三角數理卷九

英國 海麻士 輯　　英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

論球上之各圈及弧三角形界說

第一款　凡以平面剖圓球，則剖面之界必為平圓，其剖面若過球心，則剖面之界易知其必為平圓之界，名此平圓之界曰大圈。如球面先有已定之三點，則亦可過此三點作大圈。

凡球面之各大圈因其半徑必相同[illegible]則各大圈之大小必相等[illegible]

三角數理卷九

英國海麻士輯
英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

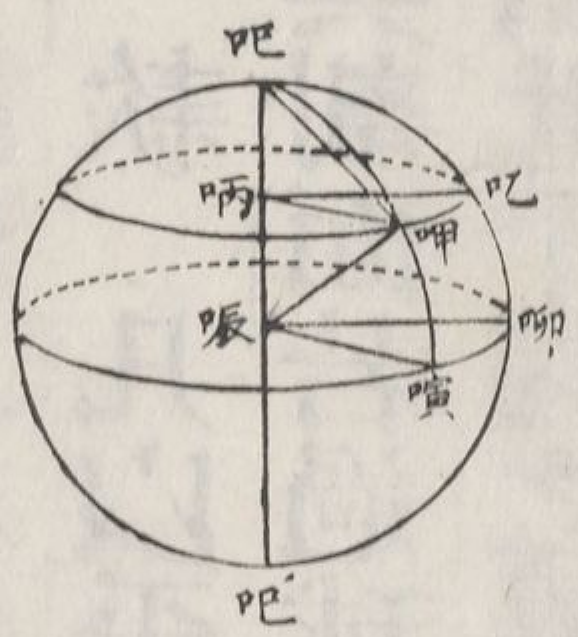
論球上之各圈及弧三角形界說

第一款 凡以平面剖圓球。則剖面之界。必爲平圓。其剖面若過球心。則剖面之界。易知其必爲平圓之界。名此平圓之界曰大圈。如球面先有已定之二點。則亦可過此二點作大圈。

凡球面之各大圈。因其半徑必相同。卽爲球之半徑。故必相同。則各大圈之大小必相等。

凡大圈必平分全球之半因其平剖面之徑即爲球徑所以凡球面有兩大圈相交兩交點相距必爲半周

惟平剖面若不過球心者如圖從球心㖘點作㖘呐爲剖面距心之線從以呐爲心之剖面界



任取呷點作呷呐呷㖘二線則 $呷呐 = \sqrt{呷㖘^{2} - 㖘呐^{2}}$ 此爲一定之式所以凡剖面之心若不過球心者其平圓之界名之曰小圈

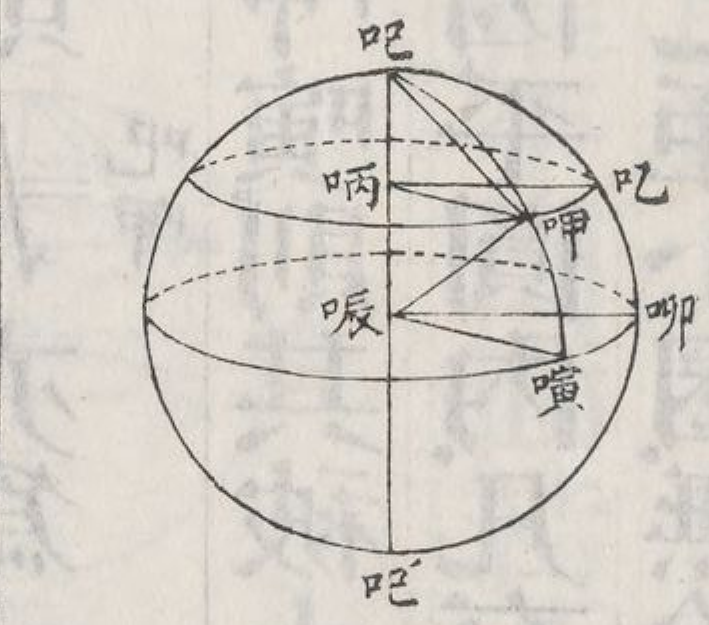
弧三角之法中不恆用小圈之弧此書中所論弧三角

形其弧亦俱爲大圈如有用小圈之弧者必明言之

尋常所言弧度皆指球心配此弧之角而不論其球之半徑因恆以半徑爲一故也

第二款 如于前圖將㖘𠰳線引長至球面之吧吧二點則 $吧呷 = \sqrt{吧𠰳 \perp 呷𠰳}$ 亦爲一定之式 若有過吧呷二點之大圈吧呷㖘則其被小圈所截之吧呷弧以吧呷直線爲通弦因平圓內凡有相等之線必截其相等之弧所以吧點之距小圈無論以直線言之或以過吧點之大圈之弧言之其理無異

吧吧二點名曰極點若以呷吃小圈言之則吧爲近極

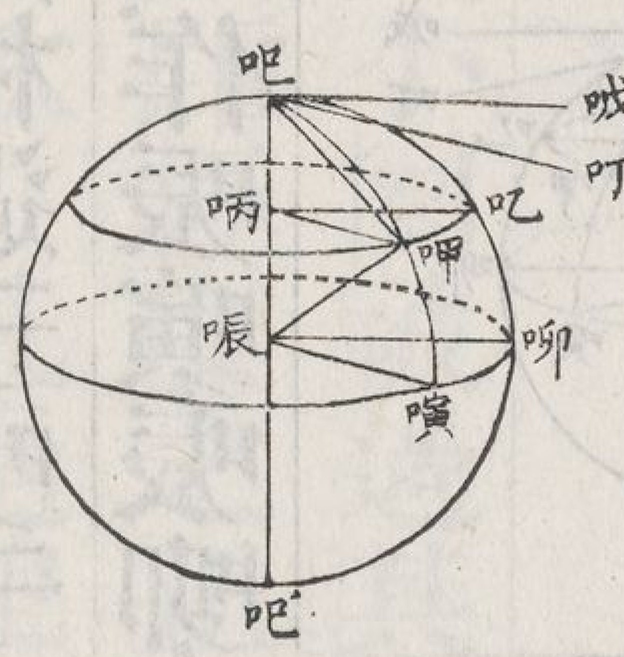


吧爲遠極此二極點爲從小圈平剖面之心作垂線至球面之點若有他小圈其剖面與呷吃小圈爲平行者則其遠近二極亦爲吧吧二點此解距等圈之意

如𠰍嗔爲以吧爲極之大圈則因哌吧爲從嗔哌𠰍剖面之圜心所作之垂線所以吧哌嗔爲正角而吧點距嗔𠰍大圈之各處若以大圈度之恆爲四分全周之一

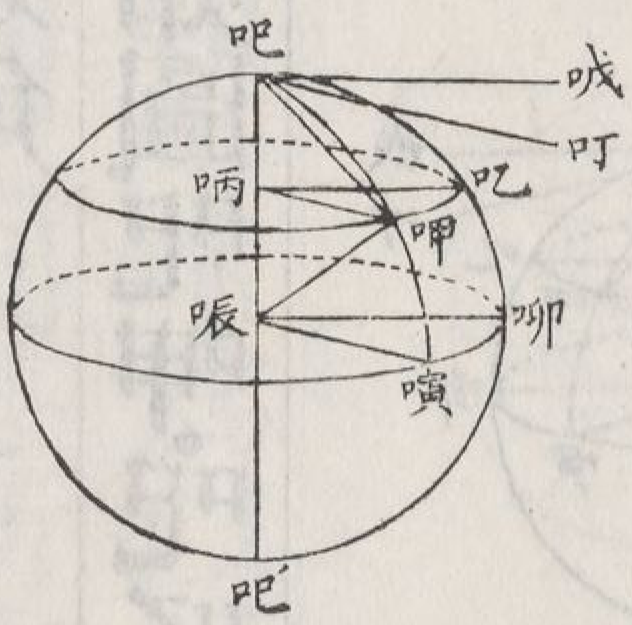
第三款 凡兩大圈在球面相交所成之角他種曲線亦有此理卽爲兩切線在交點所成之角所以必同于兩大圈之平

剖面所成之角 因其切線與本弧必同在一平面內又必與兩平面相交而成之線即球徑為垂線所以兩切線所成之角同于兩平面所成之角即同于兩弧所成之角



如圖吧呷吧叱各為大圈之一弧而于吧點相交若從吧點作吧叮切線為在吧唇呷平面內之切線又從吧點作吧哦切線為在吧唇叱平面內之切線則因吧叮吧哦各為吧唇之垂線故呷吧叱角等于叮吧哦角即等于兩弧之大圈平面之交角

第四款　將吧呷吧𠮙兩弧引長之至與以吧爲極之大圈相遇于𠻤于𠰭則與以吧爲極之小圈相交于呷于𠮙作㖘𠻤㖘𠰭𠰳呷𠰳𠮙各線則因吧叮吧𠯈爲㖘𠻤㖘𠰭之平行線故叮吧𠯈角等于𠻤㖘𠰭角卽等于𠻤𠰭弧此以球心所對之弧明其弧角呷吧𠮙也



從此可見若有兩弧彼此相交成任何弧角如引長其兩弧至滿四分全周之一若其弧本大于九十度者則于其滿九十度處截之從球面作大圈連其兩弧之端則其大圈以兩弧之交點

爲極而大圈之弧度在引長之兩弧之間者卽爲弧角之度。

又其呷吃小圈以呷哂爲半徑則 㖘呷正弦呷㖘吧＝㖘呷正弦吧呷。 而 呷吃弧＝呷哂×呷哂吃角之弧＝嗔唧弧正弦吧呷、 可見其小圈被過其極點之兩大圈所截之弧其長必與小圈距極度之正弦有比例。

第五款 凡過吧極之大圈必依㖘吧爲平面則必爲嗔㖘唧之垂面所以凡在吧點之大圈與有極爲吧之大

圈㖢𠰳相交、必成正角、

凡過他大圈極點之大圈、名曰副大圈、亦名經圈、

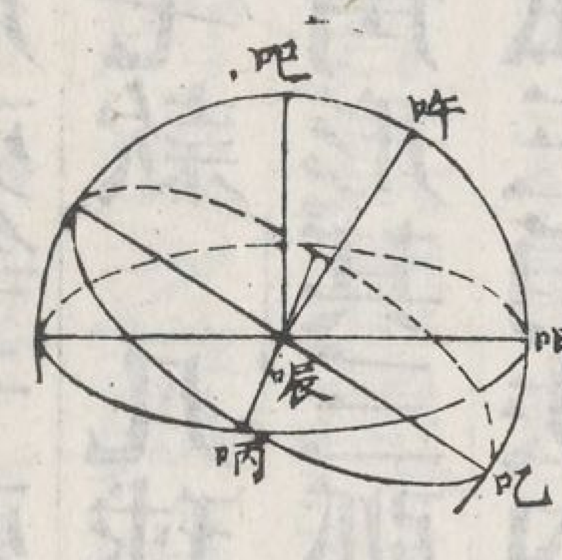
所以若有大圈已知其弧爲㖢𠰳、欲求其極點、有兩法、

一測其與㖢𠰳弧爲垂面之大圈、令其弧爲一象限、卽得極點、　二可作兩箇大圈、皆與㖢𠰳弧爲正角、而交于吧、卽得極點、

反之若從球面之某點、作大圈、與所設之大圈相遇、而其弧適爲一象限者、則所取之點、卽爲極點、　或從某點至所設之大圈、能作兩箇不同面之大圈、其弧皆爲一象限者、則本點亦卽爲所設大圈之極點、

第六款　凡聯兩大圈之極點作弧則此弧所對球心之角與兩大圈之平面交角相等　兩大圈相交之兩點即爲兩大圈之平面相交而成之線之兩端亦爲過兩大圈之極點之大圈之極

如圖有呷呐吃呐兩大圈其平剖面相交成唇呐半徑線其兩圈之極點一爲吧一爲吘則吧唇呐角吘唇呐

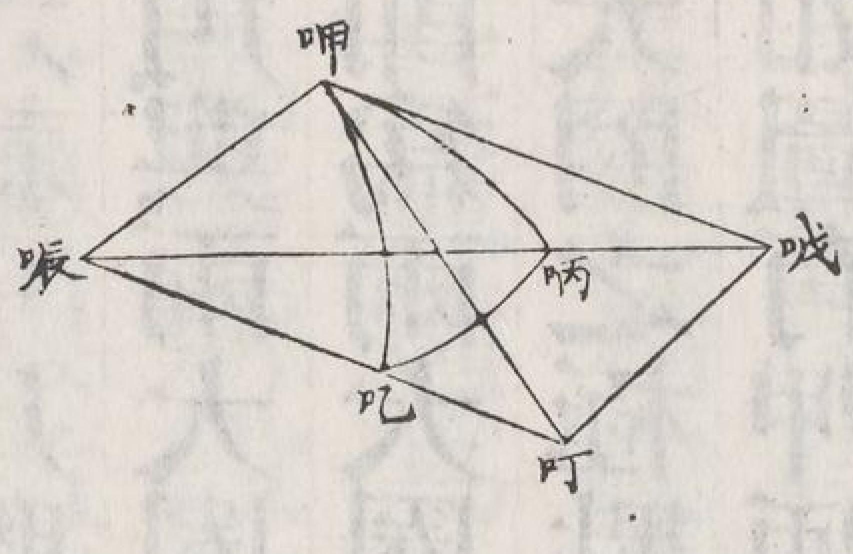


角皆爲正角所以呐唇爲吧唇吘平面之垂線而呐爲過吧吘二點之吧吘呷吃大圈之極又因吧唇呷角吘唇吃角皆爲正角所以吧唇吘角等于呷唇吃

角亦等于弧角呷吶吃。

第七款　凡球面有三大圈之弧、所成之面、名之為弧三角形、其三弧之平剖面在球心成體角。

弧三角法內所必究之事、為成此體角之三箇平面其各面各邊所成之面角、彼此有相關之理。



如圖、呷唇吃吃唇吶吶唇呷三箇平面所成之體角、其頂為唇、而呷吃吃吶吶呷為三箇大圈之弧、此三弧為各在一平面內。以唇為心以球徑為徑所作之平圓所成而于球面相交則呷唇吃吃唇吶吶唇呷。

