NVMERI FIGVRATI SEV ORDINES NVMERICI.

DEFINITIONES.

PRimum ordinem numericum voco, ſeriem vnitatum.

1, 1, 1, 1, 1, &c.

Secundum ordinem numericum voco, ſeriem eorum qui vulgo naturales dicuntur, 1, 2, 3, 4, &c. qui quidem ex vnitatum additione formantur.

Tertium ordinem numericum voco, ſeriem eorum qui vulgo trianguli dicuntur, 1, 3, 6, 10, &c. qui quidem ex naturalium additione formantur, *ſecundus* enim triangulorum, 3, æquatur *duobus prioribus* naturalibus 1 † 2; *Tertius* verò triangulorum 6, factus eſt ex additione *trium* priorum naturalium, 1 † 2, † 3.

Quartum ordinem numericum voco, ſeriem eorum qui pyramides dicuntur, 1, 4, 10, 20, &c. qui ex præcedentium additione formantur.

Quintum ordinem numericum voco, ſeriem eorum qui ex additione præcedentium formantur, & triangulo-trianguli dici poſſent,

1, 5, 15, 35, &c.

Sextum ordinem numericum voco, ſeriem eorum qui ex additione præcedentium formantur,

1, 6, 21, 56, &c.

Et ſic in infinitum.

Numeri autem *figurati*, illi ſunt qui ex vno ex ordinibus numeris ſunt, ſic trianguli, pyramides, triangulo-trianguli, &c. ſunt numeri *figurati*.

Si ergo fiat tabula numericorum ordinum, apponanturque ſuperius radices, & à ſiniſtra exponentes ordinum, hoc modo,

	Radices.			
	1	2	3	4
Vnitates seu Ordo 1	1	1	1	1
Naturales seu Ordo 2	1	2	3	4
Trianguli seu Ordo 3	1	3	6	10
Pyramides seu Ordo 4	1	4	10	20
&c.				

Manifestum est eam ipsissimam esse ac triangulum arithmeticum, *series* enim trianguli eodem modo generantur ac *ordines* numerici. Exponentes ergo serierum sunt ijdem ac exponentes ordinum; Radices verò cellularum, eædem ac radices numerorum figuratorum.

Sic ergo numerus v. g. 21, qui in *triangulo arith.* est in *serie tertiâ*, à radice verò *sextâ*; jam inter numeros *figuratos* consideratus, erit *tertij ordinis*, à radice verò *sextâ*.

Quidquid ergo de cellulis trianguli arith. dictum est, & figuratis numeris conueniet, Modò vice huius vocis, *series* hæc reponatur, *Ordo* & vice illius, *cellula*, hæc substituatur *numerus figuratus* seu *numerus ordinis numerici*.

Sic itaque, quì meminerit *in primo consect. triang. arith.* ostensum esse *Omnem cellulam, æquari proximè minori eiusdem seriei, plus proximè minori corradicali.* Iam facilè deducet hanc propositionem.

Prop. 1.

Omnis numerus figuratus, æquatur proximè minori eiusdem ordinis, plus proximè minori corradicali.

Sic ergo *quarta pyramis* v. g. æquatur *tertiæ pyramidi* plus *quarto triangulo*, &c.

Similiter deducentur & aliæ propositiones, vt sequentes.

Prop. 2.

Omnis numerus figuratus, æquatur summæ eorum qui à præcedente radice procedunt in singulis ordinibus à suo ad primum inclusiuè.

Omnis enim *cellula æquatur ex consect.* 2. Summæ earum quæ à præcedente radice procedunt à sua ad primam inclusiuè.

Sic ergo, *quinta* v. g. *pyramis* æquatur, *quartæ pyramidi* plus *quarto triangulo* plus *quarto naturali* plus *quarta vnitate* seu vnitate.

Poteſt autem illud ſic & problematicè enuntiari.

Prop. 3. Problema.

Dato numero figurato cujuſuis ordinis, reperire numerum in vnoquoque ordine à ſuo ad primum incluſiuè, ita vt omnium ſumma æquetur dato.

Facilis eſt ſolutio. Illi omnes qui in ſingulis his ordinibus procedunt à radice proximè minori quam ſua, ſatisfaciunt.

Prop. 4.

Duo numeri figurati ſunt ijdem inter ſe, ſi radix vnius, idem ſit ac exponens ordinis alterius.

Cellulæ enim reciprocæ ſunt eædem inter ſe ex 4. conſect.

Ergo *tertia pyramis* v. g. æquatur *quarto* triangulo. Sic *ſextus octaui* ordinis, æquatur *octauo ſexti*, &c.

Prop. 5.

Quotlibet priores numeri corradicales à quacunque radice procedentes, ſunt ijdem ac totidem priores numeri ordinis numerici cuius exponens idem eſt ac radix corradicalium, ſinguli ſingulis.

Illa nihil aliud eſt quam conſect. 5. triang. arith.

Prop. 6.

Omnis numerus figuratus, eſt ad proximè majorem eiuſdem ordinis, vt radix minoris, ad eandem radicem cum exponente ordinis vnitate minuto conjunctam.

Hoc nihil aliud eſt quam *conſect.* 13. oſtenſum enim eſt *omnem cellulam, eſſe ad proximè majorem eiuſdem ſeriei, vt radicem ad exponentem baſis*. Exponens verò baſis idem eſt ac exponens ſeriei plus radice vnitate minuta *ex triang. arith. ad initium*.

Prop. 7.

Omnis numerus figuratus, eſt ad proximè majorem corradicalem, vt exponens ordinis minoris, ad eundem exponentem cum radice communi vnitate minutâ junctum.

Idem est ac 12. *consect.*

Prop. 8.

Omnis numerus figuratus, est ad figuratum ordinis præcedentis à radice proximè majore procedentis, vt radix primi, ad exponentem ordinis secundi.

V. g. *secundus quarti* ordinis, est ad *tertium tertij* ordinis vt 2 ad 3.

Conuenit illud cum consect. 11. triang. arith. in quo ostensum est *secundam cellulam quarta seriei E, esse ad tertiam tertiæ seriei C, vt 2 radicem primæ E, ad 3 exponentem seriei secundæ C.*

Monitum.

Possunt infinita alia dari circa has proportiones, & quælibet propositio in varias mutari v. g. cum dictam est, *numerum quemlibet, esse ad alterum, vt tertium ad quartum*, nùm potest induci, *factum ex primo in quartum, æquari facto ex secundo in tertium?* Vel factum *ex duobus diuisum per alterutrum è reliquis, æquari Residuo?* Sic multiplicantur propositiones & non sine fructu, variæ enim enuntiationes, etsi eiusdem propositi, varios præbent vsus. Hoc autem studium Geometrarum esse debet, illâ enim arte aptatæ enunriationes ad diuersa & magna ducunt, Theoremata connectendo quæ omninò aliena videbantur vt primò concepta fuerant. Cui versatile hoc deest ingenium, ingratus erit geometriæ cultus, quia verò non datur sed iuuatur, hoc exemplo viam aperire sufficiet.

Ipsa hæc vltima propositio 8. Sic exhibetur.

Numerus omnis figuratus, ductus in proximè minorem radicem, æquatur exponenti ordinis ducto in figuratum ordinis sequentis ab illa minori radice procedentem.

Vel sic.

Omnis numerus figuratus ductus in radicem proximè minorem, *toties* continet figuratum ordinis sequentis ab ista minori radice procedentem, *quoties* exponens ordinis numeri propositi, continet vnitatem.

Ad horum instar ludatur circa reliqua. Figuratorum compositionem, resolutionem & summam, exponere vrget vtilitas ac nouitas rei.

In sequentibus enim propriè ostenditur connexio inter numerum cujusuis ordinis cum suâ radice & exponente sui ordinis, quæ talis est, vt ex his tribus, datis duobus quibuslibet tertius inueniatur. Verbi gratia, datâ radice & exponente ordinis, numerus ipse datur; sic dato numero & sui ordinis exponente, radix elicitur; nec non ex dato numero & radice, exponens ordinis inuenitur: hæc constituunt Tria priora problemata, quartum de summâ ordinum agit.

DE NVMERICORVM ORDINVM COMPOSITIONE.

Problema I.

DAtis, numeri cuiuslibet, radice & exponente ordinis, componere numerum.

Productus numerorum qui præcedunt radicem, diuidat productum totidem numerorum continuorũ quorum primus sit exponens ordinis, Quotiens erit quæsitus numerus.

Propositum sit inuenire numerum ordinis verbi gratia tertij, radicis verò quintæ.

Productus numerorum, 1, 2, 3, 4, qui præcedunt radicem, 5, nempe, 24, diuidat productum totidem numerorum continuorum, 3, 4, 5, 6, quorum primus sit exponens ordinis, 3, nempe, 360, Quotiens 15, est numerus quæsitus.

Nec difficilis demonstratio, eâdem enim prorsus constructione, inuenta est, ad finem tractatus Triang. Arith. cellula quinta, tertiæ seriei; cujus cellulæ numerus, idem est ac numerus quintus ordinis tertij, qui quæritur.

Corollarium.

Inde colligitur hoc.

Omnis numerus figuratus, ductus in productum numerorum qui præcedunt radicem, æquatur producto totidem numerorum continuorum quorum primus est exponens ordinis.

Illo enim vltimo producto per primum diuiso, quotiens est numerus figuratus ex constructione.

Potest autem & sic resolui illud problema.

Productus numerorum qui præcedunt exponentem ordinis, diuidat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit radix, Quotiens est quæsitus.

Sic in proposito exemplo, productus numerorum, 1, 2, qui præcedunt exponentem ordinis, 3, nempe, 2; diuidat productum totidem numerorum, 5, 6, quorum primus sit radix, 5, nempe, 30, Quotiens, 15, est numerus quæsitus.

Nec differt hæc constructio à præcedente, nisi in hoc solo, quod in altera idem fit de radice, quod fit in altera de exponente ordinis. Perinde ac si idem esset inuenire, *quintum* numerũ ordinis *tertij*, ac *tertium* numerum ordinis *quinti*, Quòd quidem verum esse jam ostendimus.

Corollarium.

Vnde & illud colligitur.

Omnis numerus figuratus, ductus in productum numerorum qui præcedunt exponentem ordinis, æquatur producto totidem numerorum continuorum quorum primus sit radix.

Vltimo enim hoc producto per primum diuiso quotiens est ipse numerus figuratus, ex hac constructione.

Hinc autem obiter colligere possumus arcanum numericum, cum enim ambo illi quotientes, 15, sint ijdem, constat, diuisores esse inter se vt diuidendos. Animaduertemus itaque hanc prop.

Si sint duo quilibet numeri; Productus omnium numerorum primum *ex ambobus propositis præcedentium, est ad productum totidem numerorum quorum primus est* secundus *ex his ambobus, vt productum ex omnibus qui præcedunt* secundum *ex illis ambobus, ad productum totidem numerorum continuorum quorum primus est* primus *ex ijs ambobus propositis.*

Hæc qui prosequeretur, & demonstraret, & noui fortassis tractatus materiam reperiret, nunc autem quia extra rem nostram sunt sic pergimus.

DE NVMERICORVM ORDINVM RESOLVTIONE.

Problema 2.

DAto numero, ac exponente sui ordinis, inuenire radicem.

Potest autem & sic enuntiari.

Dato quolibet numero, inuenire radicem maximi numeri ordinis

ordinis numerici cuiuslibet propositi, qui in dato numero contineatur.

Sit Datus numerus quilibet v. g. 58, *ordo vero numericus quicunque propositus verbi gratia* sextus. *Oportet igitur inuenire radicem* sexti *ordinis numeri*, 58

Exhibeatur ex vnâ parte exponens ordinis, 6	*Et continuò*	*Exponatur ex alterâ parte numerus datus*, 58
Multiplicetur ipse, 6, *per numerum* 7, *proximè majorem sitque productus*, 42	*Et continuò*	*Multiplicetur ipse numerus per*, 2, *sitque productus*, 116
Multiplicetur iste productus per proximè sequentem multiplicatorem, 8, *sitque productus*, 336	*Et continuò*	*Multiplicetur ipse productus per proximè sequentem multiplicatorem*, 3, *sitque productus*, 348
Multiplicetur iste productus per proximè sequentem multiplicatorem, 9, *sitque productus*, 3024	*Et continuò*	*Multiplicetur iste productus per proximè sequentem multiplicatorem*, 4, *sitque productus*. 1392.

