Fagnano, Giulio Carlo, conte di, marchese de' Toschi

LETTERA
Del Signor
GIOVANNI GALFI
Al Signor
FLAVIO GANGINI
CONTENENTE

Alcune Osservazioni intorno tre articoli dell' opera

DEL SIGNOR
COLIN MACLAURIN
SOPRA
IL CALCOLO DELLE FLUSSIONI.

Jos. Gavelli del. et sc.

IN PESARO; M. DCC. LIII.

NELLA STAMPERIA GAVELLIANA.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Gli Schediasmi del marchese Fagnani citati in questa lettera, si trovano come siegue nel Tomo II. delle sue *Produzioni Matematiche* impresse l'anno 1750. in Pesaro nella Stamperia Gavelliana.

Lo Schediasma, che fa l'articolo VII. del Tomo XXII. del Giornale de' Letterati d'Italia, si trova nel secondo Tomo delle *Produzioni Matematiche* alla pag. 317., e seg.

Lo Schediasma, che fa l' articolo X. del Tomo XXIX. del suddetto Giornale de' Letterati, si trova nel secondo Tomo delle *Produzioni Matematiche* alla pag. 343., e seg.

Lo Schediasma, che fa l' articolo IV. del Tomo XXX. dello stesso Giornale, trovasi nel secondo Tomo delle *Produzioni Matematiche* alla pag. 356., e seg.

VOi riſvegliate colla voſtra lettera i miei ſtudj analitici, e chiedete il mio parere circa gli articoli 802., 803., e 927. del trattato del celebre sig. Maclaurin ſopra le Fluſſioni : *in quanto detti articoli anno relazione alla miſura della curva Lemniſcata, e alla coſtruzione della curva Elaſtica.*

Prontamente vi riſpondo, e vi dico, che tutto è tolto d' una maniera palpabile dalle invenzioni del conte Giulio Fagnani, oggi marcheſe de' Toſchi, e di Sant' Onorio, e dell' accademia Reale di Berlino. Anzi ve lo provo, principiando dall' articolo 927.

Partizione prima.

L' inſigne matematico Scozzeſe fa menzione in detto articolo di ciò, che il sig. Giacomo Bernulli avanzò negli Atti di Lipſia 1694. pag. 272. intorno la curva Elaſtica, cioè: „ *Ob graves cauſas ſuſpicor curvæ noſtræ conſtructionem a nullius ſectionis conicæ, ſeu quadratura, ſeu rectificatione pendere* “, e ſoggiugne il sig. Maclaurin „ *cependant on la peut conſtruire par la rectification de l' Iperbole equilatere* “ e ne dà la coſtruzione.

Sapeva ciò beniſſimo il marcheſe Fagnani, e ſapevalo avanti che ſi pubblicaſſe non ſolo la traduzione Franceſe dell' opera Maclauriniana, ma l'opera ſteſſa nel nativo idioma Ingleſe. O per dir meglio, prima aſſolutamente, che il sig. Maclaurin.

Eragli in oltre noto, che la Lemniſcata può avere il ſuo uſo nella coſtruzione della curva Elaſtica, atteſochè egli nel Tomo XXII. del Giornale de' Letterati d' Italia impreſſo in Venezia l' anno 1715., e nell' articolo VII. di quello (dove eſpoſe diverſe ſue ſcoperte geometriche, e tra queſte il modo di tagliar per mezzo il quadrante della Lemniſcata) chiama queſta curva „ famoſa pel ſuo uſo nella coſtruzione delle cur- „ ve Elaſtica, e Iſocrona paracentrica ".

Nulladimeno intento il marcheſe Fagnani al ſuo principale oggetto, non ſi curò di ſtendere *eſplicitamente* nel primo Schediaſma, che pubblicò ſopra la miſura della Lemniſcata, un corollario della ſua invenzione immediato, e faciliſſimo, ch' egli ben conoſceva doverſi preſentar ſubito da ſe ſteſſo a qualunque non imperito analiſta.

Piacciavi di leggere l' articolo X. nel tomo XXIX. del Giornale de' Letterati d' Italia ſtampato in Venezia l' anno 1718., dove ſi trova detto primo Schediaſma col titolo di *Metodo per miſurare la Lemniſcata*, e vedrete alla pag. 263. il Teorema ſecondo di queſto tenore:

Siano le due equazioni

$$(A)\quad r = \frac{aa}{z}$$

$$(B)\quad S.\frac{-aadz}{\sqrt{a^4-z^4}} = S.\frac{-dz\sqrt{aa+zz}}{\sqrt{aa-zz}} + S.\frac{rrdr}{\sqrt{r^4-a^4}} - \frac{1}{z}\sqrt{a^4-z^4}$$

Io dico, che poſta la prima, ſuſſiſte anche l' altra.

