपये पडतात. तर ८ हात वस्त्रास काय पडेल ?
- २ उ. १२ मण धान्यास १६ रुपये, तेव्हां ७२ रुपयांस किती धान्य येईल.
- ३ उ. ९० शेर काकवीस काय द्यावें ? जर ४९५ शेर काकवीस ३९६ रुपये द्यावे लागतात.
- ४ उ. ६३ रुपये सारा दिल्यानें किती विघे जमीन लावणीस मिलेल ? जर १७२ विघ्यांस ३७३ रुपये सारा पडतो.
- ५ उ. २५ तोळे अर्गजास काय द्यावें ? जर ८० तोळ्यांस १७६ रुपये पडतात.

अपूर्णाकास संक्षेप दिल्यानें किंमत बदलत नाहीं म्हणून उत्तर

अथवा चवथें पद ($\frac{२ \text{ रें प.} \times ३ \text{ रें प.}}{१ \text{ रें प.}}$) शोधून काढते वेळी प-

हिलें व तिसरें, अथवा पहिलें व दुसरें, ह्या पदांत संक्षेप गेल्यास तो देऊन कृत्य सोपें करावें. उदाहरण. कागदांच्या १७५ गठड्यांस २६६ रु. १४ आणे पडतात, तर ९९० गठड्यांस काय पडेल ?

हें उदाहरण सोडवितांना तिसरे पदास पहिल्यानें आण्याचें रूप दिलें; नंतर पहिल्या पदास २५ नीं भागलें आणि त्याबद्दल दुसरें व तिसरें ह्या प्रत्येक पदास ५ नीं भागलें. नंतर पहिलें, व तिसरें ह्या प्रत्येक पदास ७ नीं भागलें. हे संक्षेप खाली दाखविले आहेत

२५) १७५ गठड्या : ५) ९९० गठड्या : : ५) २२७० आणे:उ०

$$\frac{७) ७}{१}$$

$$\frac{१) ९९०}{१९८}$$

$$\frac{७) ८५४}{१२२}$$

तर.....१ग. : १९८ ग. : : १२२आ : उ०

$$\begin{array}{r} १२२ \\ ३९६ \\ ३९६ \\ \hline १) २४९६ \end{array}$$

२४९६ आणे.

२४९६ आणे = १५०९. रु. १२ आणे हें उत्तर.

१४ मण वजन लोखंडाच्या कांबीस रु. ३५॥॥ दिले. तेव्हां ह्या भावानें ९७ रुपयांच्या किती मण कांबी येतील.

२) २२८२पा.आ. : २) ६२०८ पा. आ. : : ७) १४ म : उ०

$$\frac{७) ११४१}{१६३}$$

$$\frac{३) १०४}{३९०४}$$

२ ह्या उदाहर-

णांतील किमती-

स पावआण्या-

चीं रूपें देऊन

मग संक्षेप दिला,

आणि रीतीप्रमा-

णें उत्तर काढलें.

$$१६३$$

१६३ पा. आ. : ३१०४ पा. आ. : : २ म : उ०

$$\frac{१६३) ६२०८ (३८१४}{२८९}$$

$$\frac{१३१८}{१३०४}$$

उत्तर ३८ $\frac{१४}{१६३}$ मण.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. ३८५ यार्ड वस्त्रास ६३ रुपये पडतात, तर १८ रुपयांस किती यार्ड वस्त्र येईल ?

- २ उ. २०५ रुपयांस किती वार फलानेल येईल ? जर ५१ वारांस ८५ रुपये पडतात.
- ३ उ. ३६ एकर ३ गुंठे, ह्यांस ४२ रुपये सारा पडतो, तर २१ एकर ३ गुंठे, १४ आणे इतक्या जमीनीचा सारा किती द्यावा लागेल ?
- ४ उ. वजन १०॥८२॥ साकर ५१ रुपयांस घेतली, तेव्हां ह्या भावानें ४॥२८॥ साकरेस काय पडेल.
- ५ उ. रु. २०१॥८ ह्यांस ४१ पळे वाजरी येते, तर ६४॥८ ह्यांची किती येईल ?
- ६ उ. कैली ४७२॥३२ जोंधळ्यांस १२८०॥८ रुपये पडतात तर ७२॥८॥ जोंधळ्यांस काय पडेल ?

वर जी उदाहरणें सांगितलीं, त्यांशिवाय दुसरीं अनेक प्रकारचीं उदाहरणें त्रैराशिक गणितानें करतां येतात. परंतु तीं सांगण्यापूर्वीं, प्रमाणांत असणाऱ्या परिमाणांविषयीं आणखी कांहीं विशेष सांगितलें पाहिजे.

चार राशि प्रमाणांत आहेत असें म्हटलें म्हणजे काय समजावें, हें मागें सांगितलें. आतां, दोन महत्त्वांचे प्रमाणांत आहेत असें म्हटलें म्हणजे काय समजावें, याचा विचार करूं.

साधारण लोकांच्या बोलण्यांत येतें कीं, किमतीच्या प्रमाणानें पदार्थ अधिक किंवा कमी वजनानें मिळतो. ह्यांत पदार्थाच्या किमतीच्या व वजनाच्या विशेष संख्या सांगितलेल्या नसतात, परंतु साधारणपणानें ह्या दोन महत्त्वांचा संबंध आहे असें मात्र दाखविलें असतें. ह्यापासून असें समजावें कीं, कोणतीही दोन विशेष वजनें घेतलीं आणि त्यांच्या प्रमाणानें दोन किमती घेतल्या, तर तीं चार पदें प्रमाणांत होतील. म्हणून पदार्थांचीं दोन वजनें दिलीं आणि एक किंमत दिली, तर दुसरी किंमत त्रैराशिकानें काढतां येत्ये, अथवा दोन किमती आणि एक वजन दिलें तर दुसरें वजन काढतां येतें. ह्याचप्रमाणें मागील उदाहरणांत केलें आहे.

ह्याप्रमाणें दुसऱ्या गोष्टी प्रमाणांत असतात तेव्हां त्यांसही हा नियम लागू करतां येतो. जसें घराचे भाड्याची रकम घरांत राह-

ण्याच्या काळाप्रमाणें अधिक कमी असते. मजुराची मजूरी कामाच्या दिवसांप्रमाणें अधिक कमी होते. गाडीची मजल बैलांच्या चालण्याच्या त्वरेप्रमाणें अधिक कमी होत्ये. ह्या सर्वांत एका महत्वाच्या दोन विशेष संख्या घेतल्या आणि त्यांच्या संबंधानें दुसऱ्या महत्वाच्या दोन विशेष संख्या घेतल्या, तर हीं चार पदें प्रमाणांत होतात. म्हणून ह्यांतील तीन दिलीं असतां त्रैराशिक रीतीनें चौथें काढतां येतें.

दोन महत्त्वे प्रमाणांत आहेत किंवा नाहींत, हें कोठें कोठें पदार्थ विज्ञानाच्या दृष्टीनें पाहिल्याशिवाय समजत नाहीं. जसें पदार्थांच्या पतनाचा वेग, त्याची स्थिरावस्था सुटल्यापासून तो पडेपर्यंत जो गेलेला काळ, त्याचे प्रमाणांत असतो हें लवकर ध्यानांत येत नाहीं.

परंतु साधारण व्यवहारांत जे हिशेब घेतात, त्यांतून बहुतेकांस मागे सांगितल्याप्रमाणें प्रमाण लावून पाहतां येतें. ह्मणजे एका महत्वाच्या कोणत्याही संख्या घेतल्या, आणि त्याचप्रमाणें त्यांच्या संबंधाच्या दुसऱ्या महत्वाच्या संख्या घेतल्या, तर त्या चार संख्या प्रमाणांत आहेत किंवा नाहींत हें पाहतां येतें.

हें स्वल्प रीतीनें पाहण्याचें आहे तर मनांत अशी कल्पना करावी कीं, जर एक महत्व दुप्पट तिप्पट वाढत गेलें, तर त्याप्रमाणें त्याच्या संबंधाच्या दुसऱ्या महत्वांत फेर होतो किंवा नाहीं? होत असेल तर तीं महत्त्वे सरळ प्रमाणांत आहेत, असें समजावें, व त्याचें उत्तर त्रैराशिकरीतीनें काढावें. तिसरें पद, म्हणजे उत्तराच्या जातीचें पद एकच असतें, म्हणून तें पहिल्यानें तिसरे स्थानीं लिहावें; नंतर त्याच्याशीं जें पद संबंध ठेवीत असेल तें पहिल्या स्थानीं लिहावें, व शिलक राहिलेलें पद दुसरे स्थानीं लिहावें, आणि उत्तर मागील रीतीप्रमाणें काढावें. म्हणजे १ लें व २ रें हीं पदें एका नावाचीं करावीं, व तिसरें पद गरजेप्रमाणें पाहिजे त्या नावाचें करावें. तसेंच १ लें व ३ रें अथवा १ लें व २ रें पद ह्यांत संक्षेप गेल्यास द्यावा. नंतर २ रें व ३ रें पद ह्यांच्या गुणाकारास १ ले पदानें भागावें, उत्तर ३ रें पदाच्या नावाचें घेईल.

उदाहरण पहिलें.

८५ मैल जाण्यास रु. १०॥भाडें पडतें, तर १३० मैलांस भाडें काय द्यावें?

८५ मै. : १३० मै. : : १०॥ : उत्तर

संक्षेप दिल्यानें व किमतीचे आणे केल्यानें.

१७ मै. : २६ मै. : : १७० आणे : उत्तर

ह्यांत उघड आहे, कीं दुप्पट अंतरास दुप्पट भाडें पडेल.

१७०

२६

१०२०

३४०

१७) ४४२०

१६) २६०

उत्तर १६१ रु.

रीतीप्रमाणें पहिल्यानें ३ रे पदीं
१०॥मांडून आलीकडे पहिल्या
परिमाणार्ची पदें मांडलीं, त्यांत
८५ मैल पहिले पदीं मांडले,
कारण त्यांचा संबंध तिसरे पदा-
शीं आहे.

उदाहरण दुसरें.

एका गांवचा चिल्हर खर्च १७५० रुपये आहे; त्यांपैकीं
धर्मादायाकडे ६१॥॥॥ द्यावयाचे; तर ह्या मानानें दर रुपयास
काय वांटणी आली ती सांग ?

१७५० रु. : १ रु. : : ३९६६ पाव आणे : उ० } ६१॥॥॥ ह्यांचे
१ } पाव आणे केले.

१७५०) ३९६६ (२

३५००

४६६

} ह्या उदाहरणांत चिल्हर
खर्च जर दुप्पट झाला
तर धर्मादायाकडे पैसा

ही दुप्पट देतां येईल, म्हणून धर्मादायाचा पैसा चिल्हर खर्चाच्या
प्रमाणांत आहे. ६१॥॥॥ हे ३ रे स्थानीं मांडले, व १७५० रु-
पये ह्यांचा संबंध ६१॥॥॥ ह्यांच्याशीं आहे म्हणून ते पहिल्या
स्थानीं मांडले. राहिला १ रु. तो दुसरे स्थानीं मांडिला.

हें उदाहरण नुसत्या भागाकारानेंही होईल, कारण १७५० रुप-
यांस जर ६१॥॥॥ धर्मादायाकडे मिळतात, तर १ रुपयास धर्मा-
दायाकडे ६१॥॥॥ ह्यांस १७५० ह्यांनीं भागून भागाकार येईल
तितकी रकम ल. २. $\frac{३९६६}{१७५०}$ रु. हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. १८ बिघ्यांचें शेत २४॥॥ सारा दिला असतां मिळतें, तर ह्या मानानें ४२ बिघे जमिनीचा सारा किती द्यावा लागेल ?
- २ उ. एका गड्यास वर्षभर चाकरी बद्दल २५ रुपये द्यावें लागतात, तर त्यानें ८५ दिवस काम केल्याबद्दल त्यास काय द्यावें ?
- ३ उ. एका गाडीस ८७ कोसांचें भाडें १॥॥ द्यावें लागतें, तर २॥॥ भाड्यांत गाडी किती लांब जाईल ?
- ४ उ. सुताच्या कारखान्यांत २ अवर ४६ मिन्युटांत, यंत्रानें ५४ पौंड कापूस पिंजून बाहेर येतो; तर २४ पौंड कापूस पिंजून बाहेर येण्यास किती वेळ लागेल ?
- ५ उ. रु. ७०॥१०. दिल्यानें किती एकर जमीन लावणीस मिळेल ? जर ५ एकर जमिनीस ४॥१० पडतात.
- ६ उ. २० बिघे जमिनीस सरकारांत सारा किती द्यावा लागेल ? जर ४४४ बिघ्यांस १४ रु. १४ आ. ३^१/_३ पै. पडतात.
- ७ उ. २५ रुपये भाड्याच्या उत्पन्नास किती घरपटी २॥॥ रुपये पडते, तेव्हां ९५॥१०. भाड्याच्या उत्पन्नास किती घरपटी पडेल ?
- ८ उ. ९५ पौंड, १० शि. ९॥ पेन्स ह्या रकमेवर धर्मादाय खर्च किती मिळेल ? जर ७९१ पौंड, १३ शि. ४ पेन्स ह्यांजवर धर्मादाय खर्चास ३९ पौंड, ११ शि. ८ पेन्स मिळतात.
- ९ उ. एका गांवचें उत्पन्न २०० रुपये आहे आणि चिल्हर खर्चाबद्दल १० रु. ७ आणे ६ पै मिळतात, तेव्हां दर रुपयास किती खर्च बसेल तो सांग.
- १० उ. ज्या घराचें भाडें २५ गिनी आहे, त्यावर गांवदुरस्तीबद्दल ४ पौंड ११ शिलिंग १०॥ पेन्स कर आहे तर घराचें भाडें ६५ पौंड, १० शि. ६ पेन्स येतें त्यावर कर किती बसेल ?

व्यस्त प्रमाण.

कधी कधी दौन महत्वांचा एकमेकांशीं असा संबंध असतो कीं, एक दुप्पट झालें तर दुसरें निमपट होतें. जसें, कांहीं मनुष्ये कांहीं काम कांहीं वेळांत कारतात तर त्यांच्या दुप्पट मनुष्ये तेंच काम अर्ध्या वेळांत करतात हें स्पष्ट आहे. अशा उदाहरणांतही

चार पदें प्रमाणांत असतात परंतु व्युत्क्रम प्रमाणांत असतात असे म्हणावें. पहिले युग्मांतोल पहिले पद दुसऱ्या पदाच्या जितके पद असतें तितकेच पद दुसरे युग्मांतील दुसरे पद पहिले पदाच्या असतें.

मागे जी उदाहरणे दिली त्यांत दोन युग्मांचा संबंध सरळ असें, परंतु सांगितल्या पदांची युग्मे एकमेकांशी व्युत्क्रम संबंध ठेवितात, म्हणून ती व्युत्क्रम रीतीने मांडावी लागतात. म्हणजे सरळ प्रमाणांत जें पद पहिले स्थानी यावयाचें तें ह्या प्रमाणांत दुसऱ्या स्थानी लिहावें लागतें, आणि दुसरे स्थानी यावयाचें तें पहिले स्थानी लिहावें लागतें.

उदाहरण पहिले.

रोज ८ तास प्रमाणे चालून एक वाढसरू ३३ दिवसांनी आपल्या गांवी पोचला. तो जर दररोज ६ तास प्रमाणे चालला असता तर तो आपल्या गांवी कितो दिवसांनी पोचता.

रोज कमी चालता तर त्यास आपले गांवी पोचण्यास अधिक दिवस लागते हें उघड आहे. हें व्यस्त प्रमाण झालें म्हणून १ ले स्थानी ६ तास दुसरे स्थानी ८ तास आणि तिसरे स्थानी ३३ दिवस अशीं पदें आलीं. म्हणून

$$६ \text{ ता.} : ८ \text{ ता.} :: ३३ \text{ दि.} : \frac{८ \times ३३}{६} = ४४ \text{ दि.} \text{ हें उत्तर.}$$

उदाहरण दुसरें.

जर एक कुरण ८४ गाईस १२ दिवस चरण्यास पुरतें, तर ११२ गाई त्याच कुरणांत किती दिवसपर्यंत चरतील तें सांग.

$$११२ \text{ गा.} : ८४ \text{ गा.} :: १२ \text{ दिवस.} : \text{उत्तर.}$$

$$\frac{११२}{१०००} \times १००० (९ \text{ दिवस हें उत्तर.})$$

ह्या उदाहरणांत हें उघड दिसतें कीं, गाईं जर वाढविल्या तर ह्यांस तें कुरण कमी दिवस पुरेल. गाईंच्या उलट प्रमाणांत दिवस आहेत, म्हणून १२ दिवस हे तिसरे स्थानी मांडिले, व त्यांच्या संबंधाच्या ८४ गाई त्या दुसऱ्या स्थानी मांडल्या, आणि ११२ गाई पहिल्या स्थानी मांडल्या.

अथवा ८४ गाई १२ दिवसांत जितके गवत खातात, तितकें गवत ११२ गाई उत्तरा इतके दिवसांत खातील. म्हणून $८४ \times १२ = ११२ \times \text{उत्तर}$,

$$\therefore \text{उत्तर} = \frac{८४ \times १२}{११२} = \frac{१००८}{११२} = ९ \text{ दिवस.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. १०० मनुष्यें १२ दिवसांत जें काम करतात तेंच काम ८ दिवसांत संपवावयाचें आहे, तर किती मनुष्यें लावावीं ?
- २ उ. शत्रूच्या वेढ्यांत सांपडलेल्या किल्ल्यांत दर मनुष्यास दर रोज अडीच शेर प्रमाणें अन्न दिल्यास चार महिनेपर्यंत पुरेल इतकें अन्न आहे, परंतु तें दर मनुष्यास रोज एक शेर प्रमाणें दिल्यास किती दिवस पुरेल तें सांग.
- ३ उ. एका मनुष्याचे मी ३०० रुपये ८ महिने उसने ठेविले होते. पुढें त्यास गरज लागली, तेव्हां त्याचा उपकार फेडावा म्हणून मी त्यास २०० रुपये दिले, तर हे त्याजकडे किती दिवस ठेवावे ?
- ४ उ. जें काम १०८ मनुष्यें २६६ दिवसांत करतात, तें काम १६८ दिवसांत करावयाचें तर किती मनुष्यें लावावीं ?
- ५ उ. कोणी वाढसरू रोज १२ तास चालून ३ आठवड्यांत एका गांवीं पोहोचतो, तो जर रोज ९ ताम चालला तर त्यास त्या गांवीं पोहोचण्यास किती दिवस लागतील ?
- ६ उ. जर ४७ $\frac{१}{२}$ रुपयांच्या, चवलाच्या दराच्या गांठ्या करावयास अर्धा मण साकर लागते, तर तितक्याच साकरेच्या ७० गांठ्या केल्यास एका गांठीची किंमत काय होईल ?
- ७ उ. २७ रुपये बिघा दराची जमीन देऊन ३५ रुपये बिघा दराची ४८० बिघे जमीन घ्यावयाची आहे, तर २७ रुपये दराची जमीन किती बिघे द्यावी ?
- ८ उ. शत्रूच्या वेढ्यांत सांपडलेल्या किल्ल्यांत अन्न दररोज दर मनुष्यास अडीच शेर प्रमाणें दिल्यास तीन महिने पुरेल इतकें आहे, तर तें अन्न आठ महिने पुरविणें झाल्यास दररोज दर मनुष्यास किती द्यावें तें सांग.

मागें जीं उदाहरणें सम आणि व्यस्त प्रमाणांचीं दिलीं त्यावरून शिकणाराचे ध्यानांत आलेंच असेल कीं, प्रश्नांत जीं परिमाणें येतात तीं सरळ रीतीनें किंवा व्युत्क्रम रीतीनें प्रमाणांत आहेत हें गणित

करणारानें पूर्वी पाहिलें पाहिजे. सम आणि व्यस्त या दोन्ही प्रमाणांवर लागू अशी जो प्रश्न मांडण्याची रीति ती पुढें सांगितली आहे.

त्रैराशिकाची रीति.

उत्तराच्या जातीचें दिलेंलें पद किंवा फल ३ऱ्या स्थलीं मांडून, उत्तर किंवा इच्छाफल ४थ्या स्थलीं कल्पावें. नंतर ३ऱ्याचें संबंधीं पद किंवा प्रमाण १ल्या स्थलीं, व ४थ्याचें संबंधीं पद किंवा इच्छा २ऱ्या स्थलीं, अशीं एका नांवाचीं करून मांडावीं. म्हणजे उत्तर महत्वाचीं पदें ३ऱ्या व ४थ्या स्थलीं येऊन, त्याच्या संबंधीं महत्वाचीं पदें १ल्या व २ऱ्या स्थलीं येतील.

नंतर हें मांडिलेंलें प्रमाण सम आहे का व्यस्त आहे तें पहावें. म्हणजे उत्तर महत्व व संबंधीं महत्व यांचा संबंध सम आहे का व्यस्त आहे तें पहावें. व्यस्त असल्यास १लें पद २ऱ्या स्थलीं नेऊन २रें पद १ल्या स्थलीं आणावें, ह्या कृतीनें तें प्रमाण सम होईल. म्हणजे ३ऱ्या पदाचे जितके पद उत्तर येणार असेल तितकेच १ल्या पदाचे पद २रें पद होईल.

उपरांत प्रमाण नि० १ येथील विषेप्रमाणें $\frac{२रेंपद}{१लेंपद}$ ह्या गुणोत्तरानें ३रें पद गुणावें, म्हणजे, उत्तर येईल.

उदाहरण पहिलें.

१०५ फरे मिठास ४ $\frac{११}{१५}$ रुपये पडतात, तर ३ $\frac{३}{५}$ आणे मिठास काय पडेल? १०० फरे = १ आणा.

१०५ फ. : ३ $\frac{३}{५}$ × १०० फ. : : ४ $\frac{११}{१५}$ रु. : उ.

$$\text{उत्तर} = \frac{३ \frac{३}{५} \times १०० \times ४ \frac{११}{१५} \text{ रु.}}{१०५}$$

$$= \frac{११}{३} \times \frac{१००}{१} \times \frac{७१}{१५} \text{ रु.} \times \frac{७}{७५}$$

$$= १६१ \text{ रु. } १५ \text{ आ. } ९ \frac{७}{१५} \text{ पै.}$$

इच्छाफलांक मोठा होतो, सगून हें प्रमाण सम आहे.

उदाहरण दुसरें.

१ $\frac{३}{५}$ पळे अन्न १५ मनुष्यांस एक महिना पुरतें, तर तेंच अन्न १०० मनुष्यांस किती दिवस पुरेल ?

म. म. दि. } अन्न खाणारी मनुष्ये अधिक ज्ञा-
 १०० : १५ :: ३० : उ. } ल्यानें तें अन्न कमी दिवस पुरतें,
 उत्तर = $\frac{१५ \times ३०}{१००} = \frac{४५}{१०}$ } म्हणजे प्रमाणांका पेक्षा इच्छांक
 = ४॥ दिवस. } मोठा झाल्यानें फलांका पेक्षा इच्छा-
 फलांक लहान होतो, म्हणून हें प्रमाण व्यस्त आहे. ह्या करितां
 १५ मनुष्ये २ न्या स्थली नेऊन, १०० मनुष्ये १ ल्या स्थली
 आणून हें प्रमाण सम केले.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. ४० फरे मिठास १७५ रु. ५ आणे ४ $\frac{१}{२}$ पै पडतात, तर २५ फरे मिठास काय झालें ?
- २ उ. २३५ गाईस १२५७॥ किंमत पडते, तर २० गाईस काय पडेल ?
- ३ उ. एका सावकाराचें दिवाळें निघालें, तेव्हां त्याची मालमत्ता विकली तिचे ११८१० रुपये आले, आणि लोकांचें देणें ४७२६५ रुपये होतें, तेव्हां दामाशाईप्रमाणें एक रुपयास काय येईल तें सांग ?
- ४ उ. एका व्यापारांतल्या ३ $\frac{३}{४}$ भागांस जर २७५ रुपये पडतात, तर ४ $\frac{१}{४}$ भागांस काय पडेल ?
- ५ उ. वजनी ५॥२॥७॥ लोखंडास ५९॥ पडतात, तर दोन खंडी लोखंडास काय पडेल ?
- ६ उ. ३७४॥ रुपयांची साकर किती येईल ? जर ८१५॥ वजन साकरेस किंमत १०॥ पडते.
- ७ उ. २३५ रु. ७ आ. ८ पै, उत्पन्नावर कर ५८ रु. १३ आ. ४ पै आहे, तर ह्या मानानें एक रुपयास काय पडेल तें सांग.
- ८ उ. ३१ रु. ४ आ. ११ पै. ह्यांचें ८९ शेर तूप येतें तर ११७ रु. १२ आ. ३ पै. ह्यांचें तूप किती येईल ?
- ९ उ. कैली १५८४८२ बाजरीस किंमत २१५८४८१ पडते, तर ५८३८२ ची बाजरी किती येईल ती सांग ?
- १० उ. जेव्हां दर शेरास ६ आणे प्रमाणें साकरेचा दर होता, तेव्हां १५ आण्यांच्या एका गाठीचें वजन अडीच शेर भरत होतें.

आतां साकरेचा भाव शेराम ५ आणे झाला आहे, तेव्हां त्याच किंमतीच्या एका गांठीचें वजन किती असावें ?

११ उ. कोणी एकानें १,२०,००,००० मेंढरें लोंकरीकरतां पाळलीं आहेत, त्यांपासून प्रतिवर्षीं उत्पन्न किती होईल तें सांग. ११ मेंढरांची लोंकर साडेवारा शेर निघते, व तिचे ८ रुपये १२ आणे येतात.

१२ उ. ३ टन ५ हंड्रेडवेट यांतून १ टन १६ हंड्रेडवेट ३ क्वार्टर १२ ओंस वजा कर. आणि बाकी राहिल तिची १ क्वा. २७ पौंड ह्यांस १ पौ. ७ शि. ६ पेन्स ह्या दरानें किंमत काढ.

१३ उ. एका जाहागीरदाराच्या जमिनीचें उत्पन्न ८०,५०० रुपये आहे, आणि त्यांतून उत्पन्नाचे दर शेंकड्यास १११ = सरकारांत द्यावे लागतात, तेव्हां त्यास वास्तविक उत्पन्न किती ?

१४ उ. ४^३/_४ यार्ड वस्त्रास ५ पौ. १४ शि. ४^१/_४ पेन्स पडतात, तर १२ यार्ड वस्त्रास काय पडेल तें सांग ?

१५ उ. १^३/_३ हात बनातीस १॥ = पडतात, तर, २४॥ हात बनातीस काय पडेल ?

१६ उ. २^३/_३ मण साकरेस ७ गिनी पडतात, तर १७^३/_३ मणांस काय द्यावें ?

१७ उ. जमीन मोजणीची सांखळी ६६ फूट लांब असती, आणि तींत १०० कड्या असतात, त्या प्रत्येक कडीला लिंक झणतात. आतां एका शेताचा बांध २४५६ लिंक लांब आहे, तर त्यांचे फूट किती झाले ?

१८ उ. एका गांवाचें उत्पन्न १५६० रुपये आहे, आणि चिल्हर खर्चाबद्दल त्यांतून २७॥ काढावयाचे आहेत, तर ज्याचें उत्पन्न ५२५ रुपये आहे त्यावर चिल्हर खर्चाची वांटणी काय येईल ती सांग ?

१९ उ. एक सोन्याचा दागिना वजन तोळे १४१२॥; किंमत २१४॥ रुपये असा आहे. तेव्हां दर तोळ्यास काय पडेल ?

२० उ. ४॥-शेरांस दाहा आणे ह्या दरानें १४^३/_४ शेरांस काय पडेल ?

२१ उ. २^१/_४ यार्ड वस्त्रास १॥ = पडतात, तर ५८ हात कापडास काय पडेल ?

- २२ उ. कोणी एकाचें दिवाळें निघालें, तेव्हां त्याचें देणें ३२२५ रुपये होतें, आणि थेंणें १०२० रुपये होतें, तेव्हां दामाशाई प्रमाणें सावकारास दर रुपयास काय मिळेल ?
- २३ उ. $६\frac{२}{३}$ यार्ड मलमलीस १ पोंड ७ शि. $९\frac{१}{२}$ पेन्स पडतात, तर $४\frac{३}{४}$ यार्ड मलमलीस काय पडेल ?
- २४ उ. एका तारवाचे $\frac{३}{४}$ ची किंमत काय द्यावी? जर $\frac{५}{४}$ ची किंमत २५५ रुपये झाली आहे.
- २५ उ. एका गृहस्थानें आपली जिनगी ९८० रुपयांस विकून दर रुपयास $\frac{१}{११}$ देऊन त्यानें आपलें कर्ज फेडलें, तेव्हां त्यास कर्ज किती होतें तें सांग ?
- २६ उ. एक रुपयाचे उत्पन्नानर ८॥ कर आहे, तेव्हां ज्यावर १३६० कर आहे त्याचे उत्पन्न किती तें सांग ?
- २७ उ. ब पासून अनें १७५१ रुपये १०२ दिवसांच्या मुदतीनें घेतले होते, तो उपकार फेडवा म्हणून बला गरज लागली तेव्हां त्यास अनें २१०॥ रुपये उसने दिले, ते त्यानें त्याज-कडे किती दिवस ठेवावे ?
- २८ उ. एका भिंतीस ३१ फूट लांबीचे चिरे ६३३६ आहेत. आतां तितकीच दुसरी भिंत बांधावयाची, परंतु चिरे $२\frac{३}{४}$ फूट लांबीचे आहेत, तर ते किती लागतील तें सांग ?
- २९ उ. एका इमारतीची सावली मोजली ती १४८॥ हात भरली. आतां त्याच वेळेस उन्हांत ६॥ फूट लांबीची काठी उभी केली, तिची सावली ५१ फूट पडली, तेव्हां इमारत किती हात उंच आहे तें सांग ?
- ३० उ. एक धोंडा हातांतून सोडला तो पडत असतां $३\frac{३}{४}$ सेकंदांचे शेवटीं ११५ $\frac{१}{२}$ फूट जाण्याचा वेग त्याचे आंगी होता; ह्यावरून पहिल्या सेकंदाच्या शेवटीं व $४\frac{३}{४}$ सेकंदांच्या शेवटीं त्याचे आंगी कोणकोणते वेग होते तें सांग ?
- ३१ उ. एक बैलाची गाडी दर तासांत ३ मैल प्रमाणें चालत असतां २४ तासांत पुण्याहून कल्याणास पोहोचते. आतां आगीची गाडी दर तासांत ३२ मैल चालते, तेव्हां ती कल्याणास किती वेळांत पोहोचेल तें सांग ?

- ३२ उ. दिल्ली शहरास शत्रूचा वेढा पडला, तेव्हां त्यांत २२४० मनुष्यांस ३ महिने पुरे इतकें अन्न होतें, परंतु वेढा ७ महिने उठत नाहीं असें जर आहे तर त्यांतून किती मनुष्यांस बाहेर लावून द्यावें, म्हणजे बाकीच्यांस तें अन्न पूर्वीप्रमाणें ७ महिने पुरेल?
- ३३ उ. एक चाकर २० दिवसांचे ३॥ रुपये द्यावे अशा करारानें ठेवला, तर १२ रुपयांत त्यापासून किती दिवस काम द्यावें ?
- ३४ उ. १५॥ मण ओझे ६० मैल नेण्यास भाडें १॥ रुपया द्यावें लागतें, तर तितकेच भाड्यांत ३१ मण ओझे किती लांब जाईल?
- ३५ उ. एका गृहस्थास आपल्या ४५०० रुपये वेतनांतून ५२५ रुपये वर्षास शिलक ठेवावयाचे आहेत, तर त्यानें ७३ दिवसांत स्वर्च किती करावा ? वर्ष म्हणजे ३६५ दिवस.
- ३६ उ. विलायतेंत १३^३/_४ टन वजन माल ५०० गिर्नीला घेतला, व तो मुंबईस आणायला ३० रुपये स्वर्च लागला. तेव्हां तो माल मुंबईस किती रुपये शेर विकावा ?
- ३७ उ. १ खंडी ३ म. १५ शे. लोखंड मुंबईहून पुण्यास न्यावयास भाडें १२॥ पडतें. आतां आमची चार लोखंडी यंत्रें वजन २॥३॥४॥ आहेत त्यांस भाडें काय द्यावें लागेल ?
- ३८ उ. एका गृहस्थास ९००० रुपये कर्ज आहे, आणि त्याच्या जिनगीचें उत्पन्न ३५१५॥॥ रुपये झालें. तेव्हां सावकारास दामाशाईप्रमाणें दर रुपयास काय मिलेल, व ज्याचे ७५० रुपये येणें आहेत त्यास तोटा किती येईल तें सांग ?

बहुराशिक.

दुसरी संबंधी महत्वे सारखी असतां उत्तरमहत्त्व एका संबंधी महत्त्वा प्रमाणें बदलतें, तेव्हां तो हिशेब एका त्रैराशिकानें होतो. परंतु दुसरी संबंधी महत्वे सारखी असतां उत्तरमहत्त्व दरएक संबंधी महत्त्वाप्रमाणें बदलतें, तेव्हां तो हिशेब अनेक त्रैराशिकांच्या परंपरेनें होतो. असल्या हिशेबाला बहुराशिक म्हणतात.

उदाहरण- ३० बिघे शेत १० दिवसांत ९ मनुष्यें कापितात, तर ४० बिघे शेत तितकेच दिवसांत किती मनुष्यें कापतील ?

ह्या उदाहरणांत मनुष्यें हें उत्तरमहत्त्व आहे, म्हणजे उत्तराची

जात दारवचिणारें महत्व आहे, आणि विधे व दिवस हीं त्याचीं संबंधी महत्त्वे आहेत (त्रैराशिकाची रीति पहा). त्यांपैकी दोन्ही शेतें कापण्याचे दिवस एकसारखेच १० दिले आहेत, तेव्हां मनुष्यांचा बदल विध्यांच्या सम प्रमाणानें झाला पाहिजे. म्हणून हें उदाहरण एका त्रैराशिकानें होतें. जसें—

३० वि. : ४० वि. : : ९ म. : $\frac{५०}{३०} \times ९ म = १२ म.$ हें उतर.

ह्या उदाहरणांत दिवसही वेगळाले दिले, म्हणजे हें उदाहरण त्रैराशिकांच्या परंपरेचें किंवा बहुराशिकाचें होतें.

उदाहरण— ३० विधे शेत १० दिवसांत ९ मनुष्यें कापितात, तर ४० विधे शेत १५ दिवसांत किती मनुष्यें कापितील ?

ह्या उदाहरणांत दोहीं शेतांचे विधे वेगळाले देऊन, दिवसही वेगळाले दिले आहेत. तेव्हां मनुष्यांचा बदल विध्यांच्या प्रमाणानें काढून, पुनः दिवसांच्याही प्रमाणानें काढिला पाहिजे. अर्थात हा-बदल दोन त्रैराशिकांच्या परंपरेनें काढिला पाहिजे. वरील लक्षणा प्रमाणें प्रथम दोन्ही शेतें कापण्याचे दिवस एकसारखेच १० घेतले, तर ४० विध्यांचीं मनुष्यें १२ येतात (वरचें त्रैराशिक पहा.). उपरांत दोन्ही शेतांचे विधे एकसारखेच ४० घेतले, तर ह्या मनुष्यांचा, बदल दिवसांच्या व्यस्त प्रमाणानें व्हावयाचा ठरतो. म्हणून,

१५ दि. : १० दि. : : १२ म. : $\frac{१०}{१५} \times १२ म = ८ म.$ हें उत्तर.

ह्या त्रैराशिक परंपरेत किंवा बहुराशिकांत दिलेलें उत्तरमहत्त्व किंवा फल ९ मनुष्यें आहे. हें पहिल्या त्रैराशिकाचें ३ रें पद केल्यानें त्याचें ४ थें पद १२ मनुष्यें आलें. हें ४ थें पद दुसऱ्या त्रैराशिकाचें ३ रें पद केल्यानें त्याचें ४ थें पद ८ मनुष्यें आलें. ह्या-प्रमाणें उत्तराचे महत्वांत ९ मनुष्यें, १२ मनुष्यें, व ८ मनुष्यें, ही पदांची परंपरा उत्पन्न झाली. ह्या परंपरेतलें शेवटचें पद ८ मनुष्यें हें ह्या बहुराशिकाचें उत्तर आहे.

आतां प्रमाण नि. १ येथील टिपेप्रमाणें पाहतां ९ मनुष्यें ह्या फलाला $\frac{५०}{३०}$ ह्या पहिल्या सम गुणोत्तरानें गुणून १२ मनुष्यें हें दुसरें पद आणिलें आहे, आणि ह्या दुसऱ्या पदाला $\frac{१०}{१५}$ ह्या सम केलेल्या दुसऱ्या गुणोत्तरानें गुणून ८ मनुष्यें हें उत्तर आणिलें आहे. ह्या व-

रून कोणत्याही बहुराशिकांत संबंधी महत्वांची दिलेली गुणोत्तरे सम केली, आणि त्यांच्या गुणाकाराने फलाला गुणिले, तर उत्तर येईल.

वरच्या बहुराशिकांत विध्यांचें गुणोत्तर ९ म. : उत्तर (म्ह. १२ म.) ह्या गुणोत्तराशी सम केलें आहे आणि दिवसांचें गुणोत्तर १२ म. : उत्तर (म्ह. ८ म.) ह्या गुणोत्तराशी सम केलें आहे. ९ म. : १२ म. व १२ म. : ८ म. हीं उत्तर महत्वांतील क्रमिक पदाची गुणोत्तरे आहेत. ह्यावरून कोणत्याही बहुराशिकांत संबंधी महत्वांची गुणोत्तरे, उत्तरमहत्वांतील क्रमिक पदांच्या गुणोत्तरांशी, अनुक्रमे, सम केली पाहिजेत. उपपत्तीचे दृष्टीने हाच विचार खरा आहे. तथापि बहिवाटीचे दृष्टीने पाहिले, तर संबंधी महत्वांची गुणोत्तरे सम करण्याला उत्तरमहत्वांतील वास्तविक संख्येची गरज नसते तिच्या नांवाची गरज असते. म्हणून वास्तविक संख्येबद्दल दुसरी कोणतीही संख्या घेतली तरी चालते. ह्यामुळे उत्तरमहत्वांचें दिलेले फल व उत्तर ह्यांच्या आधाराने हीं एकंदर गुणोत्तरे सम करितां येतात. म्हणून,

रीति- बहुराशिकांत दिलेली उत्तरमहत्वाची संख्या किंवा फल ३ च्या स्थली मांडून, ४ थ्या स्थली उत्तर कल्पावे. नंतर ह्या पदांच्या गुणोत्तराशी प्रत्येक संबंधी महत्वांचें गुणोत्तर सम होईल, अशा रीतीने त्यांची पदे १ ल्या व २ च्या स्थली, एकाखाली एक मांडावी (त्रैराशिकाची रीति पहा). उपरांत ह्या सम गुणोत्तरांच्या गुणाकाराने ३ रें पद गुणावे, म्हणजे उत्तर येईल.

येथे वरचेंच उदाहरण घेतले, तर या उदाहरणांत शेत अधिक विस्ताराचें असून त्यास कापण्यास काळही अधिक दिला आहे. तेव्हां अतां मनुष्यांचे संख्येचा संबंध, शेताचा विस्तार आणि कापण्यास दिलेला काळ ह्या दोन गोष्टींवर आला. विस्तार वाढला तर मनुष्ये वाढतील. हें सम प्रमाण आहे. परंतु काळ अधिक दिल्याने काम संपविण्यास मनुष्ये कमी लागतील हें व्यस्त प्रमाण झाले. सम प्रमाण सरळ रीतीने व व्यस्त प्रमाण व्यस्त रीतीने मांडले पाहिजे म्हणून.

सं. प्र. ३० बि. : ४० बि. : : } ९ मनुष्यांस. : कितनी मनुष्यें.
व्य. प्र. १५ दि. : १० दि. : :

∴ कितनी मनुष्यें = $\frac{३० \times १० \times ९}{४० \times १५}$ म = ८ म. हैं उत्तर.

उदा. २ रें- ३० बिधे शेत दररोज ६ तास काम करून १० दिवसांत कापून टाकण्यास ९ मनुष्यें लागतात, तर ४० बिधे शेत दररोज ८ तास काम करून १५ दिवसांत कापण्यास कितनी मनुष्यें लागतील?

या उदाहरणांत कामावर लागणारे मनुष्यांची संख्या तीन गोष्टींवर अवलंबून आहे. म्हणजे वरील दोन गोष्टींशिवाय आणखी मनुष्येही दर रोज अधिक काम करू लागलीं तर तें काम पुरें होण्यास मनुष्ये कमी लागतील हे स्पष्ट आहे. म्हणून समव्यस्ताप्रमाणें फिरून हिशेबांतील सर्व पदे मांडलीं तर:-

सं. प्र. ३० बि. : ४० बि. }
व्य. प्र. १५ दि. : १० दि. } : : ९ म. : इच्छिलेलीं मनुष्यें.
व्य. प्र. ८ ता. : ६ ता. }

∴ इ. म. = $\frac{३० \times १० \times ६ \times ९}{४० \times १५ \times ८}$ म = ६ म. हैं उत्तर.

उदा. ३ रें- एक ६०० पत्रांचें पुस्तक १० दिवसांत लिहिण्यास ६ लेखक लागतात; तर १२०० पत्रांचें पुस्तक ४ लेखक कितनी दिवसांत लिहितील.

पुस्तकाचीं पत्रे वाढलीं तेव्हां दिवस अधिक लागतील हे सम प्रमाण. लेखक कमी केल्यानें दिवस अधिक लागतील हे व्यस्त प्रमाण. तेव्हां समव्यस्तांचे अनुक्रमानें उदाहरण मांडून:-

सं. प्र. ६०० प. : १२०० प. }
व्य. प्र. ४ ले. : ६ ले. } : : १० दि. : इष्टदिवस.

∴ इष्टदिवस = $\frac{१२०० \times ६ \times १०}{६०० \times ४}$ दि. = ३० दि. हैं उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. १५ फरे धान्य ९ मनुष्यांस ८ महिने पुरतें, तर २० फरे धान्य ६ मनुष्यांस कितनी दिवस पुरेल ?

२ उ. ६६ रुपये १० आणे दिल्यानें १८ दिवसपर्यंत १६ मनुष्ये काम करतात, तर १९९ रु. १४ आणे दिल्यानें २७ दिवसपर्यंत कितनी मनुष्ये काम करतील ?

- ३ उ. २० मनुष्ये १२ दिवसांत जें काम करतात, त्याचे तिप्पट काम पूर्वीच्या काळाच्या $\frac{1}{4}$ काळांत करावयाचें आहे, तर किती मनुष्ये लावावी ?
- ४ उ. ७ घोड्यांस २० दिवसांत १४० रुपये लागतात, तर २८० रुपये ७ दिवसपर्यंत किती घोड्यांस पुरतील ?
- ५ उ. १४ घोड्यांस १६ दिवसांस गवताचे भारे ५६ लागतात, तर १२० भारे २४ दिवसपर्यंत किती घोड्यांस पुरतील ?
- ६ उ. कागदाच्या ६६ रिमांत ४४ पानांचे बुकाच्या ३००० प्रति छापल्या जातात, तर आम्हांस ५० पानांचे बुकाच्या ५००० प्रति छापवयाच्या आहेत त्यांस रिमें किती लागतील ? एका रिमांत ४८० पाने असतात.
- ७ उ. १२ मनुष्ये ४ महिन्यांत १६० रुपये खर्च करतात, तर ८५३॥ आठ महिनेपर्यंत किती मनुष्यांस पुरतील ?
- ८ उ. ८ मनुष्ये ५ दिवस काम करून ९० रुपये मिळवितात, तर ह्या मानानें ३२ मनुष्यांनी ३४ दिवस काम केलें असतां त्यांस काय मिळेल ?
- ९ उ. १०० रुपयांत ५ मनुष्यांचा खर्च २२ आठवडे आणि ५ दिवसपर्यंत चालतो, तर १२ मनुष्यांस १५० रुपये किती दिवस पुरतील ?
- १० उ. ७ मनुष्ये ९ पौंड १० शि. ६ पे. १०॥ दिवसांत मिळवितात, तर २८ मनुष्ये ३१॥ दिवसांत किती पौंड मिळवितील ?
- ११ उ. २५ मनुष्यांनी १६ दिवस काम केलें असतां त्यांची मजुरी ७६॥ रुपये होते, आतां मजुरीचा दर निम्मे केला तर २४ दिवसांत १०३॥ रुपये मजुरी होण्यास किती मनुष्ये कामावर लावावी ?
- १२ उ. २१ मनुष्ये ७२ बिघे जमिर्नीतील गवत ५ दिवसांत कापतात, ह्या मानानें ४६०॥ बिघे जमिर्नीतील गवत ६ दिवसांत कापावयाचें आहे, तर किती मनुष्ये लावावी ?
- १३ उ. ९ मनुष्यांचे कुटुंबांस १२० रुपये ८ महिनेपर्यंत पुरतात, तर ह्या मानानें २४ मनुष्यांस १६ महिन्यांत किती रुपये लागतील ?

- १४ उ. बैलांच्या १२ जोड्यांनीं ५ दिवसांत ११ एकर शेत नांगरलें, तर ३३ एकर शेत १८ दिवसांत नांगरावयाचें आहे त्यास किती जोड्या लावाव्या ?
- १५ उ. १० रुपये मण साकर होती, तेव्हां ३६ तोळे वजनाच्या गांठीस दोन आणे पडत होते, आतां २४ तोळे वजनाच्या गांठीस दीड आणा पडतो, तर साकरेचा भाव काय असावा ?
- १६ उ. दररोज ८ तास प्रमाणें चालून एक गृहस्थ तीन दिसवांत ६० कोस जातो; तर तोच गृहस्थ दररोज ६ तास चालून ५४० कोस लांब किती दिवसांत जाईल ?
- १७ उ. ३० खंडी गट्टा १५ कोस न्याययास भाडें ५॥० लागतें, तर २९ रुपयांत ८८ खंडी गट्टा किती लांब नेला जाईल ?
- १८ उ. एक मनुष्य १६० मैलांची प्रदक्षिणा, रोज ११ तास चालून ८ दिवसांत संपवितो, तो जर १५ तास रोज चालूं लागला, तर १००० मैलांची प्रदक्षिणा संपावयास त्यास किती दिवस लागतील ?
- १९ उ. एक खंडी हरभरे ९ घोड्यांस १५ दिवस पुरतात, तर ४० घोड्यांस लीप* वर्षातील जानेवारी व फेब्रुवारी ह्या दोन महिन्यांत किती हरभरे लागतील ?
- २० उ. दररोज ८ तास काम करून १८ मनुष्यांनीं २४ दिवसांत ३० यार्ड लांब खाडा खणला, व रोज ६ तासप्रमाणें काम करवून ४० दिवसांत ६० यार्ड लांबीचा खाडा खणावयाचा आहे, तर मनुष्ये किती लावावी ?
- २१ उ. ७ गंवड्यांनीं दररोज ९ $\frac{३}{४}$ तास काम करून २० $\frac{३}{४}$ दिवसांत कांहीं एक काम केलें, तर त्याचे २ $\frac{३}{४}$ इतकें काम करावयास ३ गंवडी दर रोज १२ तास काम करूं लागल्यास त्यांस किती दिवस लागतील ?
- २२ उ. प्रत्येक कांब, ४ फूट लांब, ३ इंच रुंद, व २ इंच जाड

*सन १८८४ सन १८८८ अशा ४ नी भाग जाणाऱ्या वर्षी फेब्रुआरीचे २९ दिवस धरितात. असल्या २९ शी फेब्रुआरीचे वर्षाला लीप वर्ष हें नांव आहे.

अशा लोखंडाच्या चार कांबींचे वजन २८८ पौंड भरते, तर प्रत्येक कांब ६॥ फूट लांब, ४ इंच रुंद आणि ३ इंच जाड अशा १५ कांबींचे वजन किती होईल ?

व्याज.

दुसऱ्याचे रूपये आपण आपल्या कामासाठी घेतल्या बंदल त्या मनुष्यास कांहीं पैसा देण्याचे कबूल करितो त्यास व्याज म्हणतात. व्याजाचा दर बहुधा दरसाल दर शेंकडा अमूक, किंवा दरमाहा दर शेंकडा अमूक असा ठरवितात. जसे आपण कोणा एकाचे १०० रूपये घेतले आणि त्यांबद्दल त्यास दरसाल पांच रूपये देण्याचे ठरविले, तर हे शंभर रूपये दरसाल दर शेंकडा पांच रूपये व्याजाच्या बोलीने घेतले असे म्हणतात.

जी रकम कर्ज घ्यावी तीस मुद्दल, जितके दिवस ती आपणाकडे रहावयाची असत्ये त्या दिवसांस मुदत, मुदतीप्रमाणे व मुदलाप्रमाणे होणारा जो नफा त्यास व्याज, आणि मुद्दल व व्याज मिळून जी रकम होते तीस रास, असे म्हणतात.

व्याजाचे दोन प्रकार आहेत. सरळव्याज आणि चक्रवाढ व्याज.

सरळ व्याज.

मूळचे मुद्दल रकमेचेच व्याज शेवटपर्यंत करतात, त्यास सरळ व्याज म्हणतात.

रीति.— मुदलास मुदत आणि व्याजाचा दर ह्यांनी गुणावे, आणि त्यांस शंभरांनी भागावे, उत्तर येईल ते व्याज झाले.

उदाहरण पहिले.

७२५ रूपये मुदलाचे दरसाल दर शेंकडा ५ रूपये व्याजाप्रमाणे ३ वर्षांचे व्याज काय झाले ?

$\begin{array}{r} \text{रु. } 725 \\ \times 3 \\ \hline 2175 \\ \times 4 \\ \hline 90090075 \\ \hline 90075 \\ \hline 9200 \\ \hline \text{उत्तर } 90075.92 \text{ आ.} \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} 725 \text{ रूपयांचे एक वर्षांचे व्याज का-} \\ \text{ढून त्याची तिप्पट केल्याने जें व्याज येणार} \\ \text{तेच व्याज } 725 \text{ रूपयांचे तिप्पट रूपयांचे} \\ \text{एक वर्षांचे येणार म्हणून } 725 \text{ ह्यांस } 3 \\ \text{ह्यांनी गुणून } 900 \text{ ह्यांनी भागलें.} \end{array} \right\}$
---	---

उदाहरण दुसरें.

२१२॥८ रुपयांचें व्याज दरसाल दरशेंकड्यास २१. रुपये प्र-
माणें २॥ वर्षांचें काय होईल ?

$$\begin{array}{r} २१२॥८ \\ \times २॥ \\ \hline ५२४॥६४ \\ \times २१ \\ \hline १००)१३१५६॥० \end{array}$$

१३६॥६॥सुमारे.