Et sic in infinitum, donec vltimus productus exponentis, 6, *nempe*, 3024, *major euadat quam vltimus productus numeri dati nempe*, 1392 ; *Et tunc absoluta est operatio, vltimus enim multiplicator dati numeri, nempe* 4, *est radix quæ quærebatur.*

Igitur Dico, numerum sexti ordinis cujus radix est, 4, nempe, 56, maximum esse eius ordinis qui in numero dato contineatur, seu Dico numerum sexti ordinis cujus radix est, 4, nempe 56, non esse majorem dato numero, 58. Numerum verò eiusdem ordinis proximè majorem seu cuius radix est, 5, nempe 126, esse maiorem numero dato, 58.

Etenim productus ille vltimus numeri dati nempe 1392, factus est ex numero dato, 58, multiplicato per productum numerorum, 1, 2, 3, 4, nempe, 24, productus verò præcedens hunc vltimum nempe, 348, factus est ex numero dato, 58, multiplicato per productum numerorum 1, 2, 3, nempe, 6.

Ergo productus numerorum, 6, 7, 8, non est major producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per 58. Productus verò numerorum 6, 7, 8, 9, est major producto numerorum, 1, 2, 3, 4, multiplicato per 58, *ex constructione*.

Iam numerus ordinis *sexti* cuius radix est, 4 nempe, 56 multiplicatus per numeros, 1, 2, 3, æquatur producto numerorum, 6, 7, 8, ex demonstratis in tractatu de ordinibus numericis.

Sed productus numerorum 6, 7, 8, non est major *ex ostensis*, producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato, per datum, 58, igitur, productus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per, 56, non est major quam idem productus numerorum, 1, 2, 3, multiplicatus per, datum 58. Igitur, 56, non est major quam 58.

Iam sit 126, numerus ordinis *sexti* cuius radix, est 5. Igitur ipse 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, æquatur producto numerorum, 6, 7, 8, 9, ex tractatu de ord. numer. Sed productus ille numerorum 6, 7, 8, 9, est major quam numerus datus 58 multiplicatus per productum numerorum, 1, 2, 3, 4, *ex ostensis*. Igitur, numerus, 126, multiplicatus per productum numerorum, 1, 2, 3, 4, est major quam numerus datus 58 multiplicatus per eundem productum numerorum 1, 2, 3, 4. Igitur numerus, 126, est major quam numerus datus, 58.

Ergo numerus 56 *sexti* ordinis cuius radix est, 4, non est major quam numerus datus, numerus verò, 126, eiusdem ordinis cuius radix 5 est proximè major est, major est quam datus numerus.

Ergo ipse numerus, 56, maximus est eius ordinis qui in dato contineatur, & eius radix 4 inuenta est. Q. E. F. E. D.

DE NVMERICORVM ORDINVM RESOLVTIONE.

Problema 3.

Dato quolibet numero, & eius radice, inuenire ordinis exponentem.

Non differt hoc problema à præcedente, radix enim, & exponens ordinis, reciproce conuertuntur, ita vt dato numero v. g. 58, & eius radice, 4, reperietur exponens sui ordinis 6, eàdem methodo, ac si dato numero ipso, 58, & exponente ordinis, 4, radix, 6, esset inuenienda, quartus enim numerus ſexti ordinis idem eſt ac ſextus quarti, vt jam demonſtratum eſt.

DE NVMERICORVM ORDINVM SVMMA.

Problema 4.

Propoſiti cujuſlibet ordinis numerici, tot quot imperabitur, priorum numerorum ſummam inuenire.

Propoſitum ſit inuenire ſummam quinque, *v.g. priorum numerorum ordinis verbi gratia* ſexti.

Inueniatur ex præcedente numerus quintus, *quia* quinque *priorum numerorum ſumma requiritur, ordinis* ſeptimi, *nempe eius qui propoſitum* ſextum *proximè ſequitur; ipſe ſatisfaciet problemati.*

Numericorum enim ordinum generatio talis eſt, vt numerus cujuſuis ordinis, æquetur ſummæ eorum omnium ordinis præcedentis quorum radices non ſunt ſuâ majores; ita vt quintus ſeptimi ordinis, æquetur, ex naturâ & generatione ordinum, quinque prioribus numeris ſexti ordinis, quod difficultate caret.

Concluſio.

Methodus quâ ordinum reſolutionem expedio eſt generaliſſima, verum non mihi primo ſic venit in mentẽ, quæ primùm ſeſe obtulit ea eſt.

Si dati numeri quærebatur radix terti; ordinis, ita procedebam. *Sumatur duplum numeri propoſiti, iſtius dupli radix quadrata inueniatur, hæc quæſita eſt.*

Si dati numeri quæritur radix quarti ordinis, *Multiplicetur numerus datus per, 6, nempe per productum numerorum,* 1, 2, 3; *Producti inueniatur radix cubica ſeu* 3 *gradus, ipſa ſatisfaciet.*

Si dati numeri quæritur radix quinti ordinis, *Multiplicetur datus numerus per,* 24, *nempe per productum numerorum,* 1, 2, 3, 4, *productique inueniatur radix* 4 *gradus, ipſa vnitate minuta, ſatisfaciet problemati.*

Et ita reliquorum ordinum radices quærebam, conſtructione non generali, ſed cuique propriâ ordini; nec tamen ideo mihi omninò diſplicebat, illa enim quâ reſoluuntur poteſtates non generalior eſt, aliter enim extrahitur radix quadrata, aliter cubica, &c. quamvis ab eodem principio viæ illæ differentes procedant. Vt ergo nondum generalis poteſtatum reſolutio data erat, ſic & vix generalem ordinum reſolutionem aſſequi ſperabam; conatus tamen expectationem ſuperantes eam quam tradidi præbuerunt generaliſſimam, & quidem amicis meis, vniuerſalium ſolutionum amatoribus doctiſſimis, gratiſſimam; A quibus excitatus & generalem poteſtatum reſolutionem tentare, ad inſtar generalis ordinum reſolutionis, obtemperans quæſiui, & ſatis fœliciter mihi contigit reperiſſe, vt infrà videbitur.

DE NVMERORVM CONTINVORVM PRODVCTIS, SEV DE NVMERIS QVI PRODVCVNTVR ex multiplicatione numerorum ſerie naturali procedentium.

NVmeri qui producuntur ex multiplicatione numerorum continuorum à nemine, quod ſciam, examinati ſunt. Ideo nomen eis impono nempe *producti continuorum*.

Sunt autem qui ex duorum multiplicatione formantur, vt iſte, 20 qui ex, 4 in 5 oritur, & poſſent dici *ſecundæ ſpeciei*.

Sunt qui ex trium multiplicatione formantur, vt iſte 120, quæ ex, 4 in 5 in 6, oritur & dici poſſent *tertiæ ſpeciei*.

Sic *quartæ ſpeciei* dici poſſent qui ex quatuor numerorum continuorum multiplicatione formantur, & ſic in infinitum, ita vt, ex multitudine multiplicatorum, ſpecies nominationem exponentis ſortiretur; & ſic nullus eſſet productus primæ ſpeciei, nullus eſt enim productus ex vno tantum numero.

Primum huius tractatuli theorema, illud eſt quod obiter in præcedente tractatu, annotauimus, quod quærendo, reliqua inuenimus, imò & generalem poteſtatum reſolutionem; adeò ſtrictâ connexione ſibi mutuo cohærent veritates.

Prop. 1.

Si ſint duo numeri quilibet; Productus omnium numerorum primum præcedentium, eſt ad productum totidem numerorum continuorum à ſecundo incipientium; vt productus omnium numerorum ſecundum præcedentium, ad productum totidem numerorum continuorum à primo incipientium.

Sint duo numeri quilibet 5, 8. Dico productum numerorum, 1, 2, 3, 4, qui præcedunt, 5, nempe 24; esse ad productum totidem continuorum numerorum, 8, 9, 10, 11, nempe 7920: vt productum numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, qui præcedunt 8, nempe 5640; ad productum totidem continuorum numerorum, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, nempe 1663200.

Etenim productus numerorum, 5, 6, 7, ductus in productum istorum, 1, 2, 3, 4, efficit productum horum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Et idem productus numerorum, 5, 6, 7, ductus in productum numerorum, 8, 9, 10, 11, efficit productum horum, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ergo, vt productus numerorum, 1, 2, 3, 4; Ad productum numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; Ita productus numerorum, 8, 9, 10, 11; ad productum numerorum, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Q. E. D.

Prop. 2.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis, est multiplex producti à totidem numeris continuis quorum primus est vnitas.

Sit productus quilibet, à tribus v. g. numeris continuis, 5, 6, 7, nempe 210, & productus totidem numerorum ab vnitate incipientium, 1, 2, 3, nempe, 6; Dico ipsum 210 esse multiplicem ipsius, 6.

Etenim ipse, 6, ductus in quintum numerum ordinis quarti, nempe, 35, æquatur ipsi producto ex, 5, 6, 7, ex demonstratis in tractatu de ordinibus numericis.

Prop. 3.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis est multiplex numeri ordinis cuiusdam numerici, nempe eius cujus exponens vnitate major est quam multitudo numerorum ex quorum multiplicatione oritur, radix verò, eadem ac minimus ex his numeris.

Hoc patet ex præcedente. Et vnica vtrique conuenit demonstratio.

Monitum.

Ambo diuisores in his duabus propositionibus ostensi, tales sunt, vt alter alterius sit quotiens. Ita vt quilibet productus à quotlibet numeris continuis, diuisus per productum totidem numerorum ab vnitate incipientium, vt secunda propositio docet fieri posse, quotiens erit numerus ordinis enunciati in tertia prop.

Prop. 4.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis ab vnitate incipientibus, est multiplex producti à quotlibet numeris continuis etiam ab vnitate incipientibus quorum multitudo minor est.

Sint quotlibet numeri continui ab vnitate, 1, 2, 3, 4, 5, quorum productus, 120, quotlibet autem ex ipsis ab vnitate incipientes, 1, 2, 3, quorum productus, 6, Dico, 120 esse multiplicem, 6.

Etenim productus numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, fit ex producto numerorum, 1, 2, 3, multiplicato per productum numerorum, 4, 5.

Prop. 5.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis *est multiplex* producti à quotlibet numeris *continuis* ab vnitate incipientibus quorum *multitudo* minor est.

Etenim productus continuorum quorumlibet est multiplex totidem continuorum ab vnitate incipientium *ex secunda*, sed *ex quarta* productus continuorum ab vnitate est multiplex producti continuorum ab vnitate quorum multitudo minor est. Ergo, &c.

Prop. 6.

Productus quotlibet continuorum, est ad productum totidem proximè majorum, vt minimus *multiplicatorum* ad maximum.

Sint quotlibet numeri, 4, 5, 6, 7, quorum productus 840; & totidem proximè maiores 5, 6, 7, 8, quorum productus 1680. Dico, 840, esse ad 1680. vt 4, ad 8.

Etenim productus numerorum, 4, 5, 6, 7, est factus ex producto continuorum, 5, 6, 7, multiplicato per, 4, productus verò continuorum, 5, 6, 7, 8, factus est ex eodem producto continuorum, 5, 6, 7, multiplicato per, 8. Ergo, &c.

PRODVCTA CONTINVORVM RESOLVERE.
SEV,
Resolutio numerorum qui ex numeris progressione naturali procedentibus producuntur.

Problema.

Dato quocunque numero, inuenire tot quot imperabitur, numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus, sit maximus eius speciei qui in dato numero contineatur.

Oportet autem datum numerum non esse minorem producto totidem numerorum ab vnitate continuorum.

Datus sit numerus verbi gratia 4335. *Oporteatque reperire verbi gratia* quatuor *numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus sit maximus qui in dato* 4335 *contineatur, eorum omnium qui producuntur ex multiplicatione* quatuor *numerorum continuorum.*

Sumantur ab vnitate tot numeri continui quot sunt numeri inueniendi, nempe quatuor *in hoc exemplo,* 1, 2, 3, 4, *quorum per productum,* 24, *diuidatur numerus datus sitque quotiens,* 180. *Ipsius quotientis inueniatur radix ordinis numerici non quidem* quarti *sed sequentis nempe* quinti *sitque ea,* 6, *ipse,* 6, *est primus numerus, secundus* 7, *tertius* 8, *quartus* 9.