O' amato meglio denotar l' equazioni colle lettere majuſcole, in vece de' numeri, e così farò in appreſſo.

Ponete voi nell' equazione (B) in cambio di $S.\frac{-dz\sqrt{aa+zz}}{\sqrt{aa-zz}}$ il ſuo equivalente $S.\frac{-dz(aa+zz)}{\sqrt{a^4-z^4}}$, cioè $S.\frac{-aadz}{\sqrt{a^4-z^4}} + S.\frac{-zzdz}{\sqrt{a^4-z^4}}$, e la ſteſſa equazione, traſponendo, ſi cangerà ſubito nella ſeguente $S.\frac{-zzdz}{\sqrt{a^4-z^4}} = \frac{1}{z}\sqrt{a^4-z^4} - S.\frac{rrdr}{\sqrt{r^4-a^4}}$, dove il primo mem-

bro

bro rappresenta un'ordinata della curva Elastica, e il secondo termine del secondo membro denota un arco dell' iperbola equilatera.

La diversità delle lettere impiegate dall'illustre geometra Scozzese, e da me, non potranno recarvi imbarazzo in tutta questa lettera.

Negate ora, se potete, che l' articolo 927. dell' opera del sig. Maclaurin non sia levato di pianta dallo scritto del marchese Fagnani. Non era punto necessario, che questi facesse menzione espressa della costruzion dell' Elastica; essa traluce dall' equazione (B) in guisa, che bisognerebbe esser ben curto di vista in geometria per non ravvisarla.

Il primo Teorema nella medesima produzione dell' autore Italiano, assai più ingegnoso del Teorema secondo, per buona sorte è rimasto intatto, benchè se ne potesse similmente desumere la costruzione della curva Elastica mediante la rattificazione dell' Iperbola equilatera.

Partizione seconda.

Passiamo agli articoli 802., e 803. del trattato Maclauriniano, e seguitiamo a considerare l' articolo X. del Tom. XXIX. del Giornale d' Italia; lasciando sempre da parte il primo Teorema di esso, di cui l' autore Scozzese non à mai fatto alcun uso; avendo preso unicamente di mira il secondo Teorema.

Sostituite nell' equazioni (A), e (B) registrate nella prima partizione l' unità in vece di a; $\sqrt{p}$ in luogo di r; e $\sqrt{q}$ in cambio di z; le medesime equazioni si muteranno nelle infrascritte $\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{q}}$, vale a dire $p = \frac{1}{q}$

$$S.\frac{-dq}{2\sqrt{q}\sqrt{1-qq}} = S.\frac{-dq\sqrt{1+q}}{2\sqrt{q}\sqrt{1-q}} + S.\frac{dp\sqrt{p}}{2\sqrt{pp-1}} - \sqrt{\frac{1-qq}{q}}$$

Or siccome $S.\frac{-dq}{2\sqrt{q}\sqrt{1-qq}}$ rappresenta l' arco della Lemniscata, così $S.\frac{-dq\sqrt{1+q}}{2\sqrt{q}\sqrt{1-q}}$, vale a dire $S.\frac{-dq}{2\sqrt{q}\sqrt{1-qq}} + S.\frac{-dq\sqrt{q}}{2\sqrt{1-qq}}$, esprime l' arco Elittico, ec., e parimente $S.\frac{dp\sqrt{p}}{2\sqrt{pp-1}}$ denota l' arco dell' Iperbola equilatera, ec.

Ar-

Archi tutti (insieme colla formola rettilinea, che gli accompagna) *leggermente travestiti* dal sig. Maclaurin, dopo aver presi quelli, e questa dal Teorema del marchese Fagnani; cui per conseguenza è dovuto l' intiero onore dell' invenzione.

Partizione terza.

L' articolo 802. del sig. Maclaurin ci somministra un terzo confronto, e lo faremo non meno felicemente coll' articolo IV. del Tomo XXX. del Giornale de' Letterati d' Italia impresso in Venezia, e parimente nell' anno 1718.

Ivi leggesi il secondo Schediasma per misurare la Lemniscata del march. Fagnani, e il primo Teorema di esso è questo: Siano le due equazioni infrascritte (C), e (D); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l' altra.

$$(C)\quad x = \frac{1}{z}\sqrt{1 \mp \sqrt{1-z^4}}$$

$$(D)\quad \frac{\pm dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$$

Se farete $x = \sqrt{g}$, e $z = \sqrt{f}$, le due equazioni (C), e (D) prenderanno quest' aspetto $\sqrt{g} = \sqrt{\frac{1}{f} \mp \frac{1}{f}\sqrt{1-ff}}$, cioè

$$(E)\quad g = \frac{1}{f} \mp \sqrt{\frac{1}{ff} - 1}$$

$$(F)\quad \frac{\pm df}{2\sqrt{f}\sqrt{1-ff}} = \frac{dg}{\sqrt{2g}\sqrt{1+gg}}$$

E perchè dall' equazione (E) trattata a dovere proviene

$$(G)\quad f = \frac{2g}{1+gg}$$

ne siegue ad evidenza, che il sig. Maclaurin à tratta dal marchese Fagnani quest' invenzione ancora.