उत्तर. १३ रु. ६॥६॥ आणे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

- १ उ. ५०० रुपये मुदलाचें दर साल दर शेंकडा ५ रुपये प्रमाणें पांच वर्षांचें व्याज किती येईल ?
- २ उ. दर साल दर शेंकडा ४ रुपयेप्रमाणें ३ वर्षांचें ३०५ रुपयांचें व्याज काय होईल ?
- ३ उ. मुदल पौंड ३७५, यांस व्याज दर साल दर शेंकडा ४ पौंडप्रमाणें वर्षे ३ झालीं, व्याज काय येईल ?
- ४ उ. ११३५ रुपयांची रास ४ वर्षांनीं किती होईल, जर व्याजाचा दर तीन रुपयेप्रमाणें आहे.
- ५ उ. १२४५ रुपयांचें १५ वर्षांचें व्याज दर साल दर शेंकडा ४^३ रुपयेप्रमाणें किती होईल ?
- ६ उ. २००० पौंडांची १२^१ वर्षांनीं रास किती होईल, जर व्याज दर साल दर शेंकडा ३^१ पौंडप्रमाणें आहे.
- ७ उ. दर साल दर शेंकडा ३^३ रुपये व्याजाप्रमाणें ८^३ वर्षांनीं ५७५ रुपयांची रास किती होईल ?
- ८ उ. ५॥ वर्षांनीं ३२५॥ रुपयांचें व्याज दर साल दर शेंकडा ५॥ रुपयेप्रमाणें किती होईल ?
- ९ उ. ५०० पौंड १३ शि. ४ पे. ह्यांचें २^३ वर्षांचें २^३ पौंडप्रमाणें व्याज किती होईल ?

१० उ. १५० रुपये मुदलाचें दर साल दर शेंकडा ४ रु. प्रमाणें
 $३\frac{१}{२}$ वर्षांचें व्याज काय द्यावें ?

सूचना- मुदतींत वर्षें महिने व दिवस हे असले तर त्यांस
 व्यवहारी अपूर्णाकांत वर्षांचें रूप देऊन उत्तर वर सांगितल्याप्र-
 माणें काढावें. अथवा वर्षें, महिने व दिवस ह्यांचें व्याज निरनिराळें
 करून मग त्यांची बेरीज घ्यावी.

उदाहरण.

३२५ रुपयांचें व्याज, सन १८४१ चे मार्च महिन्याचे पहि-
 ले तारखेपासून सन १८४४ च्या मे महिन्याचे ३१ वे तारखेपर्यंत
 कितती होईल तें सांग. व्याज दर साल दर शेंकडा ४ रुपयेप्रमाणें
 आहे. तारीख १ व तारीख ३१ ह्या दोन्ही हिशेबांत धरावयाच्या.

ह्या उदाहरणांत मुदत ३ वर्षे ९२ दिवसांची आहे.

रु. ३२५

४

१००) १३००

१३ रु. एक वर्षांचें व्याज.

×३

३९ रु. तीन वर्षांचें व्याज.

रु. आ. पै.

३९ ० ० — तीन वर्षांचें व्याज.

३ ४ ५ — ९२ दिवसांचें व्याज.

४२ ४ ५ एकंदर व्याज.

दि. दि. रु.

३६५ : ९२ :: १३

१३ रु. आ. पै.

३६५) ११९६ (३ ४ ५ $\frac{४७}{३६५}$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. दर साल दर शेंकडा $४\frac{१}{२}$ रुपयेप्रमाणें ५०० रुपयांचें व्याज,
 सन १८५१ चे मार्च महिन्याचे १ ले तारखेपासून १८५३
 तील जानेवारीच्या ९ तारखेपावेतो करून एकंदर रास काय
 होईल ती सांग.

२ उ. ७५०० रुपयांची रास, मेच्या ५ वे तारखेपासून २६ आ-
 क्टोबर पावेतो, दर साल दर शेंकडा ३८० प्रमाणें काय होईल?

- ३ उ. ११५८॥३॥ ह्यांची, सन १८४० च्या मार्च महिन्याचे २६ वे तारखेपासून १८४२ च्या आक्टोबर महिन्याचे ३० वे तारखेपर्यंत रास, शेंकडा २॥ रुपयेप्रमाणें व्याज केल्यानें किती होईल ?
- ४ उ. मुद्दल रुपये ३५४७।८, व्याजाचा दर २॥६, चार वर्षे आणि २२५ दिवस झाले, व्याज किती होईल ?
- ५ उ. ३ वर्षे ११० दिवसांचें व्याज २२५॥० रुपयांचें दर साल दर शेंकडा १३६॥० प्रमाणें, किती तें सांग.

चक्रवाढ व्याज.

दर वर्षास अथवा ठरविलेल्या मुदतीस व्याजाचा हिशेब करून तें व्याज मुदलांत मिळवितात आणि ती रकम दुसऱ्या वर्षाचे, किंवा मुदतीचे व्याजास मुद्दल धरतात; अशा रीतीनें जें व्याज होतें त्यास चक्रवाढ व्याज म्हणतात.

रीति.- दर एका वर्षाचें, किंवा ठरविलेल्या मुदतीचें व्याज करून तें मुदलांत मिळवावें, आणि ती रकम दुसऱ्या वर्षाचे, किंवा मुदतीचे व्याजास मुद्दल धरावी, ह्याप्रमाणें सर्व मुदत संपेपर्यंत करावें. शेवटीं येईल ती रास येईल, तीत मुद्दल वजा करावें, ह्मणजे बाकी व्याज राहिल.

उदाहरण.

दर साल दर शेंकडा ४ रुपयेप्रमाणें ७५० रुपयांचें ३ वर्षांचें चक्रवाढ व्याज काय झालें ?

पहिले वर्षास मुद्दल ७५०

$$\begin{array}{r} 900 \end{array}) 3000$$

३० व्याज.

दुसरे वर्षास मुद्दल. ७८० = ७५० + ३०

४

$$\begin{array}{r} 900 \end{array}) 3120$$

३१ रु. ३ आ. २.४ पै.

वरील उदाहरणांत १.०५ हा अंक १ रुपयाची १ वर्षाची रास दाखविणारा असून, त्यावरील घात २ व ३ हे वर्षे दाखविणारे आहेत. ह्या वरून १ रुपयाची कितीही मुदतीची रास चक्रवाढ व्याजानें काढणें असली, तर १ रुपयाची १ मुदतीची रास काढावी, आणि तींतील अंकाचा त्या मुदती इतका घात करावा; म्हणजे येणारा घात ह्या राशींतील रुपयांची संख्या दाखवील.

आतां मुद्दल २ पट झालें तर रास २ पट होते. ह्या वरून मुद्दल कितीही पट झालें, तरी रास तितकेच पट होईल हें उघड आहे. म्हणून दुसरी रीति.— सांगितले दराप्रमाणें एक रुपयाचें व्याज एका मुदतीस करावें, आणि त्यांत तो मुद्दल एक रुपया मिळवावा. नंतर मुदतीच्या संख्येइतका त्याचा घात करून त्यास मुदलानें गुणावें, तो गुणाकार रास येईल. नंतर त्यांत मुद्दल वजा करावें, बाकी राहिल तें चक्रवाढ व्याज समजावें.

उदाहरण.

दर साल दर शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें ३० रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज काय होईल ?

१०० रु. : १ : : ५ रु.

५

१००) ५ (.०५ रु. व्याज.

१.०५ एक रुपयाची एक वर्षाची रास.

१.७५

१.१०२५ वर्ग.

१.७५

१.१५७६२५ घन.

× ३० मुदलानें गुणिलें.

३४.७२८७५० रास.

— ३० मुद्दल वजा केलें.

३४.७२८७५० व्याज.

१६

११.६६००००

१२

७.९२ रु. आ. पै.

उत्तर. ११ ७.९२

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

- १ उ. दर साल दर शेंकडा २॥ रुपयेप्रमाणें चक्रवाढ व्याजानें ९५॥ = ह्यांची रास २ वर्षांनीं काय होईल ती सांग.
- २ उ. दर साल दर शेंकडा व्याज ४ रुपयेप्रमाणें चक्रवाढ व्याजानें ३० रुपयांची रास तीन वर्षांनीं किती होईल ती सांग.
- ३ उ. दर साल दर शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें १३४१ रुपये १२ आणे ह्यांचें दोन वर्षांचें सरळ व्याज व चक्रवाढ व्याज ह्यांत अंतर किती पडेल ?
- ४ उ. ५५०० रुपये मुदलाचें दर साल दर शेंकडा सहा रुपयेप्रमाणें तीन वर्षांचें सरळ व्याज व चक्रवाढ व्याज ह्यांत अंतर किती पडेल तें सांग ?
- ५ उ. दर साल दर शेंकडा ४ रुपये व्याजाप्रमाणें ३५८ रुपयांचें चार वर्षांचें चक्रवाढ व्याज किती होईल ?
- ६ उ. ३०० पोंडांचें ३ वर्षांचें चक्रवाढ व्याज, दर साल दर शेंकडा २ $\frac{२}{३}$ पोंडप्रमाणें किती होईल ?
- ७ उ. दर महा दर शेंकडा ९ आणे व्याजाप्रमाणें हजार रुपयांचें १० वर्षांचें चक्रवाढव्याज व सरळव्याज किती होईल तें सांग ?
- ८ उ. ५७ रुपयांचें सव्वा वर्षांचें दर महा दर शेंकडा तेरा आणेप्रमाणें चक्रवाढ व्याज काय होईल ?
- ९ उ. १३२॥ = चें दर महा दर शेंकडा चौदा आणेप्रमाणें २ वर्षे ३ महिने सात दिवस ह्यांचें चक्रवाढ व्याज किती होईल ?
- १० उ. दर साल दर शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें ३७०० रुपयांचें ६ वर्षांनीं चक्रवाढ व्याजानें व्याज व मुद्दल मिळून किती रुपये होतील ?
- ११ उ. कोणीएकाने एकापासून ६०० रुपये दरसाल दर शेंकडा चार रुपये व्याजानें घेतले, त्याची मुदत सात वर्षांची होती, परंतु त्यानें १ वर्षांनीं २०० रुपये परत केले, व पुढें ३ वर्षे गेल्यावर १५० रुपये परत केले; तेव्हां ह्यारकमांचें व्याज वजा होऊन मुदतीस त्याजकडे चक्रवाढ व्याजानें एकंदर बाकी किती निघेल ?

व्याजाच्या हिशेबांत मुद्दल, व्याजाचा दर, मुदत, व्याज आणि रास, ह्यांतून कोणतीही तीन दिली असता त्यांपासून बाकीची दोन काढता येतात. मागे जी उदाहरणे दिली ती, मुद्दल, दर, व मुदत ह्यांपासून व्याज काढण्याचीच दिली आहेत, कारण त्या प्रकारचेच हिशेब व्यवहारांत बहुत येतात. आता त्याशिवाय दुसऱ्या कांहीं प्रकारची सरळ व्याजाची उदाहरणे सांगतो.

मुद्दल, व्याज किंवा रास, आणि दर, ह्यांपासून मुदत काढावयाची.

उदाहरण.

२१५ रुपये \ll आ. ह्यांचे, दर साल दर शेंकडा ६। रुपये प्रमाणे ६७।॥ व्याज होण्यास मुदत किती असावी ?

$$\begin{array}{r} २१५॥ \text{ मुद्दल} \\ \times ६। \\ \hline १००)१३४६॥ = \\ \underline{१३.४६॥} \\ \times १६ \\ \hline ७.५० \end{array}$$

रु. व्या.	रु. व्या.	वर्ष.
१३।॥	: ६७।॥	: : १
	१	
१३।॥) ६७।॥	(५
		वर्षे हें उत्तर.

रु.

१३।॥ वर्षांचे व्याज.

व्याजाचा दर, मुदत आणि व्याज किंवा रास ह्यांपासून मुद्दल काढावयाचे.

उदाहरण.

दर साल दर शेंकडा चार रुपयेप्रमाणे, पांच वर्षेपर्यंत किती रुपये ठेविले झणजे १०० रुपये व्याज उत्पन्न होईल ?

दर शेंकडा ४ रुपये व्याजाचा दर आहे तेव्हां १०० रुपयांचे पांच वर्षांचे व्याज २० रुपये होईल झणून,

रु. व्या.	रु. व्या.	रु. मु.	रु. मु.
२०	: १००	: : १००	: ५००
			हें उत्तर.

मुद्दल, मुदत, आणि व्याज किंवा रास ह्यांपासून व्याजाचा दर काढावयाचा.

व्याजाचा दर, मुदत, आणि रास हीं दिली असता मुद्दल काढावयाचे.

रीति.-व्याजाच्या दिलेल्या दराप्रमाणें दिलेल्या मुदतीपर्यंत एक रुपयाची रास किती होत्ये तें पाहावें. नंतर या एक रुपयाच्या राशीनें दिलेल्या राशीचे रकमेला भागावें. भागाकार इच्छिलेल्या मुदलाबरोबर येईल.

उदा. कांहीं मुद्दल रकमेची दर साल दर शेंकडा ५ रु०. व्याजाप्रमाणें दोन वर्षांनीं ५५१ रु. ४ आणे रास होत्ये. तेव्हां मुद्दल रुपये किती असावे.

दिलेल्या व्याजाच्या दराप्रमाणें १ रुपयाची.

१ वर्षाची रास १००५ होत्ये.

२ वर्षाची ११०२५ होत्ये.

सगून, मुद्दल = $\frac{५५१ \cdot २५}{१ \cdot १०२५} = ५००$ हें उत्तर.

उदाहरण.

५०० रुपये मुदलाची ५ वर्षांनीं ६०० रुपये रास होति. तेव्हां व्याजाचा दर काय ?

६०० रु. रास आणि ५०० रु. मुद्दल, तेव्हां १०० रु. व्या.

५ वर्षांचें झालें, व एक वर्षांचें २० रुपये झालें सगून,

रु. मु. रु. मु. रु. व्या. रु. व्या.

५०० : १०० :: २० : ४ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. २ $\frac{१}{२}$ वर्षांत १०२॥ रुपयांचें १२॥ व्याज होण्यास व्याजाचा दर काय लावावा ?

२ उ. दर साल दर शेंकडा ६॥ रुपयेप्रमाणें एका वर्षांत रास ४५६ होण्यास मुद्दल काय आसवें ?

३ उ. ४९८ रु. १२ आणे त्यांचें व्याज १०॥ रुपये होण्यास मुदत किती असावी? व्याजाचा दर वरच्या प्रमाणेंच आहे.

४ उ. १४६ दिवसांत २०० रुपयांचें व्याज ४॥ रुपये होण्यास व्याजाचा दर काय असावा ?

५ उ. दर साल दर शेंकडा ५॥ रुपये व्याजांनै ७३२॥ मुदलाचें सव्याज रु. १७०९॥ होण्यास किती वर्षे लागतील ?

- ६ उ. दर साल दर शेंकडा ४^३/_४ रु. व्याजाप्रमाणें ४९ रुपये व्याज दरसाल उत्पन्न होण्यास मुद्दल काय असावें ?
- ७ उ. ४१२७ रुपयांचें व्याज एका वर्षांत ९२॥०० होण्यास व्याजाचा दर काय असावा ?
- ८ उ. मुद्दल किती रुपये असले म्हणजे २ वर्षे १ महिन्यांत, ५^३/_४ रु. व्याजाच्या दरानें १२१ रु. १३ आणे ४ पै, व्याज उत्पन्न होईल ?
- ९ उ. व्याजाचा दर कोणता लावावा म्हणजे २२०॥०० मुद्दलाचे एक वर्षांत सव्याज रु. २४०६०००॥०० होतील ?
- १० उ. ४१९ रुपये मुद्दलाचे सव्याज ४८६॥०० रुपये, दर साल दर शेंकडा ४६०० प्रमाणें होण्यास मुद्दत किती असावी ?
- ११ उ. ३ वर्षे ७३ दिवसांत दर साल दर शेंकडा ६^१/_४ रुपयेप्रमाणें १०६०० व्याज होण्यास किती रुपये मुद्दल असावे ?
- १२ उ. शेंकडा ४॥०० रुपयेप्रमाणें ८१२॥०००० मुद्दलाचें ७७१॥०००००००० व्याज होण्यास मुद्दत किती असावी ?

व्याजाचा दुसरा प्रकार.

मुद्दत भरण्याच्या पूर्वी कोणापासून पैसा परत घ्यावयाचा झाला, म्हणजे जें त्यास द्यावें लागतें त्यास कापून दिलेलें किंवा कट मित्याचें व्याज म्हणतात.

उदाहरण. अशी कल्पना कर कीं, ५२५ रुपये शेंकड्याप्रमाणें राघोपंतानें विद्यारामभाई शेटास वर्षाचे अंती ५२५ रुपये द्यावयाचे आहेत. आतां राघोपंताची इच्छा आज कर्जमुक्त होण्याची असली, तर त्यानें आज ५०० रुपये दिल्यानें काम होईल; कारण ते ५०० रुपये व्याजी लावले तर वर्षाच्या अंती त्यांचे ५२५ रुपये होतील. म्हणून विद्यारामभाईस आपल्या कुळाकडून आज रुपये मिळत आहेत तर तो त्यास २५ रुपये व्याजाबद्दल सोडील.

पुढे कांहीं काळ गेल्यानंतर जी रकम द्यावी लागणार, तिची तूर्त किंमत म्हटली म्हणजे ती रकम रास समजून तीतून तितक्या काळाचें व्याज कापून बाकी राहते ती, असें समजावें.*

*लोक व्यवहारांत ह्याप्रमाणें करीत नाहींत; व्याज कापण्याचे वेळेस कागदांतल्या रकमेचें व्याज करतात, तिचे आजचे किंमतीचें व्याज करीत

वरच्या उदाहरणांत ५२५ रु. वर्षाच्या अंती द्यावयाचे त्याची आज किंमत ५०० रुपये आहे. भरमुदतीस होणारी रकम, आणि तिची आजची किंमत, यांत जें अंतर त्यास कापलेलें व्याज म्हणतात.

व्याज कापण्याचे प्रसंग बहुधां हुंडी, कर्जरोखा, वगैरे ज्यांत रकम, आणि ती देण्याची मुदत, हीं लिहिलीं असतात, असें प्रकारचे शहाजोग कागदांचा पैसा मुदत भरण्याच्या अगोदर घेणें झालें म्हणजे व्याज कापण्याचा प्रसंग येतो.

२ उदा. चैत्र शु० १ देस एकानें सावकारास असा रोखा लिहून दिला होता कीं, आजपासून ११ महिन्यांनीं तुजला रोख ५०० रु. देऊन हा कागद सोडवून नेईन परंतु त्या गृहस्थास कार्तिक व० १२ शीस कागद सोडून घेण्याची ऐपत आली; तर दर साल दर शेंकडा ४ रु. व्याजाप्रमाणें, सावकारानें किती व्याज कापून घेऊन त्याचे हवाली कागद करावा. वर्षाचे दिवस ३६० धरावे.

खुलासा; कार्तिक व० १२ पासून फाल्गुन शु० १ पर्यंत ९४ दिवस होतात. तेव्हां इतके दिवसांचें व्याज त्याणें ५०० रुपयांत कमी करून सावकारानें गृहस्थास त्याचा कागद परत द्यावा.

१०० रुपयांचें ३६० दि. व्याज ४ रु. आहे. तर ९४ दि. व्याज $\frac{९४}{३६०} = \frac{४७}{१८०}$ होईल. $१०० + \frac{४७}{१८०} = \frac{१८०४७}{१८०}$ ही रास झाली. म्हणून $\frac{१८०४७}{१८०}$ या राशीला जर $\frac{४७}{१८०}$ व्याज, तर ५०० रु. किती व्याज होईल तें काढलें म्हणजे $\frac{५०० \times १८०}{१८०४७} = ५०२.०५॥$ पै इतकें येतें; म्हणून

नाहींत, ह्यामुळें व्याज अधिक कापलें जाऊन आपणांस जी रकम मिळावा तिजपेक्षा कमी मिळते.

वरील उदाहरणांत ५ रुपये शेंकड्याप्रमाणें व्याजासुद्धां वर्षाच्या अंती ५२५ रुपये द्यावयाचे, त्यांची आज किंमत ५०० रुपये आहे. कारण ५०० रुपयांचें व्याज एका वर्षाने २५ रुपये होऊन ५२५ रु. रास होणार. तेव्हां व्याजाबद्दल २५ रु. मात्र कापले जावे, परंतु व्यवहारांत व्याज कापतांना ५२५ रुपयांचें व्याज २६१ रुपये कापतात, ह्यामुळें घेणारास सवा रुपया तोटा होतो.

पुढें जीं उदाहरणें दिलीं आहेत, त्यांत वास्तविक रीतीनें जितकें व्याज कमी करावयाचें तितकेंच कमी केलें आहे.

न सावकारानें ५०० रु.— ५८२८५॥=४९४८१३८६॥ घेऊन त्या गृहस्थास त्याचा कागद परत द्यावा.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

- १ उ. साडेतीन वर्षांनीं १५१ पोंड १७ शि. ६ पे. मिळावयाचे, अशा रोख्याचे दर साल दर शेंकडा ५ पोंडप्रमाणें व्याज कमी करून आज रोख पैका घेतला, तर किती पोंड व्याज कापलें जाईल ?
- २ उ. ४ वर्षांनीं ५९८ रुपये ९ आणे मिळावयाचे, असें खत दर साल दर शेंकडा ५३ रुपयेप्रमाणें व्याज कमी करून देणें आहे, तर त्याची आज किंमत किती व्हावी ?
- ३ उ. एक वर्ष ११५ दिवसांनीं रु. ५९८॥॥= एकास द्यावयाचे आहेत, ते दर साल दर शेंकडा ५ रु. प्रमाणें व्याज कमी करून तो आज मागेल तर त्यास किती रुपये द्यावे ?
- ४ उ. ३॥ वर्षांनीं २१०॥॥= मिळावयाचे, अशा रोख्याची आज किंमत करणें झाल्यास दर साल दर शेंकडा ७८८ प्रमाणें किती कमी होईल ?

पुढील रोख्यांच्या मुदती भरण्याच्या पूर्वी त्यांचा पैसा घेतला तर प्रत्येक रकमेचें व्याज किती कापलें जाईल ?

रोख्याची मिति व मुदत.	मुदतीनंतर पैसा एकंदर मिळावयाचा तो.	मुदतीचे पूर्वी पैसा घेतल्याची मिति व व्याजाचा दर.
चांद्रवर्षाचें मान ३६० दि० धरावें. इंग्रजी मानाचें वर्ष ३६५ दि० धरावें.		

५ उ. { चैत्र शुद्ध १५ मुदत ८ महिन्यांची.	रु. ३३७॥.	भाद्रपद वद्य १२. ५ रु. शें. प्र.
६ उ. { आश्विन वद्य ४ मु- दत ३ महिन्यांची.	रु. १२३८८८	मार्गशीर्ष वद्य १. ३ रु. शें. प्र.
७ उ. { वैशाख शुद्ध ३ मुद- त १ महिन्याची	रु. ८१२॥=	वैशाख वद्य १३. ६ रु. शें. प्र.
८ उ. { ता. ६ मार्च मुदत ७ महिन्यांची.	पों. शि. पे. ४१९ १२ १	ता. १५ सप्टेंबर. ५ पों. शें. प्र.
९ उ. { ता. १२ सप्टेंबर मु- दत ५ महिन्यांची.	५०३ १० ६	ता. १६ ज्यानेवारी ४ पों. शें. प्र.

१० उ.	{ ता. ३० एप्रिल मुदत ९० दिवसांची	१२५८.१६-	३	ता. २२ जून. ४ पौं. शें. प्र.
११ उ.	{ ता. ५ आगस्त मुदत ५ महिन्यांची.	रु. पा. आ.	११५ ३ २	ता. ३ दिसेंबर. ३॥ रु. शें. प्र.
१२ उ.	{ ता. २५ दिसेंबर मु- दत २ महिन्यांची.	१८४६	१ १	ता. ८ फेब्रुवारी. ६ रु. शें. प्र.
१३ उ.	{ ता. ३१ मे मुदत ४ महिन्यांची.	१६७०	३ ३	ता. ३ सप्टेंबर. ४ रु. शें. प्र.

विमा, कमिशन वगैरे.

व्याजाप्रमाणे दुसरे कित्येक व्यवहार शेंकड्यावर चालतात, म्हणजे विमा, कमिशन, दलाली, इत्यादिक. असे प्रकारचे हिशेब सरळव्याजाच्या हिशेबाप्रमाणेच करावयाचे असतात.

व्याज. म्हणजे आपले कामास रूपये घेतले असता त्यांचें दर शेंकड्यास ठरविलेले दराप्रमाणे जें द्यावयाचें तें.

विमा. म्हणजे अग्नि, नदीचा पूर इत्यादि अनर्थापासून आपले मालमत्तेचा नाश झाला तरी, आपलें नुकसान न व्हावें म्हणजे मालमत्तेची किंमत परत मिळावी, ह्यासाठी त्या मालाच्या किमतीवर दर शेंकडा अमुक रूपये द्यावे असा जो ठराव असतो तो. ती मालमत्ता ज्या प्रकारची असेल त्याप्रमाणे अथवा तिजवर जे जे प्रसंग येणार त्यांप्रमाणे विम्याचा दर कमजास्ती असतो. विम्याबद्दल जो पैसा देणें आकारतो त्यास विमा स्वर्च म्हणतात. मालाचा नाश झाला असता सावकाराकडून मालाची किंमत भरून मिळावी. याविषयी जोकायदेशीर कागद होतो त्यास विमेरोखा म्हणतात.

जिवाचा विमा. म्हणजे आपल्या पश्चात् आपल्या वारसास अमुक रकम मिळावी, ह्यासाठीं जिवंतपणीं दर वर्षास दर शेंकडा अमुक रूपये द्यावे, असा जो ठराव असतो तो. ह्या विम्याचा दर मनुष्याचें वय, प्रकृति अशक्त किंवा सशक्त, रोगी किंवा निरोगी, इत्यादि गोष्टी पाहून त्यांवर ठरविलेला असतो. ठरावाच्या रकमेचा आकार होईल तो, विमा देणारास दर वर्षास भरावा लागतो, तो जर एकादे वर्षी देण्याचा चुकला तर लागलाच विमा बुडतो.

तारवाचा विमा व अग्नीपासून मालाचें संरक्षण होण्यासाठी दिलेला विमा इत्यादि विम्यांचा पैसा एकदां दिला म्हणजे झालें, दर वर्षास द्यावा लागत नाहीं.

कमिशन. म्हणजे मालाचे खरेदीवर किंवा विक्रीचे रकमेवर शेंकडा अमुक रुपये द्यावे, असा जो ठराव असतो तें. ब्यास दलाली किंवा अडत असेंही म्हणतात.

कित्येक व्यापारांत मालाचा पैसा रोख दिला, म्हणजे व्यापारी लोक शेंकडा कांहीं एका दरानें किंमत कमी करतात, त्यास कसर, सूट, किंवा डिस्काउंट म्हणतात.

उदाहरण.

शेंकडा ३० रुपये प्रमाणें एका तारवाचा, त्यांतील मालासुद्धां विमा देणें आहे, तर विमेवाल्यास काय मिळेल? तारू व माल मिळून २२२५ रुपये किमतीचा आकार आहे.

२२२५

३१

१००) ७२३११

रु. ७२१- हें उत्तर.

उदाहरण दुसरें.

२८ वर्षांचें बय आहे त्या वेळेस आम्हांस ३७५ रुपयांचा जिवाचा विमा करणें आहे, व त्या वयाला विम्याचा भाव दर साल दर शेंकडा २॥ रुपये आहे, तेव्हां विमेवाल्यास आम्हीं दर साल काय द्यावें तें सांग.

३७५

२॥

१००) ९३७॥

९१= रु. हें उत्तर.

उदाहरण तिसरें.

७३५° रुपये किमतीच्या मालाचा विमा देणें आहे, परंतु मा-

लाचा नाश झाला तर मालाची किंमत विमा भरलेल्या पैशासुद्धां मिळावी, असें मनांत आहे, तर विमा देतेवेळेस किती रुपयांचा द्यावा ? विम्याचा दर दर शेंकडा ४ रुपये आहे.

द्व्यांत १०० रुपयांचे विम्यांत ९६ रुपये मालाचे आणि ४ रु. पये विम्याचे म्हणून.

$$९६ \text{ रु.} : ७३५० \text{ रु.} : : १०० \text{ रु.} : ३०$$

$$\text{उत्तर.} = ७६५६ \text{ रु. } १ \text{ पावला.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

- १ उ. एका घराची किंमत ५५१६॥ रुपये आहे, त्याचा विमा देणें झाल्यास काय द्यावें लागेल ? विम्याचा दर, शेंकडा ३ $\frac{१}{२}$ रुपयेप्रमाणें आहे.
- २ उ. ४२ वे वर्षीं कोणाएकास आपले जिवाचा विमा २२८६ रुपयांचा देणें आहे, आणि द्या वयाला विम्याचा दर, शेंकडा ३॥ रुपये आहे. तर त्यास दर साल काय द्यावें लागेल ?
- ३ उ. ४२७॥० किंमतीच्या मालाचा विमा देणें आहे, परंतु माल भरून देण्याचा प्रसंग आल्यास, विम्याबद्दल भरलेला पैसाही मिळावा, असें मनांत आहे, तर किती रकमेचा विमा द्यावा ? विम्याचा दर, शेंकडा ३ $\frac{३}{४}$ रुपये आहे.
- ४ उ. २८७॥० किंमतीचा माल घेतला, त्याचा रोख पैसा दिल्यास शेंकडा ५ रुपये कमी होतात, तेव्हां रोख पैसा देणें झाल्यास किती द्यावा ?
- ५ उ. २७३७॥ रुपयांचीं मोर्त्ये घेतलीं, त्याबद्दल शेंकडा १॥० प्रमाणें दलालीचा आकार काय होईल ?
- ६ उ. शेंकडा ७ $\frac{३}{४}$ रुपयेप्रमाणें ७५१२ रुपयांच्या मालाचा विमा देणें आहे, परंतु मालाचा नाश वगैरे झाल्यास त्याची किंमत व विम्याबद्दल भरलेला पैसा हीं दोन्ही परत मिळावीं असें आहे, तर विमाखर्चाबद्दल आज किती पैसा भरावा ?

ठेव.

व्यापान्याचे अथवा सरकारचे पेढीवर जो पैसा ठेवावा त्यास ठेव म्हणतात. व्यापान्यास अथवा सरकारास ज्याप्रमाणें पैशाची

गरज असेल त्याप्रमाणें ते त्या ठेवीचें व्याज आपणास कमी किंवा जास्ती देतात.

अशी कल्पना कर की, सरकारास ५००० रुपयांची गरज आहे; आणि तितके रुपये लोकापासून दर साल दर शेंकडा ४ रुपये व्याजांनै त्यांनी घेतले. त्यांत अ चे ५०० रुपये आहेत; तर सरकारी पेढीवर अ ची ४रुपये शेंकड्याची ५०० रुपये ठेव आहे, असें म्हणतात. ह्या ठेवीबद्दल मालकास सरकारांतून एक रोखा मिळतो, त्यांत सरकारची इच्छा कर्जमुक्त होण्याची हौईपर्यंत त्यास त्या ठेवीबद्दल दर साल व्याज अमुक रुपये मिळेल असें लिहिलें असतें.

व्यापारांत व्याजाचा दर जर नेहमी एकसारखा असता तर ५०० रुपयांच्या ठेवीचे रोख्याची किंमत नेहमी सारखी राहिली असती—(म्हणजे ५०० रु.); परंतु गरजेप्रमाणें किंमत, म्हणून ठेव ठेवल्यानंतर तिची किंमत, ती ठेव ठेवण्याचे पूर्वीचे किंमतीपेक्षां कमी किंवा जास्ती होत्ये. तसेंच व्यापाराच्या व्यवस्थेंत फेरफार, बढतीचा व्यापार, लढाईचा प्रसंग, व्यापाराच्या अडचणोमुळें पैशाचा खप अधिक असेल किंवा कमी असेल, इत्यादि अनेक कारणांनी रोख्याची किंमत बदलते. कित्येक प्रसंगां एका दिवसांत दोन तीन वेळ देखील फेरफार होतो. सारांश, दुसरे कडे व्याज कमी किंवा जास्ती मिळण्याचा संभव असेल, त्याप्रमाणें रोख्यांच्या किंमती बदलतात.

उदाहरण.

आपणास ४ रुपये शेंकडा व्याजाचा १०० रुपयांचा एक रोखा बिकावयाचा आहे आणि त्या वेळेस बाहेर व्याजाचा दर दर शेंकडा ५ रुपये आहे, तर आपलें शेंकडा ४ रुपये व्याज मिळण्याच्या १०० रुपयांच्या रोख्याचे १०० रुपये कोणी देणार नाहीं. ५ रुपये शेंकड्याप्रमाणें ८० रुपयांचें व्याज ४ रुपये होतें, म्हणून १०० रुपयांचा रोखा ८० रुपयांस जाईल. असें झालें म्हणजे ४रुपये शेंकड्याची ठेव ऐशींच्या भावानें जात आहे असें म्हणतात-

पुढें जीं उदाहरणें दिलीं आहेत त्यांवरून वर सांगितलेला प्रकार चांगला समजेल, व ठेवीचे हिशेब कसे होतात हेंही लक्षांत येईल.

उदाहरण पहिलें.

जर ३५०० रुपये देऊन एक ठेव दर शेंकडा ३॥ रुपये व्याजाची अठ्याण्णवच्या भावानें घेतली, तर वर्षास व्याजाचें उत्पन्न काय होईल तें सांग.

येथें ९८ रुपयांचें व्याज ३॥ रुपये येतें असें झालें.

म्हणून $\frac{३५००}{९८} \times ३॥ =$ वर्षाचें उत्पन्न $= १२५$ रुपये. हें उत्तर.

उदाहरण दुसरें.

३॥ रुपये व्याजाचे हिस्से ९९ $\frac{१}{२}$ भावानें विकत आहेत, तर किती पैसा भरला ह्मणजे वर्षास १४० रुपये व्याज उत्पन्न होईल ? शंभर रुपयांचा एकेक हिस्सा आहे.

$\frac{१४०}{३॥}$ इतके हिस्से विकत घेतले पाहिजेत, आणि प्रत्येक हिस्शास ९९ $\frac{१}{२}$ रुपये पडतात, म्हणून,

$\frac{१४०}{३॥} \times ९९\frac{१}{२} = ३९९५$ रुपये भरावें लागतील. हें उत्तर.

उदाहरण तिसरें.

३॥ रुपये व्याजाची ९९ भावानें जाणारी २९००० रुपयांची ठेव विकून ९० $\frac{१}{२}$ ह्या भावाची ३ रु. व्याजाची ठेव घेतली तर व्याजाच्या उत्पन्नांत भेद किती पडेल ?

२९००० रुपयांच्या ठेवीचे ३॥ रु. शेंकड्याप्रमाणें १०१५ रु. व्याज येईल. व २९००० रुपयांची ठेव ९९ भावानें दिली तर तिचे $\frac{२९००० \times ९९}{१००} = २८७१०$ रुपये येतील, व हे तीन रु. व्याजाच्या ठेवींत घातले तर $\frac{२८७१०}{९०\frac{१}{२}} \times ३ = ९५०$ रु. ६ $\frac{२}{३}$

आगे व्याज येईल. म्हणून पूर्वीपेक्षां ६४ रु. ९ $\frac{३}{३}$ आगे तोटा होईल. हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. ८२ $\frac{१}{२}$ भावानें विकणारी १०० रुपयांची ठेव आपले नांवें करून ठेवण्यास किती रुपये द्यावे लागतील, व तीच ठेव शेंकडा ८६ $\frac{१}{२}$ भावानें विकल्यास किती नफा होईल ?

२ उ. ३ रुपये व्याजाच्या दराच्या ठेवीतून ७२ भावानें जाणारे ५०० रुपयांची ठेव काढून ते रुपये ९० च्या भावाचे ४ रु. व्याजाच्या ठेवींत घातले तर व्याजाच्या मिलकरितां भेद किती पडेल ?

- ३ उ. ३ रुपये व्याजाच्या दराची ठेव जेव्हां $७४\frac{3}{4}$ भावानें जात होती तेव्हां तिजपैकी ३००० रुपये किंमतोची ठेव आम्हीं आपले नांवें केली तर वर्षांत व्याजाची मिळकत काय होईल?
- ४ उ. ४ रुपये व्याजाच्या दराची ठेव $९२\frac{1}{2}$ भावानें जात होती तेव्हां पेढीवर १११० रुपये ठेविले होते. आतां आम्हांस १०० रुपये नफा व्हावा अशी इच्छा आहे, तर ती ठेव कोणते दरानें विकावी?
- ५ उ. $२७६६\frac{1}{2}$ रुपये ठेवीचा रोखा २४९० रुपयांस विकत मिळत आहे, तर ठेवीचा भाव काय आहे तो सांग.
- ६ उ. ४९४ रुपयांस, शेंकडा $९२\frac{1}{2}$ भावाची ठेव किती रुपयांची मिळेल? ठेव घेण्यास कमिशन शेंकडा आठ आणि द्यावें लागतें.
- ७ उ. $९०\frac{1}{2}$ भावानें पेढीवरचे सालीना ८५० रुपयांचा रोखा विकत घ्यावयाचा आहे आणि दलाली शेंकडा ८० पडते, तर न्या रोख्याबद्दल किती रुपये रोख द्यावे लगतील? व पुढें तोच रोखा ८९॥ भावानें विकलातर तोटा किती होईल?
- ८ उ. एक ८९॥ रुपये भावाची ३ रुपये व्याजाची ठेव आहे, व दुसरी $९८\frac{1}{2}$ भावाची ३॥ रुपये व्याजाची ठेव आहे, तेव्हां नफा कोणते ठेवांत होईल, तें सांग?
- ९ उ. ८१ भावानें जाणारे ३ रुपये व्याजाचे ठेवीसार्थी ११८८ रुपये भरले तर किती रुपयांची ठेव विकत मिळेल आणि व्याजाचें उत्पन्न काय होईल.
- १० उ. मुंबईत कापसाचे कारखान्याचे भांडवलान्त, प्रत्येक हिस्सा ५०० रुपयांचा असे आमचे १० हिस्से आहेत; शेंकडा व्याजाचा दर ६ रुपये आहे. आतां हे हिस्से ९८ भावानें जात आहेत; तेव्हां आम्हांस येथील ठेव काढून रेलवे कंपनीच्या कारखान्यांत ठेवायाची आहे, तेथील व्याजाचा दर ५ रुपये आहे व ते हिस्से शेंकडा ११० भावानें मिळत आहेत, तर असे करण्यांत नफा किंवा तोटा किती होईल व दर साल व्याज काय मिळेल तें सांग.
- ११ उ. एका कारखान्यांत ४६५० रुपये देऊन ९३ भावाचा आणि ३॥ रुपये शेंकडा व्याजाचा एक रोखा विकत घेतला.

आतां त्या रोख्याचा भाव \angle आणे उतरला आहे. तेव्हां तो रोखा विकल्यास तोटा किती होईल ?

- १२ उ. दरसाल ५०० रुपये व्याज उत्पन्न होण्याकरितां ३॥ रुपये व्याजाच्या दराच्या ९४। चे भावाच्या नोटी किती रुपयांच्या घ्याव्या ?
- १३ उ. एका मनुष्याजवळ ३००३ रुपये आहेत, त्यानें त्यांच्या ३॥ रुपये शेंकडा व्याजाच्या दराच्या चलदेजी नोटी ४९॥ रुपये भावाने घेतल्या, तेव्हां त्यास वर्षाची प्राप्ति काय होईल ?
- १४ उ. शेंकडा ३ रुपये व्याजाच्या दराच्या बंगालचे नोटीचा भाव $\angle ९\frac{३}{४}$ रुपये होता, तेव्हां कांहीं रुपयांच्या नोटी विकत घेतल्या, व पुढे सहा महिन्यांनी त्यांचे व्याज घेऊन ९४ $\frac{५}{४}$ रुपये भावाने विकल्या, तेव्हां व्याजासुद्धां एकंदर ५४ रुपये नफा झाला. तेव्हां आरंभी किती रुपये दिले होते ते सांग.
- १५ उ. एका गृहस्थाने १८१५० रुपये एका कारखान्यांत घातले, तेव्हां शेंकडा ३ रुपये व्याजाच्या हिशांचा भाव $\angle ९$ रुपये होता, पुढे त्याने हे हिस्से विकून दुसरे हिस्से शेंकडा ३॥ रुपये व्याजाचे ९७॥ भावाने घेतले, तेव्हां वर्षास व्याज अधिक किती मिळू लागले ते सांग.

नफातोटा.

कोणतेही व्यापारांत नफा किंवा तोटा हातो तो कसा काढावा, हे पुढील उदाहरणांवरून लक्षांत येईल.

उदाहरण पहिले.

कळावतू १॥ रुपया तोळ्याप्रमाणे ३६ रुपयांची घेतली, आणि १॥० रु. तोळ्याप्रमाणे विकली, तर नफा काय होईल ?

दर तोळ्यास दिलेल्या किमतीवर १० नफा आहे म्हणून,

$$१॥०.रु. : ३६ रु. :: १०.रु. : \frac{३६ \times १०}{१॥} = \frac{९६०}{१॥} = ६ रु.$$

उदाहरण दुसरे.

पोलादाची एक कांब एक रुपया दोन आण्यांनी शेराप्रमाणे घे-

तली आणि शेंकडा ५ रुपये तोट्याने विकली, तेव्हां दर शेरास काय भावाने विकली गेली ते सांग.

ह्यांत ज्या कांबोस १०० रुपये पडले ती ९५ रुपयांस विकली, असे झाले म्हणून,

$$१०० \text{ रु.} : १०० \text{ रु.} :: ९५ \text{ रु.} : \frac{९५ \times १०० \text{ रु.}}{१००} = ९५ \text{ रु.}$$

उदाहरण तिसरे.

९५ रुपयांस १२५ वार कापड विकले, तर शेंकडा ५ रुपये नफा होतो. तेव्हां कापडाची मूळची किंमत काय?

१०५ रुपये आले असते तर मूळची किंमत १०० असती म्हणून.

$$१०५ \text{ रु.} : ९५ \text{ रु.} :: १०० \text{ रु.} : \frac{९५ \times १०० \text{ रु.}}{१०५} = ९० \frac{१०}{२१}$$

रुपये हे उत्तर.

उदाहरण चौथे.

कापड १ रुपया ४ आण्यांनी वारप्रमाणे विकल्यास शेंकडा ४ रुपये तोटा होतो, तेव्हां ते कोणते दराने विकले असतां १० रुपये नफा होईल?

पहिल्याने १०० रुपयांचे कापड ९६ रुपयांस दिले असे मानले तेव्हां,

$$९६ \text{ रु.} : १ \text{ रु.} ४ \text{ आ.} :: १०० \text{ रु.} : \text{दर वाराची मूळ किंमत} = १ \text{ रु.} ४ \frac{१}{२} \text{ आ.}$$

नंतर १०० रुपयांचे कापड ११० रुपयांस विकले असे मानले, तेव्हां १०० रु. : १ रु. ४ $\frac{१}{२}$ आ. : : ११० रु. : दर वाराची किंमत = १ रु. ६ $\frac{१}{२}$ आणे. हे उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

- १ उ. दर मर्णा ५॥ रुपयेप्रमाणे बदाम घेतले, तर ते कोणते दराने विकले म्हणजे शेंकडा २० रुपये नफा होईल?
- २ उ. तांदूळ एक पल्ल्यास आठ रुपयेप्रमाणे घेतले, आणि ९ रुपयांनी पल्ला विकले, तर शेंकडा नफा काय होईल?
- ३ उ. जमिनीपासून लोखंड काढण्यास दर मर्णा ४ रुपये खर्च लागतो; तर ते लोखंड ४ रुपये १० आण्यांनी मण विकल्यास दर शेंकडा किती नफा होईल?

- ४ उ. एका दुकानदारानें साकर दर मर्णां १०॥० प्रमाणें विकली तींत त्यास शेंकडा १२॥ रुपये नफा झाला; तेव्हां खरेदीचा दर काय तो सांग?
- ५ उ. एके गृहस्थाचा एका तारवांत १ विभाग आहे. त्या तारवाची किंमत ६६००० रुपये आहे, आणि त्याचा विमा शेंकडा ९१ रुपयेप्रमाणें दिला आहे. आतां हें तारूं जर फुटलें किंवा दुसऱ्या कोणी कारणानें त्याचा नाश झाला, तर त्या गृहस्थास बूड काय येईल?
- ६ उ. कोणी ग्रंथकारानें एका ग्रंथाच्या ५०० प्रती छापून त्या दर प्रतीस २॥ रुपयेप्रमाणें विकल्या, त्यांत त्यास ३७७॥ रुपये नफा झाला, व विकण्याबद्दल कमिशन ३४ रुपये द्यावें लागलें. तेव्हां प्रती छापण्यास खर्च काय लागला तो सांग ?
- ७ उ. कोणीएकानें तांदूळ दर पल्ल्यास ८॥० प्रमाणें विकले, त्यांत त्यास शेंकडा ५॥ रुपये नफा झाला. आतां ते जर त्यानें दोन आण्यांनीं शेर विकले असते तर शेंकडा नफाकिती झाला असता ?
- ८ उ. दर रुपयास ८८२॥ प्रमाणें, व ८८३ प्रमाणें ह्या दोन जातींचें सारख्या किंमतीचें तूप घेऊन एकत्र करून दर रुपयास ८८२॥९ प्रमाणें विकलें; तेव्हां त्यास शेंकडा नफा काय झाला ?
- ९ उ. दोन आण्यांनीं शेर व तीन आण्यांनीं शेर ह्या दोन प्रतीच्या साकरापैकी पहिली ५ शेर व दुसरी ८ शेर घेऊन एकत्र करून तें मिश्र २॥ आण्यांनीं शेर विकलें, तर शेंकडा तोटा काय होईल ?
- १० उ. एका गृहस्थानें कागदार्ची ५० रिमें खरेदी केली, आणि त्यांवर शेंकडा ८ रुपये नफा व्हावा, ह्या हेतूनें प्रत्येक रीम ११॥ रुपयांस विकण्याचा बेत केला. परंतु पुढें पाहतो तो त्यांतून ५ रिमें अगर्दी खराब निघाली. तेव्हां तीं खेरीज करून बाकीची रिमें त्यानें ११॥ रुपयेप्रमाणें विकली, तेव्हां त्यास नफा किंवा तोटा किती झाला तें सांग.

- ११ उ. एका बोहण्याने टांचण्यांचे १५० कागद २॥। रुपये को-
डीप्रमाणे घेतले, त्या वेळेस प्रत्येक कागदावर दर ओळीत
१८ टांचण्यांप्रमाणे ७ ओळी होत्या; नंतर त्याने प्रत्येक ओ-
ळीत ११ टांचण्या ठेवून ते सर्व कागद घेतलेल्या किमतीस
विकले, तेव्हां त्यास दर शेंकडा नफा काय झाला ते सांग.
- १२ उ. एका व्यापाऱ्याने बाजरीच्या ४ गाड्या १५० रुपयांस
खरेदी केल्या आणि मुदलावर शेंकडा १२ रुपये नफा व्हा-
वा अशा बेताने ती बाजरी तो विकणार होता, परंतु पुढे त्या-
स आढळले की, २१ रुपयांची बाजरी अगदी खराब झाली,
तेव्हां ती खेरीज करून बाकीचे बाजरीवर वरच्या दराने
नफा किती होईल ?

प्रमाणभाग अथवा सर्कतवांटणी.

ह्या प्रकरणांत जी रीत सांगितली आहे त्या रीतीने अनेक प्र-
कारचे हिशेब सोडविता येतात.

कृत्य. एका संख्येचे असे दोन भाग करावयाचे की, त्यांचे
गुणोत्तर दिलेल्या गुणोत्तराबरोबर येईल.

रीति.— प्रमाणाच्या संख्या अंश कल्पून त्यांची बेरीज त्या अ-
शांस छेद लिहावी, आणि दिलेल्या संख्येचे ह्या अपूर्णाकां एवढाले
भाग घ्यावे.

उदाहरण पहिले.

७५ ह्या संख्येचे दोन भाग कर असे की, ते २:३ ह्या प्रमाणांत येतील.

$२ + ३ = ५$ म्हणून $\frac{२}{५}$ आणि $\frac{३}{५}$ हे अपूर्णाक आले.

आतां $७५ \times \frac{२}{५} = ३०$ हा एक भाग.

व $७५ \times \frac{३}{५} = ४५$ हा दुसरा भाग.

उत्तर. ३० आणि ४५.

उपपत्ति—ह्या उदाहरणावरून वर सांगितलेल्या रीतीचे कारण
स्पष्ट समजेल. ते असे की, जर अंशांची बेरीज छेदांबरोबर आहे,
तर त्या अपूर्णाकांची बेरीज, १ आहे. अर्थात आलेल्या भागांची
बेरीज सर्व रकमेबरोबर आहे. आणि समच्छेद जे अंश ते सां-
गितल्या भागांच्या प्रमाणांत आहेत.

उदाहरण दुसरें.

बंदुकीच्या दारूमध्ये ७६ भाग सोरा, १४ भाग कोळसा आणि १० भाग गंधक असतो. आतां आम्हांस एक मण दारू करावयाची आहे, तर प्रत्येक पदार्थ किती किती घालावा तें सांग.

$$७६ + १४ + १० = १००$$

$$\frac{७६}{१००} = \frac{१९}{२५}; \frac{१४}{१००} = \frac{७}{५०}; \frac{१०}{१००} = \frac{१}{१०}; १\text{ मण} = ४० \text{ शेर.}$$

$$\text{म्हणून } ४० \times \frac{१९}{२५} = \frac{१५२}{५} = ३० \frac{२}{५} \text{ शेर सोरा.}$$

$$४० \times \frac{७}{५०} = \frac{२८}{५} = ५ \frac{३}{५} \text{ शेर कोळसा.}$$

$$४० \times \frac{१}{१०} = \frac{४०}{१०} = ४ \text{ शेर गंधक.}$$

उदाहरण तिसरें.

१०००, रु. अ, ब, क, ह्या तीन असांर्मीस वांटून दे. ते असे कीं, कला जे मिळतील त्यांपेक्षां त्यांचा तृतीयांश बला अधिक, आणि बला मिळतील त्यांपेक्षां त्यांच्या अर्धानें अला अधिक, तेव्हां प्रत्येकास काय मिळेल तें सांग.