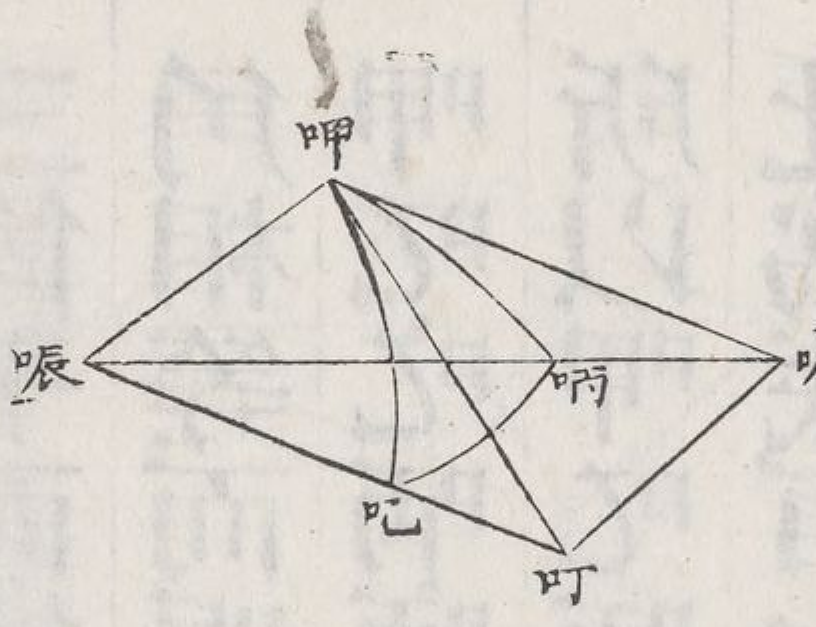
三箇平面彼此所成之稜角與其甲乙丙三弧所成之角相等而唇呷唇𠮙唇𠰷三稜在唇點所成之各角與呷𠮙𠮙𠰷𠰷呷三弧有比例

所以呷𠮙𠰷弧三角形所成之面卽可爲體角之底以此爲底有大益處因可求得成此體角之各面各稜所成之各角一切相關之理爲弧三角中最要之事也

學者觀以上所論之事若已明弧三角之意則不必再言其體角祇須知其體角之底卽爲球面以三弧爲界所成之弧三角形惟不可忘所推之各事非爲弧三角形各邊之弧乃爲球心對其各弧之各角也所以能與

球徑之大小不相關.
如令球之半徑爲一.則弧三角形之三邊變爲從球心
對此邊之角之眞弧度.

第八款 凡弧三角形之三角恆以呷吃呐三字名之如
言呷角.卽指呷吃.呷呐兩弧所成之吃呷呐角也.其吃



呷呐角.實爲兩弧之切線所成之㖸呷叮
角.卽爲弧之切線之平角. 又呷吃呐三
角之對邊吃呐.呷呐.呷吃.三弧.爲從其球
心所對之角.恆以甲乙丙三字識之.依此
簡便之代法.則凡言對呷角之弧.卽爲吃

丙邊或言甲邊其意謂從球心對乙丙弧之乙辰丙角也、

第九款　惟因凡有三面所成之體角、其三箇平面之角每角必小于兩正角之和、亦每角必小于餘兩角之和、而其三箇平角之和、必小于四箇正角之和、所以其體角之底弧三角形之三弧、能有三例如左、

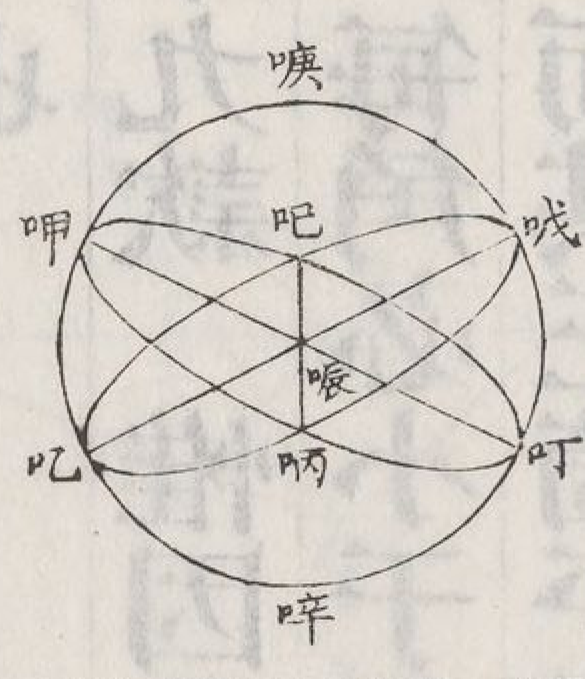
一、無論何弧、必小于半周、二、任一弧必小于餘兩弧之和、三、其三弧之和、必小于大圈之全周、

若將弧三角形在球面引長其任一弧成大圈則大圈之平面所剖之半球、必含其弧三角形在內、否則兩箇

大圈相交之面其稜角所對之弧大于半周而不合于例矣

由此可見弧三角形若用大于半圈之弧爲邊則體角之頂點亦能爲他弧三角形之頂點

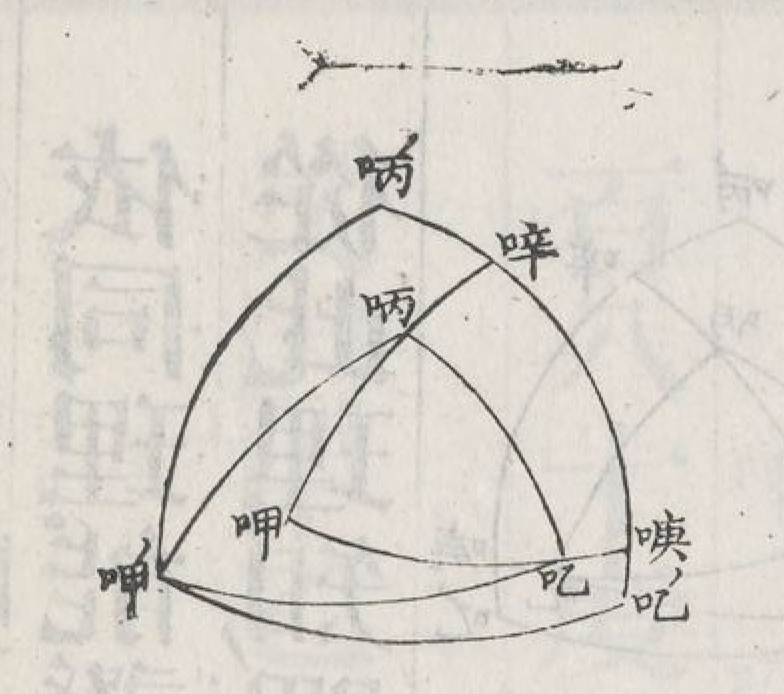
如圖吃呐呐叮吃咦叮三弧所成之弧三角形其體角之頂點亦可爲吃呐叮哰弧三角形體角之頂點所以欲求吃呐叮咦弧三角形必藉他弧三角形如吃呐叮哰無一弧大于半圈無一角大于兩象限者以解之



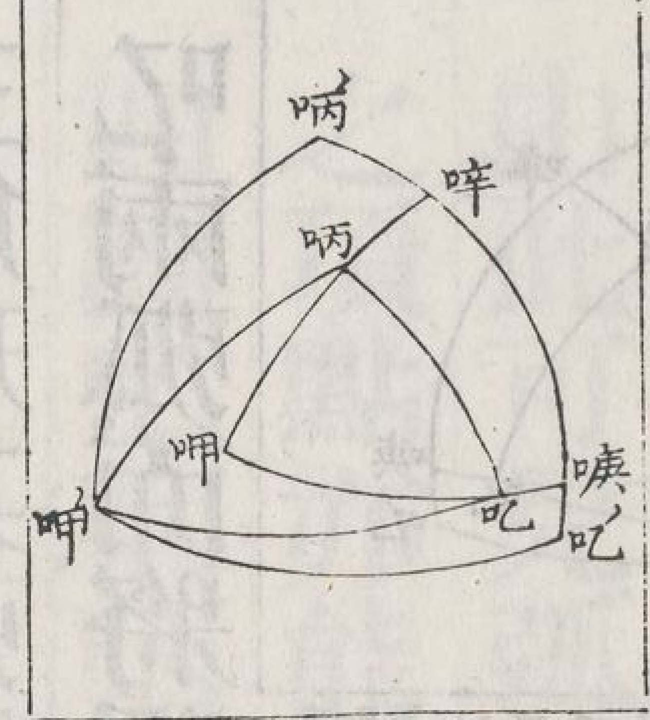
第十款 于球面上任設弧三角形若以角點即每兩弧相遇之點

各爲極而作大圈則又成一弧三角形其角點爲原弧三角形各弧之極而其弧與角爲原弧三角形所對之弧角與一百八十度相較之數

如圖呷吃昞爲原設之弧三角形呷吃昞爲又成之弧三角形其弧以原形之角點爲極則依大圈作呷昞呷吃兩弧而將呷吃呷昞在球面引長之至滿一象限而遇吃昞弧于唤于㖤則昞呷弧爲象限因昞爲呷吃之極故也又吃呷弧亦爲象限因吃爲呷昞之極故也所以依第五款之理有以呷爲極之大圈過吃昞兩點即呷爲吃昞弧之極　又



依同理，能證其吃，與呐，爲呷呐與呷吃之極點。從此理，知呷，吃，呐弧三角形，若以呷吃呐弧三角形爲主，可名之爲極三角形。



又依圖中之理，呷吃呐弧三角形，亦爲呷，吃，呐之極三角形。

又依第四款之理。

呷＝啐咦＝呐咦丅呐啐＝呐咦丄吃啐丅吃呐＝一八〇丅吃呐。

因呐咦，吃啐。各爲一象限之故也。所以呷角爲有以呷爲極之吃，呐弧所對球心之角。之外角，

又依同理能證其𠮙角㖠角為呷㖠呷𠮙即有極為𠮙與㖠之極三角形之弧所對球心之角之外角從此例則呷𠮙㖠三角形可謂之呷𠮙㖠三角形之次形亦謂之外三角形所以本形之各角與次形之三邊甲乙丙有一定之相等式

呷丄甲＝一八〇°

𠮙丄乙＝一八〇°

㖠丄丙＝一八〇°

由此可見凡弧三角形之角必小于一百八十度

又因甲乙丙為呷𠮙㖠之外角所以

呷＝一八〇°丅𠮙㖠

𠮙＝一八〇°丅呷㖠

㖠＝一八〇°丅呷𠮙

而本形

之邊與次形之角有呷丄甲＝一八〇°、吃丄乙＝一八〇°、呐丄丙＝一八〇°之式。

第十一款　從此可見若有三箇平面所成之體角從其頂點（體角之頂點也）以三棱爲垂線作三箇平面則所作之三面必成一他體角其棱與原體角之棱爲垂線而其各面各棱爲原面原棱之次面次棱。

第十二款　以上各款爲弧三角法中最要之理因任何弧三角形之呷吃呐三角及甲乙丙三弧與次形之呷吃呐三角甲乙丙三弧彼此互爲外角外弧如一八〇°丅甲　一八〇°丅乙……

是也所以凡論弧三角形邊角之式若俱以對邊之次邊與一百八十度相減謂之次邊代其角而以對角之外角代其邊則其式亦必合于理

第十三款　若以呷吃呐代任何弧三角形之角而以甲乙丙代其次形之弧即有六正角＝丙丄乙丄甲丄呐丄吃丄呷之式而其丙丄乙丄甲恆在○度與四正角之間所以呐丄吃丄呷即任何弧三角形三角之和恆在六正角與四正角之間

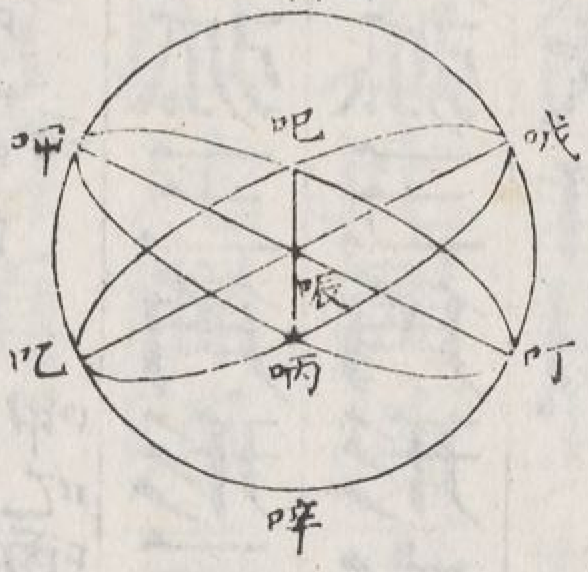
由是知弧三角形之角不能如平三角形三角之和恆爲不變之數又不能有兩角小于六〇°惟可有兩角或三角皆爲鈍亦能有三角俱爲正角者

凡弧三角形若三角皆爲正角者則爲全球面積八分之一若其三角甚近于九〇°九〇°一八〇°者則爲全球面積四分之一若各角俱甚近一八〇°者則爲球面之半

第十四款上 凡弧三角形之面積與半球面積之比若其三角之和大于二正角之數與四箇正角之比

如圖呷吃哂弧三角形若將其成哂角之兩弧各引長之至爲半圈則成呷吃𠯈叮哂吃哂𠯁𠸄呷哂吃吧呷

三瓣形謂球面在兩箇半圈內之面積形如花瓣者共有三也而呷吃昞三角形在三瓣相疊之處其昞吃吧呷瓣形之積必等于呷吃昞與叮昞哎之和此因叮昞哎與呷吃吧同爲唇點體



角之底其角點同在球之三箇徑線之端則易知其必爲相等惟因瓣形之面積與球之半面積呻之比同于兩箇半圈間之角與一八〇°之比所以若將各瓣形面積之同數變爲相等式

$$\frac{呷}{一八〇^\circ}呻 = 呷吃昞面 + 吃啐叮昞面$$

$$\frac{吃}{一八〇^\circ}呻 = 吃昞哎喚呷面$$

$$\frac{昞}{一八〇^\circ}呻 = 呷吃昞面 + 叮昞哎面$$

以加法

得

$$\text{呻}\cdot\frac{\text{呷}+\text{乙}+\text{丙}}{\text{一八〇}} = \text{呻} + \text{二}\,\text{呷乙丙面}$$

