定量問題

王邦珍編

學藝叢書

16

中華學藝社出版


B.S.I.
中國國際圖書館

學藝叢書

16

定量問題

王邦珍編

目　錄

定量問題

第一章　線分及圓弧

1. 由二等邊三角形底邊上一點引等邊平行線,所得之平行四邊形有定周.

解 由底邊 AC 上任一點 O 引

$$OM \parallel BC, \quad ON \parallel BA,$$

則平行四邊形 $OMBN$ 有定周.

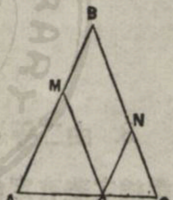


圖 1.

因 $\triangle OMA, ONC$ 俱為二等邊形,

$\therefore \qquad ON=NC,\ OM=AM$

$\therefore \qquad BM+MO=AB, \quad BN+NO=BC$

$\therefore \qquad BM+MO+ON+NB=2AB=\text{cons.}$

2. 由二等邊三角形底邊上一點引等邊垂線,則此二垂

線之和有定值.

解 由二等邊三角形 ABC 底邊 AC 上任一點 O,引 OM, ON 垂直於 AB, BC,則 $OM+ON$ 有定值.

引 CH 垂直 AB, OK 垂直 CH, CL 平行 AB 交 MO 延線於 L.

圖 2.

則 $ML=HC$

又 $\triangle OCN \equiv OCL$

$\therefore$ $ON=OL$

$\therefore$ $OM+ON=ML=HC$

$=\text{cons.}$

3. 由二等邊三角形底邊延線上一點引等邊垂線,則此兩垂線之差有定值.

4. 由二等邊三角形底邊上一點至等邊引定角直線,則此兩線之和有定值.

5. 由二等邊三角形底邊延線上任一點至等邊引定角直線,則此二線之和有定值.

解 由二等邊三角形 ABC 底邊 AC(或延線)上一點 O

引 OM, ON 使 $O\hat{M}A, O\hat{N}C$ 等定角，則 $OM+ON$ 有定值.

引 CH 平行 OM, OK 平行 AB, CL 平行 AB 交 MO 於 L.

其餘同 2 題按之卽得.

6. 由正三角形內一點至各邊引垂線其和有定值.

解 O 爲正三角形 ABC 內一點至各邊引垂線 OL, OM, ON 其和有定值.

過 O 引 DE 平行 AB 則 $\triangle CDE$ 爲等脚.

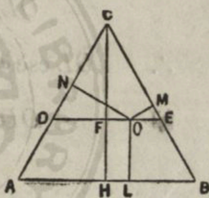


圖 3.

由 C 引 CH 垂直 AB 交 DE 於 F.

則 $\qquad ON+OM=CF$

$\therefore\quad OM+ON+OL=CH=\text{cons.}$

7. 由一點至正三角形之各邊引垂線，則其代數和有定值.

解 合 3,6 二題解之卽得.

8. 由正三角形內一點至各邊引定角直線，則其和有定

值.

證 O 爲正三角形 ABC 內一點,引 OE, OD, OF 與各邊成定角 α, 則 OD, OE, OF 之和有定值.

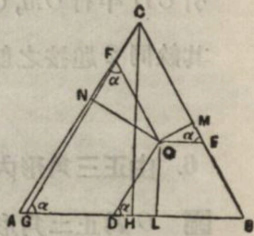


圖 4.

引 OL, OM, ON 垂直於三邊, CH 垂直 AB, CG 與 AB 成 α 角.

由題 6 得

$$OL+OM+ON=CH$$

$$\therefore \quad OL\csc\alpha+OM\csc\alpha+ON\csc\alpha=CH\csc\alpha$$

卽

$$OD+OE+OF=CG=\text{cons.}$$

9. 由正多邊形內一點至各邊或其延線引垂線,其和有定值.

證 正多邊形 $ABCD\cdots\cdots$ 之一邊爲 a, 則

$$ABCD\cdots\cdots=\triangle APB+BPC+\cdots\cdots$$

$$=\tfrac{1}{2}(PE+PF+\cdots\cdots)a$$

但 P 爲正多邊形形內一點, $PE, PF, \cdots\cdots$ 爲由 P 至 AB, $BC, \cdots\cdots$ 各邊之垂線.

設 r 爲其內半徑，n 爲其邊數，則得

$$ABCD\cdots\cdots=\frac{1}{2}nar$$

$$\therefore\qquad PE+PF+\cdots\cdots\cdots=nr$$

卽垂線之和有定長.

10. $\triangle ABC$ 底 BC 有定長有定位，A 爲任意點，邊 AB，AC 之中點爲 D, E，則線分 DE 有定長.

解 $$DE=\frac{1}{2}BC=\text{cons.}$$

11. $\triangle ABC$ 底 BC 之中點爲 M，過 M 引 PMQ 交 AB，AC 於 P, Q，若 $AP=AQ$ 則 $BP:CQ$ 爲定比.

解 由 B 引 AC 平行線交 QP 於 N 則

$$P\hat{N}B=P\hat{Q}A=Q\hat{P}A=B\hat{P}N$$

故 $\triangle PBN$ 爲等脚.

$\therefore\qquad BP=BN$

然 $\qquad\triangle BMN\equiv MCQ$

$\therefore\qquad CQ=BN=BP$

卽 $\qquad BP:CQ=1$

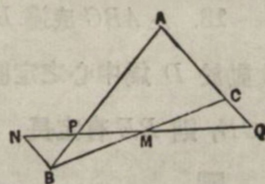


圖 5.

12. 過任意 $\triangle ABC$ 之頂點 B,C 引 BP,CQ 垂直於 BA,CA；且 BP,CQ 各等於 BA,CA. 次引 PM,QN 垂直於 BC 之延線，若 B,C 俱爲銳角，則

$$\frac{BC}{PM+QN}=\text{cons.}$$

若 B,C 有一爲鈍角，則

$$\frac{BC}{PM\sim QN}=\text{cons.}$$

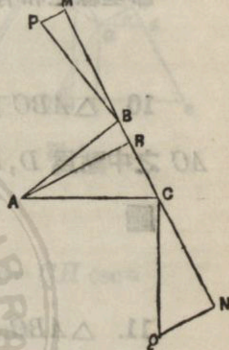


圖 6.

解 引 $AR\perp BC$

則 $PM=BR$,

$QN=CR$

$\therefore$ $PM\pm QN=BC$

$\therefore$ $\dfrac{BC}{PM\pm QN}=1$

13. $\triangle ABC$ 底邊 BC 上向外側作正三角形 BCD, 頂點 A 動於 D 爲中心之定圓周上，在 AC 邊上向外作正三角形 ACE, 則 BE 有定長.

解 $\triangle ACD\equiv BCE$

$\therefore$ $BE=AD=\text{cons.}$

14. X 為 $\triangle ABC$ 邊 BC 上之一動點，則

圓 ABX 之半徑：圓 ACX 之半徑 $=$cons.

解 引 $AD\perp BC$

以 R_1, R_2 表 $\triangle ABX, ACX$ 之外半徑，則

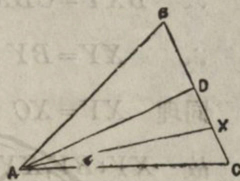


圖 7.

$$R_1\cdot AD=AB\cdot AX,$$

$$R_2\cdot AD=AC\cdot AX$$

$$\therefore\quad R_1:R_2=AB:AC$$

$$=\text{cons.}$$

15. 線分 BC 與其外任一點 A 成 BAC 角，作此角之內外二等分線，交 BC 及其延線於 D, E，則

$$\frac{1}{BD}+\frac{1}{BE}=\text{cons.}$$

解 B, D, C, E 為調和列點.

$$\therefore\quad \frac{1}{BD}+\frac{1}{BE}=\frac{2}{BC}=\text{cons.}$$

16. 二等邊 $\triangle ABC$，底角 B, C 之二等分線交對邊於 X,

Y,則 $XY:YB$ 及 $XY:XC$ 爲定比.

解　$\triangle BXC \equiv CYB$

$\therefore\quad XY \parallel CB$

$\therefore\quad B\hat{X}Y = C\hat{B}X = X\hat{B}Y$

$\therefore\quad XY = BY$

同理　$XY = XC$

故　$XY:BY, XY:XC$俱爲定比.

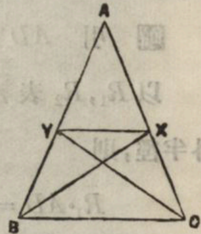


圖 8.

17. 過 $\triangle ABC$ 之內心 O 引 XY 平行 BC 交 AB, AC 於 X, Y, 則 $BX+CY:XY$ 爲定比.

解　$X\hat{O}B = O\hat{B}C$

$= O\hat{B}X$

$\therefore\quad BX = XO$

同理　$CY = YO$

$\therefore\quad BX+CY:XY = 1$

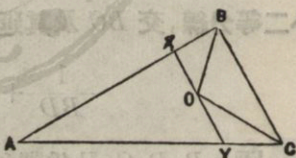


圖 9.

18. 由高線分任意三角形爲二個直角三角形,作其內接圓,由是二倍三高線之和減六圓直徑之和其差爲常數.

解　$\triangle ABC$ 之高爲 AD，作 $\triangle ABD$ 之內接圓 O，切點爲 E, F, G.

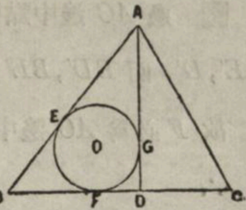


圖 10.

則　$AE = AG$

$EB = FB$

$DG = DF$

故　O 圓之直徑 $= AD + BD - AB$　(1)

同樣　$\triangle ADC$ 內切圓之直徑 $= CD + AD - AC$　(2)

(1)，(2) 相加爲

$$2AD + BD + DC - AB - AC = 2AD + BC - AB - AC$$

故六圓直徑之和爲

$$\Sigma(2AD + BC - AB - AC)$$

$\therefore$　2(三高之和) − (六圓直徑之和)

$= AB + BC + CA$

$=$ cons.

19. $\triangle ABC$ 邊 $BC > CA$，在 BC 上取一點 D，使 BD 等 BA，BC 之半和；又於 BA 延線上取 E 點，使 BE 等 BD. DE 聯線交 AC 於 F，則 $CF : FA$ 爲定比.

解 過 AC 邊中點引 $A\hat{B}C$ 二等分線之垂線,交 BA,BC 於 E',D', 而 BD',BE' 常等於 $\dfrac{BA+BC}{2}$.

故 F 必為 AC 邊中點.

$\therefore \qquad CF:FA=1$

20. 直角二等邊 $\triangle ABC$, 過 A 引 AD 平行 BC, 使 BD 等 BC. AC,BD 交於 E, 則 $CE:CD$ 為定比.

解 引 $DF\perp BC$

則 $DF=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{BD}{2}$

$\therefore \quad D\hat{B}F=30°$

$B\hat{D}C=75°=B\hat{C}D$

然 $A\hat{C}B=45°$

$\therefore \quad A\hat{C}D=30°$

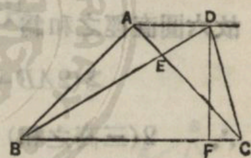


圖 11.

因此 $CD=CE$

$\therefore \quad CD:CE=1=\text{cons.}$

21. $\triangle ABC$ 邊 BC 上任取一點 P, $\triangle ABP,ACP$ 外半徑之比有定值.

解　$\triangle ABP, ACP$ 之外半徑爲 r, r'，由 A 引 BC 垂線爲 h.

則　$$AB\cdot AP=2r\cdot h,$$
$$AC\cdot AP=2r'\cdot h$$

∴　$$\frac{r}{r'}=\frac{AB}{AC}=\text{cons.}$$

22. $\triangle ABC$ 底邊 BC 上取一點 P，引 PM 平行於其對應中線交二邊於 M, N，則 $PM+PN$ 有定長.

解　引 CH 平行 AB 交中線於 A'，PM 於 H，則

$$PN=PH$$

∴　$$PM+PN=MH$$
$$=AA'$$

卽　$$PM+PN=2AD$$
$$=\text{cons.}$$

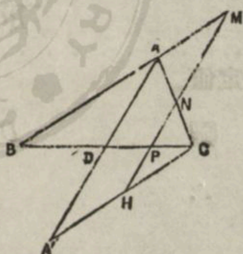


圖 12.

23. 過定角 MAN 內二等分線上定點 O 引直線 MON 交二邊於 M, N，則 $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}$ 有定值.

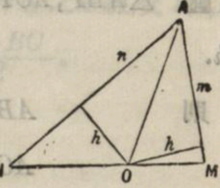


圖 13.

解 設 $AM=m, AN=n$,

由 O 至邊之距離為 h,

則 $$2\triangle AMN=mh+nh$$

$$=mn\sin\theta$$

θ 表定角 MAN.

$$\therefore\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{\sin\theta}{h}=\text{cons.}$$

24. **過 $\triangle ABC$ 形內一點 P 平行於三邊引線分 DE, FG, HI 交各邊於 D, E, F, G, H, I, 則**

$$\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{IH}{AB}$$

有定值.

解 $$DE \parallel BC, FG \parallel AC$$

$$\therefore\quad \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB},$$

$$\frac{FG}{CA}=\frac{BG}{AB}$$

$$\therefore\ \frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{IH}{AB}=\frac{AD}{AB}+\frac{BG}{AB}+\frac{IH}{AB}$$

$$=\frac{AD+BG+IH}{AB}\qquad(1)$$

然 $IH=PH+PI$

$=BD+AG$

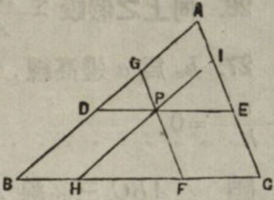


圖 14.

故(1)之分子爲

$AD+BG+BD+AG$

$=AD+BD+BG+AG$

$=2AB$

$$\therefore \quad \frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{IH}{AB}=2=\text{cons.}$$

25. 過 $\triangle ABC$ 內一點 O, 由項點至對邊引直線 Aa, Bb, Cc, 則 $\Sigma\frac{Oa}{Aa}$ 爲定值.

證 $\dfrac{\triangle BOC}{\triangle ABC}=\dfrac{Oa}{Aa}$

$\dfrac{\triangle AOC}{\triangle ABC}=\dfrac{Ob}{Bb}$

$\dfrac{\triangle BOA}{\triangle ABC}=\dfrac{Oc}{Cc}$

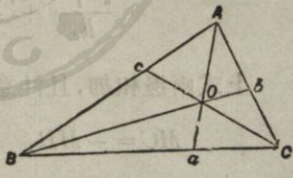


圖 15.

$$\therefore \quad \frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}$$

$$=\frac{\triangle BOC+COA+AOB}{\triangle ABC}$$

$=1=\text{cons.}$

26. 同上之假設 $\Sigma\frac{AO}{Aa}$ 亦定值.

27. h_a 爲 a 邊高線，α 爲 a 邊中點與高足之距離，則

$\Sigma\frac{\alpha}{h_a}=0$.

解 $\triangle ABC$ 三高線 AH, BH', CH'' 各以 h_a, h_b, h_c 表之，BC, CA, AB 之中點爲 M, M', M''，則

$$\triangle AHC \backsim BH'C$$

$$\therefore \quad MC-\alpha : h_a = M'C+\beta : h_b$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{h_a}+\frac{\beta}{h_b}=\frac{MC}{h_a}+\frac{M'C}{h_b}$$

同理 $$\frac{\beta}{h_b}+\frac{\gamma}{h_c}=\frac{M'A}{h_b}+\frac{M''A}{h_c}$$

$$\frac{\gamma}{h_c}+\frac{\alpha}{h_a}=\frac{M''B}{h_c}+\frac{MB}{h_a}$$

上式兩邊相加，且注意

$$MC=-MB,\quad M'A=-M'C,\quad M''B=-M''A$$

則得 $$\frac{\alpha}{h_a}+\frac{\beta}{h_b}+\frac{\gamma}{h_c}=0$$

28. G 爲 $\triangle ABC$ 之重心，任引一直線切於 G 爲中心之

定圓,由頂點 A, B, C 至此切線引垂線 AA', BB', CC' 則 $AA'+BB'+CC'$ 有定値.

解 由 A,B,C,D,G,M 至切線 P 之垂線 $AA', BB', CC', DD', GG', MM'$ 其長各以 a,b,c, d,g,m 表之,但 M 爲 AG 中點.

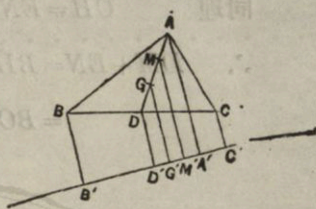


圖 16.

$$b+c=2d \qquad (1)$$

$$a+g=2m \qquad (2)$$

$$d+m=2g \qquad (3)$$

(1),(2) 相加得　$a+b+c+g=2(d+m)$

代入(3)則　$a+b+c+g=4g$

$\therefore$　$a+b+c=3g$

即　$AA'+BB'+CC'=\text{cons.}$

29. BC 爲定線,於其上畫半圓,在周上任取一點 A,過 B,C 引邊 AB,AC 之垂線,且截 $BD=AB,CE=AC$. 由 D,E 引 BC 垂線其足爲 M,N, 則 $DM+EN$ 有定値.

解 引 AH 垂直 BC,則

$\triangle ABH \equiv BDM$

$\therefore \quad BH = DM$

同理 $\quad CH = EN$

$\therefore \quad DM + EN = BH + CH$

$= BC$

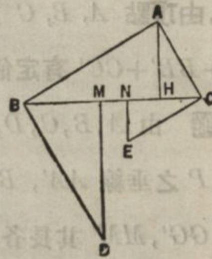


圖 17.

30. 等腰三角形 ABC 底 BC 上任一點 D 引垂線交兩腰於 E, F, 則 $ED+FD$ 有定值.

解 過 C 引 HC 垂直 BC, 過 E 引 BC 平行線相交於 I, 則

$$\triangle HIE \equiv CDF$$

$$\therefore \quad ED + FD = IC + HI = HC = \text{cons.}$$

31. 由一點 P 至 $\triangle ABC$ 之三邊引垂線 PD, PD', PD'' 其長爲 d, d', d'', 又高 AH, BH', CH'' 之長爲 h, h', h'', 則

$$\frac{d}{h} + \frac{d'}{h'} + \frac{d''}{h''} = 1$$

解 $\dfrac{\triangle BPC}{\triangle ABC} = \dfrac{d}{h}, \quad \dfrac{\triangle APC}{\triangle ABC} = \dfrac{d'}{h'},$

$\dfrac{\triangle APB}{\triangle ABC} = \dfrac{d''}{h''}$

$$\Sigma\frac{d}{h}=\Sigma\frac{\triangle BPC}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1$$

32. 由 $\triangle ABC$ 內一點 O 至三邊引任意線 Oa, Ob, Oc, 過頂點引其平行線 Aa', Bb', Cc', 則

$$\frac{Oa}{Aa'}+\frac{Ob}{Bb'}+\frac{Oc}{Cc'}=1 \qquad \text{(Gergonne)}$$

解 引 $AE, OF\perp BC$, 則

$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OF}{AE}$$

然　$\triangle OaF \backsim Aa'E$

$\therefore$　$$\frac{OF}{AE}=\frac{Oa}{Aa'}$$

從而　$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{Oa}{Aa'}$$

同理　$$\frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}=\frac{Ob}{Bb'}$$

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{Oc}{Cc'}$$

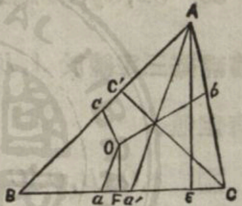


圖 18.