कचा भाग १ अशी कल्पना केली तर बचा भाग $१\frac{१}{३}$ आणि अचा $१\frac{१}{३} + १\frac{१}{३}$ चा $\frac{१}{२} = २$ होईल म्हणून,

२, $१\frac{१}{३}$, १, अथवा ६, ४, ३ ह्या प्रमाणांत तिघांचे भाग येतील. तेव्हां $\frac{६}{१३}$, $\frac{४}{१३}$, $\frac{३}{१३}$ हे प्रमाणाचे अपूर्णाक येतील,

$$\left. \begin{aligned} \text{आणि अचा भाग } १००० \times \frac{६}{१३} &= ४६१ \frac{७}{१३} \text{ रु.} \\ \text{बचा भाग } १००० \times \frac{४}{१३} &= ३०७ \frac{१}{१३} \text{ रु.} \\ \text{कचा भाग } १००० \times \frac{३}{१३} &= २३० \frac{१०}{१३} \text{ रु.} \end{aligned} \right\} \text{हें उत्तर.}$$

उदाहरण चौथें.

अ, ब, क, ह्या तिघांनीं सर्कतीनें व्यापार केला. त्यांत अचे ५०० रु. बचे ६५० रु. आणि कचे ७०० रु. असे होते, पुढें एका वर्षांनें त्या व्यापारांत ५५५ रुपये नफा झाला, तो त्या तिघांस कसा वांटून द्यावा ?

भांडवलाप्रमाणें नफ्याची वांटणी व्हावयाची म्हणून, तो ५००, ६५०, ७००; अथवा १०, १३, १४ ह्या प्रमाणांत होईल. म्हणून,

$$\left. \begin{array}{l} \text{अची वांटणी. } ५५५ \times \frac{१०}{३७} = १५० \text{ रु.} \\ \text{बची वांटणी. } ५५५ \times \frac{१३}{३७} = १९५ \text{ रु.} \\ \text{कची वांटणी. } ५५५ \times \frac{१२}{३७} = २१० \text{ रु.} \end{array} \right\} \text{हे उत्तर.}$$

उदाहरण पांचवे.*

अने ८०० रु. घेऊन व्यापारास आरंभ केला, नंतर तीन महिन्यांनी त्या व्यापारांत १००० रु. देऊन ब मिळाला. पुढे त्या व्यापारांत ६ महिन्यांनी ३३० रु. नफा झाला, तो उभयतांस कसा वांटून द्यावा? ह्या व्यापारांत अचे ८०० रु. ९ महिने होते, व बचे १००० रुपये ६ महिने होते.

आतां ८०० रुपयांचा ९ महिन्यांचा नफा = ८०० × ९ रुपयांचा नफा एका महिन्याचा आहे, तसेंच १००० रुपयांचा ६ महिन्यांचा नफा = १००० × ६ रुपयांचा एका महिन्याचा नफा आहे. म्हणून अ आणि ब ह्यांचे नफे ८०० × ९ आणि १००० × ६, म्हणजे ७२०० आणि ६०००, ह्या प्रमाणांत अथवा ६, आणि ५ ह्या प्रमाणांत येतील.

$$\text{म्हणून. } \left\{ \begin{array}{l} \text{अची वांटणी } ३३० \times \frac{६}{११} = १८० \text{ रु.} \\ \text{बची वांटणी } ३३० \times \frac{५}{११} = १५० \text{ रु.} \end{array} \right\} \text{हे उत्तर.}$$

६ उ. अने ५०० रुपये, आणि बने ३०० रुपये घेऊन दोघांनी सर्कतीने व्यापार आरंभिल्यावर ९ महिन्यांनी त्या व्यापारांत क १००० रुपये देऊन मिळाला. पुढे ९ महिन्यांनी पहातात तो त्या व्यापारांत २००० रुपये नफा झाला, तो तिघांस कसा वांटून द्यावा ?

ह्या प्रमाणांत ५ व्या उदाहरणाप्रमाणे अ, ब, क, ह्यांचे नफे ५०० × ९, ३०० × ९, १००० × ९ ह्या प्रमाणांत अथवा ५, ३, ५ ह्या प्रमाणांत आहेत, म्हणून $\frac{५}{१३}, \frac{३}{१३}, \frac{५}{१३}$, हे प्रमाण अपूर्णाक आले.

* या उदाहरणांवरून लक्षांत येईल कीं, व्यापारांत वेगळाल्या काळीं ज्या रकमा ध्याव्या त्या रकमा आणि काळ ह्यांचा गुणाकार करावा लागतो. गुणाकार करण्यापूर्वी रकमा आणि काळ ही दोन्ही एका एका नांवाची करावी.

अचा भाग $२००० \times \frac{५}{१३} = ७६९$ रु. ३ आ. $\frac{८}{१३}$ पै.

बचा भाग $२००० \times \frac{५}{१३} = ४६१$ रु. ८ आ. $\frac{७}{१३}$ पै.

कचा भाग $२००० \times \frac{५}{१३} = ७६९$ रु. ३ आ. $\frac{८}{१३}$ पै.

२००० . . . ० . . . ०

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. १०६५ ह्या संख्येचे तीन भाग कर. असे कीं, ते ३, ५, ७ ह्या प्रमाणांत येतील. तसेंच आणखी तीन भाग कर असे कीं, ते $\frac{१}{३}, \frac{१}{५}, \frac{१}{७}$ ह्या संख्यांच्या प्रमाणांत येतील.
- २ उ. अ, ब, क, ह्या त्रिवर्गीनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, त्यांत प्रत्येकाचें भांडवल अनुक्रमानें १२८० रुपये, १७६० रु. आणि १९२० रु. ह्याप्रमाणें होते. पुढें त्या व्यापारांत त्यांस तीन वर्षांनीं ७९१ रुपये नफा झाला, तो त्यांस कसा वांटून द्यावा ?
- ३ उ. १५३० रुपये ५ मनुष्यांस वांटून दे. असे कीं, ते भाग $\frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५}, \frac{१}{६}$, आणि $\frac{१}{७}$ ह्या प्रमाणांत घेतली.
- ४ उ. ९६ कशी सोने ४ तोळे घेऊन तें ९० कशी ५ तोळे सोन्यांत मिळविलें, त्या मिश्राचा एक दागिना साडेचार तोळे वजन आहे, तेव्हां त्यांत शुद्ध सोने किती आहे ते सांग.*
- ५ उ. एक तोफ २॥३ वजनाची ओतावयाची आहे, तर तिच्या मिश्र धातूंत तांबें व कथील किती किती घालावें? तोफेच्या धातूंत १०० भाग तांब्यास ११ भाग कथील असतें.
- ६ उ. सुती रुपयांत ३७ भाग रुपें आणि ३ भाग तांबें असतें असें म्हटलें तर एक रुपयांत शुद्ध रुपें किती असेल तें सांग. रुपयाचें वजन साडे अकरा मासे आहे.
- ७ उ. अ आणि ब ह्यांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, त्या व्यापारांत त्यांचीं भांडवलें ५ : ४ ह्या प्रमाणांत होती. पुढें तीन महिन्यांनीं आपल्या भांडवलाचे अनुक्रमें $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{३}{४}$ त्यांनीं त्यांतून काढून घेतलें, आणि वर्षाच्या अंती पाहतात तों त्या व्यापारांत त्यांस ३३५ रुपये नफा झाला, तो त्यांनीं कसा वांटून द्यावा तें सांग.

*शुद्ध सोने १०० कशी मानले आहे.

- ८ उ. ९० कशी सोनें ८ तोळे, आणि ९२ कशी सोनें ९ तोळे हीं दोन्ही दुसऱ्या कस माहीत नाहीं अशा प्रकारच्या ६ तोळे सोन्यांत मिळविर्ली, आणि त्या मिश्र सोन्यास कस ८८ आला, तेव्हां सहा तोळे सोनें कोणते कसाचें होतें तें सांग.
- ९ उ. १४०० ह्या संख्येचे असे चार भाग कर कीं, १, २, ३, ४ ह्या संख्यांत जें प्रमाण आहे, तें प्रमाण त्या भागांत येईल.
- १० उ. अ, ब, क, ह्यांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, तेव्हां त्यांचीं भांडवले $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{४}$ ह्या प्रमाणांत होती, पुढे ४ महिन्यांनीं अ नें आपल्या द्रव्याचा $\frac{१}{२}$ त्यांतून काढून घेतला, आणि ९ महिन्यांत एकंदर २०० रुपये नफा मिळाला तो वांटून घेऊन त्यांणीं व्यापार सोडला, तेव्हां प्रत्येकास नफा किती झाला तो सांग.
- ११ उ. विलायतेंत बंडुकीच्या दारूंत ७५ भाग सोरा, १० भाग गंधक, आणि १५ भाग कोळसा, ह्याप्रमाणें दहन असतें व फ्रान्स देशांतील दारूंत ७७ भाग सोरा, ९ भाग गंधक, आणि १४ भाग कोळसा, ह्याप्रमाणें दहन असतें. आतां दोन्ही देशांतील दारू अर्धा अर्धा मण घेऊन एकत्र केली, तर त्या मिश्रांत सोरा, गंधक व कोळसा किती होईल तें सांग.
- १२ उ. आठवड्यांतील रविवार खेरीज करून बाकीच्या दिवसांत अ दर रोज ९ तास काम करितो, आणि ब पहिले दोन दिवस खेळतो, आणि बाकीच्या चार दिवसांत दर रोज काम ६। तास, ८। तास, १०।। तास, आणि १२ तास, ह्याप्रमाणें करतो, असें एका महिन्यांत त्या उभयतांनीं मिळून ११६।। रुपयांचें काम केलें, तेव्हां प्रत्येकास काय मिळालें तें सांग.
- १३ उ. मद्रास इलाख्यांतील मोहोरांचें सोनें ९० कसी असतें व एका शेरांत २४ मोहरा भरतात, तेव्हां १०० मोहोरांत शुद्ध सोनें किती आहे तें सांग.
- १४ उ. अ आणि ब ह्या उभयतांनीं मेंढ्या चारण्याकरतां एक कुरण एक वर्षाच्या बोलीनें २७५ रुपयांस घेतलें. त्यांत आरंभी अ नें ८० मेंढ्या घातल्या आणि ब नें १०० घातल्या

पुढें सहा महिन्यांनीं प्रत्येकानें आपआपल्या अर्ध्या मेंढ्या विकल्या, आणि त्या कुरणांत क च्या ५० मेंढ्या घेतल्या, तेव्हां वर्षाचे अंती प्रत्येकानें काय घ्यावें तें सांग.

- १५ उ. पाणी दोन वायूंच्या मिश्रणापासून होतें, व त्या मिश्रणांत ८८९ भाग आक्सिजन आणि १११ भाग हैद्रोजन असतो, तेव्हां एक घनफूट पाण्यांत म्हणजे १००० ऑस पाण्यांत हे दोन्ही वायु किती असतील तें सांग.
- १६ उ. ३००० रुपये अ, ब, क ह्या तिघांस वांटून दे, ते असे कीं, अला बच्या दुप्पट, आणि कला, अ आणि ब ह्यांच्या बेरजेच्या दुप्पट, तेव्हां प्रत्येकास किती येईल तें सांग.
- १७ उ. ८०, ८५, ९० आणि ९५ ह्या चार कसांचें सोनें अनुक्रमें १०, ४, २ आणि ४, तोळे घेऊन एकत्र केले, तर तें मिश्र सोनें कोणते कसांचें होईल ?
- १८ उ. वरील मिश्र सोन्याची लगड, सोनें शुद्ध होण्याकरितां १७ तोळे राहीपर्यंत जाळले, तर त्या बाकीचे सोन्यास कस काय लागेल, अथवा जर जाळून बाकी राहिलेल्या सोन्याचा कस ९८ आला, तर सोनें किती जळून गेलें तें सांग.
- १९ उ. एका विहिरींतिल गाळ काढावयास अ, ब, क ह्या तिघांस बोलाविलें, परंतु पांढ्या दोनच होत्या म्हणून पहिल्यानें अ आणि ब कामास लागले, त्यांत अ एका घटकेत ३७ पांढ्या गाळ काढी, आणि ब ४० पांढ्या काढी, ह्याप्रमाणें पांच घटका काम केल्यावर पुढें ते प्रत्येक दर घटकेस यांच पांढ्या गाळ कमी काढूं लागले, ह्याप्रमाणें ५ घटका गेल्यावर अ थकला, तेव्हां क एकटा कामास लागला, तो एक घटकेत ३० पांढ्या काढी, ह्याप्रमाणें काम करून २२ घटकांत त्यांनीं सर्व गाळ काढला. त्या मजुरीबद्दल त्यांस ६॥ रुपये मिळाले, तेव्हां प्रत्येकानें काय घ्यावें तें सांग.
- २० उ. अ आणि ब ह्या उभयतांनीं पांचपांचशें रुपये घेऊन सर्कतीनें व्यापार आरंभिला. पुढें तीन महिने झाल्यावर अनें आपल्या भांडवलतांन २०० रुपये काढून घेतले, आणि बनें २००

६० आपल्या भांडवलांत घातले, व पुढें आणखी तीन महिने गेल्यावर पुन्हा त्याचप्रमाणें केलें आणि वर्षाच्या अखेरीस हिशेव पाहतात तों व्यापारांत बूड येऊन ४०० रुपयांचा माल शिलक राहिला, तो त्यांस वांटून घेणें आहे तर प्रत्येकास किती येईल तें सांग.

मागें सांगितलेल्या प्रकारच्या उदाहरणांशिवाय जीं दुसऱ्या प्रकारचीं उदाहरणें पुढें प्रश्नसमुदायांत सांगितलीं आहेत त्या जातीचीं कांहीं उदाहरणें खालीं करून दाखविलीं आहेत.—

उदाहरण पहिलें.

अ पुण्याहून नगरास जावयास निघाला, तो दर तासांत २ कोस चालतो, व त्याच वेळेस ब नगराहून पुण्यास यावयास निघाला, तो दर तासांत ४ कोस चालतो, तेव्हां किती तासांनीं व किती किती कोस चालल्यावर उभयतांची भेट होईल तें सांग. पुणें व नगर ह्यांच्या मध्यें अंतर ४२ कोस आहे.

उभयतांमधील अंतर दर तासांत $४+२=६$ कोस कमी होतें म्हणून $\frac{४२}{६}=७$ इतक्या तासांनीं अंतर नाहीसें होऊन ते एकमेकांस भेटतील, आणि तितक्या वेळांत अ १४ कोस जाईल, व ब २८ कोस जाईल.

उदाहरण दुसरें.

अशी कल्पना कर कीं, दोघेही पुण्याहून नगरास जावयास निघालें; परंतु अ, बच्या अगोदर, ३ तास निघाला आहे. तेव्हां त्यांची गांठ केव्हां व किती कोसांवर पडेल तें सांग.

दोघांमधील अंतर दर तासांत $४-२=२$ कोस कमी होतें, व ब निघाला तेव्हां त्यांच्यामध्ये अंतर ६ कोस होतें तें नाहीसें करावयास बला ३ तास लागतील, आणि तितक्या काळांत तो १२ कोस चालेल.

उत्तर. } ३ तासांनीं
 } १२ कोसांवर

उदाहरण तिसरें.

एका हौदास दोन नळ आहेत, त्यांत एक नळ २५घटकांत हौद

रिकमा करतो, व दुसरा ४५ घटकांत तो भरितो. आतां हौद भरला होता तेव्हां पहिल्याने पाणी जाण्याचा नळ सोडला, आणि पुढे १० घटकांनी पाणी येण्याचा नळ सोडला, तेव्हां दोन्ही नळ चालू ठेवले तर सर्व हौद रिकामा होण्यास किती वेळ लागेल ?

पहिला नळ एका घटकेंत $\frac{1}{25}$ हौद रिकामा करतो, व दुसरा एका घटकेंत $\frac{1}{30}$ हौद भरतो, तेव्हां दोन्ही चालू असल्यास $\frac{1}{25} - \frac{1}{30} = \frac{1}{150}$ हौद दर घटकेंत रिकामा होतो. आतां पहिला नळ १० घटका चालू होता तेव्हां त्याने $\frac{1}{25} \times 10 = \frac{2}{5}$ हौद रिकामा केला आणि बाकी राहिलेला $\frac{3}{5}$ हौद रिकामा होताना दोन्ही नळ चालू होते. म्हणून $\frac{3}{5} \div \frac{1}{150} = 90$ घटका लागतील. मिळून एकंदर सर्व हौद रिकामा होण्यास एकंदर $10 + 90 = 100$ घटका लागतील.

उदाहरण चौथें.

कांहीं एक काम २ पुरुष किंवा ५ बायका किंवा १२ मुलें ११ $\frac{1}{2}$ तासांत करतात, तर तेंच काम १ पुरुष २ बायका आणि ३ मुलें मिळून किती वेळांत करतील ?

आतां ११॥ तासांत १ पुरुष $\frac{1}{2}$ काम करतो, एक बायको $\frac{1}{5}$ काम करत्ये आणि १ मुल $\frac{1}{12}$ काम करते या वरून ११॥ तासांत १ पुरुष २ बायका ३ मुलें मिळून $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{12} = \frac{23}{20}$ इतके काम करतील. म्हणून $\frac{23}{20}$ कामास जर ११ $\frac{1}{2}$ तास लागतात तर $\frac{1}{23}$ कामास किती तास लागतील ?

$$\frac{20}{23} \times \frac{1}{2} \times \frac{23}{20} \text{ता} = \frac{20}{23} \text{ता} = 10 \text{ तास हें उत्तर.}$$

घातप्रकरण.

कोणतीही संख्या मूळ कल्पून तिने तीच संख्या पुनः पुनः गुणितां जो गुणाकार येतो, त्यास त्या मूळ संख्येचा घात म्हणतात.

घातामध्ये मूळ संख्या जितके वेळा अवयव रूपानें असते त्या वेळां वरून त्या घातास वर्ग, घन, चतुर्घात, पंचघात, इ० नांवें येतात. अर्थात वेळा दाखविण्याच्या अंकाला घात प्रकाशक हें नांव येते. जसें, २ ही मूळ संख्या घेतली तर,

$$2 \times 2 = 4 \text{ हा } 2 \text{ चा वर्ग किंवा द्विघात होतो.}$$

$२ \times २ \times २ = ८$ हा २ चा घन किंवा त्रिघात होतो.

$२ \times २ \times २ \times २ = १६$ हा २ चा चतुर्घात होतो.

$२ \times २ \times २ \times २ \times २ = ३२$ हा २ चा पंचघात होतो.

संख्येचा घात दाखविणे असला, तर तिचे वर उजवे बाजूस बारीकसा घातप्रकाशक मांडून त्याने दाखवीत असतात. ह्या वरून असे समजावे की—

$$२^२ = २ \times २ = ४; २^५ = २ \times २ \times २ \times २ \times २ = ३२$$

$$२^३ = २ \times २ \times २ = ८; २^६ = २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ = ६४$$

$$२^४ = २ \times २ \times २ \times २ = १६; २^७ = २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ = १२८.$$

नियम १ ला.— संख्येचा कोणताही घात हा तिच्या अवयवांच्या त्याच घातांच्या गुणाकारा बरोबर असतो. जसे—

$$३५^३ = ७^३ \times ५^३$$

कारण. $३५^३ = ३५ \times ३५ \times ३५$
 $= ७ \times ५ \times ७ \times ५ \times ७ \times ५$
 $= ७ \times ७ \times ७ \times ५ \times ५ \times ५$
 $= ७^३ \times ५^३$

नियम २ रा.— अपूर्णाकाचा कोणताही घात हा त्याच्या अंश छेदांचा तोच घात केल्याने होतो. जसे.

$$\left(\frac{२}{५}\right)^३ = \frac{२^३}{५^३}$$

कारण. $\left(\frac{२}{५}\right)^३ = \frac{२}{५} \times \frac{२}{५} \times \frac{२}{५}$
 $= \frac{२ \times २ \times २}{५ \times ५ \times ५}$
 $= \frac{२^३}{५^३}$

विद्यार्थ्यांस घातप्रकरणाची चांगली माहिती व्हावी ह्याजकरता पुढील उदाहरणे दिली आहेत ती सर्व त्यांनी करावी.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

१ उ. $(५५)^२$; $(४१६)^२$; $(३६)^३$; $(०.०२९)^५$.

२ उ. $\left(\frac{२}{३}\right)^२$; $\left(\frac{५}{३}\right)^३$; $\left(\frac{३}{४}\right)^४$; $(१.६)^५$.

३ उ. $(२॥१)^२$; $(०॥०)^२$; $(१।०)^३$; $(०।०)^४$

$$४ \text{ उ. } (२)^२; (.२)^२; (.०२)^२; (.००२)^३.$$

$$५ \text{ उ. } (४१२)^३; (४१.२)^३; (४.१२)^३; (.४१२)^३.$$

टीप- पूर्णांक संख्येचा घात केला तर तिची किंमत वाढत्ये, परंतु अपूर्णांक संख्येचा घात केला तर तिची किंमत कमी होते. जसे-

$$(२)^२ = २ \times २ = ४ \text{ ह्यापेक्षां}$$

$$(.२)^२ = .२ \times .२ = .०४ = \frac{१}{२५} \text{ हे कमी आहेत.}$$

$$\text{तसेच } (१२)^२ = १२ \times १२ = १४४ \text{ ह्यापेक्षां}$$

$$(१.२)^२ = १.२ \times १.२ = १.४४ = १\frac{११}{२५} \text{ हे कमी आहेत.}$$

$$\text{ब } (.१२)^२ = .१२ \times .१२ = .०१४४ = \frac{१४४}{१००००} = \frac{९}{६२५} \text{ हे फारच कमी आहेत.}$$

$$(५)^२ = ५ \times ५ = २५ \text{ ह्यापेक्षां}$$

$$\left(\frac{१}{५}\right)^२ = \frac{१}{५} \times \frac{१}{५} = \frac{१}{२५} = .०४ \text{ हे कमी आहेत.}$$

नियम ३ रा- संख्येच्या घातांचा गुणाकार घातप्रकाशकांच्या बेरजेने दाखविला जातो, जसा-

$$३^२ \times ३^४ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ = ३^६ = ३^{२+४}$$

$$३ \times ३^५ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ = ३^६ = ३^{१+५}$$

$$३^३ \times ३^३ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ = ३^६ = ३^{३+३}$$

नियम ४ था- संख्येच्या घातांचा भागाकार हा भाज्याचा घात प्रकाशक उणा भाजकाचा घात प्रकाशक ह्या वजाबाकीने दाखविला जातो, जसा-

$$३^४ \div ३^२ = \frac{३ \times ३ \times ३ \times ३}{३ \times ३} = ३ \times ३ = ३^२ = \frac{३^४-२}{३}$$

$$३^५ \div ३ = \frac{३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३}{३} = ३ \times ३ \times ३ \times ३ = ३^४ = \frac{३^५-१}{३}$$

उपनियम १ ला- संख्येचा १ घात याचा अर्थ तीच संख्या असा होता. २रा- संख्येचा शून्य घात याचा अर्थ १ असा होतो, आणि ३रा- संख्येचा उणा घात याचा अर्थ एक भागिला त्या संख्येचा तो घात असा होतो.

$$\text{जसें, } ४^३ \div ४^२ = ४^{३-२} = ४^१$$

$$= \frac{४ \times ४ \times ४}{४ \times ४} = ४$$

$$५^३ \div ५^३ = ५^{३-३} = ५^०$$

$$= \frac{५ \times ५ \times ५}{५ \times ५ \times ५} = १$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ म्हणून } ४^१ = ४$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \therefore ५^० = १$$

$$90^3 \div 90^4 = 90^{3-4} = 90^{-2}$$

$$= \frac{90 \times 90 \times 90}{90 \times 90 \times 90 \times 90} = \frac{9}{90^2} \left\{ \therefore 90^{-2} = \frac{9}{90^2} \right.$$

नियम ५ वा— संख्येच्या घाताचा घात हा त्या घात प्रकाशकांच्या गुणाकाराने दाखविला जातो.

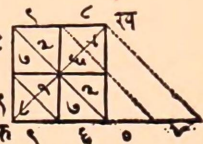
उदाहरण- ५ च्या वर्गाचा घन करणे आहे. तर-
 $(5^2)^3 = 5^2 \times 3 = 5^6$ होतो.

कारण $(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2$
 $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
 $= 5^6 = 5^6$

नियम ६ वा— दोन संख्यांच्या बेरजेचा वर्ग हा, त्या दोन संख्यांचे वर्ग, आणि त्या संख्यांच्या गुणाकाराची २ पट, ह्यांचे बेरजे इतका असतो.

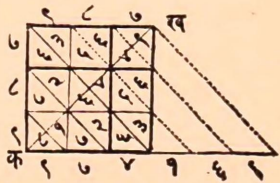
उदाहरणार्थ ९ दशक आणि ८ एकडे ह्यांच्या बेरजेने होणारी संख्या ९८ ही घ्या. ह्या ९८ चा वर्ग पुढील कोष्टकांत कोष्टकी गुणाकाराचे रीतीने केला आहे तो पहा.

ह्या कोष्टकामध्ये 'क ख' कर्णावरील दोन चौरसांत ८१ शेंकडे व ६४ एकडे आले आहेत. हे ९ दशक व ८ एकडे ह्यांचे वर्ग आहेत तसेच ह्या चौरसांच्या दोर्ही कडच्या भरतीच्या प्रत्येक चौकोनांत ७२ दशक आले आहेत. हे ९ दशक व ८ एकडे ह्यांच्या गुणाकाराची २ पट आहेत. हेंच वरील नियमांत सांगितले आहे.



उदा० २ रे. पुढील कोष्टकांत ९८७ चा वर्ग वरच्याच रीतीने केला आहे. तो पहा.

आतां ९८७ ही संख्या ९८ दशक आणि ७ एकडे ह्या दोन संख्यांच्या बेरजेने झालेली आहे, म्हणून 'कख' कर्णा वरच्या मोठ्या चौरसांत ९८ दशकांचा वर्ग येतो, व धाकट्या चौरसांत ७ एकड्यांचा वर्ग येतो. तसेच ह्या



चौरसाच्या दोहो कडच्या भरतीच्या चौकोनांत ह्या संख्यांच्या गुणाकाराची २ पट येते. ह्या वरून येथें ही दोन संख्यांच्या बेरजेच्या वर्गाचा नियम लागू होतो हें उघड आहे.

मूळ संख्येवर एक अंक चढविला, म्हणजे ती संख्या दशक स्थळी जाऊन तिचा वर्ग शतक स्थळी जातो. ह्या वर्गास त्या बाहेरची गोमुखी जोडिली म्हणजे ह्या संयुक्त संख्येचा वर्ग होतो. म्हणून.

उपनियम. मूळ संख्येवर एक अंक चढविला तर त्या संयुक्त संख्येचा वर्ग दोन स्थळांनी वाढेल आणि तो मूळ संख्या व चढविलेला अंक यांच्या गुणाकाराची २ पट व चढविलेल्या अंकाचा वर्ग ह्यांच्या बेरजेने वाढेल.

दशक व एकडे ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गाशी वरील नियम खरा आहे हें सिद्ध झाले. आतां एकडे व एकडे ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गाशी या नियमाचा खरेपणा पाहण्यासाठी, पहिल्या कोष्टकावरचे ९ व ८ हे दोन्ही अंक एकडे समजा. एकड्यांचा वर्ग एकडेच व्हावयाचा म्हणून ९ चा वर्ग ८१ व ८ चा वर्ग ६४ हें एकडे आहेत. एकड्याचा गुणाकार एकडेच यावयाचा, म्हणून ७२ व ७२ हेही एकडेच आहेत. ह्या चार संख्यांची बेरीज २८९ एकडे येते, हाच ९ आणि ८ मिळून होणाऱ्या १७ चा वर्ग आहे.

या रीतीने दुसऱ्या कोष्टकावरचे अंक ९, ८, व ७ हे एकडे कल्पिले, तर कख कर्णा वरच्या मोठ्या चौरसांत १७ चा वर्ग येतो, व धाकट्या चौरसांत ७ चा वर्ग येतो, आणि भरतीच्या काढकोन चौकोनांत १७ व ७ यांच्या गुणाकाराची २ पट येते. ह्या कल्पने प्रमाणें ह्या कोष्टकांतल्या नऊही संख्या एकड्यांच्याच ठरून त्यांची बेरीज ५७६ येते. हाच ९, ८ व ७ मिळून होणाऱ्या २४ चा वर्ग आहे. ह्या वरून वरील नियम कोणत्याही दोन संख्यांच्या बेरजेच्या वर्गाशी खरा आहे, असें म्हटलें पाहिजे. येथें दोन संख्या दाखविण्या साठी द आणि ए हे वर्ग घेतले तर वरील नियम पद्धतीच्या रूपाने थोडक्यांत दाखवितां येतो. तोअसा-

$$(द+ए)^२ = द^२ + २ दए + ए^२$$

उदाहरण १ लें- ७ चा वर्ग संयुक्त संख्येच्या रीतीने कर ?

येथे ७ = ४+३ आहेत म्हणून

$$\begin{aligned} 7 &= (4+3)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times 3 + 3^2 \\ &= 16 + 24 + 9 = 49 \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

उदाहरण २ रें- १२. १४ चा वर्ग संयुक्त संख्येच्या रीतीने कर ?

$$\begin{aligned} (12+14)^2 &= 12^2 + 2 \times 12 \times 14 + (14)^2 \\ &= 144 + 336 + 196 \\ &= 476. \text{ ३७९६ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

नियम ७ वा- दोन संख्या दाखविण्यास द आणि ए हे वर्ण घेतले तर त्यांच्या बेरजेचा घन असा होईल की-

$$(द+ए)^3 = द^3 + ३द^२ए + ३दए^२ + ए^३.$$

ह्या विचारा साठी ३ दशक व २ एकेडे मिळून होणारी संख्या घेऊं आणि तिचा घन करितांना दर एक अंकाचे आपण काय काय करितों हें पाहूं.

३२

×३२

६४ } हा संयुक्त संख्येचा वर्ग गुणून दर एक अंकाचा
९६ } गुणाकार त्याच्या स्थळाप्रमाणे वेगळाला लिहिला.

×३२

१२ . . .	}	२	द्वानां पहिली ओळ गुणून.
१२ . . .			
१८ . . .	}	२	द्वानी दुसरी ओळ गुणून.
१२ . . .			
१८ . . .	}	३	द्वानां पहिली ओळ गुणून.
१८ . . .			
२७ . . .	}	३	द्वानां दुसरी ओळ गुणून.
२७ . . .			

३२७६८ एकंदर बेरीज, हा ३२ चा घन झाला.

ह्या ३२ च्या घनांत २७ हा दशाकांचा घन आहे. ३ वेळ

१८ ही दशकांचा वर्ग गुणिले एकडे ह्यांची ३ पट आहे. ३ वेळ
१२ ही दशक गुणिला एकड्यांचा वर्ग ह्याची ३ पट आहे. आणि
८ हा एकड्यांचा घन आहे. येथे दशकां बदल द आणि एकड्यां
बदल ए हे वर्ण घ्या. म्हणजे हीच कृति वरच्या ७ व्या नियमांत-
ल्या पद्धतीत दर्शविली आहे हे उघड दिसेल.

वरील विचारांत ३ हे दशक व २ हे एकडे घेतले होते. आतां
३ व २ हे दोन्ही एकडेच म्हटले तर ३२ ह्याचा अर्थ ३ + २ होईल
बऱ्या संयुक्त संख्येच्या वर्गातील अंक ९, ६, ६, ४ हे एकडे दाखवि-
तील. आणि त्या खालच्या घनांतले अंक ८, १२, १२ इ० हेही
एकडेचदाखवितील. हे अंकवरील पद्धतीनेच आलेले असून ह्यांची
बेरीज १२५ येते. हाच ३ व २ मिळून होणाऱ्या ५ चा घन आहो
ह्या वरून द आणि ए ह्यांच्या जागी कशाही दोन संख्या घेतल्य.
तरी वरील पद्धतीने त्यांच्या बेरजेचा घन होईल हे सिद्ध होते.

उदाहरण १ लें - ३६ चा घन संयुक्त संख्येच्या पद्धतीने कर.

$$(३०+६)^३ = ३०^३ + ३ \times ३०^२ \times ६ + ३ \times ३० \times ६^२ + ६^३$$

$$\text{आतां } ३०^३ = २७०००$$

$$३ \times ३०^२ \times ६ = १६२००$$

$$३ \times ३० \times ६^२ = ३२४०$$

$$६^३ = २१६$$

$$\therefore ३६^३ = ४६६५६$$

उदाहरण २ रें - (३६०+४) ह्या संयुक्त संख्येचा घन कर

$$\text{नि. ७ प्र. } ३६०^३ = ४६६५६०००$$

$$३ \times ३६०^२ \times ४ = १५५५२००$$

$$३ \times ३६० \times ४^२ = १७२८०$$

$$४^३ = ६४$$

$$(३६०+४)^३ = ४८२२८५४४$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$$१ \text{ उ. } ३^५ \times ३^४; ५^२ \times \left(\frac{१}{२}\right)^२; (१\frac{७}{८})^३; (४^३)^२; \{(३.२)^२\}^४$$

$$२ \text{ उ. } ५^३ \div ५^२; (२॥०)^४ \div (२॥०)^३; १५^१० \div १५^१०$$

- ३ उ. $(०.२)^{१०}$; $(२.३४७८९)^{०}$; $(५.२३८)^{१}$.
 ४ उ. $(२.१५)^3 \times (३.३)^2$; $८^3 \times ४^3$; $८^3 + ४^3$.
 ५ उ. $(२५)^3 \times (१०)^2 + ५^६$; $(१२५)^2 + (१५०)^3$.

मूलप्रकरण.

एका संख्येचा कोणताही घात दिलेली संख्या असली, तर तिला दिलेल्या संख्येचें त्या घातप्रकाशका इतक्याचें मूल म्हणतात. जसें—

- ८ चा वर्ग ६४, तर ६४ चें वर्गमूल ८.
 २ चा चतुर्घात, १६, तर १६ चें चतुर्घातमूल २.
 ४ चा घन ६४, तर ६४ चें घनमूल ४.

संख्येचें मूल दाखविणें असलें तर तिच्या आरंभी $\sqrt{\quad}$ हें मूलचिन्ह काढून त्याचे डेलक्यांत मूल प्रकाशक लिहितात. जसें $\sqrt[३]{६४}=४$.

मूलाचें लक्षण पाहतां $३ \times ३ \times ३ = २७$ होतो, तर ३ ला २७ चे घनमूल म्हणावे असें आहे. त्यावरून मूलकर्म हे घात नि. ५ येथें दिलेल्या घातकर्माच्या उलट आहे म्हणून.

नियम १ला— संख्येच्या घाताचें मूलहें $\frac{\text{घातप्रकाशक}}{\text{मूलप्रकाशक}}$ ह्या भागाकारानें दाखविलें जाईल. जसें $\sqrt[३]{५६} = ५^{\frac{२}{३}} = ५^{\frac{२}{३}}$.

कोणतीही संख्या तिचा १ घात असते (घात नि. ४ उ. १) म्हणून संख्यांचीं मुळें हीं वरच्या १ल्या नियमा प्रमाणें $\frac{१}{\text{मूलप्रकाशक}}$ ह्या अपूर्ण घातप्रकाशकानें ही दाखवीत असतात. जशीं—

$$*\sqrt{६४} = ६४^{\frac{१}{२}} = ८$$

$$\sqrt[४]{१६} = १६^{\frac{१}{४}} = २$$

$$\sqrt[३]{८} = ८^{\frac{१}{३}} = २$$

वरच्या पहिल्या संख्या वर्गमूल ६४ किंवा वर्गमूलांत ६४

*वर्गमूलाचे चिन्हांत मात्र मूलदर्शक अंक घालीत नाहीं.

अशा वाचतात, व त्यांपुढच्या संख्या ६४ चा $\frac{१}{३}$ घात अशा वाचतात.

संख्या मूळ चिन्हांत लिहिली, म्हणजे तिचे तें मूल काढिलें असतां जें येईल तें असा अर्थ होतो. संख्येचा मूळ प्रकाशक अपूर्ण घाताच्या रूपानें तिजवर लिहिला, म्हणजे वरील अर्थ होऊन शिवाय तिजशी घात प्रकरणांत दिलेले नियम लागू करितां येतात. असे ह्या दोहीं चिन्हांचे उपयोग वेगळाले आहेत.

ज्या संख्येचें मूळ बरोबर निघतें, तीस घातसंख्या म्हणतात. आणि जिचें मूळ बरोबर निघत नाही तीस करणी संख्या म्हणतात.

उदाहरण.

$$\begin{array}{l} \sqrt{४} = २ \\ \sqrt[३]{२७} = ३ \\ \sqrt[६]{९} = १ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{म्हणून } \sqrt{४}, \sqrt[३]{२७} \text{ आणि,} \\ \sqrt[६]{९} \text{ ह्या घातसंख्या आहेत.} \end{array} \right.$$

$\sqrt[३]{३}$ ह्या संख्येचें मूळ बरोबर निघत नाही, म्हणून ही करणी संख्या आहे, व हिजप्रमाणें $\sqrt[५]{५}$, $\sqrt[७]{७}$, इ० ह्याही संख्या करणी आहेत.

नियम २ रा—करणी संख्येचें मूल पाहिजे असलें, तर तिला घातसंख्या छेद येईल असा गुणक द्यावा.

नंतर अंशाचें सुमाराचें मूल अंशस्थली लिहून, छेदाचें खरें मूल छेदस्थली लिहावें.

हा अपूर्णाक त्याच्या छेदा इतक्या व्या हिंशा पावेतो फरकानें खरें मूल दाखवील.

उदाहरण—५९ चें वर्ग मूल $\frac{१}{१२}$ पावेतो फरकानें खरें पाहिजे. येथें $\frac{१२^२}{१२}$ गुणक देतां.

$$\begin{aligned} \sqrt{५९} &= \sqrt{\frac{५९ \times १२^२}{१२^२}} = \frac{\sqrt{८४९६}}{\sqrt{१२^२}} \\ &= \frac{९२}{१२} = ७\frac{२}{३} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

कारण, अपूर्णाकाचा घात करणें झाला, तर त्याच्या अंशछे-

दांचा तो घात करावा लागतो (घात नि०२) यास्तव अपूर्णाका-
चें मूळ काढणें झालें तर त्याच्या अंशछेदाचेंच तें मूळ काढिलें
पाहिजे म्हणून वरील कृति खरी आहे.

वरील अंशाच्या वर्गमूळांत फार थोडी कसर सोडली आहे.
येथें ९२ वरती अर्धा किंवा पाऊण भाग लागावा एवढी मोठी
कसर सोडली असती, तरी तिचा भागाकार $\frac{१}{१२}$ पेक्षां कमीच येता.
यावरून अपूर्णाकाचा छेद हा कसरेची परमावधि दाखवितो, हें
ध्यानांत येईल.

उदाहरण २ रें- $\frac{१०}{७}$ चें वर्गमूळ काढणें. येथें अपूर्णाकाचे
छेदानेंच करणीचे अंशछेद गुणितां.

$$\sqrt{\frac{१०}{७}} = \sqrt{\frac{१० \times ७}{७ \times ७}} = \frac{\sqrt{७०}}{\sqrt{७^२}}$$

$$= \frac{८}{७} = १\frac{१}{७} \text{ हें उत्तर.}$$

उदाहरण ३ रें- ५.७२ चें वर्गमूळ काढणें.

$$\sqrt{५.७२} = \sqrt{\frac{५७२}{१००}} = \frac{२४}{१०} = २.४ \text{ हें उत्तर.}$$

करणी संख्यांचीं मूळें वरोबर निघत नाहींत, तरी वरील रीती-
नें व्यवहारी अपूर्णाकांत किंवा दशांश अपूर्णाकांत बऱ्याच मानानें
खऱ्या मूळांचे जवळ जवळ काढतां येतात.

मूळ काढल्यानें पूर्णाकांची किंमत कमी होते, आणि अपूर्णा-
कांची वाढते. जसें-

}	संख्या.	२५		.२५ = $\frac{१}{४}$	}	२२५		२.२५ = $\frac{९}{४}$
	वर्गमूळ.	५		.५ = $\frac{१}{२}$		१५		१.५ = $\frac{३}{२}$
}	संख्या.	१२५		.१२५ = $\frac{१}{८}$	}	६४		०.०१ = $\frac{१}{१०००}$
	घनमूळ.	५		.५ = $\frac{१}{२}$		४		.१ = $\frac{१}{१०}$

व्यवहारांत बहुधा वर्गमूळ व घनमूळ ही मोठाल्या संख्यांची
काढण्याची विशेष गरज लागते. ह्यासाठीं हीं मूळें काढण्याच्या
रीति या पुढें सांगितल्या आहेत त्या पहाव्या.

वर्गमूळ काढण्याकरितां निदान एकापासून व्हा अंकांचे वर्ग

तोंडपाठ आले पाहिजेत. ते लहानपणी उजळणी शिकतांना एको-
ज्यांत पाठ केलेले असतात. परंतु ज्यांना एकोर्ती येत नसतील
त्यांनी हे पुढील वर्ग पाठ करावे.

$$\begin{array}{l|l|l|l} १^२ = १ & ४^२ = १६ & ७^२ = ४९ & १०^२ = १०० \\ २^२ = ४ & ५^२ = २५ & ८^२ = ६४ & ११^२ = १२१ \\ ३^२ = ९ & ६^२ = ३६ & ९^२ = ८१ & १२^२ = १४४. \end{array}$$

वर्गमूळ काढण्याची रीति.

दिलेल्या संख्येचे दोन दोन अंकांचे भाग करीत जावे, ते असे
कीं, प्रथम एक स्थानाच्या अंकावर (१) असे चिन्ह करून तेथून
दोहीकडे एक एक अंक टाकून दुसरे दुसरे अंकावर खूण करीत
जावें. पूर्णांकांत विपम स्थळें असल्यास शेवटचा भाग एकाच अं-
काचा होईल. दशांशांकांत विपम स्थळें असल्यास वर शून्य देऊन
शेवटचा भाग दोन अंकांचा करावा.

पहिल्यानें संख्येच्या डावे कडील पहिल्या भागांत कोणते संख्ये-
चा वर्ग वजा जाईल तें पाहून तो वर्ग त्या भागाखाली लिहावा
आणि त्याचें मूळ भागाकारस्थळीं लिहावें. नंतर तो वर्ग त्या भा-
गांत वजा करून बाकी राहिल तिजवर दुसरा दोन अंकांचा एक
भाग घ्यावा. म्हणजे हा नवा भाज्य झाला.

आतां भागाकारस्थळीं जो अंक लिहिला आहे त्याची दुप्पट
करून ती भाज्य संख्येच्या डावेकडे भाजकस्थळीं लिहावी, आणि
ती ह्या नव्या भाज्यांकांतील वरचा एक अंक सोडून बाकीच्या अं-
कांत किती वेळां वजा जाईल तें पहावें. तो वेळांक भागाकार
स्थळींच्या पहिल्या अंकांवर लिहून त्या दुपटीवरही लिहावा. नंतर
ह्या वेळांकांनें भाजक संख्येस गुणून तो गुणाकार वर सांगितलेल्या
भाज्यसंख्येंत वजा करावा, आणि बाकी राहिल तिजवर तिसरा
दोन अंकांचा भाग घ्यावा; म्हणजे हा पुन्हा नवा भाज्य झाला.

पुन्हा जो वर भाग लाविला, तो अंक भाजकस्थळींचे अंकांत
मिळवून ती बेरीज (म्ह० भागाकारस्थळींच्या सर्व अंकांची दुप्पट) नव्या
भाज्यांतील वरचा एक अंक सोडून बाकीच्या अंकांत किती वेळां
वजा जाईल हें पहावें, तो वेळांक भागाकारस्थळींच्या अंकांवर लि-

हून भाजकावरही लिहावा. म्हणजे हा नवा भाजकांक होतो. नंतर त्या वेळांकाने भाजक गुणून तो गुणाकार भाज्यांत वजा करावा.

ह्याप्रमाणे दिलेल्या संख्येंतील सर्व भाग संपततोपर्यंत करावे. दिलेल्या संख्येंत दशांश असले तर त्यांत जितके भाग झाले असतील तितकी स्थले वर्गमूळात मोजून तेथे दशांश चिन्ह करावे.

उपपत्ति- ह्या नियमाची उपपत्ति समजण्यासाठी पूर्वी ज्या कोष्टकी गुणाकारांवरून संयुक्त संख्येचा वर्ग करण्याचा नियम सांगितला, त्यांकडे लक्ष पुरवा. ह्या कोष्टकांत ८१ ह्या पहिल्या अंकांच्या वर्गाशी त्यावरची गोमुखी जोडिली म्हणजे ९८ ह्या दोन अंकी संख्येचा वर्ग होतो. ह्या दोन अंकी संख्येच्या वर्गाशी त्यावरची गोमुखी जोडिली म्हणजे ९८७ ह्या तीन अंकी संख्येचा वर्ग होतो. अशा पद्धतीने मूळांतले अंक व त्या संख्यांचे वर्ग हे वाढत जातात. ह्यावरून कोणत्याही वर्ग संख्येंतून प्रथम पहिल्या अंकाचा वर्ग वजा देऊन नंतर त्यावरची गोमुखी वजा दिली म्हणजे पहिल्या दोन अंकी संख्येचा वर्ग वजा होईल. ह्या वर्गा नंतर त्यावरची गोमुखी वजा दिली म्हणजे पहिल्या तीन अंकी संख्येचा वर्ग वजा होईल. अशा रीतीने बाकी शून्य होई तोंपावेतों करीत चालले असता त्या सर्व संख्येचे वर्गमूळ निघेल हे उघड आहे. उदाहरणार्थ, पुढील संख्येचे वर्गमूळ काढणे आहे असे समजा.

९	१७४९६९१९८७	बाजूची वर्गसंख्या ही तिच्या मूळांत-
१८८	१६४९	ल्या पहिल्या अंकाच्या वर्गाशी पुढच्या
१९६७	१३७६९	प्रत्येक अंकामुळे उत्पन्न होणारी एकेक गो-
	००००	मुखी जोडून वाढत गेली आहे. ही प्रत्येक

गोमुखी जोडल्याने पहिल्या अंकाच्या वर्गापुढे दोन दोन अंक वाढत गेलेले आहेत, म्हणून ह्या वर्ग संख्येंत उजवे कडच्या एक पासून दोन दोन अंकांचे भाग केले पाहिजेत. भाग तीन झाले म्हणून मूळांत तीन अंक येतील.

वर्ग संख्येचे डावे कडचा पहिला भाग ९७ ह्यांत मुख्यत्वेन करून ह्या संख्येचे मूळांतल्या पहिल्या अंकाचा वर्ग आहे. म्हणून ९७ त मोठा वर्ग कोणता वजा जाईल तो शोधून तो त्याचे खाली

मांडला. ह्या ८१ चें वर्गमूळ ९ हा त्या मूळांतला पहिला अंक म्हणून उजव्या बाजूस भागाकार स्थळीं मांडिला आणि ८१ वजा देऊन आलेल्या बाकीवर दुसरा भाग ४१ हा घेतला. ह्या १६४१ वरून ९ या वरचा दुसरा भाग शोधितां येतो. म्हणून या संख्येला नवा भाज्य म्हटलें आहे.

ह्या १६४१ त कोष्टकी वर्गाच्या पहिल्या गौमुखीतील संख्या मुख्यत्वे असावयाच्या. म्हणजे पहिल्या दुसऱ्या अंकांच्या गुणाकाराच्या २ पट दशक व दुसऱ्या अंकांच्या वर्गा इतके एकडे असावयाचे. (कारण अंकावर अंक आला कीं, पहिल्याला दशक दुसऱ्याला एकडे हें नाव येतें.) म्हणून डाव्या बाजूस ९ खालीं ९ मांडून त्यांची बेरीज १८ ह्यांनीं १६४ दशकांना भाग पहिला तेव्हां ८ चा भाग लागला. आतां पहिल्या अंकाचे दुप्पट १८ डावीकडे आहेत. त्यांवर हे ८ मांडून झालेल्या १८८ खालीं ८ मांडून त्यांनीं गुणिलें तर तो गुणाकार पहिल्या दुसऱ्या अंकाच्या गुणाकाराचे दुप्पट दशक व दुसऱ्या अंकाचे वर्ग इतके एकडे ह्यांचे बेरजे इतका येतो. म्हणून तो गुणाकार १६४१ खालीं मांडून त्यांत वजा दिला. आणि आलेल्या बाकीवर पुढचा ६९ चा भाग घेऊन १३७६९ हा नवा भाज्य तयार केला.

घरच्या दोन वजावार्तीत ९८ ह्या दोन अंकी संख्येचा वर्ग वजा झाला. ह्या ९८ वर दुसरा भाग लागणार म्हणून ९८ हे दशक व त्यावर येणारा भाग हे एकडे झाले. १३७६९ मध्ये ह्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराचे २ पट दशक व वरच्या अंकांच्या वर्गा इतके एकडे असले पाहिजेत. डावेकडच्या १८८ ह्या संख्येत ८ मिळविले म्हणजे ९८ ची दुप्पट होते ही दुप्पट दशकाची आहे म्हणून तिनें भाज्यावरचा एक अंक सोडून बाकी १३७६ ह्या दशकांना भाग पाहिला तो ७ चा लागला. ७ डावेकडच्या १९६ दशकांवर मांडून त्याचे खालीं मांडले आणि दोहोंचा गुणाकार केला. हा गुणाकार ९८ दशक व ७ एकडे ह्यांचे गुणाकाराची दुप्पट व ७ एकड्यांचा वर्ग ह्यांचे बेरजे इतका आला. म्हणून तो भाज्यांत वजा दिला. बाकी कांहीं नाहीं, म्हणून दिलेले संख्येचें वर्गमूळ ९८७ हें झालें.

एकंदरीने घात करतांना आपण ज्या ज्या संख्यांची बेरीज केली त्याच संख्या, मूळ काढितांना आपण शोधून काढून त्या उलट वजा केल्या.

उदाहरण पहिलें.

१८६६२४ ह्या संख्येचें वर्गमूळ काढ.

४	१८६६२४
८३	१६६६
८६२	१७२४
	१७२४
	००००

ह्या उदाहरणांत प्रथम ४ या संख्येवर चिन्ह करून तेथून डावेकडे एक एक अंक टाकून चिन्हे केलीं. तेव्हां १८, ६६, २४ असे भाग झाले. आतां पहिला भाग

१८ ह्यांतून ४ चा वर्ग १६, वजा जातो, म्हणून ४ हे भागाकारस्थळीं लिहून त्यांचा वर्ग १६ हा १८ त वजा केला, तेव्हां बाकी राहिले २. त्यांवर दुसरा भाग ६६ हा घेतला, तेव्हां २६६ झाले. नंतर भागाकारस्थळींचे ४ ह्यांची दुप्पट ८ भाजकस्थळीं लिहिली. ८ ही संख्या भाज्यांकांतील २६ ह्या संख्येत ३ वेळां वजा जाते, म्हणून ३ हे भागाकारस्थळचे ४ ह्या संख्येवर लिहून भाजकस्थळचे ८ या संख्येवरही लिहिले. तेव्हां भाजकस्थळीं ८३ झाले. ह्यांस ३ नीं गुणून तो गुणाकार २६६ यांत वजा केला, तेव्हां बाकी राहिले १७; त्यांघर घेतले २४, तेव्हां १७२४ हा नवा भाज्य झाला.