Dico itaque productum *quatuor* numerorum, 6, 7, 8, 9, esse maximum numerum qui in dato contineatur, id est. Dico productum *quatuor* numerorum, 6, 7, 8, 9, nempe 3024, non esse majorem quam numerum datum, 4335; productum verò *quatuor* proximè majorum numerorum, 7, 8, 9, 10, nempe, 5040, esse majorem numero dato, 4335.

Etenim, ex demonstratis in tractatu de ordinibus numericis, constat productum numerorum, 1, 2, 3, 4, seu 24, ductum in numerum quinti ordinis cuius radix est, 6, nempe, 126, efficere numerum æqualem producto numerorum, 6, 7, 8, 9, nempe, 3024. Similiter, & eundem productum numerorum, 1, 2, 3, 4, nempe, 24, ductum in numerum eiusdem

dem ordinis quinti cuius radix eſt, 7, efficere numerum æqualem producto numerorum 7, 8, 9, 10, nempe 5040.

Iam verò numerus quinti ordinis cuius radix eſt, 6, nempe 126, cum ſit maximus, eius ordinis qui in 180 contineatur, ex conſtr. patet ipſum 126 non eſſe majorem quam 180, numerum verò, quinti ordinis cuius radix eſt, 7, nempe 210, eſſe majorem quam ipſum, 180.

Cum verò, numerus 4335, diuiſus per 24, dederit 180 quotientem patet, 180 ductum in 24, ſeu 4320, non eſſe majorem quam 4335, ſed aut æqualem eſſe, aut differre numero minore quam, 24.

Itaque cum ſit 210 major quam 180 ex conſtr. patet, 210 in 24, ſeu 5040 majorem eſſe quam 180 in 24 ſeu 4320, & exceſſum eſſe ad minimùm, 24, numerus verò datus 4335, aut non excedit ipſum 4320, aut excedit numero minore quam 24. Ergo, numerus 5040, major eſt quam datus 4335, ideſt productus numerorum, 7, 8, 9, 10, major eſt dato numero.

Iam numerus 126, non eſt major quam 180, ex conſtr. Igitur, 126 in 24, non eſt major quam 180 in 24, ſed 180 in 24, non eſt major dato numero ex oſtenſis. Ergo, 126 in 24, ſeu productus numerorum, 6, 7, 8, 9, non eſt major numero dato, productus autem numerorum, 7, 8, 9, 10, ipſo major eſt. Ergo, &c. Q. E. F. E.

Sic ergo exprimi poteſt & enuntiatio, & generalis conſtructio.

Inuenire tot quot imperabitur numeros progreſſione naturali continuos, ex quorum multiplicatione ortus numerus, ſit maximus eius ſpeciei qui in dato numero contineatur.

Diuidatur numerus datus, per productum totidem numerorum ab vnitate ſerie naturali procedentium quot ſunt numeri inueniendi, inuentoque quotiente, aſſumatur ipſius radix ordinis numerici cujus exponens eſt vnitate major quam multitudo numerorum inueniendorum. Ipſa radix eſt primus numerus, Reliqui per incrementum vnitatis in promptu habentur.

Monitum.

Hæc omnia ex naturâ rei demonſtrari poterant, abſque trianguli Arithmetici aut ordinum numericorum auxilio, non tamen fugienda illa connexio mihi viſa eſt, præſertim cùm ea ſit quæ lumen primum dedit. Et, quod amplius eſt, alia demonſtratio laborioſior eſſet, & prolixior.

NVMERICARVM POTESTATVM GENERALIS RESOLVTIO.

Generalem Numericarum Poteſtatum Reſolutionem inquirenti, hæc mihi venit in mentem obſeruatio; Nihil aliud eſſe quærere *radicem v. g. quadratam dati numeri*, quam quærere *duos numeros æquales quorum productus æquetur numero dato*. Sic & quærere *radicem cubicam* nihil aliud eſſe quam quærere *tres numeros æquales quorum productus ſit datus*, & ſic de cæteris.

Itaque, poteſtatis cuiuſlibet reſolutio, eſt indagatio totidem numerorum æqualium, quot exponens poteſtatis continet vnitates, quorum productus æquetur dato numero; Poteſtates enim ipſæ nihil aliud ſunt quam æqualium numerorum producti.

Sicut enim in præcedenti tractatu, egimus de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum naturali progreſſione procedentium, ſic & in hoc de poteſtatibus tractatu, agitur de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum æqualium.

Viſum eſt itaque quamproximos eſſe ambos hos tractatus, & nihil eſſe vicinius, producto ex æqualibus, quam productum ex continuis ſolius vnitatis incremento differentibus.

Quapropter poteſtatum reſolutionem generalem, ſeu *productorum ex æqualibus* reſolutionem, non mediocriter prouectam eſſe cenſui, cum eam *productorum ex continuis* generalis reſolutio præceſſerit.

Dato enim numero, cuius radix cujuſuis gradus quæritur verbi gratia *quarti*, quæruntur *quatuor* numeri æquales quorum productus æquetur dato; Si ergo inueniantur ex præcedente tractatu, *quatuor* continui quorum productus æquetur dato, quis non videt, inuentam eſſe radicem quæſitam, cum ea ſit vnus ex his *quatuor* continuis; Minimus enim ex his *quatuor*, *quater* ſumptus & toties multiplicatus manifeſtè minor eſt producto continuorum, maximus verò ex his *quatuor*, *quater* ſumptus ac toties multiplicatus, manifeſtè major eſt producto continuorum; Radix ergo quæſita vnus ex illis eſt.

Verùm latet adhuc ipſa in multitudine; Reliquum eſt igitur vt eligatur, & diſcernatur quis ex continuis ſatisfaciat quæſtioni.

Huic perquiſitioni nondum forte ſatis incubui, crudam tamen meditationem proferam, alias, ſi digna videatur, diligentius elaborandam.

Postulatum.

Hoc autem prænotum esse postulo; Quæ sit radix *quadrata* numeri, 2, nempe, 1. *Etenim*, 1, *est radix maximi quadrati in* 2. *contenti.* Sic & quæ sit radix *cubica* numeri, 6, *scilicet qui ex multiplicatione trium numerorum*, 1, 2, 3, *oritur*, nempe, 1. Sic & quæ sit radix *quarti* gradus numeri, 24, *scilicet qui ex multiplicatione quatuor numerorum*, 1, 2, 3, 4, *oritur* nempe, 2, & sic de cæteris gradibus. In vnoquoque enim peto nosci radicem istius gradus, numeri qui producitur ex multiplicatione tot numerorum continuorum ab vnitate quot exponens gradus propositi continet vnitates. Sic ergo in inuestigatione radicis v. g. *decimi* gradus, postulo notam esse radicem istius *decimi* gradus, numeri 3628800, qui producitur ex multiplicatione *decem* priorum numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nempe 5. Et hoc vno verbo dici potest. In vnoquoque gradu, postulo notam *esse radicem istius* gradus minimi producti totidem continuorum quot exponens gradus continet vnitates; Minimus enim productus continuorum quotlibet, ille est cuius multiplicatores ab vnitate sumunt exordium.

Nec sanè molesta hæc petitio est, in vnoquoque enim gradu *vnius* tantum numeri radicem suppono, in vulgari autem methodo, multo grauius in vnoquoque gradu, *nouem* priorum characterum, potestates exiguntur.

Notum sit ergo.

Producti numerorum,	1, 2,	nempe 2	rad. quadr. esse,	1
Producti num.	1, 2, 3,	nempe, 6	rad. cub. esse	1
Producti num.	1, 2, 3, 4,	nemp. 24	rad. 4. grad. esse	2
Prod. num.	1, 2, 3, 4, 5,	nempe 120	rad. 5. gr.	2
Prod. n.	1, 2, 3, 4, 5, 6,	nem. 720	rad. 6. gr. esse	2
Pr. n.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,	nem. 5040	rad. 7. gr. esse	3
&c.				

Problema.

Dato quolibet numero inuenire radicem propositæ potestatis maximæ quæ in dato contineatur.

Sit datus numerus v. g. 4335, & inuenienda sit radix gradus v. g. *quarti* maximi numeri *quarti* gradus seu *quadrato quadrati* qui in dato numero contineatur.

Inueniantur, ex præcedente tractatu, *quatuor* numeri continui, quia *quartus* gradus proponitur, quorum productus sit maximus eius speciei qui in 4335 contineatur, sintque ipsi, 6, 7, 8, 9.

Radix quæsita est vnus ex his numeris. Vt verò discernatur, sic procedendum est.

Sumatur ex postulato radix *quarti* gradus numeri qui producitur ex multiplicatione *quatuor* priorum numerorum, 1, 2, 3, 4, nempe radix *quadrato-quadrata* numeri, 24, quæ eſt, 2; Ipſe, 2, cum minimo continuorum inuentorum 6 vnitate minuto nempe, 5, efficiet 7.

Hic 7 eſt minimus qui radix quæſita eſſe poſſit, omnes enim inferiores ſunt neceſſario minores radice quæſitâ.

Iam, triangulus *numeri*, 4, qui exponens eſt propoſiti gradus *quarti* nempe 10, diuidatur per ipſum exponentem 4, ſitque, quotiens, 2, *ſuperſluum diuiſionis non curo* ipſe quotiens, 2, cum minimo continuorum 6, iunctus, efficit, 8.

Ipſe 8, eſt maximus qui radix eſſe poſſit omnes enim ſuperiores ſunt neceſſario majores radice quæſitâ.

Deniq; conſtituantur *in quarto* gradu ipſi extremi num. 7, 8, nempe, 2401, 4096, nec non & omnes qui inter ipſos interjecti ſunt, *quod ad generalem methodum dictum ſit, hîc enim nulli inter 7 & 8 interjacent, ſed in remotiſſimis poteſtatibus quidam, quamuis perpauci, contingent.*

Harum poteſtatum, illa quæ æqualis erit dato numero, *ſi ita eueniat*, aut ſaltem quæ proximè minor erit dato numero nempe, 4096 ſatisfaciet problemati. Radix enim 8 vnde orta eſt, ea eſt quæ quæritur.

Sic ergo inſtitui poteſt & enuntiatio & generalis conſtructio.

Inuenire numerum qui in gradu propoſito conſtitutus maximus ſit eius gradus qui in dato numero contineatur.

Inueniantur ex tract. præced. *tot numeri continui, quot ſunt vnitates in exponente gradus propoſiti, quorum productus ſit maximus eius ſpeciei qui in dato numero contineatur. Et aſſumpto producto totidem continuorum ab vnitate, inueniatur eius radix gradus propoſiti,* ex poſtulato *ipſâ radix jungatur cum minimo continuorum inuentorum vnitate minuto*, hic erit minimus extremus.

Iam triangulus exponentis ordinis per ipſum exponentem diuiſus quemlibet præbeat quotientem, qui cum minimo continuorum inuentorum iungatur, hic erit maximus extremus.

Ambo hi extremi ac numeri inter eos interpoſiti in gradu propoſito conſtituantur.

Harum poteſtatum, ea quæ dato numero erit aut æqua-

[120]

lis aut proximè minor satisfacit problemati, Radix enim vnde orta est, radix quæsita est.

Horum demonstrationem, paratam quidem, sed prolixam etsi facilem, ac magis tædiosam quam vtilem supprimimus, ad illa, quæ plus afferunt fructus quam laboris, vergentes.

COMBINATIONES.

DEFINITIONES.

Combinationis nomen diuersè à diuersis vsurpatur, dicam itaque quo sensu intelligam.

Si exponatur multitudo quæuis rerum quarumlibet, ex quibus liceat aliquam multitudinem assumere v. g. si ex *quatuor* rebus per litteras, A, B, C, D, expressis, liceat *duas* quasuis ad libitum assumere. Singuli modi quibus possunt eligi *duæ* differentes ex his *quatuor* oblatis, vocantur hîc *combinationes*.

Experimento igitur patebit, *duas*, posse assumi inter *quatuor*, *sex* modis, potest enim assumi A & B, vel A & C, vel A & D, vel B & C, vel B & D, vel C & D.

Non constituo, A & A, inter modos eligendi duas non enim essent differentes, nec constituo A & B, & deinde B & A, tanquam differentes modos, ordine enim solummodo differunt, *ad ordinem autem non attendo*, ita vt vno verbo dixisse poteram, combinationes hîc considerari quæ noc mutato ordine procedunt.