則

$$\text{呻}\cdot\frac{\text{呷}+\text{乙}+\text{丙}-\text{一八〇}}{\text{三六〇}} = \text{呷乙丙面}$$

凡弧三角形三角之和，以二正角減之，其數名弧餘數。凡弧三角形之面積，不能爲負，亦不能大于呻，觀第十三款自明。

論弧三角形邊角之比例

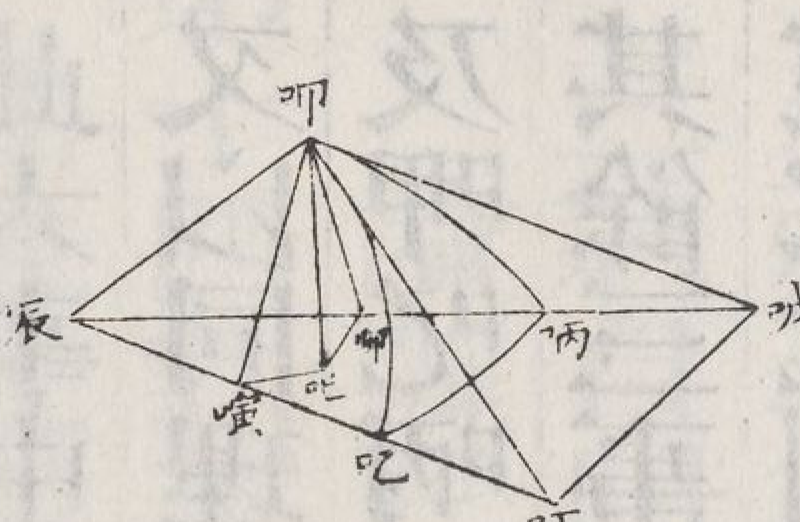
第十四款下 凡以弧三角形爲底之體角，有六件要事，即成此體角之三箇平面之斜度及其三棱之交角也

此六事中。知其任三事。即可求得其餘三事。
又以同理知弧三角形。亦有六事。即甲乙丙三邊。其邊爲弧及呷吔哂三角也。此六事中。亦任知其三事。即可求得其餘三事。其故因已知之任三事。與未知之三事。有一定之比例。故可從此推彼也。
所以凡解弧三角形之題。其式中必有六事中之四。故祇有四類。一爲有兩邊與其所對之兩角。二爲有三邊一角。三爲有兩邊兩角。而兩角內必有一角爲其兩邊所成。四爲有一邊三角。
茲欲攷明以上各事之式並以後攷各種公理所須用

之各式。

第十五款上　凡弧三角形各角之正弦相比若其對邊之正弦相比。

此理所以明兩邊與所對之兩角相關之故故亦能以平三角形之理同法證之。



如圖在吃唇呐平面上作呷吧垂線又在以唇爲頂以呷吃呐弧三角形爲底之體角唇吃。唇呐兩棱上作垂線吧嗔吧叩。又作呷嗔呷叩則唇嗔與呷嗔吧平面成正角唇叩與呷叩吧平面成正角所以呷嗔

吧等于叱角而呷𠳊吧等于呐角所以有

呐弦正呷𠳊＝呷吧＝叱弦正呷嗔

之式

又因

呷叱弦正呷唇＝呷嗔

呷呐弦正呷唇＝呷𠳊

所以

呐弦正呷呐弦正＝叱弦正呷叱弦正

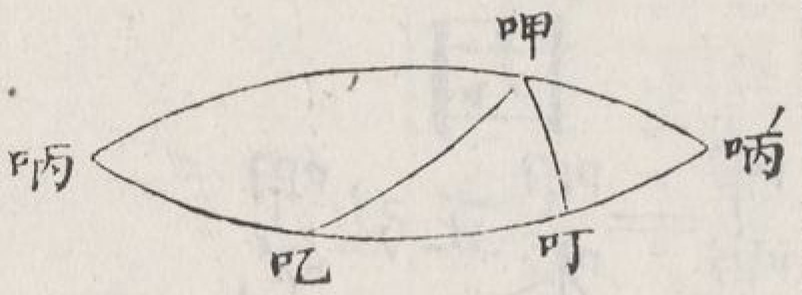
即

呐弦正乙弦正＝叱弦正丙弦正

惟前圖但以呷叱呷呐兩邊爲皆小于一象限者明之

若論其理呷甲之同數本無一定之限

若呷呐大于一象限則可引長其呐呷呐𠮙二弧至再相遇于呐點則從其次形呷呐𠮙此次形卽爲有兩邊皆小于九十度之三角形



可得

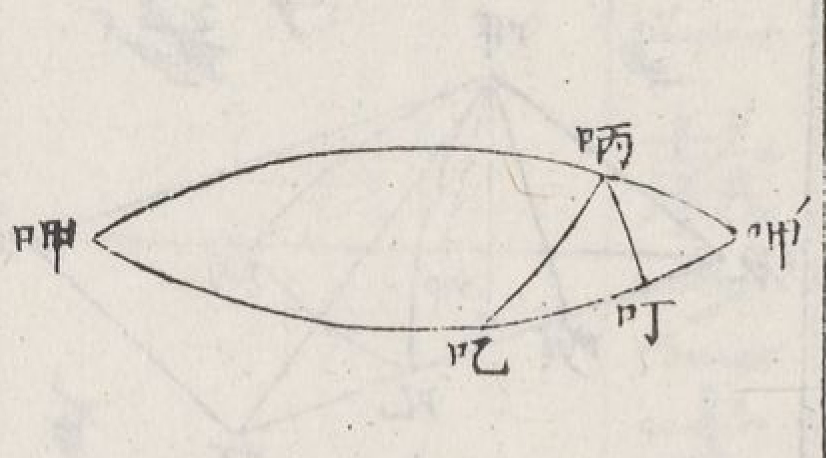
正弦丙正弦(一八〇丅𠮙)　正弦(一八〇丅乙)正弦呐

卽

正弦丙正弦𠮙＝正弦乙正弦呐

則與徑用本形呷𠮙呐所得之式無異也

若呷𠮙呷呐皆大于一象限則將呷呐呷𠮙兩弧引長之至再相遇于呷則從其次形呷𠮙呐卽爲有兩邊皆小于九十度之



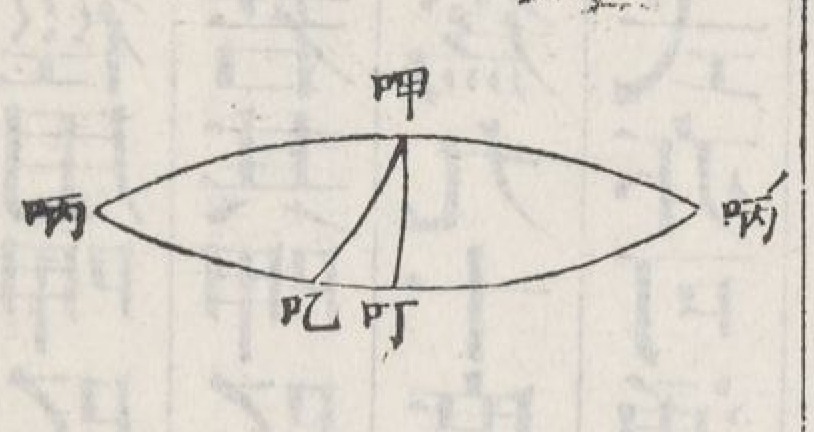
三角形可得

正弦(一八〇°丅丙)正弦(一八〇°丅吃)＝正弦(一八〇°丅乙)正弦(一八〇°丅呥)。

即

正弦丙正弦吃＝正弦乙正弦呥。

可見兩邊俱大于九十度者此式亦未嘗不通。



若呷呥等于一象限則可令呥為呷叮之極。除呷吃亦為一象限者方可則從其次形呷叮吃可得

正弦呷叮正弦叮＝正弦呷吃正弦吃。

即

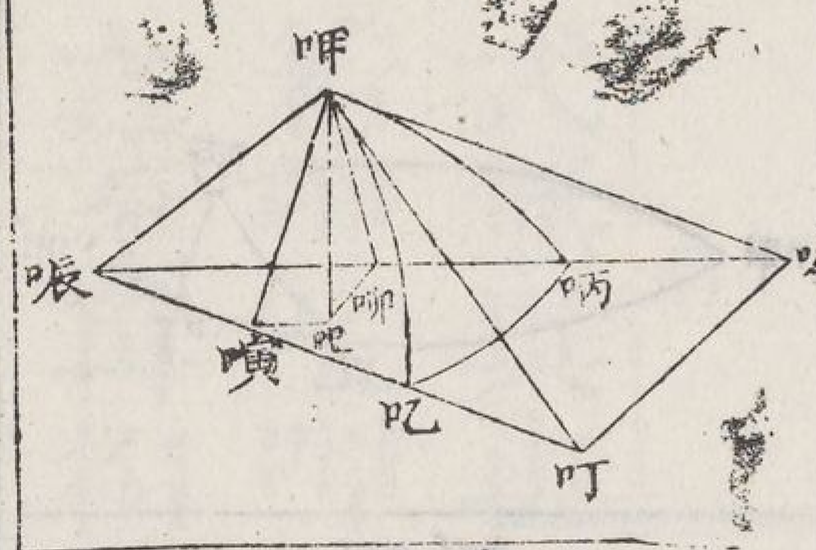
正弦呥＝正弦丙正弦吃。

則與

徑用呷吃㖞本形所得者同.

若其呷吃亦等于一象限則本三角形有兩邊之弧俱爲九十度而其對此兩邊之角必俱爲正角故易明前式亦可通. 由此可見對邊對角相比之式無論何種弧三角形皆可用之.

第十五款下 從圖易得一式以明弧三角形三邊與兩



角之比例.卽

正弦甲餘弦丙══正弦乙
餘弦㖞⊥正弦丙餘弦甲餘弦吃,

此式與平三角形第九十

一款之式相配亦爲有用之式

因從嗔作㖓𠰶之垂線則其長爲

$$\frac{\text{㖓}}{\text{嗔}}\text{正弦}\frac{\text{𠮙}}{\text{㖓𠰶}}=\frac{\text{㖓}}{\text{呷}}\text{餘弦}\frac{\text{呷}}{\text{𠮙}}\text{正弦}\frac{\text{𠮙}}{\text{𠰶}}=\frac{\text{㖓}}{\text{呷}}\text{餘弦丙正弦甲}$$

亦爲

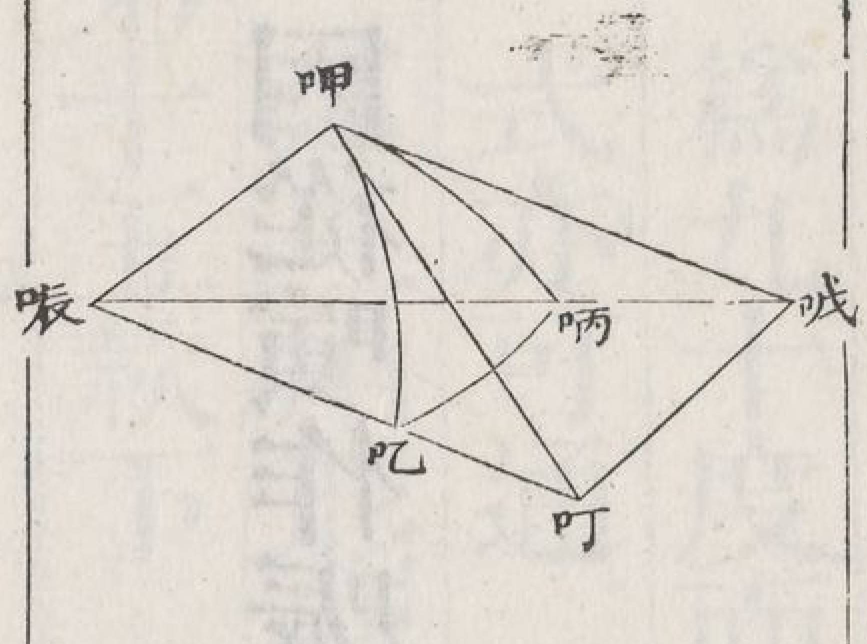
$$\frac{\text{𠮙}}{\text{𠰍}}\perp\frac{\text{𠮙}}{\text{嗔}}\text{餘弦}\frac{\text{𠮙}}{\text{㖓𠰶}}=\frac{\text{呷}}{\text{𠰍}}\text{餘弦𠰶}\perp\frac{\text{呷}}{\text{嗔}}\text{餘弦𠮙餘弦}\frac{\text{𠮙}}{\text{𠰶}}=\frac{\text{呷}}{\text{㖓}}\text{正弦乙餘弦𠰶}\perp\frac{\text{呷}}{\text{㖓}}\text{正弦丙餘弦𠮙餘弦甲}$$

所以

$$\text{正弦甲餘弦丙}=\text{正弦乙餘弦𠰶}\perp\text{正弦丙餘弦甲餘弦𠮙}$$

第十六款　求弧三角形三邊與任一角相比之式．

如圖，呷𠮙呥弧三角形，從呷點作呷𠮙弧之切線，與唇𠮙引長之線相遇于叮．又作呷呥弧之切線，與唇呥引長之線相遇于𠯆，乃作𠯆叮線，則成呷唇叮𠯆形．若從叮呷𠯆、叮唇𠯆，兩箇平三角形，各求其叮𠯆平方之同數，



