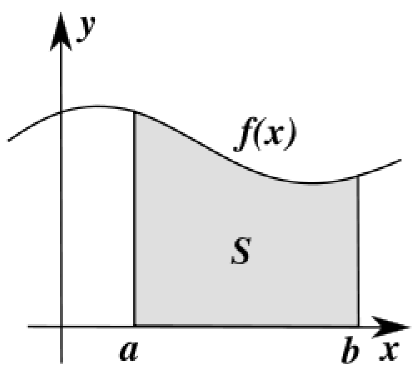
Da der Wurf ziemlich groß war, und Vorli als letzte geboren wurde, bekam sie wenig Milch ab. Die prallen Zitzen waren immer schon von den Geschwistern besetzt. Eine Zeitlang stand es kritisch um sie und sie musste von Hand aufgezogen werden.

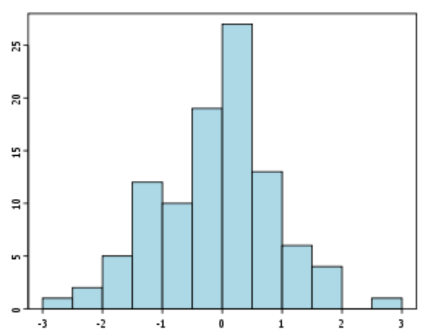


In den folgenden Vorlesungen beschäftigen wir uns mit der *Integrationstheorie*, d.h. wir wollen den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch einen Funktionsgraphen einer Funktion (dem *Integranden*)

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und der x-Achse begrenzt wird, systematisch studieren und berechnen. Zugleich ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Auffinden von *Stammfunktionen* von f, das sind Funktionen, deren Ableitung f ist. Der Flächeninhalt ist kein unproblematischer Begriff, der erst im Rahmen der *Maßtheorie* grundlegend behandelt wird. Dennoch handelt es sich um einen intuitiv leicht zugänglichen Begriff, von dem wir hier nur einige wenige naheliegende Grundtatsachen verwenden. Sie dienen hier auch nirgendwo der Argumentation, sondern lediglich der Motivation. Ausgangspunkt ist, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit gegebenen Seitenlängen einfach das Produkt der beiden Seitenlängen ist, und dass der Flächeninhalt einer Fläche, die man mit Rechtecken „ausschöpfen“ kann, als der Limes der Summe der beteiligten Rechtecksinhalte erhalten werden kann. Beim *Riemannschen Integral*, das zumindest für stetige Funktionen eine befriedigende Theorie liefert, beschränkt man sich auf solche Rechtecke, die parallel zum Koordinatensystem liegen, deren Breite (Grundseite auf der x-Achse) beliebig variieren darf und deren Höhe in Beziehung zu den Funktionswerten über der Grundseite steht. Dadurch werden die Funktionen durch sogenannte *Treppenfunktionen* approximiert.

Treppenfunktionen



Eine Treppenfunktion. Im statistischen Kontext spricht man von Histogrammen oder von Säulendiagrammen.

Definition 18.1. Es sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt eine Funktion

$$t \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I derart gibt, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

Diese Definition stellt also keine Bedingung an den Wert der Funktion an den Unterteilungspunkten. Das Intervall $]a_{i-1}, a_i[$ nennt man i-tes Teilintervall, und $a_i - a_{i-1}$ heißt Länge dieses Teilintervalls. Wenn die Länge der Teilintervalle konstant ist, so spricht man von einer *äquidistanten Unterteilung*.

Definition 18.2. Es sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und sei

$$t \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$T := \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

das *Treppenintegral* von t auf I.

Das Treppenintegral wird auch mit $\int_a^b t(x)\,dx$ bezeichnet. Bei einer äquidistanten Unterteilung mit der Teilintervalllänge $\frac{b-a}{n}$ ist das Treppenintegral gleich $\frac{b-a}{n}(\sum_{i=1}^{n} t_i)$. Das Treppenintegral ist nicht von der gewählten Unterteilung abhängig, bezüglich der eine Treppenfunktion vorliegt (man kann also die Unterteilung verfeinern).

Definition 18.3. Es sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt eine Treppenfunktion

$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *obere Treppenfunktion* zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$[1] für alle $x \in I$ ist. Eine Treppenfunktion

$$s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *untere Treppenfunktion* zu f, wenn $s(x) \leq f(x)$ für alle $x \in I$ ist.

Eine obere (untere) Treppenfunktion zu f gibt es genau dann, wenn f nach oben (nach unten) beschränkt ist.

Definition 18.4. Es sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder oberen Treppenfunktion

$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt das Treppenintegral

$$T := \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

ein *oberes Treppenintegral* (oder eine *Obersumme*) von f auf I.

Definition 18.5. Es sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder unteren Treppenfunktion

$$s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

[1] Dafür schreibt man auch $t \geq f$.

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \dots, n$, und den Werten s_i, $i = 1, \dots, n$, heißt

$$S := \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1})$$

ein *unteres Treppenintegral* (oder eine *Untersumme*) von f auf I.

Verschiedene obere (untere) Treppenfunktionen liefern natürlich verschiedene obere (und untere) Treppenintegralge.Für die weiteren Integrationskonzepte brauchen wir zwei Begriffe, die sich auf beliebige reelle Teilmengen beziehen.

Definition 18.6. Zu einer nichtleeren Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine obere Schranke T von M das *Supremum* von M, wenn $T \leq S$ für alle oberen Schranken S von M gilt.

Definition 18.7. Zu einer nichtleeren Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine untere Schranke t von M das *Infimum* von M, wenn $t \geq s$ für alle unteren Schranken s von M gilt.