Deè notarsi in primo luogo, che nella traduzione Francese dell' opera Inglese alla pag. 228., linee 11., e 12. sono occorsi due errori; poichè in vece di $\frac{2z\sqrt{2}}{1+zz}$ dee scriversi $\frac{2z}{1+zz}$,

e in

e in cambio di $\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1+zz}}$ à da porsi $\frac{dz}{\sqrt{2z}\sqrt{1+zz}}$

Esprimo le Flussioni Inglesi alla maniera invalsa nel resto d' Europa.

Si noti in secondo luogo, che dall' equazione (E) nasce l' altra, che siegue: $\sqrt{1-ff} = \pm (1-fg)$
E ponendo nel secondo membro di questa in vece di f il suo valore tratto dall' equazione (G), ne risulta

$$(H)\ \sqrt{1-ff} = \pm \frac{(1-gg)}{1+gg}$$

Di più, dalla suddetta equazione (G) maneggiata con accorgimento deriva l' infrascritta

$$\frac{\pm df}{2\sqrt{f}} = \frac{\pm dg(1-gg)}{\sqrt{2g}\,(1+gg)^{\frac{3}{2}}}$$

e questa divisa per l' equazione (H) dà per l' appunto l' equazione (F).

Considerate ora, che l'opera Maclauriniana, di cui si tratta, fu stampata in Inglese per la prima volta l' anno 1742., e in Francese l' anno 1749. All' incontro le produzioni del marchese Fagnani, delle quali si è parlato in queste tre partizioni, furono impresse in Venezia l' anno 1718., e una di esse nel 1715. Laonde il *nostro Italiano gode l' anteriorità luminosa, e incontrastabile almeno d' anni ventiquattro.*

Per altro noi siamo in un certo modo tenuti alla moderazione del sig. Maclaurin, perchè de' quattro primi Teoremi, egualmente belli del nostro Fagnani, contenuti nel secondo Schediasma di questo per misurare la Lemniscata, quegli se n' è appropriato solamente uno; benchè tutti e quattro potessero del pari accomodarlo, e condurlo al segno, ove tendeva. Il marchese Fagnani si valse egualmente di ciascuno di essi Teoremi per misurare la Lemniscata mediante la rettificazione della Parabola cubica primaria: Invenzione anch' essa affatto nuova, e non inferiore alla prima.

PAR-

La costruzione geometrica della formola $\frac{2z}{1+zz}$, che si legge nell' articolo 802. dell' opera del sig. Maclaurin, non solo è oscura, non solo non è dimostrata; ma neppur sussiste. Convien dunque cangiarla, ed emendarla come nel seguente

Teorema (fig. 1.)

Sia l' angolo retto isoscele *ABS*. Sulla retta *BA*, o sul prolungamento di essa di là da *A* rispetto a *B*, si tiri ad arbitrio dal punto *S* la retta *SL*, che tagli in *L* la *BA*; indi dal medesimo punto *S* si tiri l' altra retta *SV*, in modo che l' angolo *ASV* sia eguale all' angolo *BSL*; e in fine si cali la perpendicolare *AV*.

Ciò posto, si chiami z la *BL*, ed a la *BS* eguale alla *BA*, e prendasi la quarta proporzionale x dopo *BS*, *AV*, ed *SV*; io dico, che $x = \frac{2aaz}{aa+zz} = \frac{2z}{1+zz}$, ponendo l' unità in vece di a.

Dimostrazione.

E' visibile la simiglianza de' triangoli rettangoli *LBS*, *AVS*, donde nascono queste due analogie

$$LS\,(\sqrt{aa+zz})\,.\,BL\,(z)::AS\,(a\sqrt{2})\,.\,AV = \frac{az\sqrt{2}}{\sqrt{aa+zz}}$$

$$LS\,(\sqrt{aa+zz})\,.\,BS\,(a)::AS\,(a\sqrt{2})\,.\,SV = \frac{aa\sqrt{2}}{\sqrt{aa+zz}}$$

Prendasi per tanto questa terza analogia

$$BS\,(a)\,.\,AV\left(\frac{az\sqrt{2}}{\sqrt{aa+zz}}\right)::SV\left(\frac{aa\sqrt{2}}{\sqrt{aa+zz}}\right).\,x$$

e si vedrà essere $x = \frac{2aaz}{aa+zz}$. Il che doveva dimostrarsi.