作相等式，則

呷叮^{二}⊥呷𠯆^{二}丅二呷叮×呷𠯆餘弦叮呷𠯆＝

唇叮^{二}⊥唇𠯆^{二}丅二唇叮×唇𠯆餘弦叮唇𠯆．

惟因

唇叮^{二}丅呷叮^{二}＝唇呷^{二}．

唇𠯆^{二}丅呷𠯆^{二}＝唇呷^{二}．

此因唇呷叮角、唇呷

哎角皆爲正角之故則得

二喉叮×喉哎餘弦叮喉哎＝二喉呷丄二呷叮×呷哎餘弦叮呷哎

所以

$餘弦叮喉哎 = \frac{喉哎}{喉呷} \times \frac{喉叮}{喉呷}丄\frac{喉哎}{呷哎} \times \frac{喉叮}{呷叮}餘弦叮呷哎$

又因

叮喉哎＝𠮙呐＝甲

叮呷哎＝𠮙呷呐＝呷

所以得

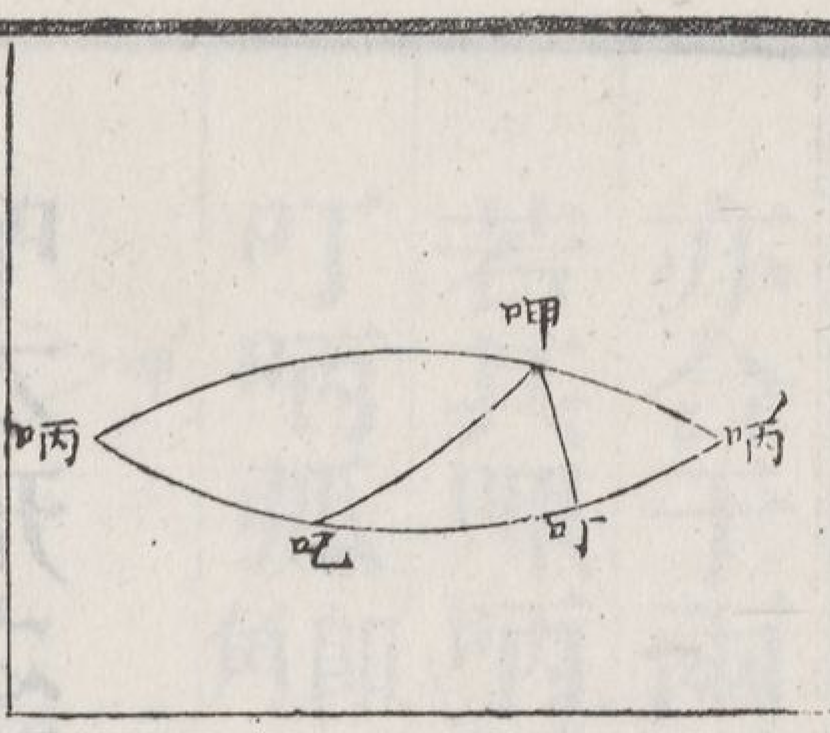
餘弦甲＝餘弦乙餘弦丙丄正弦乙正弦丙餘弦呷

此式爲弧三角法中各理之根本。

第十七款　觀上款所得之式或疑其夾呷角之兩弧乙與丙若非小于一象限則其式恐不能通然其呷甲兩同數並無一定之限

如欲證明前款所得之式可爲任何弧三角形之任何角公用之式必令其式于乙丙兩弧俱大于九十度或有一弧大于九十度或兩弧俱等于九十度或有一弧等于九十度者皆可通試一一證之

若其角旁之乙邊大于九十度而呷吃邊不滿九十度則可將其呐呷呐吃兩弧引長之至再相遇于呐則因呷吃呷呐兩弧俱小于九十度故就其吃呷呐次形而



論之因 吃呷呞＝一八〇丅呷. 所以其 餘弦(一八〇丅甲)＝餘弦(一八〇丅乙)餘弦丙丄正弦(一八〇丅乙)正弦丙餘弦(一八〇丅呷). 卽 餘弦甲＝餘弦乙餘弦丙丄正弦乙正弦丙餘弦呷. 則與徑用呷吃呞本形無異

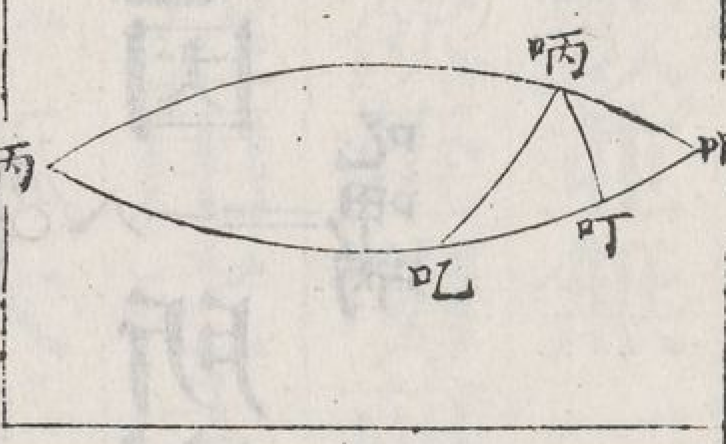
若其夾角之兩弧俱大于九十度則引長其呷昞呷吃.兩弧至再相遇于呷.則其吃呷′昞次形之呷′角與呷吃昞本形之呷角有 呷′＝呷 之式所以

餘弦甲＝餘弦(一八〇丅乙)餘弦(一八〇丅丙)⊥正弦(一八〇丅乙)正弦(一八〇丅丙)餘弦呷′.

即

餘弦甲＝餘弦乙.餘弦丙⊥正弦乙 正弦丙餘弦呷.

可見前款之式



亦合于兩弧大于九十度所成之角之用。

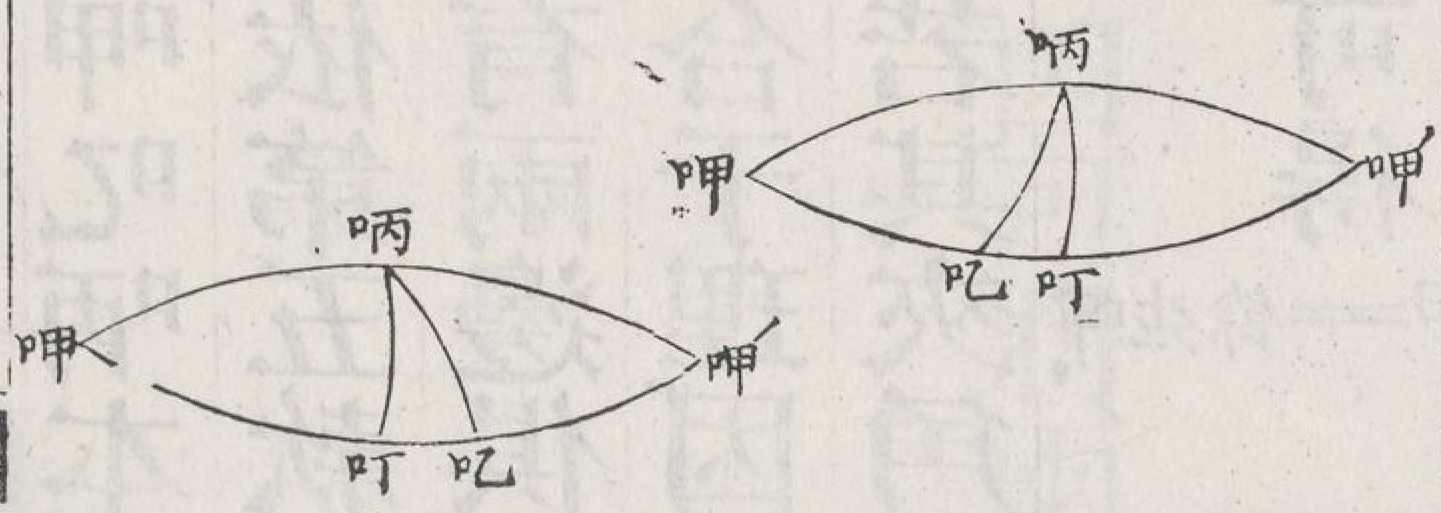
若其呷呥弧等于九十度則以呷點爲極作叮呥弧其叮呥弧角卽呷若非九十度則其弧合于吃叮呥次形丁邊之用而得

餘弦甲＝餘弦(九〇丨丙)餘弦呷丄正弦(九〇丨丙)正弦呷餘弦九〇。

式中丫號指兩數相減也卽

餘弦甲＝正弦丙餘弦呷。

則與徑用



呷吃呥本形所得者無異。惟其叮呥若爲九十度則依第五款之理。其吃呥弧亦爲九十度而其弧三角形有兩邊俱爲象限則其兩箇對角皆爲正角。而其式亦合于理因可得○=○故也。

若其夾角之兩弧乙與丙皆爲九十度則 甲=呷。而從公式可得 餘弦甲=餘弦呷。

第十八款 弧三角形以三邊爲主而明其任一角餘弦之式能徑從第十五上下兩款之式而得之。

因可將兩式各自乘之得

(正弦甲餘弦丙丅正弦丙餘弦甲餘弦𠮙)^{二}=正弦^{二}乙餘弦^{二}㖪．

正弦^{二}丙正弦^{二}𠮙=正弦^{二}乙正弦^{二}㖪．

相加得

(一丅餘弦^{二}甲)餘弦^{二}丙丅二正弦甲餘弦丙正弦丙餘弦甲餘弦𠮙丄正弦^{二}丙(一丅正弦^{二}甲餘弦^{二}𠮙)=一丅餘弦^{二}乙．

化之

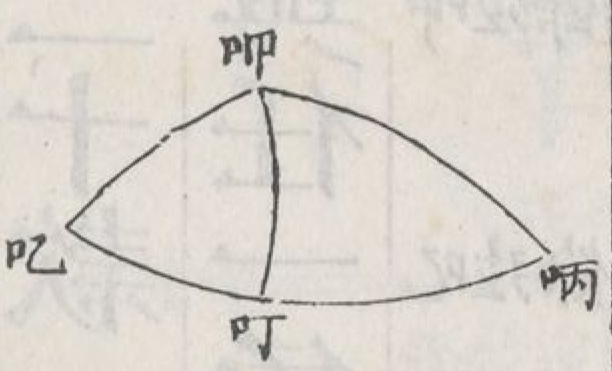
得(餘弦甲餘弦丙丄正弦甲正弦丙餘弦叱)^{二}＝餘弦乙^{二}、即餘弦乙＝餘弦甲餘弦丙丄正弦甲正弦丙餘弦叱、若開方之時、式之兩邊爲負、則因叱＝一八〇、而乙＝甲丄丙、之故也、

第十九款　凡弧三角形、若有兩弧相等、則兩弧所對之兩角、亦必相等、　反之、若有兩角相等、則其所對之兩弧、亦必相等、

凡弧三角形、其對大弧之角、必爲大角、

因 甲＝乙 則 餘弦呷＝$\dfrac{\text{正弦甲正弦丙}}{\text{餘弦甲（丅餘弦丙）}}$＝餘弦叱。而其呷叱二角各不能大于一百八十度。

所以必得 呷＝叱。若呷大于叱而叮呷叱角等于叮叱呷



角則 叮呷＝叮叱。所以 呐叮丄叮叱＝呐叮丄叮呷＞呷呐。即 甲＞乙。而大弧必對大角。

第二十款　如將前款所證能明任何弧三角形之三邊與任一角相關之式在呷叱㖞三角一一用之即可得

呷弦餘丙弦正乙弦正丄丙弦餘乙弦餘＝甲弦餘（一）

叱弦餘丙弦正甲弦正丄丙弦餘甲弦餘＝乙弦餘（二）

㖞弦餘乙弦正甲弦正丄乙弦餘甲弦餘＝丙弦餘（三）

此三式能包括弧三角法中一切之理。

若有弧三角形已知其任三事則從此三式可求得其餘三事。

惟因未知之數各應列其一定之法所以必更求其可與(一)式並用者以濟其窮

第二十一款　對弧對角相關之式亦能從任角之餘弦及三弧之餘弧明之

已有

$$\text{餘弦呷}=\frac{\text{餘弦甲丅餘弦乙餘弦丙}}{\text{正弦乙正弦丙}}$$

所以

$$\text{正弦}^{二}\text{呷}=\text{一丅餘弦}^{二}\text{呷}=\text{一丅}\frac{(\text{餘弦甲丅餘弦乙餘弦丙})^{二}}{\text{正弦}^{二}\text{乙正弦}^{二}\text{丙}}$$

$$=\frac{(\text{一丅餘弦}^{二}\text{乙})(\text{一丅餘弦}^{二}\text{丙})\text{丅}(\text{餘弦甲丅餘弦乙餘弦丙})^{二}}{\text{正弦}^{二}\text{乙正弦}^{二}\text{丙}}$$

$$=\frac{\text{一丅餘弦}^{二}\text{甲丅餘弦}^{二}\text{乙丅餘弦}^{二}\text{丙丄二餘弦甲餘弦乙餘弦丙}}{\text{正弦}^{二}\text{乙正弦}^{二}\text{丙}}$$

而

$$\frac{\text{正弦甲}}{\text{正弦呷}}=\frac{\text{正弦甲正弦乙正弦丙}}{\sqrt{(\text{一丅餘弦}^{二}\text{甲丅餘弦}^{二}\text{乙丅餘弦}^{二}\text{丙丄二餘弦甲餘弦乙餘弦丙})}}$$