आतां ३ हे भाजकस्थळचे ८३ त मिळविले, तेव्हां झाले ८६, म्हणजे भागाकारस्थळींच्या ४३ ची दुप्पट. ह्यांनीं १७२ ह्यांस २ चा भाग जातो, म्हणून २ हे भागाकारस्थळीं लिहून, ८६ वर लिहिले, तेव्हां ८६२ हा भाजक झाला, ह्यांस २ नीं गुणून तो गुणाकार १७२४ हा भाज्य १७२४ ह्यांत वजा केला; बाकी राहिले ० म्हणून वर्गमूळ ४३२, हें उत्तर.

उदाहरण दुसरें.

१०२९१२६ ह्यांचें वर्गमूळ काढ.

३	१०२९१२६
६२	१२६
६४०८	१२४
	५१२६४
	५१२६४
	०००००

उदाहरणांत दशांश स्थळें ३ होती, म्हणून वर शून्य देऊन दशांशांतले भाग दोन दोन अंकांचे केले, म्हणजे (मूळ नि. २ प्र.) दशांशाचा छेद वर्ग संख्या

केला, आणि मागील रीतीप्रमाणे वर्गमूळ काढले. ह्या उदाहरणांतील दशांशांत दोन भाग आहेत म्हणून वर्गमूळांत दोन स्थळामागे दशांश चिन्ह केले.

उत्तर ३२.०८.

सूचना १ ली- जेव्हां वर्गमूळ बरोबर निघत नाही, तेव्हां वर्गमूळांत इच्छिर्ली दशांशस्थळे येतील इतकी दिलेल्या संख्येवर दशांश शून्ये द्यावी.

उदाहरण तिसरे.

१२ चे वर्गमूळ तीन दशांश स्थळांपर्यंत बरोबर पाहिजे. येथे तिहींच्या दुप्पट १२ वर शून्ये दिलीं. जसें,

3	92.000000 (3.864.
3	9
64	300
64	240
666	400
666	496
6824	2000
6824	2696
	304

उत्तर ३.४६४ इ.

उदाहरण चौथे.

५३५.१४६ ह्यांचे वर्गमूळ तीन दशांशस्थळांपर्यंत काढ.

23	535.146 (23.9 3
23	535
23	929
469	694
469	494
4823	9300
4823	9369
48263	99900
48263	9369
	90399

ह्या उदाहरणांत पूर्णाकांतील पहिला भाग एकाच अंकाचा आला आहे. वर्गमूळांत ३ दशांशस्थळे आणावयाचीं म्हणून दिलेल्या संख्येत ३ च्या दुप्पट

६ दशांशस्थळे पाहिजेत, पैकीं तीन दिली आहेत, बाकी तीन शून्य जास्ती घेऊन सहा स्थळे पुरीं केलीं, आणि वर्गमूळ पूर्ववत् काढलं.

उत्तर २३.१३३.

सूचना २ री- व्यवहारी अपूर्णाकांचे वर्गमूळ काढणे झाल्यास त्या अपूर्णाकास दशांशरूप देऊन मग वर्गमूळ काढावे.

उदाहरण— $\frac{4}{9}$ ह्यांचे वर्गमूळ काढ.

$\frac{4}{9} = 0.444 \dots \sqrt{0.444} = 0.666 \dots$ हे उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

खाली दिलेल्या संख्यांचीं वर्गमूले काढा.

- १ उ. २०२५; १७.३०५; .०००७२९
- २ उ. ३; ५; ६; १२; २५.
- ३ उ. $\frac{२७}{५४७}$; $\frac{९}{१२}$; $१७\frac{३}{८}$.
- ४ उ. ९७.४१; १२॥; .॥॥.
- ५ उ. ८४१; १२८७; ६०८४; ४९०६.
- ६ उ. $\frac{२}{५}$; $\frac{२८}{२९}$; $२\frac{१}{४}$; १५.८.
- ७ उ. ६.४; ०.६४; ०.०६४; ६४०.
- ८ उ. $१२\frac{३}{८}$; $६४\frac{१}{५}$; १८.२७; ४०.९६.
- ९ उ. $\frac{२.०५}{२.२५}$; $\frac{३.७९}{.००१६}$; $\frac{७.९८}{५२.४}$; $\frac{१३७}{२१९}$.
- १० उ. १७६९८८४९; ६९८४८५; ७१४०२५.
- ११ उ. १०८१६; ७३००८.०५; ५६८२१४४४.
- १२ उ. ४५३६९; .००६४; ९५८५२१६.
- १३ उ. ७४५.२९; ३३७०.९६३६; $\frac{२२५०}{३६१०}$.
- १४ उ. .०००२५६; .००५९१३६१; ९.८५९६.
- १५ उ. १७९० आणि ४४५१ यांच्या बेरजेचे वर्गमूल, आणि वर्गमूलांची बेरीज यांत अंतर काय ?

घनमूल.

घनमूल काढतांना खाली दिलेल्या दहा अंकांचे घन विद्या-थ्यांचे लक्षांत असले पाहिजेत.

$$\begin{array}{l|l|l} १^३ = १ & ४^३ = ६४ & ७^३ = ३४३ \\ २^३ = ८ & ५^३ = १२५ & ८^३ = ५१२ \\ ३^३ = २७ & ६^३ = २१६ & ९^३ = ७२९ \end{array} \quad १०^३ = १०००$$

रीति- दिलेल्या संख्येंतील एकंच्या स्थानचे अंकावर (।) असे चिन्ह करून तेथून डावे कडे दोन दोन अंक टाकून तिसरे तिसरे अंकावर चिन्ह करावी, तीं अशीं कीं, तीन तीन अंकांचा एकेक भाग होईल; शेवटला भाग मात्र कधी एक किंवा दोन अंकांचा होईल. संख्येंत दशांश असल्यास दशांश चिन्हापासून उजवेकडे तिसरे तिसरे अंकावर चिन्ह करावी. शेवटल्या भागांत अंक कमी असल्यास दशांश शून्ये देऊन भाग पुरा करावा.

नंतर डावे कडील पहिले भागांत कोणते महत्तम संख्येचा घन वजा जातो, तें पाहून ती संख्या उजवेकडे भागाकारस्थळीं लिहावी; आणि तिचा घन पहिल्या भागांत वजा करून बाकी राहिल तीवर दुसरा भाग घ्यावा; म्हणजे हा नवा भाज्य झाला. ह्यास भाजक पाहिजे तो काढण्याची रीति.

भागाकारस्थळीं जो मूळांक आहे, त्याचे वर्गाची तिप्पट करावी, आणि तिच्या खाली त्याच मूळ अंकाची तिप्पट एक अंक पुढे जाई अशी मांडून बेरीज घ्यावी, ही भाजक होय. आतांही बेरीज भाज्यांकांतील वरचा एक अंक सोडून बाकीचे अंकांत जितके वेळां वजा जात असेल, तो वेळांक भागाकारस्थळाच्या अंकावर लिहावा.

नंतर पहिले मूळ अंकाच्या वर्गाचे तिपटीस ह्या वेळांकार्ने गुणावें, व मूळ अंकाच्या तिपटीस त्याच्या वर्गानें गुणावें, आणि वेळांकाचा घन करून त्या गुणाकाराखाली मांडावा. हे दोन्ही गुणाकार व घन हे सर्व एकेक अंक पुढे जात असे लिहावे. नंतर त्यांची बेरीज करून ती भाज्यांकांत वजा करावी, आणि बाकी राहिल तिजवर तिसरा भाग घ्यावा.

आतां ह्या भाज्यांकास भाजक वरच्या रीतीनेच काढावयाचा, परंतु ह्या वेळेस भागाकारस्थळीं जे दोन अंक आले आहेत, तेचढा मूळांक धरावा, आणि पुनः पूर्वीप्रमाणें शेवटपर्यंत करावें.

उपपत्ति— घनमूळ काढण्याची रीति कशी निघाली हें समजावण्यासाठीं आतां आपण ३२७६८ या संख्येचें वरील रीती प्रमाणें कृति करून घनमूळ काढूं आणि त्या कृतीचा वर दिलेल्या घन करण्याच्या पद्धतीशीं मेळ घालूं म्हणजे अशी रीति देण्याचें बीज हीच घन पद्धति आहे असें दिसून येईल.

$$\begin{array}{r} 3 \times 3^2 = 27 \quad | \quad 32768 \quad (32 \\ 3 \times 3 = \dots 9 \quad | \quad 27 \\ \hline 279 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 4768 \end{array}$$

$$3 \times 3^2 \times 2 = 54$$

$$3 \times 3 \times 2^2 = 36$$

$$2^3 = \dots 8$$

$$\underline{4768 = 4768}$$

$$\text{बाकी } \dots$$

दशकांकांचा घन सहस्रांक यावयाचा, म्हणून एक व सहस्र या अंकांवर खुणा करून पहिला सहस्रांकाचा भाग ३२ हा वेगळा केला. या भागांत ३ या महत्तम संख्येचा घन वजा जातो, म्हणून पहिला ३ चा भाग बसवून त्याचा घन २७ हा त्यांतून वजा केला, आणि आलेल्या बाकीवर दुसरा भाग घेऊन ५७६८ हा नवा भाज्य तयार केला.

ह्यांतल्या ५७ शतकांत मुख्यत्वे करून १८ त्रीक = ५४शतक आहेत, म्हणजे ३ द. ए आहेत, म्हणून ३ द^३नी भाग पाहिला तर ए हा २ एकड्यांचा भाग सांपडेल. तथापि ३ द. ए ह्या पुढच्या संख्येतून ह्या भाजकांत येणारे हातचे विचारांत घेतले, तर भाग वाजवीहून मोठा लागेल, म्हणून ३ द^३ आणि ३ द ह्यांच बेरजेने येणाऱ्या २७९ दशाकांनी भाग पाहून २ एकड्यांचा भाग लाविला.

नंतर पहिले भागाचे वर्गास दुसऱ्या भागाने गुणून त्याची तिप्पट घेतली (म्हणजे ३ वेळ १८ घेतले) नंतर पहिल्या भागाने दुसऱ्या भागाचे वर्गास गुणून त्याची तिप्पट घेतली (म्ह० ३ वेळ १२ घेतले). नंतर दुसऱ्या भागाचा घन केला (म्ह० ८ घेतले) नंतर हे सर्व अंक त्यांच्यास्थानांप्रमाणे एक एक घर पुढे सरत असे मांडिले, आणि त्यांची बेरीज घेऊन वरील रकमेत वजा दिली. बाकी शून्य राहिल्याने ही कृति पूर्ण झाली.

३६४ ह्या संख्येत ३६ दशक व ४ एकडे आहेत असे म्हणता येते ह्याप्रमाणे दोन अंकी दशक व एकडे ह्या संयुक्त संख्येचा घन केला, तर तो तीन अंकी संख्येचा घन होईल व त्याचे घनमूळ वरील रीतीने काढितां येईल. इतकेच की पहिल्या कृतीने जो दोन अंकी संख्येचा घन वजा केला, तो दशकाचा घन वजा केला असे समजून पुनः पूर्वा प्रमाणेच कृति केली पाहिजे. ह्या युक्तीने पाहिजे तेवढ्या मोठ्या संख्येचे घनमूळ काढितां येईल, हें उघड आहे.

आतां दशकाचा घन सहस्र होतो, शतकाचा घन दशलक्ष होतो, ह्या प्रमाणे मोठाल्या संख्यांचे घन तीन तीन अंकांनी वाढत जातात. ह्यावरून घनमूळ काढण्याला मोठी संख्या दिली असली, तर तीत एकपासून तीन तीन अंकांचे भाग केले पाहिजेत.

दशांश, शतांश, इ० संख्यांचे घन केले तर त्यांच्या छेदस्थळी १०^३, १०^३, अशा तीन तीन अंकांनी वाढणाऱ्या घन संख्याच येतील. या वरून दशांश संख्येचें घनमूळ काढणें असलें, तर तीतही एक पासून तीन तीन अंकांचेच भाग केले पाहिजेत, व स्थळें कमी असलीं तर तीं शून्यें चढवून पुरीं केलीं पाहिजेत.

उ. ४८२२८.५४ या संख्येचें घनमूळ काढ.

$3 \times 3^2 = 27$	$48228.54 \div 27 = 1786.24$
$3 \times 3 = 09$	27
279	29228
$3 \times 3^2 \times 6 = 162$	
$3 \times 3 \times 6^2 = 324$	
$6^3 = 216$	
$19646 = 19646$	
$3 \times 36^2 = 3960$	$.9572440$
$3 \times 36 = 108$	
3960	
$3 \times 36^2 \times 4 = 15552$	
$3 \times 36 \times 4^2 = 1728$	
$4^3 = 64$	
$.9572444 = 9572444$	
4 उणें	

ह्या उदाहरणांत पहिल्यानें पूर्णांकांतील ८ ह्या अंकावर चिन्ह करून, तेथून डावेकडे दोन अंक टाकून तिसरे अंकावर चिन्ह केलें; तसेंच दशांशांत पहिले दोन अंक सोडून तिसऱ्या शून्यावर चिन्ह केलें. तेव्हां ४८, २२८, ५४०, असे भाग झाले.

पहिला भाग ४८ ह्यांत ३ चा घन वजा जातो, म्हणून ३ हा घनमूळांक भागाकारस्थळी लिहून त्याचा घन २७ हा ४८ त वजा केला, बाकी राहिले २१, त्यांवर घेतले २२८, तेव्हां २१२२८ हा नवा भाज्य झाला.

नंतर मूळांक ३ ह्यांचे वर्गास ३ नीं गुणून गुणाकार २७ आला, त्याचे खाली ३ ची तिप्पट ९ हे एक स्थळ पुढें अंक जाईं असे मांडून बेरीज केली ती २७९ आली, ही भाजक होय. हिनें २१२२ ह्यांस ६ चा भाग जातो, म्हणून ६ हे भागाकारस्थळी लिहिले. आतां $3 \times 3^2 \times 6$; $3 \times 3 \times 6^2$; 6^3 हे गुणाकार एकेक अंक पुढें जात असे एकाखाली एक मांडून बेरीज केली ती

१९६५६ आली, ती २१२२८ ह्यांत वजा केली. बाकी राहिले १५७२, त्यांवर तिसरा भाग ५४० घेतला, तेव्हां झाले १५७२५४० ह्यांस भाजक, ३६ हा घनमूळांक धरून पूर्वीप्रमाणेच काढला, तो असा.—

३ × ३६^२ आणि ३ × ३६, हे गुणाकार एकेक अंक पुढें जात असे मांडून बेरीज केली. ३८९८८ हा भाजक आला, ह्यानें १५७२५४० ह्यांस ४ चा भाग जातो, म्हणून पूर्वीप्रमाणें ३ × ३६^२ × ४; ३ × ३६ × ४^२; ४^३; हे सर्व गुणाकार एकेक अंक पुढें जात असे मांडून बेरीज केली ती १५७२५४४ आली. ही १५७२५४०. ह्यांत वजा केली, तोटा ४ चा आला. तेव्हां हें घनमूळ एक दशांश पावेतो फरकानें खरें समजलें पाहिजे (मू. नि २ पहा)

दिलेल्या संख्येंतील दशांशस्थळांत एकच भाग आहे, म्हणून उत्तरांत एका अंकाच्या मागे म्हणजे ४ च्या मागे दशांश चिन्ह केले.

उत्तर ३६.४ हें घनमूळ.

ही कृति लांब आहे तरी दुसऱ्यारी तीस आधारभूत आहे ह्या जकरतां पुढील उदाहरणें विद्यार्थ्यांनीं करतां लक्ष देऊन करावीं.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. ५७१४८२.१९० ;	१६२८.१५८२.	} ह्यांचीं घनमूळें काढ.
२ उ. १३३२; ३२१४ ;	२१०३५.८९.	
३ उ. $\frac{३७}{८}$; १५०११. ;	१५ $\frac{२}{३}$.	
४ उ. $\frac{५}{६}$; १०० ;	१००००००.	
५ उ. ८०००; १२५ ;	.००१.	

हार्नर ह्या नांवाच्या एका साहेबानें घनमूळ काढण्याची एक फार सोपी रीति बसविली आहे, तिची माहिती आपले लोकांस व्हावी म्हणून ती पद्धतवार एक उदाहरण देऊन ह्या पुस्तकांत दाखविली आहे. भाग पहाण्याचे व वजा करण्याचे जे अंक, संयुक्त संख्येचा घन करण्याच्या पद्धतीप्रमाणें तयार करण्यास मागील रीतींत सांगितले, तेच अंक ह्या रीतीनें एका क्रमानें तयार होत जातात, व शिवाय ही रीति घनां पुढच्याही घातांची मूळें शोधण्याच्या कामीं लागू करितां येते.

हार्नरची रीति.

(१) कांहीं अंतरानें दोन शून्यें व दिलेली संख्या लिहीम्हणजे पुढें जीं आंकड्यांचीं तीन सदरें भरत यावयाचीं त्या सदरांचे हे आद्यांक होतील.

(२) रीतीप्रमाणें एकस्थानी उभी खूण करून दिलेल्या संख्येचे होतील तितके तीन तीन आंकड्यांचे भाग कर.

(३) डावे कडील शेवटच्या भागांत ज्या संख्येचा घन जाईल तो इच्छिले घनमूळाचे स्थली पहिला अंक मांड.

(४) हा अंक पहिले सदरांत लिही, आणि त्याचे वर जें असेल त्याच्याशीं तो मिळवून त्या बेरजेस त्याच अंकानें गुण आणि गुणाकार दुसऱ्या सदरांत लिही.

(५) मागें सांगितल्याप्रमाणें ह्याची वरील शून्याशीं बेरीज घेऊन त्या बेरजेस पहिल्या अंकानें फिरून गुणून हा गुणाकार तिसरे सदरांतील संख्येचे शेवटचे भागाखाली लिहून वजाबाकी कर.

(६) वर ज्याप्रमाणें केलें असेल त्याचप्रमाणें फिरून पहिले व दुसरे सदरांत कर, आणि पहिले सदरांत आणखी घनमूळाचा जो अंक आला असेल तो एकवार मिळीव.

(७) पहिले सदरांत जो अंक आला असेल त्यावर एक शून्य दे, आणि दुसरे सदरांतील आलेल्या अंकावर दोन शून्ये दे. तिसरे सदरांतील आलेल्या वजाबाकीवर पुढचे भागांतील तीन अंक घे.

(८) दुसरे सदरांतील अंकांनीं तिसरे सदरांतील अंकांस भागून पाहून घनमूळाचा दुसरा अंक शोधून काढ.

(९) हा अंक पहिले सदरांतील अंकांखाली मांडून (४), (५), (६) कलमांत सांगितल्याप्रमाणें फिरून कृति कर.

(१०) नंतर (७) वे कलमांत सांगितल्याप्रमाणें अंकावर शून्यें वगैरे देऊन मागें सांगितल्याप्रमाणें घनमूळ बरोबर अथवा जेवढें सूक्ष्म आलें पाहिजे तेवढें निघे तोंपर्यंत पुढें गणित करीत जा.

(११) दिलेल्या संख्येंत दशांश अंक असेल तर गणित करतां करतां पूर्णांक भाग संपत्ते म्हणजे घनमूळाचे अंकापुढें दशांश चिन्ह घालण्यास विसरूं नको.

गणितफार लांबत चाललें म्हणजे तें तोकडें करण्याकरतां दुसरे सदरांतील एक अंक काप, आणि पहिले सदरांतील दोन अंक काप आणि पहिले सदरांत मूळाचे नवे नवे अंक न मिळवितां (४), (५), आणि (६) या कलमांत सांगितल्याप्रमाणें करीत जा.

ताळा. आलेल्या उत्तराचा घन करून पहावा.

उदाहरण १ लें. ९२६८५९३७५ ह्या संख्येचें घनमूळ काढ.

०	०	९२६८५९३७५ (९७५)
९	८१	७२९
९८	१६२	१९७८५९
२७७	२४३००	
२७७	१९३९	१८३६७३
२८४	२६२३९	१४१८६३७५
२९१०	८२२७००	
२९१५	१४५७५	१४१८६३७५
२९१५	२८३७२७५	००००००००

ह्या ठिकाणीं ९२६ ह्या शेवटचे भागांत ९ ह्याचा घन ७२९ हा जातो म्हणून घनमूळाचा पहिला अंक ९ आहे. हा पहिले सदरांतील शून्यखाली मांडून बेरीज घेतली ती ९ आली. ह्यांस आणखी ९ नीं गुणून गुणाकार ८१ आला, तो दुसरे सदरांतल्या शून्याखाली लिहिला. नंतर बेरीज केली ती ८१ आली, हीस ९ नीं गुणून गुणाकार ७२९ आला, तो तिसरे सदरांतील ९२६ ह्यांच्या खाली घालून वजाबाकी केली, आणि बाकी १९७ राहिले ह्यांवर पुढचे तीन अंक ८५९ हे घेतले.

आतां फिरून पहिले सदरापासून आरंभ केला. पहिले अंकांत ९ मिळविले; बेरीज १८ आली तीस आणखी ९ नीं गुणून गुणाकार १६२ आला, तो दुसरे सदरांत ८१ खाली लिहिला आणि बेरीज केली ती २४३ आली. पहिले सदरांत आणखी ९ मिळविले आणि २७ ह्यांवर एक शून्य चढविलें, आणि दुसरे सदरांत २४३ आले हेते त्यांवर दोन शून्ये चढविलीं. तदनंतर घनमूळांतला दुसरा अंक काढण्याकरितां तिसरे सदरांतील अंकास दुसरे सदरातील अं-

कांनीं भागून पाहिलें तों भाग ८ चा जातो असा सुमार झाला. परंतु हा तपासून पाहतां अधिक आहे असें समजल्यावर भाग ७ चा घेतला तो घनमूळांतला दुसरा अंक झाला. रीतीप्रमाणें हा पहिले सदरांतील २७० रांत मिळवून २७७ बेरजेस ७ नीं गुणलें आणि तो गुणाकार दुसरे सदरांत लिहिला. हे अंक वरील अंकांशीं मिळवून बेरीज २६२२९ आली, तीस ७ नीं गुणून जो गुणाकार आला तो तिसरे सदरांत लिहिला. आणि वरील अंकांत वजा करून १४१८६ बाकी राहिली तीवर पुढचे तीन अंक ३७५ घेतले. नंतर पहिले सदरांत ७ मिळवून बेरजेस ७ नीं गुणून गुणाकार १९८८ आला. तो दुसरे सदरांत मिळविला, आणि पहिले सदरांत आणखी ७ मिळवून त्या बेरजेवर एक शून्य दिलें, आणि दुसरे सदरांतील बेरजेवर २ शून्यें चढविलीं.

मागीलप्रमाणें फिरून दुसरे सदरांतील अंकांनीं तिसरे सदरांतील अंकांस भागून पाहिलें तों भागाकार ५ येतो, तो घनमूळांतला तिसरा अंक झाला. ह्यास पहिले सदरांत मिळवून आलेल्या बेरजेस ५ नीं गुणिलें, आणि त्या गुणाकारास दुसरे सदरांत मिळवून त्यांस आणखी ५ नीं गुणिलें, आणि गुणाकार १४१८६३७५ आला तो तिसरे सदरांत लिहिला, त्यांतील अंक आणि वरील रकमेचे सर्व अंक बराबर होते म्हणून वजाबाकी शून्य आली आणि हें कृत्य संपलें.

आतां ९७५ ह्यांचा जर घन करून पाहिला तर पूर्वी दिलेल्या संख्येइतका येतो म्हणून हें उत्तर बरोबर आहे असें समजावें.

गणित वाढत गेलें असतां त्याचा संक्षेप कसा करावा हें दाखविण्याकरितां एक दुसरें उदाहरण पुढें करून दाखविलें आहे. तें पाहिलें म्हणजे युक्ति ध्यानांत येईल.

गणितकर्त्यानिं इतकें मात्र लक्षांत ठेवावें कीं, जोपर्यंत पूर्णांकांशीं संबंध ठेवणें आहे तोपर्यंत संक्षेप करूं नये. दशांश भाग लागला म्हणजे रीतीप्रमाणें गणिताचा संक्षेप करावा.

उदाहरण. ७८३१४.६ ह्या संख्येचें घनमूळ काढ.

$\frac{0}{7}$..X४..	$\frac{0}{96}$..X४..	७८३१४.६०० (४२.७८३९५४.
$\frac{7}{7}$..X४..	$\frac{32}{700}$		$\frac{98314}{98314}$
१२०				
$\frac{2}{922}$..X२..	$\frac{244}{4044}$..X२..	$\frac{90000}{4226600}$
$\frac{2}{924}$..X२..	$\frac{244}{429200}$		
१२६०				
$\frac{6}{9267}$..X७..	$\frac{669}{53069}$..X७..	$\frac{3066403}{460997}$
$\frac{6}{9273}$..X७..	$\frac{669}{546817}$		
१२८१				
००००				
$\frac{9}{92109}$..X८..	$\frac{903}{5409}$..X८..	$\frac{430400}{29709}$
१२१८१	..X८..	$\frac{903}{549014}$..X३..	$\frac{96479}{4230}$
		54910	..X९..	$\frac{4979}{266}$
		54190	..X५..	$\frac{264}{264}$
		51490	..X४..	$\frac{23}{23}$
				$\frac{9}{9}$

वर जें उदाहरण करून दाखविलें आहे, त्यांत पहिले सदरा-पासून दुसरे सदरांत, आणि दुसरे सदरापासून तिसरे सदरांत अंक कसकसे येत गेले तें दाखविण्याकरितां ठिपक्यांच्या रेषा काढल्या आहेत. त्यांत जे जे वेगळाले गुणक आले तेही दाखविले आहेत. पहिल्यानें हार्नरच्या रीतीप्रमाणें ४२७ हे तीन अंक साधले. ते साधतांना पहिलें सदर १२८१ पर्यंत येऊन पोचलें, दुसरें सदर ५४६९८७ पर्यंत येऊन पोचलें आणि तिसरे सदरांत ३७६६४८३ हे अंक वजा झाले. आतां आम्हीं गणितांत संक्षेप करण्यास आरंभ केला. तिसरे सदरांत जे शेष अंक उरले होते, त्यांच्या वर तीन नवीं शून्ये घेण्याबद्दल, ते तसेच राखून दुसरे सदरांतील एक अंक छेकिला, आणि पहिले सदरांतील दोन अंक छेकले. तेव्हां दुसरे सदरांत ५४६९८ आणि पहिले सदरांत १२ इतके अंक मात्र राहिले. पुढचा भाग कितीचा जातो तो दुसरे सदरांतील ५४६९८ यांनी पाहिला, तेव्हां तो ८ चा जातो असें

समजलें. तेव्हां पहिले सदरांतील कापिलेले अंकापासून हातचे मात्र घेऊन ८ यांनी १२ ह्यांस गुणिलें. गुणाकार १०३ आला तो दुसरे सदरांत मिळविला, आणि बैरजेस ८ नीं गुणून ४३८४०८ ही संख्या आली ती तिसरे सदरांत वजा दिली. बाकी २१७०९ राहिले. आतां दुसरे सदरांत आणखी १०३ मिळवून बेरीज ५४९०४ आली, त्यांतील वरील एक अंक छेकून ५४९० राहिले. त्याच्या पुढचा भाग २१७०९ ह्यांस कितीचा बसतो तो पाहिला तो ३ चा बसला. दुसरे सदरांतील एक अंक कापिला आहे, पहिले सदरांत राहिलेले दोन अंक तेही कापिले, म्हणजे पहिले सदर शून्य झालें. आतां पहिले सदरांतून दुसरे सदरांत अंक घेणें नाहीं. दुसरे सदरांतील छेकल्याशिवाय राहिलेले अंकांस, वर ३ चा भाग बसला आहे, त्यानें गुणून छेकलेले अंकांचे हातचे मात्र घेऊन १६४७१ आले ते तिसरे सदरांत वजा दिले. बाकी ५२३८ राहिले. पुढे दुसरे सदरांतील अंकांपैकीं दर वेळेस एक एक अंक छेकित जाऊन साधे भागाकाराप्रमाणें, भाजक संपत तोपर्यंत भाग बसवीत गेले. याप्रमाणें ही कृति पुरी केली.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

पुढील उदाहरणे विद्यार्थ्यांनीं पहिल्या किंवा हार्नर साहेबांच्या रीतीनें सोडवावीं.

- १ उ. ३२७६८; ११५७.६२५; २४७६७३१५२.
- २ उ. ३२४६१७५९; ७८६१०५६३१८७; ५००८४४८.
- ३ उ. १०२९५०३; ४१७३.२८१; १३५७९६.७४४.
- ४ उ. १०२५; ३; २१९७५८३; ४.
- ५ उ. २५९९६०९३७५; २४७७९१४८६०४१.
- ६ उ. १३८.३४८८४४४८; ५१६४५.००८७४२४.
- ७ उ. $\frac{५}{६}$ आणि $३१\frac{३}{६}$ यांचीं घनमूळें एक दशांश पर्यंत.
- ८ उ. $\frac{४}{६}$ आणि $१\frac{१}{६}$ यांचीं घनमूळें दोन दशांश पर्यंत.
- ९ उ. ६८; ०६५४; १७.४; १८.०३६.
- १० उ. एकरूप तीन संख्यांचा गुणाकार ३१८९५०६०४८ इतका आहे, त्या संख्या कोणत्या.

श्रेढी.

ज्या पंक्तीतील संख्या कांहीं नियमानें चढत किंवा उतरत जातात, म्हणजे वाढत किंवा कमी होत जातात, त्या पंक्तीला श्रेढी म्हणतात. उदाहरणार्थ पुढील १ ली व २ री ह्या श्रेढी पहा.

श्रेढीतील संख्यांस पदे, पहिल्या पदास आदि, शेवटल्या पदास अंत्य, पदांच्या संख्येस गच्छ, आणि सर्व पदांच्या बेरजेस सर्वधन, अशीं नावें आहेत.

श्रेढी अनेक प्रकारच्या आहेत. पैकीं ह्या पुस्तकांत गणित-श्रेढी व भूमितिश्रेढी ह्या दोन सांगावयाच्या आहेत.

गणितश्रेढी

ज्या श्रेढीतील संख्या नेमलेल्या अंतरानें चढत जातात, किंवा उतरत जातात, तिला गणितश्रेढी म्हणतात. जशी—

१ ली. २, ६, १०, १४, १८, २२, २६, ३०, ३४, ३८, ४२.

२ री. ३४, ३०, २६, २२, १८, १४, १०, ६, २, ३०, ३४, ३८, ४२.

१ ल्या श्रेढीत कोणत्याही संख्येच्या पुढची संख्या ४ ह्या अंतरानें वाढते म्हणून ही चढती गणितश्रेढी आहे. २ च्या श्रेढीत कोणत्याही संख्येच्या पुढची संख्या ४ ह्या अंतरानें कमी होते म्हणून ही उतरती गणितश्रेढी आहे.

गणितश्रेढीतील पदे (म्ह० संख्या) ज्या अंतरानें एकापुढें एक चढत किंवा उतरत जातात त्या अंतरास उत्तर म्हणतात.

नियम १ ला—गणितश्रेढीतील शेवटले पद काढणें झाल्यास, उत्तर एकोनगच्छानें गुणून तो गुणाकार पहिल्या पदांत चढती श्रेढी असल्यास मिळवावा, व उतरती श्रेढी असल्यास वजा करावी.

ह्या विचारा सार्थी वरची १ली श्रेढी घ्या हिच्या २ ह्या आदि पदांत उत्तर मिळविल्यानें २ रें पद येतें, उत्तराची २ पद मिळविल्यानें ३ रें पद येतें, ह्या क्रमावरून उत्तराची गच्छ उणा १ ही पद मिळविल्यानें अंत्यपद ३४ हें येईल. कोणतीही चढती गणितश्रेढी आदिपदांत अशाच उत्तराच्या पटी मिळून लांबावयाची, म्हणून हा मिळविणीचा नियम चढत्या गणितश्रेढी विपर्यां खरा असला पाहिजे.

वरच्या २ च्या श्रेढीच्या आदिपदांत उत्तराची गच्छ उणा १ ही पट वजा करीत गेल्यानें ती श्रेढी लांबत चालते, ह्याच रीतीनें कोणतीही उत्तरती गणितश्रेढी लांबावयाची, म्हणून हा वजा करण्याचा नियम उत्तरत्या गणितश्रेढी विषयीं खरा असला पाहिजे

उदाहरण.— आदिपद २ उत्तर ३, गच्छ १०, ह्यांपासून शे-
वटचें पद काढ.

$$\text{शेवटचें पद} = २ + ३ \times ९ = २९$$

दुसरीं उदाहरणे.

आदि १० गच्छ १०, उत्तर ५, अंत्यपद = ४५१०
 आदि ११ गच्छ २५, उत्तर ११, अंत्यपद = ३६११
 आदि २० गच्छ ५१, उत्तर १, अंत्यपद = ३२११
 आदि ५ गच्छ ५, उत्तर ५, अंत्यपद = २५

उपनियम— गणित श्रेढींत आदिपद व अंत्यपद यांची वजा-
बाकी उत्तरा च्या एकोनगच्छा इतकी पट असते.

उदाहरण१— एका श्रेढींत १० पदे आहेत, आदि ५, अं-
त्य ३२, तेव्हां मधलीं पदे कोणतीं तीं सांग.

येथें एकोनगच्छ ९ आहे, म्हणजे आदिपदापुढें ९ पदे आहेत,
म्हणून आदिपदांत उत्तराची ९ पट मिळून अंत्यपद झालें आहे
आदि व अंत्य ह्यांची वजाबाकी २७ म्हणून प्रत्येक पदांचें अंतर
म्हणजे उत्तर = $\frac{२७}{९} = ३$ आहे. ह्यावरून श्रेढीचीं पदे,
५, ८, ११, १४, १७, २०, २३, २६, २९, ३२, हीं आहेत.

दुसरीं उदाहरणे.

श्रेढीचीं पदे २५, आदि १०, अंत्य १०६, .. उत्तर = ४.
 ,, पदे १२, आदि २, अंत्य ११२, .. उत्तर = १०.
 श्रेढीचीं पदे १०२, आदि २, अंत्य २०४, .. उत्तर = २.
 ,, पदे ४, आदि १, अंत्य २११, .. उत्तर = ११.

उदाहरण २— आदिपद १०, अंत्य १०६, उत्तर ४
तेव्हां श्रेढींत पदे किती आहेत तीं सांग.

$$\text{गच्छ} = \frac{\text{अंत्य—आदि}}{\text{उत्तर}} + १ = \frac{१०६—१०}{४} + १ = \frac{९६}{४} + १ = २५.$$

दुसरीं उदाहरणें.

आदि २, अंत्य ११२, उत्तर १०, .. श्रेढीचीं पदे = १२.

आदि २, अंत्य ५०४, उत्तर २, .. श्रे. प. = २५२.

आदि २॥ अंत्य १, उत्तर ॥.. श्रे. प. = ४.

आदि ३२, अंत्य ५, उत्तर ३, .. श्रे. प. = १०.

नियम २रा- गणित श्रेढीचें सर्वधन काढणें झाल्यास आदि व अंत्य ह्यांच्या बेरजेस गच्छानें गुणून त्या गुणाकाराची निम्पट करावी ती सर्वधन होईल.

कारण दिलेले श्रेढीचे पदांखाली तींच पदे उलट क्रमानें मांडलीं, आणि त्यांच्या बेरजा केल्या, तर त्या सर्व बेरजा सारख्या येतात. उदाहरणार्थ पुढील बेरजा पहा.

$$५ \ ९ \ १३ \ १७ \ २१ \ २५ \ २९ = ११९$$

$$२९ \ २५ \ २१ \ १७ \ १३ \ ९ \ ५ = ११९$$

$$\hline ३४ \ ३४ \ ३४ \ ३४ \ ३४ \ ३४ \ ३४ = २३८$$

वरील उदाहरणांत आदि व अंत्य ह्यांची बेरीज ३४ ह्या बरोबर सर्व पदांच्या बेरजा आहेत, व ह्या उदाहरणांत गच्छ ७ आहे. म्हणून सर्व बेरजांची बेरीज $३४ \times ७ = २३८$ आहे, आणि ही प्रत्येक श्रेढीतील पदांच्या बेरजेचे दुप्पट आहे. म्हणून श्रेढीतल्या पदांची बेरीज म्हणजे सर्वधन काढणें झाल्यास आदि व अंत्य ह्यांचे बेरजेस गच्छानें गुणून आलेल्या गुणाकाराची निम्पट केली पाहिजे.

उदाहरण- आठ पदांची श्रेढी आहे तिचें आदिपद ४ व अंत्यपद १८ आहे, तेव्हां सर्वधन किती होईल तें सांग.

आदिपद ४

अंत्यपद १८

बेरीज २२

गच्छ ८

२) १७६

८८ हें सर्वधन.

दुसरीं उदाहरणे.

आदि	५, अंत्य	२०, गच्छ	१०,	सर्वधन	१२५
आदि	१०, अंत्य	२, गच्छ	४,	सर्वधन	२४
आदि	१, अंत्य	१००, गच्छ	१००,	सर्वधन	५०५०
आदि	०, अंत्य	६०, गच्छ	५,	सर्वधन	१५०

नियम ३रा- गणितश्रेढीचें आदिपद उत्तराच्या निमें असलें, तर $\frac{१}{२}$ उत्तर व गच्छाचा वर्ग ह्याचा गुणाकार तिचें सर्वधन दाखवील. ह्या प्रकरणाच्या आरंभाची १ ली श्रेढी ह्या प्रकारची आहे. ती श्रेढी उत्तराच्या मापानें मोजली, तर त्या मोजदार्तीची श्रेढी.

॥ १॥ २॥ ३॥ ४॥ ५॥ ६॥ ७॥ ८॥ ९॥ १०॥

अशी होते. ह्या गणितश्रेढीचें २ रेंपद १॥ येतें, ३ रेंपद २॥ येतें, ह्या प्रमाणें कोणतेंही पद गच्छापेक्षां ॥ नेंच कमी येतें. ह्या वरून ही श्रेढी आरंभापासून कितीही पदांची घेतली, तरी हिच्या आद्यंतांची बेरीज गच्छा एवढी येईल, व तिला गच्छार्धानें गुणिलें म्हणजे $\frac{१}{२}$ गच्छ एवढें तिचें सर्वधन येईल. हें सर्वधन एकडे किंवा उत्तराचीं मापें दाखवील, यास्तव त्याला उत्तरानें गुणिलें म्हणजे खरें सर्वधन येईल. म्हणून

$$\text{सर्वधन} = \frac{१}{२} \text{ उत्तर} \times \text{गच्छ}$$

असें येतें. हेंच वरील नियमांत सांगितलें आहे.

उदाहरण - पदार्थ उंच ठिकाणा पासून सुटला असतां, भूमीचे आकर्षणामूळें, १ ले सेकंदांत १६ फूट, २ रे सेकंदांत ४८ फूट, ३ रे सेकंदांत ८० फूट, ह्या प्रमाणें उंची क्रमितो, तर सुटल्या पासून ८ सेकंदांत किती उंची क्रमील ?

येथें दर एक सेकंदांतल्या क्रमणाला पद म्हटलें तर हीं पदे ३२ फूट ह्या उत्तरानें वाढत आहेत, व ह्या गणितश्रेढीचे आदिपद उत्तराच्या निमें १६ फूट आहे, म्हणून १ ल्या पासून ८ पदाचें सर्वधन, किंवा.

$$८ \text{ सेकंदांतील क्रमण} = १६ \text{ फूट} \times ८ = १०२४ \text{ फूट.}$$

दुसरीं उदाहरणे.

१ ३ ५ ७ ९ ११ १३ १५ १७ १९ २१ २३ २५ २७ २९ ३१ ३३ ३५ ३७ ३९ ४१ ४३ ४५ ४७ ४९ ५१ ५३ ५५ ५७ ५९ ६१ ६३ ६५ ६७ ६९ ७१ ७३ ७५ ७७ ७९ ८१ ८३ ८५ ८७ ८९ ९१ ९३ ९५ ९७ ९९ १००

३ ९ १५ इ० २५ पदांची बेरीज सांग. उत्तर १८७५

३.५ १०.५ १७.५ इ० २५ पदांची बेरीज सांग. उत्तर २१८७.५

चंद्राच्या पृष्ठभागी उंच ठिकाणापासून सुटलेला पदार्थ, चंद्राच्या आकर्षणामुळे, १ ले सेकंदांत २.८८ फूट, २ रे सेकंदांत ८.६४ फूट, ३ रे सेकंदांत १४.४० फूट, या प्रमाणे उंची क्रमिती, तर सुटल्या पासून ८ सेकंदांत किती उंची क्रमील ?

उत्तर १८४.३२ फूट

विद्यार्थ्यांनीं पुढचे उपनियम उदाहरणांनीं तपासून पाहावे.

१ पुष्कळ संख्या गणितप्रमाणांत (म्हणजे गणित श्रेढींत) असल्या तर आदि व अंत्य ह्यांच बेरजेबरोबर त्यांपासून सारख्या अंतरावरच्या कोणत्याही मध्यपदांची बेरीज असत्ये. पदे विषम असल्यास मध्यपदाची दुप्पट त्या बेरजेबरोबर असते.

चार संख्या गणितप्रमाणांत (म्हणजे गणित श्रेढींत) असल्या तर आदि व अंत्य ह्यांची बेरीज मध्यपदांचे बेरजेबरोबर असते.

३ तीन संख्या गणितप्रमाणांत (म्हणजे गणितश्रेढींत) असल्या तर आदि व अंत्य ह्यांचे बेरजेबरोबर मध्यपदाची दुप्पट असते.

उदाहरण- आदि पद २, अंत्यपद १०, तेव्हां मध्यपद किती तें सांग.

आदि अंत्यपदांची बेरीज $२ + १० = १२$, ही मध्यपदाचे दुप्पट आहे म्हणून मध्यपद ६ हें उत्तर.

दुसरीं उदाहरणे.

आदि ५, अंत्य २०, मध्यपद $= \frac{५+२०}{२} = \frac{२५}{२} = १२\frac{१}{२}$ ||

आदि १०, अंत्य २, म. प. $= \frac{१०+२}{२} = \frac{१२}{२} = ६$.

आदि १, अंत्य १००, म. प. $= \frac{१+१००}{२} = \frac{१०१}{२} = ५०\frac{१}{२}$ ||

आदि ०, अंत्य ६०, म. प. $= \frac{०+६०}{२} = \frac{६०}{२} = ३०$.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

१ उ. एक गृहस्थ पर्वतीस गेला, तेव्हां त्यानें पहिले पायरीवर एक

सुपारी, दुसरीवर ३, तिसरीवर ५, ह्याप्रमाणें १०८ पायऱ्यांपर्यंत चढत्या सुपाऱ्या ठेविल्या. तेव्हां सर्व सुपाऱ्या किती झाल्या; व एक शेरांत १०० सुपाऱ्या रहातात. तर ह्याप्रमाणें सर्व सुपाऱ्या किती शेर होतील ?

- २ उ. आदि२॥, अंत्य१५॥, आणि गच्छ २२तेव्हां सर्वधन काय ?
- ३ उ. २४ तासांत घड्याळाचे ठोंके किती वाजतात तें सांग. १२ तास वाजल्यावर फिरून १, २, ३, ह्याप्रमाणें वाजूं लागतात.
- ४ उ. दोन वाटसरांमध्ये २५ कोसांचें अंतर होतें, त्यांत जो मार्ग होता तो दररोज १० कोस चालतो, व पुढें होता तो १२ कोस चालतो, तेव्हां त्या दोघांत, २५० कोस अंतर किती दिवसांनी पडेल तें सांग.
- ५ उ. एका हौदास तीन नळ होते, त्यांत एका घटकेंत एकांतून २ घागरी, दुसऱ्यांतून ६ घागरी, तिसऱ्यांतून १० घागरी, ह्याप्रमाणें प्रत्येक नळांतून पाणी येतें, तर तीनही नळ एकदम सोडले तर एका दिवसांत किती घागरी पाणी येईल तें सांग.

भूमितिश्रेढी.

ज्या श्रेढींतल्या संख्या नेमलेल्या गुणोत्तरानें (म्हणजे पटीनें) चढत जातात, किंवा उतरत जातात, तिला भूमितिश्रेढी म्हणतात. जशी—

१ ली ३, ६, १२, २४, ४८, ९६, १९२, इ०

२ री १९२, ९६, ४८, २४, १२, ६, ३, इ०

ह्यांतील १ ल्या चढत्या श्रेढीचे गुणोत्तर २ आहे व २ न्या उतरत्या श्रेढीचे गुणोत्तर $\frac{1}{2}$ आहे. ह्या कोणत्याही श्रेढीच्या १ ल्या पदास तिच्या गुणोत्तरानें गुणिलें तर २ रें पद येतें, गुणोत्तराच्या वर्गानें गुणिलें तर ३ रें पद येतें, ह्या क्रमा वरून गुणोत्तराच्या एकोन गच्छा इतक्या घातानें गुणिलें तर अंत्यपद येईल. म्हणून

नियम १ ला- भूमितिश्रेढीचे आदिपदास गुणोत्तराचा एकोन-गच्छाइतका घात करून त्यानें गुणावें म्हणजे अंत्यपद येईल. म्हणजे

गच्छ-१

अंत्य = आदि × गुणोत्तर १

उदाहरण- भूमितिश्रेढीचे आदिपद २ व गुणोत्तर ३ आहे तर ५ वें पद काय येईल ?

$$\text{अंत्य} = २ \times ३^{५-१} = २ \times ३^४ = १६२ \text{ हें उत्तर.}$$

दुसरीं उदाहरणे

आदिपद ३ व गुणोत्तर २ तर सहावें पद काय ?

$$\text{सहावें पद} = ३ \times २^५ = ३ \times ३२ = ९६.$$

आदि १ व गुणोत्तर ५ तर, ५ वें पद = ६२५.

आदि १००, गुणोत्तर ॥, तर ३ रें पद = २५.

आदि २०, गुणोत्तर १॥, तर ४ थें पद = ६७॥.

नियम ३ रा- भूमितिश्रेढीत शेवटच्या पदांचा गुणाकार तेथून समान अंतरा वरील पदांच्या गुणाकारा बरोबर असतो, व मधल्या पदाच्या वर्गा बरोबर असतो.

ह्या नियमाची उपपत्ति गुणाकाराच्या प्रत्यक्ष प्रमाणावरून विद्यार्थ्यांनी लावावी.

उपनियम- भूमितिश्रेढीतील तीन क्रमिक पदे घेतलीं तर त्यांनील आदि व अंत्य ह्यांचा गुणाकार मध्यम पदाच्या वर्गा बरोबर असतो.

उदाहरण - तीन क्रमिक पदां पैकी आदि ८ व अंत्य १८ तर मध्यम पद काय ?

$$\text{मध्यमपद} = ८ \times १८ = १४४$$

$$\therefore \text{मध्यमपद} = \sqrt{१४४} = १२$$

टीप- भूमितिश्रेढीतील पद्य क्रमिक प्रमाणांत असतात. उदाहरणार्थ १ ल्या श्रेढीतील पदे ६, १२, १८, हीं घेतलीं तर त्यांत ६ : १२ :: १२ : १८ असें प्रमाण असतें. याही आधारानें वरचा उपनियम सिद्ध होतो.

दुसरीं उदाहरणे.

आदिपद ४, अंत्यपद ९, तर मध्यपद = $\sqrt{४ \times ९} = ६$

आदि १५, अंत्य ६०, तर म. प. = $\sqrt{१५ \times ६०} = ३०$

आदि २, अंत्य २५, तर म. प. = $\sqrt{५०} = ५\sqrt{२}$

भूमिति श्रेढीविषयी जितकें वर सांगितलें आहे तितकें अंकग.

णितांत पुरे आहे, अधिक माहिती करून घेणें असल्यास विद्यार्थ्यांनं बीजगणित पहावें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- १ उ. ४ आणि ९ ह्यांचे भूमितीमध्यप्रमाणाची ३॥ पट किती ?
- २ उ. आदि २, गुणोत्तर १४, गच्छ ४, सर्वधन काय तें सांग.
- ३ उ. आदि १, गुणोत्तर २, गच्छ ६४, सर्वधन काय येईल ?
- ४ उ. अखंड चार पदांची श्रेढी आहे, तिचें आदिपद ४, अंत्य ९, मधलीं पदें कोणतीं ?
- ५ उ. आदि ९, अंत्य ९०, गच्छ ४, गुणोत्तर किती तें सांग ?
वरच्या १ ल्या पद्धतींतल्या बरोबरीला आदींनं भागिले तर भागाकार बरोबर येतील (व. प्र. ३). म्हणून.

$$\begin{array}{l} \text{गच्छ-१} \\ \text{गुणोत्तर} = \end{array} \frac{\text{अंत्य}}{\text{आदि}}$$

उपनियम- भूमितिश्रेढीचें अंत्यपद भागिलें आदिपद हा भागाकार गुणोत्तराच्या एकोनगच्छा एवढ्या घाताबरोबर असतो.

उ. आदिपद २, अंत्यपद ५४, आणि गच्छ ४, या श्रेढीचें गुणोत्तर काढून ह्या दोन पदांमधली २ भूमिति मध्यप्रमाणे किंवा क्रमिकपदें काढून दारवीव.

$$\text{गुणोत्तर} = \frac{५४}{२} = २७$$

$$\therefore \text{गुणोत्तर} = \sqrt[३]{२७} = ३$$

येथें २ ६ १८ ५४ ही दिलेली भूमितिश्रेढी आहे आणि ६ व १८ ही इच्छिलेली भूमिति मध्य प्रमाणें किंवा क्रमिकपदें आहेत.

दुसरीं उदाहरणें.

१ उ. आदि १, अंत्य ४९, गच्छ ३ गुणोत्तर काय ? उ. ७.

२ उ. आदि ३२०, अंत्य ५, गच्छ ४, गुणोत्तर काय ?

उ. ४.

नियम २ रा- भूमितिश्रेढीचें सर्वधन काढणें, तर तिचें अंत्यपद गुणोत्तरानें गुणून त्या गुणाकारांत आदिपद वजा करावें, आणि त्या वजाबाकीस एकोन गुणात्तरानें भागावें. म्हणजे

$$\text{सर्वधन.} = \frac{\text{अंत्य} \times \text{गुणोत्तर} - \text{आदि}}{\text{गुणोत्तर} - १}$$

कारण, २, ६, १८, ५४, १६२, ह्या श्रेढीच्या बेरजेला सर्व-
धन म्हटलें, तर ह्या श्रेढीची ३ पद केल्यानें असें येतें कीं,

$$३ सर्वधनें = ६ + १८ + ५४ + १६२ + ४८६$$

व. सर्वधन = २ + ६ + १८ + ५४ + १६२

वजाबाकीनें, २ सर्वधनें = ४८६ - २

$$\text{सर्वधन} = \frac{४८६ - २}{२} = २४२$$

असें येतें. या युक्तीनें कोणत्याही भूमितिश्रेढीचें सर्वधन का-
ढितां येईल हें उघड आहे. येथें ४८६ हे अंत्यपद १६२ व गुणो-
त्तर ३ ह्यांचा गुणाकार दाखवितात, ह्यांत उणे केलेले २ हे आदिपद
दाखवितात, आणि छेदस्थलीचे २ हे गुणोत्तरांत १ वजा करून
येणारी बाकी दाखवितात. ह्यांच्या भागाकारानें सर्वधन दाखविलें
जातें म्हणून हीच कृती वरच्या पद्धतींत व नियमांत दिली आहे.