Similiter experimento patebit, *tria* inter *quatuor*, *quatuor* modis assumi posse, nempe, A B C, A B D, A C D, B C D.

Sic & *quatuor* in *quatuor*, *vnico* modo assumi posse, nẽpe, A B C D.

His igitur verbis vtar.

1 In 4 combinatur 4 modis, seu combinationibus.
2 In 4 combinatur 6 modis, seu combinationibus.
3 In 4 combinatur 4 modis, seu comb.
4 In 4 combinatur 1 modo, seu comb.

Summa autem omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, est 15, summa enim combinationum 1 in 4, & 2 in 4, & 3 in 4, & 4 in 4, est, 15.

Lemma 1.

Numerus quilibet non combinatur in minore.

V. g. 4 non combinatur in 2.

Lemma 2.

1 in 1 combinatur 1 combinatione
2 in 2 combinatur 1 combinatione

3 in 3 combinatur 1 combinatione.

Et sic generaliter omnis numerus semel tantum in æquali combinatur.

Lemma 3.

1 in 1 combinatur, 1 combinatione
1 in 2 combinatur 2 combinationibus
1 in 3 combinatur 3 combinationibus.

Et generaliter vnitas in quouis numero toties combinatur quoties ipse continet vnitatem.

Lemma 4.

Si sint quatuor numeri, primus ad libitum, secundus vnitate major quam primus, tertius ad libitum modo non sit minor secundo, quartus vnitate major quam tertius; multitudo combinationum primi in tertio, plus multitudine combinationum secundi in tertio, æquatur multitudini combinationum secundi in quarto.

Sint quatuor numeri vt dictum est.

Primus ad libitum verbi gratia	1
Secundus vnitate major nempe	2
Tertius ad libitum modo non sit minor quam secundus v. g.	3
Quartus vnitate major quam tertius nempe	4

Dico multitudinem combinationum, 1, in 3, plus multitudine combinationum, 2, in 3, æquari multitudini combinationum, 2, in 4. *Quod vt paradigmate fiat euidentius.*

Assumantur *tres* characteres nempe, B, C, D, jam verò assumantur ijdem *tres* characteres & *vnus* præterea, A, B, C, D; Deinde assumantur combinationes *vnius* litteræ *in tribus*, B, C, D, nempe, B, C, D; Assumantur quoque omnes combinationes *duarum* litterarum in *tribus* B, C, D, nempe, BC, BD, CD; Denique assumantur omnes combinationes *duarum* litterarum in *quatuor*, A, B, C, D, nempe, AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Dico itaque, tot esse combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, quot sunt *duarum* in *tribus* B, C, D, & insuper quot *vnius* in *tribus* B, C, D.

Hoc manifestum est ex generatione combinationum, combinationes enim *duarum* in *quatuor* formantur partim, ex combinationibus *duarum* in *tribus*, partim, ex combinationibus *vnius* in *tribus*; quod ita euidens fiet.

Ex combinationibus *duarum* in *quatuor*, nempe AB, AC, AD, BC, BD, CD, quædam ſunt in quibus ipſa littera, A, vſurpatur, vt iſtæ AB, AC, AD; quædam quæ ipsâ A carent vt iſtæ, BC, BD, CD.

Porro, combinationes illæ, BC, BD, CD, *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, quæ ipſo A carent, conſtant ex reſiduis *tribus*, B, C, D, ſunt ergo combinationes *duarum* in *tribus* B, C, D, igitur combinationes *duarum* in *tribus* B, C, D, ſunt quoque combinationes *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, nempe illæ quæ carent ipſo A.

Illæ verò combinationes AB, AC, AD, *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, in quibus A vſurpatur, ſi ipſo A ſpolientur, relinquent reſiduas litteras, B, C, D, quæ ſunt ex *tribus* litteris B, C, D, ſuntque combinationes *vnius* litteræ in *tribus*, B, C, D, igitur combinationes *vnius* litteræ in *tribus* B, C, D, nempe B, C, D, aſcito A, efficiunt AB, AC, AD, quæ conſtituunt combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, in quibus, A, vſurpatur.

Igitur combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, formantur partim ex combinationibus *vnius* in *tribus*, B, C, D, partim ex combinationibus *duarum* in *tribus*, B, C, D; Quare multitudo primarum æquatur multitudini reliquarum, Q. E. D.

Eodem prorſus modo in reliquis oſtendetur exemplis verbi gratia

tot eſſe combin. numeri	29	in	40
quot ſunt comb. numeri	29	in	39
& inſuper quot ſunt comb. numeri	28	in	39.

Quatuor enim numeri, 28, 29, 39, 40, conditionem requiſitam habent.

Sic tot ſunt comb. numeri	16	in	56
quot ſunt comb. numeri	16	in	55
ac inſuper quot ſunt comb. numeri	15	in	55.

&c.

Lemma 5.

In omni triangulo Arith. ſumma cellularum ſeriei cujuſlibet, æquatur multitudini combinationum exponentis ſeriei, in exponente trianguli.

Sit triangulus quilibet v. g. *quartus*, G D λ. Dico ſummam cellularum ſeriei cujuſuis v. g. *ſecundæ* φ † ψ † θ æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis ſecundæ ſeriei* in numero 4 *exponente quarti trianguli*.

Sic Dico ſummam cellularum ſeriei v. g. *quintæ* trianguli v. g. *octaui* æquari multitudini combinationum numeri, 5 in numero 8, &c.

Quamuis infiniti ſint huius propoſitionis caſus, ſunt enim infiniti trianguli, breuiter tamen demonſtrabo, poſitis duobus aſſumptis.

Primo

[122]

Primo, quod ex ſe patet, *in primo triangulo eam proportionem contingere*, Summa enim cellularum vnicæ ſuæ ſeriei nempe numerus primæ cellulæ G ideſt vnitas, æquatur multitudini combinationum exponentis ſeriei, in exponente trianguli, hi enim exponentes ſunt vnitates. Vnitas verò in vnitate vnico modo *ex lemm.2.huius* combinatur.

Secundo, *Si ea proportio in aliquo triangulo contingat; Ideſt ſi ſumma cellularum vniuſcujuſcunque ſeriei trianguli cujuſdam, æquetur multitudini combinationum exponentis ſeriei in exponente trianguli Dico & eandem proportionem in triangulo proximè ſequenti contingere.*

His aſſumptis, facilè oſtendetur in ſingulis triangulis eam proportionem contingere, contingit enim in primo, *ex primò aſſumpto* immò & manifeſta quoque ipſa eſt in ſecundo triangulo, ergò *ex ſecundo aſſumpto* & in ſequenti triangulo contingit, quare & in ſequenti & in infinitum.

Totum ergo negotium in ſecundi aſſumpti demonſtratione conſiſtit, quod ita expedietur.

Sit triangulus quilibet v. g. *Tertius* in quo ſupponitur hæc proportio, id eſt, ſummam cellularum ſeriei *primæ* G + σ + π æquari multitudini combinationum numeri, 1, *exponentis ſeriei* in numero, 3, *exponente trianguli*. Summam verò cellularum *ſecundæ ſeriei* φ + ψ æquari multitudini combinationum numeri 2 *exponentis ſeriei* in numero 3 *exponente trianguli*, ſummam verò cellularum *tertiæ ſeriei*, nempe cellulam, A, æquari combinationibus numeri 3 *exponentis ſeriei* in 3 *exponente trianguli* Dico & eandem proportionem contingere & in ſequenti triangulo *quarto*, id eſt, ſummam cellularum v. g. *ſecundæ* ſeriei φ + ψ + θ, æquari multitudini combinationum numeri 2 *exponentis ſeriei* in numero 4 *exponente trianguli*.

Etenim φ + ψ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 3 *ex hypoth.* cellula verò θ æquatur *ex generatione trianguli arith.* cellulis G + σ + π hæ verò cellulæ æquantur *ex hyp.* multitudini combinationum numeri 1 in 3. Ergo cellulæ φ + ψ + θ æquantur multitudini combinationum numeri 2 in 3 plus multitudine combinationum numeri 1 in 3, hæ autem multitudines æquantur *ex quarto lemmate huius* multitudini combinationum numeri 2 in 4. Ergo ſumma cellularum φ + ψ + θ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 4. Q.E.D.

Idem Lemma 5. Problematicè enuntiatum.

Datis duobus numeris inæqualibus inuenire *in triangul. arith.* quot modis minor in majore combinetur.

Propoſiti ſint duo numeri v. g. 4 & 6, oportet reperire in triangulo arith. quot modis 4 combinetur in 6.

Prima methodus.

Summa cellularum *quartæ* ſeriei, *ſexti* trianguli, ſatisfacit, *ex præced. nempe cellulæ* D † E † F.

Hoc eſt numeri, 1 † 4 † 10, *ſeu* 15. *Ergo* 4 *in* 6, *combinatur* 15 *modis.*

Secunda methodus.

Cellula *quinta*, baſis *ſeptimæ* K, ſatisfacit, *illi numeri*, 5, 7, *ſunt proximè majores his*, 4, 6.

Etenim illa cellula nempe K, ſeu 15 æquatur ſummæ cellularum *quartæ* ſeriei *ſexti* trianguli D † E † F, ex generatione.

Monitum.

In baſi *ſeptimâ* ſunt ſeptem cellulæ nempe, V, Q, K, ρ, ξ, N, ζ, ex quibus *quinta* aſſumenda eſt; Poteſt autem ipſa duplici modo aſſumi, ſunt enim duæ baſis extremitates V, ζ, ſi ergo ab extremo, V inchoaueris, erit, V prima, Q ſecunda, K tertia, ρ quarta, ξ quinta quæſita. Si verò à ζ incipias, erit ζ prima, N ſecunda, ξ tertia, ρ quarta, K quinta quæſita, ſunt igitur duæ quæ poſſunt dici, *quintæ*; ſed quoniam ipſæ ſunt æquè ab extremis remotæ, ideoque reciprocæ, ſunt ipſæ eædem, quare indifferenter aſſumi alterutra poteſt, & ab alterutrâ baſis extremitate inchoari.

Monitum.

Iam ſatis patet, quam bene conueniant combinationes & triangulus arithmeticus, & ideò, proportiones inter ſeries, aut inter cellulas trianguli obſeruatas, ad combinationum rationes protendi, vt in ſequentibus videre eſt.

Prop. 1.

Duo quilibet numeri, æquè combinantur in eo quod amborum aggregatum eſt.

Sint duo numeri quilibet, 2, 4, quorum aggregatum 6 Dico, numerum 2 toties combinari in 6, quoties ipſe 4 in eodem 6 combinatur, *nempe ſingulos modis* 15.

Hoc nihil aliud eſt quam conſect. 4. *triang. arith. & poteſt hoc vno verbo demonſtrari*, cellulæ enim reciprocæ ſunt eædem. *Si verò ampliori demonſtratione egere videatur, hæc ſatisfaciet.*

Multitudo combinationum numeri 2 in 6 æquatur *ex* 5 *lem.* ſeriei *ſecundæ*, trianguli *ſexti* nempe cellulis φ † ψ † θ † R † S, ſeu cellulæ ξ; Sic multitudo quoque combinationum numeri 4 in *6* æquatur *ex eodem* ſeriei *quartæ* trianguli *ſexti*, Nempe cellulis D † E † F, ſeu cellulæ K; ipſa verò K, eſt reciproca ipſius ξ, ideoque ipſi æqualis, quare & multitudo combinationum numeri 2 in *6*, æquatur multitudini combinationum numeri 4 in *6*. Q. E. D.

Coroll.

Ergo omnis numerus toties combinatur in proximè majori, quot ſunt vnitates in ipſo majori.

Verbi gratia numerus *6*, in 7 combinatur *ſepties*, & 4 in 5 *quinquies*, &c. Ambo enim numeri, 1, *6*, æquè combinantur in aggregato eorum 7, *ex propr. hac*, 1. Sed, 1 in 7 combinatur ſepties, *ex lemm*. 3. Igitur 6 in 7 combinatur quoque ſepties.

Prop. 2.

Si duo numeri combinentur *in numero* quod amborum aggregatum eſt vnitate minuto; Multitudines combinationum erunt inter ſe, vt ipſi numeri reciprocè.