Die Existenz von Infimum und Supremum ergibt sich aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen.

Satz 18.8. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Definition 18.9. Es sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach oben beschränkte Funktion. Dann heißt das Infimum von sämtlichen Treppenintegralen zu oberen Treppenfunktionen von f das *Oberintegral* von f.

Definition 18.10. Es sei I ein beschränktes Intervall und sei

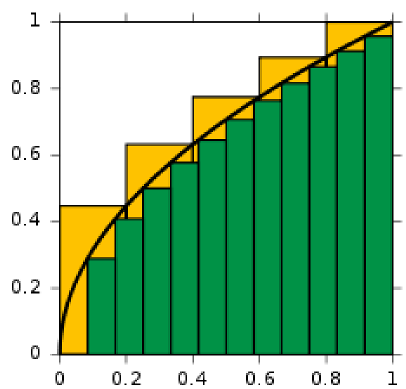
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach unten beschränkte Funktion. Dann heißt das Supremum von sämtlichen Treppenintegralen zu unteren Treppenfunktionen von f das *Unterintegral* von f.

Die Beschränkung nach unten stellt sicher, dass es überhaupt eine untere Treppenfunktion gibt und damit die Menge der unteren Treppenintegrale nicht leer ist. Unter dieser Bedingung allein muss nicht unbedingt die Menge der unteren Treppenintegrale ein Supremum besitzen. Für (beidseitig) beschränkte Funktionen existiert hingegen stets das Ober- und das Unterintegral. Bei einer gegebenen Unterteilung gibt es eine kleinste obere (größte untere) Treppenfunktion, die durch die Suprema (Infima) der Funktion auf den Teilintervallen festgelegt ist. Bei stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sind das Maxima bzw. Minima. Für das Integral muss man aber Treppenfunktionen zu sämtlichen Unterteilungen berücksichtigen.

Riemann-integrierbare Funktionen

Im Folgenden sprechen wir manchmal von einem kompakten Intervall, das ist ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, also von der Form $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.



Eine untere und eine obere Treppenfunktion. Der grüne Flächeninhalt ist eine Untersumme und der gelbe Flächeninhalt (teilweise verdeckt) ist eine Obersumme.

Definition 18.11. Es sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

Historisch korrekter ist es, von *Darboux-integrierbar* zu sprechen.

Definition 18.12. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

$$f\colon I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

heißt das Oberintegral (das nach Definition mit dem Unterintegral übereinstimmt) das *bestimmte Integral* von f über I. Es wird mit

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ oder mit } \int_I f(t)\,dt$$

bezeichnet.

Das Berechnen von solchen Integralen nennt man *integrieren*. Man sollte sich keine allzu großen Gedanken über das Symbol dt machen. Darin wird ausgedrückt, bezüglich welcher Variablen die Funktion zu integrieren ist. Es kommt dabei aber nicht auf den Namen der Variablen an, d.h. es ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Lemma 18.13. *Es sei I ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von unteren Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von oberen Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihr Grenzwert übereinstimmt. Dann ist f Riemann-integrierbar, und das bestimmte Integral ist gleich diesem Grenzwert, also

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)\,dx$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.11. □

Beispiel 18.14. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^2,$$

die bekanntlich in diesem Intervall streng wachsend ist. Für ein Teilintervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ ist daher $f(a)$ das Minimum und $f(b)$ das Maximum der Funktion über diesem Teilintervall. Es sei n eine positive natürliche Zahl. Wir unterteilen das Intervall $[0,1]$ in die n gleichlangen Teilintervalle

$$\left[i\frac{1}{n}, (i+1)\frac{1}{n}\right], i = 0,\ldots,n-1,$$

der Länge $\frac{1}{n}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen unteren Treppenfunktionen ist

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left(i\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

(siehe Aufgabe 2.10 für die Formel für die Summe der Quadrate). Da die beiden Folgen $(1/2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(1/6n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, ist der Limes für $n \to \infty$ von diesen Treppenintegralen gleich $\frac{1}{3}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen oberen Treppenfunktion ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left((i+1)\frac{1}{n}\right)^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Der Limes davon ist wieder $\frac{1}{3}$. Da beide Limiten übereinstimmen, müssen nach Lemma 18.13 überhaupt das Ober- und das Unterintegral übereinstimmen, so dass die Funktion Riemann-integrierbar ist und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

ist.

Lemma 18.15. *Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.*
(2) *Es gibt eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.*
(3) *Für jede Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ sind die Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar.*

In dieser Situation gilt

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.13. □

Definition 18.16. Es sei I ein reelles Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq I$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgrund des obigen Lemmas stimmen für ein kompaktes Intervall $[a, b]$ die beiden Definitionen überein. Die Integrierbarkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedeutet nicht, dass $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ eine Bedeutung hat bzw. existieren muss.

Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Satz 18.17. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir werden den Beweis, der auf dem Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit beruht, nicht durchführen. □

Lemma 18.18. *Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a)$.*
(2) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$.*
(3) *Die Summe $f+g$ ist Riemann-integrierbar und es ist $\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$.*
(4) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\, dt = c \int_a^b f(t)\, dt$.*
(5) *Die Funktionen $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind Riemann-integrierbar.*
(6) *Die Funktion $|f|$ ist Riemann-integrierbar.*
(7) *Das Produkt fg ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Für (1) bis (4) siehe Aufgabe 18.14. Für (5) siehe Aufgabe 18.16. (6) folgt direkt aus (5) wegen $|f| = \max(f, -f,)$. Für (7) siehe Aufgabe 18.17. □

Abbildungsverzeichnis