Co-

Corollario I.

La quantità $\frac{1}{2}ax$ non può esser maggiore di $\frac{1}{2}aa$, cioè del triangolo ABS;

Imperciocchè dalla terza analogia si deduce, che $\frac{1}{2}ax$ è uguale a $\frac{1}{2}AV \times SV$; cioè al triangolo SAV, il quale non può esser maggiore del triangolo ABS, ch' è uguale a $\frac{1}{2}aa$; mentre il cerchio, che à la AS per diametro, e si concepisce passare pel vertice dell' angolo retto ABS, passa ancora per tutti i vertici degli angoli retti AVS.

Corollario II.

Quindi x non può esser maggiore di a. E ciò si vede ancora, estraendo il valore di z dall' equazione $x = \frac{2aaz}{aa+zz}$; perchè fatte le debite operazioni si trova $z = \frac{aa}{x} \pm \frac{a}{x}\sqrt{aa-xx}$: valore, che riescirebbe immaginario, se x fosse maggiore di a.

Partizione V.

Prima di finire dimostrerò un Teorema, che conduce a due verità supposte dal sig. Maclaurin, senza dimostrarle negli articoli 927., e 799. del suo trattato delle Flussioni. Egli si serve di esse in occasione delle antedette invenzioni, che à prese, come ò fatto vedere, dal marchese Fagnani.

Altro Teotema (fig. 2.)

Nell' iperbola equilatera BA, il di cui centro è C, sia CB l' abscissa centrale, BD l' ordinata normale sopra CD, BS la tangente; sul di cui prolungamento si cali dal punto B la perpendicolare CP;

Io dico, che CD, BD, DS sono in progressione geometrica continua.

DIMOSTRAZIONE.

Si chiami x la CD, ed a la CA, sarà l'ordinata $BD = \sqrt{xx - aa}$, per la natura dell'iperbola; la suttagente CS sarà $= \frac{aa}{x}$, e la SD sarà $\frac{xx - aa}{x}$.

Posto ciò, avremo $CD\ (x) \,.\, BD\ (\sqrt{xx - aa}) :: BD\ (\sqrt{xx - aa}) \,.\, SD = \frac{xx - aa}{x}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

I triangoli rettangoli CDB, BDS, CPS sono simili.

COROLLARIO II.

$CB = \frac{aa}{CP}$; imperciocchè per la similitudine de' triangoli CDB, CPS si à

$$CB \,.\, CD\ (x) :: CS\ \left(\frac{aa}{x}\right) \,.\, CP = \frac{aa}{CB}$$

dunque $CB = \frac{aa}{CP}$.

Questa verità è accennata senza prova dal sig. Maclaurin nell' articolo 927.

COROLLARIO III.

1. La stessa simiglianza de' triangoli CDB, CPS fa conoscere, che l'angolo BCS è uguale all'angolo SCP.

2. Perciò l'abscissa centrale, che nell'altro ramo dell'iperbola corrisponde alla CB, e gli è uguale; tale abscissa, dico, è un prolungamento della perpendicolare CP.

3. Quindi può dedursi una spedita maniera di tirar la tangente al punto B dell'iperbola equilatera. Mentre se nell'altro ramo dell'iperbola BA si prenderà quella centrale abscissa, che corrisponde, ed è uguale alla CB, e sopra di quella si calerà dal punto B la perpendicolare BP, questa sarà la tangente.

Co-

Corollario IV.

Dal centro C ſi tiri la CH, che tagli in H la AH perpendicolare in A, e la tagli in maniera che l'angolo HCB ſia eguale all'angolo BCS; i due triangoli rettangoli CAH, CPB ſaranno ſimili.

Perchè in virtù del primo punto del Corollario precedente l'angolo BCS è uguale all'angolo SCP, e per l'ipoteſi l'angolo HCB è uguale all'angolo BCS; dunque l'angolo PCB è uguale all'angolo ACH, ec.

Anche queſta verità è ſuppoſta, e non provata dal sig. Maclaurin nell' articolo 799.

Corollario V.

La ſunnormale DM dell'iperbola BA è uguale a CD, e la normale BM è uguale all'abſciſsa centrale CB.

Imperciocchè pel Teorema ſi à $SD . BD :: BD . CD$; ma abbiamo ancora $SD . BD :: BD . DM$; dunque $DM = CD$; e quindi per la ſimiglianza, ed egualità de' triangoli rettangoli MDB, CDB la BM è uguale alla CD.

Qui dò termine alle mie oſservazioni, che ſono frutti de' voſtri comandi. Fatene l'uſo, che vi parrà più proprio, e gradite l'attenzione di chi ſi profeſsa, ec.