$\therefore$　$$\Sigma\frac{Oa}{Aa'}=\Sigma\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1$$

33. 一直線分一定角為二分,則此線上任一點至二邊距離之比有定值.

34. $\triangle ABC$ 底邊 AB 上取 D 點引 AC, BC 平行線其長為 n, v, 則 $\dfrac{n}{b}+\dfrac{v}{a}$ 有定值. 但 $BC=a, AC=b$.

解 $$\frac{n}{b}=\frac{BD}{BA},\quad \frac{v}{a}=\frac{DA}{BA}$$

$$\therefore\quad \frac{n}{b}+\frac{v}{a}=\frac{BD+DA}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

35. Ox, Oy, Oz 為三定線, 其間所夾之角俱為 60°, 任引一直線截三定線於 A, B, C, 則 $\dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OB}+\dfrac{1}{OC}$ 之代數和有定值.

解 $\triangle OAB, OAC$ 於 O 成補角, 故

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}=\frac{OA\times OB}{OA\times OC}=\frac{OB}{OC}$$

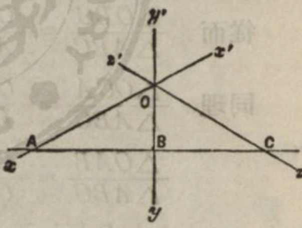


圖 19.

同理 $$\frac{\triangle OBC}{\triangle OAC}=\frac{OB}{OA}$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle OAB+OBC}{\triangle OAC}=\frac{\triangle OAC}{\triangle OAC}=1=\frac{OB}{OC}+\frac{OB}{OA}$$

以 OB 除之得

$$\frac{1}{OB}=\frac{1}{OC}+\frac{1}{OA}$$

故 Ox, Oy', Oz 爲正向則

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}=0$$

36. 三角形底邊及頂角定時則其外半徑有定長.

37. $ABCD$ 爲正方形,由 A 任引二直線 AE, AF, 使角 EAF 爲 $45°$, AE, AF 交邊 CD, BC 於 E, F, 由 A 引 EF 垂線 AH, 則 AH 有定長.

解 引 AG 使 $B\hat{A}G=D\hat{A}E$ 與 CB 延線交於 G.

$$AB=AD$$

$$B\hat{A}G=D\hat{A}E$$

$$=\hat{R}$$

$$A\hat{B}G=A\hat{D}E$$

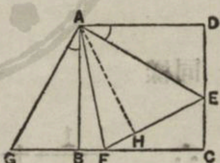


圖 20.

$\therefore$ $\triangle ABG\equiv ADE$

$\therefore$ $AG=AE$

次 $\triangle AGF\equiv AEF$

$\therefore$ $A\hat{F}B=A\hat{F}H$

又 $$\triangle ABF \equiv AHF$$

∴ $$AH = AB = \text{cons.}$$

38. **過圓內定點 P 引弦,於其端作切線,由 P 引切線之垂線,則其距離逆數和有定值.**

解 由 P 至垂線於切線其足為 A, B, 定圓中心為 O, 半徑為 r, 過 P 引定弦 CD, 由 O 下 CD 垂線其足為 E.

設 $AP = a,\quad PB = b,\quad PO = d$

$$\triangle CAP \backsim OEC$$

∴ $$\frac{CP}{a} = \frac{r}{CE}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{r}{CE} \cdot \frac{1}{CP}$$

同樣 $$\frac{1}{b} = \frac{r}{CE} \cdot \frac{1}{DP}$$

∴ $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{r}{CE}\left(\frac{1}{CP} + \frac{1}{DP}\right)$$

$$= \frac{r}{CE} \cdot \frac{DP + CP}{CP \cdot DP}$$

然 $$DP + CP = 2CE = \text{cons.}$$

且 $CP \cdot DP$ 亦定值.

$$\therefore \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\text{cons.}$$

其定值爲 $\dfrac{2r}{r^2-d^2}$.

39. 圓之直徑上有二點 A,B 與中心 O 等距離，M 爲周上任意點，引弦 MAC, MBD，則 $\dfrac{MA}{AC}+\dfrac{MB}{BD}$ 有定值.

解　圓徑爲 EF，則

$$MA\cdot AC=AE\cdot AF$$

$$MB\cdot BD=BE\cdot BF=AE\cdot AF$$

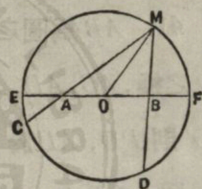


圖 21.

又 $$\frac{MA}{AC}=\frac{MA^2}{AE\cdot AF}$$

$$\frac{MB}{BD}=\frac{MB^2}{AE\cdot AF}$$

$$\therefore \quad \frac{MA}{AC}+\frac{MB}{BD}=\frac{MA^2+MB^2}{AE\cdot AF}=\frac{2MO^2+2AO^2}{AE\cdot AF}$$

$$=2\cdot\frac{r^2+AO^2}{(r-AO)(r+AO)}=2\cdot\frac{r^2+AO^2}{r^2-AO^2}$$

但 r 爲圓半徑.

40. 過角 FAG 之頂點 A，及其二等分線上定點 B 畫圓交角之二邊於 C, D 則 $AC+AD$ 有定值.

解 由 B 引 AG, AF 垂線其足爲 M, N, 結 BC, BD 則

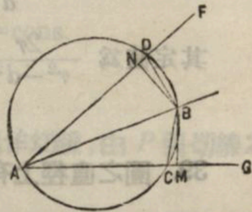


圖 22.

$$\triangle BCM \equiv BND$$

$$\therefore \quad CM = ND$$

$$\therefore \quad AC + AD = AM + AN$$

$$= \text{cons}.$$

41. AB 爲圓之定徑, C 爲周上定點, 過 C 引弦 CD, P 爲 CD 之極, AC, AD, AP 交 B 點切線於 C', D', M, 使 $C'M$ 等 MD' 則 PD, AP 於 B 點切線上截定長 MN.

解 CP 交 B 點切線於 I, 因 BCC' 爲直角, $BI = CI$.

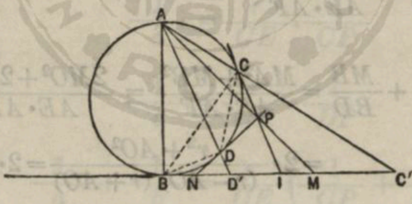


圖 23.

故 $$BI = IC'$$

同樣 $$BN = ND'$$

$$\therefore \quad MN = \frac{C'D'}{2} + \frac{D'B}{2} = \frac{BC'}{2} = \text{cons}.$$

42. 二弦 AB, CD 之交角 E 不變時則其夾弧 AC, BD 之和或差亦不變.

解　角 BED 有定大則角 EAD, EDA 之和或差有定值.

故弧 BD, AC 之和或差有定值.

43. 定圓內接三角形之三傍半徑之和減內半徑有定差.

解　定圓之半徑爲 R, 內接圓, 傍切圓之半徑爲 r, r', r'', r''', 內心爲 I, 傍心爲 I', I'', I'''. D 爲 BC 中點, A' 爲 II' 中點, A'' 爲 $I'''I''$ 中點. 則 $A'A''$ 爲四邊形 $IBI'C$ 之 Newton 線. 故 A', D, A'' 爲共線點.

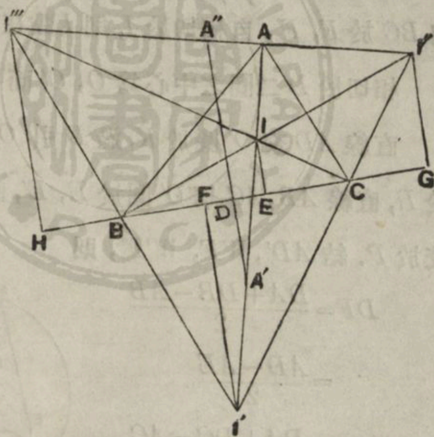


圖 24.

由 I, I', I'', I''' 至 BC 引垂線 IE, $I'F$, $I''G$, $I'''H$, 則得梯形 $IEI'F$, $I''GHI'''$.

故 $A'D=\dfrac{r'-r}{2}$, $A''D=\dfrac{r''+r'''}{2}$

$\therefore\quad r'+r''+r'''-r=2(A'D+A''D)=2A'A''$

但定圓爲 $\triangle I'I''I'''$ 之九點圓,故 $A'A''$ 爲其直徑.

$\therefore\quad r'+r''+r'''-r=4R=\text{cons.}$

44. 二圓內接於 D,由外圓周上一點 A 引內圓切線交 D 點切線於 B,C 則 $\triangle ABD$, ACD 內半徑之和一定.

解 $\triangle ABD$, ACD 內接圓之中心爲 W, W', 此兩圓切 BC 於 F, F', 自相切於 I, 則 I 點在 AD 上.

相切於 D 二圓之中心爲 O, O' 而 O 爲大圓中心.

直線 AD 交 O' 圓於 K, 過 D 引 O 圓直徑 DD' 交 O'圓於 H, 直線 AB, AC 切 O' 圓於 E, E', 直線 WW' 與 DD' 相交於 P. 結 AD', WF, $W'F'$, 則

$$DF=\frac{DA+DB-AB}{2}$$

$$=\frac{AD-AE}{2}$$

$$DF'=\frac{DA+DC-AC}{2}$$

$$=\frac{AD-AE'}{2}$$

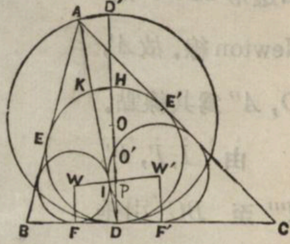


圖 25.

又　$$AE=AE'$$

∴　$$DF=DF'$$

且 AD 爲圓 W, W' 之根軸,又線分 WW' 等於二圓 W, W' 半徑之和,而 $W\hat{D}W'$ 爲直角.

∴　$$WW'=2WP=2PD$$

故證明 PD 有定長可也.

$$WW' \parallel AD'$$

∴　$$\frac{PD}{DD'}=\frac{DI}{DA}=\frac{DF}{DA}=\frac{AD-AE}{2DA}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{AE}{AD}\right)$$

又　$$AE^2=AD\cdot AK$$

∴　$$\frac{PD}{DD'}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{AK}{AD}}\right)$$

然　$$KH \parallel AD'$$

∴　$$\frac{PD}{DD'}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{D'H}{D'D}}\right)=\text{cons.}$$

45. AB 爲公弦畫三圓,引弦 $AMON$ 交圓於 M, O, N, 則 $MO:ON$ 有定值.

解　過 A 引他弦 $AM'O'N'$, B 與 M,O,N,M',O',N' 各

連結之.

則　$B\hat{M}O=B\hat{M'}O'$

$M'\hat{O'}B=M\hat{O}B$

$O\hat{N}B=O'\hat{N'}B$

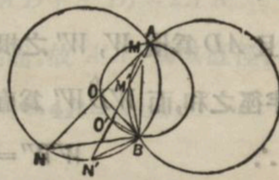


圖 26.

$\therefore\quad \triangle BMO \backsim BM'O'$

$\triangle BON \backsim BO'N'$

$$\therefore\quad \frac{MO}{M'O}=\frac{OB}{O'B}=\frac{ON}{ON'}$$

$$\therefore\quad MO:ON=M'O:ON'=\text{cons.}$$

46. 過定點 O 引弦,由其兩端 A,A' 至 O 點極線 L 距離之逆數和為定值.

解 過 O 引弦 AA' 交 L 於 E, 由 A,A' 引 L 垂線 $AB, A'B'$, 由 C 引 AA' 及 L 之垂線 CG, CF. 則 O 必在 CF 上. 又 r 為 C 圓半徑.

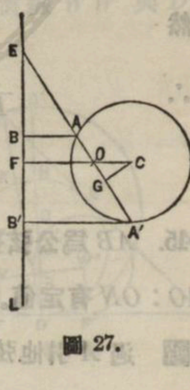


圖 27.

$$AB=\frac{OF}{OE}\cdot AE,$$

(1)

$$A'B'=\frac{OF}{OE}\cdot A'E$$

∴ $$AB\cdot A'B'=\left(\frac{OF}{OE}\right)^2\cdot AE\cdot A'E$$

然 $$AE\cdot A'E=CE^2-r^2=OF^2+EF^2-r^2$$

∴ $$AB\cdot A'B'=\left(\frac{OF}{OE}\right)^2(OF^2+EF^2-r^2) \quad (2)$$

次由(1) $$AB+A'B'=\frac{OF}{OE}(AE+A'E) \quad (3)$$

又 $$AE+A'E=2GE=2(GO+OE)$$

∴ $$AB+A'B'=2\frac{OF}{OE}(GO+OE)$$

又 $$\frac{GO}{OF}=\frac{CO}{OE}$$

∴ $$AB+A'B'=2\frac{OF}{OE^2}(OE^2+OF\cdot CO)$$

$$=2\frac{OF}{OE^2}[EF^2+(CF^2-CO^2-CO\cdot OF)]$$

$$=2\frac{OF}{OE^2}(CF^2+EF^2-CO\cdot CF) \quad (4)$$

由(2),(4)得

$$\frac{AB+A'B'}{AB\cdot A'B'}=\frac{2}{OF}\cdot\frac{CF^2+EF^2-CO\cdot CF}{CF^2+EF^2-r^2}.$$

然 O 爲 L 之極,故 $CO\cdot CF=r^2$

$$\therefore \quad \frac{1}{AB}+\frac{1}{A'B'}=\frac{2}{OF}=\text{cons.}$$

47. 由定線 L 上任一點 M 至定圓 C 引切線 MT, MT', 由 L 之極 O 至二切線距離之逆數和爲一定.

解 結 CT, CT', 由 O 引 OP, OP' 垂直 MT, MT', 由 T, T' 引 L 垂線 $TU, T'U'$. 然關於定圓 T 點極線爲 TM, O 點極線爲 L, 故由 Salmon 定理得

$$\frac{CO}{CT}=\frac{OP}{TU},$$

$$\frac{CO}{CT'}=\frac{OP'}{T'U'}$$

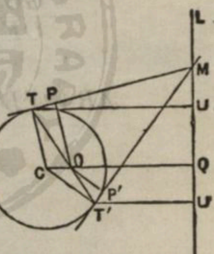


圖 28.

故圓半徑爲 r, 則

$$\frac{1}{OP}=\frac{CT}{CO}\cdot\frac{1}{TU}$$

$$=\frac{r}{CO}\cdot\frac{1}{TU}$$

$$\frac{1}{OP'}=\frac{CT'}{CO}\cdot\frac{1}{T'U'}=\frac{r}{CO}\cdot\frac{1}{T'U'}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{OP}+\frac{1}{OP'}=\frac{r}{CO}\left(\frac{1}{TU}+\frac{1}{T'U'}\right)$$

M點在 L 上,故 L 之極在 M 之極線 TT' 上.

CO 與 L 相交於 Q, 則

$$\frac{1}{TU}+\frac{1}{T'U'}=\frac{2}{OQ}$$

即 $$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OP'}=\frac{2r}{CO\cdot OQ}=\text{cons.}$$

48. 有共軸三定圓,由一圓上任意點至他二圓引切線,其長之比有定值.

解 A, B, C 三圓有同一之根軸 OH.

由 C 圓上任意點 P 引 A, B 二圓之切線 PL, PM, 其切點為 L, M. 由 P 至 OH 引垂線 PQ. 則

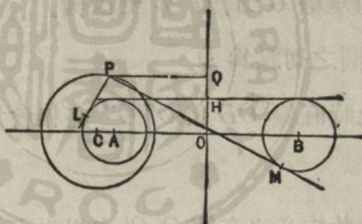


圖 29.

$$PL^2=2PQ\cdot CA,$$

$$PM^2=2PQ\cdot CB$$

故 $\quad PL^2 : PM^2=CA : CB=\text{cons.}$

從而由 P 切線之長之比有定值.

49. 一動圓常切二定圓,則其圓之半徑與由其中心至二定圓根軸距離之比爲常數.

解 O, O' 爲定圓中心, O'' 爲動圓中心.

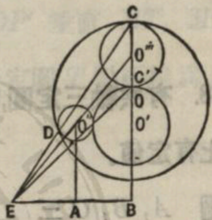


圖 30.

結 OO' 交定圓於 C, C'. 以 CC' 爲徑畫 O''' 圓.

引垂線 $O''A$, $O'''B$ 至根軸.

O'', O 圓之切點爲 D.

此時直線 CD 與 $O'''O''$ 必相會於圓 O'', O''' 之相似中心.

然此中心必在圓 O, O' 之根軸上.

由相似三角形之理得

$$O''A : O'''B = O''E : O'''E = \text{半徑 } O'' : \text{半徑 } O'''$$

$\therefore$ 　　半徑 $O'' : O''A =$ 半徑 $O''' : O'''B$

然 　　半徑 $O''' : O'''B = \text{cons.}$

$\therefore$ 　　半徑 $O'' : O''A = \text{cons.}$

50. **於點 A 內切之二定圓 O, O'，於 O, O' 之間隙畫互外切且切於定圓之二圓 X, Y，此等圓切大圓之點為 E, F。過 A 引大圓直徑 AB，於 B 引切線交 AE, AF 於 C, D，則線分 CD 有定長。**

解　證明此定理之先，宜先證次定理。

互外切二圓 A', B'，內切於他圓 O'，其切點為 C', D'，則

$$C'D'=2R\sqrt{\frac{rr'}{(R-r)(R-r')}}$$

但 R, r, r' 為圓 O', A', B' 之半徑。

由 B', D' 引 $O'A'$ 垂線 $B'E'$，$D'F'$。由 $\triangle O'A'B'$ 得

$$O'E'=\frac{O'A'^2+O'B'^2-A'B'^2}{2O'A'}$$

$$=\frac{(R-r)^2+(R-r')^2-(r+r')^2}{2(R-r)}$$

$$=(R-r')-\frac{2rr'}{R-r}$$

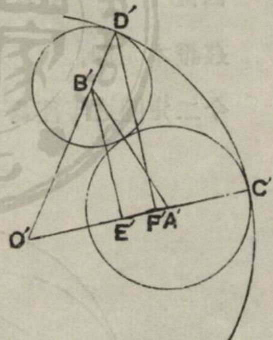


圖 31.