उदाहरण १ लें - २, ४, ८ इ. श्रेढीच्या ७ पदांचे सर्वधन काढा.

ह्या श्रेढीचें गुणोत्तर २ आहे म्हणून नि० १ प्रमाणे.

$$\text{अंत्यपद } ७ \text{ वें} = २ \times २ = १२८$$

व नि. २ प्रमाणें.

$$\text{सर्वधन} = \frac{१२८ \times २ - २}{१} = २५४ \text{ हें उत्तर.}$$

उदाहरण २ रें - १, $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{९}$, इ. पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढा.

ह्या श्रेढीचे गुणोत्तर $\frac{२}{३}$ आहे म्हणून नि. १ प्रमाणें.

$$५ \text{ वें पद} = १ \times \left(\frac{२}{३}\right)^४ = \frac{१६}{८१}$$

व नि. २ प्रमाणें.

$$\begin{aligned} \text{सर्वधन} &= \frac{\frac{१६}{८१} \times \frac{२}{३} - १}{\frac{२}{३} - १} = \frac{-\frac{२११}{२४३}}{-\frac{१}{३}} \\ &= २ \frac{४९}{८१} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

उदाहरण ३ रें - .४३४३४३४३ इ. आवतदशांशांची श्रेढी
अनंता पावेतो घेतली तर तिचें सर्वधन काय होईल ?

ह्याश्रेढीचें रूप व्यवहारी अपूर्णाकांत असें येतें कीं, $\frac{४३}{१००} +$

$\frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} +$ इ. ह्या श्रेढींत $\frac{१}{१००}$ हें गुणोत्तर आढळतें म्ह-

पून ही भूमितिश्रेढी आहे. हिचें सर्वधन दाखविण्याला स घेतला आणि हिची १०० पट केली. तर

$$१०० स = ४३ + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००^२} + \frac{४३}{१००^३} + \frac{४३}{१००^४} + इ.$$

$$व स = \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००^२} + \frac{४३}{१००^३} + \frac{४३}{१००^४} + इ.$$

वजावाकीनें. ९९ स = ४३. म्हणून स = $\frac{४३}{९९}$ हें उत्तर.

दुसरीं उदाहरणें.

आदिपद १, अंत्यपद ५१२, गुणोत्तर २, तर सर्वधन = १०२३.

आदिपद १०, अंत्यपद २०४८०, गुणोत्तर २, तर सर्वधन = ४०९५०.

क्षेत्रफल व घनफल.

रंग देणें, तावदानें वसविणें, तक्तपोशी करणें, घरावर कौलें घालणें, भिंती बांधणें, गिलावा करणें, इत्यादि प्रकारचें सुतार गंवडी वगैरे कारागीर लोकांचें काम मोजून त्याचा आकार करण्यास फारसें गणित लागत नाहीं. क्षेत्रफल, घनफल, ह्यांची थोडीशी माहिती असल्यानें कार्य होतें; म्हणून त्या संबंधानें कांहीं रीति घेथें सांगितल्या आहेत.

एक हात लांब, व एक हात रुंद, अशा जागेस एक चौरस हात जागा म्हणतात, व ह्याप्रमाणें चौरस फूट, चौरस गज, चौरस-इंच, चौरस काठी, इत्यादिकांविषयीं समजावें.

एक धोतर १० हात लांब आणि ३ हात रुंद आहे, तर त्यांत एक हात लांब व एक हात रुंद असे चौरस हात ३० आहेत.

कारण त्यांत दहा दहा चौरस हातांच्या तीन ओळी आहेत.

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, काढकोन चौकोनी किंवा समांतर भुज चौकोनी आकृतीचें क्षेत्रफल काढणें झाल्यास त्याची लांबी व रुंदी (म्हणजे लंबरूप उंची) ह्यांचा गुणाकार करून जें येईल तें सांगवें (यु. वू. १ सि. ३५ पहा). गुणाकार करण्याच्या पूर्वी गुण्य व गुणक हे एका नांवाचेमात्र करावे.

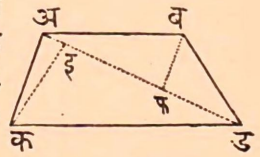
उ. एका चौकोनी आंगणाची लांबी ३० फूट आहे आणि रुंदी २० फूट आहे; तर त्याचें क्षेत्रफळ $३० \times २० = ६००$ चौ. फूट आहे.

त्रिकोणाकृतीचें क्षेत्रफळ काढणें झाल्यास, त्याचे पायाचे लांबीला त्याच्या लंबोचीने गुणावें; गुणाकाराचें अर्ध त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळावरवीर होईल (यु. बू १ सि. ४१ पहा).

उ. एका त्रिकोणाकृतीचा पाया जर ३० फू. लांब आहे, आणि लंबोची २० फूट आहे; तर त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $३० \times २० \div २ = ३००$ चौ. फू. होईल.

त्रापिज्यमाकृति क्षेत्र असल्यास त्याच्या एका कर्णाच्या लांबीस त्या कर्णावर जे समोरच्या दोन कोपऱ्यांतून लंब येतील, त्यांच्या बेरजेच्या अर्धानें गुणावें. गुणाकार त्याचें क्षेत्रफळ होईल.

उ. बाजूच्या त्रापिज्यम आकृतीत
अड = ३० फू. कइ = १२ फू. आणि
बफ = १० फूट असे मापून आले आहेत.
तर त्याचें क्षेत्रफळ = $\frac{१० + १२}{२} \times ३० = ३३०$
चौ. फू. हें उत्तर.



वर्तुळ- वर्तुळांत त्रिज्येचे दुप्पट व्यास असतो व्यासाला ३.१४१६ यांणी गुणिलें असतां वर्तुळाचा परिघ येतो. त्रिज्येचे वर्गास ३.१४१६ यांणी गुणिलें म्हणजे वर्तुळाकृतीचें क्षेत्रफळ येतें.

उ. एका वर्तुळाची त्रिज्या ३॥ फूट आहे, तर त्याचा व्यास ७ फूट असेल आणि परिघ २२ फूट असेल. क्षेत्रफळ = $(३॥)^२ \times ३.१४१६ = ३८.४८४६$ चौ. फू होईल.

उदाहरण.

१०० हात लांब, व २० हात उंच अशा भिंतीस चुना लावावयाचा आहे, व त्याचा दर, एक चौरस हातास पाव आणा याप्रमाणें आहे, तेव्हां सर्व चुन्याचा आकार काय होईल ?

$१०० \times २० = २०००$ इतके चौरस हात जागेस रंग द्यावयाचा आहे, आणि रंगाचा दर, चौरस हातास ८॥ आणा आहे; म्हणून एकंदर खर्च २००० पाव आणे म्हणजे ३१॥ रुपये लागेल.

२ रें उदाहरण. ६० हात लांब आणि १५ हात रुंद अशा

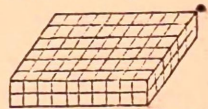
छपरावर कौलें घालावयार्ची आहेत, त्यास एक चौरस हात जागेत २५ कौलें राहतात, आणि कौलांचा दर, शेंकडा ६॥ आहे, तेव्हां एकंदर किती रुपयांची कौलें लागतील ?

छपर $६० \times १४ = ९००$ इतके चौरस हात आहे, व एक हात जागेत २५ कौलें राहतात, तेव्हां सर्व छपरास $९०० \times २५ = २२५००$ इतकी कौलें लागतील, व एकंदर खर्च $\frac{२२५०० \times ६॥}{१००} = ५६२॥$ आणे = ३५६॥ रुपये, लागेल.

एक हात लांब, एक हात रुंद, व एक हात उंच असें जें भरीव त्यास एक घनहात म्हणतात.

एक ओटा १० हात लांब, ६ हात रुंद आणि दोन हात उंच असला तर त्याचें घनफळ $१० \times ६ \times २ = १२०$ घनहात आहे.

कारण, खालचे ओळीत $१० \times ६ = ६०$ घनहात आहेत, व असे दोन थर आहेत म्हणून एकंदर १२० घनहात झाले.



म्हणून भरीव पदार्थाचें घनफळ काढणें झाल्यास लांबी, रुंदी व उंची त्यांचा गुणाकार करावा.

उदाहरण पहिलें.

८० हात लांब, २० हात उंच आणि १॥ हात रुंद अशी भिंत बांधावयाची आहे, तर, तिचें काम एकंदर किती घनहात होईल, व शेंकडा बारा आणेप्रमाणें त्या कामाचा आकार काय होईल ?

$८० \times २० \times १॥ = २४००$ घनहात एकंदर काम आणि $२४ \times १२ = २८८$ आणे म्हणजे १८ रुपये आकार हें उत्तर.

उदाहरण दुसरें.

एक टाकें ३ हात लांब, २ हात रुंद आणि एक हात ओंड असें आहे, त्यांत १० घागरी पाणी राहते, तर १५ हात लांब, १० हात रुंद आणि १२ हात ओंड असा एक हौद आहे त्यांत किती घागरी पाणी राहिल ?

$३ \times २ \times १ = ६$ घनहात जागेत १० घागरी पाणी राहते, तेव्हां $१५ \times १० \times १२ = १८००$ घनहात जागेत $\frac{१८०० \times १०}{६} = ३०००$ घागरी पाणी राहिल, हें उत्तर.

कारागीर लोकांच्या कामाचा आकार करण्याकरितां त्या पुढील गोष्टी लक्षांत ठेवण्याजोग्या आहेत.

तक्तपोशी, फरसबंदी, भिंती, वगैरे त्यांची मोजणी गजानें किंवा फुटानें करितात. कामाचा दर १०० फुटींवर किंवा गजांवर ठरवितात.

धोंडे किंवा खंडी, यांचा दर हल्लीं १०० घनफुटींवर ठरवितात.

माती, रेंती वगैरे फऱ्यांनीं मोजतात. १ फरा=२ घनफूट. या फऱ्याला मण अशीही संज्ञा आहे.

हौदांतील किंवा टाक्यांतील पाणी हांड्यांनीं किंवा घनफुटींत किंवा ग्यालनांत मोजतात. एका हांड्यांत सरासरी एक घनफूट पाणी राहते.

धान्यार्ची पेंवे, कोठारें, भोत वगैरे त्यांत धान्य कितो राहिल त्याचा अजमास फरे, किंवा खंडी, किंवा पळे त्यांनीं करतात. एक घनहात जागेंत दोन फरे धान्य राहते, व पुण्याच्या एक खंडी धान्यास ४० घनफूट जागा लागते.

अरेकसाचें काम दोरीनें किंवा गजानें मोजतात. एक गज म्हणजे २४ तसू लांब आणि ६ तसू रुंद; एक दोरी म्हणजे ४ गज किंवा १२ फूट लांब आणि ६ तसू किंवा ९ इंच रुंद.

गर्भावरून घेर स्थूलमानानें काढणें झाल्यास ७ : २२ : : गर्भा. : घेर. हें प्रमाण घेतात, सूक्ष्ममानानें काढणें झाल्यास ११३ : ३५५ हें प्रमाण घेतात. सामान्य व्यवहारांत १ : ३.१४१६ हें प्रमाण घेतात. गर्भा म्हणजे व्यास.

विहिरीची खोली सांगणें झाल्यास अमुक पुरुष खोल आहे असें सांगतात. एक पुरुष म्हणजे एक बांब किंवा ६ फूट लांब दोरी समजावी.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१ उ. १० हात लांब, १० हात रुंद व २ हात उंच असा ओटा घाला-वयाचा आहे, त्यास विटा किती लागतील? जर प्रत्येक विटा १० अंगुळें लांब, ६ अंगुळें रुंद आणि ३ अंगुळें जाड आहे, व विटांचे प्रत्येक थरावर मातीचा थर २ अंगुळें जाडीचा द्यावयाचा आहे.

२ उ. एक चिरेबंदी वाटोळा बुरुज ६० हात उंच आहे, त्याचे भिंतीची जाडी ३ हातांची आहे व पोकळीचा गर्भ १५ हात आहे, आणि त्या सर्व बुरुजास चिरे एकेक घनहाताचे आहेत, तेव्हां सर्व चिरे किती तें सांग.

- ३ उ. एक विहीर २० हात खोल आहे, तिचे पोकळीचा गर्भ १२ हात आहे, व बांधीव कामाची रुंदी १॥ हात आहे, तेव्हां या विहिरीचे बांधीव कामाचा आकार शंभर घनहातांस १३ रुपयेप्रमाणें किती होईल ?
- ४ उ. ८० फूट औरस चौरस एक चौक आहे, त्यांतोळ प्रत्येक कोपऱ्याची एक फूट औरस चौरस, व मधील १० फूट लांब आणि ८ फूट रुंद, इतकी जागा सोडून बाकीच्या जागेस फरसबंदी करणें आहे, तर किती चौरस चिरे लागतील तें सांग.
- ५ उ. १० फूट रुंदीच्या सडकेवर दोन मैलांपर्यंत खडी टाकावयाची आहे आणि १० चौरस फूट जागेस एक गाडी खडी लागते; तेव्हां एकंदर खडी किती लागेल ?
- ६ उ. ६० हात लांब आणि २० हात रुंद अशा दिवाणखान्यास पटई करावयाची आहे, व ४ हात लांब आणि पाऊण हात रुंद अशा तक्त्यास २ रुपये पडतात, तेव्हां त्या सर्व पटईस किती रुपयांचे तक्ते लागतील ?
- ७ उ. ५ घनफूट खडी फोडावयास एक दिवस लागतो, तर तीन ब्रास म्ह० ३४८ घनफूट खडी फोडण्यास किती दिवस लागतील?
- ८ उ. ४० हात लांब, ३० हात रुंद, आणि १० हात ओंड, अशा जागेत गट्टा किती राहिल? एक हात म्हणजे १॥ फूट.
- ९ उ. एक हौद २५०० घागरी अथवा घनफूट पाणी राहिल असा आहे, त्याची लांबी ४० फूट व रुंदी ३० फूट आहे, तेव्हां तो ओंड किती असेल तें सांग.
- १० उ. १० काठ्या रुंदीचें एक बिघा शेत आहे, त्याचे भोंवताली दगडाची भिंत १॥हात रुंद आणि २हात उंच अशी घालावयाची आहे, तर तीस शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें किती खर्च लागेल ?

प्रश्नसमुदाय.

- १ प्र. एक गृहस्य कांहीं अंतरापर्यंत चालत जाऊन तेथून घोड्यावर बसून परत आला. त्यास निघालेल्या वेळापासून परत येण्यास ३॥ तास लागले. तो जर पूर्वीपासून घोड्यावर बसून जाऊन परत येता तर त्यास २॥ तासांत परत येतां

आले असते. तो जर पायांनी चालत जाऊन तसाच परत येता तर त्यास किती वेळ लागता ?

- २ प्र. अ ह्याने एक पदार्थ खरेदी करून तो ब ह्यास शेंकडा १० रुपये नफा घेऊन विकला. बने त्याचप्रमाणे शेंकडा १० रु. नफा घेऊन तो क ह्याला विकला. कने त्याचप्रमाणे नफ्याचे ५ रु. अधिक घेऊन तो ड ह्याला विकला. तो पदार्थ पूर्वी अने किती रुपयांस खरेदी केला असावा ?
- ३ प्र. $\frac{90 \times 4}{3 \times 4}$ ह्यास अतिसंक्षेप रूप दे. १ पौंड १५ शिलिंग ६ पेन्स ह्यांस अपूर्णाकांत गिनीचे रूप दे. अर्ध्या गिनीचे $\frac{3}{4}$ ह्यांची किंमत काढ. आणि $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ चे $\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2 + \frac{2}{3}$ ह्यांची बेरीज कर.
- ४ प्र. माझ्याजवळ कर्मांत कमी किती गोष्ट्या असल्या म्हणजे त्यांचे मला बरोबर ४, ५, १२ किंवा १८ असे वांटे करितां येतील ?
- ५ प्र. मी आपला २०० रुपयांचा पदार्थ दुसऱ्यास तीन वर्षेपर्यंत वापरायास दिला; तर त्याने त्याच्या मोबदला आपला २०० रुपयांचा पदार्थ मला किती दिवस वापरायास द्यावा ?
- ६ प्र. एका शेतांत एके वर्षी १५० खंडी गहू झाले, आणि ते ४८ रुपये खंडीप्रमाणे विकले; दुसऱ्या वर्षी गव्हांचा दर उतरून ३६ रुपयांनी खंडी झाला, परंतु त्या वर्षी पीक चांगले झाल्यामुळे त्या शेताचे उत्पन्न मागल्या वर्षाइतकेच झाले तेव्हां त्या वर्षी गहू किती झाले तें सांग.
- ७ प्र. एक तक्ता ३॥ तसू जाड आणि ६॥ तसू रुंद आहे, त्यांतून ६॥ घ. गज भरेइतका घेणे आहे, तर किती गज लांब घ्यावा ?
- ८ प्र. एका गृहस्थाचे गुजराथ रेलवेमध्ये, प्रत्येक वांटा १०० रुपयांचा, असे ५० वांटे होते, ते त्याने १७० रुपयांच्या दराने विकून त्या पैशाची दर शेंकडा ९३ $\frac{1}{2}$ भावाची ठेव घेऊन शेंकडा ३ $\frac{1}{2}$ रुपये व्याजाने ठेविली, तेव्हां त्यास दरसाल किती रुपये व्याज येईल तें सांग.
- ९ प्र. ३ शेर चाहाची किंमत ४ शेर काफीच्या किमतीबरोबर आहे आणि ६ शेर काफीची किंमत २० शेर सारखेच्या किमतीबरोबर आहे, तेव्हां ९ शेर चाहाबद्दल किती सारवर येईल तें सांग.

- १० प्र. एक जमीन ५४ बिघे, ४ पांड, १५॥ काठ्या आहे, दुसरी ३९ बिघे, ९३॥ काठ्या आहे, आणि तिसरी ५४॥ बिघे आहे, त्यांतून खडकळ जमीन ११ बि. २^३ पांड वजा करून बाकीच्या जमिनीचे सारखे ६० भाग करणे आहेत तर एकेका भागांत किती जमीन येईल ?
- ११ प्र. २८८०९९१३१ ह्यांचें घनमूळ काढ; आणि ७३६७ चौरस हात व ५२ चौरस तसू इतकें ज्या चौरस जमिनीचें क्षेत्रफळ आहे, तिची एक वाजू किती येईल तें सांग.
- १२ प्र. जर गव्हांचा एक दाणा पेरला तर त्यापासून दाहा दाणे उत्पन्न होतात, व एका शेंगांत ७५८० गहू राहतात, तर गव्हांच्या एका दाण्यापासून दहा वर्षांत किती खंडी गहू होतील तें सांग.
- १३ प्र. १७ रु. ६ आ. यांचे $\frac{१}{४}$, ४॥ रु. चे $\frac{५२७}{१०००}$, आणि १५ आण्यांचे $\frac{१२५}{१०००}$, यांची बेरीज करून तिला रुपयांचें दशांशरूप दे.
- १४ प्र. सेंटिग्रेड म्हणून एका प्रकारचें उष्णतामापकयंत्र आहे, त्यांत ० अंशावर पारा असतो तेव्हां पाणी थिजतें, व १०० अंशांवर असतो तेव्हां पाण्यास कढ येतो; तसेंच फारेनहाईट म्हणून दुसऱ्या एका प्रकारचें उष्णतामापक यंत्र आहे, त्यांत ३२ अंशांवर पारा असतो, तेव्हां पाणी थिजतें, व २१२ अंशांवर असतो तेव्हां पाण्यास कढ येतो; तेव्हां फारेनहाईटच्या ६८ अंशांवर पारा असेल तेव्हां सेंटिग्रेडचे किती अंश होतील ?
- १५ प्र. अडीच रुपयांनी मण ह्या भावानें दूध १५ मण घेतलें, त्यांत पाणो मिसळून तें मिश्र २ रुपयांनी मण विकावयाचें आहे, तर पाणी किती मिसळावें तें सांग.
- १६ प्र. १०० रुपयांचो हुंडी आहे तिची मुदत भरण्यास १५ दि. वसांचा अवकाश आहे, परंतु कांहीं कारणानें दीड रुपया शेंकडाप्रमाणें व्याज कापून आज ९९। रुपये घेतले, तेव्हां वाजवी आज जितके रुपये मिळावे त्यांपेक्षां कमी किती आले तें सांग.
- १७ प्र. रुपयांचे २ ह्यांची पूर्णांकांत किंमत काढ. १३ आणे ८

पै ह्यांस रुपयांचें अपूर्णाकरूप दे, आणि १ दिवस ६ घटका ह्यांच्या कितव्या अंशाबरोबर १ घटका $\frac{1}{2}$ पळें आहेत तेंसांग.

१८ प्र. एका गृहस्थानें १००० रुपये देउन शेंकडा ३ रुपये व्याजाची ठेव ९० $\frac{1}{2}$ भावानें घेतली, व पुढें त्या ठेवीचा भाव ९१ $\frac{1}{4}$ रुपये झाला, तेव्हां ती विकून दुसरी ठेव ३॥ रुपये शेंकडा व्याजाची ९७ $\frac{3}{4}$ भावानें घेतली, तेव्हां त्याला व्याजाचा फायदा दरसाल किती रुपये झाला तें सांग.

१९ प्र. ८८४७३६ ह्यांचें घनमूळ काढ व ९५९५१ $\frac{१६१}{६२५}$ ह्यांचें चतुर्घातमूळ काढ.

२० प्र. $\frac{१-१}{३-२}$ चे $\frac{१-१}{५-६}$ चे $\frac{१-१}{७-८}$ ह्यांस भागजाति अपूर्णाकांचें रूप दे.

२१ प्र. अ १० दिवसांत जें काम करतो, तेंच काम ब १३ दिवसांत करतो, तर तें काम दोघे मिळून करूं लागल्यास किती दिवसांत करतील ?

२२ प्र. कोणी दुकानदार ५॥ रुपयांनीं एक हजार पेने विकतो तेव्हां त्यास मूळ किमतीचे $\frac{3}{4}$ नफा होतो, तेव्हां शेंकडा नफा किती, व जर तो ६ रुपये १२ आण्यांनीं हजार प्रमाणें विकता तर त्यास मूळ किमतीवर नफा किती होता, व शेंकडा नफा काय पडला असता ?

२३ प्र. $\frac{३८७२}{२२८७७}$; $१७ \frac{५}{१२} + \frac{४}{५५} + १४४ \frac{११}{२१}$; $\frac{२१३}{३५} - \frac{१७}{२५}$; $\frac{३}{४}$ चे $\frac{६}{७} \times \frac{५}{५५}$ चे $\frac{११}{१८}$ चे $\frac{२१}{३३}$; आणि $६३४७ \div २ \frac{३}{४}$ ह्या सर्वांस अतिसंक्षेपरूप दे.

२४ प्र. ०१५९५१६९ ह्यांचें वर्गमूळ काढ, व १६९३४.९९४४३२ ह्यांचें घनमूळ काढ.

२५ प्र. अ, ब, क, ह्या तिघांनीं मिळून एक कुरण ६० $\frac{१}{२}$ रुपयांस घेतलें; त्यांत अनें ५ म्हशो ४॥ महिने चारल्या, बनें ८ म्हशो ५ महिने चारल्या. आणि कनें ९ म्हशो ६॥ महिने चारल्या, तेव्हां प्रत्येकानें किती पैसा द्यावा तें सांग ?

२६ प्र. पंधरा महिन्यांनीं ज्या रोख्याचे ७५ रुपये मिळावयाचे,

त्याचें दर साल दर शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें व्याज कापून देऊन आज रुपये घेतले, तर किती येतील ?

२७ प्र. $\frac{9+3\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}}$ ह्यांस $9 + \frac{2}{9-\sqrt{3}}$ ह्यांनी भागून भागाकार द-

शांशरूपांत आण.

२८ प्र. १३४२१७७२८ आणि ८०६७७५६८१६१ ह्यांची घ-
नमुळें काढ.

२९ प्र. ६० रुपये २ आणे ६ पै हे चौघांस $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ह्या
प्रमाणानें वांटून दे.

३० प्र. १०३७ ह्या संख्येचे असे दोन भाग कर कीं त्यांचें गु-
णोत्तर, ७.६२५ आणि ५.३७५ ह्या दोन संख्यांची बेरीज
आणि वजाबाकी ह्यांच्या गुणोत्तराबरोबर होईल.

३१ प्र. एका हौदास पाणी येण्याचे दोन व पाणी जाण्याचा एक
असे तीन नळ हेते, त्यांत पाणी येणारे नळापैकीं एकानें तो
हौद ४० मिनिटांत भरतो, व दुसऱ्यानें ५० मिनिटांत भरतो,
आणि पाणी जाण्याच्या नळानें २५ मिनिटांत रिकामा होतो.
आतां हे तिन्ही नळ एकदम सोडले तर तो हौद भरावयास
किती वेळ लागेल तें सांग.

३२ प्र. अशी एक संख्या आहे कीं जी $\frac{2}{3}$ चे $\frac{4}{5}$ चा $9\frac{1}{2}$ ह्यांनीं
भागली असतां भागाकार १ येतो, तर त्या संख्येचा वर्ग
काय होईल तें सांग.

३३ प्र. एका गृहस्थानें एका व्यापाऱ्यापासून १२५ रुपयांच्या ७५
शेळ्या विकत घेतल्या, परंतु ती रकम त्यास एका वर्षाअंतीं
द्यावयाची असा ठराव केला. नंतर लागलीच त्या शेळ्या
त्याणें दुसऱ्यास दर शेळीस २। रुपये याप्रमाणें विकल्या;
तेव्हां या व्यापारांत पहिल्या खरेदी करणारानें किती नफा
मिळविला? हिशेब करितांना व्याज दर शेंकडा दर साल ५
रुपये धरावें.

३४ प्र. ८२४४.६४ आणि ८२४.४३६३६९ ह्यांचीं वर्गमुळें काढ.

३५ प्र. १५ हात लांब आणि ४ हात रुंद असा चर ६ मनुष्ये

- दररोज १२ तास काम करून ३ दिवसांत खणतात, तर २० हात लांब आणि ८ हात रुंद असा चर ८ मनुष्ये दर रोज ८ तासाप्रमाणे काम करून किती दिवसांत खणतील ?
- ३६ प्र. वजनी १३ मण ७॥ शेर ह्यांस दशांशांत खंडीचे रूप दे. १ आणा ५^१/_२ पै ह्यांचे ३ ह्यांस अपूर्णाकांत रुपयांचे रूप दे. १००१ ह्यांस ३९०६२५ ह्यांनी व १००१ ह्यांस ०००३९०६२५ ह्यांनी, व १००१ ह्यांस ३९०६२५ ह्यांनी भाग.
- ३७ प्र. ३॥ रुपये किमतीचे एक पुस्तक विक्रावयाचे आहे, ते विकण्याबद्दल कमिशन शेंकडा ६ रुपयेप्रमाणे द्यावे लागते, व त्यावर नफा शेंकडा २४ रुपयेप्रमाणे मिळावा अशी इच्छा आहे, तर त्याची किंमत काय ठेवावी ?
- ३८ प्र. सूर्य ३६^५/_{६०} दिवस ५ आवर ४८ मिन्युटे इतक्या वेळांत ३६० अंश चालतो, तर तो एका दिवसांत किती कळा*चालेल ?
- ३९ प्र. १० पुरुष १३ बायका आणि २५ मुले ह्यांस १५ रुपये वांटून दे, ते असे की पुरुषास बायकोच्या दुप्पट व मुलास बायकोच्या निम्मे येतील.
- ४० प्र. एक असा अपूर्णाक आहे की त्यास १^१/_२ च्या घनाने गुणन गुणाकार १^१/_२ च्या वर्गमुळाने भागला तर भागाकार ३^१/_२ येतो, तेव्हां तो अपूर्णाक कोणता तो सांग.
- ४१ प्र. २४ हात ४ तसू रुंद, आणि ९६ हात ६ तसू लांब अशा जमिनीत मका पेरला आहे, व तो दर चौरस हातास ८॥ आणा ह्या भावाने विकणे आहे, तर त्याची किंमत काय होईल ?
- ४२ प्र. ३० चे १/२ चा १/३ चे १/४ इतकी मंढरे २१० चे ३/६ चे २/५ चे १/५ इतक्या रुपयांस विकली, तेव्हां प्रत्येक मंढरास काय पडले ते सांग.
- ४३ प्र. एका गृहस्थाचे दिवाळे निघाले, तेव्हां त्याची जिंदगी विकली तिचे २१००० रुपये आले, ते त्याच्या चार सावकारांस त्यांच्या कर्जाच्या प्रमाणाने वांटून देणे आहेत, ते असे की कच्या कर्जास : ख चें कर्ज : : २ : ३; ख चे कर्जास :

* १ अंश = ६० कळा. आणि १ कळा = ६० विकळा.

- ग चें कर्ज : : ४ : ५; आणि ग चे कर्जास : घ चें कर्ज : : ६ : ७; तेव्हां प्रत्येकाचे हिश्शास काय येईल तें सांग.
- ४४ प्र. एक घनहात पाण्याचें वजन १०६ शेर भरलें; तर एक हात खोल, १६ हात ७ तसू लांब, आणि ८ हात ४ तसू रुंद, इतक्या पाण्याचें वजन किती होईल?
- ४५ प्र. एका खाणीचें उत्पन्न दरसाल ३२९६ रुपये १३ आणे ५^१/_२ पै आहे. त्या खाणींत एकाचे १४ हिस्से आहेत, त्यांजबद्दल १०२५ रुपये १२ आणे ७^१/_२ पै मिळाले, तेव्हां त्या खाणींत एकंदर किती हिस्से आहेत तें सांग.
- ४६ प्र. २० रुपयांनी तोळा प्रमाणें शुद्ध सोन्यांत ८ आण्यांनी तोळा ह्या दराचें हीण घालून ७॥ तोळे वजनाचा एक दागिना केला, त्यांत शुद्ध सोने चौविसांस : अठरा ह्या प्रमाणानें आहे, व बाकीचें हीण आहे व तो दागिना करावयास मजुरी १०० तोळ्यांस २५ रुपयेप्रमाणें दिली, तेव्हां त्या दागिन्याची एकंदर किंमत काय होईल ती सांग.
- ४७ प्र. १३७६४१;०६४; आणि ७^१/_२ ह्यांचीं वर्गमूळें काढ.
- ४८ प्र. एक लांकूड १२३ हात ९ तसू लांब, २ हात ४ तसू रुंद, आणि २ हात जाड असें आहे, त्याची दर घनफुटास ॥ प्रमाणें किंमत काय होईल ?
- ४९ प्र. वर्तुळ पादाचे, हिंडु लोक ९० अंश मानतात, व फ्रेंच लोक १०० अंश मानतात; तेव्हां हिंदूंचे ३६.४५ अंश व फ्रेंचांचे तेवढेच अंश ह्यांच्या बेरजेबरोबर फ्रेंचांचे किती अंश होतील, व हिंदूंचे किती अंश होतील तें सांग.
- ५० प्र. जर एक मनुष्य एका तासांत ३०२^१/_२ चौरस गज जमिनीवरील गवत कापतो, तर २^१/_२ विघे जमिनीवरील गवत कापावयास तीन मनुष्यांस किती तास लागतील ?
- ५१ प्र. कोणी गृहस्थानें ८ महिन्यांनी रुपये देण्याचा करार करून १५६ रुपयांस एक घोडा घेतला, परंतु मालकास रुपयांची निकड लागल्यामुळें दरसाल दरशेंकडा १४॥ रुपयेप्रमाणें व्याज कापून घेऊन बाकीचे रुपये त्यास दिले आणि

लागलाच तो घोडा १८० रुपयांस विकून टाकला, तेव्हां त्यास दर शेकडा व एकंदर किती नफा झाला तें सांग.

५२ प्र. क १२ दिवसांत जें काम करतो. त्याच्या तिप्पट काम ख ८ दिवसांत करतो, आणि ख च्या पांचपट काम ग १२ दिवसांत करतो, तर तेंच काम तिथे मिळून किती दिवसांत करतील ?

५३ प्र. कोणी व्यापाऱ्याने आपल्या मालावर शेकडा २० रुपये-प्रमाणें नफा ठेवून त्यांतील कांहीं माल २६ रुपयांस विकला, तेव्हां त्यांत मुद्दल किती व नफा किती ?

५४ प्र. चार आणि पांच यांच्यामध्ये अवर व मिन्युटकांटांचांत २० मिनिटांचे अंतर आहे; तेव्हां किती वाजले असावे याची दोन उत्तरे येतात ती कोणती ? मिन्युटकांटाच्या एकदां अवरकांटा पुढें व एकदां मागे.

५५ प्र. एक चौरस गज जमिनीत पावणे चार पायली धान्य पिकते, तर २४ हात लांब व १४ हात रुंद अशा जमिनीत धान्य किती पिकेल ? ह्याजमिनीपैकी कडेची चौफेर दोन दोन हात जमीन बांधाकडे गेली आहे.

५६ प्र. २३२ खंडी ह्यांची पूर्णांकांत किंमत काढ; $३\frac{1}{2}$ पै ह्या $\frac{1}{9}$ रुपयांचे कितव्या अंशाबरोबर आहेत तें सांग; व ४०१७१ कोश ह्यांची पूर्णांकांत किंमत काढ.

५७ प्र. एका गृहस्थास ५ पुत्र होते, त्यांस त्याने आपल्या अंत-कार्त्ती ३७५० रुपये रोख, व १५१ रुपयांची एकेक अशा दोन हुंडीचिठ्या, एक दोन महिन्यांच्या मुदतीची, व एक तीन महिन्यांच्या मुदतीची, असे ठेवून तो मृत्यु पावला. त्याने आपल्या मृत्युपत्रांत असे लिहून ठेविले होते कीं, माझ्या जिदगीचा $\frac{1}{2}$ वडील मुलानें घेऊन बाकीची इतरांनी सारखी वांटून घ्यावी; तेव्हां त्या मुलांनी त्या हुंड्यांचे व्याज दरमाहा दरशेकडा सहा आणेप्रमाणें धरून जिदगीची वांटणी केली; तेव्हां प्रत्येकास काय आले तें सांग.

५८ प्र. कोणीएकाने कलकत्यांतील एका कारखान्यांत ७९७८

रुपये देऊन शेंकडा $३\frac{१}{३}$ रुपये व्याजाचे हिस्से शेंकडा ७७ भावानें घेतले, तेव्हां त्यास वर्षास व्याज किती मिळेल? व ते हिस्से जर शेंकडा $७७\frac{१}{४}$ भावानें विकले, तर त्यास मुदलावर एकंदर नफा किती होईल तें सांग.

५९ प्र. ००३ यांस ००९ यांणी भाग; आणि $\sqrt{००१}$ यांची किंमत पांच दशांश स्थळांपर्यंत बरोबर काढ.

६० प्र. एका अंशांत $६९\frac{१}{१०}$ मैल असतात, तेव्हां त्यांची किती योजना होतील?

६१ प्र. एका खोलीचा घेर ३६ गज आहे; आणि उंची ५ गज ४ तसू आहे, तर तिच्या भिंती रंगविण्याबद्दल दर चौरस यार्डास १ शिलिंग $१\frac{१}{३}$ पेन्स प्रमाणें किती रुपये पडतील?

६२ प्र. $\sqrt[३]{२}$ आणि $\sqrt[३]{३}$ ह्यांची वजाबाकी कर.

६३ प्र. १०००० रुपये देऊन शेंकडा ३ रुपये व्याजाची ठेव शेंकडा ९२ भावानें घेतली व तितकाच पैसा देऊन दुसरी एक ठेव शेंकडा ४ रुपये व्याजाची ११० रुपये भावानें घेतली, तर दोन्ही ठेवींच्या व्याजाचे उत्पन्नांत अंतर किती तें सांग.

६४ प्र. औरस चौरस ३ तसूंचा, व $\frac{१}{४}$ तसू जाडीचा एक सोन्याचा पत्रा ठोकून ठोकून एक चौरस गज होईपर्यंत वाढविला, तर त्याची जाडी किती राहिल?

६५ प्र. २३७७ रुपये ४ आणे ९ पैचा ५७ खंडी खजूर अरबस्थानांतून मुंबईस आणला, त्याला जकात मुंबई बंदरांत शेंकडा $१०\frac{१}{३}$ रुपयेप्रमाणें दिली, तेव्हां दर खंडीस किती जकात पडली तें सांग.

६६ प्र. रुपयाची तीन शेर था भावाची सारखर आमच्याजवळ २ खं. ३ म. आहे. ती देऊन त्या मोवदला रुपयाचा ७ ॥ शेर था भावाचा गूळ आम्हास घेणें आहे, तर तो किती मिळेल?

६७ प्र. कोणी एक मनुष्य दर रोज कर्नाटक प्रांतातील १० कोस १२ ॥ तासांत चालतो, व तिकडील कोस पुणें प्रांताचे कोसांशी $३ : २$ ह्या प्रमाणांत आहेत, तेव्हां तो मनुष्य १३ दिवसांत पुणें प्रांताचे किती कोस चालेल तें सांग.

- ६८ प्र. एका देवळाचा सभामंडप ३५ हात लांब आणि १५ हात रुंद आहे, त्याच्या छताच्या भोंवतालीं वेल पाऊणहात रुंदी-चा बसविला त्यास १९४ रुपये पडले, तेव्हां दर चौरस गज वेलास काय पडलें तें सांग.
- ६९ प्र. कोणा एका इनामदारास एके वर्षी त्याच्या गांवचें उत्पन्न १९८७ रुपये झालें, त्यापैकीं गांवखर्चाबद्दल त्या पैशाचा $\frac{1}{3}$ व दुसऱ्या किरकोळ खर्चाबद्दल १०५ रुपये १२ आणे काढून बाकीच्या पैशाची त्यानें एक जमीन घेतली, ती इतकी होती कीं तिच्या उत्पन्नानें ३० वर्षांत मुद्दल पैसा फिटेल; तेव्हां तिचें सालीना उत्पन्न किती तें सांग.
- ७० प्र. $\frac{1}{3}$ आण्याचे $\frac{9}{13}$ हे $\frac{1}{3}$ रुपयाचे काय आहेत ?
- ७१ प्र. १४७० रुपये देऊन दरसाल दरशेंकडा २॥ रुपये व्याजाची ठेव शेंकडा ७५ भावानें घेतली तर वर्षास व्याज किती येईल?
- ७२ प्र. शेंकडा ४९.८५६ इतका आक्सिजन, ४३.२६५ इतका क्यार्बान आणि बाकी हैद्रोजन मिलून १०० सारखर बनते, तर एक मण सारखरेंत प्रत्येक द्रव्य किती किती आहे ?
- ७३ प्र. लंदन शहर ज्या अक्षवृत्तावर आहे त्या अक्षवृत्ताचा घेर १५१२० मैल आहे; तेव्हां लंदन शहराचे दोन्ही बाजूंच्या एक अंशाच्या रेखावृत्तांमध्ये अंतर किती, व तेथून सूर्य आपल्या दृश्यमान गतीनें एका मिनिटांत किती मैल चालतो असें दिसेल?
- ७४ प्र. ४०३३३ रुपये ३ आणे $३\frac{3}{4}$ पै चौघांस वांटून दे; ते असे कीं त्यांचे वाटे १, २, ३, ४, ह्या प्रमाणांत येतील.
- ७५ प्र. ४ महिन्यांनीं २५२ रुपये ६ पै ध्यावयाच्या, त्याचें व्याज कापून देऊन आज २४७ रु. १ आ. ८ पै घेतल्या, तेव्हां व्याजाचा दर काय तो सांग.
- ७६ प्र. ५३.३६१ व $३२\frac{1}{2}$ ह्यांचीं वर्गमूळें आणि १७७१५६१ ह्यांचें घनमूळ काढ.
- ७७ प्र. ५४० रुपये देऊन शेंकडा ९३१ रुपयप्रमाण नोटी घेतल्या तर किती रुपयांच्या नोटी येतील ? नोटी घेण्याबद्दल दलाली शेंकडा २ आणे पडत्ये.

- ७८ प्र. एका कुरणांतील गवत ७ बैल किंवा ५ म्हशी ८७ दिवसांत खाऊन टाकतात, तर तें गवत २ म्हशी व ३ बैल मिळून किती दिवसांत खातील ?
- ७९ प्र. ३६ रुपये ८ आणे ६ पै हे २१ पुरुष, २१ बायका आणि २१ मुलें ह्यांस वांटून दे, असे कीं मुलांच्या दुप्पट बायकोस व बायको आणि मूल ह्यांचे बेरजेबरोबर पुरुषास; तेव्हां प्रत्येक पुरुष, प्रत्येक बायको आणि प्रत्येक मूल ह्यांस काय येईल तें सांग.
- ८० प्र. कोणी मनुष्यानें आपल्याजवळच्या साखरेपैकीं $\frac{1}{2}$ चे $\frac{3}{4}$ चे $\frac{1}{4}$ साकर दर शेरास ४ आणे ६ पै प्रमाणें विकली, व त्या विकलेल्या साकरेचें वजन ३ मण आणि १२ शेरांचे $\frac{3}{4}$ चा $\frac{1}{2}$ इतकें होतें; तेव्हां सर्व साकरेची किंमत काय ती सांग.
- ८१ प्र. एका गाडीच्या चाकाचा व्यास एक गज आहे, तेव्हां एका मैलांत त्या चाकाचे किती फेरे होतील ? वर्तुळाचा व्यास आणि परिघ ह्यांचें गुणोत्तर १ : ३.१४१५९ ह्यांच्या गुणोत्तराबरोबर आहे.
- ८२ प्र. एका हौदास पाणी घेण्याचे दोन व पाणी जाण्याचा एक असे तीन नळ होते, त्यांत पाणी घेण्याच्या नळांपैकीं एकानें तो हौद ४ घटकांत भरतो, व दुसऱ्यानें ५ घटकांत भरतो, आणि पाणी जाण्याच्या नळानें २५ घटकांत रिकामा होतो. आतां त्यांतील पहिला नळ सोडून २ घटका झाल्यावर दुसरा नळ सोडला, व त्यास एकघटिका झाल्यावर पाणी जाण्याचा नळ सोडला; तेव्हां तो हौद भरावयास किती वेळ लागेल ? व प्रत्येक नळांतून पाणी किती येईल तें सांग. ३६१ घागरींचा हौद आहे.
- ८३ प्र. २७२२५ रुपयांची ठेव दरसाल दरशेंकडा $2\frac{1}{2}$ रु. व्याजाची शेंकडा ७५ रुपये ह्या भावानें घेतली तर घेणारास काय व्याज पडेल ?
- ८४ प्र. $\frac{94}{96} - \frac{92}{96} + \frac{93}{92} - \frac{91}{92}$ ह्यांस अतिसंक्षेप रूप दे; व रुपयाचे $\frac{3}{4}$, पावल्याचे $\frac{3}{8}$ आणि ३ आणे ६ पै ह्यांचे $\frac{3}{8}$ ह्यांची बेरीज कर

८५ प्र. मला एकजणाचे ७ शि. देणें आहेत; परंतु माझ्या जवळचें सर्व नाणें अर्धे गिनोचें आहे, आणि त्याच्या जवळचें सर्व नाणें कौनचें आहे; तर देणें फेडून टाकण्यास नाण्यांचा मो-बदला कसा करावा.

८६ प्र. पुढील अपूर्णाकांस अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\frac{\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} + 3 \parallel \text{चे } \frac{5}{6}}{\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5}} \times \frac{98^{\frac{2}{3}}}{960^{\frac{3}{4}}} \sqrt{(0.0625) \times (0.11 + \frac{9}{9^{\frac{1}{2}}})}$$

$$960 - 0.11 \text{ चा. } \frac{9}{4}$$

७.

८७ प्र. एका खोलीच्या भितीस आंतून वेलवुटीचे कागद चिक-टवावयाचे आहेत, त्या खोलीचा घेर ३० फूट ७ इंच आहे आणि उंची १० फूट ६ इंच आहे आणि कागदाची रुंदी १० इंच आहे, तेव्हां कागद किती लांब घ्यावा तें सांग.

८८ प्र. एक मण कोळशास १३ आणे ७ $\frac{1}{4}$ पै प्रमाणें ३६.४२ मण कोळशाची किंमत काय होईल ? व १३ रुपये ११ आणे ९ पै ह्याचे $\frac{2}{3}$ चा $\frac{1}{6}$ आणि १० आण्याचे $\frac{10}{9}$ \times $\frac{1}{6}$ ह्यांत अंतर किती तें सांग.

८९ प्र. दरसाल दरशेंकडा ३ रुपये व्याजाचे दराच्या ठेवीचा भाव शेंकडा ८५० आहे, तेव्हां ३॥ रुपये व्याजाचे दराच्या ठेवीचा भाव काय असला ह्मणजे दोन्ही ठेवींत नफा सारखाच होईल, व एकास ५०००० रुपये देऊन ठेव घ्यावयाची आहे तर त्यास वर्षास व्याज काय मिळेल तें सांग.

९० प्र. कोणी मनुष्याने आपला बाग दरसाल ९२० रुपयेप्रमाणें मत्तयानें दिला, आणि मत्तयावद्दल दोन वर्षांचा पैसा दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याजाप्रमाणें व्याजकापून देऊन आज घेते वेळेस त्याने त्या कुळास बागेतील घराचे दागडुगीबद्दल त्या सर्व पैशाचा $\frac{1}{2}$ व कोठाराचे दागडुगीबद्दल $\frac{1}{3}$ आणि किर-कोळ खर्चाबद्दल २१०० ह्याप्रमाणें देऊन बाकी पैसा घेतला; तेव्हां त्यास काय मिळालें तें सांग.

- ९१ प्र. १९ फूट $१०\frac{१}{२}$ इंच लांब, १६ फूट $१\frac{३}{४}$ इंच रुंद आणि १० फूट ३ इंच उंच, अशी एक खोली आहे तिच्या भिन्तींस सफेती देणे आहे, तर सफेतीबद्दल दर चौरस यार्डास $९\frac{१}{२}$ पेन्सप्रमाणें खर्च किती लागेल तो सांग.
- ९२ प्र. $१६१\frac{१}{२}$ मैल हे अंशांत मांड; एक अंशावरोबर $६९\frac{१}{१०}$ मैल आहेत.
- ९३ प्र. आमच्या जवळचें घड्याळ आज बरोबर लाविलें तर उद्यां ३॥ मिनिटें पुढें जातें; तर आज दुपारीं बारा वाजतां त्याचे कांटे कसे ठेवावे म्हणजे रात्रीचे १० वाजतां तें घड्याळ खरी वेळ दाखवील ?
- ९४ प्र. पुण्याहून आगीची गाडी मुंबईस जाण्याकरितां सकाळीं ६॥ वाजतां निघाली, ती दर तासास २० मैल प्रमाणें चालत असे. पुण्याहून दुसरी गाडी सकाळीं ८॥ वाजतां निघाली, आणि तिणें पहिले गाडीस मुंबईचे अलीकडे ६० मैलांवर गांठलें; तेव्हां दुसरी गाडी किती वेगानें चालली होती? मुंबईपासून पुण्यापर्यंत गाडीचे रस्त्यानें अंतर १८० मैल आहे.
- ९५ प्र. एका गृहस्थास ४४१० रुपयांचें व्याज दरसाल दर शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें मिळत होतें, पुढें त्यानें त्या रुपयांचे रेलवे कंपनीतील हिस्से शेंकडा दरसाल ३॥ रुपये व्याजाचे शेंकडा ७० रु० भावानें घेतले; ह्यांचें पांच वर्षे व्याज घेतल्यावर त्या हिस्शांचा भाव शेंकडा ७५ रुपये झाला, तेव्हां त्यानें ते हिस्से विकून टाकले; तेव्हां ह्या सर्व खटपटींत त्यास पूर्वीपेक्षां नफा किती झाला तें सांग.
- ९६ प्र. पांच महिन्यांनीं ३२५ रुपये १४ आणे मिळावयाचे, त्यांचें व्याज दरसाल दर शेंकडा पांच रुपयेप्रमाणें कमी करून आज काय मिळेल ?
- ९७ प्र. ५३१४४१ आणि ११९५५०.६६९१२१ ह्यांची वर्गमूळें काढ; व ००००३२८५०९. आणि २७०५४.०३६००८ ह्यांची घनमूळें काढ.

- ९८ प्र. प्रत्येक शेत २५ हात लांब आणि १८ हात रुंद अशी काठकोन चौकोनाकृति ७ शेते २ मनुष्ये ३१ दिवसांत नांगरतात, तर १२॥ काठ्या लांब आणि ९ काठ्या रुंद अशी काठकोन चौकोनाकृति १३ शेते ३७ मनुष्ये किती दिवसांत नांगरतील ?
- ९९ प्र. कांहीं एक काम ३ पुरुष अथवा ५ बायका अथवा ८ मुलें $२\frac{१}{२}$ दिवस इतक्या वेळांत करतात, तर तेंच काम २ पुरुष, ३ बायका आणि ४ मुलें मिळून किती वेळांत करतील ?
- १०० प्र. पुण्याहून ३१० मैल लांब एक गांव आहे. तेथें जाण्याकरतां आगीची गाडी दिवसास वारांवर ३ तास ५१ मिन्युटे झाल्यावर निघाली, ती पहिल्यानें दर तासांत २७ मैल प्रमाणें १२१ मैल गेली, पुढें दर तासांत ९॥ मैल प्रमाणें १२१ मैल गेली, आणि शेवटीं दर तासांत ८ मैल प्रमाणें ६८ मैल गेली, तेव्हां ती तेथें केव्हां जाऊन पोहोचली ?
- १०१ प्र. ८६४ हात ३ तसू लांब, आणि ६२ हात ६ तसू रुंद अशी एक जागा आहे, ती किती चौरस गज भरेल तें सांग.
- १०२ प्र. कोणी एक गृहस्थ वाटेनें जात असतां त्यास अ आणि ब हे दोघे भिकारी भेटले; तेव्हां त्यांस कांहीं द्यावें असा विचार करून रिवशांत हात घालून पाहतो तो एका मोहरेचे (म्ह० १५ रुपयांचे) $\frac{७७}{८०}$ चे १० $\frac{७}{८}$ चे $७\frac{१}{२}$ चे $३\frac{७}{९}$ चे ४ $\frac{३}{४}$ आहेत असें त्यास आढळलें; तेव्हां त्यानें त्याचे $\frac{३}{४}$ चा $\frac{१}{४}$ अस दिला, बाकी राहिले त्याचे $\frac{३}{४}$ बस दिले; तेव्हां प्रत्येकास काय मिळालें तें सांग.
- १०३ प्र. कोणी गृहस्थानें एकास दरसाल दर शेंकडा ४॥ रुपये व्याजानें कांहीं पैसा दिला, पुढें त्यानें तीन वर्षांनीं व्याज व मुद्दल सुद्धां ११४७॥ परत केले, तेव्हां त्यास आरंभी किती रुपये दिले होते तें सांग.
- १०४ प्र. अ आणि ब ह्या दोघांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, त्यांत अ नें पहिल्यानें २००० रुपये दिले, व पुढें आठ महिन्यांनीं १००० रुपये दिले; वनें आरंभी १००० रुपये

दिले; पुढें चार महिन्यांनीं ३०७० रुपये दिले; आणि पुढें ६ महिन्यांनीं १३०० रुपये माघारे घेतले; वर्षांतर्हि हिशेब पाहतात तो त्या व्यापारांत त्यांस १६३५ रुपये नफा झाला; तो त्यांनीं कसा वांटून घ्यावा तें सांग.