Hoc nihil aliud eſt quam conſect. 17. *triang. arith.*

Sint duo quilibet numeri, 3, 5, quorum ſumma 8, vnitate minuta eſt 7. Dico, multitudinem combinationum numeri 3 in 7, eſſe ad multitudinem combinationum numeri 5 in 7, vt, 5 ad 3.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 7, æquatur, *ex* 5. *lem. tertiæ* ſeriei, *ſeptimi* trianguli arith. nempe A † B † C † ω † ξ, ſeu 35. Multitudo autem combinationum numeri 5 in 7, æquatur, *ex eodem*, *quintæ* ſeriei, eiuſdem *ſeptimi* trianguli, nempe H † M † K, ſeu 21 in triangulo autem *ſeptimo*, ſeries *quinta* & *tertia* ſunt inter ſe vt 3 ad 5, *ex conſect*. 17. *triang. arith*. aggregatum enim exponentium ſerierum 5, 3 nempe 8, æquatur exponenti trianguli 7 vnitate aucto.

Prop. 3.

Si numerus combinetur, primò in numero qui ſui *duplus* eſt, deinde in ipſomet numero *duplo* vnitate minuto, prima combinationum multitudo, ſecundæ dupla erit.

Hoc nihil aliud eſt quam conſect. 10. *triang. arith*.

Sit numerus quilibet 3, cuius duplus, *6*, qui vnitate minutus eſt 5. Dico multitudinem combinationum numeri 3 in *6*, duplam eſſe multitudinis combinationum numeri 3 in 5.

Poſſem vno verbo dicere omnis enim cellula diuidentis dupla eſt præcedentis corradicalis *ſic autem demonſtro*.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur *ex* 5. *lem*, cellulæ 4, basis 7; nempe ρ, *seu* 20, quæ quidem ρ, medium basis occupat locum, *quod inde procedit quod* 3 *sit dimidium* 6, *vnde fit vt* 4 *proximè major quam* 3, *medium occupet locum in numero* 7 *proximè majori quam* 6. Igitur ipsa cellula *quarta*, ρ, est in diuidente, quare dupla est cellulæ, F, seu ω *ex* 10. *consect. triang. arith.* quæ quidem, ω, est quoque *quarta* cellula basis *sextæ*, ideóque, *ex lemm.* 5, ipsa ω seu F æquatur multitudini combinationum numeri 3 in 5, ergo multitudo comb. 3 in 6 dupla est multitudinis comb. 3 in 5. Q. E. D.

Prop. 4.

Si sint duo numeri proximi, & alius quilibet in vtroque combinetur, multitudo combinationum quæ fiunt in majore, erit ad alteram multitudinem, vt major numerus, ad ipsummet majorem dempto eo qui combinatus est.

Sint duo numeri vnitate differentes, 5, 6, & alius quilibet 2 combinetur in 5, & deinde in 6; Dico multitudinem combinationum ipsius 2 in 6, esse ad multitudinem combinationum ipsius 2 in 5, vt 6, ad 6−2.

Hoc ex 13 *consect. triang. arith. est manifestum & sic ostendetur.*

Multitudo, enim, combinationum ipsius 2 in 6, æquatur summæ cellularum seriei 2, trianguli 6, nempe φ † ψ † θ † R † S, ex lemm. 5. hoc est cellulæ ξ, seu 15. Sed, ex eodem, multitudo combinationum eiusdem 2 in 5, æquatur summæ cellularum seriei 2, trianguli 5, nempe φ † ψ † θ † R, seu cellulæ ω, seu 10; est autem cellula ξ ad ω, vt 6 ad 4, hoc est vt 6 ad 6−2, ex 13 consect. triang. arith.

Prop. 5.

Si duo numeri proximi, in alio quolibet combinentur, erit multitudo combinationum minoris, ad alteram, vt major numerus combinatus, ad numerum in quo ambo combinati sunt dempto minore numero combinato.

Sint duo quilibet numeri proximi, 3, 4, & alius quilibet 6; Dico multitudinem combinationum *minoris* 3 in 6, esse ad multitudinem combinationum *majoris* 4 in 6, vt 4, ad 6−3.

Hæc cum 11. *consect. tr. arith. conuenit & sic ostendetur.*

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur, ex lemm. 5. Summæ cellularum seriei 3, trianguli 6, nempe, A † B † C † ω, seu cellulæ ρ, seu 20. Multitudo verò combinationum numeri 4 in 6, æquatur, ex eodem, summæ cellularum seriei 4, trianguli 6, nempe D † E † F, seu cellulæ K, seu 15. est autem ρ ad K, vt 4 ad 3, seu vt 4. ad 6—3. ex consect. 11. tr. arith.

Prop. 6.

Si sint duo numeri quilibet quorum minor in majore combinetur, sint autem & alij duo his proximè majores quorum minor in majore quoque combinetur, erunt multitudines combinationum inter se, vt hi ambo vltimi numeri.

Sint duo quilibet numeri, 2, 4, alij verò his proximè majores, 3, 5; Dico multitudinem combinationum numeri 2 in 4, esse ad multitudinem combinationum numeri 3 in 5, vt 3, ad 5.

Consect. 12, *triang. arith. hanc continet & sic demonstratur.*

Multitudo enim combinationum ipsius 2 in 4, æquatur, ex lemm. 5, summæ cellularum seriei 2, trianguli 4, nempe φ † ψ † θ, seu cellulæ C, seu 6; Multitudo verò combinationum numeri 3 in 5, æquatur, ex eodem, summæ cellularum seriei 3, trianguli 5, nempe A † B † C, seu cellulæ F, seu 10; Est autem C ad F, vt 3 ad 5, ex 12 consect. triang. arith.

Lemma 6.

Summa omnium cellularum basis triang. cuiuslibet arithmetici vnitate minuta, æquatur summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero qui proximè minor est quam exponens basis.

Sit triangulus quilibet arithmeticus v. g. *quintus* G H μ, Dico summam cellularum suæ basis H † E † C † R † μ, minus vnitate, *seu minus vnâ ex extremis* H *vel* μ æquari summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero 4 qui proximè minor est quam exponens basis, 5. Id est. Dico summam cellularum R † C † E † H. *Supprimo enim extremam* μ, id est 4 † 6 † 4 † 1, seu 15; æquari multitudini combinationum numeri 1 in 4, nempe 4; Plus multitudine combinationum numeri 2 in 4, nempe 6; Plus multitudine combinationum numeri 3 in 4, nempe 4; Plus multitudine combinationum numeri 4 in 4, nempe 1. *Quæ quidem sunt omnes combinationes quæ fieri possunt in 4, superiores enim numeri*, 5, 6, 7, *&c. non combinantur in numero* 4; *major enim numerus in minore non combinatur.*

Multitudo enim combinationum numeri 1 in 4, æquatur, ex 5. lem. cellulæ 2, basis 5, nempe R, seu 4. Multitudo verò combinationum numeri 2 in 4, æquatur cellulæ 3, basis 5, nempe C, seu 6. Multitudo quoque combinationum numeri 3 in 4, æquatur cellulæ 4, basis 5, nempe E, seu 4. Multitudo denique combinationum numeri 4 in 4, æquatur cellulæ 5, basis 5, nempe H, seu 1. Igitur summa cellularum basis *quintæ* demptâ extremâ seu vnitate, æquatur summæ omnium combinationum quæ possunt fieri in 4.

Prop. 7.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet vnitate aucta, est numerus progressionis duplæ quæ ab vnitate sumit exordium, quippe ille cuius exponens est numerus proximè major quam datus.

Sit numerus quilibet v. g. 4. Dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4 nempe 15 vnitate auctam nempe 16, esse numerum *quintum* (nempe proximè majorem quam *quartum*) progressionis duplæ quæ ab vnitate sumit exordium.

Hoc nihil aliud est quam 7 consect. triang. arith. & sic vno verbo demonstrari posset, omnis enim basis est numerus progressionis duplæ, *sic tamen demonstro*.

Summa enim combinationum omnium quæ fieri possunt in 4 vnitate aucta, æquatur, ex lem. 6. summæ cellularum basis *quintæ*, ipsa verò basis est *quintus* numerus progressionis duplæ quæ ab vnitate sumit exordium, ex 7. consect. triang. arith.

Prop. 8.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet vnitate aucta, dupla est summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero proximè minori vnitate auctæ.

Hoc conuenit cum 6 consect. triang. arith. nempe omnis basis dupla est præcedentis, *sic autem ostendemus*.

Sint duo numeri proximi 4, 5, dico summam combinationum quæ fieri possunt in 5 nempe 31 vnitate auctam nempe 32, esse duplam summæ combinationum quæ fieri possunt in 4 nempe 15 vnitate auctæ nempe 16.

Summa enim combinationum quæ fieri possunt in 5 vnitate aucta, æquatur, ex præced. *sexto* numero progressionis duplæ. Summa verò combinationum quæ fieri possunt in 4 vnitate aucta, æquatur, ex eâdem, *quinto* numero progressionis duplæ. *Sextus* autem numerus progressionis duplæ, duplus est proximè præcedentis nempe *quinti*.

Prop. 9.

Summa omnium combinationum quæ fieri poſſunt in quouis numero vnitate minuta, dupla eſt ſummæ combinationum quæ fieri poſſunt in numero proximè minori.

Hæc cum præcedente omnino conuenit.

Sint duo numeri proximi 4, 5, Dico ſummam omnium combinationum quæ fieri poſſunt in 5, *nempe* 31, vnitate minutam *nempe* 30, eſſe duplam omnium combinationum quæ fieri poſſunt in 4 *nempe* 15.

Etenim *ex præced.* ſumma combinat. quæ fiunt in 5 vnitate aucta, dupla eſt ſummæ combinationum quæ fiunt in 4 vnitate auctæ, ſi ergo ex *minori* ſummâ auferatur vnitas, & ex *duplâ ſummâ* auferantur duæ vnitates, reliquum ſummæ *duplæ* nempe *ſumma combinationum quæ fiunt in 5 vnitate minuta*, remanebit *dupla* reſidui alterius ſummæ nempe *ſummæ combinationum quæ fiunt in 4.*

Prop. 10.

Summa omnium combinationum quæ fieri poſſunt in quolibet numero minuta ipſomet numero, æquatur ſummæ omnium combinationum quæ fieri poſſunt in ſingulis numeris propoſito minoribus.

Hæc cum 8 *conſect. tr. arith. concurrit quæ ſic habet*, baſis quælibet vnitate minuta, æquatur ſummæ omnium præcedentium. *Sic autem oſtendo.*

Sit numerus quilibet 5. Dico ſummam omnium combinationum quæ poſſunt fieri in 5 nempe 31 ipſo 5 minutam nempe 26, æquari ſummæ omnium combinationum quæ poſſunt fieri in 4 nempe 15; Plus ſummâ omnium quæ poſſunt fieri in 3 nempe 7; Plus ſummâ omnium quæ poſſunt fieri in 2 nempe 3; Plus eâ quæ poteſt fieri in 1 nempe 1, quarum aggregatus eſt 26.

Etenim, Proprium numerorum huius progreſſionis duplæ illud eſt, vt quilibet ex ipſis v. g. ſextus 32, exponente ſuo minutus nempe 6, id eſt 26, æquetur ſummæ inferiorum numerorum huius progreſſionis, nempe 16 † 8 † 4 † 2 † 1 vnitate minutorum nempe, 15 † 7 † 3 † 1 † 0 nempe, 26. Vnde facilis eſt demonſtratio huius propoſitionis.

Problema 1.

Dato quouis numero, inuenire ſummam omnium combinationum quæ in ipſo fieri poſſunt. *Abſque triang. arith.*

Numerus progressionis duplæ quæ ab vnitate sumit exordium cuius exponens proximè major est quam numerus datus, satisfaciet problemati, modò vnitate minuatur.

Sit numerus datus v. g. 5. quæritur summa omnium combinationum quæ in 5 fieri possunt.

Numerus *sextus* progressionis duplæ quæ ab vnitate incipit nempe 32 vnitate minutus nempe 31 satisfacit, ex lem. 6. ergo possunt fieri 31 combinationes in numero 5.

Problema 2.

Datis duobus numeris inęqualibus, inuenire quot modis minor in majore combinetur. *Absque triangulo arith.*

Hoc est propriè vltimum Problema tractatus triang. arith. quod sic resoluo.