又由 $\triangle O'C'D'$ 得

$$O'F=\frac{O'C'^2+O'D'^2-C'D'^2}{2O'C'}=\frac{2R^2-C'D'^2}{2R}=R-\frac{C'D'^2}{2R}$$

然 $$\triangle O'B'E' \backsim O'D'F'$$

∴ $$O'B' : O'E' = O'D' : O'F'$$

卽 $$R-r' : (R-r')-\frac{2rr'}{R-r}=R : R-\frac{C'D'^2}{2R}$$

卽 $$R-r' : \frac{2rr'}{R-r}= R : \frac{C'D'^2}{2R}$$

卽 $$\frac{2Rrr'}{R-r}=\frac{R-r'}{2R}C'D'^2$$

因此 $$C'D'=2R\sqrt{\frac{rr'}{(R-r)(R-r')}}$$

茲證本定理.

今二定圓之半徑爲 R, r; X, Y 圓之半徑爲 x, y; 則

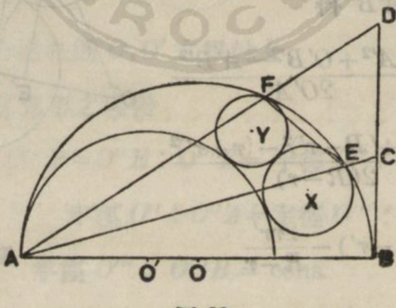


圖 32.

$$EF=2R\sqrt{\frac{xy}{(R-x)(R-y)}}$$

$$AE=2R\sqrt{\frac{rx}{(R-r)(R-x)}}$$

$$AF=2R\sqrt{\frac{ry}{(R-r)(R-y)}}$$

由相似 $\triangle AEF, ADC$ 得

$$AE:EF=AD:CD$$

即 $$CD:AE=AD:EF$$

從而 $$CD\cdot AE\cdot AF=AF\cdot AD\cdot EF$$

然 $$AF\cdot AD=AB^2=4R^2$$

$\therefore$ $$CD\cdot AE\cdot AF=4R^2\cdot EF$$

用前所得各式代入之得

$$CD\frac{r}{R-r}=2R$$

$\therefore$ $$CD=\frac{2R(R-r)}{r}=\text{cons.}$$

51. 於 A 點相切之大小兩圓,在其間隙畫相切互相切四圓 X, Y, Z, W,則其半徑間有 $\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{3}{z}-\frac{1}{w}=0$ 之關

係,但 x, y, z, w 表 X, Y, Z, W 圓半徑. (周達)

解 二定圓共通之直徑為 AB.

於 B 點引大圓切線,又畫 X, Y, Z, W 圓切大圓於 X'', Y'', Z'', W'', 結 AX'', AY'', AZ'', AW'' 交 B 點切線於 X', Y', Z', W', 由前題得

$$X'Y'=Y'Z'=Z'W'$$

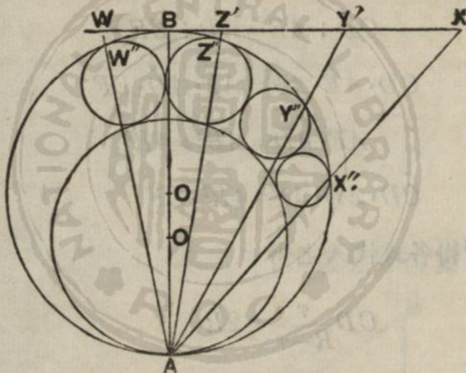


圖 33.

故由 $\triangle AX'W'$ 得

$$AX'^2-3AY'^2+3AZ'^2-AW'^2=0 \qquad (1)$$

$$AX=2R\sqrt{\frac{rx}{(R-r)(R-x)}}$$

$$AY=2R\sqrt{\frac{ry}{(R-r)(R-y)}}$$

$$AZ=2R\sqrt{\frac{rz}{(R-r)(R-z)}}$$

$$AW=2R\sqrt{\frac{rw}{(R-r)(R-w)}}$$

但 R,r 爲定圓半徑.

然　$AX\cdot AX'=AY\cdot AY'=AZ\cdot AZ'=AW\cdot AW'=4R^2$

$$\therefore\quad AX'=2R\sqrt{\frac{(R-r)(R-x)}{rx}}$$

$$AY'=2R\sqrt{\frac{(R-r)(R-y)}{ry}}$$

$$AZ'=2R\sqrt{\frac{(R-r)(R-z)}{rz}}$$

$$AW'=2R\sqrt{\frac{(R-r)(R-w)}{rw}}$$

以此等關係式代入(1)則得

$$\frac{R-x}{x}-3\frac{R-y}{y}+3\frac{R-z}{z}-\frac{R-w}{w}=0$$

即 $$\frac{R}{x}-1-3\frac{R}{y}+3+3\frac{R}{z}-3-\frac{R}{w}+1=0$$

$$\frac{R}{x}-3\frac{R}{y}+3\frac{R}{z}-\frac{R}{w}=0$$

∴ $$\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{3}{z}-\frac{1}{w}=0$$

52. **於 A 點相切之大小兩圓 O, O' 其半徑為 R, r, 在其間隙畫相切互相切之二圓 X, Y, AX, AY 交 B 點切線於 C, D, 則 CD 有定長.** (周達)

解 引 XM, YN 垂直直徑 AB, 則 $XM=kx$, $YN=(k+2)y$, 先證明之. 但 x, y 為圓 X, Y 之半徑, k 為或實數.

圓 X, Y 切 O 圓於 E, F, 引 AE, AF 交 B 點切線於 C', D', 由問題 50 證明得

$$AE=2R\sqrt{\frac{rx}{(R-r)(R-x)}}$$

又 $$AC'=\frac{AB^2}{AE}=2R\sqrt{\frac{(R-r)(R-x)}{rx}}$$

次由 E 引 AB 垂線 EK, 由相似 $\triangle ABC', AKE$ 得

$$AC' : C'B = AE : EK$$

$$\therefore \qquad EK = \frac{C'B \cdot AE}{AC'}$$

$$然 \qquad C'B = k\frac{R(R-r)}{r}$$

以 AC', $C'B$, AE 之值代入前式,則得

$$EK = \frac{kRx}{R-x}$$

次結 BE 交 X 圓於 G, AE 交 X 圓於 H, 則 $G\hat{E}H$ 爲 $\hat{R}$, GH 過 X 圓之中心且平行 AB, 又 GH, EK 相交於 I, 由相似 $\triangle BEA$, GEH 得

$$AB : EK = AB - GH : IK$$

$$\therefore \qquad XM = IK = \frac{EK(AB-GH)}{AB}$$

以 AB, GH, EK 之值代入之,則得

$$XM = kx$$

$$BD'=BC'+C'D'=k\frac{R(R-r)}{r}+2\frac{R(R-r)}{r}$$

$$=(k+2)\frac{R(R-r)}{r}$$

$$\therefore \qquad YN=(k+2)y$$

次證 $$AM=x\frac{R+r}{R-r},\quad AN=y\frac{R+r}{R-r}$$

由問題 50 之證明得

$$AE=2R\sqrt{\frac{rx}{(R-r)(R-x)}}$$

$$\therefore \qquad AK=\frac{AE^2}{AB}=2R\frac{rx}{(R-r)(R-x)}$$

$$\therefore \qquad OK=AK-AO=R\left(\frac{2rx}{(R-r)(R-x)}-1\right)$$

然由相似 $\triangle KOE$, XOM 得

$$EO:KO=XO:MO$$

$$\therefore \qquad MO=\frac{KO\cdot XO}{EO}=\frac{2rx}{R-r}-(R-x)$$

$$\therefore \qquad AM=AO+OM=x\frac{R+r}{R-r}$$

同樣 $AN=y\frac{R+r}{R-r}$

玆證本定理。

$XM=kx,\ YN=(k+2)y$

又 $AM:XM=\frac{R+r}{R-r}:k$

$=AB:CB$

$AN:YN=\frac{R+r}{R-r}:k+2$

$=AB:DB$

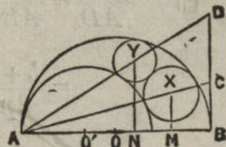


圖 34.

$\therefore\quad CB=2kR\frac{R-r}{R+r},\ DB=2(k+2)R\frac{R-r}{R+r}$

$\therefore\quad CD=DB-CB=4R\frac{R-r}{R+r}=\text{cons.}$

53. $\triangle ABC$ 角 A 二等分線 AD 交 BC 於 D, 由 D 引 AB 垂線其足爲 P. 若 BC 及 $AB+AC$ 有定值時, 則 AP 之長亦一定.

解 A, B, C 對邊之長以 $a,\ b,\ c$ 表之, 且 $a+b+c=2p$.

$\triangle ABC$ 之內心爲 I, 圓 I 切 AB 邊於 J, 結 JI, IB, IC,

則 $$\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD},$$

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB+AC}{BC}$$

即 $$\frac{AI}{AD}=\frac{AB+AC}{AB+AC+BC}$$

$$=\frac{b+c}{2p}$$

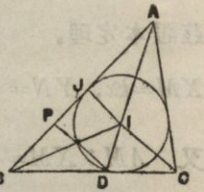


圖 35.

又 $$\frac{AP}{AJ}=\frac{AD}{AI}=\frac{2p}{b+c}$$

∴ $$AP=AJ\cdot\frac{2p}{b+c}$$

又 $$AJ=p-a$$

∴ $$AP=\frac{2p(p-a)}{b+c}$$

然由假定 $a, b+c$ 有定值. 故 p 亦定值. 故 AP 有定長.

54. **於定圓 O 內任引二弦 AB, CD, AC, BD 之交點爲 P, 設 $A\hat{P}B$ 爲直角. E, F 爲 AB, CD 中點, 關於 AC, E 之對稱點爲 E', 則線分 $E'F$ 有定長.**

解 AE', CD 相交於 H, O 與 A, D, E, F 連結之, 此

時 $A\hat{O}E$ 爲 $D\hat{O}F$ 之餘角．故 $\triangle AOE, DOF$ 全相等．

$\therefore \quad AE'=AE=OF$

又於 $\triangle APB, AHC$ 角 BAP 等 HAC，角 ABP 等 ACH．故 $A\hat{H}C$ 爲直角．

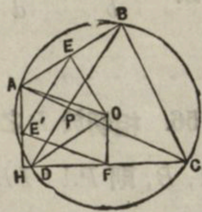


圖 36.

又 OF 垂直 DC．故 $AE'FO$ 爲平行四邊形．

$\therefore \quad E'F=AO=\text{cons.}$

55. 正方形 $ABCD$ 外接圓之弧 AD 上取 P 點．以 a, b, c, d 表 PA, PB, PC, PD 則 $\dfrac{c+a}{b} : \dfrac{c-a}{d}$ 爲定值．

解 r 爲外接圓半徑，PGH 平行 AD．則

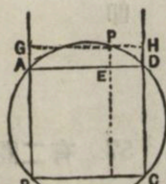


圖 37.

$$\frac{c+a}{b} : \frac{c-a}{d}$$

$$=(cd+ad) : (cb-ab)$$

$$=(PH\cdot r+PE\cdot r) : (PE\cdot r-PG\cdot r)$$

$$=(PH+PE) : (PE-PG)$$

$=(AD-AE+PE):(AD+PE-AE)=1$

故 $\dfrac{c+a}{b}:\dfrac{c-a}{d}$ 爲一定.

56. 相切於 P 之二圓過 P 引任意直線 APB 再交圓周於 A, B, 則 $PA:PB$ 有定值.

解 過 P 引公切線 XY. 過 P 引 XY 垂線再交圓周於 C, D,

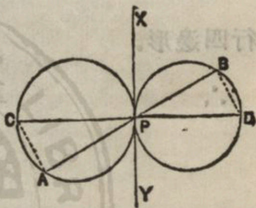


圖 38.

則 $\triangle ACP \backsim BDP$

$\therefore \quad B\hat{D}P=A\hat{C}P$

且 $A\hat{P}C=B\hat{P}D$

$$\therefore \quad \frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PD}$$

$$即 \quad \frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PD}=\text{cons.}$$

57. 有二圓相切於 P, 過 P 引直線 APB 交圓周於 A, B, 由 A 引 B 圓切線 AC, 則 $AP:AC$ 爲定比.

解 $$\left(\frac{AP}{AC}\right)^2=\frac{AP^2}{AP\cdot AB}=\frac{AP}{AB}$$

然由前問 $\dfrac{AP}{AB}$ 為定比，故 $\dfrac{AP}{AC}$ 亦定比。

58. 二圓相交於 A, B, 過 B 交二圓周引直線 XBY, 則 $AX:AY$ 為定比。

解 過 B 點引 CBD 線交圓於 C, D。A 與 C, D, X, Y 各點結直線。

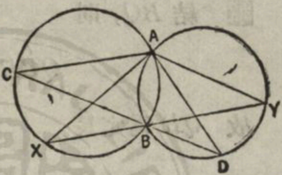


圖 39.

$$\triangle AXY \backsim ACD$$

$\therefore\quad AX:AY=AC:AD=\text{cons.}$

59. 由定圓周上任一點 P 至定直徑 AB, CD 引垂線，其垂足為 E, F, 則 EF 有定長。

解 $\quad P\hat{E}O=\hat{R}=P\hat{F}O$

故 OP 為徑之圓過 E, F。

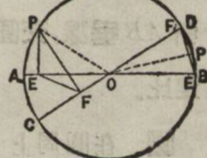


圖 40

$\therefore\quad E\hat{P}F=E\hat{O}F$

或 $\quad E\hat{P}F=(2\hat{R}-E\hat{O}F)$

然 $E\hat{O}F$ 乃定徑之交角為定角。

OP 有定長，則 $EPOF$ 爲定圓，$E\hat{P}F$ 等定角．故 EF 有定長．

60. 二圓相交於 A, B, 在第一圓周上任取一點 P, 結 PA, PB 延長之交第二圓周於 Q, R, 則弦 QR 有定長．

解 結 BQ，則

$$Q\hat{B}R=\hat{P}+\hat{Q}=\text{定角}$$

故 QR 爲定長．

61. 畫一圓切於二定圓，則此圓之中心與定圓中心距離之和或差爲常數．

解 此距離之和或差等二定圓半徑之和或差．

62. AB 爲定圓 O 之直徑，C, D 關於 AB 分調和，過 C, D 引 AB 垂線，交圓周上任一點之切線於 E, F，則 OE, OF 有定比．

解 在圓周上 M 點引切線與 A, B 切線相交於 A', B'．結 MO, OA', OB', OM，則 A, B 關於 EF 分調和．故 $O(A'E$

$B'F$)乃調和線束．而 $A'\hat{O}B'$ 爲直角．故 OB' 二等分 $E\hat{O}F$．

$$\therefore \quad \frac{OE}{OF}=\frac{B'E}{B'F}=\frac{BC}{BD}$$

$$=\text{cons.}$$

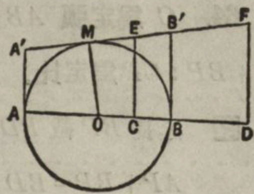


圖 41.

63. AB 爲定圓之定弦，A, B 切線相會於 C，在圓周上任取一點 M 結 MA, MB，過 C 引直線平行 M 點切線交 MA, MB 於 P, Q，則 PQ 有定長．

解　CA, CB 交 M 點切線於 D, E．

$P\hat{A}C=D\hat{A}M$,

$C\hat{P}A=A\hat{M}D$

然　$D\hat{A}M=A\hat{M}D$

故　$\triangle PAC$ 爲等腳．

$\therefore \quad PC=AC$

同樣　$QC=BC$

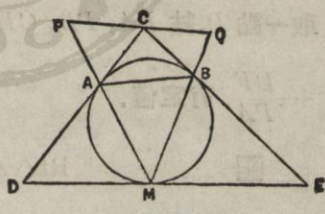


圖 42.

故 C 爲中心 PQ 爲直徑畫圓得過 A, B，卽 PQ 乃定 $\triangle ABC$ 外接圓之直徑．

64. C 爲定弧 AB 中點，P 爲其共軛弧上任一點，則 $AP+BP:CP$ 爲定比.

解 延長 BP 截 PD 等 PA，則

$$AP+BP=BD$$

∴ $BD:CP=AB:AC$

卽 $BD:AB=CP:AC$

何則？因 $\triangle ABD \backsim ACP$

故 $BD:AB=CP:AC$

卽 $AP+BP:CP=AB:AC=\text{cons.}$

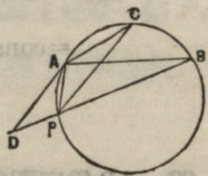


圖 43.

65. 正方形 $ABCD$，以 AB 爲直徑畫半圓，在其周上任取一點 P，結 PA, PB, CE 垂直 BP，DF 垂直 AP，則 $\dfrac{CE}{PB}+\dfrac{DF}{PA}$ 有定值.

解 $$\text{Rt}\triangle ABP \equiv BCE$$

∴ $$CE=BP$$

又 $$\triangle ADF \backsim ABP$$

$$DF=AP$$

$$\therefore \qquad \frac{CE}{PB}+\frac{DF}{PA}=2=\text{cons.}$$

66. A 為圓周上任一點，任引二弦 AB, AC，角 BAC 外二弧 AB, AC 之中點為 L, M. 直線 LM 交 AB, AC 於 D, E, 則 $AD:AE$ 為定比.

解　於 L, M 引切線 LX, MY.

此時　$AB \parallel XL, AC \parallel YM,$

$$\widehat{XLD}=\widehat{YME}$$

$$\therefore \qquad \widehat{ADE}=\widehat{AED}$$

即　$$AD=AE$$

$$\therefore \qquad AD:AE=1=\text{cons.}$$

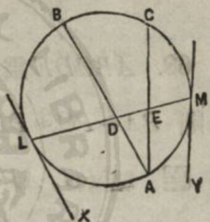


圖 44.

67. P 為圓內任一點，過 P 引弦 AB 二等分於 P, 又引他弦 QPR, 於 Q, R 引切線 TQ, TR, 交 AB 延線於 X, Y, 則 $PX:PY$ 為定比.

解　O 為圓心，結 OX, OQ, OY, OR, OP. 則 OP 垂直 AB, $\widehat{ORY}$ 為直角. 因此 $RYOP$ 為圓內四邊形. 同樣 $OPXQ$

亦圓內接四邊形.

故 $O\hat{Y}P=O\hat{R}Q=O\hat{Q}R$

$=O\hat{X}P$

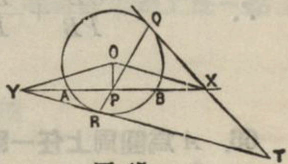


圖 45.

故 $\triangle OXY$ 爲等腳.

從而 $PX=PY$

$\therefore$ $PX:PY=1=\text{cons.}$

68. $ABCDE$ **爲正五邊形,** P **爲外接圓弧** AE **上任一點,則** $(PA+PC+PE):(PB+PD)$**爲定比.**

解 結 PC, AP,則 $APCB$ 爲圓內接四邊形. 由 Ptolemy 定理

$$PB\cdot AC=PA\cdot BC+PC\cdot AB \qquad (1)$$

同樣 $$PB\cdot CD+PD\cdot BC=PC\cdot BD \qquad (2)$$

$$PC\cdot BE=PB\cdot EC+PE\cdot BC \qquad (3)$$

(1),(3)兩式各邊相加. 且 $AB=BC$, $AC=EC$

$\therefore$ $$PC\cdot BE=(PA+PC+PE)AB \qquad (4)$$

然 $$BE=BD$$

故(4)式左邊與(2)式右邊相等.