此式中之

方根爲正號因$\frac{正弦甲}{正弦呷}$與正弦甲皆爲正數之故惟因式之右邊爲甲乙丙之常函數則無論甲乙丙三數如何更換其左邊之數必同所以其$\frac{正弦甲}{正弦呷}$式有三角形各角之常同數而必有三相等之式爲

$$\frac{正弦甲}{正弦呷}=\frac{正弦乙}{正弦叱}=\frac{正弦丙}{正弦呐}$$

從此可知所得之式必可爲公用所以任何弧三角形內各角之正弦相比必同于對邊之正弦相比

此理又可從第二十款之式證之法從其上兩式得其

$\frac{丙弦餘}{丙弦正}$之同數而代入一＝丙弦餘^{二}丄丙弦正^{二}式中，則得呷吃甲乙之相比。此為更簡之法。

第二十二款　求兩邊兩角相關之式，其兩角中有一為兩邊所成者。

卽如甲乙呷呥，若在甲弦餘＝乙弦餘丙弦餘丄乙弦正丙弦正呷弦餘（呷）式中，將其丙弦餘與丙弦正之同數如

餘弦丙＝餘弦甲餘弦乙⊥正弦甲正弦乙餘弦呬

正弦丙＝正弦甲$\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦呬}}$

代入則得

餘弦甲＝餘弦甲餘弦^{二}乙⊥正弦甲正弦乙餘弦乙餘弦呬⊥正弦乙正弦甲$\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦呬}}$餘弦呷

乃將 餘弦甲餘弦^{二}乙 移之又因

餘弦甲丅餘弦甲餘弦^{二}乙＝餘弦甲正弦^{二}乙

故將其全

式以正弦甲正弦乙約之則得

餘切甲正弦乙＝餘切呷正弦呩丄餘弦乙餘弦呩

此式與呷式皆可作公式之用而此式尤便于記憶因左右兩邊之第一項皆為餘切與正弦相乘而左為任兩邊右為任兩角而祗有其第一角對其所有之邊而末項為已有其正弦原度之餘弦相乘之數

第二十三款　求弧三角形三角與任一邊相關之式

最便之法可將第二十款之㊀式在其次形內用之卽

得餘弦甲′＝餘弦乙′餘弦丙′⊥正弦乙′正弦丙′餘弦呷

再將甲′乙′丙′呷′以本形之邊與角爲主而明之之

同數

甲′＝一八〇°丅呷

乙′＝一八〇°丅⿰口乙

丙′＝一八〇°丅⿰口丙

呷′＝一八〇°丅甲

代之卽可得甲邊之數在下式之中

餘弦甲＝丅餘弦乙餘弦丙丄正弦乙正弦丙餘弦甲

從此式又能得乙丙兩邊相配之式、　如欲求此式之證可將第二十款之三式消去其乙與丙即得、

第二十四款

求證訥白爾同比例之式、

從前款之式得

餘弦呷丄餘弦𠮙餘弦𠰺＝正弦𠮙正弦𠰺餘弦甲

餘弦𠮙丄餘弦呷餘弦𠰺＝正弦呷正弦𠰺餘弦乙

所以

$$\frac{\text{餘弦呷丄餘弦𠮙餘弦𠰺}}{\text{餘弦𠮙丄餘弦呷餘弦𠰺}}＝\frac{\text{正弦𠮙餘弦甲}}{\text{正弦呷餘弦乙}}＝\frac{\text{正弦乙餘弦甲}}{\text{正弦甲餘弦乙}}$$

若將其比例數之較

與其和相比則可得

$$\frac{\text{餘弦𠮙}\ 丄\ \text{餘弦呷}}{\text{餘弦𠮙}\ 丅\ \text{餘弦呷}} \times \frac{一\ 丄\ \text{餘弦𠰳}}{一\ 丅\ \text{餘弦𠰳}} = \frac{\text{正弦}(甲\ 丄\ 乙)}{\text{正弦}(甲\ 丅\ 乙)}$$

此式即

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}(呷\ 丄\ 𠮙)\ \text{正切}\tfrac{1}{2}(呷\ 丅\ 𠮙)\ \text{正切}^{2}\tfrac{1}{2}𠰳 = \frac{\text{正弦}\tfrac{1}{2}(甲\ 丄\ 乙)\ \text{餘弦}\tfrac{1}{2}(甲\ 丄\ 乙)}{\text{正弦}\tfrac{1}{2}(甲\ 丅\ 乙)\ \text{餘弦}\tfrac{1}{2}(甲\ 丅\ 乙)}$$

（一）又可從

$$\frac{\text{正弦𠮙}}{\text{正弦呷}} = \frac{\text{正弦乙}}{\text{正弦甲}}$$

得

$$\frac{正切\frac{二}{一}(呷丅吃)}{正切\frac{二}{一}(呷丄吃)}=\frac{正切\frac{二}{一}(甲丅乙)}{正切\frac{二}{一}(甲丄乙)}。$$

將此兩式相乘以左邊約其右邊而開其平方根卽得

$$正切\frac{二}{一}(呷丄吃)=\frac{餘弦\frac{二}{一}(甲丄乙)}{餘弦\frac{二}{一}(甲丅乙)}餘切\frac{二}{一}呐。$$

$$正切\frac{二}{一}(呷丅吃)=\frac{正弦\frac{二}{一}(甲丄乙)}{正弦\frac{二}{一}(甲丅乙)}餘切\frac{二}{一}呐。$$

其根用正號之故因$\frac{二}{一}(呷丅吃)$與$\frac{二}{一}(甲丅乙)$俱小于

九十度而其正角之號恆爲相同觀第十九款所以從(一)式可見正切二(呷丄吃)與餘弦二(甲丄乙)必爲同號而從此又可知二(呷丄吃)與二(甲丄乙)兩者或俱小于九十度或俱大于九十度而不能大于一百八十度。

又可用兩式推算其極三角形。

卽如將呷、吃、丙、甲、乙以一八〇丅甲、一八〇丅乙、一八〇丅丙、一八〇丅呷、一八〇丅吃代之卽可得兩式

如下。

$$正切\frac{二}{一}(甲+乙)=\frac{餘弦\frac{二}{一}(呷+叱)}{餘弦\frac{二}{一}(呷-叱)}正切\frac{二}{一}丙。$$

$$正切\frac{二}{一}(甲-乙)=\frac{正弦\frac{二}{一}(呷+叱)}{正弦\frac{二}{一}(呷-叱)}正切\frac{二}{一}丙。$$

第二十五款　前款所得之末兩式有時能引出如比例之形。此法爲訥白爾所設。故謂之訥白爾同比例法。其各式在解弧三角形中。大有用處。其首兩箇爲兩邊與其所成之角爲已知之數。其末兩箇爲一邊並其所倚之兩角爲已知之數。

其同比例之式又能以下法變之因

$$一\perp餘弦丙=一\perp餘弦甲餘弦乙\perp正弦甲正弦乙\left(餘弦^{二}\frac{一}{二}丙\top正弦^{二}\frac{一}{二}丙\right)$$

$$=\left[一\perp餘弦(甲\top乙)\right]餘弦^{二}\frac{一}{二}丙\perp\left[一\perp餘弦(甲\perp乙)\right]正弦^{二}\frac{一}{二}丙$$

所以

$$餘弦^{二}\frac{一}{二}丙=餘弦^{二}\frac{一}{二}(甲\top乙)餘弦^{二}\frac{一}{二}丙\perp餘弦^{二}\frac{一}{二}(甲\perp乙)正弦^{二}\frac{一}{二}丙$$

又

依同理得

正弦^{二}三丙══正弦^{二}三(甲丅乙)餘弦^{二}三丙丄正弦^{二}三(甲丄乙)正弦^{二}三丙。

再將首兩箇比例左右兩邊自乘而加之

又用上所有之餘弦二三丙／正弦二三丙之同數則得

正割二三(呷上吃)＝餘弦二三(甲上乙)正弦二三呥／餘弦二三丙

正割二三(呷下吃)＝正弦二三(甲上乙)正弦二三呥／正弦二三丙

開其方根

因(呷上吃)與三二(甲上乙)或俱大于九十度或俱小于九十度故但用

其正號之根，

餘弦$\frac{一}{二}$(呷丄吃)餘弦$\frac{一}{二}$丙 ══ 餘弦$\frac{一}{二}$(甲丄乙)正弦$\frac{一}{二}$呧。

餘弦$\frac{一}{二}$(呷丅吃)正弦$\frac{一}{二}$丙 ══ 正弦$\frac{一}{二}$(甲丄乙)正弦$\frac{一}{二}$呧。

此兩式又可變爲

正弦$\frac{一}{二}$(呷丄吃)餘弦$\frac{一}{二}$丙 ══ 餘弦$\frac{一}{二}$(甲丅乙)餘弦$\frac{一}{二}$呧。

正弦$\frac{一}{二}$(呷丅吃)正弦$\frac{一}{二}$丙 ══ 正弦$\frac{一}{二}$(甲丅乙)餘弦$\frac{一}{二}$呧。

有人用他法證此兩式即在餘弦$\frac{一}{二}$(呷丄吃)、餘弦$\frac{一}{二}$(呷丅吃)……之級數式內，將其

餘弦三呷
正弦三呷
……以其邊爲主而明之之同數代之詳見第三十五款。

興化劉彝程校算
上海曹擷亭繪圖

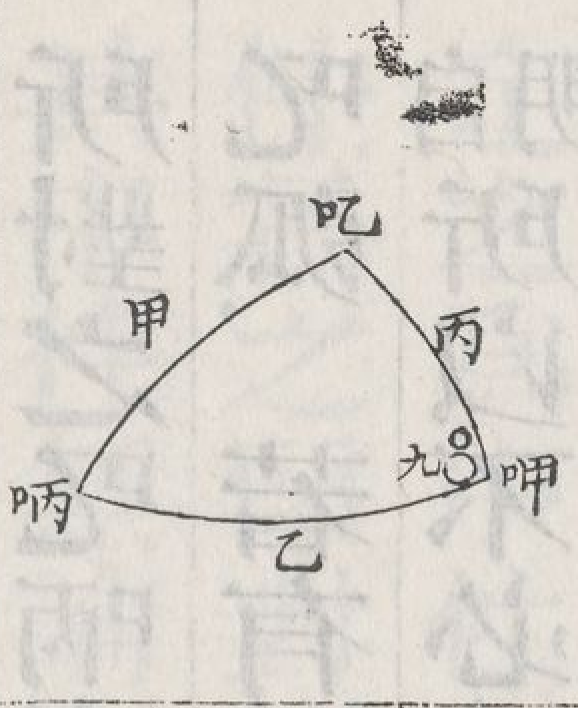
三角數理卷十

英國海麻士輯　英國　傅蘭雅　口譯

金匱　華蘅芳　筆述

解正弧三角形之法

第二十六款



如呷吃哂弧三角形呷角爲九十度其呷吃弧之大圈平面與呷哂弧之大圈平面彼此爲垂面則此種弧三角形名曰正弧三角形其吃哂弧以甲代之亦名之爲弦弧

凡名之爲正弧三角形之意因其三角之中有一角爲正

角其餘兩角或銳或鈍若呷吃二角皆爲正角則其所對之吃呐呷呐兩弧俱爲一象限而其呐角即爲呷吃弧 若有三角皆爲正角則各邊皆爲象限矣觀第四款自明所以不必論此種特設之式

凡尋常之弧三角形苟知其任三事則其餘各事俱可用法求之而正弧三角形因其正角亦爲已知之事則除一種題之外苟知其任兩事即可求其餘事

凡解正弧三角形之題祗須合呷＝九〇°以代入三角形之任一箇相等式中即得之矣

正弧三角形、已知其任兩事、而能將已知之數為主、以明其餘三事、俱可以訥氏之法賅之、是為最佳最便之法、茲特將訥氏之法、證明如下、

第二十七款　訥氏之法、凡正弧三角形、不計其正角、但將夾正角之兩弧、與對弧（對正角之弧也）之餘弧、及其餘兩角之餘角、共為五箇弧角分件、此五件中、任以一件為主、定之為中件、則在中件之兩旁者、名之曰倚件、其餘兩件、名之曰對件、

其中件無論如何、或為弧、或為對正角之餘弧、或為他角之餘角、中件之正弦、必等于兩倚件之切線相乘數

亦必等于兩對件之餘弦相乘數。

一如令對正角之餘弧（九〇°丅甲）爲中件，則（九〇°丅𠯆）與（九〇°丅呐）爲其倚件，

而乙與丙爲其對件，則從

餘弦呷＝丅餘弦𠯆餘弦呐丄正弦𠯆正弦呐餘弦甲

餘弦甲＝餘弦乙餘弦丙丄正弦乙正弦丙餘弦呷

之式，又因（呷＝九〇°）所以

餘弦呷＝〇

正弦呷＝一

而前式變為

餘弦甲＝餘切吃餘切呐

即

正弦(九〇°丅甲)＝正切(九〇°丅吃)正切(九〇°丅呐)

又

餘弦甲＝餘弦乙餘弦丙

即

正弦(九〇°丅甲)＝餘弦乙餘弦丙

二如令餘角九〇°丅呐為中件則九〇°丅甲與乙為其倚件而以九〇°丅吃與

丙爲其對件惟因

餘切甲正弦乙＝餘切呷正弦㖪丄餘弦㖪餘弦乙

餘弦㖪＝丅餘弦呷餘弦吃丄正弦呷正弦吃餘弦丙

變爲

餘弦㖪＝餘切甲正切乙

即

正弦（九〇丅㖪）＝正切（九〇丅呷）正切乙

又

餘弦㖪＝正弦吃餘弦丙

即

正弦（九〇丅㖪）＝餘弦（九〇丅吃）餘弦丙

若以九〇丅吃爲中件則可用同法求得兩箇相似之式

三如令任邊乙爲中件則九〇丅㖪與丙爲其倚件而九〇丅呷與九〇丅吃

爲其對件惟因

餘切丙正弦乙＝餘切呐正弦呷丄餘弦呷。

正弦呷正弦乙＝正弦甲正弦吅。

變爲

正弦乙＝餘切呐正切丙。

即

正弦乙＝正切（九〇丅呐）正切丙。

又

正弦乙＝正弦甲正弦吅。

即

正弦乙＝餘弦（九〇丅甲）餘弦（九〇丅吅）。

若令丙爲中件亦能以同法得兩箇相似之式

第二十八款　如此則正弧三角形之五件弧角可有十箇算式如將其各式以不同之法區別其每三件則能依其十箇不同之法合并之所以訥氏同比例之法如

有正弧三角形內之任兩事、卽能作一式、而得其餘各事、與其所知之兩事相等之式、而其式亦最便于用對數、

凡正弧三角形、只能有六種題、一爲已知其對正角之邊、及一角、或銳或鈍 二爲已知其對正角之邊與又一邊、 三爲已知正角旁之一邊及倚此邊之角、 四爲已知正角旁之一邊及對此邊之角、 五爲已知夾正角之兩邊、 六爲已知其餘兩角、