१०५ प्र. सहा वर्षांचे शेवटीं चक्रवाढ व्याजानें आम्हास २६२५ रुपये मिळावे, अशी आमची इच्छा आहे तर दरसाल दर शेंकडा ५ रु. व्याजाचे भावानें आम्ही सावकाराचे पेढीवर आज किती रकम ठेवावी ?

१०६ प्र. कोणी गृहस्थानें १०० रुपये दरसाल दर शेंकडा ५ रु. प्रमाणें व्याजां लावले, आणि पुढें प्रत्येक वीस वर्षांच्या शेवटीं व्याज व मुद्दल एकत्र करून ते पुनः पहिल्याच दरानें व्याजां लावी, तेव्हां ह्याप्रमाणें १०००० रुपये भांडवल होण्यास किती वर्षे लागतील ?

१०७ प्र. कोणी दुकानदारानें ५० शेर तेल ७ रुपये ८ आणे ह्यांस घेतले, तें ज्या बुधल्यांत होतें त्यास भोंक असल्यामुळें १० शेर तेल गळालें, तेव्हां बाकी राहिलेल्या तेलावर शेंकडा ५ रुपये नफा व्हावा असें दुकानदाराचे मनांत आहे, तेव्हां तें त्यानें कसें शेर विकारें तें सांग.

१०८ प्र. भर्राव गोळ्याचे व्यासाचे घनास जर ०.५२३६ यांणीं गुणिलें तर त्या गोळ्याचें घनफळ येतें. आम्हीं एक घन इंच माती घेऊन तिच्या अर्ध इंच व्यासाच्या जितक्या गोळ्या होतील तितक्या केल्या, तर त्या किती होतील ? आणि शिलक माती किती राहिल ?

१०९ प्र. एका चौरस जमीनीचें क्षेत्रफळ १८ चौरस हात आणि ७ चौ- तसू आहे, तेव्हां तिची एक वाजू किती तें सांग.

११० प्र. अ आणि ब ह्या उभयतांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला त्यांत ब पेक्षां २५ रुपये १२ आणे अचे जास्त हांते; पुढें हिशेब करून पैसा वांटून घेतला, तेव्हां अचे वांटणीस ६० रुपये आणि बचे वांटणीस २८ रुपये आले तेव्हां आरंभीं प्रत्येकानें किती किती दिले तें सांग.

- १११ प्र. १९६६ आणि ११९५५०६६९१२१ ह्यांची वर्गमुळे काढ, व १९५३१२५ ह्यांचें घनमूळ काढ.
- ११२ प्र. १४४ रुपये १२ पुरुष आणि १८ बायका यांस वांटून दे. इतकेंच कीं दर पुरुषास दर बाईच्या १॥ पत्र रुपये असावे.
- ११३ प्र. एका मनुष्यानें दोन जातींचा चाहा, एक दर पौंडास ३ शिलिंग व दुसरा दर पौंडास ४ शिलिंग ह्या दराचा ४:७ ह्याप्रमाणें खरेदी केला, आणि तो एकत्र करून दर पौंडास ३ शिलिंग ९ पेन्सप्रमाणें विकला, तेव्हां त्या मनुष्यास शेंकडा नफा किती झाला तें सांग.
- ११४ प्र. दरसाल दर शेंकडा ४ $\frac{1}{2}$ रु. व्याजांनं पांच वर्षांत १५० रुपयांचे सरळ व्याजांत, व चक्रवाढ व्याजांत, अंतर किती पडेल तें सांग.
- ११५ प्र. १५४० रुपये अ, ब, क, आणि ड या चौघांस वांटून दे; असे कीं, ते अला बचे दिढीनें मिळावें; बला कपेक्षां त्याच्याच $\frac{1}{3}$ नें जास्त मिळावे; आणि कला डच्या सव्वाईनें मिळावे.
- ११६ प्र. ७७० रु. अ, व, क, ह्या तीन असामांस वांटून द्या-वयाचे, ते असे कीं, अला जर ४ तर बला ३, आणि अला जर ६ तर कला ७, तेव्हां प्रत्येकाच्या वांट्यास काय येईल तें सांग.
- ११७ प्र. एके वेळेस अनें बपासून वेगळाल्या दोन रकमा, व्याजाच्या वेगळाले भावाने कर्जी घेतल्या. एक रकम २६०० रुपयांची दरसाल दर शेंकडा ३॥ रुपये व्याजाची होती. दुसरी रकम ३५८० रुपयांची दरसाल दर शेंकडा ५ रुपये व्याजाची होती. पुढें दोन्ही रकमा मिळून व्याज मुद्दल सुद्धां एकंदर ६४०९ रुपये रास झाली तेव्हां, तितकी देऊन कर्जमुक्त झाला. तेव्हां त्याच्याजवळ त्या रकमा कर्जांनें किती दिवस होत्या ?
- ११८ प्र. कोणी धनगरानें १४ मेंढरें ३९ पौंड ६ शिलिंग ५ $\frac{1}{2}$ पेन्स ह्यांस घेतलीं, आणि त्यांतील ६ मेंढरें प्रत्येक मेंढरास १

पोंड १६ शिलिंग ह्याप्रमाणें विकली, परंतु त्याच्या मनांत ह्या सर्व व्यापारांत शेंकडा ४ पोंड नफा व्हावा असें आहे, तेव्हां बाकीचीं मॅडरें काय किमतीस विकारवीं तें सांग.

११९ प्र. कांहीं एक जिन्नस आहे तो ५ रुपयांस विकला असतां शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें तोटा होतो, तेव्हां तो ६ रुपयांस विकला असतां नफा किती होईल व त्याची मूळ किंमत काय तें सांग.

१२० प्र. कोणी एकानें २००० रुपये दरसाल दर शेंकडा ४ रुपये-प्रमाणें व्याजां लावले, आणि त्या व्याजापैकीं दरसाल ७५ रुपये स्वर्चास ठेवून बाकीचे तो मुदलांत मिळवी, ह्याप्रमाणें ५ वर्षे चाललें, तेव्हां त्याजपार्शीं मुद्दल किती झालें तें सांग.

१२१ प्र. एका प्रांताची खानेसुमारी कांहीं वर्षांपूर्वी ७११११७ होती, पुढें कांहीं वर्षे गेल्यानंतर पुनः खानेसुमारी केली तेव्हां ७३२६६६ भरली, तेव्हां शेंकडा किती मनुष्ये वाढलीं तें सांग.

१२२ प्र. दररोज ६ तास प्रमाणें काम करून १२ मनुष्ये १५ दिवसांत कांहीं एक काम संपवितात, तर तेंच काम दररोज १२^१/_२ तास प्रमाणें काम करून ८^५/_२ दिवसांत संपविण्यास किती मनुष्ये लागतील ?

१२३ प्र. अ जवळ आरंभी २ पोंड १३ शिलिंग होते, व त्यास ब नें आणखी १ पोंड ११ शिलिंग ६ पे. ह्यांचे $६\frac{१}{२} \div १\frac{१}{२}$ दिले, तेव्हां त्याजपार्शीं पैसा ब च्या त्रेचाळीसपट झाला, ह्यावरून ब जवळ आरंभी किती पोंड होते तें सांग.

१२४ प्र. १५२३९९०२५ ह्यांचें वर्गमूळ व ०००४०५२२४ ह्यांचें घनमूळ काढ.

१२५ प्र. १३^३/_४ फूट लांब आणि ६ फूट रुंद असा काटकोन चौकोनाकृति एक हौद आहे, त्यांत २९४^१/_२ घनफूट पाणी राहतें तेव्हां त्या हौदाची खोली किती तें सांग, व एक घन-इंच पाण्याचें वजन २५२.५ ग्रॅन भरतें, ह्यावरून तें सर्व पाणी किती भरेल तें सांग.

१२६ प्र. एका पोंडाची रास पांच वर्षांत सरळ व्याजानें एक

गिनी करावयाची आहे, तर दरसाल दर शेंकडा व्याजाचा दर काय ठेवावा ?

१२७ प्र. जेव्हां गाडीचा रोज भाड्याचा दर १४ शिलिंग ८ पेन्स आहे, तेव्हां कोणी मनुष्य १६ पोंड घेऊन १२ पिपें १८ मैल लांब नेतो, तर जेव्हां गाडीचा रोज भाड्याचा दर १६ शिलिंग ६ पेन्सपर्यंत वाढेल तेव्हां तीच पिपें ७२ पोंड घेऊन किती लांब नेईल ?

१२८ प्र. १८४०४१ ह्या संख्येचे वर्गमूळ, आणि ४४४१९४९४७ ह्या संख्येचे घनमूळ काढ.

१२९ प्र. कोणी कारखानदाराने ५० पुरुष आणि ३५ मुलें इतकीं माणसें कामावर लावलीं, त्यांत पुरुषांनीं दररोज १२ तास व मुलांनीं दररोज ८ तास काम करावें असा ठराव होता, व त्यावद्दल दर तासास पुरुषास ६ पेन्स व मुलास २ पेन्स मिळत असत, व ह्याप्रमाणें दर आठवड्यांत ते ५ $\frac{१}{३}$ दिवस काम करीत, तेव्हां वर्षाचे मजुरीचा आकार किती तें सांग.

१३० प्र. एकाने २७ मेंढरें ३० पोंडांस खरेदी करून त्यांपैकीं १२ विकलीं, त्यांत त्यास दरशेंकडा ३ पोंड तोटा झाला आणि त्याचे मनांत एकंदर सर्व खरेदीवर शेंकडा २ $\frac{१}{३}$ पोंड नफा मिळावा असें आहे, तेव्हां बाकीचीं मेंढरें काय दराने विकारीं तें सांग.

१३१ प्र. तीन टन जिन्नस २६ पोंड १५ शिलिंग ५ पेन्स ह्यांस घेतला, आणि त्यावर शेंकडा २० पोंड प्रमाणें नफा मिळवावयाचा आहे, तर दर हंड्रेडवेटजिन्नसास काय घ्यावें तें सांग ?

१३२ प्र. ३ $\frac{१}{३}$ गिनी ६ असामीस वांटून दे, असे कीं ते विभाग १, २, ३, ४, ५, ६, ह्या संख्यांच्या प्रमाणांत घेतील.

१३३ प्र. ००१३४६८९ आणि ४१ $\frac{१६६}{१०००}$ ह्यांची वर्गमूळे व १८६०९६२५ ह्यांचे घनमूळ काढ.

१३४ प्र. एका बागेत कांहीं झाडे आहेत त्यांत शिताफळाचीं $\frac{१}{३}$, पेहूचीं $\frac{१}{६}$, रामफळाचीं $\frac{१}{६}$, व इतर प्रकारचीं ५० ह्याप्रमाणें आहेत, तेव्हां सर्व झाडे किती तें सांग.

- १३५ प्र. कोणी एकानें दरसाल दर शेंकडा $३\frac{१}{२}$ रुपये व्याजानें कांहीं पैसा कर्ज काढून तो दरसाल दर शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें व्याजी लावला, त्याबद्दल व्याज त्या सावकारास त्याला वर्षाच्या अखेरीस द्यावें लागे; परंतु कुळांकडून व्याज तो सहा सहा महिन्यांनीं घेत असे, आणि ह्याप्रमाणें तो वर्षास २०० रुपये मिळवी, तेव्हां त्यानें कर्ज किती काढलें होतें तें सांग.
- १३६ प्र. कोणी दुकानदार १ पोंड चहा ५ शिलिंग ४ पेन्स ह्यांस विक्री, तेव्हां त्यास त्याच्या मूळ किमतीचा $\frac{१}{२}$ नफा मिळत असे; पुढें तो दर वाढवून एक पोंडास ६ शिलिंग प्रमाणें विकू लागला, तेव्हां त्यास शेंकडा नफा किती तो सांग.
- १३७ प्र. एक शेर साकरेस ५ आणें ४ पै आणि १ शेर गुळास २ आणे $१\frac{१}{२}$ पै असा भाव आहे, तेव्हां कोणी मनुष्य आपल्याजवळचा कांहीं शेर गूळ देऊन २८ शेर साखर घ्यावयास इच्छितो, व त्या अदलाबदलीत शेंकडा १५ रुपये प्रमाणें नफा व्हावा असा त्याचा हेतु आहे, तेव्हां त्यानें किती शेर गूळ द्यावा तें सांग.
- १३८ प्र. $\frac{७२९७}{१२९७}$ ह्यांस अति संक्षेपरूप दे. $२\frac{१६}{६६}$ ह्यांस दशांशरूप दे. $२\frac{३}{४}$, $३\frac{७}{१०}$, $३\frac{१}{२}$, $१\frac{७}{८}$ ह्यांची बेरीज कर आणि $१\frac{२}{३}$ चे $२\frac{३}{४}$ ह्यांस $७\frac{१}{२}$ चे $१\frac{२}{३}$ ह्यांनीं भाग.
- १३९ प्र. मराठी चालीचे १५.५ कोस इंग्रजी ३८.७५ मैलांबरोबर आहेत; तर, $३२६\frac{३}{४}$ इंग्रजी मैलांबरोबर मराठी कोस किती होतील तें सांग.
- १४० प्र. एक रस्ता ९३७ हात ६ तसूलांब आणि ६हात ८ तसू रुंद आहे त्यास फरसबंदी करावयाची आहे, तीस दर चौरस गजास १ रुपया २ आणे पडतात, तेव्हां एकंदर खर्च किती लागेल?
- १४१ प्र. एका चुन्याच्या मक्तेवाल्यानें मुंबईस शेंकडा ४५ रुपये प्रमाणें कळीचा चुना २२५ फरे विकत घेतला. तो चुना भिजविला तेव्हां दर फन्यास ३ घनफूट चुना तयार झाला. परंतु त्यांत $\frac{१}{४}$ गाळ असे. तो गाळ काढून टाकून निवळ चुना मुंबईहून १८ मैलांवर नेऊन पोचविण्यास त्याला

दर मैलास १०० घनफूट चुना नेण्यास गाडीखर्च ४ आणें येत असे. मक्तेदारास सव खर्च भागून पूर्वीच्या खरेदीवर जर ९० रुपये नफा मिळवावयाचा आहे तर त्यानें तो चुना त्या ठिकाणीं कोणत्या दरानें विकावा ?

१४२ प्र. एका रुपयाचे $७\frac{१}{२}$ चे $२\frac{१}{२}$ चे $३\frac{५}{८}$, एका आण्याचे $३\frac{६}{८}$ चे $९\frac{३}{८}$, आणि एका पैचे $४\frac{१}{२}$ चे $८\frac{१}{२}$ ह्यांची बेरीज कर; आणि तीस $३\frac{१}{२}$ पैचे $\frac{३}{८}$ चे $\frac{५}{८}$ चे $\frac{१}{२}$ ह्यांनीं भाग.

१४३ प्र. २०५४ आणि ४२०३३६१ ह्यांचीं वर्गमूळें, व १५०४३८२४९ आणि ६२९०४२२७९३ ह्यांचीं घनमूळें काढ.

१४४ प्र. एक पोंड सोन्याची किंमत एक पोंड रुप्याच्या किंमतीच्या चौपट आहे, व सारख्या आकृतीचें सोने व रुपें घेतले तर त्यांचीं वजनं १९ : १० ह्या प्रमाणांत असतात, तेव्हां एक रुप्याची कांब १७५० पोंड किंमतीच्या सोन्याचे कांबीएवढी आहे, तिची किंमत किती होईल ?

१४५ प्र. चांगली चांदी एक रुपयास १० मासे $२\frac{१}{३}$ गुंजा येती, तर ९० तोळे $३\frac{१}{२}$ मासे वजनाचा चांदीचा एक तांब्या आहे त्याची किंमत काय होईल ?

१४६ प्र. $\frac{२४६०३७५}{४०६६}$ ह्यांच्या वनमूळास ५००२५ ह्यांच्या चतुर्घातमूळानें भाग.

१४७ प्र. पुण्याहून मुंबईस दोन आगीच्या गाड्या, एक मनुष्यांची व एक सामानाची, अशा एकदम जाऊन पोहोचल्या अशा वेतानें पाठवावयाच्या आहेत, त्यांत मनुष्यांची गाडी एक अवरांत २४ मैल जाती, व ओझ्याची ५० मिनिटांत १५ मैल जाती; तेव्हां मनुष्यांची गाडी बारांवर दोन वाजतां निघाली तर सामानाची गाडी केव्हा निघाली म्हणजे त्या दोन्ही मार्गांत न भेटतां तेथें एकदम पोहोचतील ? पुणें आणि मुंबई ह्यांच्यामध्ये अंतर १२० मैल आहे.

१४८ प्र. ४ महिन्यांनीं ५२८ रुपये ८ आणे द्यावयाचे आहेत;

ते दरसाल दरशेंकडा ४ रुपयेप्रमाणें व्याज कापून आज देणें झाल्यास किती द्यावे ?

१४९ प्र. ७३०० स्वारांच्या चार टोळ्या आहेत त्या अशा कीं पहिल्या टोळीचा; $\frac{1}{2}$, दुसरीचे; $\frac{2}{3}$, तिसरीचे; $\frac{3}{4}$ आणि चौथीचे $\frac{4}{5}$ ह्या सर्वांत स्वार सारखे आहेत, तेव्हां प्रत्येक टोळींत स्वार किती तें सांग ?

१५० प्र. ६३ फूट लांब आणि ४५ फूट रुंद अशा चौकास फरसबंदी करावयाची आहे, त्यांत त्या चौकाच्या कडेच्या ५ फूट ३ इंच रुंद जागेच्या फरसबंदीचा दर एक चौरस यार्डास १ रु. ८ आणेप्रमाणें आहे, व बाकीच्या फरसबंदीचा दर एक चौरस यार्डास १ रु. ६ आणेप्रमाणें आहे, तेव्हां सर्व फरसबंदीस खर्च किती लागेल ?

सोडविलेले प्रश्न.

पुढील सोडविलेले प्रश्नांचा समावेश या अंकगणितांत केला आहे याचें कारणः— बीजगणिताप्रमाणें क्ष, य, झ इत्यादि अव्यक्त अक्षरें न घेतां प्रश्नांत दिलेल्या प्रतिज्ञांच्या अनुरोधानें दिलेल्या अंकांची मिळवणी, वजाबकी, गुणाकार, भागाकार वगैरे करून इच्छिलेलें उत्तर आणणें हा अंकगणिताचाच एक भाग आहे.

बीजगणित ज्यांस येत नाहीं त्यांनीं अशा जातीचे प्रश्न सोडविण्याच्या रीतीची माहिती अवश्य करून घ्यावी; म्हणजे नानाप्रकारचे चमत्कारिक प्रश्नांचा खुलासा करण्याची शक्ति त्यांचे आंगांत सहज येईल, आणि त्यांस फार आनंद वाटे.

मद्रासेस 'पाठापाचें हैस्कूल' यांतिल अ. मास्तर राजश्री श्रीनिवास अप्पा यांना सन १८७७ या सालीं अंकगणितांतिल सोडविलेले प्रश्न या नांवाचें एक पुस्तक छापिलें आहे, त्यांतून शिकणारांकरितां हीं कित्येक उदाहरणें निवडून घेतलीं आहेत.

१ प्रश्न. एका श्रीमंत गृहस्थानें मरणकाळीं आपले पुत्रास आपले इष्टेटीचे $\frac{1}{2}$ आणि कन्येस बाकी राहिलेली इष्टेट अशीं

वांटून दिली. मुलाला मुलीपेक्षां २१,००० रुपये जास्त मिळाले, तेव्हां त्या गृहस्थाची सर्व इष्टत किती ?

खुलासा. $\frac{१३}{२०}$ मुलाचे वांटणोचे, तेव्हां $\frac{७}{२०}$ मुलीच्या वांटणीस आले. मुलाला मुलीपेक्षां $\frac{६}{२०}$ अधिक मिळाले, आणि हे २१००० रुपये आहेत म्हणून

$$\text{इष्टतीचे } \frac{६}{२०} = २१००० \text{ रु.}$$

$$\text{म्हणजे } \frac{\text{इष्टत} \times ६}{२०} = २१००० \text{ रु.}$$

भाजक सोडविल्याने (म्हणजे व. प्र. ३ प्रमाणे, एकी कडचा भाजक दुसरी कडे गुणक केल्याने).

$$\text{इष्टते} \times ६ = २१००० \text{ रु} \times २०$$

गुणक सोडविल्याने (म्हणजे व. प्र. ४ प्रमाणे, एकी कडचा गुणक दुसरी कडे भाजक केल्याने).

$$\text{इष्टत} = \frac{२१००० \text{ रु.} \times २०}{६}$$

$$= ७०००० \text{ रु. हे उत्तर.}$$

टीप- गुणक भाजक सोडविण्याचे नियम वरती कंसांत दिले आहेत, ते तेथील प्रत्यक्ष प्रमाणांचे आधाराने कसे सिद्ध होतात ते विद्यार्थ्यांनी गुरुपासून समजून घ्यावे. गुणक भाजक मोठाले असले, अनेक असले, किंवा मोघम असले, म्हणजे तेथे ह्या नियमाची गरज लागते म्हणून ते येथे दिले आहेत. वस्तुतः पाहतां वरील प्रकारच्या सोप्या उदाहरणांत ह्या नियमाचे उपयोग सहज गतीने आपण करित असतो इतके हे नियम बहिर्वाटांतले आहेत. म्हणून सहज कळण्यासारख्या स्थळी ह्या नियमाचा उल्लेख कोणी करित नाही; वरील प्रकारच्या स्थळी मात्र करितात.

२ प्रश्न. एका गृहस्थाला पूर्वी आपल्या उत्पन्नावर दर पोंडास ४ पेन्सप्रमाणे इनकमटाक्स द्यावा लागत असे. पुढे त्याचे उत्पन्न २४० पोंड जास्त झाले, आणि इनकमटाक्सही एका पोंडास ७ पेन्स याप्रमाणे जास्त झाला. पूर्वीपेक्षां त्याला आतां इनकमटाक्सबाबत ६० पोंड अधिक द्यावे लागतात, तर त्याचे पूर्वीचे आणि हल्लीचे उत्पन्न काय काय असावे ?

खुलासा. पूर्वीपेक्षां आतांचें उत्पन्न २४० पौंड जास्त आहे; सवव त्याचद्वल त्याला २४०×७ पेन्स = १६८० पेन्स = ७ पौंड इतका इनकमटाक्स जास्त द्यावा लागतो.

परंतु पूर्वीपेक्षां हल्लीं इनकमटाक्सचद्वल ६० पौंड जास्त द्यावे लागतात. ह्यांत वर आलेले ७ पौंड वजा दिठे म्हणजे बाकी ५३ पौंड राहतात, हे पूर्वीच्या उत्पन्नावर इनकमटाक्स जास्त झाल्याने द्यावे लागतात. हे स्पष्ट आहे.

पूर्वीपेक्षां इनकमटाक्स दर पौंडास ३ पेन्स जास्त बसला आहे; ५३ पौंड = १२७२० पेन्स म्हणून १२७२० पे. ÷ ३ पे. = ४२४० पौंड हे पूर्वीचें उत्पन्न झालें, आणि ४२४० पौंड + २४० पौंड = ४४८० पौंड हे मागील उत्पन्न झालें.

४२४० हे एक उत्तर.

४४८० हे दुसरें उत्तर.

३ प्रश्न. एका गृहस्थानें दुसऱ्यापासून त्याचे मालमत्तेचे $\frac{५}{६}$ विकत घेतले, पुढें त्या मालमत्तेची शेंकडा २० रु. किंमत वाढली तेव्हां त्यानें आपले वांट्याचे $\frac{३}{५}$ १६० रुपयांस दुसऱ्या गृहस्थास विकले, तेव्हां सर्व मालमत्तेची पूर्वीची किंमत काय ?

खुलासा. मालमत्तेची किंमत शेंकडा २० वाढली तेव्हां त्यास १०० रु. चे १२० रुपये येतील; त्याने आपल्या वांट्याचे $\frac{३}{५}$ हे १६० रुपयांस विकले. त्यानें सर्व वांटा विकला असता, तर त्याचे त्याला १६०+८०=२४० रुपये आले असते.

१२० रुपयांची पूर्वीची किंमत १०० आहे म्हणून २४० रुपयांची पूर्वीची किंमत २०० रुपये होईल. २०० रुपये ही मालमत्तेच्या $\frac{५}{६}$ ची पूर्वीची किंमत आहे, तेव्हां $\frac{६}{५}$ ची किंमत २४० रु. ही सर्व मालमत्तेची पूर्वीची किंमत आहे हें उत्तर.

४ प्रश्न. एका गृहस्थाजवळ कांहीं पैसा होता. तो तो दर वर्षास सवाईनें वाढवीत असे. ह्याप्रमाणें चार वर्षे लोटल्यावर पाहतो तो त्यास असें समजलें कीं, ही जमविलेली रकम त्यानें जर शेंकडा ५ रु. प्रमाणें व्याजानें ठेविली तर त्यास एक वर्षाचे व्याजाचे ३७५ रुपये येतील. तर त्याच्या जवळ पहिला पैसा किती असावा ?

खुलासा. दरसाल दरशेंकडा ५ रु. प्रमाणें त्यास व्याजाचे

३७५ रु. येतील इतका पैसा त्याच्याजवळ ४ थे वर्षाचे शेवर्ती जमला, म्हणजे $३७५ \times १०० + ५ = ७५००$ रु. इतका जमला.

हा पैसा मुद्दलाची ४ वेळ सवाई होऊन वाढलेला आहे म्हणून मुद्दलाचे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ = ७५०० रु.

गुणक सोडविल्याने.

$$\text{मुद्दल} = ७५०० \text{ रु.} \div \frac{६२५}{३५६} = ३०७२ \text{ रु.} \text{ हे उत्तर.}$$

५ प्रश्न. मी कांहीं एक किंमत देऊन ९० घोडे विकत घेतले. नंतर त्यांतील $\frac{१}{३}$ घोडे विकले त्यांत मला ६०० रुपयांचा तोटा झाला; पुढे मी बाकी राहिलेले सर्व घोडे ८८५० रुपयांस विकून टाकिले. या व्यापारांत मला मूळ खरेदीचे रकमेवर शेंकडा २५ रु. नफा झाला. तर माझी मूळची खरेदी किती रुपयांची होती ?

खुलासा. ६० घोडे ८८५० रुपयांस विकले त्याने, ३० घोडे विकले तेव्हां तोटा ६०० रु. झाला होता तो भरला जाऊन, ह्या ६० घोड्यांची मूळ किंमत मिळाली, आणि ९० घोड्यांच्या खरेदी वर १०० डा २५ प्रमाणें नफा मिळाला; म्हणजे २२॥ घोड्यांची मूळ किंमत फाजील मिळाली. म्हणून

६०० रु. + ६० घो.मू.किं. + २२॥घो.मू.किं. = ८८५० रु. स्थलांतरानें (म्हणजे, व. प्र. १११, व २२१, या अन्वये एकी कडील संख्या चिन्ह बदलून दुसरी कडे नेल्याने)

$$८२॥ \text{ घो.मू.किं.} = ८८५० \text{ रु.} - ६०० \text{ रु.} = ८२५० \text{ रु.}$$

गुणक सोडविल्याने.

$$१ \text{ घो. मू. किं.} = \frac{८२५० \text{ रु.}}{८२॥} = १०० \text{ रु.}$$

$$९० \text{ घो. मू. किं.} = ९००० \text{ रु.} \text{ हे उत्तर.}$$

टीप— वरती स्थलांतराचा नियम कंसांत दिला आहे त्याची सिद्धता तेथल्या प्रत्येक प्रत्यक्ष प्रमाणाच्या आधारेने विद्यार्थ्यांनी गुरुपासून समजून घ्यावी. अनेक संख्यांचे स्थलांतर करणे असले, म्हणजे तेथे वरील प्रत्यक्ष प्रमाणापेक्षां याच नियमाचा उपयोग करणे सोईचे होतें, म्हणून हा नियम येथे दिला आहे. बाकी वरील प्रकारच्या सोप्या उदाहरणांत या नियमाचा उपयो-

ग सहज गतीने आपण करीत असतो इतका हा नियम नित्यशः वापरणुकीत येणारा आहे.

६ प्रश्न. एका मनुष्याने एक बैल २१ रुपयांस विकत घेतला. परंतु तो फिरून विकून टाकावा, अशी त्याला इच्छा झाली; आणि मनांत हें कीं तो ज्या किमतीस विकवावयाचा तीत शेंकडा १२॥ रु. जरी कमी केलें तरी मूळ खरेदीवर आपणास शेंकडा १२॥ रु. नफा मिळावा, तर त्यानें तो बैल किती किमतीस विकवा ?

खुलासा. मूळ खरेदीवर त्यास शेंकडा १२॥ मिळवावयाचे म्हणजे २१ रुपयांबद्दल त्यास $२१ \times \frac{११२॥}{१००} = २३\frac{५}{८}$ रुपये मिळाले पाहिजेत;

आणि विकरी जरी शेंकडा १२॥ रु. कमी झाली; म्हणजे १०० चे ठिकाणीं ८७॥ रु. जरी मिळाले तरी चालतील; म्हणून $८७॥ : १०० :: २३\frac{५}{८} : २३\frac{५}{८} \times \frac{१००}{८७॥} = २७$ रु.

उत्तर त्याणें तो बैल २७ रुपयांस विकवा.

७ प्रश्न. एका गंध्याच्या दुकानीं दोन प्रकारचें गुलाबी अत्तर होतें; एक २॥॥ रु. तोळा भावाचें आणि दुसरें १॥॥ रु. तोळा भावाचें. तीं अत्तरें त्यानें मिश्र करून २ रु. तोळा याप्रमाणें विकलीं तर दर तोळ्यास प्रत्येकीं नफा तोटा काय काय होईल ? आणि अशा प्रकारचा तोटा होऊं नये अशी जर त्याची इच्छा असेल तर त्यानें त्यांचें मिश्रण कोणत्या प्रमाणानें करावें ?

खुलासा. पहिले प्रकारचे अत्तरांत त्यास दर तोळ्यास ॥॥ रुपया तोटा होईल आणि दुसरे प्रकारचे अत्तरांत त्यास दर तोळ्यास ॥॥ नफा होईल; म्हणून त्यानें पहिले प्रकारचें अत्तर एक तोळा घेऊन त्यांत दुसऱ्या प्रकारचें अत्तर तीन तोळे मिळवावें तेव्हां नफयातोटाची बरोबरी होईल.

८ प्रश्न. एका गवळ्यानें ७२ शेर दूध विकत दिलें, तें ११ भाग दूध आणि १ भाग पाणी असें मिश्रण होतें. त्यांत आणखी किती पाणी घातलें म्हणजे ९ भाग दूध आणि १ भाग पाणी असें मिश्रण होईल ?

खुलासा. उदाहरणा प्रमाणें पाहतां.

१२ भाग = ७२ शेर मिश्रण.

तर १ भाग = ६ शेर पाणी.

आणि ११ भाग = ६६ शेर दूध.

आतां दूध तितकेंच ठेवून त्यांत आणखी पाणी मिश्रित करून मिश्रणांत ९ भाग दुधास १ भाग पाणी झालें पाहिजे. म्हणून

भाग. भाग. शेर. शेर.

९ : १ : : ६६ : ७ $\frac{१}{३}$

या वरून ६६ शेर दुधांत ७ $\frac{१}{३}$ शेर पाणी घातलें पाहिजे. या ७ $\frac{१}{३}$ शेर पाण्यांत पूर्वीचें ६ शेर पाणी आहेच; म्हणून त्यांत आणखी १ $\frac{१}{३}$ शेर पाणी घातलें म्हणजे इच्छिले प्रमाणाचें मिश्रण होईल.

९ प्रश्न. दर शेळीस ३ रुपये याप्रमाणें एका बाजारांत एका धनगरानें कांहीं शेळ्या विकत घेतल्या, आणि वरील शेळ्यांचे $\frac{२}{३}$ इतक्या शेळ्या दर शेळीस ५ रुपये या भावानें दुसऱ्या बाजारांत विकत घेतल्या; नंतर एकंदर शेळ्या त्यानें ४८ रु. डझन प्रमाणें विकल्या त्यांत त्याला मुद्दल खरेद वर ४० रु. नफा झाला. तेव्हां प्रत्येक जातीच्या शेळ्या त्यानें किती किती विकत घेतल्या होत्या ?

खुलासा. त्यानें सर्व शेळ्यांची सरसकट विकरी दर शेळीस ४ रु. याप्रमाणें केली.

परंतु पहिले व्यापारांत त्यानें तीन रुपयांना एक शेळी याप्रमाणें खरेदी केली हांती तेव्हां त्यास दर शेळीस एक रुपया नफा झाला; म्हणजे पहिले व्यापारांत त्याला शेळ्यांइतके रु. नफा झाला.

दुसऱ्या व्यापारांत दर शेळीची खरेदी ५ रु. प्र. आहे; तेव्हां या विकरींत दर शेळीस एक रु. तोटा झाला आहे. पहिले शेळ्यांच्या $\frac{२}{३}$ इतक्या दुसऱ्या शेळ्या होत्या म्हणून पहिले शेळ्यांचे विकरीपासून त्यास जितके रुपये नफा झाला त्याचे $\frac{२}{३}$ दुसऱ्या शेळ्यांचें विकरीपासून तोटा झाला.

म्हणून धनगरास काय जो खरा नफा झाला तो पहिल्या शेळ्यांच्या $\frac{१}{३}$ च्या विकरींत झाला. बाकीच्या विकरींत नफ्यातोंट्याची रमारमी झाली,

परंतु वरील उदाहरणांत त्याचा नफा ४० रुपये झाला म्हणून सांगितलें आहे; म्हणून पहिले खरेदीचा $\frac{1}{3}$ म्हणजे ४० शेळ्या असें म्हटलें पाहिजे म्हणून:—

१ ली खरेदी ४० शेळ्या $\times ३ = १२०$ शेळ्यांची होती, आणि २ री खरेदी १२० शेळ्यांचे $\frac{२}{३} = ८०$ शेळ्यांची होती हीं उत्तरे.

१० प्रश्न. सोने व रुपें मिळून गठडी एकाजवळ वजनांत ९ पौंड होती. तिची एकंदर किंमत ३१८ पौं. १३ शि. ६ पे. होती. ह्या गठडींत सोन्याइतकें रुपें आणि रुप्याइतकें सोने अशीं जर तीं उलट प्रमाणानें वजनांत असतीं तर तिची एकंदर किंमत १२९ पौं. १० शि ६ पे. होती. १ औंस सोने व २ औंस रुपें मिळून किंमत ४ पौं. ८ शि. १॥ पेन्स झाली असती. तर एक औंस सोने व एक औंस रुपें यांची वेगळाली किंमत कायकाय असती?

खुलासा. पहिली गठडी व दुसरी गठडी ह्या एकत्र केल्यातर ९ पौंड सोने व ९ पौंड रुपें अशीं होतील व त्यांची किंमत ३१८ पौं. १३ शि. ६ पे. + १२९ पौं. १० शि. ६ पे. = ४४८ पौंड ४ शि. होईल.

$$९ \text{ पौं. सो.} + ९ \text{ पौं. रु.} = ४४८ \text{ पौंड. ४ शि.}$$

$$\text{व } १ \text{ पौं. सो.} + १ \text{ पौं. रु.} = ४९ \text{ पौं. १६ शि.}$$

$$१२ \text{ नीं भागून. } १ \text{ औं. सो.} + १ \text{ औं. रु.} = ४ \text{ पौं. ३ शि.}$$

$$\text{उदाहरणा प्रमाणें. } १ \text{ औं. सो.} + २ \text{ औं. रु.} = ४ \text{ पौं. ८ शि. १॥ पे.}$$

$$\text{वजावाकीनें. } १ \text{ औंस रु.} = ५ \text{ शि. १॥ पे.}$$

ही किंमत वरच्या कोणत्याही बरोबरींत ठेवावी म्हणजे येतें कीं.

$$१ \text{ औंस सोने} = ३ \text{ पौं. १७ शि. १० पे. हें उत्तर.}$$

११ प्रश्न. एक काम अ मनुष्य एकटा २७ दिवसांत संपवितो, तितकेंच काम करण्यास दुसऱ्या ब मनुष्यास १५ दिवस लागतात. आतां त्या कामावर अ मनुष्य १२ दिवस खपला, नंतर दुसरा ब मनुष्य ५ दिवस खपला, आणि मग तिसऱ्या एका क मनुष्यानें तें काम ४ दिवसांत संपविलें, तर एकट्या कनें सर्व काम पहिल्यापासून शेवटपर्यंत किती दिवसांत संपविलें असतें ?

खुलासा. सर्व काम $२७ \times १५ = ४०५$ धरिले तर,

अचें रोजचें काम = १५ येतात.

बचें रोजचें काम = २७ येतात.

अचें १२ दि. काम = $१२ \times १५ = १८०$ येतात.

बचें ५ दिवस काम = $५ \times २७ = १३५$ येतात.

व दोघां मिळून काम = ३१५ येतात.

सर्व काम = ४०५ धरिलें आहे.

कचें ४ दिवसांचें काम = ९० येतात.

व कचें रोजचें काम = २२ येतात.

सर्व एकट्या कर्ने करण्यास = $\frac{४०५}{२२} = १८$ दि. लागतील हें उत्तर.

१२ प्रश्न. कचे रोजचे कामाचे अर्धाइतकें अचें काम होत असे, ह्या दोघां मिळून कांहीं एक काम १० दिवसांत पुरें केलें; परंतु अ जाऊन त्याच्या बदल जर ब काम करावयास आला असता, तर ते दोघे मिळून तेंच काम ५ दिवसांत पुरें करिते. ह्या वरून अ आणि ब हे त्या कामावर ५ दिवस असते, आणि राहिलेले काम एकट्या कला संपावावें लागतें, तर त्यास किती दिवस लागते ? तसेंच अ, ब, आणि क यांच्या दररोज काम करण्याच्या शक्ति कशा कशा होत्या ?

खुलासा. सर्व काम $३ \times १० \times ५ = १५०$ धरिले.

तर. अ+क ह्या दोघांचें रोजचें काम = $\frac{१५०}{१०} = १५$ येतात.

परंतु क, हा अचे दुप्पट काम करितो यामुळे अ आणि क या दोघां मिळून अचे तिप्पट काम होतें; म्हणून,

अचें रोजचें काम = $\frac{१५}{३} = ५$ येतात.

आणि कचें रोजचें काम = १० येतात.

आतां ब आणि क हे दोघे तेंच काम ५ दिवसांत संपवितात, म्हणून,

ब+क यांचें रोजचें काम = $\frac{१५०}{५} = ३०$ येतात.

परंतु कचें रोजचें काम १० आहे म्हणून, बचें रोजचें काम

२० येतें. तसेंच अ, ब, क यांची रोजची कामें ५, २०, १० म्हणजे १, ४, २ या प्रमाणानें येतात.

अ+ब मिळून दररोज ५+२०=२५ काम करितात.

अ+ब हे पांच दिवसांत ५×२५=१२५ काम करतात.

सर्व काम = १५०

शिलक काम = २५

तें एकट्या कडा संपवावयास $\frac{२५}{१२५} = २$ ॥ दिवस लागतील हें उत्तर.

१३ प्रश्न. एका ठिकाणाहून दोन गृहस्थ एका वेळीं बाहेर पडून विरुद्ध दिशांनीं चालते झाले, म्हणून त्यांच्यामध्ये २ तासांनीं ४० मैलांचें अंतर पडलें; ते जर एकाच दिशेनें एकाच रस्त्यानें चालले असते, तर त्यांच्यांत १॥ तासांत ९ मैल अंतर पडलें असतें. तेव्हां प्रत्येकाची दर तासांत किती किती चाल होती तें सांग.

खुलासा विरुद्ध दिशांनीं गेले तेव्हां दोघांत २ तासांनीं ४० मैल अंतर पडलें, तर एक तासांत २० मैल अंतर पडेल.

एकाच दिशेनें चालले असते तर १॥ तासांत ९ मैल अंतर पडतें, तेव्हां १ तासांत ६ मैल अंतर पडलें असतें.

अ जलद चालणारा आहे असें मानिलें, तर तो एक तासांत ब पेक्षां ६ मैल अधिक जातो असें होतें; म्हणून,

ते विरुद्ध दिशांस जातात तेव्हां अ हा बच्या इतकें दुसऱ्या दिशेस चालून शिवाय एका तासांत ६ मैल पुढें जातो, आणि दोघांत २० मैलांचें अंतर पडतें; म्हणून,

२०-६=१४ ही बची दुप्पट चाल झाली; म्हणून ब हा एका तासांत ७ मैल चालला; आणि अ हा त्यापेक्षां ६ मैल अधिक म्हणजे एका तासांत १३ मैल चालला हें उत्तर.

१४ प्रश्न. दुपारचे १२ णसून १ यांच्यामध्ये अवरकांटा व मिनिटकांटा ह्यांत २५ मिनिटांचें अंतर केव्हां असेल? आणि या तासांत ही गोष्ट कितीदां होईल?

खुलासा. घड्याळाचे चक्रांत अवरांचें १२ भाग असतात व मिनिटांच ६० भाग असतात; या वरून व मिनिटकांटा अवर-

कांट्याच्या पुढे असेल तेव्हां ह्या दोहोंत २५ मिनिटांचें अंतर पडावयाचें आणि मागे असेल तेव्हां ह्या दोहोंत २५ मिनिटांचें अंतर पडावयाचें परंतु चक्रांत ६० भाग असतात म्हणून २५ मिनिटे मागे असणें आणि ३५ मिनिटे पुढे असणें याचा अर्थ एकच आहे, म्हणून या प्रश्नांत दोन उत्तरे आलीं; म्हणजे अवरकांट्याच्या पुढे मिनिटकांटा एकदां २५ मिनिटे केव्हां असेल आणि एकदां ३५ मि. केव्हां असेल.

१२ वाजतांना हे दोन्ही कांटे १२वर असतात म्हणजे चक्राच्या आरंभी शून्य भागी असतात. तेथून अवरकांटा १ भाग पुढे जातो तितक्यांत मिनिटकांटा १२ भाग पुढे जातो; म्हणजे मिनिटकांटा अवरकांट्याच्या पुढे ११ भाग जाण्यास १२ मिनिटे लागतात, व १ भाग जाण्यास $\frac{१२}{११}$ मिनिटे लागतात.

ह्या वरून मिनिटकांटा अवरकांट्याच्या पुढे २५ भाग जाण्यास $२५ \times \frac{१२}{११}$ मि. = $२७ \frac{३}{११}$ मिनिटे लागतील, आणि ३५ भाग जाण्यास $३५ \times \frac{१२}{११}$ मि. = $३८ \frac{२}{११}$ मिनिटे लागतील.

म्हणून १२ वाजून गेल्यावर $२७ \frac{३}{११}$ मिनिटांनीं एकदां अवरकांटा व मिनिटकांटा यांच्यामध्ये २५ मिनिटांचें अंतर असेल; आणि १२ नंतर $३८ \frac{२}{११}$ मिनिटांनीं फिरून त्या कांट्यांमध्ये २५ मिनिटांचें अंतर पडेल अशीं दोन उत्तरे आलीं.

१६ प्रश्न. एका गृहस्थानें ८५० सुवासिनिब्राम्हणांची समाराधना केली, त्यांत प्रत्येक ब्राम्हणास १॥ आणि प्रत्येक सुवासिनीस १॥ ह्या प्रमाणें दक्षिणा दिली. एकंदर दक्षिणा २५६१ रु. झाली. तेव्हां यासमाराधनेंत पुरुष किती होते आणि स्त्रिया किती होत्या ?

खुलासा. २५६१ रु. = २०५० चवल्या आहेत. आतांयजमानां जर दर ब्राम्हणास एकच चवली, आणि दर बाईस एकच चवली दिली असती, व ब्राम्हणांची संख्या तिप्पट आणि बायकांची दुप्पट अशी बोलाविली असती तर दक्षिणेची रकम तितकीच राहून जेवणार मंडळी चवल्यांइतकी म्हणजे २०५० झाली असती, तसेंच पुरुष व बायका प्रत्येकीं दुप्पट दुप्पट बोलाविलीं असती, तर जेवणार मंडळी दुप्पट, म्हणजे $२ \times ८५० = १७००$, झाली असती, म्हणून,

$$३ \text{ ब्रा. सं.} + २ \text{ सु. सं.} = २०५० \text{ मनुष्ये.}$$

$$२ \text{ ब्रा. सं.} + २ \text{ सु. सं.} = १७०० \text{ मनुष्ये.}$$

$$\text{वजावाकीने. } १ \text{ ब्रा. सं.} = ३५० \text{ म.}$$

$$१ \text{ सु. सं.} = ८५० \text{ म.} - ३५० \text{ ब्रा.} = ५००$$

उत्तर ३५० ब्राह्मण आणि ५०० सुवासिनीबोलाविल्या होत्या.

१६ प्रश्न. २४०० रुपये अ, ब आणि क या तिघांत वांटून देण्याचे आहेत. ते असे की, कडा, अ आणि ब ह्यांच्या बेरजे इतके रु. मिळावे; आणि अडा, ब आणि क ह्यांच्या बेरजेच्या अर्धाइतके मिळावे, तर एकेकाचे वांटणीस किती किती रुपये येतील ?

खुलासा. उदाहरणा प्रमाणे पाहतां.

$$\text{अचे रु.} + \text{बचे रु.} = \text{कचे रु.}$$

प्रत्येकींत कचे रु. मिळविले तर,

$$\text{अचे रु.} + \text{बचे रु.} + \text{कचे रु.} = २ \text{ कचे रु.}$$

तसेंच. बचे रु. + कचे रु. = २ अचे रु.

प्रत्येकींत अचे रुपये मिळविले तर

$$\text{अचे रु.} + \text{बचे रु.} + \text{कचे रु.} = ३ \text{ अचे रु.}$$

यावरून असे स्पष्ट होते की,

$$२ \text{ कचे रु.} = ३ \text{ अचे रु. आहेत.}$$

२ आणि ३ यांचा साधारण गुणाकार ६ आहे, तर एकंदर रकमेत अ आणि ब यांचे मिळून ६ भाग धरिले तर कच्या वांटणीस ६ भाग येऊन एकंदर १२ भाग होतील. त्यांत अच्या वांटणीस ४ भाग, बच्या वांटणीस २ भाग, आणि कच्या वांटणीस ६ भाग, असे एकंदर १२ भाग येतील, परंतु एकंदर रकम २४०० रुपये आहे, म्हणून एका भागाच्या वांटणीस $\frac{२४००}{१२}$ रु. = २०० रु. आले; म्हणून,

$$\text{अचे वांटणीचे } ४ \text{ भाग} = ४ \times २०० \text{ रु.} = ८०० \text{ रु.}$$

$$\text{बचे} \text{ — — } २ \text{ भाग} = २ \times २०० \text{ रु.} = ४०० \text{ रु.}$$

$$\text{कचे} \text{ — — } ६ \text{ भाग} = ६ \times २०० \text{ रु.} = १२०० \text{ रु.}$$

$$\text{एकंदर} \quad \underline{\quad\quad\quad} \quad २४०० \text{ रु. हे उत्तर.}$$

१७ प्रश्न. एका गृहस्थानें आपली ५८५०० रुपयांची मालमत्ता आपली बायको, तीन मुलगे, आणि चार मुली, यांस वांटून दिली; ती अशी. २ मुलगांच्या वांटणीस ३ मुलींच्या वांटणीइतके रुपये आले; आणि त्यांच्या बायकोच्या वांटणीस एक मुलगा आणि एक मुलगी यांच्या वांटणीच्या बेरजेच्या अर्धाइतके रुपये आले; तर प्रत्येकाच्या वांटणीस काय आलें ?

खुलासा. ३ आणि २ यांचा साधारण गुणाकार ६ आहे, म्हणून दर एक मुलाची वांटणी ६ भाग समजा.

२ मुलगे म्हणजे १२ भाग हे तीन मुलींच्या भागाबरोबर आहेत; म्हणून प्रत्येक मुलीच्या वांटणीस ४ भाग येतील.

एक मुलगा आणि एक मुलगी म्हणजे ६+४=१० भाग, यांच्या अर्धाबरोबर त्यांच्या बायकोच्या वांटणीस ५ भाग येतील.

म्हणून एक बायको म्हणजे ५ भाग, तीन मुलगे म्हणजे ३×६ भा.=१८ भाग, आणि चार मुली म्हणजे ४×४ भा. =१६ भाग, असे एकंदर ५ भा. +१८ भा.+ १६ भा. =३९ भाग इतकी सर्व मालमत्ता झाली. परंतु सर्व मालमत्ता ५८५०० रुपयांची आहे, म्हणून.

$$३९ भाग = ५८५०० रु.$$

$$१ भाग = \frac{५८५०० रु.}{३९} = १५०० रु.$$

उत्तरें. { बायकोच्या वांटणीचे ५ भाग = ५ × १५०० रु. = ७५०० रु.
प्रत्येक मुलाचे वा० चे ६ भाग = ६ × १५०० रु. = ९००० रु.
प्रत्येक मुलीचे वा० चे ४ भाग = ४ × १५०० रु. = ६००० रु.

१८ प्रश्न. एका देवळांत कांहीं श्रीमंत आणि कांहीं गरीब असे लोकांची १०० मंडळी जमली होती. त्या ठिकाणी असा ठराव झाला कीं सर्व श्रीमंत लोकांनीं मिळून इतका पैसा काढावा कीं, प्रत्येक गरीब मनुष्यास ८१ मिळेल. याप्रमाणें श्रीमंत लोकांनीं पैसा जमा करून गरीब लोकांस दिला तेव्हां प्रत्येक श्रीमंतास सात आणे आणि एक पै इतकें द्यावें लागलें; तेव्हां त्या जमावांत श्रीमंत किती होते आणि गरीब किती होते ?

$$खुलासा. ११ आणा = १५ पै; ७ आ. १ पै. = ८५ पै.$$

१५ आणि ८५ यांचा ल. सा. भाज्य = २५५ आहे. आतां एके ठिकाणी २५५ पयांचा धर्म झाला असें मानिलें तर तेथे

$$\frac{२५५}{८५} = ३ \text{ इतके श्रीमंत पाहिजेत.}$$

$$\frac{२५५}{१५} = १७ \text{ इतके गरीब पाहिजेत.}$$

आणि २० ही एकंदर मंडळी पाहिजे.