故(4)式右邊與(2)式左邊相等．即

$$PB \cdot CD + PD \cdot BC$$

$$=(PA+PC+PE)AB$$

然 $\quad CD=BC=AB$

$\therefore \quad PB+PD=PA+PC+PE$

$\therefore \quad (PA+PC+PE):(PB+PD)$

$$=1=\text{cons}.$$

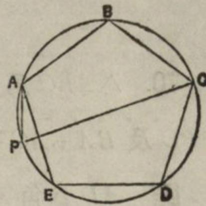


圖 46.

69. 任意直線 AB 分 $3:1$ 於 X, 在其各線分上畫半圓, 引公切線 PQ 交 AB 於 O,則 $OB:\dfrac{XB}{2}$ 有定值.

解 內分 AB 於 X 使 $AX=3XB$. 引圓之公切線其切點爲 P, Q, 且交 AB 於 O.

又圓心爲 C, C'. 則

$$CP \parallel C'Q$$

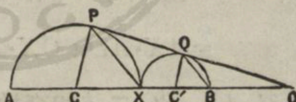


圖 47.

$\therefore \quad PX \parallel QB$

$\therefore \quad XO:BO=PO:QO$

$$=CP:C'Q=3:1$$

$\therefore \quad BO=\dfrac{1}{2}XB=C'B.$

從而 $BO:C'B=1=\text{cons.}$

70. $\triangle ABC$ 角 A 二等分線交外接圓周於 D, BC 於 X, 若 BC 及 $BA+AC$ 有定值時,則 $AX:XD$ 亦定值.

解 AD 爲角 A 二等分線.

$$AC:CX=AB:BX=AC+AB:BC$$

然 $AC+AB:BC$ 爲定比. 故 $AC:CX$, $AB:BX$ 亦定比,因此二比之積 $AC\cdot AB:CX\cdot BX$ 亦定比.

次 $\triangle ACX \backsim ADB$

$\therefore$ $AC:AX=AD:AB$

即 $AC\cdot AB=AX\cdot AD$

$\therefore$ $AC\cdot AB:CX\cdot BX$

$=AX\cdot AD:CX\cdot BX$

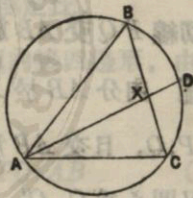


圖 48.

又 AD, BC 二弦相交於圓內一點 X.

$\therefore$ $CX\cdot BX=AX\cdot XD$

$\therefore$ $AX\cdot AD:CX\cdot BX=AX\cdot AD:AX\cdot XD$

$=AD:XD=\text{cons.}$

從而 $AX:XD=\text{cons.}$

71. **由二圓 A, B 相似外心引任意線交定圓於 P,Q,p,q. 今切與圓於 P,q, 及 Q,p 畫二圓其半徑爲 R_1, R_2, 則 R_1-R_2 有定值.**

解 $\triangle BPQ$ 爲二等邊,故 $P\hat{B}Q=2\hat{R}-2B\hat{P}Q$.

同樣 $\triangle O'Pq$ 爲二等邊,

故 $P\hat{O'}q=2\hat{R}-2B\hat{P}Q$.

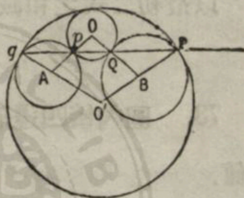


圖 49.

$\therefore \quad P\hat{O'}q=P\hat{B}Q$

$\therefore \quad O'A \parallel BO$

同樣　$O'B \parallel AO$

故　$O'BOA$ 爲平行四邊形.

故
$$O'A=BO$$

卽
$$R_1-a=R_2+b$$

卽
$$R_1-R_2=a+b=\text{cons.}$$

72. **有互相交三等圓 $ABB'A'$, $ACC'A'$, $CBB'C'$, 但第一第三二圓之交點全在二圓內,則**

$$\frac{\text{弧}\,AB+BC-CA}{\text{弧}\,A'B'+B'C'-C'A'}=1.$$

解　三公弦 AA', BB', CC' 相交於三圓之根心 O,由假定三圓之大相等,故其弧得以各圓所對之中心角表之.

$$\therefore\quad 弧\ AB-A'B'=2(A\hat{B}'B-B'\hat{A}A')=2A\hat{O}B$$

$$弧\ BC-B'C'=2(B\hat{B}'C-B'\hat{C}C')=2B\hat{O}C$$

$$弧\ AC-A'C'=2(A\hat{C}'C-C'\hat{A}A')=2C\hat{O}A$$

以最初二式之和減去最後之式,卽得所求之結果.

73.　圓內接四邊形其對角線中點之距離與周圍之比有定値.

解　設 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=m$, $BD=n$.

對角線之中點爲 M, N, 其交點爲 P.

此時 OP 爲徑之圓必過 M, N.

$$\therefore\qquad \frac{MN}{\sin MPN}=OP,\qquad S=\frac{1}{2}mn\sin MPN$$

$$\therefore\qquad MN=\frac{2S}{mn}\cdot OP$$

$$且\qquad a+b+c+d=\frac{2S}{r}$$

$$\therefore \qquad \frac{MN}{a+b+c+d}=\frac{r\cdot OP}{mn}=\text{cons}$$

74. 正多角形之外半徑,內半徑爲 R, r, 等周二倍邊數正多角形之內半徑爲 r', 則 $R+r:r'$ 爲定比.

解 OM 交 AB, XY 於 L, N, 則

$$OM+OL=2ON \qquad \text{（第二章 85 題參照）}$$

故 $$R+r=2r'$$

即 $$R+r:r'=2=\text{cons.}$$

75. $\triangle ABC$, 點 D, D' 爲角 A 內外二等分線交 BC 之點,同樣得 E, E'; F, F',則

$$\frac{1}{DD'}+\frac{1}{EE'}+\frac{1}{FF'}=0$$

解 $\triangle ABC$ 角 A, B, C 之對邊爲 a, b, c, 且 $b<c$ 則 D' 在 CB 延線上.

$$\frac{DB}{CD}=\frac{c}{b} \qquad \therefore \quad \frac{DB}{a}=\frac{c}{b+c}$$

$$\frac{BD'}{CD'}=\frac{c}{b} \qquad \therefore \quad \frac{BD'}{a}=\frac{c}{b-c}$$

$\therefore \qquad DD'=\dfrac{2abc}{b^2-c^2}$

設 $a>b>c$, CB, BA, AC 之方向爲正. 則

$$\frac{1}{DD'}=\frac{b^2-c^2}{2abc},\quad \frac{1}{EE'}=\frac{a^2-c^2}{2abc},\quad \frac{1}{FF'}=\frac{a^2-b^2}{2abc}$$

$\therefore \qquad \dfrac{1}{DD'}+\dfrac{1}{EE'}+\dfrac{1}{FF'}=0$

76. $\triangle ABC$ 點 X 在 BC 上使

$$AB^2+BX^2=AC^2+CX^2$$

且 AX 之中點爲 M, 則 $BM:CM$ 爲定比.

解 $\qquad AB^2+BX^2=2BM^2+2AM^2$

又 $\qquad AC^2+CX^2=2CM^2+2AM^2$

從而 $\qquad BM=CM$

$\therefore \qquad BM:CM=1=\text{cons.}$

77. 由正多角形各頂點至過中心之任意直線引垂線,則此等垂線之代數和爲零.

解 中心爲各頂點之平均中心.

78. **引任意直線 XY 交定圓 O'，在 XY 之同側畫二圓 O_1，O_1'，切於 O' 及 XY，次引 O_1，O_1' 外公切線其切點為 X_2，X_2'．次在直線 X_2X_2' 圓 O_1 之反對側畫二圓 O_2，O_2' 切於 O' 及 X_2X_2'，再引二圓之外公切線，其切點為 X_3，X_3'．同前法再畫二圓 O_3，O_3'．遞次如斯，以至無窮．設此等圓之半徑各為 r_1，r_1'；r_2，r_2'；……則**

$$\frac{r_1}{r_1'}=\frac{r_2}{r_2'}=\cdots\cdots=\text{cons.}$$

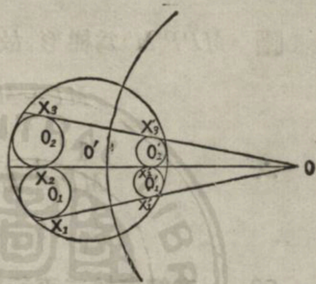


圖 50.

解　圓 O_1，O_1' 切 XY 於 X_1，X_1'．X_1X_1'，X_2X_2' 相交於 O，以 O 為心畫 O' 之直交圓，關此圓將以上圖形反轉之，則 O' 圓之倒形為自身，圓 O_2 之倒形為 O_2'．故 X_3X_3' 必過 O．故如斯之公切線均過 O．由是得

$$\frac{r_1}{r_1'}=\frac{r_2}{r_2'}=\cdots\cdots=\text{cons.}$$

79. **與圓 O 及直線 PP'，OH 垂直 PP'；K 為 OH 上任**

一點,過 K 引弦 MM',由 M, M' 引 MP, $M'P'$ 垂直 PP',則

$$\frac{1}{MP}+\frac{1}{M'P'}$$

有定值.

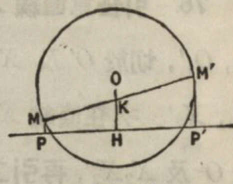


圖 51.

解 $MPP'M'$ 爲梯形,故

$$MP+M'P'=2KH$$

$$\therefore \quad \frac{1}{MP}+\frac{1}{M'P'}=\frac{2}{KH}=\text{cons.}$$

80. 一直線夾於二平行線間,過其中點引任意直線,則在平行線間二線分之比有定值.

解 與平行線爲 AB, CD, 夾此二平行線間之定線爲 EF. O 爲 EF 中點,過 O 終於 AB, CD 引他直線 XY. 則

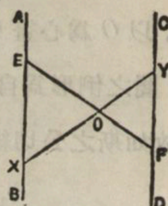


圖 52.

$$\triangle OEX \equiv OFY$$

$$\therefore \quad OX=OY$$

$$\therefore \quad OX:OY=1=\text{cons.}$$

81. 內接於定角 O 畫圓 I, 在 I 之內或外引切線 AB, CD. 則

1. 內部切線 AB 作定周 $\triangle OAB$.

2. 外部切線 CD 作 $\triangle OCD$,其周圍之半減 CD 有定值.

解 與角 O 之二邊為 OC, OD. 圓 I 切 OC,OD,CD 於 N, M, Q, 結 IN, IM, IQ.

(1) 就 $\triangle OAB$ 考之.

$AP=AN$, $BP=BM$

但 P 為 AB 切圓 I 之點.

$\therefore$ $OA+OB+AB$

$=OM+ON$

$=2ON=\text{cons.}$

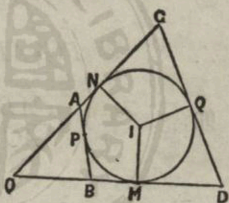


圖 53.

(2) 就 $\triangle OCD$ 考之.

$$CQ=CN,\ DQ=DM$$

$$\therefore \quad OC+OD-CD=ON+OM=2OM$$

$$\therefore \quad \frac{OC+OD+CD}{2}-CD=OM=\text{cons.}$$

82. 與角 xAy 內接以定長直線 BC, 則其外接圓有定大.

解 BC 一定，$B\hat{A}C$ 一定，故其外半徑一定．故外接圓有定大．

83. **弧 AB 上之任意點 P，其共軛弧之中點爲 C，則 $PA+PB:PC$ 有定值．**

解 $PABC$ 爲圓內接四邊形．由 Ptolemy 定理

$$PC\cdot AB=AC\cdot PB+AP\cdot BC$$

即 $$PC\cdot AB=AC\cdot PB+AP\cdot AC$$

∴ $$PC\cdot AB=AC(PB+AP)$$

即 $$\frac{AB}{AC}=\frac{AP+PB}{PC}=\text{cons.}$$

84. **與 $\triangle ABC$，引 BC 邊高線其足爲 F，過 B 引任意直線交 AF, AC 於 O, G．結 CO 交 AB 於 J, FG, FJ 截過 A 平行 BC 之直線於 E, D．試證 AE, AD 有定比．**

解 由第四章問題 62 之證明得

$$AE=AD$$

85. **三角形內半徑，外半徑爲 r, R，其中心間之距爲 δ，**

則 $$\frac{r}{R-\delta}+\frac{r}{R+\delta}=1. \qquad \text{(Chapple)}$$

解 O, P 為 $\triangle ABC$ 之外心，內心. CP, DO 交外接圓於 D, E. 則

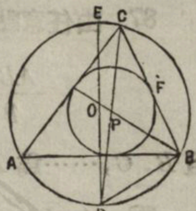


圖 54.

$$A\hat{B}D=D\hat{C}B$$

又 $$P\hat{B}A=P\hat{B}C$$

$\therefore$ $$P\hat{B}D=P\hat{B}C+P\hat{C}B=D\hat{P}B$$

$\therefore$ $$DP=DB$$

又 $$\triangle DEB \backsim PCE$$

則 $$DE:DB=CP:PF$$

$\therefore$ $$DE\cdot PF=DB\cdot PC=DP\cdot PC$$

又 $\triangle OCD$ 為二等邊.

$$DP\cdot PC=OC^2-OP^2$$

$\therefore$ $$DE\cdot PF=OC^2-OP^2$$

卽 $$2Rr=R^2-\delta^2$$

$\therefore$ $$\frac{r}{R+\delta}+\frac{r}{R-\delta}=1$$

86. r' **為傍半徑,** δ' **為傍心與外心之距離,則**

$$\frac{r'}{R+\delta'}+\frac{r'}{R-\delta'}=-1$$

87. 由任意點 O 至直線 AL 垂線之長爲 p,則

$$\frac{AB}{p}+\frac{BC}{p}+\cdots\cdots+\frac{LA}{p}=0$$

但 $B, C, \cdots\cdots$ 爲 AL 線上之點.

解　$A, B, C, \cdots\cdots L$ 爲共線點. 則

$$AB+BC+CD+\cdots\cdots+LA=0$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{p}+\frac{BC}{p}+\frac{CD}{p}+\cdots\cdots+\frac{LA}{p}=0$$

88. 由圓周上任一點至其內接多邊形各邊引垂線,則以各邊除其對應垂線之商之和爲零.

解　由前題 O 爲中心反轉之,則點 $A, B, C, \cdots\cdots L$ 之反形爲 $A', B', C', \cdots\cdots L'$, 且 $A'B'C'\cdots L'$ 爲圓內接多邊形. 卽得本題.

89. 由 $\triangle ABC$ 外接圓周上任一點 P 至三邊 a, b, c 引

垂線 α,β,γ 則

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=0.$$

90. P 爲弓形弧 APC 上任一點，在 AP, CP 上各載 AB, CD 等定長，BD, AC 之中點爲 F, E. 則線分 EF 有定長.

解　作平行四邊形 $CDFG$, $ABFH$, 則

$$FG \text{ 廾 } DC,\quad FH \text{ 廾 } BA$$

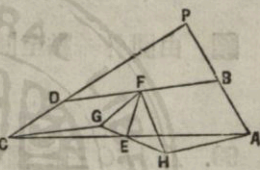


圖 55.

故 $\triangle HFG$ 二邊有定長，其夾角 $G\hat{F}H$ 等 $\hat{P}$ 有定大，故 $\triangle HFG$ 爲定形.

又 GH 過 E, FE 垂直 GH, 故 EF 有定長.

91. 三角形底邊有定長，頂角有定大，則由底之兩端至對邊引垂線其垂足之距有定長.

解　$\triangle ABC$, 頂角 C 有定大，AL, BM 爲 A, B 二角之高線.

$\triangle ACL$ 角 C, L 有定大，故角 CAL 亦定大，而 $ABLM$

爲圓內接四邊形，故對定角之弦 LM 有定長.

92. 有同心圓，由外圓周上任一點 A 至內圓引切線 AB，其切點爲 M，又由 A 引他切線 AE. 以 AB, AE 爲二邊作外切於內圓之五邊形 $ABCDE$. 則

$$(AB+AE+CD)\sim(BC+DE)=\text{cons.}$$

解 由圓外一點至圓引切線其長相等，故前量等 $2AM$.

93. $\triangle ABC$ 三高線爲 AA', BB', CC'，延長之交外接圓周於 A'', B'', C''，則

$$\frac{AA''}{AA'}+\frac{BB''}{BB'}+\frac{CC''}{CC'}=\text{cons.}$$

解 結 BA''.

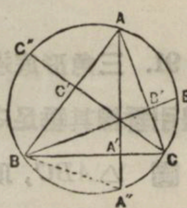


圖 56.

$$AA'=AB\cdot\sin B$$

又 $AB=2R\sin C$

但 R 爲外半徑.

$$\therefore\quad AA'=2R\sin B\sin C$$

同樣 $BB'=2R\sin C\sin A,\quad CC'=2R\sin A\sin B$

又　$$AA''=2R\sin ABA''$$

而　$$ABA''=A\hat{B}A'+A'\hat{B}A''=\hat{B}+A''\hat{A}C=90^\circ+B-C$$

∴　$$AA''=2R\cos(B-C)$$

同樣　$$BB''=2R\cos(C-A),\quad CC''=2R\cos(A-B)$$

∴　$$\frac{AA''}{AA'}=\frac{2R\cos(B-C)}{2R\sin B\sin C}=\frac{\cos B\cos C+\sin B\sin C}{\sin B\sin C}$$

$$=1+\frac{\tan A}{\tan A\tan B\tan C}.$$

同樣　$$\frac{BB''}{BB'}=1+\frac{\tan B}{\tan A\tan B\tan C}$$

$$\frac{CC''}{CC'}=1+\frac{\tan C}{\tan A\tan B\tan C}$$

∴　$$\frac{AA''}{AA'}+\frac{BB''}{BB'}+\frac{CC''}{CC'}=3+\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}$$

然　$$A+B+C=2\hat{R}$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

∴　$$\frac{AA''}{AA'}+\frac{BB''}{BB'}+\frac{CC''}{CC'}=4=\text{cons.}$$

第二章　面積

1. 底,高一定之三角形,其面積有定值.

2. 底,高一定之平行四邊形,其面積有定值.

3. 由平行四邊形內一點至各邊引垂線，其足所成之四邊形有定積.

解　O 爲平行四邊形 $ABCD$ 內一點,過 O 引 POQ,SOR 垂直 AD,CD. 則 POQ,SOR 亦必垂直 BC,AB.

由 S,R 引 PQ 平行線，作矩形 $EFGH$. 然 GH 等 PQ,卽 GH 爲所設平行四邊形之高，有定長. 又 HE 乃一雙對邊 AB,CD 之距 SR 投於 BC 上正射影，亦定長.

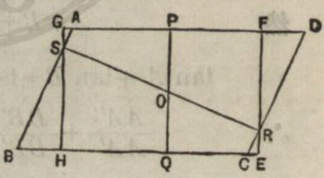


圖 57.