Productus numerorum qui præcedunt differentiam datorum vnitate auctam, diuidat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit minor datorum vnitate auctus, quotiens est quæsitus.

Sint dati numeri 2, 6; Oportet inuenire quotmodis 2 combinetur in 6.

Assumatur eorum differentia 4 quæ vnitate aucta est 5. Iam assumantur omnes numeri qui præcedunt ipsum 5, nempe, 1, 2, 3, 4, quorum productus sit 24. Assumantur totidem numeri continui quorum primus sit 3, *nempe proximè major quam 2 qui minor est ex ambobus datis*, nempe, 3, 4, 5, 6, quorum productus 360, diuidatur per præcedentem productum 24. Quotiens 15 est numerus quæsitus. *Ita vt numerus 2, combinetur in 6, modis 15 differentibus.*

Nec difficilis demonstratio. Si enim quæratur in triangulo arithmetico quot modis 2 combinetur in 6, assumenda est cellula 3, basis 7, ex lemm. 5, nempe cellula ξ, & ipsius numerus exponet multitudinem combinationum numeri 2 in 6. Vt autem inueniatur numerus cellulæ ξ cuius radix est 5, & exponens seriei 3, oportet *ex probl. triang. arith. vt productus numerorum qui præcedunt 5, diuidat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit 3, & quotiens erit numerus cellulæ ξ*; Sed idem diuisor ac idem diuidendus in constructione huius propositus est, quare & eundem quotientem sortita est diuisio, ergò in hâc constructionè repertus est numerus cellulæ ξ, quare & exponens multitudinis combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. F. E. D.

Monitum,

Monitum.

Hoc problemate tractatum hunc abſoluere conſtitueram, non tamen omninò ſine moleſtiâ, cùm multa alia parata habeam, ſed vbi tanta vbertas vi moderanda eſt fames, his ergo pauca hæc ſubijciam.

Eruditiſſimus ac mihi chariſſimus. D. D. De Ganieres, circa combinationes, aſſiduo ac perutili labore, more ſuo, incumbens, ac indigens facili conſtructione ad inueniendum quoties numerus datus in alio dato combinetur, hanc ipſe ſibi praxim inſtituit.

Datis numeris v. g. 2, 6, inuenire quot modis 2, combinetur in 6.

Aſſumatur inquit *progreſſio* duorum *terminorum* quia minor numerus eſt 2 *inchoando à majore 6, ac retrogrediendo, ſeu detrahendo vnitatem ex vnoquoque termino, hoc modo, 6, 5; Deinde aſſumatur altera progreſſio inchoando ab ipſo minore 2 ac ſimiliter retrogrediendo hoc modo 2, 1. Multiplicentur inuicem numeri primæ progreſſionis, 6,5, ſitque productus 30. Multiplicentur & numeri ſecundæ progreſſionis, 2, 1, ſitque productus 2. Diuidatur major productus per minorem, Quotiens eſt quæſitus.*

Excellentem hanc ſolutionem ipſe mihi oſtendit, ac etiam demonſtrandam propoſuit, ipſam ego ſanè miratus ſum, ſed difficultate territus vix opus ſuſcepi, & ipſi authori relinquendum exiſtimaui; Attamen trianguli arithmetici auxilio, ſic procliuis facta eſt via.

In 5 lemm. huius, oſtendi numerum cellulæ ξ, exponere multitudinem combinationum numeri 2 in 6, quare ipſius reciproca cellula K eundem numerum continebit. *Verùm, cellula ipſa K eſt quotiens diuiſionis in quâ productus numerorum* 1, 2, *qui præcedunt* 3 *radicem cellulæ* K, *diuidit productum totidem numerorum continuorum quorum primus eſt* 5 *exponens ſeriei cellulæ* K, *nempe numerorum* 5, 6. Sed ille diuiſor ac diuidendus ſunt ijdem ac illi qui in conſtructione *amici* ſunt propoſiti, igitur eundem quotientem ſortitur diuiſio, quare ipſe exponit multitudinem combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. D.

Hac demonſtratione aſſecutâ, jam reliqua quæ inuitus ſupprimebam libenter omitto, adeò dulce eſt amicorum memorari.

POTESTATVM NVMERICARVM SVMMA.

MONITVM.

Datis, ab vnitate, quotcunque numeris continuis, v. g. 1, 2, 3, 4, inuenire summam quadratorum eorum, nempe 1 † 4 † 9 † 16, id est 30, tradiderunt veteres; imo etiam & summam cuborum eorundem, ad reliquas verò potestates non protraxerunt suas methodos, his solummodò gradibus proprias. Hîc autem exhibetur, non solùm summa quadratorum, & cuborum, sed & quadrato-quadratorum, & reliquarum in infinitum potestatum. Et non solum à radicibus ab vnitate continuis, sed à quolibet numero initium sumentibus, verbi gratia numerorum 8, 9, 10, &c. Et non solum numerorum qui progressione naturali procedunt, sed & eorum omnium qui progressione verbi gratia cujus differentia est, 2, aut 3, aut 4, aut alius quilibet numerus, formantur, vt istorum, 1, 3, 5, 7, &c. vel horum, 2, 4, 6, 8, qui per incrementum binarij augentur, aut horum, 1, 4, 7, &c qui per incrementum ternarij, & sic de cæteris, sed & quod amplius est *à quolibet numero exordium sumat illa progressio,* siue *incipiat ab vnitate, vt isti, 1, 4, 7, 10, 13, &c. qui sunt eius progressionis quæ per incrementum ternarij procedit, & ab vnitate sumit exordium;* siuè *ab aliquo huius progressionis numero incipiat vt isti, 7, 10, 13, 16, 19,* si-

[127]

ue quod vltimum eſt, *à numero qui non ſit eius progreſſionis, vt iſti* 5, 8, 11, 14, *quorum progreſſio per ternarij differentiam procedit, & à numero* 5, ipſi progreſſioni extraneo, *exordium ſumit. Et* quod ſanè fœliciter inuentum eſt, *tam multi differentes caſus*, vnica ac generaliſſima *reſoluit* methodus; *adeò* ſimplex, *vt abſque litterarum auxilio, quibus difficiliores egent enuntiationes, paucis lineis contineatur. Vt ad finem problematis ſequentis patebit.*

Definitio.

Si binomium, cuius alterum nomen ſit A, alterum verò numerus quilibet vt 3, nempe A † 3, ad quamlibet conſtituatur poteſtatem vt ad quartum gradum, *cujus hæc ſit expoſitio*,

A^4 † 12, A^3 † 54, A^2 † 108, A † 81.

Ipſi numeri, 12, 54, 108, per quos ipſe A multiplicatur in ſingulis gradibus, quique partim ex numeris figuratis, partim ex numero 3, qui binomij eſt ſecundum nomen, formantur, vocabuntur *Coefficientes* ipſius A.

Erit ergo *in hoc exemplo*, 12 *coefficiens* A cubi, & 54 *coefficiens* A quadrati, & 108 *coefficiens* A radicis.

Numerus verò 81 *numerus abſolutus* dicetur.

Lemma.

Sit radix quælibet, 14; altera verò ſit binomium 14 † 3 cuius primum nomen ſit 14, alterum verò alius quilibet numerus 3, ita vt harum radicum, 14, & 14 † 3, differentia ſit 3. Conſtituantur ipſæ in quolibet gradu vt in quarto, ergò quartus gradus radicis 14 eſt 14^4. Quartus verò gradus binomij, 14 † 3, eſt,

14^4 † 12, 14^3 † 54, 14^2 † 108, 14 † 81

Cujus quidem binomij primum nomen 14, *eoſdem coefficientes ſortitur in ſingulis gradibus, quos A ſortitus eſt in ſimilibus gradibus in expoſitione eiuſdem gradus binomij* A † 3, *quod rationi conſentaneum eſt*, harum verò poteſtatum, nempe huius 14^4 & huius 14^4 † 12, 14^3 † 54, 14^2 † 108, 14 † 81, differentia eſt, 12, 14^3 † 54, 14^2 † 108, 14 † 81 quæ quidem conſtat Primò, ex radice 14 conſtitutâ in ſingulis gradibus propoſito gradui *quarto* inferioribus, nempe in *tertio* in *ſecundo* & in *primo*, & in vnoquoque multiplicatâ per *coefficientes* quos A ſortitur in ſimilibus gradibus, in expoſitione eiuſdem gradus binomij A † 3.

Deinde, ex ipſo numero, 3 *qui eſt differentia radicum* conſtituto in propoſito *quarto* gradu, *numerus enim abſolutus* 81 *eſt quartus gradus radicis* 3. Hinc igitur elicietur *Canon iſte.*

Duarum ſimilium poteſtatum differentia, *æquatur*, differentiæ radicum conſtitutæ in eodem gradu in quo ſunt poteſtates propoſitæ; *Plus* minori radice conſtitutâ in ſingulis gradibus propoſito gradui inferioribus ac in vnoquoque multiplicatâ per coefficientes quos A ſortiretur in ſimilibus gradibus, ſi binomium cuius primum nomen eſſet A, alterum verò eſſet differentia radicum, conſtitueretur in eadem poteſtate propoſita.

Sic ergo differentia inter 14^4 & 11^4, erit 12, 11^3, † 54, 11^2, † 108, 11, † 81.

Differentia enim radicum eſt 3.

Ec ſic de cæteris.

Ad ſummam Poteſtatum cujuſlibet progreſſionis inueniendam vnica ac generalis methodus.

DAtis quotcunque numeris, in qualibet progreſſione, à quouis numero inchoante, inuenire quarumuis poteſtatum eorum ſummam.

Quilibet numerus, 5, *ſit initium progreſſionis quæ per incrementum cujuſuis numeri verbi gratia* ternarii *procedat*, *& in eâ progreſſione dati ſint quotlibet numeri verbi gratia iſti*, 5, 8, 11, 14, *qui omnes in quâcunque poteſtate conſtituantur vt in tertio gradu ſeu cubo. Oportet inuenire ſummam horum cuborum*, *nempe*, $5,^3$ † $8,^3$ † $11,^3$ † $14,^3$

Cubi illi ſunt 125 † 512 † 1331 † 2744, quorum ſumma eſt 4712 quæ quæritur & ſic inuenitur.

Exponatur binomium A † 3 *cuius primum nomen ſit A, alterum verò ſit numerus* 3 *qui eſt differentia progreſſionis.*

Conſtituatur binomium hoc A † 3 *in gradu* quarto *qui proximè superior est proposito* tertio *sitque hæc eius expositio*,

A^4 † 12, A^3 † 54, A^2 † 108 A † 81

Iam assumatur numerus 17 *qui in progressione propositâ proximè sequitur vltimum progressionis terminum datum* 14. *Et constituto ipso* 17 *in eodem gradu* quarto *nempe*, 83521, *auferantur ab eo*, *hæc*

Primò, *summa numerorum propositorum*, 5 † 8 † 11 † 14, *nempe* 38 *multiplicata per numerum* 108, *qui est coefficiens ipsius A radicis.*

Secundò, *summa quadratorum eorundem numerorum*, 5, 8, 11, 14, *multiplicata per numerum* 54 *qui est coefficiens A*, *quadrati.*

Et sic deinceps procedendum esset si superessent gradus alij inferiores ipsi gradui tertio qui propositus est.

Deinde, *auferatur* primus terminus *propositus* 5 *in* quarto *gradu constitutus.*

Denique, *auferatur* numerus 3 qui est differentia progressionis *in eodem gradu* quarto *constitutus*, *ac* toties *sumptus*, quot *sunt numeri propositi*, *nempe* quater *in hoc exemplo.*

Residuum, *erit multiplex summæ quæsitæ*, *eamque* toties *continebit*, quoties *numerus* 12 *qui est coefficiens ipsius A cubi*, *seu A in gradu* tertio *proposito continet vnitatem.*

Si ergo ad *praxim* methodus reducatur, numerus 17 constituendus est in 4 gradu, nempe 83521, & ab eo hæc auferenda sunt.

Primò, summa numerorum propositorum, 5 † 8 † 11 † 14 nempe 38, multiplicata per 108, vnde oritur productus 4104.

Deinde, summa quadratorum numerorum propositorum id est, $5,^2$ † $8,^2$ † $11,^2$ † $14,^2$ nempe, 25 † 64 † 121 † 196, quorum summa est 406, quæ multiplicata per 54 efficit 21924.