用訥氏之法、從兩箇已知之數求其三箇未知之數、有時必將已知之一事爲中件、又有時必將所求之一事

爲中件其意不過欲將各未知之事與各已知之事分開而合之耳茲試將解正弧三角形之事一一言之惟必先言其中有數件要事如下兩款

第二十九款

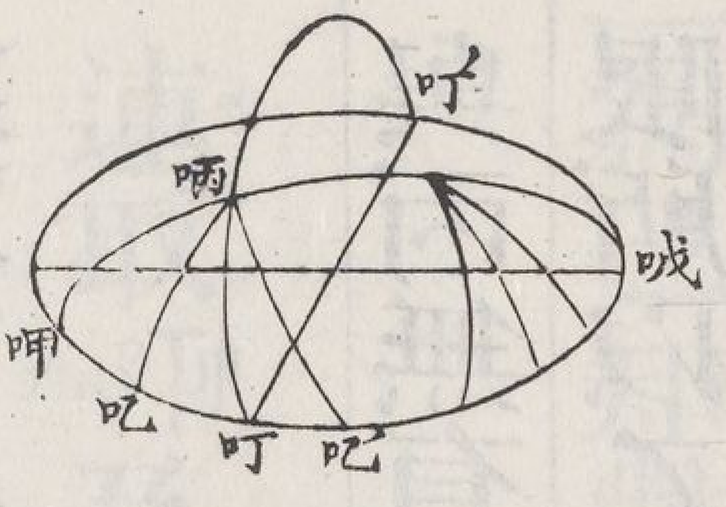
如第二十七款之式

$$餘弦甲=餘弦乙\,餘弦丙$$

必得三箇餘弦皆爲負或一箇餘弦爲負所以正弧三角形之三邊或俱小于九十度或兩邊大于九十度一邊小于九十度

從 正弦乙＝餘切呐正切丙＝$\frac{正切呐}{正切丙}$ 之式可知正切呐與正切丙必爲同號所以其正弦乙恆能爲正因乙必小于一百八十度之故也所以呐與丙皆不大于一百八十度且必或同大于九十度或同小于九十度卽正弧三角形之任一邊與其對角必俱大于正角或俱小于正角。

第三十款　所以如圖吖呐吖大圈之面與吖呷吖大圈



之面互爲垂面而㖶叮小于九十度則㖶叮爲從㖶點向叮呷叮大圈之間所能作之最小之弧而㖶叮爲最大之弧其各分弧愈近于㖶叮者愈小

如㖶吃叮正弧三角形其㖶叮小于九十度則其㖶吃叮角<九〇、㖶叮吃角<㖶吃叮角所以㖶吃<㖶叮、又如㖶吃叮正弧三角形其㖶吃叮角>九〇、㖶吃叮角>㖶叮吃角、所以㖶吃>㖶叮、又如呷吃㖶弧三角形㖶吃呷角>九〇、㖶呷吃角<九〇、因其呷角

爲呷叮呁正弧三角形呁叮之對角。所以 $呷呁<吃呁$。

第三十一款 茲論正弧三角形六法。

一爲已知對正角之弧甲。與角吃。求其乙丙呁。

連取乙與 $\frac{九〇丅吃}{九〇丅甲}$ 爲中件。卽得

$$正弦乙＝正弦甲正弦吃$$

$$餘弦吃＝餘切甲正切丙$$

$$餘弦甲＝餘切吃餘切呁$$

如此則其呁與丙無有不能定者。因其乙與吃必爲同大小于象限。所以乙亦易定。

二爲已知對正角之弧甲及又一弧乙求其丙叱㖦

連取九〇下甲及乙與九〇下㖦爲中件即得

餘弦甲＝餘弦乙餘弦丙

正弦乙＝正弦甲正弦叱

餘弦㖦＝餘切甲正切乙

如此則其㖦之大小可視丙而定因任何已知之餘弦只能有一箇小于一百八十度之角與之相配故也又其叱角雖用正弦因與乙弧必同大小于象限所以無不可定之事

三爲已知正角角旁之一弧乙並其倚角㖦求甲丙叱

連取九〇°丅呐及乙與九〇°丅吃為中件即得

餘弦呐＝正切乙餘切甲．

正弦乙＝正切丙餘切呐．

餘弦吃＝餘弦乙正弦呐．

如此則其甲丙吃亦無不定矣．

四為已知正角旁之一弧乙並其對角吃求甲丙呐．

連取乙及丙與九〇°丅吃為中件即得

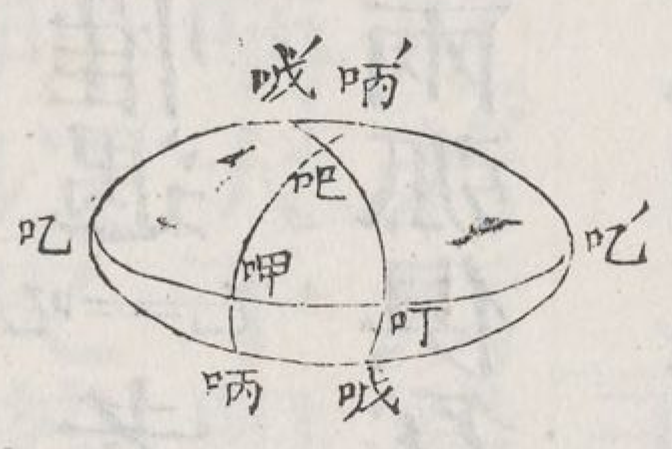
正弦乙＝正弦吃正弦甲．

正弦丙＝餘切吃正切乙．

正弦吃＝正弦呐餘弦乙．

如此則其

未知之件俱以正弦明之惟因正弦之數可有兩箇小于一百八十度之角與之相配則其角與弧有不定之意然易見其理當如此 試于圖中將叱呷叱哂兩邊引長之至再相遇于叱′卽得哂呷叱′次形其

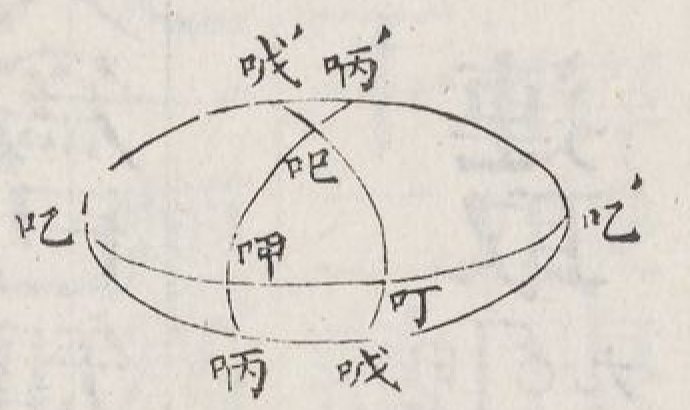


叱′═叱 與在呷叱哂本形者無異而次形之其餘各件則爲本形各件之外件所以其甲之同數可取小于九十度或大于九十度之數此數既定之後則其哂之同數可從 甲弦餘═丙弦餘乙弦餘 而得

之如此則其叱必與丙同大小于象限而正弧三角形之原同數必不出乎正次兩形之外

惟遇乙一叱者則祇能有一箇三角形中有兩箇正角有兩弧俱為一象限若其正弦乙大于正弦叱則不能有一箇三角形因其正弦甲之同數為虛故也且正弦乙果大于正弦叱而叱與乙又必同大小于象限試依叱之鈍銳而定乙之大小于叱之理論之必不能通所以其叱與乙不能為正弧三角形之件

因引長叱呐成叱呐叱呐大圈則吧爲呷叱之極吧



呷吧叮爲象限又叱爲哦吧哦之極則哦與叮皆爲正角若所設之叱角爲鋭而呷叱呐爲其三角形則依第三十款之例吧呐當小于吧哦所以呷呐小于叮哦即乙不能大于叱若所設之叱角爲鈍而呷叱呐爲其三角形則吧呐大于吧哦故呷呐大于叮哦即乙不能小于叱所以叱若爲鋭而云乙大于叱則無此弧三角形若乙等于叱則僅有一箇三角形若乙小于叱則有兩箇三角形又若叱爲鈍而乙小于叱亦無此弧三

角形乙等于叱則有一形乙大于叱則有兩形

五爲已知夾正角之兩弧乙與丙求其甲叱呐

連取 九〇丅呷 丙乙爲中件卽得

餘弦甲＝餘弦乙餘弦丙

正弦丙＝餘切叱正切乙

正弦乙＝餘切呐正切丙

則甲叱呐無不定

六爲已知兩箇斜角叱呐斜角者言其非正角也求其甲乙丙

連取 九〇丅呷 九〇丅叱 九〇丅呐 爲中件卽得

餘弦甲＝餘切叱餘切呐

餘弦叱＝餘弦乙正弦呐

餘弦呐＝餘弦丙正弦叱

此式中無不定之

數若其三角形爲不能成者則式中徑能指出其故

解象限與二等邊弧三角形之法

第三十二款　凡能用正弧三角形之法解之者其最要之一類爲象限弧三角此種弧三角形有一邊之弧甲爲象限因其極三角形有一呷′角爲呷′＝一八〇丅甲＝九〇。則可依第二十七款之例用訥氏法得

餘弦甲′＝餘切𠮙′餘切𠰳′。

餘弦𠰳′＝餘切甲′正切乙′。

正弦乙′＝餘切𠰳′正切丙′。

或

餘弦甲′＝餘弦乙′餘弦丙′。

餘弦𠰳′＝正弦𠮙′餘弦丙′。

餘弦乙′＝正弦甲′正弦𠮙′。

所以

將甲乙……之同數代其本數即得

丅餘弦呷＝餘切乙餘切丙

丅餘弦丙＝餘切呷正切吃

正弦吃＝餘切丙正切㖁

或

丅餘弦呷＝餘弦吃餘弦㖁

丅餘弦丙＝丅正弦乙餘弦㖁

正弦吃＝正弦呷正弦乙

即

正弦(呷丅九°)＝正切(九°丅乙)正切(九°丅丙)

正弦(九°丅丙)＝正切(呷丅九°)正切吃

正弦吃＝正切(九°丅丙)正切㖁

或

正弦(呷丅九°)＝餘弦吃餘弦㖁

正弦(九°丅丙)＝餘弦(九°丅乙)餘弦㖁

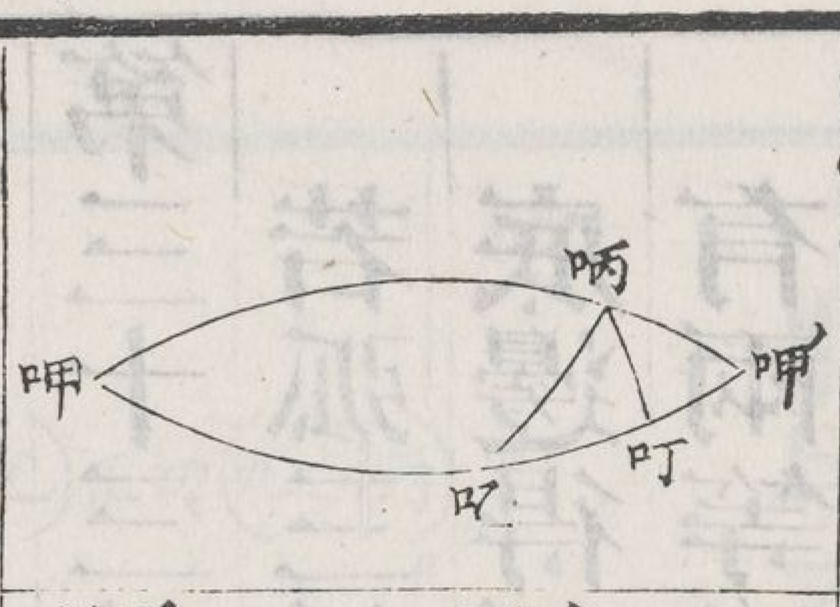
正弦吃＝餘弦(呷丅九°)餘弦(九°丅乙)

從此可見若將兩邊之餘弧，及對象限弧之負號餘角，並其他兩角，其爲五箇弧角分件，如九〇丅乙，九〇丅丙，丅(九〇丅呷)，吖，呐，則象限弧三角形能徑用訥氏之法解之，

第三十三款

若弧三角形有二等邊者，則從其交點作大圈，平分其底邊得兩箇正弧三角形，此兩形之各事相等，所以凡有兩等邊弧三角形，已知其任兩事，則其各事俱可依正弧三角形之法定之，但其兩箇等邊只可算一事，其兩箇對角，亦只算一事，

凡弧三角形內。若任兩邊之和甲丄乙=一八〇者。可將其乙丙兩邊



引長之至再遇于呷′。則得乙丄呐呷′=一八〇。而其呐吃=呷′呐。所以呷′吃呐三角形之解法。變為解呷呐吃三角形之事。而易明其呷丄吃=一八〇。因呷′呐=呐吃。而呐呷′吃角=呐吃呷′=呷。所以呷丄吃=呐吃呷丄呐吃呷′=一八〇。

論斜弧三角形

第三十四款 凡斜弧三角形。其呷𠮙哂甲乙丙六事中。必有三事爲已知。故其題只有六種。

一爲已知其三邊。 二爲已知其兩邊與對其任一邊之角。 三爲已知兩邊及所成之角、 四爲已知兩角並其任一角之對邊。 五爲已知兩角並其所倚之一邊。 六爲已知其三箇角、

以上各事。依第十五至第二十三款所言之四箇爲根本之式。俱易解之。惟其各式必變之。方合于用對數推算。則必各題分論其法。

第三十五款

第一種題爲有甲乙丙三邊而求其角，

從第十六款之式得

$$\text{餘弦呷}=\frac{\text{餘弦甲}\ \text{丅}\ \text{餘弦乙}\ \text{餘弦丙}}{\text{正弦乙}\ \text{正弦丙}}$$