故四邊形 $PSQR$ 有定積.

4. 有公頂二三角形,其頂點在所設平行四邊形之周上,其底爲二對角線,則其面積之和有定值.

解 $ABCD$ 爲所設平行四邊形, O 爲 $\triangle AOC$, DOB 之公頂,設在 DC 邊上,則

$$\triangle AOC+BOD=BOC+BOD=BCD=\text{cons.}$$

5. 直線 AC, BD 有定長,其交角有定大,則由其端點所成四邊形 $ABCD$ 有定積.

解 過 A,C 引 DB 平引線,過 B,D 引 AC 平行線,成平行四邊形 $HGFE$. 此四邊形各邊各等於定線有定長,且其內角各等於定線之交角爲定角,故此四邊形爲定形.

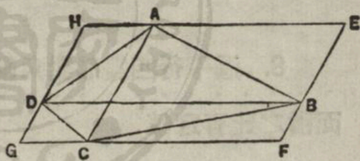


圖 58.

$$\therefore \qquad ABCD=\frac{1}{2}\square HGFE=\text{cons.}$$

6. 由平行四邊形 $ABCD$ 一角頂 A 引直線交 BC, DC

於 P, Q, 則 $BP \cdot QD$ 爲定值.

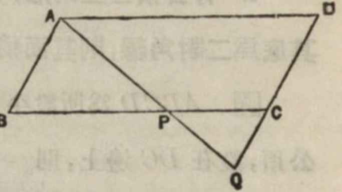


圖 59.

解 $\triangle ABP \backsim QDA$

$\therefore \quad BP : AB = AD : DQ$

卽 $\quad BP \cdot DQ = AB \cdot AD$

$= \text{cons.}$

7. 在平行四邊形 $ABCD$ 之邊 AD 上任取一點 E, 則 $\triangle BCE, \triangle ABE + DCE$ 各爲定值.

解 $\triangle BCE, \triangle ABE + DCE$ 俱等 $ABCD$ 之半.

8. 過平行四邊形對角線中點引直線, 則其所分兩部分面積之比有定值.

解 因其所分之兩部分爲全等形.

9. P 爲平行四邊形 $ABCD$ 內一點, 則 $\triangle APD, BPC$ 之和有定值.

解 過 P 引 EF 平行 AD, 則

$$\triangle APD = \frac{1}{2} \square AEFD$$

$$\triangle BPC=\frac{1}{2}\square EFCB$$

$$\therefore \quad \triangle APD+BPC=\frac{1}{2}\square ABCD=\text{cons.}$$

10. P **爲平行四邊形** $ABCD$ **內一點,過** P **引直線平行於邊.若** P **移動於平行** BD **之或定線上,則** PA,PC **爲對角線之平行四邊形有定差.**

解 過 P 所引之平行線交 AB, CD, BC, AD 於 X, Y, Z, W.

BD, WZ 相交於 E, 過 E 引 AD 平行線交 DC 於 F, 則

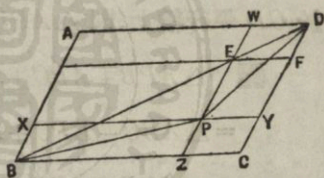


圖 60.

$$\square AE=\square EC$$

而 $$2\triangle PAB+2PDA-2PBD$$

$$=\square BW+\square XD-\square XF$$

$$=\square BW+\square WY+\square AP-\square XF$$

然 $$\square AP=\square XE+\square AE=\square XE+\square EC$$

$\therefore \quad \square AP-\square XF=\square PC$

$\therefore \quad 2\triangle PAB+2PDA-2PBD=\square ABCD$

$\therefore \quad 2\triangle PBD=2PDA-(\square AC-2PAB)$

$=\square DYXA-\square WZCD$

$=\square AP-\square PC$

$\therefore \quad \square AP-\square PC=\text{cons.}$

11. O **為** $\square ABCD$ **對角線交點，**P **在** $\triangle ABC$ **內且動於** CD **平行線上，則** $\triangle APB,\ APC,\ BPD$ **有定和.**

解 $\triangle APB+APC+BPD$

$=\triangle ABC-BPC+ABD$

$-APD-APB$

$=\square ABCD-BPC$

$-APD-APB$

$=CPD=\text{cons.}$

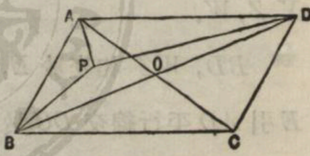


圖 61.

12. 由 $\triangle ABC$ **之頂點** A,B,C **引同向直線交對邊（或其延線）於** X,Y,Z. **則** $\triangle AYZ,BZX,CXY$ **有一定.**

證　$\triangle CYZ = CBZ$

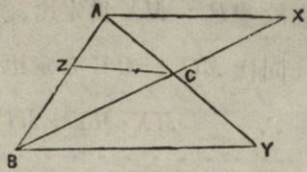


圖 62.

$\therefore$　$\triangle AYZ = ABC$

又　$\triangle AZX = ACX$

$\therefore$　$\triangle BZX = ABC$

又　$\triangle AYX = ABX$

$\therefore$　$\triangle CXY = ABC$

13. 三角形底邊及兩底角之差一定時,若由底之中點至頂角內外二等分線引垂線,則此兩線所包矩形有定值.

證　ABC 爲適於條件之三角形. AB 爲底, M 爲其中點, X, Y 爲 $A\hat{C}B$ 內外二等分線交 AB 之點. 則 A, X, B, Y 爲調和點.

$\therefore$　$4MX \cdot MY = AB^2$

又 $C\hat{B}A, C\hat{A}B$ 有定差,故 $C\hat{X}B$ 卽 $M\hat{X}P$ 爲定角. 但 P, Q 乃由 M 至 CX, CY 之垂足. 因之$\triangle MXP$ 各角有定値.

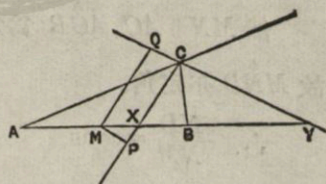


圖 63.

故 $MP:MX$ 爲定比.

同樣 $MQ:MY$ 亦定比.

$$\therefore \qquad MX\cdot MY:MP\cdot MQ=\text{cons.}$$

$$然 \qquad MX\cdot MY=\frac{1}{4}AB^2=\text{cons.}$$

$$\therefore \qquad MP\cdot MQ=\text{cons.}$$

14. 三角形頂角及面積定時,則頂角中線與底邊之半之平方差有定值.

[解] $\triangle ABC$ 之底 AB, M 爲其中點, N 爲 BC 中點, D 爲由 M 至 BC 之垂足. 則

$$CM^2-MB^2=CD^2-DB^2$$

$$=4CN\cdot ND$$

然 $MN\parallel AC$, $A\hat{C}B$ 爲定角,

故 $M\hat{N}D$ 亦定角.

$$\therefore \quad \frac{ND}{NM}=\text{cons.} \qquad (1)$$

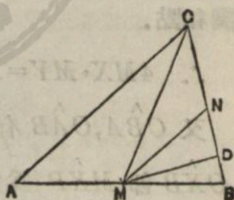


圖 64.

又$\triangle ABC$ 爲定積,故其半亦定積,即

$$CN\cdot NM=\text{cons.} \qquad (2)$$

由(1),(2)得

$$CN \cdot ND = \text{cons.}$$

$$\therefore \quad CM^2 - MB^2 = 4CN \cdot ND$$

$$= \text{cons.}$$

15. 二等邊三角形 ABC, 底 BC 之中點 O 爲心畫圓切兩腳,次引此圓之切線交 AB, AC 於 X, Y, 則 $BX \cdot CY$ 爲定值.

解 O 爲 $\triangle AXY$ 之內心. 且

$AB = AC$

$\therefore \quad B\hat{A}C + 2A\hat{B}C = 2\hat{R}$

又 $\quad B\hat{A}C + A\hat{X}Y + A\hat{Y}X = 2\hat{R}$

$\therefore \quad 2A\hat{B}C = A\hat{X}Y + A\hat{Y}X$

$= 2(B\hat{X}O + C\hat{Y}O)$

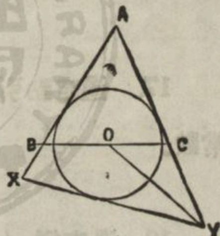


圖 65.

$\therefore \quad A\hat{B}C = B\hat{X}O + C\hat{Y}O$

然 $\quad A\hat{B}C = B\hat{X}O + B\hat{O}X$

$\therefore \quad B\hat{O}X = C\hat{Y}O$

又 $\quad O\hat{B}X = O\hat{C}Y$

$$\therefore \quad \triangle BOX \backsim CYO$$

$$\therefore \quad BX : BO = CO : CY$$

$$\therefore \quad BX \cdot CY = BO \cdot CO = \text{cons.}$$

16. 半圓 AB 內引弦 AP，其延線交切線 BQ 於 Q，則 $AP \cdot AQ$ 爲常數．

解 $$\triangle APB \backsim ABQ$$

$$\therefore \quad AP : AB = AB : AQ$$

$$\therefore \quad AP \cdot AQ = AB^2 = \text{cons.}$$

17. 過定點引定圓之弦或割線則其兩分所包之矩形爲常數．

18. 過直徑 AB 上之點 L 引弦 CLD．結直線 BCE，BDF 交 A 點切線於 E, F．則 $AE \cdot AF$ 爲常量．

解 引 MLN 平行切線 EAF 交圓周於 I, J．BI, AE 相交於 G．則

$$C\hat{M}I = \frac{1}{2}(\widehat{BJ} + \widehat{CI})$$

$$=\frac{1}{2}\widehat{BC}$$

$$=L\hat{D}N$$

故　C, M, D, N 爲共圓點.

然　$LM\cdot LN=LC\cdot LD=LI^2$

$LM:LN:LI=AE:AF:AG$

$\therefore$　$AE\cdot AF=AG^2=\text{cons.}$

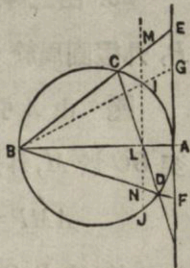


圖 66.

19. 在半圓 $AMNB$ 引弦 AN, BM, 其交點爲 P, 則 $AP\cdot AN+BP\cdot BM$ 爲常量.

解　由 P 引 AB 垂線其足爲 H. 故 B, H, P, N 爲共圓點.

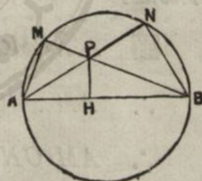


圖 67.

$\therefore$　　$AP\cdot AN=AB\cdot AH$

同樣　$BP\cdot BM=AB\cdot BH$

前兩式相加得

$$AP\cdot AN+BP\cdot BM=AB(AH+BH)$$

$$=AB^2$$

$$=\text{cons.}$$

20. 由二等邊 $\triangle ABC$ 之頂點 A 引直線 APQ 交 BC 於 P, 外接圓周於 Q,則 $AP\cdot AQ$ 有定值.

解 由 A 引 BC 垂線 AMN 交 BC 於 M,外接圓周於 N. 則

$$A\hat{M}P = A\hat{Q}N$$

故 M,P,Q,N 爲共圓點.

$$\therefore\quad AP\cdot AQ = AM\cdot AN = \text{cons.}$$

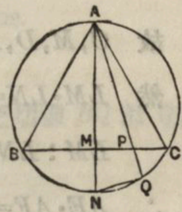


圖 68.

21. $\square ABCD$ 之二邊 AD, DC 上,各有定點 P, Q,今由之引同向二線 PM, QN 交 AB, BC 於 M, N. 則 $AM\cdot CN$ 有定值.

解 $\triangle APM \backsim CNQ$

$$\therefore\quad AM : CQ = AP : CN$$

$$\therefore\quad AM\cdot CN = AP\cdot CQ$$

$$= \text{cons.}$$

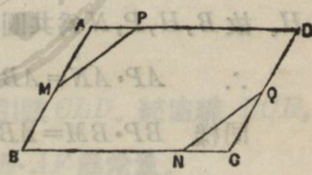


圖 69.

22. 由定弧 BC 之中點 A 引直線 ADE 交弧 AC 於 D, 弦 BC 延線於 E. 則 $AD\cdot AE$ 有定值.

解　$EB \cdot EC = ED \cdot EA$

$= (EA - DA) EA$

$= EA^2 - DA \cdot EA$

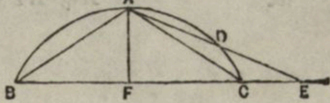


圖 70.

$\therefore \quad AD \cdot AE = EA^2 - EB \cdot EC$

由 A 引$AF \perp BC$. 則

$$EA^2 = AF^2 + FE^2,$$

$$AB^2 = AF^2 + FB^2$$

$$\therefore \quad EA^2 - AB^2 = FE^2 - FB^2$$

$$= (FE - FB)(FE + FB)$$

$$= EC \cdot EB$$

$$\therefore \quad AD \cdot AE = AB^2 = \text{cons.}$$

23. 由圓周上定點 A 引直線 AQP 交圓周於 P,交平行 A 點切線之定線於 Q,則 $AP \cdot AQ$ 有定值.

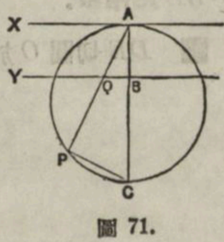


圖 71.

解　引直徑 AC 交平行切線之直線於B. 結 PC,則 P,Q,B,C 爲共圓點.

故　　$AQ\cdot AP=AB\cdot AC$

$=\text{cons.}$

24. 二平行線 AX, BY 其距離為 AB. 今以 AB 中點 C 為頂點任作直角三角形 $CA'B'$,而二頂點 A', B' 在 AX, BY 上, 則 $AA'\cdot BB'$ 有定值.

解　　$\triangle AA'C \backsim BCB'$

$\therefore\quad AA' : AC = CB : BB'$

$\therefore\quad AA'\cdot BB' = AC\cdot BC$

$= AC^2$

$=\text{cons.}$

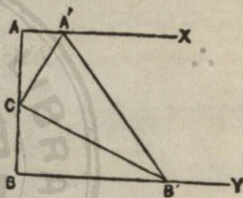


圖 72.

25. 在定徑 AB 兩端引切線,交任意他切線於 D, E,則 $AD\cdot BE$ 為常數.

解　DE 切圓 O 於 F. 則

$$D\hat{O}F=\frac{1}{2}A\hat{O}F,$$

$$E\hat{O}F=\frac{1}{2}F\hat{O}B$$

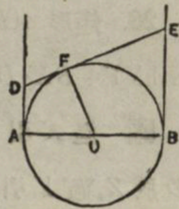


圖 73.

$\therefore$　　$D\hat{O}E=\hat{R}$

但　　$OF\perp DE$

$\therefore$　　$DF\cdot EF=OF^2$

卽　　$AD\cdot BE=OF^2$

$=\text{cons.}$

26. **半圓 AB 引三切線 AC,BD,CD, 而 CD 之切點爲 E,則 $CE\cdot ED$ 爲常數。**

27. **由圓 O 中心等距離且同在一直徑上取二點 A,B, 過 A,B 引互平行二直線 AM,BN 同在一半圓內,則 $AM\cdot BN$ 有定值。**

證　延長 MA 交圓周於 L。則 L,O,N 爲共線點。

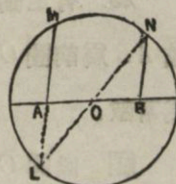


圖 74.

$\triangle AOL\equiv BON$

$\therefore$　　$AL=BN$

$\therefore$　　$AM\cdot BN=AM\cdot AL$

但 A 爲定點,故 $AM\cdot AL$ 爲常數。

28. **矩形** $ABCD$, X, Y **爲** BC, CD **上之任意點,則** $2\triangle AXY+BX\cdot DY$ **有定值.**

解 過 X 引 CD 平行線交 AD 於 Z,過 Y 引 AD 平行線交 AB 於 T, 又此二線相交於 P. AY,XZ 相交於 E,過 E 引 AD 平行線交 AB,CD 於 U,V. 則

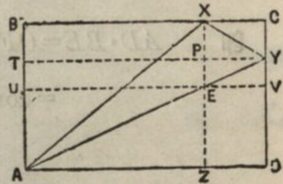


圖 75.

$$2\triangle XYA=\square BV$$

然 $$\square ET=\square ED$$

$$\therefore\quad 2\triangle AXY+\square AP=\square ABCD$$

$$\therefore\quad 2\triangle AXY+BX\cdot DY=\text{cons.}$$

29. **有定圓其中心爲** C,**過** C **有他定圓** ABC. **後圓之弦** AB **爲前圓** C **之切線時,則** $AC\cdot BC$ **爲常數.**

解 設圓 C 之半徑爲 r, 圓 ABC 之直徑爲 d. $\triangle ABC$ 內接於圓. 故

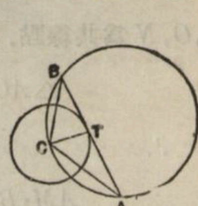


圖 76.

$$AC\cdot BC=dr=\text{cons.}$$

30. 圓內接四邊形 $ABCD$ 對角線直交於 E,則此四邊形二雙對邊平方和之比爲常數.

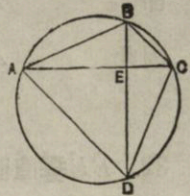


圖 77.

解　$AB^2=BE^2+AE^2,$

$CD^2=CE^2+ED^2$

$\therefore$　$AB^2+CD^2=AE^2+EC^2+BE^2+ED^2$

同理　$AD^2+BC^2=AE^2+EC^2+BE^2+ED^2$

$\therefore$　$AB^2+CD^2:AD^2+BC^2=1=\text{cons.}$

31. 在圓 A 引二半徑 AB,AC. 由 C 引 AB 垂線其足爲 X,由 X 引 BC 垂線 XP. 則 AP^2+PX^2 爲常數.

解　M 爲 BC 中點,結 AM. 則

$AB^2=AM^2+BM^2,$

$AP^2=AM^2+MP^2$

$\therefore$　$AB^2-AP^2=BM^2-PM^2$

$=PC\cdot BP$

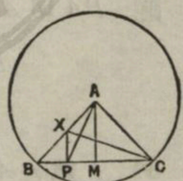


圖 78.

然$\triangle BXC$ 角 X 爲直角. 故

$PC\cdot BP=PX^2$

即 $AB^2-AP^2=PX^2$

因此 $AP^2+PX^2=AB^2=\text{cons.}$

32. EF 垂直圓徑，P 爲 EF 線上之點，AP 交圓周於 Q，則 $AP\cdot AQ$ 爲常數。

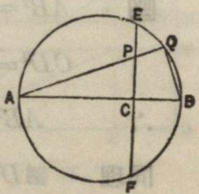


圖 79.