Deinceps auferendus est numerus 5 in *quarto* gradu nempe, 625.

Denique auferendus est numerus 3 in *quarto* gradu nempe 81, *quater* sumptus nempe 324. Numeri ergo auferendi, illi sunt, 4104, 21924, 625, 324; quorum summa est, 26977, quæ ablata à numero, 83521, superest 56544.

Hoc ergo *residuum* continebit summam quæsitam nempe, 4712, multiplicatam per, 12; & profectò, 4712 per 12 multiplicata efficit, 56544.

Paradigma facilè est construere, hoc autem sic demonstrabitur.

Etenim, numerus 17 in 4 gradu constitutus qui quidem sic exprimitur, 17^4 æquatur, $17^4 — 14^4 \dagger 14^4 — 11^4 \dagger 11^4 — 8^4 \dagger 8^4 — 5^4 \dagger 5^4$.

Solus enim 17^4 signum affirmationis solum sortitur reliqui autem affirmantur ac negantur.

Sed differentia radicum, 17, 14, est 3, eademque est differentia radicum 14, 11, eademque radicum 11, 8, ac etiam radicum, 8, 5. Igitur ex præmisso lemmate.

$17^4 — 14^4$ æquatur $12, 14^3 \dagger 54, 14^2 \dagger 108, 14 \dagger 81$
Sic $14^4 — 11^4$ æquatur $12, 11^3 \dagger 54, 11^2 \dagger 108, 11 \dagger 81$
Sic $11^4 — 8^4$ æquatur $12, 8^3 \dagger 54, 8^2 \dagger 108, 8 \dagger 81$
Sic $8^4 — 5^4$ æquatur $12, 5^3 \dagger 54, 5^2 \dagger 108, 5 \dagger 81$

Non interpretor 5^4.

Igitur 17^4 æquatur his omnibus.

$12, 14^3 \dagger 54, 14^2 \dagger 108, 14 \dagger 81$
$\dagger 12, 11^3 \dagger 54, 11^2 \dagger 108, 11 \dagger 81$
$\dagger 12, 8^3 \dagger 54, 8^2 \dagger 108, 8 \dagger 81$
$\dagger 12, 5^3 \dagger 54, 5^2 \dagger 108, 5 \dagger 81$
$\dagger 5^4$.

Hoc est *mutato ordine*. 17^4 æquatur his

$5 \dagger 8 \dagger 11 \dagger 14$ multiplicatis per 108
$\dagger 5^2 \dagger 8^2 \dagger 11^2 \dagger 14^2$ multiplicatis per 54
$\dagger 5^3 \dagger 8^3 \dagger 11^3 \dagger 14^3$ multiplicatis per 12
$\dagger 81 \dagger 81 \dagger 81 \dagger 81$
$\dagger 5^4$.

Ablatis vndique his

$5 \dagger 8 \dagger 11 \dagger 14$ multiplicatis per 108
$\dagger 5^2 \dagger 8^2 \dagger 11^2 \dagger 14^2$ multiplicatis per 54
$\dagger 81 \dagger 81 \dagger 81 \dagger 81$
$\dagger 5^4$.

Remanet 17^4 minus his nempe,

$— 5 — 8 — 11 — 14$ multiplicatis per 108
$— 5^2 — 8^2 — 11^2 — 14^2$ multiplicatis per 54
$— 81 — 81 — 81 — 81$
$— 5^4$.

æqualis $5^3 \dagger 8^3 \dagger 11^3 \dagger 14^3$ multiplicatis per 12.

Q. E. D.

Sic ergo poteſt inſtitui enuntiatio & generalis conſtructio.

Summa Poteſtatum.

DAtis quotcunque numeris, in quâlibet progreſſione, à quouis numero initum ſumente, inuenire ſummam quarumuis poteſtatum eorum.

Exponatur binomium, cuius primum nomen ſit A, alterum verò ſit numerus qui differentia progreſſionis eſt, & conſtituatur hoc binomium in gradu qui proximè ſuperior *eſt gradui propoſito, & in expoſitione poteſtatis eius notentur* coefficientes *quos A ſortitur in ſingulis gradibus.*

Conſtituatur & in eodem gradu ſuperiori numerus qui *in eâdem progreſſione propoſitâ* proximè ſequitur vltimum *progreſſionis terminum propoſitum. Et ab eo* auferantur *hæc.*

Primò, primus terminus *progreſſionis datus, ſeu minimus numerus datorum in eodem* ſuperiori gradu *conſtitutus.*

Secundò, *numerus qui* differentia eſt progreſſionis *in eodem* ſuperiori gradu *conſtitutus, ac* toties *ſumptus* quot *ſunt termini dati.*

Tertiò, *auferantur* ſinguli numeri *dati, in* ſingulis gradibus *propoſito gradui* inferioribus *conſtituti, ac in vnoquoque gradu multiplicati per* jam notatos coefficientes *quos A ſortitur in ijſdem gradibus in expoſitione huius* ſuperioris *gradus binomij primò aſſumpti.*

Reliquum *eſt multiplex ſummæ quæſitæ, eamque* toties *continet* quoties coefficiens *quem A in gradu* propoſito *ſortitur continet vnitatem.*

Monitum.

Praxes jam particulares ſibi quiſque pro genio ſuppeditabit, verbi gratia. Si quæris ſummam quotlibet numerorum progreſſionis naturalis à quolibet inchoantis hic, ex methodo generali, elicietur *Canon.*

In progreſſione naturali à quouis numero inchoante, differentia inter quadratum minimi termini & quadratum numeri qui proximè major eſt vltimo termino, minuta numero qui exponit multitudinem, dupla eſt aggregati ex omnibus.

Sint quotlibet numeri naturali progreſſione continui, quorum primus ſit ad libitum, v.g. *quatuor* iſti 5, 6, 7, 8. Dico. $9^2 - 5^2 - 4$ æquari $5 + 9 + 7 + 8$.

Similes canones & reliquarum poteſtatum ſummis inueniendis & reliquis progreſſionibus facilè aptabuntur, quos quiſque ſibi comparet.

Concluſio.

Quantùm hæc notitia ad ſpatiorum curuilineorum dimenſiones conferat, ſatis norunt qui in indiuiſibilium doctrinâ tantiſper verſati ſunt. Omnes enim omnium generum Parabolæ illicò quadrantur, & alia innumera facillimè menſurantur.

Si ergo illa, quæ hac methodo in numeris reperimus, ad quantitatem continuam applicare libet, hi poſſunt inſtitui canones.

Canones ad naturalem progreſſionem quæ ab vnitate ſumit exordium.

Summa linearum, eſt ad quadratum maximæ, vt 1 ad 2
Summa quadratorum eſt ad cubum maximæ vt 1 ad 3
Summa cuborum eſt ad 4 gradum maximæ vt 1 ad 4.

Canon generalis ad progreſſionem naturalem quæ ab vnitate ſumit exordium.

Summa omnium in quolibet gradu, eſt ad maximam in proximè ſuperiori gradu, vt vnitas, ad exponentem ſuperioris gradus.

Non de Reliquis diſſeram quia hîc locus non eſt, hæc obiter notaui, reliqua

reliqua facili negotio penetrantur, eo posito principio, *in continuâ quantite, quotlibet quantitates cujusuis gereris quantitati superioris generis additas; nihil ei superaddere.* Sic puncta lineis, lineæ superficiebus; superficies solidis, nihil adijciunt, seu, *vt numericis, in numerico tractatu, verbis vtar,* Radices quadratis, quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis, &c. nihil apponunt. Quare, inferiores gradus nullius valoris existentes, non considerandi sunt. Hæc, quæ indiuisibilium studiosis familiaria sunt, subjungere placuit, vt nunquam satis mirata connexio, quâ ea etiam quæ remotissima videntur, in vnum addicat vnitatis amatrix natura, ex hoc exemplo prodeat, in quo, *quantitatis continuæ dimensionem,* cum *numericarum potestatum summâ*, conjunctam contemplari licet.

DE NVMERIS MVLTIPLICIBVS.

Ex ſola characterum numericorum additione agnoſcendis.

MONITVM.

NIhil tritius eſt apud arithmeticos, quàm numeros, numeri 9 multiplices, conſtare characteribus, quorum aggregatum eſt quoque ipſius 9 multiplex. *Si* enim ipſius v. g. dupli, 18, characteres numericos, 1, † 8, jungas, aggregatum erit 9. Ita vt ex ſolâ additione characterum numericorum numeri cujuſlibet, liceat agnoſcere, vtrum ſit ipſius 9 multiplex. v. g. ſi numeri, 1719 characteres numericos jungas, 1 † 7 † 1 † 9, aggregatum 18 eſt ipſius 9 multiplex, vnde certò colligitur „ & ipſum 1719 eiuſdem 9 eſſe multiplicem, vulgata ſanè illa obſeruatio eſt, verùm eius demonſtratio à nemine quod ſciam data eſt, nec ipſa notio vlteriùs prouecta. In hoc autem Tractatulo non ſolùm iſtius ſed & variarum aliarum obſeruationum generaliſſimam demonſtrationem dedi, ac methodum vniuerſalem agnoſcendi ex ſolâ additione characterum numericorum propoſiti cujuſuis numeri, vtrum ille ſit alterius propoſiti numeri multiplex; Et non ſolùm in progreſſione denariâ, quâ numeratio noſtra procedit, (denaria enim ex inſtituto hominum, non ex neceſſitate naturæ vt vulgus arbitratur) & ſanè ſatis inepte poſita eſt. Sed in quâcunque progreſſione inſtituatur numeratio, non fallet hic tradita methodus, vt in paucis mox videbitur paginis.

Propoſitio vnica.

Agnoſcere ex ſola additione characterum dati cujuſlibet numeri, an ipſe ſit alterius dati numeri multiplex.

Vt hæc ſolutio fiat generalis, litteris vtemur vice numerorum. Sit ergo diuiſor, numerus quilibet expreſſus per litteram A; diuidendus autem, numerus expressus per litteras T V N M, quarum vltima M exprimit numerum quemlibet in vnitatum columnâ collocatum; N, verò, numerum quemlibet in denariorum columnâ; V, numerum quemlibet in columnâ centenariorum; T, autem numerum quemlibet in columnâ millenariorum, & sic deinceps in infinitum: ita vt si litteras in numeros conuertere velis, assumere possis loco ipsius, M, quemlibet ex nouem primis characteribus verbi gratia 4, loco N quemlibet numerum vt 3, loco V quemlibet numerum vt, 5; & loco T, quemlibet numerum vt 6; & collocando singulos illos characteres numericos in propria columna; prout collocatæ sunt litteræ quæ illos exprimunt, proueniet hic numerus, 6 5 3 4, diuisor autem A erit numerus quilibet vt 7. Missis autem peculiaribus his exemplis generali ista enunciatione omnia amplectimur.

Dato quocumque diuidendo T V N M, & quocumque diuisore A, agnoscere ex sola additione characterum numericorum T,V,N,M, vtrum ipse numerus T V N M exactè diuidatur per ipsum numerum A.

* Ponantur seorsim numeri serie naturali continui 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, & cæt. à dextrâ ad sinistram sic.

& cæt.	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
& cæt.	K	I	H	G	F	E	D	C	B	1

Iam ipsi primo numero, 1, subscribatur vnitas.

Ex ipsa vnitate *decies* sumpta, seu ex 10 auferatur A quoties fieri poterit, & supersit B qui sub 2 subscribatur.

Ex B *decies* sumpta seu ex 10 B, auferatur A quoties poterit, & supersit C qui ipsi 3 subscribatur.

Ex 10 C, auferatur A quoties poterit & supersit D qui ipsi 4 subscribatur.

Ex 10 D, auferatur A &c. in continuum.

Nunc sumatur vltimus character diuidendi M, qui quidem & primus est à dextra ad sinistram, scribaturque seorsim semel; *Primo enim numero* 1, *subjacet vnitas*.

Iam, sumatur secundus character N & toties repetatur quot sunt vnitates in B, *qui secundo numero subjacet*, hoc est multiplicetur N per B & sub M ponatur productus.

M
N in B
V in C
T in D

Iam sumatur tertius character V, & toties repetatur quot sunt vnitates in C, *sub tertio numero subjecto*, seu multiplicetur V per C & productus sub primis ponatur.

Sic denique multiplicetur quartus T per D, & sub aliis scribatur.