則式之右邊俱爲已知之數，故從此可得呷之同數其吒與哂亦能依同理定之惟此式不合于用對數故必用下法變之，

惟因

$二正弦^{二}\frac{二}{一}呷=一丅餘弦呷$

若將其餘弦呷以同數代之則得

$二正弦^{二}\frac{二}{一}呷=一丅\frac{正弦乙正弦丙}{餘弦甲丅餘弦乙餘弦丙}=\frac{正弦乙正弦丙}{餘弦乙餘弦丙丄正弦乙正弦丙丅餘弦甲}$

$=\frac{正弦乙正弦丙}{餘弦(乙丅丙)丅餘弦甲}=\frac{正弦乙正弦丙}{二正弦\frac{二}{一}(甲丄乙丅丙)正弦\frac{二}{一}(甲丅乙丄丙)}$

又欲將此式變之使爲更簡之形則可令申代其三邊之半和

則

$$甲丄乙丄丙＝二申$$

而

$$甲丄乙丅丙＝二(申丅丙)$$

$$甲丅乙丄丙＝二(申丅乙)$$

所以用約法及開方可得

$$正弦\frac{二}{一}呷＝\sqrt{\frac{正弦乙正弦丙}{正弦(申丅乙)正弦(申丅丙)}}$$

又有簡法能求 $餘弦\frac{二}{一}呷$ 與 $正切\frac{二}{一}呷$ 之式。因

$$二餘弦\frac{二}{一}呷＝一丄餘弦呷＝$$

$$一丄\frac{正弦乙正弦丙}{餘弦甲丅餘弦乙餘弦丙}＝\frac{正弦乙正弦丙}{餘弦甲丅餘弦(乙丄丙)}$$

$$＝\frac{正弦乙正弦丙}{二正弦\frac{二}{一}(甲丄乙丄丙)正弦\frac{二}{一}(乙丄丙丅甲)}$$

$$＝\frac{正弦乙正弦丙}{二正弦申正弦(申丅甲)}$$

所以

得

$$\text{餘弦}\tfrac{一}{二}\text{呷}=\sqrt{\frac{\text{正弦乙正弦丙}}{\text{正弦申正弦}(\text{申}\,丅\,\text{甲})}}$$

又得

$$\text{正切}\tfrac{一}{二}\text{呷}=\frac{\text{餘弦}\tfrac{一}{二}\text{呷}}{\text{正弦}\tfrac{一}{二}\text{呷}}=\sqrt{\frac{\text{正弦申正弦}(\text{申}\,丅\,\text{甲})}{\text{正弦}(\text{申}\,丅\,\text{乙})\;\text{正弦}(\text{申}\,丅\,\text{丙})}}$$

從此各式能得其呷角、而無不定之事、因呷為弧三角形之角、則$\tfrac{一}{二}$呷必小于九十度、故各式最合于本題之用、其理與平三角一百十三款之式同、

第三十六款

將前款所得 正弦$\tfrac{一}{二}$呷 與 餘弦$\tfrac{一}{二}$呷 之同數、相乘倍之、則得式如左、

$$\text{正弦卯} = \frac{\text{正弦乙}\,\text{正弦丙}}{\text{二}}\sqrt{\text{正弦申}\,\text{正弦}(\text{申}-\text{甲})\,\text{正弦}(\text{申}-\text{乙})\,\text{正弦}(\text{申}-\text{丙})}$$

此式須用七箇對數、所以不便于求卯角之用、

從第二十一款正弦卯之式亦能變得此式、

第三十七款

第二種題、爲有兩弧甲乙並其對角卯、求其丙吃呐、

其對乙弧之角吃可從

$$\text{正弦吃}=\frac{\text{正弦甲}}{\text{正弦呷正弦乙}}$$

式得之則其呐與丙能從

訥氏之法得

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{呐}=\frac{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{甲丄乙})}{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{甲丅乙})}\text{餘切}\tfrac{1}{2}(\text{呷丄吃})。$$

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{丙}=\frac{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{呷丅吃})}{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{呷丄吃})}\text{正切}\tfrac{1}{2}(\text{甲丄乙})。$$

第三十八款　其吃角以正弦定之則可或大或小于九十度所以其解法有時可有兩數。

惟因已知之事甲乙呷所能有之各數無有一邊大于一百八十度者只有一箇三角形或並無一箇三角形此事與平三角第一百○五款之第二事相同後必仔細論之以攷其理

此種未定之事有法能稍免之因(甲丄乙)三與(呷丄吒)三俱能同大小于象限(觀第二十四款)故甲丄吒＞一八○°則呷丄吒＞一八○°所以若呷＞九○°則吒之大小于九○°之同數合于其呷丄吒＞一八○°所以可有兩箇弧三角形合于所設

之題又可以無有一箇如此之弧三角形合于所設之題

若其甲丄乙〈一八○°則呷丄叱〈一八○°所以呷若大于九○°則叱必小于九○°故只能有一種解法

惟若呷〈九○°則叱之同數或大或小于九○°能合于呷丄叱〈一八○°之事故其題可有兩種解法

第三十九款　其呐與丙能徑從所知之數而定之不必先求其叱

卽如從第二十二款得

$$\text{餘切甲正弦乙}=\text{餘切呷正弦丙}\ \text{丄}\ \text{餘弦乙餘弦丙}$$

$$=\text{餘弦乙}\left(\text{餘弦丙}\ \text{丄}\ \text{正弦丙}\frac{\text{餘弦乙}}{\text{餘切呷}}\right)$$

令牛爲從

$$\text{正切牛}=\frac{\text{餘弦乙}}{\text{餘切呷}}$$

式所定之副角所以

$$\text{餘切甲正切乙}=\frac{\text{餘弦牛}}{\text{餘弦}(\text{丙}\ \text{丅}\ \text{牛})}$$

卽

$$\text{餘弦}(\text{丙}\ \text{丅}\ \text{牛})=\frac{\text{正切甲}}{\text{正切乙餘弦牛}}$$

從此得 $\text{丙}\ \text{丅}\ \text{牛}$ 所以丙之同數亦能求得

又如有

$$\text{餘弦甲}=\text{餘弦乙}\,\text{餘弦丙}\perp\text{正弦乙}\,\text{正弦丙}\,\text{餘弦呷}$$

$$=\text{餘弦乙}\left(\text{餘弦丙}\perp\text{正弦丙}\,\text{正切乙}\,\text{餘弦呷}\right).$$

合斗爲從

$$\text{正切斗}=\text{正切乙}\,\text{餘弦呷}$$

式而定之副角所以又得

$$\text{餘弦甲}=\text{餘弦乙}\frac{\text{餘弦斗}}{\text{餘弦}(\text{丙}\top\text{斗})}.$$

即

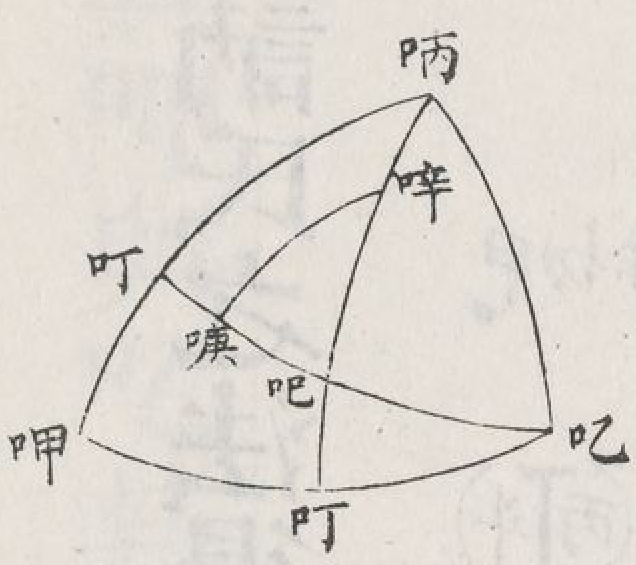
$$\text{餘弦}(\text{丙}\top\text{斗})=\frac{\text{餘弦乙}}{\text{餘弦甲}\,\text{餘弦斗}}.$$

從此能得$\text{丙}\top\text{斗}$所以亦能得其丙

第四十款　以上各款變化之法爲弧三角中常用者也
其意即將一箇有形爲寅正弦角⊥卯餘弦角之二項式變爲一箇相乘之
積其法令一箇倍數寅或卯爲全式之乘數所以能變
爲寅（正弦角⊥$\frac{寅}{卯}$餘弦角）。再將其$\frac{寅}{卯}$爲副角牛之正切或餘切之相等
數則因正切餘切可有各箇同數故恆能依代數之法

變其式爲 $\dfrac{\text{餘弦牛}}{\text{寅正弦(角丄牛)}}$ 即 $\dfrac{\text{正弦牛}}{\text{寅餘弦(角丅牛)}}$

第四十一款　可見用副角牛與斗即同于將所設之弧三角形分爲兩箇正弧三角形而算之



如圖令呥叮＝卒爲從已知兩弧之交點向對邊所作之垂弧若其呷呥叮＝牛呷叮＝斗則從其所分之呷呥叮.吃呥叮兩箇正弧三角形依

訥氏之法得

餘弦乙＝餘切牛餘切呷．

餘弦呷＝餘切乙正切斗．

從此以定其牛與斗而得

餘弦牛＝正切辛餘切乙．

餘弦乙＝餘弦辛餘弦斗．

所以得

$$\text{餘弦}(\text{丙丁牛})=\text{正切辛餘切甲}=\frac{\text{餘切乙}}{\text{餘弦牛}}\text{餘切甲}.$$

$$\text{餘弦甲}=\text{餘弦辛餘弦}(\text{丙丁斗})=\frac{\text{餘弦斗}}{\text{餘弦乙}}\text{餘弦}(\text{丙丁斗}).$$

此式與前得之式同而其未定之事亦同

第四十二款　第三種題爲已有甲乙兩弧並所成之角呐求其呷𠮙丙.

依訥氏之法得

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}(\text{呷}+\text{𠮙})=\frac{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})}{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})}\text{餘切}\tfrac{1}{2}\text{呐}.$$

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}(\text{呷}-\text{𠮙})=\frac{\text{正弦}\tfrac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})}{\text{正弦}\tfrac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})}\text{餘切}\tfrac{1}{2}\text{呐}.$$

從此式能得$\tfrac{1}{2}(\text{呷}+\text{𠮙})$.與$\tfrac{1}{2}(\text{呷}-\text{𠮙})$.故可得其呷與𠮙.其呷𠮙旣知.則從

$$\text{正弦丙}=\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦呐}}\text{正弦甲}.$$

能得其丙.惟勿忘其

大弧必對大角又其丙亦能從第二十五款之式求之惟須另用兩個對數耳

第四十三款　若不問其呷與叱而欲徑求其丙則有式爲

$$餘弦丙=餘弦甲餘弦乙\perp正弦甲正弦乙餘弦呥$$

$$=餘弦甲(餘弦乙\perp正弦乙正切甲餘弦呥)$$

令斗爲從

$$正切斗=正切甲餘弦呥$$

式所定之副角則可從

$$餘弦丙=\frac{餘弦斗}{餘弦甲餘弦(乙\top斗)}$$

式而得其丙無有不定之事

又有一法能從

$$\text{餘切呷} = \dfrac{\text{正弦呐}}{\text{餘切甲正弦乙} \;丅\; \text{餘弦乙餘弦呐}} = \text{餘切呐}\left(\dfrac{\text{餘弦呐}}{\text{餘切甲}}\text{正弦乙} \;丅\; \text{餘弦乙}\right)$$

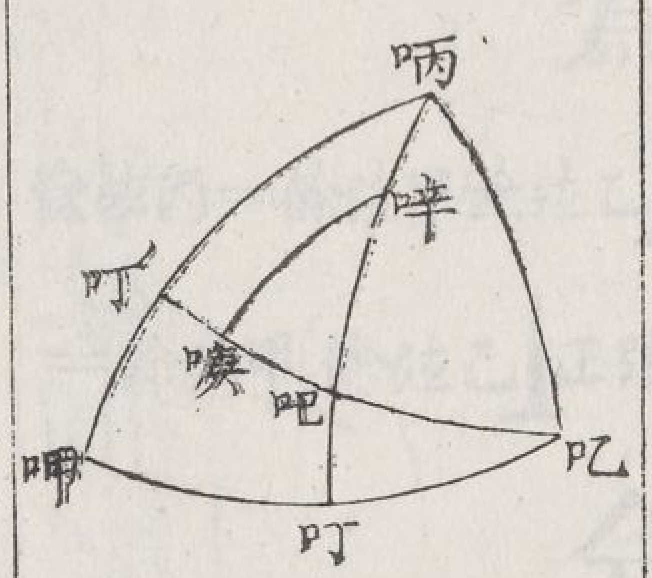
式不藉他數而得其呷此式中若

用副角之同數可變爲

$$餘切呷=\frac{正弦斗}{餘切呐正弦(乙丅斗)}.$$

又易知若作吃叮弧爲呷呐之垂弧令其截弧呐叮爲斗則其所得者同.

又如從呷角作對邊之垂弧則能依同法從已知之數求其丙與吃.



第四十四款

第四種題有呷吃兩角並其所倚之弧丙.

求其甲之呐.

依訥氏之法得

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})=\frac{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{呷}+\text{吃})}{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{呷}-\text{吃})}\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{丙}.$$

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})=\frac{\text{正弦}\tfrac{1}{2}(\text{呷}+\text{吃})}{\text{正弦}\tfrac{1}{2}(\text{呷}-\text{吃})}\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{丙}.$$

從此能定其$\tfrac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})$.$\tfrac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})$.所以能得其甲與乙既知此二者則從

$$\text{正弦呐}=\frac{\text{正弦甲}}{\text{正弦丙}}\text{正弦呷}.$$

能得其呐惟勿忘其大弧必對大角.