解 $\triangle APC \backsim ABQ$

$\therefore \quad AP : AC = AB : AQ$

$\therefore \quad AP\cdot AQ = AB\cdot AC = \text{cons.}$

33. 線分 AB 上作 $\triangle ABC$，引 AX 直線使 $B\hat{A}X$ 等 $\hat{C}$，則 $BC\cdot BX$ 爲常數。

解 BA 切 AXC 圓。故

$$BC\cdot BX = AB^2 = \text{cons.}$$

34. P 爲 $\triangle ABC$ 邊 AB 上任意點，引 BQ 平行 PC 交 AC 延線於 Q。今 X, Y 爲 AB, AQ 上之點，而 AX 爲 AB，AP 之比例中項，AY 爲 AC, AQ 之比例中項。則 $\triangle AXY$ 爲定積。

解 由假定

$$AP:AX=AX:AB$$

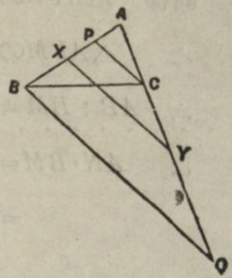


圖 80.

$\therefore\quad (AX:AB)^2=AP:AB$

又 $\quad AC:AY=AY:AQ$

$\therefore\quad (AY:AQ)^2=AC:AQ$

然由假定

$$AP:AB=AC:AQ$$

$\therefore\quad (AX:AB)^2=(AY:AQ)^2$

即 $\quad AX:AB=AY:AQ=AC:AY$

$\therefore\quad AX\cdot AY=AB\cdot AC$

然 $\triangle ABC$, AXY 一角 A 爲共通，且二邊 $AX\cdot AY$ 等 $AB\cdot AC$。

$\therefore\quad \triangle AXY=ABC=\text{cons.}$

35. P 爲正三角形 ABC 外接圓周上之點，M, N 爲 AP, BC；BP, AC 交點，則 $AN\cdot BM$ 爲常數.

解 $\quad A\hat{B}M=A\hat{P}B=120°$

$\therefore\quad \triangle ABM \backsim APB$

同樣 $\triangle APB \backsim NAB$

$\therefore \quad \triangle ABM \backsim NAB$

$\therefore \quad AB : BM = NA : AB$

$\therefore \quad AN \cdot BM = AB^2$

$= \text{cons.}$

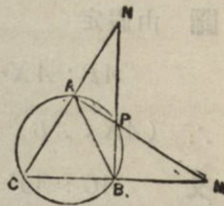


圖 81.

36. **角** C **爲直角之** $\triangle ABC$, AC **之中點爲** D, **由** D **引** AB **垂線** DE, **則** $BE^2 - AE^2$ **爲定値.**

解 $BE^2 = BD^2 - DE^2$

$AE^2 = AD^2 - DE^2$

$\therefore \quad BE^2 - AE^2 = BD^2 - DC^2 = BC^2$

然由假定 BC 爲定長.

$\therefore \quad BE^2 - AE^2 = \text{cons.}$

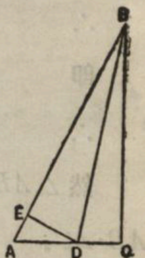


圖 82.

37. AB **爲直徑之半圓,過** AB **上定點** P **任引直線交圓周於** Q**,過** Q **引** PQ **垂線交** A,B **點切線於** M,N**, 則** $AM \cdot BN$ **有定值.**

解 $$A\hat{M}P = A\hat{Q}P$$

$$P\hat{N}B=P\hat{Q}B$$

$\therefore\quad A\hat{M}P+P\hat{N}B=A\hat{Q}P+P\hat{Q}B$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=\hat{R}$

然　$B\hat{P}N+P\hat{N}B=\hat{R}$

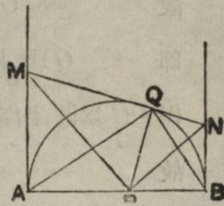


圖 83.

$\therefore\quad A\hat{M}P+P\hat{N}B=B\hat{P}N+P\hat{N}B$

即　$A\hat{M}P=B\hat{P}N$

$\therefore$　$\triangle AMP \backsim BPN$

$\therefore$　$AM:AP=BP:BN$

即　$AM\cdot BN=AP\cdot BP=\text{cons.}$

38. 弦 BC 對於定圓 O 內定點 A 張直角，引 AX, OY 垂直 BC，則 $AX\cdot OY$ 爲常數。

解　因　$OY\perp BC$

$\therefore$　$BY=YC$

又因　$AD\perp OY$

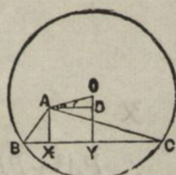


圖 84

$\therefore$　$A\hat{Y}O<\hat{R}$

$\therefore\quad AO^2=OY^2+AY^2-2OY\cdot DY$

然　$OC^2=OY^2+CY^2=OY^2+AY^2$

故 $$OC^2=AO^2+2OY\cdot DY$$

卽 $$OY\cdot AX=\frac{1}{2}(OC^2-AO^2)$$

但 OC 爲圓半徑，A 點爲定點則 AO 爲定長.

故 $$OY\cdot AX=\text{cons.}$$

39. 有二同心圓，小圓周上有定點 P，引小圓之任意弦 PA，又引大圓之弦 PB 垂直 PA 交大圓周於 B, C. 則 $PA^2+PB^2+PC^2$ 爲定值.

解 O 爲公共中心，r,r' 爲大小圓之半徑. 引

$$OM\perp PA,\quad ON\perp PB$$

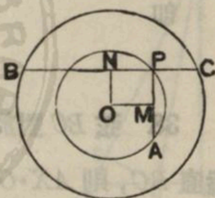


圖 85.

則 $$PB^2+PC^2=(BN+NP)^2+(BN-NP)^2=2(BN^2+NP^2)$$

又 $$PA^2=4PM^2$$

$$\therefore PA^2+PB^2+PC^2=4PM^2+2(BN^2+PN^2)$$
$$=2(PM^2+PN^2)+2(PM^2+BN^2)$$
$$=2(PM^2+OM^2)+2(ON^2+BN^2)$$

$$=2(r^2+r'^2)$$

$$=\text{cons.}$$

40. A 爲定圓外定點，P 爲周上定點，過 A 引任意割線 ABC，Q，M，N 爲 PA，PB，PC 中點．則 $QM\cdot QN$ 爲定值．

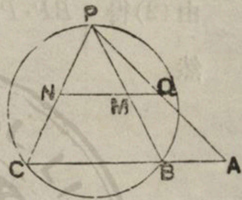


圖 86.

解 M 爲 PB 中點，N 爲 PC 中點．故 MN 平行 BC 且過 PA 之中點 Q．

又 $$QM=\frac{1}{2}AB,\quad QN=\frac{1}{2}AC$$

∴ $$QM\cdot QN=\frac{1}{4}AB\cdot AC$$

$$=\text{cons.}$$

41. 正三角形 ABC 外接圓劣弧 BC 上任取一點 P，則 $AP^2-BP\cdot CP$ 一定不易．

解 AP，BC 相交於 E．則

$$\triangle ABP \backsim ABE$$

∴ $AB : AP = AE : AB \quad (1)$

又 $\triangle EPC \backsim BPA$

∴ $BP : AP = EP : PC \quad (2)$

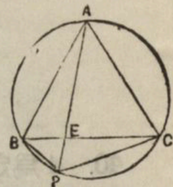


圖 87.

由(1)得 $AB^2 = AP \cdot AE$

由(2)得 $BP \cdot PC = AP \cdot PE$

然 $AP^2 = AP(AE + EP)$

$= AP \cdot AE + AP \cdot EP$

$= AB^2 + BP \cdot PC$

∴ $AP^2 - BP \cdot PC = AB^2 = \text{cons.}$

42. 與圓徑傾斜 45° 引弦，爲圓徑所分各部分之平方和有定値.

解 弦 AB 與直徑 MN 傾斜 45°，其交點爲 C. 結 AO，引 OI 垂直 AB.

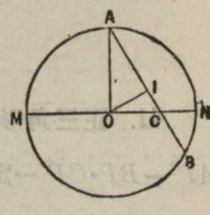


圖 88.

則 $AC^2 + CB^2 = (AI + IC)^2$

$+ (AI - IC)^2$

$= 2(AI^2 + IC^2)$

然 $I\hat{O}C = I\hat{C}O = 45°$

$$\therefore \qquad IC=IO$$

$$\therefore \qquad AC^2+CB^2=2(AI^2+IO^2)$$

$$=2OA^2$$

$$=2R^2$$

$$=\text{cons.}$$

43. 過二定圓之一交點 A 引正交二直線 AXY, APQ, 交圓周於 X, Y, P, Q. 則 PQ^2+XY^2 爲定數.

解 O, O' 爲圓 PAY, QAX 之中心. 則 O 爲 PY 中點, O' 爲 QX 中點.

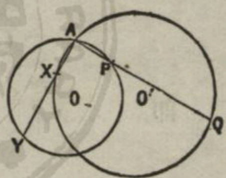


圖 89.

$$\therefore \qquad PX^2+XY^2+YQ^2+QP^2$$

$$=PY^2+QX^2+4OO'^2$$

然 $$PX^2+YQ^2=PA^2+XA^2+QA^2+AY^2$$

$$=PY^2+QX^2$$

$$\therefore \qquad PQ^2+XY^2=4OO'^2$$

$$=\text{cons.}$$

44. AB **爲公弦．由一圓周上任意點** C **引他圓切線** CD．**則** $CD^2/CA\cdot CB$ **爲定值．**

解 延長 CA 交圓周於 E, 則

$$CD^2=CA\cdot CE$$

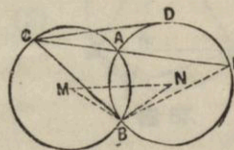


圖 90.

圓 CAB 之中心爲 M, 圓 DAB 之中心爲 N. 則

$$A\hat{C}B=N\hat{M}B$$

$$A\hat{E}B=M\hat{N}B$$

$\therefore$ $$\triangle CEB \backsim MNB$$

$\therefore$ $$CE:CB=MN:MB$$

即 $$CE=CB\cdot\frac{MN}{MB}$$

$\because$ $$CD^2=CA\cdot CB\cdot\frac{MN}{MB}$$

即 $$\frac{CD^2}{CA\cdot CB}=\frac{MN}{MB}=\text{cons.}$$

45. 有二定圓，一圓之中心 O **在他圓周上．圓** O **任意切線交他圓周於** M, M'．**則** $OM\cdot OM'$ **爲定值．**

解 直線 MM' 切圓 O 於 A, OB 爲第二圓之直徑. 則

$$O\hat{M}B=\hat{R}$$

且 $$O\hat{A}M'=\hat{R}$$

又 $$M\hat{B}O=A\hat{M}'O$$

∴ $$\triangle OMB \backsim OAM'$$

∴ $$OM:OB=OA:OM'$$

即 $$OM\cdot OM'=OB\cdot OA$$

$$=\text{cons.}$$

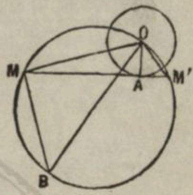


圖 91.

46. 由圓周上任一點 M 引定向直線交定切弦於 A, 切線於 B,C, 則 $MA^2/MB\cdot MC$ 爲常數.

解 如圖, 角 α,β,γ 爲定角. MD ME,MF 各爲 ID, IH, DH 之垂線.

若

$$\frac{MD}{MA}=a,\quad \frac{ME}{MB}=b,\quad \frac{MF}{MC}=c$$

則 a,b,c 爲定數.

由之得:

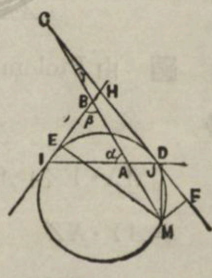


圖 92.

$$MD=MA\cdot a,$$

$$ME=MB\cdot b$$

$$MF=MC\cdot c$$

然 $$MD^2=ME\cdot MF$$

即 $$\frac{MD^2}{ME\cdot MF}=1$$

∴ $$\frac{MA^2\cdot a^2}{MB\cdot b\cdot MC\cdot c}=1$$

即 $$\frac{MA^2}{MB\cdot MC}=\frac{b\cdot c}{a^2}=\text{cons.}$$

47. AC 為 $\square ABCD$ 之對角線，Y 為其上之定點，過 A,Y 畫任意圓交 AB,AD 於 X,Z. 則

$$AX\cdot AB+AZ\cdot AD=\text{cons.}$$

證 由 Ptolemy 定理

得

$$AX\cdot YZ+AZ\cdot XY$$

$$=AY\cdot XZ$$

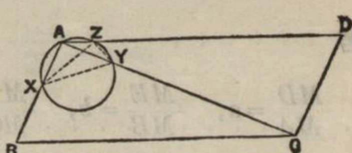


圖 93.

而 $\triangle XYZ \backsim ABC$

$$\therefore \qquad \frac{YZ}{AB}=\frac{XY}{BC}=\frac{XZ}{AC}$$

$$\therefore \qquad AX\cdot AB+AZ\cdot BC=AY\cdot AC=\text{cons.}$$

48. **AB 爲與圓之定弦，C 爲周上任意點．由圓之中心 O 至 AC 距離與由 AB 中點 M 至 AC 距離之積加以由 O，M 至 BC 距離之積爲定值．**

解　$\triangle MAC=\frac{1}{2}ABC$

$\therefore\ MD'\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot CH$　(1)

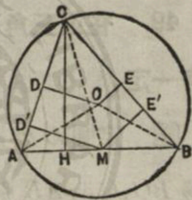


圖 94.

但 H 爲由 C 至 AB 之垂足，D' 爲由 M 至 AC 之垂足．又由 O 至 AC 之垂足爲 D，至 CB 之垂足爲 E．由 M 至 CB 之垂足爲 E'．則

$$\triangle ODA\backsim BHC$$

$$\therefore \qquad OD:DA=BH:HC \qquad (2)$$

(1)(2)相乘，且 $AC=2\cdot AD$，則得

$$OD\cdot MD'=\frac{1}{4}AB\cdot BH$$

同樣 $$OE\cdot ME'=\frac{1}{4}AB\cdot AH$$

$$\therefore OD\cdot MD'+OE\cdot ME'=\frac{1}{4}AB(BH+AH)$$

$$=\left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$=\text{cons.}$$

49. 在正三角形內接圓周上任意點至各邊距離之平方和有一定.

證 定圓 O 外接一正三角形 ABC. 由圓周上任一點 P 至邊 BC, CA, AB 引垂線 PD, PE, PF.

由 A 引 BC 垂線 AG 必過 O. AB, AC 之切點爲 I, H. 由 P 引 IH 垂線其足爲 L.

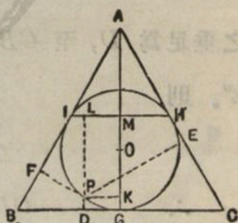


圖 95.

$$PE^2+PF^2=(PE+PF)^2-2PE\cdot PF$$

但 $$PE+PF=AK$$

K 乃由 P 至 AG 之垂足.

$$PE\cdot PF=PL^2$$

$\therefore \qquad PE^2+PF^2=AK^2-2PL^2$

設 IH, AG 相交於 M，則

$$AK=AG-KG=2MG-PD$$

$$PL=MK=MG-PD$$

$$\therefore \qquad PE^2+PF^2=(2MG-PD)^2-2(MG-PD)^2$$
$$=2\cdot MG^2$$
$$=\text{cons.}$$

50. O 爲公心之二同心圓，$ABCD$ 爲共通直徑，P, Q 爲內圓及外圓周上任意點．則 $BQ^2+CQ^2 : AP^2+DP^2$ 或 $AQ^2+DQ^2 : BP^2+PC^2$ 俱爲定比．

解 先證 BQ^2+CQ^2 與 AP^2+DP^2 之比爲定值．

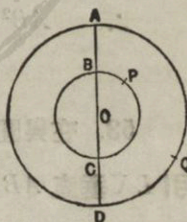


圖 96.

r, r' 爲外圓及內圓之半徑．

則 $\qquad BQ^2+CQ^2=2(r^2+r'^2)$

$\qquad AP^2+DP^2=2(r^2+r'^2)$

故所求之比爲 1．

同樣得證 $AQ^2+DQ^2 : BP^2+PC^2$ 爲定值．

51. 同上假定則$(BQ^2+CQ^2)\pm(AP^2+DP^2)$或$(AQ^2+DQ^2)\pm(BP^2+PC^2)$爲定值.

52. 過圓內定點 P 引正交兩弦 AB, CD, 則 AB^2+CD^2 爲定值.

解 a, b 爲二弦之半分, a', b' 乃由中心 O 至二弦之距離, r 爲圓半徑. 則

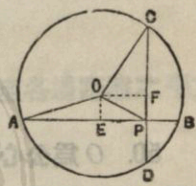


圖 97.

$$a^2=r^2-a'^2,\quad b^2=r^2-b'^2$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=2r^2-(a'^2+b'^2)$$

$$=2r^2-OP^2$$

然 OP 爲定長.

$$\therefore\quad AB^2+CD^2=4(a^2+b^2)=8r^2-4OP^2=\text{cons.}$$

53. 在與圓定徑 AB 延線有定點 L, 引割線 LDC, 又引 LX 垂直 AB, BC, BD 交 LX 於 N, M. 則 $LM\cdot LN$ 爲常數.

解 結 AD, AC, 又由 L 引切線 LT, 則 N, C, A, L 爲共圓點.

$\therefore\quad \hat{N}=C\hat{A}B=C\hat{D}B$

故 N,C,D,M 亦共圓點。

$\therefore\quad LM\cdot LN=LC\cdot LD$

$=LT^2=\text{cons.}$

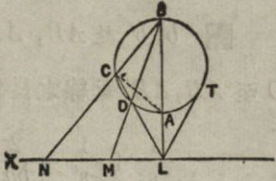


圖 98.

54. AB 爲與圓 C 內之定弦，P 爲周上任意點，PA,PB 交 AB 之垂直徑於 X,Y，則 $CX\cdot CY$ 爲常數。

解　PCQ 爲直徑，結 QA。

則　$P\hat{Y}C=X\hat{Y}B$

$=\hat{R}-P\hat{B}A$

$=\hat{R}-P\hat{Q}A$

$\therefore\quad P\hat{Y}C=X\hat{P}C$

$\therefore\quad \triangle PYC\backsim XPC$

$\therefore\quad CY:CP=CP:CX$

即　$CY\cdot CX=CP^2=\text{cons.}$

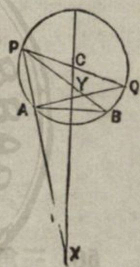


圖 99.

55. 過定角 A 內定點 O 引直線 BOB'，交邊於 B,B'，s,s' 表 $\triangle ABO$, $AB'O$ 之面積．則 $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}$ 爲定數．

解 b, b' 表 AB, AB' 之長．由 O 至 AB, AB' 垂線之長爲 h, h'．則

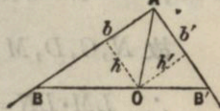


圖 100.