Et sic in infinitum.

Dico prout summa horum numerorum, M, † N in B, † V in C; † T in D, est ipsius A multiplex aut non, & quoque ipsum numerum T V N M, esse eiusdem multiplicem, vel non.

Etenim si propositus diuidendus *vnicum* haberet characterem M ſanè prout ipſe eſſet multiplex ipſius A, numerus quoque M eſſet eiuſdem A multiplex, cum ſit ipſe numerus totus.

Si verò conſtet *duobus* characteribus, N M,

Dico quoque, prout M, † N in B, eſt multiplex A, & ipſum numerum, N M, eiuſdem multiplicem eſſe.

Etenim character N in columna denarij, æquatur 10 N,

Verum ex conſtructione, eſt	10—B. multiplex A
Quare ducendo 10—B in N eſt	10 N—B in N multiplex A
Si ergo contingit & eſſe	M, † B in N multiplicem A
Ergo ambo vltimi multiplices juncti	10 N † M erunt multipl. A
Id eſt N in columna denarij & M in columna vnitatis, ſeu numerus	N M eſt multiplex A.

Q. E. D.

Si numerus diuidendus conſtet *tribus* characteribus, V N M,

Dico quoque ipſum eſſe aut non eſſe multiplicem A,

provt, M, † N in B † V in C, erit ipſius A multiplex, vel non.

Etenim character V, in columna centenarij, æquatur 100, V.

At ex conſtructione, eſt	10—B, multiplex, A,
Quare multiplicando 10—B per 10	100—10 B, multip. A,
Et ducendo ipſos in V	100 V—10 B in V, mult A,
Sed eſt etiam ex conſtructione,	10 B—C, multip. A,
Quare ducendo in V,	10 B in V—C in V, mult. A,
Sed ex oſtenſis	100 V—10 B, in V, mult. A,
Ergo juncti duo vltimi	100 V—C in V, mult. A,
Iam verò oſtendemus vt in ſecundo caſu	10 N—B in N, mult. A,
Ergo juncti duo vltimi	100 V † 10 N—C in V—B in N, mult. A,
Ergo ſi contingat hos numeros	C in V † B in N † M, eſſe mult. A,
Ambo vltimi juncti nempe	100 V, † 10 N, † M; & mult. A,

Seu V in columna centenarij N denarij & M vnitatis, hoc eſt numerus V N M, eſt multiplex, A. Q. E. D.

Non ſecus demonſtrabitur de numeris ex *pluribus* characteribus compoſitis. Quare prout &c. Q. E. D.

Exemplis gaudeamus.

QVæro, qui ſint numeri multiplices numeri 7? Scriptis continuis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſubſcribo, 1, ſub 1.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

Ex vnitate decies ſumpta, ſeu

ex 10 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 3 quem pono ſub 2,

Ex 3 decies ſumpto, ſeu

ex 30 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 2 quem pono ſub 3,

Ex 20 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 6 & pono ſub 4,

[132]

Ex 60 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 4 & pono ſub 5,
Ex 40 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 5 & pono ſub 6,
Ex 50 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 1 & pono ſub 7,
Ex 10 aufero 7 quoties poteſt, & redit 3 & pono ſub 8,
Ex 30, aufero 7 quoties poteſt, & redit 2 & pono ſub 9,
Et ſic redit ſeries numerorum, 1, 3, 2, 6, 4, 5, in infinitum.

Iam proponatur numerus quilibet, 287542178,
De quo quæritur vtrum exactè diuidatur per 7
hoc ſic agnoſcetur.

Sumatur *ſemel* eius character qui primus eſt à dextrâ ad ſiniſtram, nempe 8 *primo enim numero ſeriei continuæ ſubiacet vnitas*
Quare ponatur ille, 8, primus character *ſemel* 8
Secundus, qui eſt 7, *ter* ſumatur, ſeu per 3 multiplicetur, *ſecundo enim numero ſeriei ſubiacet* 3, ſitque productus 21.
Tertius *bis* ſumatur, *ſubiacet enim* 2 *ipſi* 3, quare tertius character qui eſt 1 per 2 multiplicatus ſit 2:
Quartus eadem ratione per 6 multiplicatus 12:
Quintus per 4 multiplicatus 16:
Sextus per 5 multiplicatus 25:
Septimus *ſemel, ſeptimo enim ſubiacet* 1, 7:
Octauus, ter ſumptus 24:
Nonus bis ſumptus 4

Et ſic deinceps ſi ſupereſſent. Iungantur hi numeri 119

Si ipſe aggregatus, 119, eſt multiplex ipſius 7, numerus quoque propoſitus, 287542178, eiuſdem 7, multiplex erit.

Poteſt autem dignoſci eadem methodo, vtrum ipſe 119 ſit multiplex 7 ſcilicet, ſumendo ſemel primum characterem 9:
ſecundum characterem ter 3:
& præcedentem bis 2:

14

Si enim ſumma 14 eſt multiplex 7 erit & 119 eiuſdem multiplex.

Sed & ſi, curioſitate potius quam neceſſitate moti, velimus agnoſcere vtrum 14 ſit multiplex 7 ſumatur character vltimus ſemel 4:
& præcedens ter 3:

7:

Si ſumma eſt multiplex ipſius 7 erit & 14 multiplex 7, quare & 14, & 119, &, 287542178.

VIs agnoſcere quinam numeri diuidantur per 6.

Scriptis, vt ſæpius dictum eſt, numeris naturalibus 1,2,3,4,5, &c. & 1 ſub, 1, poſito

&c.	4	3	2	1
&c.	4	4	4	1

Ex 10 aufer 6 reliquum 4, ſub 2 ponito
Ex 40 aufer 6 reliquum 4, ſub 3 ponito
Ex 40 aufer 6 reliquum 4, ſub 4 ponito
Et ſic ſemper redibit 4, quod agnoſci potuit vbi ſemel rediit.

Ergo, ſi proponatur numerus quilibet, de quo quærebatur vtrum ſit diuidendus per 6 nempe 248742? ſume vltimam eius figuram

ſemel	2:
præcedentem quater	16:
præcedentem quater &c.	28:
&, vno verbo, primam ſemel, reliquarum verò	32
ſummam quater,	16
	8
	102

ſi ſumma 102 diuidatur per 6 diuidetur & ipſe numerus propoſitus 248742 per eumdem 6.

VIs agnoſcere vtrum numerus diuidatur per 3.
Scriptis vt prius numeris naturalibus, & 1 ſub 1 poſito,

5 4 3 2 1
1 1 1 1 1

Ex 10 aufer 3 quoties poteſt, reliqum 1 ſub 2 ponito
Ex 10 aufer 3 quantum poteſt reliqum 1 ſub 3 ponito
& ſic in infinitum.
Ergo ſi proponatur numerus quilibet, 2451, vt ſcias vtrum diuidatur per 3

ſume ſemel vltimam figuram	1:
præcedentem ſemel	5:
& ſemel ſingulas	4:
	2:
	12:

ſi ſumma diuidatur per 3, diuidetur & numerus propoſitus per 3.

VIs agnoſcere vtrum numerus diuidatur per 9.
Scriptis numeris 1, 2, 3, &c. & 1 ſub 1 poſito.

Ex 10, aufer 9, & quoniam ſupereſt 1, patet, *vnitatem* contingere ſingulis numeris. Ergo; ſi numeri propoſiti ſinguli characteres ſimul ſumpti diuidantur per 9, diuidetur & ipſe.

VIs agnoſcere vtrum numerus diuidatur per 4.
Scriptis numeris naturalibus, vt mos eſt, & poſito 1 ſub 1.

4 3 2 1
0 0 2 1

Ex 10, aufer 4 quantum poteſt reliqum 2 pone ſub 2,
Ex 20, aufer 4 quantum poteſt reliqum 0, pone ſub 3,
Ex 00, aufer 4, ſupereſt ſemper 0,
Quare ſi proponatur numerus diuidendus, 2486,

pono vltimum characterem semel
præcedentem bis, *subiacet enim 2 sub 2*,

6:
16:
22:

Præcedens per 0 multiplicatus facit zero & sic de reliquis; quare ad ipsos non attendito; & si summa priorum, nempe 22, per 4 diuidatur, diuidetur & ipse, secus autem, non.

SIc numeri quorum vltimus character semel, præcedens bis, præcedens quater, (*reliquis neglectis*, *zero enim sortiuntur*) simul juncti numerum efficiunt multiplicem 8, sunt ipsi & eiusdem 8 multiplices, secus autem, non.

In exemplum autem dabimus & illud.

AGnoscere qui numeri diuidantur per 16. Scriptis vt dictum est numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. &, 1, sub, 1, posito.

7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	8	4	10	1

Ex 10, aufer 16 quantum potest; superest ipse 10, *Ex minore enim numero major numerus subtrahi non potest, quare ipsemet numerus* 10 *ponatur sub* 2.

Ex ipso 10 decies sumpto, vt mos est, seu ex 100, aufero 16 quantum potest, superest 4 quem pono sub 3.

Ex 40, aufero 16 quantum potest, reliquum 8 pono sub 4.

Ex 80 aufero 16 quantum potest, superest, 0.

Ideo omnis numerus cuius vltimus character semel sumptus, penultimus decies, præcedens quater, & præcedens octies, efficiunt numerum multiplicem 16, erit & ipse ipsius 16 multiplex.

Sic reperies omnes numeros, quorum penultimus character decies, reliqui autem omnes scilicet vltimus, ante penultimus, præante penultimus, & reliqui semel sumpti, efficiunt numerum diuisibilem per 45, vel 18, vel 15, vel 30, vel 90, & vno verbo omnes diuisores numeri 90, duobus constantes characteribus, diuidi quoque & ipsos per hos diuisores.

NOn difficilis inde ad alia progressus, sed intentatam huc vsque materiam aperuisse, & satis obscuram lucidissima demonstratione illustrauisse, sufficit. Ars etenim illa, qua ex additione characterum numeri, noscitur per quos sit diuisibilis, ex imâ numerorum naturâ, & ex eorum denariâ progressione vim suam sortitur, si enim aliâ progressione procederent, verbi gratiâ, duodenariâ (quod sanè gratum foret) & sic vltra primas nouem figuras, aliæ duæ institutæ essent, quarum altera denarium, altera vndenarium exhiberet; Tunc non ampliùs contingeret, numeros quorum omnes characteres simul sumpti efficiunt numerum multiplicem 9 esse & ipsos eiusdem 9 multiplices.

Sed methodus nostra, necnon & demonstratio, & huic progressioni, & omnibus possibilibus conuenit.

Si enim in hac duodenaria progreſſione, proponitur agnoſcere an numerus diuidatur per 9.

Inſtituemus vt antea numeros naturali ſerie continuos 1, 2, 3, 4, 5, &c. & 1 ſub 1 poſito

4 3 2 1
0 0 3 1

Ex vnitate jam duo decies ſumpta ſeu ex 10, (*qui jam poteſt duodecim*; non autem *decem*) auferendo 9 quantum poteſt, ſupereſt 3, quem pono ſub 2.

Ex 30, (qui jam poteſt *triginta ſex* ſcilicet *ter duodecim*) aufer 9 quantum poteſt, & ſupereſt nihil, continetur enim 9 quater exactè in *triginta ſex*; pono igitur, 0, ſub, 3.

Et ideo, zero ſub reliquis characteribus continget.

Vnde colligo, omnes numeros, quorum vltimus character ſemel ſumptus, penultimus verò ter, (*de cæteris non curo quales ſint*, zero *enim ſortiuntur*) efficiunt numerum diuiſibilem per 9, diuidi quoque per 9, in duodenaria progreſſione.

Sic in hac progreſſione duodenaria omnes numeri quorum ſinguli characteres ſimul ſumpti efficiunt numerum diuiſibilem per 11, ſunt & diuiſibiles per eumdem.

IN noſtra verò progreſſione denaria, contingit omnes numeros diuiſibiles per 11, ita ſe habere, vt vltimus ſemel ſumptus, penultimus decies, præcedens ſemel, præcedens decies, præcedens ſemel, præcedens decies, & ſic in infinitum, conflare numerum multiplicem 11.

Hæc & alia facili ſtudio, ex iſta methodo quiſque colliget; Tetigimus quidem quoniam intentata placent, relinquimus verò ne nimia perſcrutatio tædium pariat.