第四十五款

若不問其甲乙而欲徑求其呷丙則因

$$\text{餘弦呷}=\text{丅餘弦呷餘弦乙丄正弦呷正弦乙餘弦丙}$$

$$=\text{餘弦呷}(\text{丅餘弦乙丄正弦乙正切呷餘弦丙})$$

又從

$$\text{餘切牛}=\text{正切呷餘弦丙}$$

得

其副角牛則

$$\text{餘弦丙}=\frac{\text{正弦牛}}{\text{餘弦呷正弦}(\text{乙丅牛})}$$

又有法能從

$$餘切甲正弦丙 = 餘切呷正弦吃 \perp 餘弦丙餘弦吃$$

$$= 餘弦丙\left(餘弦吃 \perp 正弦吃\frac{餘弦丙}{餘切呷}\right)$$

式另得其甲將此式用副角斗則

變爲

$$餘切甲 = \frac{餘弦牛}{餘切丙餘弦(吃 \top 牛)}$$

觀此式易知若作吃吁弧爲呷呴之垂弧而

令呷吃吁角等于牛仍用前圖則以上之事易明又依同法

從呷角作垂弧則易從已知之數徑得其乙弧與哂角

此與第三種題相類亦無不定之事

第四十六款　第五種題已有兩角呷吃並此兩角內任一角對邊之弧甲求其乙丙哂

此與第二種題相類依法推之其不定之事亦同

先從

$$\text{正弦乙}=\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦吃}}\text{正弦甲}$$

得其乙又從

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{哂}=\frac{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})}{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})}\text{餘切}\tfrac{1}{2}(\text{呷}+\text{吃})$$

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{丙}=\frac{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{呷}-\text{吃})}{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}(\text{呷}+\text{吃})}\text{餘切}\tfrac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})$$

得哂丙

第四十七款　又有一法能徑從已知之數求其呐丙.

因有

餘弦呷＝丅餘弦乙餘弦呐丄正弦乙正弦呐餘弦甲

＝餘弦乙(丅餘弦呐丄正弦呐正切乙餘弦甲＝$\frac{\text{正弦井}}{\text{餘弦乙正弦(呐丅井)}}$.

其井爲從

餘切井＝正切乙餘弦甲

所定之副角又因其

餘切甲正弦丙＝餘切呷正弦乙丄餘弦丙餘弦乙.

若從

$$\text{餘切牛}=\frac{\text{餘弦𠮙}}{\text{餘切甲}}$$

而定其副角牛則變得

$$\text{餘切呷正弦𠮙}=\text{餘弦𠮙}\left(\text{丅餘弦丙}\perp\text{正弦丙}\frac{\text{餘弦𠮙}}{\text{餘切甲}}\right)$$

$$=\frac{\text{正弦牛}}{\text{餘弦𠮙正弦}(\text{丙丅牛})}$$

如作呐叮爲呷

𠮙之垂弧而合𠮙呐叮角等于丼則其截弧𠮙叮等于牛故易知能得其所求之事

第四十八款

第六種題爲已有三箇角呷𠮙呐求其三邊甲乙丙

解此種之題其算式亦可與第一種題之式同法求之因其

$$\text{餘弦甲}=\frac{\text{正弦吃正弦呐}}{\text{餘弦呷丄餘弦吃餘弦丙}}$$

所以

$$\text{二正弦}^{\text{二}}\underset{\text{二}}{\text{三}}\text{甲}=\text{一丅}\frac{\text{正弦吃正弦呐}}{\text{餘弦呷丄餘弦吃餘弦呐}}=\text{丅}\frac{\text{正弦吃正弦呐}}{\text{餘弦呷丄餘弦(吃丄呐)}}$$

$$=\text{丅}\frac{\text{正弦吃正弦呐}}{\text{二餘弦}\underset{\text{二}}{\text{三}}\text{(呷丄吃丄呐)餘弦}\underset{\text{二}}{\text{三}}\text{(吃丄呐丅呷)}}.$$

以代法令

$\text{呷吃丄呐}=\text{二呻}.$

$\text{吃丄呐丅呷}=\text{二(呻丅呷)}.$

而開平方.

則得

$$\text{正弦}\frac{一}{二}\text{甲}=\sqrt{\frac{\text{正弦叱正弦呐}}{丅\text{餘弦呻餘弦}(\text{呻}丅\text{呷})}}$$

又可依同理得其

$$\text{餘弦}\frac{一}{二}\text{甲}=\sqrt{\frac{\text{正弦叱正弦呐}}{\text{餘弦}(\text{呻}丅\text{叱})\text{餘弦}(\text{呻}丅\text{呐})}}$$

$$\text{正切}\frac{一}{二}\text{甲}=\sqrt{\frac{\text{餘弦}(\text{呻}丅\text{叱})\text{餘弦}(\text{呻}丅\text{呐})}{丅\text{餘弦呻餘弦}(\text{呻}丅\text{呷})}}$$

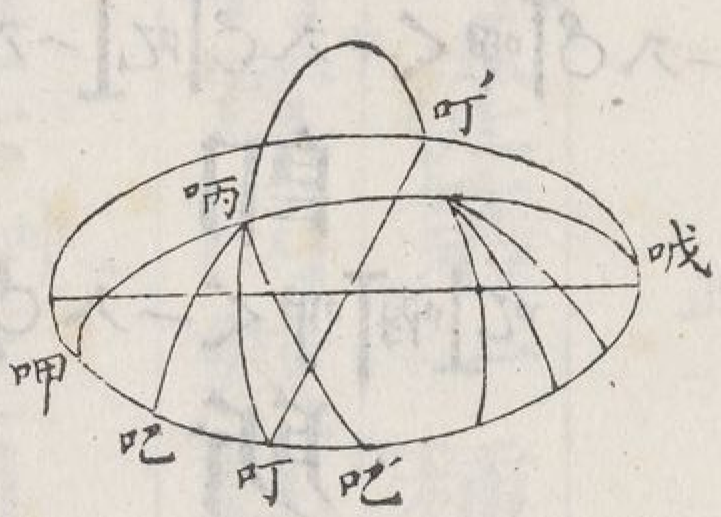
此數式亦可從第一種題內之式用極三角形而得之其式恆能有實同數其呻恆大于九十度而小于二百七十度所以其餘弦呻之同數恆爲負又因其次形內甲<乙丄丙觀第九款自明所以

其
一入○丁呷く十入○丁叱丄一入○丁呬
即
叱丄呐丁呷く一入○
所以
呻丁呷く九○
而其餘弦為正，又依同理知餘弦（呻丁叱）、餘弦（呻丁呐）亦俱為正號，

論解斜弧三角形內所遇不定之事

第四十九款　以上六種題內，有兩種題所推得之數，有未定之處，所以必從其已知之事，以攷其理，或能與兩箇弧三角形相配，或但能與一箇弧三角形相配，或竟

無一相配之弧三角形.
茲先論其第二種題.卽已有甲乙兩弧並對其一弧之呷角者是也.
如圖中之呷叮.叮′與叮呐.叮′爲彼此相交成正角之大圈.又令呷呐戊爲與呷叮.叮′成呐呷叮銳角之大圈.則



依第三十款之理.其呐叮小于九十度.而爲從呐點至呷叮.叮′大圈所能作之最小之弧.其呐.叮′爲最大之弧.則所截之弧.若與呐叮.呐.叮′等斜者.亦必等于其長.其弧若愈近于呐叮.則愈小.愈近于呐.叮′.則愈大.

再令其已知之角呷依其爲鋭爲鈍以㕨呷叮或㕨呷叮名之而令呷㕨爲已知之倚弧乙若其已知之對弧甲之大小在㕨叮㕨叮垂弧大小之間則以㕨爲極點而令甲爲角半徑所成之小圈必恒與呷叮叮在兩點相交則能定其已知之數呷乙申所能有之兩箇三角形除其一箇三角形或兩箇三角形不合于理之外不合于理謂有一弧大于一百八十度或有一角不等于甲而等于一百八十度與甲之較之類是也則無有不能定者

若有一弧甲小于㕨叮或大于㕨叮則以㕨爲極點而令角半徑等于甲爲半徑所成之小圈恒不能與呷叮

叮圈相交而必或在其上或在其下則依所設之數不能成弧三角形

此種之事亦能從第三十七款解題之式而知之若 甲<呐叮 則因 呐叮<九〇° 而

正弦甲<正弦呐叮<正弦呷正弦乙

若 甲>呐叮 則因 呐叮>九〇° 而

正弦甲<正弦呐叮<正弦呷正弦乙

故其

$$\text{正弦吃}=\frac{\text{正弦甲}}{\text{正弦呷正弦乙}}$$

式為求吃之用而不合于理

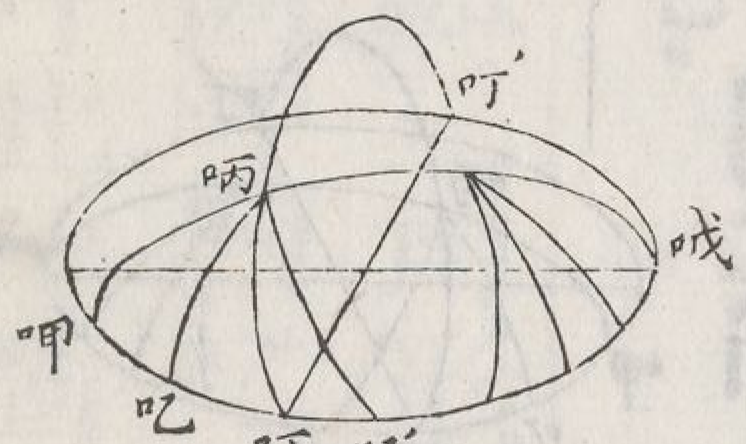
除此數種不合于理之事以外其大小兩圈恆能相交

茲欲攷明依其交點所定之一箇或兩箇弧三角形因

有一弧大于一百八十度或有一角等于一八〇甲而不等于

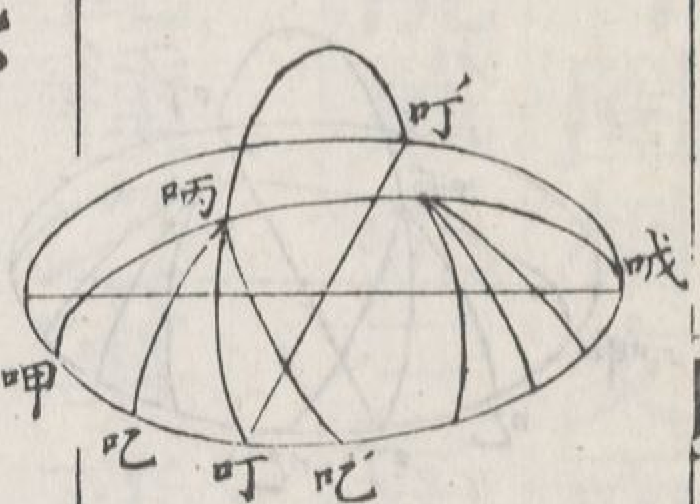
甲所以不能成弧三角形之故

第五十款　第一事令所知之角呷小于九十度乙亦小



于九十度則呷叮亦必小于九十度(觀二十九款)且必小于叮戊所以甲若小于乙則易

知能作一弧吃呐＝甲在呷呐與呐叮之間又能



作他弧呐吃＝甲。在哎呐與呐叮之間。如此則可得兩箇弧三角形。與所設之數相配。惟若甲＝乙。則其呷吃呐三角形不見。又若甲＞乙。則其呷吃呐三角形有一八〇－甲。之角。而非呷角。所以只有一呷呐吃弧三角形。能與所設之數相配。若其甲不小于一八〇－乙。則幷此一箇弧三角形亦不能有。

再令呷呥，觀書者須于圖之右旁自塡甲乙等字即 乙>九〇°。若 甲<一八〇°丅乙。則可作 呥吃＝呥′吃＝甲。在垂弧呥叮之兩邊，如此則得與所設之數相配之兩箇弧三角形，惟若 甲＝一八〇°丅乙。則呷呥吃爲瓣形，若其 甲>一八〇°丅乙。則呷呥吃弧三角形，有一邊之弧大于一百八十度，所以只賸一箇呷呥吃弧三角形，合于所設之事，若甲不小于乙則幷此一箇弧三角形，亦無有矣。

所以凡 乙<九〇° 者若 甲<乙 則有兩箇解法若 甲=乙 或 甲>乙 則有一箇解法若 甲丄乙=一八〇° 或 甲丄乙>一八〇° 則無解法

凡 乙>九〇° 者若 甲<一八〇°丅乙 則有兩箇解法若 甲=一八〇°丅乙 或 甲>一八〇°丅乙 則有一箇解法若 甲=乙 或 甲>乙 則無解法

第五十一款

第二事令所知之角小于九十度則依同理用呷呞吖三角形代呷呞吖三角形能證之如左

凡 乙<九〇° 者若 乙>一八〇°丅乙 則有兩箇解法若 甲=一八〇°丅乙 或 甲<一八〇°丅乙 則有一箇解法

若 甲=乙 或 甲<乙 則無解法

凡 乙>九〇° 者若 甲>乙 則有兩箇解法若 甲=乙 或 甲<乙 則有一箇解法

若甲=一八〇丅乙．或甲<一八〇丅乙．則無解法，

第五十二款

用極三角形之理，易知斜弧三角形之第五種即已知之數爲呷吃甲者是也可依上款之法解之，惟須將其甲乙之呷，變爲呷，吃申而已，又將其大于之號，變爲小于之號，小于之號，變爲大于之號，則從已知之事，只與一箇解法相配，惟其代數式之中，仍指出有兩箇解法，若算者勿忘其大弧必與大角相對之例，則易分别其兩箇解法中應用

那一箇解法、

上海曹攦亭繪圖
興化劉彝程校算