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{bh}+\frac{2}{b'h'}$$

$$=\frac{2(b'h'+bh)}{bb'\times hh'}$$

$$=\frac{2bb'\sin A}{bb'\times hh'}$$

$$=\frac{2\sin A}{hh'}$$

$$=\text{cons.}$$

56. 三角形面積及各邊平方和有定值，則由各角所作之六二等分線平方逆數和有定值．

解 以 a, a' 表 A 角內外二等分線 AD, AD' 之長，h_a 表 A 角高線．

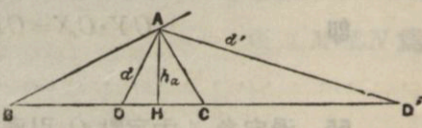


圖 101.

$$D\hat{A}D'=\hat{R}$$

$$a^2+a'^2=DD'^2$$

$$a\cdot a'=DD'\cdot h_a$$

∴ $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a'^2}=\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{\left(\frac{2\triangle}{a}\right)^2}=\frac{a^2}{4\triangle}$$

同樣 $$\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta'^2}=\frac{b^2}{4\triangle}$$

$$\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma'^2}=\frac{c^2}{4\triangle}$$

但 a,b,c 表 A,B,C 角之對邊,△表三角形面積, β, β', γ, γ' 表 B 角,C 角之內外二等分線.

∴ $$\Sigma\frac{1}{a^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\triangle}=\text{cons.}$$

57. 菱形 $ABCD$ 外接於 O 圓,引此圓切線交 AB,AD 於 M,M'. 則 $BM\cdot DM'$ 之積爲一定.

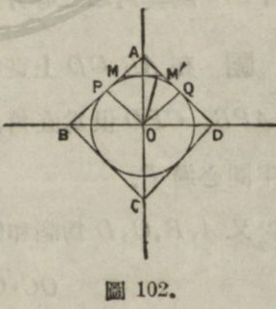


圖 102.

㊣ AB 之切點爲 P, AD 之切點爲 Q, 則

$$B\hat{O}M = B\hat{O}P + P\hat{O}M$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{A} + A\hat{M}M')$$

$$= \frac{1}{2} M\hat{M}'Q$$

$$= O\hat{M}'D$$

又 $$M\hat{B}O = O\hat{D}M'$$

∴ $$\triangle MBO \backsim ODM'$$

∴ $$BM : BO = DO : DM'$$

卽 $$BM \cdot DM' = BO \cdot DO = \text{cons.}$$

58. **直角 APB 迴轉於定點 P 之周交定直線於 A, B, PC, PD 爲其角之二等分線,則 $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}$ 爲定值.**

解 在 AB, CD 上畫半圓.

因 APB, CPD 俱爲直角,故此等半圓必過 P.

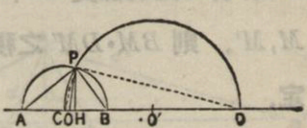


圖 103.

又 A, B, C, D 爲調和點.

故 $$OC \cdot OD = OB^2 = OP^2$$

因此 OP 爲圓 O' 之切線．但 O, O' 乃圓 APB, CPD 之中心．

$$\therefore \qquad O\hat{P}O' = \hat{R}$$

引 $$PH \perp AB$$

則 $$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{4OP^2} + \frac{1}{4O'P^2}$$

$$= \frac{OP^2 + O'P^2}{4OP^2 \cdot O'P^2}$$

然 $$OP^2 = OH \cdot OO',$$

$$O'P^2 = O'H \cdot OO'$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{OO'^2}{4OO'^2 \cdot PH^2} = \frac{1}{4PH^2} = \text{cons.}$$

59. PQ, RS 爲定直線，OQP, ORS 爲定向二動線，常截 PQ, RS，則

$$OP \cdot OQ : OR \cdot OS = \text{cons.}$$

解 OQP, ORS 有定向．故 O 爲定角．由是 $\triangle OPR$, OQS 常自身相似．故 $OP : OR$, $OQ : OS$ 俱定比．

$$\therefore \qquad OP \cdot OQ : OR \cdot OS = \text{cons.}$$

60. 直線 OA, OB 有定位，$\triangle AOB$ 有定積，AB 線上有一點 P 而 $AP:BP$ 等定比 $m:n$. 直線 AB 移動時過 P 引定向直線交 OA, OB 於 X, Y, 則 $PX \cdot PY$ 爲常數.

解　引 $PM \parallel OB, PN \parallel OA$. 則

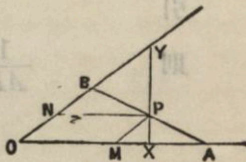


圖 104.

$$PM = \frac{m}{m+n} OB,$$

$$PN = \frac{n}{m+n} OA$$

又 $PX:PM, PY:PN$ 爲定比.

故 $PX \cdot PY : PM \cdot PN$ 爲定比.

然　$$PM \cdot PN = \frac{mn}{(m+n)^2} OA \cdot OB = \text{cons.}$$

$\therefore$　$$PX \cdot PY = \text{cons.}$$

61. 直角三角形斜邊有定長則三中線之平方和有定值.

解　a 爲斜邊, d 爲其對應中線; b, c 爲夾直角之二邊, e, f 爲其對應中線. 則

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$\therefore$　$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2$$

又三中線相交於 G, D, E, F 爲各邊中點. 則

$$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$$

$$BC^2+AC^2=2(CF^2+AF^2)$$

$$AB^2+BC^2=2(BE^2+AE^2)$$

$$\therefore\quad 2(AB^2+AC^2+BC^2)=2(AD^2+BE^2+CF^2)+2(BD^2+AF^2+AE^2)$$

$$\therefore\quad 4(AB^2+AC^2+BC^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)+4(BD^2+AF^2+AE^2)$$

$$=4(AD^2+BE^2+CF^2)+(AB^2+AC^2+BC^2)$$

$$\therefore\quad 3(AB^2+AC^2+BC^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)$$

卽 $$d^2+e^2+f^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$=\frac{3}{4}(2a^2)$$

$$=\frac{3}{2}a^2$$

$$=\text{cons.}$$

62. 任一四邊形 $ABCD$ 過對角線 BD 中點 M 引直線

平行於對角線 AC 交邊於 X, Y,則四邊形 $ABCD$ 與 $ABCY$ 有定比.

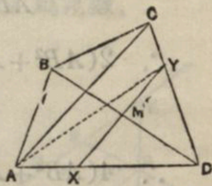


圖 105.

解 $\triangle ABM+CBM=\frac{1}{2}ABCD$

$\therefore \quad \triangle ABC+AMC=\frac{1}{2}ABCD$

$\therefore \quad \triangle ABC+AYC=\frac{1}{2}ABCD$

即 $\qquad ABCY=\frac{1}{2}ABCD$

$\therefore \quad ABCD : ABCY=2:1$

63. AB 為定圓之定徑,P 為 AB 上一定點,CD 為平行 AB 之任意弦. 則 PC^2+PD^2 為常數.

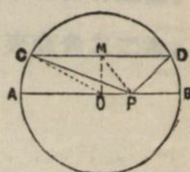


圖 106.

解 $PC^2+PD^2=2(PM^2+CM^2)$

又 $\qquad PM^2=OP^2+OM^2$

$$\therefore \quad PC^2+PD^2=2OP^2+2(OM^2+CM^2)=2OP^2+2R^2$$

但 R 為定圓半徑.

故　　　$PC^2+PD^2=\text{cons.}$

64. 在弦 BC 之圓弧上取任意點 A，引 CQ, BP 垂直 AB, AC(或其延線)，則

$$AB\cdot BQ+AC\cdot CP=\text{cons.}$$

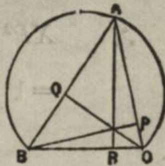


圖 107.

解 引 $AR\perp BC$

$$AC^2=AB^2+BC^2\mp 2AB\cdot BQ$$

$$=AB^2+BC^2\mp 2CB\cdot BR$$

複號從 ABC 角為銳或鈍而定.

$$\therefore\quad AB\cdot BQ=CB\cdot BR$$

同樣　$AC\cdot CP=CB\cdot CR$

$$\therefore\quad AB\cdot BQ+AC\cdot CP=CB(BR+CR)=CB^2$$

65. AB 為圓之直徑,引割線 XY 交圓周於 X, Y, 由 A, B 引直線 XY 之垂線 AP, BQ,則

$$XP^2+XQ^2 : YP^2+YQ^2=\text{cons.}$$

解 $XP^2+XQ^2=AX^2-AP^2+XB^2-BQ^2$

$$=AB^2-AP^2-BQ^2$$

同樣　YP^2+YQ^2

$$=AB^2-AP^2-BQ^2$$

$\therefore$　$XP^2+XQ^2 : YP^2+YQ^2$

$$=1$$

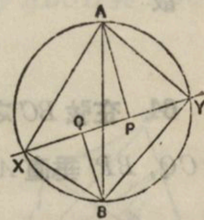


圖 108.

66. AB 爲直徑畫半圓,在周上任取 C 點作 $\triangle ABC$. 又 X, Y 爲線分 AB 之三等分點,則 CX^2+CY^2 爲定值.

解 M 爲 AB 中點,則

$$CX^2+CY^2=2(CM^2+MX^2)$$
$$=2(AM^2+MX^2)$$
$$=2\left(AM^2+\frac{AM^2}{9}\right)$$
$$=\frac{20}{9}AM^2$$
$$=\text{cons.}$$

67. 在 $\triangle ABC$ 邊 AB, AC 上取 M, N 二點, MN 上取 P 點使　$BM : AM=AN : NC=PM : PN$

則 $\triangle BPC : AMN = \text{cons.}$

解 設 $BM : AM = \alpha : \beta$, 則

$\triangle ABC : AMN = AB \cdot AC : AM \cdot AN = (\alpha+\beta)^2 : \alpha\beta$

又 $\triangle ANB : APB = (\alpha+\beta) : \alpha$

$\triangle AMN : ANB = \beta : (\alpha+\beta)$

$\therefore \triangle AMN : APB = \beta : \alpha$

同樣 $\triangle AMN : APC = \alpha : \beta$

$\therefore \triangle ABC : APB : APC : AMN$

$= (\alpha+\beta)^2 : \alpha^2 : \beta^2 : \alpha\beta$

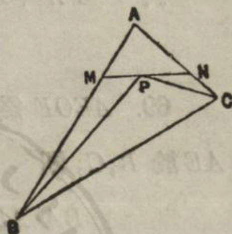


圖 109.

$\therefore \quad \triangle ABC - APB - APC : AMN = 2\alpha\beta : \alpha\beta$

$\therefore \quad \triangle BPC : AMN = 2 : 1$

$= \text{cons.}$

68. A, B, C, D 爲一直線上之四點, X, Y, M 爲 AB, CD, XY 之中點, P 爲此直線上任意點, 則

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 - 4PM^2 = \text{cons.}$$

解 $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$

$= 2PX^2 + 2AX^2 + 2PY^2 + 2DY^2$

$$=4PM^2+4MX^2+2AX^2+2DY^2$$

$$=4PM^2+2MX^2+2AX^2+2MY^2+DY^2$$

$$=4PM^2+MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$$

$\therefore \quad PA^2+PB^2+PC^2+PD^2-4PM^2=\text{cons.}$

69. $AEOF$ **爲任意平行四邊形,過** O **任引直線交** AF, AE **於** B,C, **則**

$$BA\cdot AF+CA\cdot AE-BO\cdot OC=\text{cons.}$$

解 過 A, B, C 畫圓交直線 AO 於 D. 引 FX, EY 交 AO 於 X, Y. 使

$A\hat{F}X=A\hat{D}B,\quad A\hat{E}Y=A\hat{D}C$

然 $\quad A\hat{F}O=2\hat{R}-B\hat{A}C$

$\qquad =B\hat{D}C$

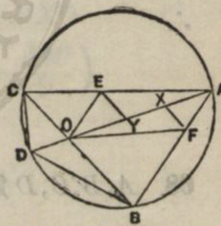


圖 110.

$\therefore\ O\hat{F}X=ADC=AEY$

$\therefore \quad OX=AY,\ OY=AX$

又 $FXDB, EYDC$ 爲圓內接四邊形.

$\therefore \quad AF\cdot AB=AX\cdot AD,\ AE\cdot AC=AY\cdot AD$

$\therefore \quad BA\cdot AF+CA\cdot AE=AD(AX+AY)$

$$=AO\cdot AD$$

$$=AO^2+AO\cdot OD$$

$$=AO^2+BO\cdot OC$$

$$\therefore \quad BA\cdot AF+CA\cdot AE-BO\cdot OC=AO^2=\text{cons.}$$

70. 任引定圓切線交定切線 AC, AB 於 P, Q, 則

$$CP\cdot BQ : AP\cdot AQ=\text{cons.}$$

證 設定圓之中心為 O, 第三切線之切點為 R, 由 A, B, C 至此切線之垂足為 L, M, N. 又 F 為由切點 R 至 CB 之垂足.

$$\frac{CP\cdot BQ}{AP\cdot AQ}=\frac{CN\cdot BM}{AL^2}$$

$$=\frac{CN}{RF}\cdot\frac{RF}{AL}\cdot\frac{BM}{RF}\cdot\frac{RF}{AL}$$

$$=\frac{OC}{OR}\cdot\frac{OR}{OA}\cdot\frac{OB}{OR}\cdot\frac{OR}{OA}$$

$$=\left(\frac{OR}{OA}\right)^2$$

$$=\text{cons.}$$

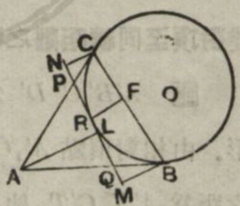


圖 111.

71. 由四邊形外接圓周上任一點引一雙對邊垂線之積與同點引他雙對邊垂線之積有定比.

解 由四邊形外接圓周上一點 M 至各邊引垂線 ME, MF, MG, MH, 結 MH, MB, MD, EF, HG. 則

$$\triangle MEB \backsim MDH$$

$\therefore$ $ME : MB = MH : MD$

同樣 $MF : MB = MG : MD$

$\therefore$ $ME : MF = MH : MG$

卽 $ME \cdot MG = MF \cdot MH$

$\therefore$ $ME \cdot MG : MF \cdot MH = 1$

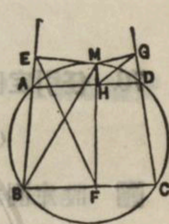


圖 112.

72. 圓外切四邊形一雙對頂至任一切線距離之積與他雙對頂至同線距離之積有定比.

解 $A'B'C'D'$ 爲圓外接四邊形. 由相對頂點 A', C' 至任意切線之距爲 $A'X$, $C'T$, 他相對頂點至同切線之距爲 $B'L$, $D'M$.

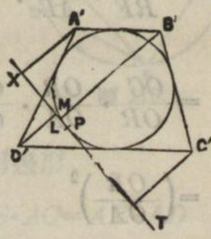


圖 113.

由前問施相反對極之法. 以定

圓 O 爲準圓，則四邊形 $ABCD$ 變爲外切四邊形 $A'B'C'D'$. 點 M 變爲切線 MT. A', M 爲 AB 及 MT 之極. 故由 Salmon 定理得

$$\frac{ME}{A'X}=\frac{MO}{A'O}$$

卽
$$ME=\frac{MO}{A'O}\cdot A'X$$

因此由前問之結果得

$$A'X\cdot CT'=\frac{A'O\cdot C'O}{D'O\cdot B'O}D'M\cdot B'L$$

$$\therefore \qquad A'X\cdot CT' : D'M\cdot B'L=\text{cons.}$$

73. A,B,C,D 爲共線點，則

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0$$

解 設 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$，則

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC$$
$$=(b-a)(d-c)+(c-a)(b-d)+(d-a)(c-b)=0$$

但 O 爲 AD 線上一定點，在 A,B,C,D 各點之左，並須注意線之方向.

74. 圓 C 直徑 BA 延線上取 O 點，由 O 引任意割線 OMM'，弧 AM, AM' 之中點爲 N, N'，結 CN, CN'，交由 O 所引 AB 垂線於 D, D'. 則不拘割線方向如何，而 $OD\cdot OD'$ 常爲定量.

解

$$BME \parallel CND$$

$$BM'E' \parallel CN'D'$$

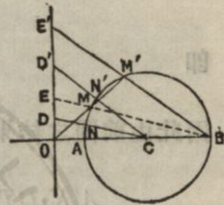


圖 114.

$$\therefore \quad OD = OE\cdot\frac{OC}{OB},$$

$$OD' = OE'\cdot\frac{OC}{OB}$$

$$\therefore \quad OD\cdot OD' = OE\cdot OE'\left(\frac{OC}{OB}\right)^2$$

但 $OE\cdot OE'$ 爲常量. 因

$$M'\hat{M}B = \frac{1}{2}(A\overset{\frown}{M'}B - \overset{\frown}{AM'}) = \hat{R} - \hat{B} = \hat{E'}$$

$$\therefore \quad OE\cdot OE' = OM\cdot OM' = OA\cdot OB$$

75. 過共軸圓限點之一引直線，交其中之一圓，則由其交點至根軸引垂線所包矩形有定值.

解 點 A 爲共軸圓之一中心，CO 爲根軸，F, F' 爲限點.

過 F, F' 引 CE, HF'. 又引 DK, EL, GM, HN 垂直 CO.

F, F' 爲限點. 故 CF 等由 C 所引切線之長.

RF 等 RF' 等由 R 所引切線之長.

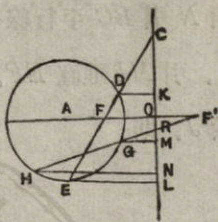


圖 115.

又 $CD : CF = CF : CE$

$DK \parallel FO$

$CD : CF = DK : FO$

又 $CF : CE = FO : EL$

$\therefore$ $DK : FO = FO : EL$

卽 $FO^2 = DK \cdot EL$

又 $GR : RF' = RF' : RH$

然 $GR : RF' = GM : OF'$

又 $RF' : RH = F'O : HN$

$\therefore$ $GM : FO = F'O : HN$

$\therefore$ $GM \cdot HN = F'O^2 = FO^2 = \text{cons.}$

$\therefore$ $DK \cdot EL = GM \cdot HN = FO^2 = \text{cons.}$

76. **互外切二定圓,過其切點 A 引正交之弦,則其四弦之平方和爲定值.**

解 二定圓之中心爲 M, N. 直交二弦爲 BC, EF. 結 BE, CF. 引 NG 垂直 AC, MH 垂直 AB. 又由 N 引 BC 平行線交 MH 延線於 L. 引 MI 垂直 EF. NL, AF 相交於 J. 則

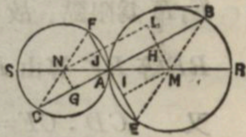


圖 116.

$$AH^2+AI^2=AM^2,$$

$$AJ^2+AG^2=AN^2$$

$$\therefore\quad AB^2+AC^2+AE^2+AF^2=AR^2+AS^2$$

$$\text{即}\quad AB^2+AE^2+AC^2+AF^2=AR^2+AS^2=\text{cons.}$$

77. 有二定圓,一圓之中心 A 在他圓周上, A 圓切線 BMN 交他圓周於 M, N. 則 $AM\cdot AN$ 爲常數.

