Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 38

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 38.1. Wir betrachten die Relation auf der Menge der quadratischen $n \times n$-Matrizen, bei der Matrizen M und N als äquivalent angesehen werden, wenn es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ mit

$$M = E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ N$$

gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 38.2. Es seien p und q zwei nichtäquivalente Aussagen. Welche der folgenden zusammengesetzten Aussagen sind zueinander äquivalent, welche nicht?

$$p,\ q,\ p \wedge q,\ p \vee q,\ p \rightarrow q,\ p \rightarrow (q \rightarrow p),\ \neg p \vee q,\ p \vee \neg p\,.$$

Aufgabe 38.3. Betrachte die zweielementige Menge $M = \{a, b\}$.

(1) Bestimme alle Relationen auf M.
(2) Welche dieser Relationen sind symmetrisch, reflexiv, transitiv?
(3) Bei welchen Relationen handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

Aufgabe 38.4.*

Seien M und N Mengen und sei $f \colon M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \sim y,$$

wenn

$$f(x) = f(y),$$

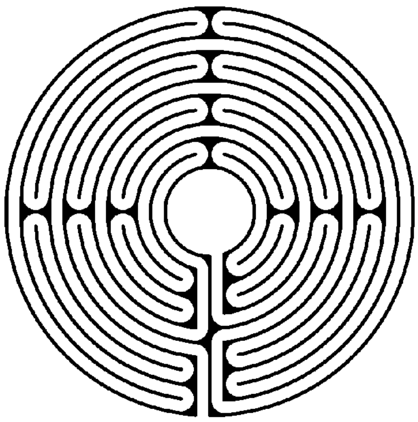
eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

Aufgabe 38.5. Zeige, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist:

$$x \sim y, \text{ falls } 5 \text{ teilt } x - y\,.$$

Welche Zahlen sind bei dieser Relation äquivalent zueinander?

Aufgabe 38.6. Wir betrachten auf dem weißen Teil des angegebenen Labyrinths die Äquivalenzrelation, die dadurch festgelegt ist, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn man durch eine stetige Bewegung (also ohne Sprünge) von einem Punkt zum anderen Punkt gelangen kann. Zeige, dass ein Punkt außerhalb des äußeren Kreises und ein Punkt des inneren Kreises zueinander äquivalent sind.



Aufgabe 38.7. Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Wir fixieren wie in Beispiel 38.14 die Sprünge

$$\pm(2,0) \text{ und } \pm(3,3)\,,$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a,b)$, $Q = (c,d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von diesen Sprüngen aus erreichen kann.

(1) Zeige, dass die Punkte $P = (4,-3)$ und $P = (3,6)$ zueinander äquivalent sind.
(2) Zeige, dass die Punkte $P = (4,-3)$ und $P = (3,7)$ nicht zueinander äquivalent sind.

Aufgabe 38.8. Die Äquatorflöhe leben auf den vollen Metern eines 40000 Kilometer langen kreisrunden Bandes. Sie verfügen nur über einen Sprung, der sie sieben Meter nach vorne oder nach hinten bringt. Können sich alle Flöhe begegnen?

Aufgabe 38.9. Wir betrachten die rationalen Zahlen
$$\frac{7}{3},\ \frac{5}{3},\ 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{4}{3},\ 4,\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{5}\,.$$

(1) Welche dieser Zahlen sind unter der Gaußklammeräquivalenzrelation („Vorkommaäquivalenzrelation“, siehe Beispiel 38.11) zueinander äquivalent?
(2) Welche dieser Zahlen sind unter der Bruchanteiläquivalenzrelation („Nachkommaäquivalenzrelation“) zueinander äquivalent?

Aufgabe 38.10.*

Es sei K ein Körper und $U \subseteq K^n$ ein Untervektorraum. Wir betrachten die Relation auf dem K^n, die durch
$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U$$
definiert ist. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 38.11. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Relation auf $\operatorname{Mat}_n(K)$.
$$M \sim N, \text{ falls es eine invertierbare Matrix } B \text{ gibt mit } M = BNB^{-1}\,.$$
Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 38.12.*

Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation $\sim$ auf G, die durch
$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x = y^{-1}$$
erklärt ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 38.13. Es seien M_1 und M_2 Mengen und $\sim_1$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_1 und $\sim_2$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_2. Betrachte die Relation $\sim$ auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$, die durch
$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ und } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt}\,,$$
definiert ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige ferner, dass auf $M_1 \times M_2$ die durch
$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ oder } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt}\,,$$
definierte Relation keine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 38.14. Es sei M eine Menge und $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Äquivalenzrelationen auf M. Zeige, dass durch den Durchschnitt $R := \bigcap_{i \in I} R_i$ wieder eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Gilt dies auch für $\bigcup_{i \in I} R_i$?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 38.15. (2 Punkte)

Wir betrachten für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die symmetrische Differenz

$$A \triangle B \, = \, (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen

$$A \sim B \, ,$$

falls $A \triangle B$ endlich ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}\,(\mathbb{N})$ definiert wird.

Aufgabe 38.16. (4 Punkte)

Alle Springmäuse leben in $\mathbb{Z}^2$ und verfügen über zwei Sprünge, nämlich den Sprung $\pm(3,4)$ und den Sprung $\pm(5,2)$. Wie viele Springmaus-Populationen gibt es? Die Springmäuse Albert, Beate, Erich, Heinz, Sabine und Frida sitzen in den Positionen

$$(14,11),\ (13,15),\ (17,12),\ (15,19),\ (16,16) \text{ und } (12,20)\, .$$

Welche Springmäuse können sich begegnen?

Aufgabe 38.17. (3 Punkte)

Seien M und N Mengen und sei $f \colon M \to N$ eine Abbildung. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf N. Zeige, dass durch $x \equiv x'$, falls $f(x) \sim f(x')$ gilt, eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

Aufgabe 38.18. (2 Punkte)

Finde neben den beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ weitere Matrizen M mit der Eigenschaft $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Abbildungsverzeichnis