सारांश एकंदर २० मंडळींत ३ श्रीमंत आणि १७ गरीब पाहिजेत; तर,

१०० मंडळींत त्यांचे पांचपट म्हणजे १५ श्रीमंत आणि ८५ गरीब इतके असले पाहिजेत हे स्पष्ट आहे.

१९ प्रश्न. ८२ त्राय ओंस वजनाचे सोने दिले तर त्या मोबदला ९६ टन लोखंड विकत मिळते. लोखंडापेक्षां सोने किंमतीने किती पट अधिक आहे ?

खुलासा. एका त्राय पोंडांत ५७६० त्राय ग्रैन आहेत

एका अवा. पोंडांत ७००० त्राय ग्रैन

$$\text{एक अवा. पोंड} = \frac{७००० \text{ त्रा. ग्रे.}}{५७६० \text{ त्रा. ग्रे.}} = \frac{१७५}{१४६} \text{ त्रा. पों.}$$

ब एक टन = २२४० अ.पों.

$$\begin{aligned} ९६ \text{ टन लोखंड} &= ९६ \times २२४० \text{ अ.पों. लोखंड.} \\ &= ९६ \times २२४० \times \frac{१७५}{१४६} \text{ त्रा. पों. लोखंड.} \end{aligned}$$

व. ८२ त्रा. ओंसोने = $\frac{८२}{१२}$ त्रा. पों. सोने. = $\frac{२१}{४}$ त्रा. पों. सोने.

आतां. $\frac{२१}{४}$ त्रा. पों. सोने = $\frac{१७५ \times २२४० \times ९६}{१४६}$ त्रा. पों. लोखंड.

म्हणून बरोवरी प्र. ३ व ४ प्रमाणे.

$$\begin{aligned} १ \text{ त्रा. पों. सोने} &= \frac{१७५ \times २२४० \times ९६ \times ६}{१४६ \times ४९} \text{ त्रा. पों. लोखंड.} \\ &= \frac{१७५ \times २२४० \times ४}{४९} \text{ त्रा. पों. लोखंड.} \end{aligned}$$

$$= ३८२४३.९ \text{ त्रा. पों. लोखंड.}$$

म्हणजे सरासरीने सोने लोखंडापेक्षां ३८२४३.९ पटीने महाग आहे.

२० प्रश्न. एका मनुष्याने एका कामावर ५९ मजूर लोक लाविले होते. पैकीं पुरुष दररोज १२ तास काम करीत, बायका ९ तास काम करीत, आणि मुले ८ तास काम करीत. या कामाबद्दल त्यांस त्यांणी १२ तास काम केलें तर दर पुरुषास दर बाईच्या १॥ ने मिळे, आणि दर बाईस दर मुलापेक्षां त्याच्या

$\frac{1}{3}$ नें अधिक मिळे. ह्या कामावर एकंदरीनें दर रोजची जी मजुरी बायांस मिळे ती सर्व मुलांच्या दररोजचे मजुरीच्या रकमेच्या दुप्पट असे, आणि सर्व बायांनीं दर रोज ५ आणे मिळविले तर सर्व पुरुष दर रोज १२ आणे मिळवीत. ह्या वरून त्या कामावर प्रत्येक जातीचे किती किती मजूर होते ?

खुलासा. एका मुलास दररोजची भर मजुरी जर $6\frac{2}{3}$ मिळाली, तर त्याच्या तृतीयांशानें अधिक म्हणजे १० दर बाईंची दररोजची भर मजुरी होईल, आणि पुरुषाची त्याच्या दिढीनें म्हणजे १० होईल; परंतु पुरुष दररोज १२ तास काम करी; बाई ९ तास काम करी, आणि मुलगा ८ तास काम करी; म्हणून दर पुरुषानें दररोज ६ आ. मिळविले तर दर बाई दररोज $\frac{1}{2} \times 8 = ३$ आ. मिळवी, व मुलगा $\frac{1}{2} \times ३ = २$ आ. मिळवी.

आतां सर्व बाया मिळून सर्व मुलांच्या मजुरीच्या दुप्पट मिळवीत आणि सर्व बाया ५ आणे तर सर्व पुरुष १२ आणे मिळवीत. ह्या वरून पुरुष बाया आणि मुल्ल्यांच्या रोजच्या मिळकती १२ आणे, ५ आणे, व २॥ आणे, ह्या प्रमाणांत असत.

ह्या तिघांचे दर ६ आणे ३ आणे व २ आणे ह्या प्रमाणें असत, ह्यावरून ह्यांच्या संख्या २, $\frac{5}{3}$ व ११. ह्या प्रमाणांत असत, ह्या तिहीं मिळून ५९ मनुष्ये कामावर होतीं ह्यावरून त्यांत,

२४ पुरुष होते.

२० बायका होत्या.

१५ मुल्ले होतीं.

एकंदर ५९ मजूर होते.

२१ प्रश्न. एक काम ८५० यार्ड लांब २४ दिवसांत पुरें करण्याचें आहे. त्या कामावर १८ मनुष्ये ११ दिवस स्वपलीं आणि त्यांनीं ३३० यार्ड काम मात्र पुरें केलें. बाको राहिलेले काम मुदतींत संपण्यास कामावर अधिक किती मनुष्ये लावावीं लागतील ?

खुलासा. अकरा दिवसांत ३३० यार्ड काम १८ मनुष्यांनीं

केलें आणि बाकी काम ५२० यार्ड आहे, व मुदतीचे दिवस १३ आहेत, म्हणून

व्यस्त. ११ दि. : १३ दि. } :: १८ म : उ. = २४ मनुष्ये.
सम. ३३० यार्ड : ५२० या. }

पैकी १८ पूर्वीची आहेत म्हणून, २४ ह्यांतून १८ वजा जातां ६ राहतात हीं नवीं माणसें लावावीं हें उत्तर.

२२ प्रश्न. एक ससा आपल्या ८० उड्या कुऱ्याच्या पुढें आहे. त्याच्या मागे जो कुत्रा लागला आहे त्याच्या दोन उड्या जितक्या वेळांत होतात, तितक्या वेळांत सशाच्या तीन होतात; परंतु ससा जितकी जागा दोन उड्यांत घेतो, तितकी कुत्रा एका उडींत घेतो, तर पुढें सशाच्या कितव्या उडीला त्यास कुत्रा गांठील तें सांग.

खुलासा. सशाच्या दोन उड्यांतकी कुऱ्याची एक उडी लांब आहे, तस्मात् सशाच्या तीन उड्यांच्या वेळांत कुत्रा दोन उड्या मारितो, म्हणजे सशाच्या चार उड्यांतकी जागा घेतो, म्हणजे सशाच्या तीन उड्यांत कुत्रा त्यास त्याच्या एका उडीइतकें आटोपतो असें म्हटलें पाहिजे. अर्थात् ससा आपल्या ८० उड्या कुऱ्याच्या पुढें आहे, तितकें अंतर नाहींसं करण्यास सशाला $८० \times ३ = २४०$ उड्या माराव्या लागतील, म्हणजे सशाचे २४० वे उडीस त्याला कुत्रा येऊन गांठील हें उत्तर.

२३ प्रश्न. एका हौदांत ४७८.४ ग्यालन पाणी राहतें. तो २॥ फूट खोल आहे, आणि त्याची लांबी रुंदी सारखी आहे; तेव्हां लांबी रुंदीचें माप काय असावें ?

त्याचप्रमाणें त्या हौदाची लांबी ६ फूट असली व रुंदी खोलीच्या दुप्पट असली तर ती रुंदी किती फूट असेल ? एक ग्यालन पाण्याचें माप २७७.२७४ घ. इ. आहे.

खुलासा. हौदाचें माप ४७८.४ ग्या. आहे.

लांबी \times रुंदी \times ३० इ. = ४७८.४ ग्या.

= ४७८.४ \times २७७.२७४ घ. इ.

परंतु लांबी व रुंदी या सारख्या आहेत म्हणून,

$$(\text{लांबी})^2 \times ३० \text{ इं.} = १३२६४७.८८१६ \text{ घ. इ.}$$

$$(\text{लांबी})^2 = \frac{१३२६४७.८८१६ \text{ घ. इ.}}{३० \text{ इं.}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{लांबी} &= \sqrt{४४२१.५९६१} \text{ चौ. इं.} \\ &= ६६.४९ \text{ इं.} \\ &= ५ \text{ फू. } ६.५ \text{ इं. हें एक उत्तर.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{दुसरें } ७२ \text{ इं.} \times \text{रुंदी} \times \text{खोली} &= ४७८.४ \text{ ग्या.} \\ &= ४७८.४ \times २७७.२७४ \text{ घ. इं.} \end{aligned}$$

परंतु खोली रुंदीच्या अर्धाने आहे; म्हणून,

$$७२ \times \text{रुंदी} \times \frac{\text{रुंदी}}{२} = १३२६४७.८८१६ \text{ घ. इं.}$$

$$\text{रुंदी}^2 = \frac{१३२६४७.८८१६ \text{ घ. इं.}}{३६ \text{ इं.}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{रुंदी} &= \sqrt{३६८४.६६३३} \text{ चौ इं.} \\ &= ६०.७०१ \text{ इं.} \\ &= ५ \text{ फू. } ०.७०१ \text{ इं. हें दुसरें उत्तर.} \end{aligned}$$

२४ प्रश्न. एका कंत्राक्टराने ३ मैल लांबीची सडक ४ महिन्यांत पुरी करून देण्याचा मक्ता घेतला; आणि त्या कामावर त्याने १३६ माणसे लाविली. एका महिन्याच्या शेवटी पाहतो तो, फक्त अर्धा मैल सडकेचें काम झालेलें दृष्टीस पडलें. तेव्हां मक्तेदाराने एक महिन्याची आणखी मुदत मागितली, ती त्यास मिळाली तर तितक्या मुदतींत सडकेचें काम संपविण्यास मक्तेदाराला आणखी किती मनुष्ये कामावर ठेवावी लागतील ?

खुलासा. अर्धा मैल सडक बांधण्यास १३६ मनुष्यांना एक महिना लागला, तर शिलक २॥ मैल सडक बांधण्यास तितकेच मनुष्यांना आणखी ५ महिने लागतील हें स्पष्ट आहे.

परंतु ती सडक आणखी चार महिन्यांनी पुरी करावयाची आहे; तेव्हां,

५ महिन्यांनी पुरी होण्यास १३६ मनुष्ये लागतात तर तेवढीच सडक चार महिन्यांनी पुरी होण्यास किती मनुष्ये लागतील म्हणजे $\frac{१३६ \times ५}{४} = १७०$ मनुष्ये लागतील.

पूर्वीची १३६ मनुष्ये कामावर आहेत म्हणून $१७० - १३६ = ३४$ मनुष्ये अधिक ठेवावी लागतील, हे उत्तर.

२५ प्रश्न. एक खोली १४ फूट लांब आणि १० फूट रुंद अशी आहे. तिच्या जमनीवर भर ११ इंचांची घालावयाची आहे, परंतु ती, एक १० फूट खोलीची घाटोळी विहीर खणून त्यांतून माती काढून तिची घालावयाची आहे; तर पुढील माहिती सांग.

(१) भर किती घनफूट लागेल ?

(२) विहिरीची रुंदी म्हणजे व्यास किती ?

(३) विहिरीचा घेर किती होईल ?

(४) त्या विहिरी सभोवताली चौरस कुंपण घातलें तर त्याची एकंदर लांबी किती होईल ?

खुलासा. खोलीच्या जमिनीत लांबी रुंदी आणि खोली यांच्या गुणाकाराइतकी भर घालावी लागेल म्हणून,

१४ फू. \times १० फू. \times फू. $\frac{११}{१२} = १२८ \frac{१}{३}$ घ. फू. इतकी भर झाली हें पहिलें उत्तर.

विहिरीचे पोकळीचे घनफूट वरील भरीइतके असले पाहिजेत, वर्तुळपोकळीचे घनफळ = $०.७८५४ \times (\text{व्यास})^2 \times \text{खोली}$, हें आहे.

यांत पोकळीचे घनफळ $१२८ \frac{१}{३}$ घ. फू. आहे आणि खोली १० फूट असली पाहिजे; म्हणून

$$१२८ \frac{१}{३} \text{ घ. फू.} = ०.७८५४ \times (\text{व्यास})^2 \times १० \text{ फू.}$$

$$१२८ \frac{१}{३} \text{ चौ. फू.} = ७.८५४ \times (\text{व्यास})^2$$

$$\text{व्यास} = \sqrt{\frac{१२८ \frac{१}{३} \text{ चौ. फू.}}{७.८५४}} = ४ \text{ फूट सुमारे हें दुसरें उत्तर.}$$

घेर=व्या. $\times ३.१४ = ४$ फू. $\times ३.१४ = १२.५६$ फू. हैं ति. ३०.

चौरस कुंपणाचा घेर = विहिरीच्या व्यासाची चौपट
 $= ४ \times ४$ फूट = १६ फूट हैं चवथें उत्तर.

२६ प्रश्न. एका गांवांत राहणारे लोकांची संख्या दुसऱ्या गांवांत राहणारे लोकांच्या संख्येच्या दसपट आहे. पुढे माहामारीचे वारख्याने पहिल्या गांवांतील $\frac{१}{५}$ कमी झाले आणि दुसरे गांवांतले १५० लोक कमी झाले. तरी त्या गांवांताल लोकांची संख्या पूर्वीप्रमाणेच एकाची दुसऱ्याचे दसपट राहिली, तेव्हां वारख्याच्या अगोदर प्रत्येक गांवांत लोकांची संख्या किती होती ?

खुलासा. वारख्याच्या पूर्वी आणि नंतर गांवांतील लोकांच्या संख्यांचे प्रमाण जितकेच तितकेच आहे; म्हणून त्यांतील मर्तिके ही त्याच प्रमाणाने झाली पाहिजेत. दुसऱ्या गांवांत वारख्याने १५० लोक गेले तर पहिले गांवांत त्यांचे दसपट म्ह० १५०० लोक गेले पाहिजेत; आणि हे लोकसंख्येच्या $\frac{१}{५}$ बरोबर आहेत, म्हणून १ ले गांवांत वारख्याच्या पूर्वी $१५०० \times ५ = ७५००$ लोक असावेत, आणि दुसऱ्या गांवांत $\frac{७५००}{१०} = ७५०$ लोक असले पाजेत.

२७ प्रश्न. एका कापडवाल्ल्याने कापडाचे दोन गठे विकत घेतले. त्या दोन गठ्यांपैकी जो लहान होता त्यांत जितके यार्ड कापड होतें, त्यांच्या दुप्पट पेन्स एका यार्डास पडत अशा जातीचे कापड होतें. मोठा गठा होता त्यांत जितके यार्ड कापड होतें तितकेच पेन्स एका यार्डास पडत अशा जातीचे कापड होतें. मोठ्या गठ्यांत जितके यार्ड कापड होतें त्याच्या पाऊणपट धाकट्या गठ्यांत होतें. तथापि कापडवाल्ल्यास धाकटे गठ्याबद्दल ३१ पोंड २ पेन्स, मोठ्या गठ्यापेक्षा जास्त द्यावे लागले, तेव्हां प्रत्येक गठ्यांत किती किती यार्ड कापड होतें ?

खुलासा. मोठे गठ्यांत जितके यार्ड कापड होतें तितकी किंमत एक यार्ड कापडाची आहे, म्हणून सर्व कापडाची किंमत त्यांतील यार्डांचे वर्गाइतके पेन्स झाली.

धाकट्या गठ्यांत जितके यार्ड कापड होतें तितक्याचे दुप्पट

पेन्स एक यार्ड कापडाची किंमत; म्हणून त्यांतील सर्व कापडाची किंमत यार्डांचे वर्गाचे दुपटीइतके पेन्स झाली.

परंतु मोठे गठ्यांत जितके यार्ड कापड आहे त्याच्या पाऊण पट धाकट्या गठ्यांत कापड आहे; म्हणून मोठे गठ्यांत जितके यार्ड कापड आहे; त्याच्या पाऊण पटीचे वर्गाचे दुपटीइतके पेन्स धाकटे गठ्याची किंमत झाली.

धाकटा गठ्या आणि थोरला गठ्या यांच्या किंमतींत ३१ पौड २ पेन्स, म्हणजे ७४४२ पेन्स इतका फरक आहे.

आतां, मोठ्या गठ्यांत जर ४ यार्ड कापड आणि धाकटे गठ्यांत त्याच्या पाऊणपट म्हणजे ३ यार्ड कापड आहे असे घेतलें, तर ४ चा वर्ग १६ इतके पेन्स मोठ्या गठ्यांतील कापडाची किंमत झाली, आणि ३ चा वर्ग ९ आणि ९ दुणे १८ पेन्स इतकी किंमत धाकटे गठ्याची झाली. १६ आणि १८ यांत दोन पेन्सांचा फरक आला.

किंमतींत २ पेनी फरक पडण्यास मोठ्या गठ्यांतील ४ यार्डांचा वर्ग करावा लागतो, तर किंमतींत ७४४२ पेन्स इतका फरक पडण्यास मोठ्या गठ्यांत जितके यार्ड असतील त्या सर्वांचा वर्ग करावा लागेल; म्हणून,

$$\left. \begin{array}{l} \text{मोठ्या गठ्यांतील} \\ \text{सर्व यार्डांचा वर्ग} \end{array} \right\} \frac{४^२ \times ७४४२}{२}$$

$$= ४^२ \times ३७२१$$

$$= ४^२ \times ६१^२$$

म्हणून वर्गमूळ काढिलें म्हणजे

मोठ्या गठ्यांतील कापड = $४ \times ६१ = २४४$ यार्ड झालें; आणि धाकटे ग. कापड = $२४४ \times ३ = ७३२$ यार्ड झालें. हें उत्तर.

२८ प्रश्न. पका मनुष्यानें ६००० रुपयांना ४०० जनावरें विकत घेतलीं. त्यांत कांहीं बैल व कांहीं शेळ्या होत्या. प्रत्येक बैलाला ५० रुपये, आणि प्रत्येक शेळाला १० रुपये, असे पडले; तर त्याणें प्रत्येक जातीचीं जनावरें किती किती विकत घेतलीं तें सांग.

खुलासा. जर सर्वच बैल विकत घेतले असते, तर ६००० रुपयांत $\frac{६०००}{५} = १२०$ बैल विकत आले असते; परंतु एक बैल कमी करून त्या ठिकाणी ५ शेळ्या घातल्या असत्या, तर एकंदर किंमत तितकीच राहून एकंदर जनावरांची संख्या मात्र ४ नीं वाढली असती.

परंतु आपल्यास १२० बैलांची ४०० जनावरें करावयाची आहेत आणि एकंदर किंमत तितकीच राखण्याची आहे; म्हणजे $४०० - १२० = २८०$ जनावरें वाढविणें आहे.

परंतु एक बैल कमी करून ५ शेळ्या घेतल्या म्हणजे एकंदरीत ४ जनावरें वाढतात, तर २८० जनावरें वाढविण्यास $\frac{२८०}{४} = ७०$ बैल कमी केले पाहिजेत, आणि त्या मोवदला $७० \times ५ = ३५०$ शेळ्या घातल्या पाहिजेत.

अर्थात् १२० बैलांतून ७० बैल कमी केले म्हणजे ५० बैल राहतात, आणि त्याबद्दल ३५० शेळ्या आल्या म्हणजे $३५० + ५० = ४००$ एकंदर जनावरें होतात; म्हणून,

उत्तर ५० बैल व ३५० शेळ्या इतकी जनावरें विकत घेतलीं.

२९. प्रश्न. ६०० पुरुष आणि २३१० पोरें ६५ दिवसांत जितकें काम करितात तितकेंच काम ५२० पुरुष व ११७० पोरें यांच्या हातून १०७ दिवसांत होत आहे, तर असें दाखवि कीं, एका वेळांत दोन पुरुषांइतकें काम तीन पोरें करूं शकतात.

खुलासा. दिलेले पुरुष व पोरें याचें काम ६५ दिवसांत ६५ पट होईल व १०७ दिवसांत १०७ पट होईल म्हणून

$$\begin{aligned} ६५ \times ६०० \text{ पु.} + ६५ \times २३१० \text{ पो.} &= १०७ \times ५२० \text{ पु.} + १०७ \times ११७० \text{ पो.} \\ \text{म्हणजे. } ३९००० \text{ पु.} + १५०१५० \text{ पो.} &= ५५६४० \text{ पु.} + १२५१९० \text{ पो.} \\ \text{स्थ. } १५०१५० \text{ पो.} - १२५१९० \text{ पो.} &= ५५६४० \text{ पु.} - ३९००० \text{ पु.} \\ \therefore २४९६० \text{ पो.} &= १६६४० \text{ पु.} \end{aligned}$$

८३२० नीं भा. ३पो. = २पु. हें उत्तर.

अथवा ६५ आणि १०७ यांचा साधारण गुणाकार ६९५५ आहे; व आपण एकंदर काम तितकें आहे असें मानिलें तर

६०० पुरुष + २३१० पोरें हीं १ दि. त $\frac{६९५५}{६} = १०७$ काम करतील.

५२० पु. + ११७० पोरें हीं १ दि. त $\frac{६९५५}{१०००} = ६५$ काम करतील.
वरील रकमेस १३ नीं गुणिलें आणि खालचे रकमेस १५ नीं
गुणिलें तर,

७८०० पु. + ३००३० पोरें १ दिवसांत $१०७ \times १३ =$
१३९१ का. करतील.

७८०० पुरुष + १७५५० पो. १ दिवसांत $६५ \times १५ = ९७५$
काम करतील.

वरील रकमेंत खालची रकम वजा केली म्हणजे १२४८० पोरें
१ दि. ४१६ काम करतील, म्हणून,

१२४८० पोरें १ दि. ४१.६ काम करतील म्हणून ११७० पोरें
१ दिवसांत ३९.० काम करतील; परंतु ५२० पु. + ११७० पोरें
१ दि. ६५ काम करतात, म्हणून त्यांतील ११७० पोरांचें काम
वजा दिलें म्हणजे—

५२० पुरुष एका दिवसांत २६ काम करितात असें झालें.
म्हणून १ काम करण्यांस २० पुरुष लागतात असें दिसतें.

परंतु एका दिवसांत ११७० पोरें ३९ काम करितात म्हणून
एक काम करावयास पोरें ३० लागतात असेंही दिसतें.

सारांश २० पुरुषांचें काम ३० पोरें करितात म्हणजे २ पुरु-
षांचें काम ३ पोरें करितात हें उत्तर झालें.

३० प्रश्न. एका मनुष्यानें कांहीं शेळ्या व कांहीं मेंढ्या अशा
३७० रुपयांस विकत घेतल्या. आतां त्याणें जितक्या शेळ्या तित-
क्याच मेंढ्या, आणि जितक्या मेंढ्या तितक्या शेळ्या, अशा विकत
घेतल्या असल्या, तर त्याला ३५० रुपये पडले असते. दर शेळीची
किंमत २॥ रु. होती, आणि दर मेंढीची ३॥ रुपये होती; तेव्हां
त्याणें शेळ्या व मेंढ्या किती किती खरेदी केल्या ?

खुलासा. पहिल्या खरेदींत जितकी एकंदर जनावरांची संख्या
तितकीच दुसऱ्या खरेदीतील जनावरांची संख्या आहे, फक्त एका
खरेदीत जितक्या शेळ्या तितक्या मेंढ्या दुसऱ्या खरेदीत आहेत,
आणि पहिल्या खरेदींत जितक्या मेंढ्या तितक्या शेळ्या दुसरे ख-
रेदीत आहेत.

म्हणून दोन्ही खरेद्या मिळून जितक्या शेळ्यांची तितक्या मेंढ्यांची खरेदी झाली, आणि दोन्ही खरेद्यांची एकंदर रकम $३५० + ३७० = ७२०$ रु. झाली.

परंतु एक शेळी व एक मेंढी मिळून किंमत $२॥ + ३॥ = ६$ रुपये होती; म्हणून ७२० रुपयांत प्रत्येक तऱ्हेची १२० जनावरे विकत घेतली गेली; परंतु दोन्ही खरेद्यांत जनावरांची संख्या सारखीच आहे, म्हणून प्रत्येक खरेदी १२० जनावरांची झाली असें म्हटलें पाहिजे.

आतां पहिले खरेदींत जितक्या मेंढ्या तितक्याच शेळ्या असत्या म्हणजे ६० मेंढ्या व ६० शेळ्या असत्या; तर मेंढ्यांचे $६० \times ३॥ = २१०$ रु. आणि शेळ्यांचे $६० \times २॥ = १५०$ रु. मिळून एकंदर $२१० + १५० = ३६०$ रुपयांची खरेदी झाली असती; परंतु वास्तविक खरेदी ३७० रुपयांची झाली आहे, आणि मेंढीची किंमत शेळीपेक्षा जास्त आहे, म्हणून या खरेदींत शेळ्यांपेक्षा मेंढ्या अधिक घेतल्या आहेत हें उघड आहे.

आतां एक शेळी काढून तिच्या ठिकाणी एक मेंढी घेतली, तर जनावरांची संख्या तितकीच राहून $३॥ - २॥ = १$ रुपया एकंदरींत किंमत वाढेल. पहिली खरेदी ३६० रुपयांपेक्षा १० नीं अधिक आहे, म्हणून त्या खरेदींत १० शेळ्या जाऊन त्या ठिकाणी १० मेंढ्या आल्या असल्या असें दिसते.

म्हणून पहिले खरेदींत $६० - १० = ५०$ शेळ्या घेतल्या गेल्या आणि $६० + १० = ७०$ इतक्या मेंढ्या विकत घेतल्या असल्या पाहिजेत.

३१ प्रश्न. एक टांकें १२०० ग्यालन पाणी मावे इतकें होतें. त्यांत अ, ब आणि क या तीन तोट्या एकसारख्या चालू असल्या म्हणजे ते २४ मिनिटांत सर्व भरून जाई; परंतु अ ही तोटी जर एकटी सोडिली तर तिला क एकटे तोटीपेक्षा हौद भरण्यास ३० मिनिटे जास्ती लागत; व अ आणि ब ह्या दोन तोट्या जर एकदम सोडिल्या तर त्यांच्या मधून एका मिनिटांत जितकें पाणी येई

त्यापेक्षां १० ग्यालन क एकटे तोटींतून कमी येई; तेव्हां प्रत्येक तोटीने तें टांकें वेगळालें किती किती मिनिटांनी भरलें असतें ?

खुलासा. अ, ब, क या तीन तोट्यांनी २४ मिनिटांत १२०० ग्यालन पाणी येतें, तेव्हां एके मिनिटांत तिघां मिळून ५० ग्यालन पाणी येतें हें स्पष्ट आहे.

परंतु अ आणि ब ह्या तोट्यांतून दर मिनिटांत जितकें पाणी येतें त्यापेक्षां क तोटींतून १० ग्यालन कमी येतें, म्हणून अ आणि ब ह्या तोट्यांतून दर मिनिटास ३० ग्यालन आणि क तोटींतून २० ग्यालन असें एकदर एका मिनिटांत तिघांतून ५० ग्यालन पाणी येतें असें म्हटलें पाहिजे.

कनें दर मिनिटास जर २० ग्यालन पाणी येत आहे तर हौद भरण्यास म्हणजे तिघांतून १२०० ग्यालन पाणी येण्यास $\frac{१२००}{२०} = ६०$ मिनिटे लागतील, हें एक उत्तर.

क तोटीला हौद भरण्यास जितका वेळ लागतो, त्यापेक्षां अ एकटे तोटीला ३० मि. अधिक लागतात; परंतु क तोटीला हौद भरण्यास ६० मिनिटे लागतात, म्हणून अ तोटीला तितका हौद भरण्यास ९० मिनिटे लागतील, हें दुसरें उत्तर.

अ ने १२०० ग्यालनांचा हौद ९० मिनिटांत भरतो तेव्हां त्यांतून एका मिनिटांत $\frac{१२००}{९०} = १३\frac{१}{३}$ इतकें ग्यालन पाणी येतें असें म्हटलें पाहिजे.

अ तोटीनें एका मिनिटांत $१३\frac{१}{३}$ ग्या. पाणी येतें आणि अ ब ह्या दोन तोट्यां मिळून दर मिनिटास ३० ग्या. पाणी येतें. ∴ ब तोटीनें दर मिनिटास $३० - १३\frac{१}{३} = १६\frac{२}{३}$ ग्या. आलें पाहिजे; म्हणून तिनें १२०० ग्या. चा हौद $१२०० \div १६\frac{२}{३} = ७२$ मि. इतक्या वेळाने भरेल, हें ३ रें उत्तर.

३२ प्रश्न. अ हा आपला माल बला ११५ पौंड. १९ शि. २ पे. इतक्याला विकतो, आणि त्यास दर शेंकडा १० पौंड नफा होतो; ब हा तोच माल दुसऱ्यास विकतो, आणि त्याला शेंकडा १० पौंड. तोटा होतो; तेव्हां अची खरेदी किती पौंडांची आणि बची विकरी किती पौंडांची ?

खुलासा. ११० पौंडांला जर १०० पौंड मूळ खरेदी, तर ११५ पौं. १९ शि. २ पेन्स यांना मूळ खरेदी काय असावी ? उत्तर १०५-८-४ अची मुळची खरेदी.

१०० पौंडांला जर ९० विकरी तर ११५ पौं. १९ शि. २ पे. यास विकरी किती असावी ? उत्तर—

१०४-^७/_{३३} इतकी बऱ्या विकरीची रकम.

३३ प्रश्न. एका गृहस्थाला तीन मुली होत्या; एक सात वर्षांची, दुसरी नऊ वर्षांची आणि तिसरी अकरा वर्षांची. प्रत्येक मुलीस १३ वे वर्षी ३००० रु. मिळावे अशा तजवीजी साठीं रुपये ब्यांकेत दरसाल दरशेकडा ५ रु. व्याजाप्रमाणें ठेविले. व्याज चक्रवाढ. तर ब्यांकेत रकम किती ठेविली ती सांग.

खुलासा. ७ वर्षांचे मुलीस ६ वर्षांनीं रुपये मिळावयाचे, ९ वर्षांचे मुलीस ४ वर्षांनीं रुपये मिळावयाचे, आणि ११ वर्षांचे मुलीस २ वर्षांनीं मिळावयाचे.

$$(१.०५)^२ = १.१०२५$$

$$(१.०५)^४ = १.२१३५२६२५$$

$$(१.०५)^६ = १.३३७९१२६९७६२५$$

म्हणून

$$\frac{३०००}{१.१०२५} = २७२१.१ \text{ रु. हे अकरा वर्षांचे मुलीबद्दल.}$$

$$\frac{३०००}{१.२१३५} = २४७२.२ \text{ रु. हे नऊ वर्षांचे मुलीबद्दल.}$$

$$\frac{३०००}{१.३३७९} = २२४२.३ \text{ रु. हे सात वर्षांचे मुलीबद्दल.}$$

७४३५.६ रु. एकंदर ब्यांकेत ठेविले पाहिजेत.

३४ प्रश्न. एका गृहस्थाजवळ दोन घोडे आणि एक उत्तम प्रकारचें ५०० रुपये किंमतीचें जीन असे तीन पदार्थ होते. हें जीन जर एका घोड्यावर घातलें तर त्यासुद्धां त्याची किंमत दुसऱ्या घोड्याच्या दुप्पट होई, आणि तें जीन जर दुसऱ्या घोड्यावर घातलें तर त्यासुद्धां त्याची किंमत पहिल्या घोड्याच्या तिप्पट होई, तेव्हां त्या घोड्यांची वेगळाली किंमत काय असावी ?

खुलासा. जिनाची किंमत ५०० रु. आहे, तेव्हां पहिले घोड्यावर जोन घातले तर—

$$१ \text{ ले घो. किं.} + ५०० \text{ रु.} = २ \text{ पट } २ \text{ रे घो. किं.}$$

प्रत्येक बाजूस १००० मिळविले तर,

$$१ \text{ ले घो. किं.} + १५०० \text{ रु.} = २ \text{ पट } २ \text{ रे घो. किं.} + १००० \text{ रु.}$$

दुसरे घोड्यावर जोन घातले तर—

$$२ \text{ रे घो. किं.} + ५०० \text{ रु.} = ३ \text{ पट } १ \text{ ले घो. किं.}$$

दोन्ही बाजूस २ नीं गुणिले तर—

$$२ \text{ पट } २ \text{ रे घो. किं.} + १००० \text{ रु.} = ६ \text{ पट } १ \text{ ले घो. किं.}$$

$$\text{परंतु. } २ \text{ पट } २ \text{ रे घो. किं.} + १००० \text{ रु.} = १ \text{ ले घो. किं.} + १५०० \text{ रु.}$$

$$\therefore ६ \text{ पट } १ \text{ ले घो. किं.} = १ \text{ ले घो. किं.} + १५०० \text{ रु.}$$

दोन्ही बाजूस १ ले घो. किं. वजा दिली तर—

$$५ \text{ पट } १ \text{ ले घो. किं.} = १५०० \text{ रु.}$$

म्हणून १ ले घो. किं. = ३०० रु. हे एक उत्तर.

आणि ३०० + ५०० = ८०० = २ पट २ रे घो. किं.

म्हणून २ रे घो. किं. = ४०० रु. हे दुसरे उत्तर.

३५ प्रश्न. दोन संख्या अशा आहेत की त्यांची बेरीज ३० होते; आणि एकीचा $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{६}$ हे एकंदरीने दुसरीचे $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{१}{४}$ यांचे बेरजेबरोबर आहेत. तर त्या दोन संख्या कोणत्या?

खुलासा. $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{६} = \frac{१८+१२+६}{३६} = \frac{३६}{३६} = १$ यावरून असे दिसते की, एका संख्येचे $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{६}$ यांची बेरीज त्या संख्येइतकीच आहे.

$\frac{१}{२} + \frac{३}{४} + \frac{१}{४} = \frac{२+३+१}{४} = \frac{६}{४} = १$ ॥ यावरून असे दिसते की, दुसरे संख्येचे $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{१}{४}$ यांची बेरीज घेतली तर त्या संख्येच्या दिढीने येते, परंतु ही बेरीज पहिले बेरजेइतकी आहे. म्हणून दुसरी संख्या पहिले संख्येपेक्षा दिढीने लहान असली पाहिजे.

म्हणजे पहिली संख्या जर तीन तर दुसरी संख्या दोन असे असले पाहिजे. या दोहोंची बेरीज ५ होते; आणि आमचे प्रश्नांत ती बेरीज ३० आली पाहिजे म्हणजे ६ पट अधिक आली पाहिजे.

म्हणून इच्छिल्या संख्या $३ \times ६ = १८$ आणि $२ \times ६ = १२$ ह्या झाल्या.

३६ प्रश्न. एका गांवांत दर वर्षी ४५ असामींत एक असामी मरण पावतो, आणि गांवाबाहेरच्या प्रदेशांत दर वर्षास ५० त एक असामी मरण पावतो. गांवांत लोकवस्ती १८६७५ आहे आणि बाहेरील प्रदेशांत ७९२५० इतकी आहे. तर गांवांतले व बाहेरचे मिळून एकंदरीने मरणारांची संख्या १०००० व्हावयास किती वर्षे लागतील ?

खुलासा. गांवांत लोकसंख्या १८६७५ आहे, आणि वर्षास ४५ पैकी एक मरतो, म्हणून $\frac{१८६७५}{४५} = ४१५$ ही एका वर्षांत मरणारांची संख्या झाली.

त्याचप्रमाणे गांवाबाहेरची एका वर्षांत मरणारांची संख्या $\frac{७९२५०}{५०} = १५८५$ झाली.

एकंदरीने गांवांतले व बाहेरचे एका वर्षांत मरणारांची संख्या $१५८५ + ४१५ = २०००$ झाली.

म्हणून मरणारांची एकंदर संख्या १०००० व्हावयास ५ वर्षे पाहिजेत हे उत्तर.

३७ प्रश्न. दोन झाडांवर कांहीं पोपट बसले होते. एका झाडावरचे पोपट दुसऱ्या झाडावरच्या पोपटांस असे म्हणाले की, जर तुमच्यांतले ७ पोपट आमच्यांत आले तर आम्ही तुमच्या तिप्पट होऊं. त्यांस दुसऱ्या पोपटांनीं असे सांगितले की, जर तुमच्या मधील ७ पोपट आमच्यांत येतील तर तुम्ही आम्ही संख्येने सारखे होऊं. तर प्रत्येक झाडावर किती किती पोपट होते, ते सांग.

खुलासा. प्रश्नांतील दुसरे प्रतिज्ञेप्रमाणे पहिले झाडावरचे सात पोपट गेले म्हणजे दुसरे झाडावर ७ पोपट वाढणार. दोन्ही झाडांवर आतां बाहेरचे सात सात पोपट आणून घातले तर पहिले झाडावर तूट पडलेली भरून येऊन दुसरे झाडावर मात्र १४ पोपट अधिक होतील, म्हणून,

$$प. झा.पो. = दु. झा.पो. + १४$$

$$आणि \quad दु. झा.पो. = प. झा.पो. - १४$$

आणि या दोहींकडे सात सात पोपट कमी केले तर

$$\text{दु. झा. पो.} - ७ = \text{प. झा. पो.} - २१$$

परंतु, प्रश्नांतील पहिले प्रतिज्ञेप्रमाणें दुसऱ्यांतलें ७ पोपट प-
हिल्यांत आले म्हणजे पहिल्यावर, दुसऱ्यांतील शिलक राहतात
त्यांचे तिप्पट होतात.

म्हणजे

$$\text{प. झा. पो.} + ७ = ३ (\text{दु. झा.पो.} - ७)$$

$$\text{परंतु दु. झा. पो.} - ७ = \text{प. झा. पो.} - २१$$

$$\therefore \text{प. झा. पो.} + ७ = ३ (\text{प. झा. पो.} - २१)$$

$$= ३ (\text{प. झा. पो.}) - ६३$$

$$\therefore \text{प. झा. पो.} = ३ (\text{प. झा. पो.}) - ७०$$

$$\therefore \text{प. झा. पो.} + ७० = ३ (\text{प. झा. पो.})$$

आतां, पहिले झाडावरचे पोपटांत ७० मिळविल्यानें जर तिप्पट
पोपट होत आहेत, तर ७० हे पोपटांचे दुप्पटीबरोबर असले पाहि-
जेत; म्हणजे पहिले झाडावरचे पोपट ३५ असले पाहिजेत, हें एक
उत्तर.

पहिल्या झाडापेक्षां दुसऱ्या झाडावर १४ पोपट कमी आहेत,
म्हणून $३५ - १४ = २१$ हे दुसऱ्या झाडावरचे पोपट हें दुसरें उत्तर.

३८ प्रश्न. सावन दिवस २४ तासांचा असतो, नाक्षत्र दिवस
२३ ता. ५६ मि. ४.०९ से. इतका असतो. आतां एका नाक्षत्र-
दिवसाचे जर २४ तास कल्पले, तर नाक्षत्रकालांत सावन दिव-
साचें मान कसें दाखवाल?

खुलासा. २३ तास ५६ मि. ४.०९ से. यास २४ तास, तर
२४ तासास काय?

$$\text{उत्तर} = \frac{२४ \times २४}{२३.५६.४.०९} = २४ \text{ ता. } ५. \text{ मि. } ६ \frac{१६४१२४२}{२६९६४०९} \text{ से. हें उत्तर.}$$

३९ प्रश्न. संत्री लोकांची एक टोळी एका ठिकाणाहून दुसऱ्या
ठिकाणी जावयास निघाली. त्यांच्या जवळ अन्नसामग्री त्यांस
मजलभर पुरे इतकी होती. परंतु वाटेत त्यांच्यावर छापा पडून
त्यांतले १५० लोक मारले गेले; आणि त्यांच्याजवळ जी शिलक
अन्नसामग्री होती तिचा $\frac{१}{३}$ लुटला गेला. आतां पाहतात तीं त्यांस

असें समजलें कीं, पूर्वीं दर मनुष्यास जितकें खावयास मिळत असे तितकेंच जर दिलें, तर त्यांच्याजवळ पूर्व ठिकाणीं परत येऊन पौंचण्यापुरतें मात्र अन्न शिलक राहिलें होतें, आणि त्यांनीं जर तसाच पुढें कूच केला असता, तर नेमिले ठिकाणीं येऊन पौंचण्यास त्यांना दर माणसीं पूर्वीं जितकें अन्न मिळत असे त्याच्या पाऊणपट द्यावें लागलें असतें. तर पहिले ठिकाणांतून किती लोकांची टोळी बाहेर पडली तें सांग.

खुलासा. छापा पडल्यावर जें अन्न राहिलें तें परत येण्याला पूर्वींचेच दरानें पुरलें असतें, आणि त्यांनीं पुढें कूच केला असता तर प्रत्येक मनुष्यास पाऊणपट अन्नावर निर्वाह करावा लागता; द्यावरून पुढचा रस्ता जर चार दिवसांचा असला, तर मागला रस्ता तीन दिवसांचा होता, व एकंदर मजल ७ दिवसांची होती, असें म्हटलें पाहिजे.

सात मजलांपुरती त्यांच्याजवळ अन्नसामग्री होती म्हणून छापा पडला त्या वेळेस त्यांच्या जवळ $\frac{7}{3}$ अन्नसामग्री राहिली; तिचा $\frac{1}{3}$ लुटला गेला तेव्हां त्यांच्या जवळ $\frac{7}{3}$ चे $\frac{2}{3} = \frac{14}{9}$ सामग्री राहिली.

ही सामग्री राहिलेले लोकांस परत येण्यास तीन दिवसांपुरती होती, म्हणजे राहिलेले लोकांस $\frac{14}{9} \div 3 = \frac{14}{27}$ इतकी सामग्री रोज खर्च होई असें झालें; परंतु छापा पडण्यापूर्वीं दररोज $\frac{1}{3}$ सामग्रीचा खर्च होई म्हणजे $\frac{14}{27}$ होई. तेव्हां सहज लक्षांत येईल कीं $\frac{14}{27}$ बदल $\frac{1}{3}$ खर्च होऊं लागला म्हणजे $\frac{1}{3}$ खर्च कमी झाला असें म्हटलें पाहिजे. परंतु हा कमी खर्च माणसें कमी झाल्यामुळें होऊं लागला; माणसें १५० कमी झालीं. तेव्हां पूर्वींच्या टोळीतील माणसांचे $\frac{1}{3}$ शाबरोबर १५० मनुष्ये आहेत असें दिसतें. म्हणून $१५० \times ९ = १३५०$ हीं पूर्वींचीं सर्व टोळीतील माणसें असलीं पाहिजेत.

४० प्रश्न. एक पुस्तक अशा रीतीनें छापलें गेलें आहे कीं, प्रत्येक पत्रांत विवक्षित ओळी आणि प्रत्येक ओळीत विवक्षित अक्षरें अशीं आहेत. आतां प्रत्येक पत्रांत जर तीन तीन ओळी अधिक असत्या, आणि प्रत्येक ओळीत चार चार अक्षरें अधिक

असर्ती, तर प्रत्येक पत्रांत २२४ अक्षरे वाढलीं असर्ती; आणि प्रत्येक पत्रांत दोन दोन ओळी कमी असल्या, आणि प्रत्येक ओळीत तीन तीन अक्षरे कमी असर्ती, तर प्रत्येक पत्रांत पूर्वीपेक्षां १४५ अक्षरे कमी झालीं असर्ती. तर प्रत्येक पत्रांत ओळी किती होत्या, आणि प्रत्येक ओळीत अक्षरे किती होती, तीं सांग.

खुलासा. पहिल्यानें प्रत्येक ओळीत चार चार अक्षरे वाढलीं असर्ती तर एका पत्रांत जितकी ओळींची संख्या तिच्या चौपटी-इतकी अक्षरे वाढलीं असर्ती; आणि ओळी तीन वाढल्या म्हणून एका ओळीत जितकी अक्षरे, त्यांचे तिप्पट आणखी अक्षरे वाढलीं असर्ती; आणि शिवाय १२ अक्षरे वाढलीं असर्ती म्हणून प्रतिज्ञेप्रमाणें,
४ पट ओळींची संख्या + ३ पट एका ओळीतील अक्षरे
 $= २२४ - १२ = २१२,$

त्याचप्रमाणें ओळी व अक्षरे कमी झालीं असर्ती तर,
३ पट ओळींची संख्या + २ पट एका ओळीतील अक्षरे
 $= १४५ + ६ = १५१;$

पहिले समीकरणाला दोहोर्नी गुणिलें आणि दुसऱ्यास तिहींनी गुणिलें तर,

$$८ \text{ ओ. सं. } + ६ \text{ एका ओ. अ. } = ४२४$$

$$९ \text{ ओ. सं. } + ६ \text{ एका ओ. अ. } = ४५३$$

वजाबाकी करून एका पत्रांतील ओळींची संख्या २९ येते हें एक उत्तर;

आणि ४ पट ओ. + ३ पट एका ओळीतील अक्षरे $= २२४ - १२ = २१२$ आहेत, म्हणजे

$४ \times २९ + ३$ पट एका ओळीतील अक्षरे $= २१२$ आहेत, म्हणून तीन पट एका ओळीतील अक्षरे $= २१२ - ११६ = ९६$ आहेत; म्हणून एका ओळीतील अक्षरे $= \frac{९६}{३} = ३२$ हें दुसरें उत्तर.

अभ्यासाकरिता दिलेल्या प्रश्नांची उत्तरे.

साधारण अपूर्णांक. पत्र ४.

- (१ लें) $\frac{४०}{५}$; $\frac{१३५}{५}$; $\frac{२१६}{२७}$; $\frac{७२९}{२७}$.
 (२ रें) $\frac{३७४}{११}$; $\frac{१४८५}{११}$; $\frac{५७८}{१७}$; $\frac{२२९५}{१७}$.
 (३ रें) $\frac{९०}{१५}$; $\frac{१३५}{१५}$; $\frac{१८०}{१५}$; $\frac{३००}{१५}$.
 (४ थें) $\frac{८५०}{३४}$; $\frac{११५६}{३४}$; $\frac{५७८}{३४}$; $\frac{३७७४}{३४}$.

भागानुबंध पूर्णांकस विषम अपूर्णांकाचें रूप. पत्र ५.

- (१ लें) $\frac{२४}{७}$. (२ रें) $\frac{१२}{२}$. (३ रें) $\frac{२४३५}{११}$. (४ थें) $\frac{२३६}{१७}$.
 (५ वें) $\frac{४२७}{१३}$. (६ वें) $\frac{६०२९}{३०}$. (७ वें) $\frac{८६३}{१२}$. (८ वें) $\frac{२३३६}{१५}$.
 (९ वें) $\frac{२३१५}{१८}$. (१० वें) $\frac{१३८४}{३७}$. (११ वें) $\frac{६०२७}{३७}$.
 (१२ वें) $\frac{३१४७}{२५}$. (१३ वें) $\frac{८२२९}{१६}$. (१४ वें) $\frac{२१३१}{२१}$. (१५ वें) $\frac{९}{८}$.
 (१६ वें) $\frac{७}{२}$. (१७ वें) $\frac{१९}{४}$. (१८ वें) $\frac{८१}{१६}$. (१९ वें) $\frac{५७}{८}$.
 (२० वें) $\frac{५१३}{६४}$. (२१ वें) $\frac{५७९}{६४}$.

विषम अपूर्णांकस भागानुबंधरूप. पत्र ६.

- (१ लें) $४\frac{१}{२}$. (२ रें) $७\frac{२}{११}$. (३ रें) $२४\frac{१}{१३}$. (४ थें) $२६\frac{२९}{८७}$.
 (५ वें) $१६\frac{१५}{७७}$. (६ वें) $३३\frac{१}{२५}$. (७ वें) १०१ . (८ वें) १५ .
 (९ वें) ५८ . (१० वें) $१४३\frac{१}{२३}$. (११ वें) $४०\frac{२३}{२५}$.
 (१२ वें) $४१\frac{५३}{७५}$. (१३ वें) १६ . (१४ वें) ४० . (१५ वें) $३५\frac{७}{१०२}$.
 (१६ वें) $३५\frac{५३}{११७}$. (१७ वें) २१ . (१८ वें) ५८ . (१९ वें) २६ .
 (२० वें) २१ . (२१ वें) ८ .

अपूर्णांकस पूर्णांकाचें गुणणें व भागणें. पत्र ८.

- (१ लें) $\frac{३५}{४}$; $\frac{३५}{३}$; $\frac{३५}{३}$; $\frac{८७५}{३६}$; व $\frac{७}{३६}$; $\frac{५}{३६}$; $\frac{३५}{२८८}$; $\frac{३५}{३२}$.
 (२ रें) $\frac{८७५}{१२५}$; $\frac{१२५}{१२५}$; $\frac{१२५}{१२५}$; व $\frac{२५}{१२५}$; $\frac{५}{१२५}$.
 (३ रें) $\frac{६४०}{३२०}$; $\frac{३२०}{३२०}$; $\frac{१२८०}{१२८०}$; $\frac{१६००}{३२०}$; व $\frac{१६०}{३२०}$.
 (४ थें) $\frac{६९३}{३२०}$; $\frac{२३५}{४०}$; $\frac{६९३}{३२०}$; $\frac{६९३}{३२०}$; व $\frac{२०७९}{३२०}$; $\frac{६२३७}{३२०}$.

अतिसंक्षेप रूप. पत्र ९.

- (१ लें) $\frac{९}{२०}$; $\frac{९०७}{१८}$; $\frac{८१}{१५}$. (२ रें) $\frac{४}{५}$; $\frac{२}{३}$; $\frac{१}{२}$; $\frac{३}{४}$.

- (३ रे) $\frac{93}{94}; \frac{22}{23}; \frac{6}{7}; \frac{3}{4}$. (४ थें) $\frac{99}{98}; \frac{9}{32}; \frac{60}{67}; \frac{2964}{2048}$.
 (५ वें) $\frac{99}{93}; \frac{20}{29}; \frac{23}{33}; \frac{60}{29}$.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. पत्र १०.

- (१ ले) $\frac{3}{6}; \frac{4}{99}; \frac{93}{23}$; (२ रे) $\frac{469}{9777}; \frac{3}{4}; \frac{36}{66}$.
 (३ रे) $\frac{203}{373}; \frac{6}{90}; \frac{373}{423}$; (४ थें) $\frac{26}{33}; \frac{93}{466}; \frac{29}{44}$.

प्रभागजातीस भागजातिरूप. पत्र ११-१२.

