Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2019/2020

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 15

Aufgabe 15.1. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring, M ein graduierter Modul über R und $\widetilde{M}$ die zugehörige Modulgarbe auf dem Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein homogenes Ideal. Zeige, dass durch

$$\Gamma\left(D(\mathfrak{a}), \widetilde{M}\right)_\ell = \left\{ s \in \Gamma\left(D(\mathfrak{a}), \widetilde{M}\right) \mid \text{ es gibt eine offene Überdeckung } U = \bigcup_{i \in I} D(f_i) \text{ mit } f_i \text{ homogen derart, dass } s \in M_{f_i} \text{ den Grad } \ell \text{ besitzt} \right\}$$

eine Graduierung auf $\Gamma\left(D(\mathfrak{a}), \widetilde{M}\right)$ gegeben ist, für die die natürlichen Restriktionshomomorphismen homogen sind.

Aufgabe 15.2. Man mache sich anhand von $R = K[X]$ und $f = X + 1$ klar, dass es keine Graduierung auf der Nenneraufnahme $K[X]_{X+1}$ gibt, die die Standardgraduierung auf dem Polynomring in sinnvoller Weise fortsetzt.

Aufgabe 15.3. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und M ein graduierter Modul über R. Zeige, dass die Zuordnung

$$U = D_+(\mathfrak{a}) \longmapsto \operatorname{colim}_{U \subseteq D_+(f)} (M_f)_0$$

eine Prägarbe von kommutativen Gruppen auf $\operatorname{Proj}(R)$ ist, deren Vergarbung mit $\widehat{M}$ übereinstimmt.

Aufgabe 15.4. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und M ein graduierter Modul über R. Zeige, dass die zugehörige $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\widehat{M}$ auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ durch

$$\Gamma\left(U, \widehat{M}\right) = \left\{ (s_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})} \mid \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es homogene Elemente } b \in R \text{ und } t \in M \text{ mit } \mathfrak{p} \in D_+(b) \subseteq U \text{ und } s_\mathfrak{q} = \frac{t}{b} \text{ in } M_{(\mathfrak{q})} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in D_+(b) \right\}$$

gegeben ist.

Aufgabe 15.5. Es sei R ein integrer $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $M = R_H$ die Nenneraufnahme zu allen homogenen Elementen vom Grad $\neq 0$. Zeige, dass $\widehat{M}$ der Funktionenkörper des integren Schemas $\operatorname{Proj}(R)$ ist.

Aufgabe 15.6. Es sei $R = K[X_0, X_1, \ldots, X_d]/\mathfrak{a}$ ein standard-graduierter Ring und

$$(a_0, a_1, \ldots, a_d) \in V(\mathfrak{a}) = \mathbb{A}_K^{d+1}$$

ein K-Punkt $\neq 0$ von R mit dem zugehörigen homogenen Primideal $\mathfrak{p} = (a_iX_j - a_jX_i,)$, das ein abgeschlossener Punkt in $\operatorname{Proj}(R) = V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}_K^d$ ist. Zeige, dass $\widehat{R/\mathfrak{p}}$ ein quasikohärenter Modul auf $\operatorname{Proj}(R)$ (und auf $\mathbb{P}_K^d$) ist, deren Träger gleich $\{\mathfrak{p}\}$ ist.

Aufgabe 15.7. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $Y = \operatorname{Proj}(R)$. Zeige, dass nicht isomorphe graduierte R-Moduln M und N zu isomorphen $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\widehat{M}$ und $\widehat{N}$ führen können.

Aufgabe 15.8. Es sei $R = K[X_0, X_1, \ldots, X_d]/\mathfrak{a}$ mit einem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$ und sei $Y = \operatorname{Proj}(R) \subseteq \mathbb{P}_K^d$. Zeige $i_*\mathcal{O}_Y = \widehat{R}$ auf dem $\mathbb{P}_K^d$.

Aufgabe 15.9. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-graduierten R-Moduln mit homogenen Homomorphismen. Zeige, dass in jeder Stufe eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L_k \longrightarrow M_k \longrightarrow N_k \longrightarrow 0$$

von R_0-Moduln vorliegt.

Aufgabe 15.10. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und seien L, M, N $\mathbb{Z}$-graduierte R-Moduln mit homogenen Homomorphismen $\varphi\colon L \to M$ und $\psi\colon M \to N$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $R_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$ sei die Sequenz

$$0 \longrightarrow L_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\psi} N_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

exakt. Zeige, dass eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow 0$$

auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ vorliegt.

Aufgabe 15.11. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Zeige, dass der verschobene R-Modul $R(n)$ nur bei $n = 0$ ein graduierter Ring ist.

Aufgabe 15.12. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu einem standard-graduierten Ring R. Zeige, dass für die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_Y(\ell)$ die Beziehung $\mathcal{O}_Y(\ell) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(m) \cong \mathcal{O}_Y(\ell + m)$ gilt.

Aufgabe 15.13. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu einem standard-graduierten Ring R. Zeige, dass für die getwisteten Strukturgarben die Beziehung $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_Y(\ell), \mathcal{O}_Y(m)) \cong \mathcal{O}_Y(m - \ell)$ gilt.

Aufgabe 15.14. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu einem standard-graduierten Ring R. Zeige, dass die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_Y(\ell)$ zu $\ell \leq 0$ sich als Idealgarbe auf Y realisieren lassen. Zeige ferner, dass es hierfür im Allgemeinen mehrere Möglichkeiten gibt.

Aufgabe 15.15. Es sei $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$ ein kommutativer $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter Modul über R, der endlich erzeugt sei. Zeige, dass M auch von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird und dass es einen surjektiven homogenen Modulhomomorphismus der Form

$$\bigoplus_{i=1}^{k} R(-d_i) \longrightarrow M$$

gibt.

Aufgabe 15.16. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ wird von globalen Schnitten erzeugt.
(2) Ein quasikohärenter Modul $\mathcal{M}$ wird genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn es einen surjektiven Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{M}$ gibt.
(3) Auf einem affinen Schema wird jeder quasikohärente Modul von globalen Schnitten erzeugt.
(4) Wenn $\mathcal{M}$ von globalen Schnitten erzeugt wird und $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ surjektiv ist, so wird auch $\mathcal{N}$ von globalen Schnitten erzeugt.

Aufgabe 15.17. Zeige, dass auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^d_R$ über einem kommutativen Ring R die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(k)$ bei $k \geq 0$ von globalen Schnitten erzeugt werden und bei $k < 0$ und $d \geq 1$ nicht.

Aufgabe 15.18. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter Modul auf X. Zeige, dass $\mathcal{M}$ genau dann von globalen Schnitten erzeugt wird, wenn es eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Schnitte $s_j \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ zu $j \in J$ derart gibt, dass die Restriktionen $\rho_{U_i}(s_j) \in \Gamma(U_i, \mathcal{M})$ ein $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-Modulerzeugendensystem von $\Gamma(U_i, \mathcal{M})$ bilden.

Aufgabe 15.19. Es sei $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum zu einem standard-graduierten Ring R. Zeige, dass die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_Y(\ell)$ zu $\ell \geq 0$ von globalen Schnitten erzeugt werden.

Abbildungsverzeichnis