- (१ ले) $\frac{12}{3}; \frac{36}{7}; \frac{9}{6}$; (२ रे) $\frac{6}{92}; \frac{9}{7}; \frac{900}{9}$.
 (३ रे) $\frac{9}{2}; \frac{4}{2}; \frac{956}{2}$. (४ थें) $\frac{99}{3}; \frac{39}{3}; \frac{969}{92}$.
 (५ वें) $\frac{82}{46}; \frac{4}{46}$; ३. (६ वें) $\frac{9}{2}; \frac{39}{46}$. (७ वें) $\frac{4}{2}; \frac{609}{2}$.
 (८ वें) $\frac{92}{4}; \frac{6}{4}$. (९ वें) $\frac{900}{2}; \frac{200}{960}$.
 (१० वें) $\frac{3492}{2072}; \frac{9}{2072}$. (११ वें) $\frac{992}{1111}; \frac{11}{11}; \frac{33}{920}$ पै.

समच्छेदरूप. पत्र १४.

- (१ ले) $\frac{904}{920}; \frac{926}{920}; \frac{60}{920}; \frac{924}{920}; \frac{9320}{920}; \frac{9070}{920}; \frac{420}{920}$.
 (२ रे) $\frac{96}{90}; \frac{20}{29}; \frac{90}{20}; \frac{20}{20}; \frac{20}{20}; \frac{20}{20}; \frac{904}{904}$.
 (३ रे) $\frac{24}{20}; \frac{24}{20}; \frac{30}{20}; \frac{39}{20}; \frac{60}{20}; \frac{44}{20}; \frac{96}{20}; \frac{39}{20}$.
 (४ थें) $\frac{63}{60}; \frac{60}{902}; \frac{66}{66}; \frac{64}{66}$.
 (५ वें) $\frac{962}{900}; \frac{900}{900}; \frac{24}{96}$.
 (६ वें) $\frac{620}{300}; \frac{300}{624}; \frac{692}{60}; \frac{604}{60}$.
 (७ वें) $\frac{440}{664}; \frac{100}{604}; \frac{240}{240}; \frac{9040}{9040}$.
 (८ वें) $\frac{440}{630}; \frac{296}{330}; \frac{260}{344}$.
 (९ वें) $\frac{4400}{6930}; \frac{2200}{900}; \frac{900}{900}; \frac{3293}{3293}$.
 (१० वें) $\frac{960}{96}; \frac{40}{340}; \frac{400}{434}$.
 (११ वें) $\frac{146}{243}; \frac{40}{946}; \frac{294}{999}$.
 (१२ वें) $\frac{260}{424}; \frac{244}{900}; \frac{644}{434}; \frac{406}{920}$.

अपूर्णाकांची मिळवणी. पत्र १६-१७.

- (१ ले) $\frac{26}{2}$. (२ रे) $\frac{29}{2}$; $\frac{39}{36}$. (३ रे) $\frac{293}{900}; \frac{299}{36}$.
 (४ थें) $\frac{299}{977}; \frac{903}{90}$. (५ वें) $\frac{6429}{97097}; \frac{949}{97}$. (६ वें) $\frac{9046}{97}$.
 (७ वें) $\frac{9}{999}$. (८ वें) $\frac{364}{922}; \frac{999}{924}$. (९ वें) $\frac{369}{9000}; \frac{434}{63}$.

- (९ वें) $१९\frac{४}{३५}$; $५\frac{५९}{१०५}$. (१० वें) $५\frac{१०७}{७२०}$; $१३\frac{३२९}{४००}$.
 (११ वें) $१८\frac{११}{२०}$; $११\frac{७४}{१६५}$. (१२ वें) $३४\frac{११३९}{१४४०}$.
 (१३ वें) ४४|| \equiv || \equiv || इ०. (१४ वें) १७|| \equiv ||. (१५ वें) १२८/.

बजाबाकी. पत्र १८.

- (१ लें) $\frac{३}{५}$; $\frac{३}{१०}$; $\frac{१}{५२}$; $\frac{१}{६}$. (२ रें) $२\frac{१}{२}$; $१\frac{१}{८}$; $२\frac{१}{७}$; $१०\frac{५}{५२}$.
 (३ रें) $\frac{१००}{१०००}$; $\frac{५२१}{५२५}$; $४८\frac{२}{३}$; $२\frac{३१}{४२}$. (४ थें) $९\frac{६२}{७५}$; $\frac{३३१}{३३६}$;
 $२\frac{३६६}{३६६}$; $२\frac{५५१}{५५२}$. (५ वें) $\frac{१३१}{१७५}$; $१६\frac{८८}{१०५}$; $४\frac{१३}{३०}$; $\frac{८७}{११०}$.
 (६ वें) $\frac{३७}{५४}$; $१४\frac{७}{२०}$. (७ वें) $६\frac{२९}{६०}$. (८ वें) $\frac{२३}{४५}$. (९ वें)
 $२\frac{११}{१२}$; $१\frac{१३}{२४}$; $\frac{१९}{४८}$. (१० वें) $\frac{७}{२०}$. (११ वें) $११\frac{५}{१२}$;

अपू०गुणाकार. पत्र १९.

- (१ लें) $\frac{४७}{८८}$; १; $\frac{९}{२०}$. (२ रें) $७\frac{४७}{८८}$; ६०; $४०९\frac{१}{२}$.
 (३ रें) $४९\frac{१६}{२१}$; $५\frac{१}{५३}$. (४ थें) $\frac{१}{५}$; $५\frac{५}{२४}$. (५ वें) $१\frac{१}{८}$; $१७\frac{७}{९}$.
 (६ वें) १०||, ११ \equiv || \equiv || \equiv ; १|| \equiv ||.
 (७ वें) १०||; $२८\frac{७}{८}$; $७\frac{११}{२४}$. (८ वें) $३०\frac{४९}{५६०}$.

अपू०भागाकार. पत्र २०.

- (१ लें) ३; $\frac{८}{९}$; $\frac{४}{९}$; $\frac{५}{८}$. (२ रें) $१\frac{१}{३}$; $\frac{४}{५}$; $१८\frac{७}{९}$. (३ रें) $\frac{१}{१८}$; $\frac{११२}{१३५}$.
 (४ थें) $\frac{१}{४८}$; $५२\frac{१}{४}$. (५ वें) $\frac{१}{५}$; $\frac{१}{४८}$. (६ वें) $१६\frac{३}{४}$; $\frac{५}{२७}$; $\frac{३}{२६}$.
 (७ वें) $४\frac{२}{३५}$; २; $१\frac{५}{९}$; २. (८ वें) $१०\frac{१०}{२३}$; $२\frac{२}{३}$; $३८\frac{२}{११}$.
 (९ वें) ३७; १६; $१\frac{१३९}{२४५}$.

व्यवहारी अपूर्णाकांतिल विविध परिमाणार्थें रूपांतर.

१ ला प्रकार. पत्र २३.

- (६ वें) ४ खं. ४ म. (७ वें) ७ गुं. $२\frac{३}{४}$ आ.
 (८ वें) २५ घ. १ \equiv || प. (९ वें) २ रु. ११ आ. $४\frac{५}{६}$ पै.
 (१० वें) १७ शि. ६ पे. (११ वें) १७ शि. ७|| पे. बेरीज.
 १३ शि. १०|| पे. वजा.
 (१२ वें) ६ फ. ९ पो. २ या. (१३ वें) १२ आ. ५ पै.
 (१४ वें) $८७५०\frac{३३४}{३३७}$. (१५ वें) १९ अ. १९ मि.
 (१६ वें) ४ खं. $\frac{३}{५}$ म.

२ रा प्रकार. पत्र २५.

- (७ वें) $\frac{9^4}{2^4}$ (८ वें) $\frac{6^6}{9^6}$. (९ वें) $\frac{9}{9^6}$.
 (१० वें) वजा जात नाही $\frac{9^2}{9^6}$ इतक्यांनी अधिक आहे.

३ रा प्रकार. पत्र २६.

- (४ थें) १४७० हांडे. (५ वें) ३८ मो. (६ वें) १२५ फरे.
 (७ वें) ११ ट. ४ का. १ बु. ३॥ ग्या. (८ वें) $२४\frac{9^3}{9^4}$ पद.
 (९ वें) $\frac{6^4}{9^6} = \frac{1}{3}$ सुमारे. (१० वें) $१\frac{4}{9}$ खं.

व्यवहारी अपूर्णाकास दशांश पद्धतीनेमांडणें. पत्र ३१.

- (१ लें) .७; ११.७; ०.२३; १.०१५.
 (२ रें) .०१; .०२१; .०११७; .००००००६.
 (३ रें) .२३००३७. (४ थें) १.१११११.
 (५ वें) १३.००३००५. (६ वें) १०.११०१०१.

दशांशास व्यवहारी अपूर्णाकांत मांडणें. पत्र ३१.

- (७ वें) $\frac{3^6}{9000}$; $\frac{9}{4000}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{3}{2}$. (८ वें) $\frac{3}{200}$; $१\frac{1}{20}$; $\frac{3}{96}$; $३\frac{1}{20}$.
 (९ वें) $\frac{9^4}{96000}$; $\frac{3}{3200}$; $२३\frac{69}{9600}$. (१० वें) $१\frac{9^3}{96}$;
 $\frac{3}{920}$; $४\frac{9}{92}$.

दशांश मिलावणी व वजाबाकी. पत्र ३२.

- (१ लें) ३४.६२१५६. (२ रें) ७८२.८५९४.
 (३ रें) ३७५०११३.६१४२१३. (४ थें) २४९२.२६२२१२३.
 (५ वें) १९.००२; ३.४४९०२. (६ वें) २१.१३३५; ३४०९.०००१३.
 (७ वें) १९.०००२; १.००१३. (८ वें) .०००००१३; २३.०१६४८३५.
 (९ वें) १; २.७४८६. (१० वें) .००३२१३; ३४२३५.

दशांशगुणाकार. पत्र ३३-३४.

- (१ लें) ७२३.६; १४६.४५६१. (२ रें) .००००००१; ७४.१५१.
 (३ रें) .०७५०४.०००६०२. (४ थें) .००१३०१४; १.५.
 (५ वें) ५.३१४४१. (६ वें) ४.०९६. (७ वें) .०००१२३४३२१.
 (८ वें) .०००४४४०८.

दशांश भागाकार. पत्र ३६.

- (१ लें) .६२५; .०००६२५. (२ रें) ६२५००००; .००००६२५.

- (३ रें) ४९००००; ६.३ (४ थें) १८५;३०.
- (५ वें) ४०००; ८.७८९०६२५. (६ वें) २.४; १२००.
- (७ वें) .०००१५६२५; ७११६८५८०. (८ वें) .०१२२६९९ इ०.
१५६८.६२७. इ०. (९ वें) .३३८८२७८ इ०.
.०००३८३१७७५७.इ०. (१० वें) २९०; .०१४९७४ इ०.

व्य०अपूर्णाकास दशांश रूप. पत्र ३७.

- (१ लें) .०४; .०५२; ५.२५; १.६.
- (२ रें) .८४८; ११०.०१३६; १५.६२५; ५.१८७५.
- (३ रें) ७.२०३१२५; .१३२८१२५; .०००१५६२५; ११.००१६९६
- (४ थें) .००१९५३१२५; १.०००९७६५६२५; .००९२८५७१४.
.००१३६७१८७५. (५ वें) .१७०५; .००२१६; .३२.

अपूर्णाकास आवर्त दशांशाचें रूप. पत्र ४०.

- (१ लें) १.४; .५७२; २.३४५; ०.०१२३६.
- (२ रें) २.९२८५७१४ ५.०४५; ०.०१३२; २३.१५६.
- (३ रें) ०.००८९ ५.७६१९०४; १७.१२९३१; .१२ ३४५.
- (४ थें) ०.०३६४८; ०.१००३३७८; ०.४०८६४; .०२०५०२;
- (५ वें) ०.०५८८२३५२९४११७६४७;
०.०४३४७८२६०८६९५६५२१७३९१३;
०.०३४४८२७५८६२०६८९६५५१७२४१३७९३१;
०.०३२२५८०६४५१६१२२.

आवर्त दशांशास अपूर्णाकरूप. पत्र ४२.

- (१ लें) $\frac{१}{३}; \frac{५}{९}; \frac{६}{११}; \frac{२७}{३७}.$
- (२ रें) $\frac{१६५}{१८५}; \frac{१८५}{२३३०००}; \frac{२२३}{८}; \frac{१०७}{२४७५}.$
- (३ रें) $\frac{२३३}{१३३}; \frac{३०००}{५५}; \frac{१९८००}{८९}.$
- (४ थें) $\frac{५९}{१११०}; \frac{१६९९}{२२२०}; \frac{२१९}{४५}; \frac{४१}{४०};$
- (५ वें) $\frac{२१०१}{१११०}; \frac{१११}{२०२}; \frac{१३}{७०}.$ (६ वें) $\frac{२९}{१४}; \frac{५१७}{५८८}; \frac{१११९}{६६}.$

आवर्त दशांशाची बेरीज वगैरे. पत्र ४५.

- (१ लें) ४७.४११४५५२८६ (२ रें) १६८.७०२३९११४५६.

- (३ रें) .२२; ०.०३२७११६५ (४ थें) ०.८५७१४२; ०.००५८.
 (५ वें) ९.९२८; २.२९७ (६ वें) ३१.७९१; ३५२.०८५६४.
 (७ वें) ३.६; ०.०५२ (८ वें) ४९; १.१२५.

संक्षिप्त गुणाकार. पत्र ४७-४८.

- (१ लें) १३०८.००३६; (२ रें) १४२७.६५६८७.
 (३ रें) ०३५.१०१; (४ थें) ३१.४४.
 (५ वें) १००७१.१; (६ वें) १३६२.
 (७ वें) ६.६ (८ वें) १.९; ०; ०; १.८. (९ वें) ०.०६; ०.०१.

संक्षिप्त भागाकार. पत्र. ५१.

- (१ लें) १.९७२; ३.६७८; १.८१९ (२ रें) ०.०३; ०.००; ३.२७.
 (३ रें) २.३८२; ०.०३३; ६.४०२. (४ थें) ०.०१; १.३०; ६२.९७.
 (५ वें) १३.०; ०.०; ४५.६.

विविध परिमाणानें रूपांतर.

१ ला प्रकार. पत्र ५२-५३.

- (६ वें) ५ शि. ७॥ पे. (७ वें) ५ पौं. ० शि. ३॥ पे.
 (८ वें) १४७ आ. ० दि. ४ अ. ० मि. ५४^६/_{११} सेकंद.
 (९ वें) ४९॥ चौ. फू. (१० वें) १ रु. ३९ पो. २८ चौ. यार्ड
 २^१/_४ चौ. फू. ^{१२९}/_{६५०} चौ. इं.

२ रा प्रकार. पत्र ५३-५४.

- (६ वें) ०.०४२५७०७ टन. (७ वें) ०.०४५७१९०४७६.
 (८ वें) ०.०५६२५ को. (९ वें) ०.०४४९९६८७५.
 (१० वें) ०.०४७२.

३ रा प्रकार. पत्र ५५.

- (९ वें) ४.०७२. (१० वें) १२.चांद्रमास.
 बाकी १०.८८२९३ दि.

प्रमाण गणित. पत्र ६२.

- (१ लें) १^१/_२; २^२/_३; २^३/_३; ६. (२ रें) २^२/_५; ३^३/_५; ३^३/_५; ६^३/_३.
 (३ रें) ३^१/_३; ४^४/_५; ४^४/_५; ७^१/_३; (४ थें) ४^२/_७; ५^५/_६; ५^५/_६; ८^३/_३.

- (५ वें) १७; २५; २५; १७^१. (६ वें) २२; ६५; ६५; १०.
 (७ वें) १५; २७; २७; ३१^१. (८ वें) ५; ५; ५; ९५.

विविध प्रमाण. पत्र ६६.

- (१ लें) १० रु. (२ रें) २॥४ खं. (३ रें) ७२ रु.
 (४ थें) २९^१/_{३७३} बि. (५ वें) ५५ रु.

विविध प्रमाण. पत्र ६७-६८.

- (१ लें) ११० या. (२ रें) १२३ वा. (३ रें) २४॥॥॥२^{२१}/_{८९}.
 (४ थें) २२।८५^{२२६७}/_{१६८०५}. (५ वें) १॥२॥१०^{१०७}/_{२१५}.
 (६ वें) २०८८२^{२५१३३}/_{११३४४१}.

संबंधी महत्वे पत्र ७१.

- (१ लें) ५८८३. (२ रें) ५॥१७^१/_३ पै.
 (३ रें) १५८^१/_{५२} को. (४ थें) १ अ. १३ मि. ४६^२/_३ से.
 (५ वें) ७३ ए. १३ गुं. १॥॥^{३७}/_{३०८} आ.
 (६ वें) ॥॥॥२^{२६६}/_{३३३}. (७ वें) ९॥॥॥२^१/_{१०}.
 (८ वें) ४ पौ. १५ शि. ६^१/_{१०} पे. (९ वें) ८॥॥ १^१/_{२०} पै.
 (१० वें) ११ पौं. ९ शि. ४^१/_{२०} पे.

व्यस्त प्रमाण. पत्र ७३.

- (१ लें) १५० मनु. (२ रें) १० महिने.
 (३ रें) १ वर्ष. (४ थें) १७१ मनुष्ये.
 (५ वें) ४ आठवडे. (६ वें) ॥॥॥^३/_५ पै.
 (७ वें) ६२२ बि. ४ पां. ८^१/_५ का. (८ वें) ३॥॥ पावशेर.

त्रैराशिक पत्र ७५-७८.

- (१ लें) १०९॥१ १^५/_६ पै. (२ रें) १०७८॥८^६/_७ पै.
 (३ रें) ॥॥॥ २^{३०७१}/_{३१५१}. (४ थें) ३३९८॥२.
 (५ वें) २१८॥॥२^{५३३}/_{६०१}. (६ वें) १३ म. २३^{२३}/_{१७१} शेर.
 (७ वें) ६३८११^{१०९६७}/_{११३०३}. (८ वें) १३१४॥॥३^{७८७}/_{४४०} मनु.
 (९ वें) १२१९८^{१३१०}/_{४१३२९}. (१० वें) ८८३ शेर.
 (११ वें) ९५४५४५४॥॥२^८/_{११}. (१२ वें) ७९ पौं. १ शि. ७^१/_२ पे.

- (१३ वें) ७१३४३००.
 (१४ वें) १४ पौं. ८ शि. ११ $\frac{७}{१२}$ पे.
 (१५ वें) २३॥॥०२ $\frac{२}{५}$ पै.
 (१६ वें) ५२ गि. ६ शि. ७ $\frac{११}{१२}$ पे. (१७ वें) १६२०. ९६ फू.
 (१८ वें) ९०॥॥१ $\frac{१७}{२}$ पै. (१९ वें) १४॥॥११ $\frac{१६०}{३४७}$.
 (२० वें) १॥॥१ $\frac{३}{५}$ पै. (२१ वें) ५१॥ $\frac{२}{३}$ पै.
 (२२ वें) १ $\frac{१५६}{२१५}$ पै. (२३ वें) १८ शि. २ $\frac{५५}{६४}$ पे.
 (२४ वें) १७४॥॥१२७. (२५ वें) १०४५१११.
 (२६ वें) १४०. (२७ वें) ८४ $\frac{३८७}{२२१}$ दिवस.
 (२८ वें) ७७२२ चिरे. (२९ वें) १८३६.
 (३० वें) ३२ फू. १५२ फू. (३१ वें) २१ तास.
 (३२ वें) १२८० मनुष्ये.
 (३३ वें) ६८ दि. १३ ता. ४२ मि. ५१ $\frac{३}{७}$ से.
 (३४ वें) २८६ मै. १ फ. ९ $\frac{३}{३}$ पौं.
 (३५ वें) ७९५ रुप. (३६ वें) दर शेरीं ८॥॥२ $\frac{२३}{६७}$.
 (३७ वें) २९८॥१ $\frac{१५७}{२३५}$ पै. (३८ वें) १॥॥ $\frac{१}{३७५}$ पै.
 प्रत्येक रुपयास ४५७८११ एकंदर तोटा.

बहुराशिक. पत्र ८१-८४.

- (१ लें) १ व. ४ म. (२ रें) ३२. (३ रें) ३६०.
 (४ थें) ४०. (५ वें) २०. (६ वें) १२५. (७ वें) ३२ $\frac{१७}{५३८०}$.
 (८ वें) २४४८. (९ वें) ९९ $\frac{३}{२}$ दि.
 (१० वें) ११४ पौं. ६ शि. (११ वें) ४५ $\frac{५५}{२२१}$.
 (१२ वें) १११ $\frac{६९}{६६}$. (१३ वें) ६४० रुप. (१४ वें) १०.
 (१५ वें) १११ रुप. (१६ वें) ३६. (१७ वें) २६ $\frac{५}{११}$.
 (१८ वें) ३६ दि. १० अ. (१९ वें) १७॥॥१ $\frac{२}{३}$ (२० वें) २८ $\frac{५}{६}$.
 (२१ वें) १०४ $\frac{७१}{१२०}$ दिवस. (२२ वें) ३५१० पौं.

सरलव्याज. पत्र ८५-८६.

- (१ लें) १२५. (२ रें) ३६॥॥१ $\frac{१}{५}$. (३ रें) ४५ पौं.
 (४ थें) १२७१ $\frac{६३}{२५}$ पै. (५ वें) ८८७८.

- (६ वें) २८५७ पौं. १० शि. (७ वें) ७४४॥॥॥ १ $\frac{१}{२}$ पै.
 (८ वें) ९८॥॥ २ $\frac{१}{२}$ पै. (९ वें) ३७ पौं. १७ शि. ३ $\frac{१}{१०}$ पे.
 (१० वें) २०॥ रु.

पत्र ८६-८७.

- (१ लें) ५४३८/३ $\frac{५७}{३}$ पै. (२ रें) ७६१२/११ $\frac{२५}{३}$.
 (३ रें) १२३४१/१ $\frac{२७}{५०}$ पै. (४ थें) ४७०॥॥॥॥२.२४.
 (५ वें) १२७॥॥॥. २४.

चक्रवाढव्याज. पत्र ९०.

- (१ लें) १००॥॥॥१ $\frac{१८१}{२००}$. (२ रें) ३३॥॥॥२ $\frac{६७७}{३१२५}$.
 (३ रें) ३१/॥२ $\frac{१}{२५}$. (४ थें) ६०॥॥१ $\frac{११२}{१२५}$. (५ वें) ६०॥॥॥॥२.
 (६ वें) २४ पौं. १२ शि. १० $\frac{३६२}{३७१}$ पे.
 (७ वें) ९२१॥॥॥२.६ च. व्या; ६७५ स. व्या.
 (८ वें) ७८॥१ $\frac{८०९१}{१००००}$ पै. (९ वें) ३३॥॥॥६३.८
 (१० वें) ४९५८॥११.९. (११ वें) ३६७॥॥६३.

व्याज. पत्र ९२-९३.

- (१ लें) ५१॥६१ $\frac{३५}{३९}$. (२ रें) ४२१/॥॥२ $\frac{६७}{३९}$.
 (३ रें) ३ म. २६ $\frac{१२८}{२४७}$ दि. (४ थें) ५॥॥॥.
 (५ वें) २४ व. २ म. २७ दि. $\frac{१०७१६३}{१२८९३९}$.
 (६ वें) १०५०. (७ वें) २८॥॥॥ २ $\frac{८६३}{१२७}$.
 (८ वें) १०४४१/॥ $\frac{६७}{३}$ पे. (९ वें) ८॥॥॥१ $\frac{१७॥८}{२२०॥८}$.
 (१० वें) ३ व. १० म. ४ दि. $\frac{१६८५१}{१७५४॥८}$ (११ वें) ५०॥.
 (१२ वें) २०००१६५५ वर्षे.

व्याज. पत्र ९५-९६.

- (१ लें) २२ पौं. १२ शि. ४ $\frac{३५}{३७}$ पे. (२ रें) ४९०॥॥.
 (३ रें) ५६१॥॥॥॥॥ $\frac{५१}{३८९}$ पै. (४ थें) ४२८॥१ २ $\frac{७९३}{१११९}$ पै.
 (५ वें) ३॥॥॥१.४७ पे. (६ वें) ३१॥६३.९. (७ वें) ॥॥॥॥१.९ पै.
 (८ वें) १ पौं. ४ शि. ०.८ पे (९ वें) १ पौं. ९ शि. ८.५ पे.
 (१० वें) ५ पौं. १ शि. ८.१ पे.

- (११ वें) १॥ १.२ (१२ वें) ५६६३०८.
 (१३ वें) ४॥६१०.५ पै.

विमा, कमिशन. पत्र ९८.

- (१ लें) १७२॥१. (२ रें) ८० रु. ४१.
 (३ रें) ४४२॥॥२६१७. (४ थें) २७३६॥॥२६ पै.
 (५ वें) ४४१॥॥१. (६ वें) ६२३॥॥१२६७.

ठेव. पत्र १००-१०२.

- (१ लें) ८२६;४६६. (२ रें) १ रु.
 (३ रें) १२१६६१ $\frac{७३}{११९}$ पै. (४ थें) १००॥॥१९ पै.
 (५ वें) ८९॥॥॥२.८ (६ वें) ५३१६॥॥२ $\frac{३}{३१}$.
 (७ वें) ७७११६६ $\frac{११९}{३७}$ पै. १०॥॥.
 (८ वें) दुसऱ्या ठेवींत नफा. (९ वें) १४६६॥॥२ ठेव, ४४व्या.
 (१० वें) ५४५॥॥ $\frac{३}{११}$ पै. तोटा. २२२॥॥१ $\frac{७}{११}$ पै व्याज.
 (११ वें) २५ तोटा. (१२ वें) १३४६४१॥॥६ पै.
 (१३ वें) २१२१/१९. (१४ वें) ७१५. (१५ वें) ३९॥॥१ $\frac{२५०}{११५७}$.

नफातोटा. पत्र १०३-१०६.

- (१ लें) ६॥॥२॥ रें. (२ रें) १२॥. (३ रें) १५॥॥.
 (४ थें) ९॥१ $\frac{१}{३}$ पै. (५ वें) ८४८॥॥१ $\frac{५}{७}$ पै. (६ वें) ८३८॥.
 (७ वें) ८३॥॥१ $\frac{१९}{३३}$. (८ वें) ४॥२ $\frac{२}{३}$ पै.
 (९ वें) ४१॥१ $\frac{१}{१७}$ पै. (१० वें) १४॥॥॥ $\frac{२}{१}$ पै. तोटा.
 ११ वें) ६३॥॥२ $\frac{२}{११}$ पै. (१२ वें) १५॥॥४॥ रें.

सर्कतवांटणी. पत्र १०८-१११.

- (१ लें) २१३, ३५५, ४९७, ५२५, ३१५, २२५.
 (२ रें) २०४६६ $\frac{२५}{३१}$; २८०॥॥१ $\frac{२}{३१}$ पै; ३०६६६ $\frac{५}{३१}$ पै.
 (३ रें) ४६६॥॥२, ३५०, २८०, २३३१/१९, २००.
 (४ थें) ४.१७ तोळे. (५ वें) खं. २॥२१६ $\frac{१८}{३७}$ टां. आणि म.
 ६५॥ ९॥१ $\frac{१९}{३७}$ टां. (६ वें) १०॥॥ $\frac{१९}{८०}$ मासे रुपें.
 (७ वें) १९७६॥॥२ $\frac{५}{७}$ पै. १३७॥॥ $\frac{१२}{१७}$ पै.

- (८ वें) ७९^१/_३ कसाचें. (९ वें) १४०; २८०; ४२०; ५६०.
 (१० वें) ७६॥^६/_७ पै; ७०॥१ १^{१६}/_७ पै; ५२॥^{१३}/_७ पै.
 (११ वें) ७६, ९॥, १४॥. (१२ वें) ६८॥^४/_९ पै; ४७॥^{१३}/_९ पै.
 (१३ वें) ३॥ शेर. (१४ वें) १०३६, १२८॥॥. ४२॥॥.
 (१५ वें) ८८९, १११. (१६ वें) ३३३१/११, ६६६॥॥२.
 २०००. (१७ वें) ८५.
 (१८ वें) १००; २^{३२}/_९.
 (१९ वें) १॥^१/_{२५}; ३^{११}/_{२५}; १॥॥२^{१३}/_{२५}.
 (२० वें) १००; ३००.

घातप्रकरण. पत्र ११३-११४.

- (१ लें) ३०२५; १७.३०५६; ४६.६५६.
 .००००००००२०५१११४९.
 (२ रें) ४; ४^{१७}/_{२७}; ८१; २२^{१५३९}/_{१६८०७}.
 (३ रें) ७॥८; १॥; १॥॥॥. ७॥॥ पै.
 (४ थें) ४; .०४; .०००४; .०००००८.
 (५ वें) ६९९३४५२८; ६९९३४.५२८; ६९.९३४५२८;
 .०६९९३४५२८.

घातप्रकरण. पत्र ११८-११९.

- (१ लें) १९६८३; ६.२५; ६^{३०३}/_{१२}; ४०९६; १३७३.७४१८२४
 (२ रें) ५; २॥; १.
 (३ रें) .००००००१०२४; १; ५.२३८.
 (४ थें) १०८.२२८९०३७५; ३२७६८; ८.
 (५ वें) १००००; २^१/_६.

वर्गमूल. पत्र १२७.

- (१ लें) ४५; ४.१५९९२; ०.०२७.
 (२ रें) १.७३२०५०८; २.२३६०६८०; २.४४९४८९७; ३.४६४१०१६; ५.
 (३ रें) ०.४२८५७१; .८६६०२; ४.१६८३३.

- (४ थें) ९.८६९६५; ३.५१७८१; ०.८४७७९.
 (५ वें) २९; ३५.८७५; ७८; ७०.०४२८.
 (६ वें) ०.६३२४५; ०.९८२६०७३; १^१/_३; ३.९७४९.
 (७ वें) २.५२९८; ०.८; ०.२५२९८; २५.२९८.
 (८ वें) ३.५४९६; ८०१२४९; ४.२७४३४; ६.४.
 (९ वें) ०.९५४५२; ४८. ६६९८; ०.३९०२४३६; ०.७९०९३६.
 (१० वें) ४२०७; ८३५.७५४; ८४५.
 (११ वें) १०४२७०.२; ७५३८. (१२ वें) २१३; ०.०८; ३०९६.
 (१३ वें) २७.३; ५८.०६; १^५/_९
 (१४ वें) ०.०१६; ०.०७६९; ३.१४. (१५ वें) ३०.०२०२.

घनमूल. पत्र १३१.

- (१ लें) ८२.९८५२; ११.७६. (२ रें) ११.००२७; १४.७५;
 २७.६. (३ रें) १.५; ५.३१९३; २.५०२२.
 (४ थें) .९४१; ४.६४; १००. (५ वें) २०; .५; .१.

घनमूल. पत्र १३६.

- (१ लें) ३२; १०.५; ६२८. (२ रें) ३१९; ४२८३.७७; १.७२.
 (३ रें) १.०९; १६.१; ५१.४.
 (४ थें) १.०७७; १.४४२; १३०.०११; ०.७६३१.
 (५ वें) १३७५; ६२८१. (६ वें) ५.१७२; ३७.२७.
 (७ वें) .९; ३.१५. (८ वें) .७६ .९०
 (९ वें) ०.८७९; ०.४०२८; २.५९; २.६३६. (१० वें) १४७२.

गणितश्रेढी. पत्र १४१-१४२.

- (१ लें) ११६६४ सुपान्या; ११६.६४ शेर.
 (२ रें) २००।।।. (३ रें) १५६. (४ थें) ११२।।.
 (५ वें) १०८०

भूमितिश्रेढी. पत्र १४४.

- (१ लें) २१. (२ रें) ५९१०.
 (३ रें) १८४४७४४०७३७०९५५१६१५.

- (४ थें) ५.२४१२आणि ६.८६७५४४३६ भूमिति म. पदें.
 (५ वें) २.१५४४३५.

क्षेत्रफल व घनफल. पत्र १४९-१५०.

- (१ लें) ९२१६ विटा. (२ रें) १०१८२ $\frac{६}{९}$ चिरे.
 (३ रें) १६५॥ $\frac{१८}{३५}$ पै. (४ थें) ६३१६चौ. फू.चिरे.
 (५ वें) १०५६० गाड्या. (६ वें) ८०० रु. (७ वें) ६९ $\frac{३}{५}$ दि.
 (८ वें) १०१२॥ खंडी. (९ वें) २फू. १इं. (१० वें) ८८॥१९ $\frac{६}{५}$ रु.

प्रश्नसमुदाय. पत्र १५०-१७०.

- (१ लें) ५ तास. (२ रें) ४१ $\frac{३९}{१२१}$. (३ रें) $\frac{२०६}{११५५}$; $\frac{१२९}{१२२}$;
 १ शि. $\frac{११}{२}$ पे. $\frac{३५}{४}$. (४ थें) १८० गोड्या.
 (५ वें) ४॥. वर्षे. (६ वें) २००.
 (७ वें) १६४ ग. १३ $\frac{५}{६}$ त. (८ वें) ३१८॥ $\frac{११}{११}$.
 (९ वें) ८१ मण. (१० वें) २ बि. ५ पा. १२ $\frac{८}{१०}$ का.
 (११ वें) ६६०.४; ८५ हा. ९.९६ त.
 (१२ वें) कै. खं. १५२६॥१२ $\frac{६०१}{५४८}$ शेर.
 (१३ वें) १३.३४९. (१४ वें) २० अंश.
 (१५ वें) ८३॥ मण. (१६ वें) $\frac{१२९}{४०३}$ पै.
 (१७ वें) $\frac{११}{३}$ पै; $\frac{४१}{४८}$; $\frac{१३}{५७६}$. (१८ वें) ३८॥ $\frac{११}{२९}$.
 (१९ वें) ९६, १७ $\frac{३}{५}$. (२० वें) $\frac{१}{१}$.
 (२१ वें) $\frac{५१५}{३३}$ दि. (२२ वें) ३७॥, २॥, ६८॥.
 (२३ वें) $\frac{३२७}{३२७}$, १६२ $\frac{२९}{१४०}$, १ $\frac{१२१}{१७५}$, $\frac{११}{२२}$, २३०८.
 (२४ वें) .१२६३; २५.६८. (२५ वें) १११, २०, २९१.
 (२६ वें) ७०॥ $\frac{१९६}{१७६}$. (२७ वें) ६.
 (२८ वें) ५१२, ४३२१. (२९ वें) २३॥, १५॥,
 ११॥, ९१॥. (३० वें) ८८४. १५३.
 (३१ वें) ३ ता. २० मि. (३२ वें) $\frac{१६}{३५}$.
 (३३ वें) ४९ $\frac{६}{५}$ रु. (३४ वें) ९०.८; २८.७१३.
 (३५ वें) ९. (३६ वें) .६५९३७५; $\frac{४३}{११२०}$;

००२५६२५६; २५६२५६०; ०२५६२५६.

- (३७ वें) ४॥॥. (३८ वें) ५९ क. $\frac{१२७०८}{२३८२९}$ वि.
 (३९ वें) पु. ६॥॥२ $\frac{६५}{९९}$, स्त्री. ४॥॥ $\frac{७८}{९९}$, मु. ४६॥॥२ $\frac{१९}{९९}$.
 (४० वें) $\frac{२७}{९}$. (४१ वें) २२०६॥. (४२ वें) १॥॥॥.
 (४३ वें) ३२००; ४८००. ६०००; ७०००.
 (४४ वें) खंडी १८१६ $\frac{११}{९८}$.
 (४५ वें) ४४ $\frac{३८७५६४}{३९०३}$. (४६ वें) ११५॥.
 (४७ वें) ३७१; २५२९८; २.७५.
 (४८ वें) १०५३॥॥ $\frac{१२३२२}{१६००}$ पै. (४९ वें) ७६.९५; ६९.२५५.
 (५० वें) १० $\frac{१२२२०}{२९०३}$. (५१ वें) २६॥॥१ $\frac{५}{९३}$. ३७॥॥ $\frac{४८}{३२९}$ पै.
 (५२ वें) $\frac{२४}{९}$. (५३ वें) २१॥॥२; ४१॥१.
 (५४ वें) ४ अ.; ४ अ ४३ $\frac{७}{९९}$ मि. (५५ वें) खंडी.॥॥॥१॥.
 (५६ वें) ८४॥१॥ $\frac{१८}{२५}$ शेर. $\frac{७७}{१९२०}$; ४ को. ३४ दं. ० हा. ९ त.
 १ अं. १ $\frac{३}{५}$. य.
 (५७ वें) १०१२॥॥ $\frac{१३४२५३}{३२६०२७}$; ७५९६॥१ $\frac{१९९८३}{३२६०२७}$.
 (५८ वें) ३४५॥॥१ $\frac{७७}{७७}$ व्या. ९०॥॥ $\frac{६}{११}$ पै. नफा.
 (५९ वें) ३.३.०३१६२. (६० वें) ६.९१ या. (६१ वें) १२५॥॥ $\frac{२}{९}$
 (६२ वें) ०.५७१ इ. (६३ वें) ३७॥॥ $\frac{१२३}{२५३}$ पै.
 (६४ वें) $\frac{१}{५९२}$ (६५ वें) ४॥॥२ $\frac{२६५७}{३००}$; (६६ वें) ५खं. ७॥म
 (६७ वें) १८७ $\frac{१}{५}$. (६८ वें) १०॥॥२ (६९ वें) ४०॥॥ $\frac{१}{५५}$.
 (७० वें) $\frac{७}{३९२}$. (७१ वें) ४९ रु. (७२ वें) आक्सि. १९.९४२४
 शेर; ३ क्यार्बान. १७.३०६० शेर; हैड्रो. २.७५१६ शेर.
 (७३ वें) ४२ मै; १०॥. (७४ वें) ४०३३॥७१ $\frac{२३}{२०}$ पै.
 ८०६६॥ $\frac{३}{२०}$ पै; १२०९९॥ $\frac{१२९}{२०}$; १६१३३॥ $\frac{३}{१०}$ पै.
 (७५ वें) ५॥॥२ $\frac{५९७२}{१९८६१}$. (७६ वें) ७.३०४८इ. $\frac{५३}{३}$; १२१.
 (७७ वें) ५७८॥ $\frac{१२३}{२३}$ पै. (७८ वें) १०५ दि.
 (७९ वें) पु. ॥॥॥२ स्त्रि. ॥॥ $\frac{१}{३}$. मु. ॥॥१ $\frac{२}{३}$.
 (८० वें) ९९९॥॥ $\frac{२३४}{९९}$; (८१ वें) ५०९.२६.
 (८२ वें) १॥ घटिका. ४०६. $\frac{१}{८}$ घा. १८०॥.

- (८३ वें) ९०७॥० (८४ वें) $\frac{७१९}{५७१२}$; $\frac{१॥३}{१॥३}$ पै.
 (८५ वें) १४ अर्ध्या गिनी द्याव्या, २८कौन घ्यावे.
 (८६ वें) $१९\frac{१५९७}{२२५७}$ (८७ वें) ३८५ फूट. ४ $\frac{१}{५}$ इ.
 (८८ वें) ३०॥॥ $\frac{११३}{२००}$; $\frac{११३}{२००}$.
 (८९ वें) ९९१/; १७६२८॥ $\frac{२२६}{२२७}$.
 (९० वें) ६९२॥ $\frac{७६}{२३९}$ पै. (९१ वें) ३ पौं. ४ शि. ११ पे.
 (९२ वें) २३ $\frac{२९२}{६९९}$. (९३ वें) १ मि. २७॥से.
 मार्गे ठेवावा.
 (९४ वें) दर तासास ३०मैल. (९५ वें) ३१५.
 (९६ वें) ३१९॥ $\frac{१५}{२२}$. (९७ वें) ७२९, ३४५; ७६१;
 ०६९; ३०००२. (९८ वें) $\frac{५९०३}{७९०३}$.
 (९९ वें) $१\frac{१७}{१०६}$ दि.) १०० वें) दुसरेदिवशीं दिवसास
 दोन प्रहरानंतर ५अ. ३४ मि. $\frac{५५५}{१०६}$ से.
 (१०१ वें) १३५०३ $\frac{३२}{३२}$ चौ.ग. (१०२ वें) अ ला. ६१. $\frac{१}{३०}$ पै.
 ब ला. $\frac{११२५}{२२७}$ पै. (१०३ वें) १०११६॥ $\frac{१५५}{२२७}$.
 (१०४ वें) ७३८॥॥ $\frac{१३११}{१५२९}$; ८९६६२ $\frac{२३८}{१५२९}$ पै.
 (१०५ वें) १९५९थो. कसर. (१०६ वें) सुमारें वर्ष १३१.२५.
 (१०७ वें) $\frac{११०}{११०}$. (१०८ वें) १५ गोळ्या. शिलक $\frac{७३}{१०००}$.
 (१०९ वें) ४ हा. २.९८०८त. (११० वें) ४८॥॥; २२॥॥.
 (१११ वें) $१\frac{२}{१३}$; ३४५७६१; १२५.
 (११२ वें) ६पु. ४ बा. (११३ वें) ३ पौं. २शि. ६पे.
 (११४ वें) ३॥॥ १.०३९ इ. पै. (११५ वें) अ ला ६००रु.
 ब ला ४००; क ला ३००; ड ला २४० रु.
 (११६ वें) २६४; १९८; ३०८. (११७ वें) वर्षाचे $\frac{२२९}{२७०}$ अंश
 (११८ वें) ३ पौं. १५ शि. २ $\frac{५}{८}$ पे.
 (११९ वें) ५१.२ $\frac{१०}{१२}$; १८॥॥ शेंकडा नफा.
 (१२० वें) २०२७८॥ $\frac{५२३१७}{७८१२५}$ पै. (१२१ वें) ३.०३.
 (१२२ वें) १ मनुष्य. (१२३ वें) ८ पौं. १८ शि. ६ पे. $\frac{६}{३}$.
 (१२४ वें) १२३४५; ०७४.

- (१२५ वें) २२२८९ पाँ. ५ औं. २ द्वा.; $३\frac{२१४}{३२९}$. फू.उंच.
 (१२६ वें) १ पाँ. (१२७वें) ७२ मै.
 (१२८ वें) ४२९; ७६३. (१२९वें) ४९५७ पाँ. ६ शि. ८ पे.
 (१३० वें) १ पाँ. ३ शि. $९\frac{१}{१५}$ पे. (१३१वें) १० शि., $८\frac{१}{३}$ पे.
 (१३२ वें) $३\frac{३}{४}$ शि.; ७शि.; $१०\frac{१}{२}$ शि.; १४शि.; $१७\frac{१}{२}$ शि.; २१शि
 (१३३ वें) .०३६७; $६\frac{७}{१५}$ २६५.
 (१३४ वें) ६००. (१३५वें) १२८००.
 (१३६ वें) २६ पाँ. ११ शि. ३ पे. (१३७वें) ८१॥१ $\frac{१२७}{११७३}$.
 (१३८ वें) $\frac{२७}{७१}$; .००३९०६२५; $\frac{७३}{२००}$. $\frac{५२०}{१३०९}$.
 (१३९ वें) १३० को. ११४२ दं. $३\frac{३}{४}$ हा.
 (१४० वें) १७५७॥१. (१४१वें) दर १०० घ. फुटीस $३४\frac{६}{१०}$ रु.
 (१४२ वें) २८००७॥११ $\frac{१२४}{१२५}$. (१४३ वें) १.४३; ६.४८३;
 २४९; ८.५७.
 (१४४ वें) २३० पाँ. ५ शि. $३\frac{३}{१२}$ पे. (१४५ वें) १०५१.१२ $\frac{१५७}{२४७}$.
 (१४६ वें) .५६६२. (१४७ वें) दिवसाचे १२ अ. २० मि.
 (१४८ वें) ५२१॥१२ $\frac{१६}{१२}$. (१४९ वें) २४००; १८००;
 १६००; १५०० (१५० वें) ४४७॥१.



शुद्धिपत्र.



पृष्ठ.	पंक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
१-४८		हणतात, हणून,	म्हणतात, म्हणून,
		हणजे	म्हणजे
२	१३	संख्येच	संख्येचा
३	१३	छेदांपेक्षां	छेदापेक्षां
४	९	पूर्णांकांस	पूर्णांकास
	१५, १६	पष्ठमांश	पष्ठांश
६	१६	$\frac{३१३६}{९५}$	$\frac{३१३६}{९५}$
	खा.२	ह्यांना	ह्यांना
८	खा.१३	गुणव	गुण व
९	१	अंश छेदास	अंशच्छेदांस
९	३	अपूर्णांकांस	अपूर्णांकास
	खा.१३	अतिसंक्षेप रूपें	अतिसंक्षेपरूपें
१०	३	ह्यांस	ह्यास
	खा.१०	रूपे	रूपें
११	खा.१०	अर्थात्	अर्थात्
१२	६	अपूर्णांकांस	अपूर्णांकास
१३	५	समच्छेद	समच्छेद
१७	खा.२	$\frac{३-४}{०}$	$\frac{३-४}{०}$
१८	खा.११	आसा	असा
१९	२	अपूर्णांकाचा	अपूर्णांकांचा
	८	करवा	करावा
२०	५	वाढविणें म्हणजे	वाढविण्यास
२२	१४	मापाने	मापानें
२६	खा.८	कोसाचा	कोसाच्या
२८	१३	तीनशे	तीनशें

पृष्ठ.	पंक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
	१५	हे	हैं
२९	१०	अपूर्णाकांचे	अपूर्णाकांचें
३०	१	सारावे	सारावें
३०	१५	द.चा	द.चि.
	खा.१	रूपे	रूपें
३१	३	ह्यानीं	ह्यानीं
३४	६	अपूर्णाकाचा	अपूर्णाकांचा
	खा.२	हिच	हीच
३५	खा.५	एक मानें	एकमानें
	खा.३	स्थळ परिमाण	स्थळपरिमाण
३७	१४	१०५	१०५
३८	१	अवयवरूपाने	अवयवरूपानें
	७	येतो	येतो
	८	अंशछेदांत	अंशच्छेदांत
	खा.१५	एकादा	एकादा
४२	खा.१	५.१९३६८	५.१९३६८
४३	खा.५	करतांनांना	करितांना
४४	९	खरी	खरी
	११	पावेतो	पावेतो
	१३	हिने	हिनें
५०	४	२८.९९ हें	२८.९७ हें
५६	११	भितीचें	भितींचें
	खा.१३	आहे	आहे
५७	२	पाणि	पाणी
५८	५	संख्यांचे	संख्यांचें
६०	६	रीतीने	रीतीनें
	७	सांगणे	सांगणें
	खा.३	वगैरे	गैर

पृष्ठ.	पांक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
६२	स्वा. १०	परिमाणसंख्याचा	परिमाणसंख्यांचा
६४	८	परिमाणे	परिमाणें
६४	१४	त्याचें	त्यांचें
६६	स्वा. १४	आहेत	आहे
६७	स्वा. ९	किंमतीस	किंमतींस
६९	स्वा. ३	नावाचें	नांवाचें
७१	४	द्यावें	द्यावं
७१	६	गाड्यांस	गाड्यांस
७१	१५	किती घरपटी	घरपट्टी
७२	४	असें, परंतु सांगितल्या	असें, परंतु येथील
७४	४	क्रिया	क्रिंवा
	१०	मांडिलेलें	मांडिलेलें
	१६	प्रमाण	प्रमाण
७७	११	उत्पन्नानर	उत्पन्नावर
	१२	त्यांचे	त्यांचें
८०	१	दिलेली	दिलेली
	८	दाची	दांची
	स्वा. ६	आतां	आतां
८१	८	घोष्टी शिवाय	घोष्टी शिवाय
	१०	ममुष्यें	मनुष्यें
८२	स्वा. ९	दिवस	दिवस
८३	७	दिसवांत	दिवसांत
८४	स्वा. १२	शेवटपर्यंत	शेवटपर्यंत
९०	स्वा. ६	एकाने	एकानें
९९	४	लोकापासून	लोकां पासून
१००	१३	भरावें	भरावे
१०१	११	मिळेल, आणें,	मिळेल, आणे,
१०३	१	तोटांनां	तोटांनां

पृष्ठ.	पांक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
१०७	९	महिने	महिने
१०७	स्वा.२	ही	हीं
	स्वा.१	करावी	करावीं
१०८	१३	येतली	येतील
	स्वा.१	मानले	मानिले
१०९	स्वा११	आणि	आणि
	स्वा.५	मोहोरांत	मोहोरांत
११०	८	दे	दिले
	१०	तेव्हा, येईल	तर, येतील
	स्वा.९	यांच	पांच
११२	स्वा१२	इतके	इतकें
११६	१	दोहो	दोहों
	१५	हैं	हे
	स्वा.११	रीतीने	रीतीनें
	स्वा.२	रूपाने	रूपानें
११८	१०	पद्धतीनेच	पद्धतीनेंच
	११	आहो	आहे
	१२	घतल्य.	घेतल्या
	१४	पद्धतीने	पद्धतीनें
११९	११	$\sqrt{+}$	$\sqrt{*}$
	१५	म्हणावे, हे	म्हणावें, हें
१२०	६	तिजशी	तिजशीं
१२१	२	अंशछेदाचेंच	अंशछेदांचेंच
१२१	१०	अंशछेद	अंशछेद
	स्वा.४	ही, संख्याची	हीं, संख्यांची
१२३	५	तितकी	तितकीं
	स्वा.६	वाढत	वाढत
१२४	११	पहिला	पाहिला

पृष्ठ.	पंक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
१२५	२	शोधून	शोधून
	खा.४	उदाहरणांत	उदाहरणांत
	”	↓	!
	खा.१	०००००	-४
१२६	खा.६	काढल	काढिले
१२९	१२	दशाकांनी	दशकांनी
	खा.११	असे	असे
	खा.९	त्याचे	त्याचे
	खा.८	इतकेच, कृतीने	इतकेच, कृतीने
	खा.५	काढितां	काढितां
	खा.३	अंकांनी वाढत	अंकांनी वाढत
१३१	७	पूर्वी प्रमाणे	पूर्वी प्रमाणे
	१६	करतां	करितांना
१३३	खा.१३	शून्यखाली	शून्याखाली
	खा.१	अंकास	अंकांस
१३६	१६	गेलें	गेलों
१३७	खा.१०	शेवटले	शेवटले
	खा.८	करावी	करावा
१३८	४	करण्यारा	करण्याचा
	खा.११	प्रत्येक	दोन दोन
१३९	१९	झाल्वास	झाल्यास
१४०	७	ह्याचा	ह्यांचा
	खा.६	गणितश्रेढीचे	गणितश्रेढीचे
	खा.३	सेकदांतील	सेकदांतील
१४१	११	ह्यांच	ह्यांचे
१४३	१४	विद्यार्थ्यांनी	विद्यार्थ्यांनी
	खा.९	पद्य	पदे
१४४	१०	भागिले	भागिलें

पृष्ठ.

पांक्ति.

अशुद्ध.

शुद्ध.

स्वा. १४

मधली, प्रमाणे

मधली, प्रमाणे

१४५ १४

प्रमाणे

प्रमाणे

१४६ ७

आदिपद

आदिपद

स्वा. ४

त्याची

तिची

१५९ स्वा. ३

रूपय प्रमाण

रूपये प्रमाणे

१६५ १४

मिळावे

मिळावे

१६८ ११

आणे

आणे

स्वा. ३

नेव्हां

तेव्हां