解 作直徑 AC. 切點 B 與 A 結直線. 則

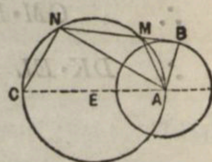


圖 117.

$$\triangle CAN \backsim MAB$$

$$\therefore\quad AC : AM = AN : AB$$

$$\text{即}\quad AM\cdot AN=AB\cdot AC=\text{cons.}$$

78. 正三角形 ABC 外接圓周上取一點 P,則

$$PA^2+PB^2+PC^2=\text{cons.}$$

解 正三角形重心卽外心. 故 O 為重心. 則

$$PA^2+PB^2+PC^2=3AO^2+3PO^2=6PO^2=\text{cons.}$$

79. 由正多邊形 $ABC\cdots\cdots$外接圓周上任取一點 P, 則

$$PA^2+PB^2+PC^2+\cdots\cdots=\text{cons.}$$

解 O 為正多邊形之中心, r, R 為其內半徑,外半徑, P 為內接圓周任意點. 則 O 為 A, B, $C\cdots\cdots$ 各點之平均中心.

則 $$\Sigma PA^2=nPO^2+\Sigma OA^2=n(r^2+R^2)=\text{cons.}$$

80. ABC 為定積三角形, $A'B'C'$ 在 $\triangle ABC$ 內方向相反而相似. a,b,c 為 $\triangle ABC$ 各邊之長, p_1,p_2,p_3 為由 A',B', C' 下此等邊垂線之長. 則 $ap_1+bp_2+cp_3$ 為常數.

解 由 B', C' 引 AC, AB 平行線,相會於 P, 且交 BC 於 X,Y. 則

$$B'\hat{P}C'=B\hat{A}C=B'\hat{A'}C'$$

故 $B'A'PC'$ 為圓內接四邊形.

$$\therefore \qquad C\hat{Y}P = A\hat{B}C = A'\hat{B'}C' = A'\hat{P}Y \quad \text{(或其補角)}$$

$$\therefore \qquad A'P \parallel BC$$

就他邊亦然.

$$\therefore \quad ap_1 + bp_2 + cp_3 = 2(\triangle PBC + PCA + PAB) = 2ABC$$

$$= \text{cons.}$$

81. 圓 O 直徑 AB 上有二定點 C, D, 而 $OC = OD$. P 為周上任一點. 則 $PC^2 + PD^2 = AC^2 + AD^2 = \text{cons.}$

解 O 為 CD 中點, 則

$$PC^2 + PD^2 = 2(PO^2 + CO^2)$$

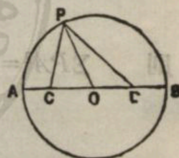


圖 118.

設 $AO = a$, $CO = DO = b$. 則

$$AC^2 + AD^2 = (a-b)^2 + (a+b)^2$$

$$= 2(a^2 + b^2)$$

$$= 2(AO^2 + CO^2)$$

$$\therefore \qquad PC^2 + PD^2 = AC^2 + AD^2 = \text{cons.}$$

82. 直交二等圓, 過其交點之一引直線所生二弦之平方

和有定值.

解　B,C 爲二圓中心，過其一交點 A 引直線 MAN，交圓周於 M,N.

由 B,C 引 MN 垂線 BD,CE，則

$$\text{Rt}\triangle ACE \equiv ADB$$

又　$AD^2+AE^2=AD^2+DB^2=r^2$

但 r 爲與圓半徑.

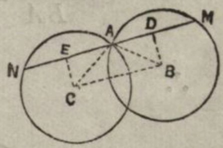


圖 119.

$$\therefore \qquad AM^2+AN^2=4(AD^2+AE^2)$$
$$=4r^2=\text{cons.}$$

83. 由任一點 P 引定向二直線交二定線於 A,A',B,B'. 則 $PA\cdot PA'$: $PB\cdot PB'$ 爲定比.

解　$\dfrac{PA}{PB}$, $\dfrac{PB'}{PA'}$ 爲定比. 因 $\triangle PAB, PA'B'$ 自身相似.

84. 任意四邊形其面積爲 S. 以其各邊分比 $\dfrac{m}{n}$ 之點爲頂點作四邊形面積爲 S'. 則 S' : S 爲定比.

解　分四邊形 $ABCD$ 四邊於 E,F,G,H 爲

$$\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{CG}{GD}=\frac{DH}{HA}=\frac{n}{m}$$

則　$\triangle BEF:BAC=BE\cdot BF:BA\cdot BC$

$$\frac{BE}{BA}=\frac{m}{m+n},\quad \frac{BF}{BC}=\frac{n}{m+n}$$

∴　$$\triangle BEF=\frac{mn}{(m+n)^2}BAC$$

同様　$$\triangle DGH=\frac{mn}{(m+n)^2}DCA$$

∴　$$\triangle BEF+DGH=\frac{Smn}{(m+n)^2}$$

同様　$$\triangle CFG+AHE=\frac{Smn}{(m+n)^2}$$

加此二式得

$$S-S'=\frac{2Smn}{(m+n)^2}$$

∴　$$S':S=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}=\text{cons.}$$

85. 二正三角形合成一菱形 $ABCD$。過 D 引任意直線 EF 交 AB,AC 延線於 E,F，結 EC,FB 相交於 M。$\triangle BEM$,

CFM 外半徑為 R, R',則 $R\cdot R'$ 為一定．又 $BE\cdot CF$ 亦然．

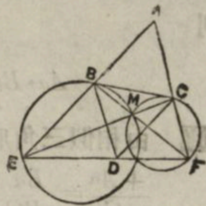


圖 120.

解　$\triangle BED \backsim CDF$

∴　$BE : BD = CD : CF$

而　$BD = CD = BC$

∴　$BE : BC = BC : CF$

∴　$BE \cdot CF = BC^2$　(1)

又　$E\hat{B}C = B\hat{C}F = 120°$

∴　$\triangle BCE \backsim BCF$

∴　$B\hat{E}C = F\hat{B}C$

∴　$\triangle EBC \backsim BMC$

∴　$B\hat{M}C = E\hat{B}C = 120°$

故 A, B, M, C 為共圓點．

∴　$B\hat{M}E = 60°$

故 BE 為 O 圓內接等邊三角形之一邊．

∴　$BE = \sqrt{3}R$

同樣　$CF = \sqrt{3}R'$

以之代入(1)得

$$R\cdot R' = \frac{1}{3}BC^2 = \text{cons.}$$

86. 過$\triangle ABC$各頂點引互平行三直線交對邊於 α, β, γ. 則

$$A\alpha\cdot B\beta+B\beta\cdot C\gamma+C\gamma\cdot A\alpha=0$$

解 由相似三角形定理

$$\frac{+A\alpha}{-C\gamma}=\frac{B\alpha}{BC},$$

$$\frac{+A\alpha}{-B\beta}=\frac{\alpha C}{BC}$$

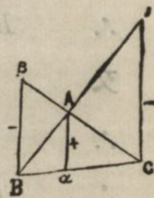


圖 121.

加此等式得

$$\frac{A\alpha}{C\gamma}+\frac{A\alpha}{B\beta}=-1$$

$$\therefore \quad A\alpha\cdot B\beta+B\beta\cdot C\gamma+C\gamma\cdot A\alpha=0$$

87. 由二圓相似中心至反相應點距離之積一定.

解 由相似中心 S 引截線交圓 O, O' 於 A, A', B, B', 中心線交圓於 M, M', N, N'. 而 A, A'; B, B'; M, M'; N, N'; 爲對

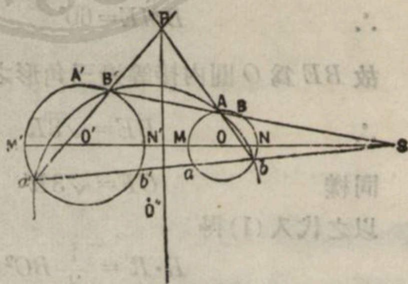


圖 122.

應點. 則

$$\frac{ON}{O'N'}=\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}$$

$$=\frac{SM}{SM'}=\frac{SN}{SN'}$$

$\therefore$ $$SA\cdot SB'=SA'\cdot SB$$

$$=\frac{SM}{SM'}SA'\cdot SB'$$

然 $$SA'\cdot SB'=SM'\cdot SN'$$

$\therefore$ $$SA\cdot SB'=SA'\cdot SB=SM\cdot SN'=SM'\cdot SN$$

然 $SM\cdot SN'$, $SN\cdot SM'$ 爲定值. 故 $SA\cdot SB'$, $SA'\cdot SB$ 亦定值.

88. 一動圓 O 切二定圓 A, B, 關於動圓 O, 圓 A, B 相似中心 S 之方羃常一定.

解 圓 O 與圓 A 相切於 N, 圓 O 與圓 B 相切於 M. 直線 MN 交 B 圓於 I.

$$M\hat{N}O=M\hat{I}B$$

$\therefore$ $$AN \parallel BI$$

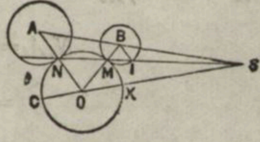


圖 123.

故 MN 過 A, B 二圓之相

似中心 S.

$$SM\cdot SN=SM\cdot SI\cdot\frac{AN}{BI}$$

$$=\text{cons.}$$

故關於動圓 O 點 S 之方冪爲常數.

89. 由正多邊形之中心有定距之迴線 d. 則直線 d 與多邊形各頂點距離之平方和有定値.

解 正多邊形之邊數爲 n, R 爲其外半徑.

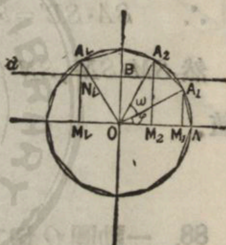


圖 124.

$$(d,OA_1)=\varphi$$

$$(d,OA_2)=\varphi+\omega$$

$$(d,OA_3)=\varphi+2\omega$$

....

$$(d,OA_n)=\varphi+(n-1)\omega$$

若 $OB=a$, 則

$$N_iA_i=N_iM_i+M_iA_i$$

$$=-a+R\sin\left[\varphi+(i-1)\omega\right]$$

故直線 d 與各頂點距離之平方和如下:

$$[R\sin\varphi-a]^2+[R\sin(\varphi+\omega)-a]^2+\cdots\cdots$$
$$+[R\sin(\varphi+\overline{n-1}\omega)-a]^2$$
$$=R^2[\sin^2\varphi+\sin^2(\varphi+\omega)+\cdots\cdots+\sin^2(\varphi+\overline{n-1}\omega)]$$
$$-2aR[\sin\varphi+\sin(\varphi+\omega)+\cdots\cdots+\sin(\varphi+\overline{n-1}\omega)]$$
$$+na^2$$
$$=\frac{nR^2}{2}-\frac{R^2}{2}[\cos 2\varphi+\cos(2\varphi+2\omega)+\cdots\cdots$$
$$+\cos(2\varphi+2\overline{n-1}\omega)]$$
$$-2aR\sin(\varphi+\frac{n-1}{2}\omega)\sin\frac{n\omega}{2}/\sin\frac{\omega}{2}+na^2$$
$$=\frac{nR^2}{2}-\frac{R^2}{2}\cdot\frac{\cos(2\varphi+\overline{n-1}\omega)\sin n\omega}{\sin\omega}$$
$$-2aR\sin(\varphi+\frac{n-1}{2}\omega)\sin\frac{n\omega}{2}/\sin\frac{\omega}{2}+na^2$$

然 $\omega=\frac{2\pi}{n}$,故 $\sin n\omega$, $\sin\frac{n\omega}{2}$ 俱爲0.因之前式得

$$\frac{nR^2}{2}+na^2$$

此最後之關係無關於 φ.故題云云.

90. 過圓內一點 M 互直交之二弦,其四線之平方和有

定值.

解 二弦 AB,CD 直交於 M. 設

$AM=a,\quad MB=b,$

$CM=c,\quad MD=d$

圖 125.

則 $$a^2+c^2=AC^2,$$

$$b^2+d^2=BD^2$$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2+d^2=AC^2+BD^2$

作直徑 COE, 則

$$\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{BD}=\pi$$

$\therefore\qquad AE=BD$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2+d^2=AC^2+AE^2=CE^2=\text{cons.}$

91. 與圓心 O 等距離且同在一直徑上取 A,B 二點, 過 B 引 DBC 弦交圓周於 D,C, 結 DA,CA, 則 AC, AD, CD 之平方和有一定.

解 圓之直徑爲 EF.

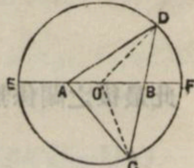


圖 126.

$$OA=OB,$$

$OD=a,\quad OB=b$

則 $$AD^2+BD^2=2(a^2+b^2)$$

又 $$AC^2+BC^2=2(a^2+b^2)$$

$$2DB\cdot BC=2BE\cdot BF$$

$$=2(a^2-b^2)$$

$\therefore$ $$AD^2+AC^2+CD^2=6a^2+2b^2=\text{cons.}$$

92. 圓徑 AB 上有二定點 C,D. 在周上任取一點 M, 結 MC,MD, 且由 A,B 引 CM,DM 之垂線 AE,BF. 則 $\dfrac{EA}{EM}\times\dfrac{FB}{FM}$ 有定值.

解　由 C,D 引 MA, MB 之垂線為 CG,DH. 則

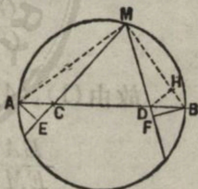


圖 127.

$\triangle AEM \backsim CGM$,

$\triangle BFM \backsim DHM$

$\therefore$ $$\frac{EA}{EM}=\frac{GC}{GM},$$

$$\frac{FB}{FM}=\frac{HD}{HM}$$

$\therefore$ $$\frac{EA}{EM}\cdot\frac{FB}{FM}=\frac{GC}{GM}\cdot\frac{HD}{HM} \qquad (1)$$

又 $$\triangle AGC \backsim AMB$$

$\therefore$ $$\frac{GC}{BM}=\frac{AC}{AB} \quad 即 \quad GC=BM\cdot\frac{AC}{AB}$$

$$\frac{GM}{AM}=\frac{BC}{AB} \quad 即 \quad GM=AM\cdot\frac{BC}{AB}$$

$\therefore$ $$\frac{GC}{GM}=\frac{BM}{AM}\cdot\frac{AC}{BC} \tag{2}$$

又 $$\triangle BDH \backsim BAM$$

$\therefore$ $$\frac{HD}{HM}=\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BD}{AD} \tag{3}$$

(2),(3)相乘得

$$\frac{GC}{GM}\cdot\frac{HD}{HM}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD} \tag{4}$$

故由(1),(4)得

$$\frac{EA}{EM}\cdot\frac{FB}{FM}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}=\text{cons.}$$

93. 過定點引二直線交平行三定線於 A,B,C; A',B',C', 則

$$AA'\cdot BC+BB'\cdot CA+CC'\cdot AB=0.$$

解　由相似關係

$$AA'=\lambda\cdot OA$$

$$BB'=\lambda\cdot OB$$

$$CC'=\lambda\cdot OC$$

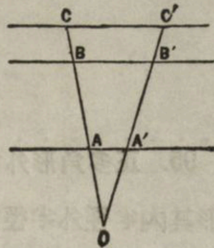


圖 128.

但 λ 爲定數．故證

$\lambda(OA\cdot BC+OB\cdot CA+OC\cdot AB)=0$

可也．

而 $BC=OC-OB$,　$CA=OA-OC$,　$AB=OB-OA$

$\therefore$　$$OA\cdot BC+OB\cdot CA+OC\cdot AB=0$$

$\therefore$　$$AA'\cdot BC+BB'\cdot CA+CC'\cdot AB=0$$

94. 定圓 O 之弦 AB 以 $45°$ 角交定直徑 CD 於 P,由 O 引 CD 垂線 OE 交 AB 於 Q. 則

AP^2+AQ^2 爲常數．

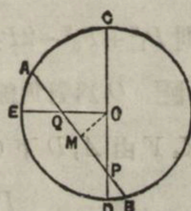


圖 129.

解　引 $OM\perp AB$.

則　$MQ=MP=MO$

$\therefore$　$AP^2+AQ^2=(AM+MO)^2$

$+(AM-MO)^2$

$$=2AO^2$$

$$=\text{cons.}$$

95. 正多角形外半徑為 R,有邊數二倍周圍相等之正多邊形其內半徑外半徑為 R', r'. 則 $Rr' : R'^2$ 為定比.

解 O 為中心, AB 為第一多角形之一邊, M 為弧 AB 中點. X, Y 為 AM, BM 中點, OM 交 XY 於 N,則 XY 為第二多角形之一邊.

$$OM\cdot ON=OX^2$$

即 $$R\cdot r'=R'^2$$

∴ $$R\cdot r' : R'^2=1$$

96. 由所設正方形各頂點至任一線之垂線 P_1, P_2, P_3, P_4,則 $P_1^2+P_3^2-2P_2P_4$, $P_2^2+P_4^2-2P_1P_3$ 為常數.

解 O 為對角線交點, L 為與線. 由 O 引 OM 垂直 L; X, Y 由 A, D 下 OM 之垂足. 則

$$P_1^2+P_3^2=2OM^2+2OX^2$$

$$2P_2P_4=2OM^2-2OY^2$$

$\therefore \quad P_1^2+P_3^2=2P_2P_4$

$=2OX^2+2OY^2$

$=2OD^2$

$=\square ABCD$

$=\text{cons.}$

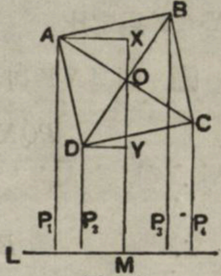


圖 130.

97. A 爲中心之同心圓,在周上各取一點 B, C, 在 AB, AC 上各畫正方形 BX, CY. 則 BC^2+XY^2 爲常數.

解 $\quad \triangle AXY \equiv ABC$

$\therefore \quad XY=BC$

而 $\quad XC \perp YB$

$\therefore \quad XY^2-YC^2=XB^2-BC^2$

$\therefore \quad XY^2+BC^2=XB^2+YC^2$

$=2(AB+AC)^2=\text{cons}$

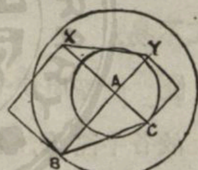


圖 131.

98. $\triangle ABC$ 爲一定,由一頂點 A 引 AX, AY 直線使 $B\hat{A}X=C\hat{A}Y$, 則 $BX \cdot BY$:

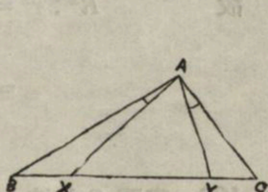


圖 132.

$CX \cdot CY$ 為定比.

解 圓 AXY 切 AB, AC 於 P, Q. 則

$$P\hat{Q}X = P\hat{A}X = Q\hat{A}Y = Q\hat{X}Y$$

$$\therefore \quad PQ \parallel BC$$

$$\therefore \quad BP : CQ = AB : AC$$

$$\therefore \quad BP \cdot BA : CQ \cdot CA = AB^2 : AC^2$$

即 $BX \cdot BY : CX \cdot CY = AB^2 : AC^2 = \text{cons.}$

99. 正三角形與正六邊形等周時則其內半徑之二乘比一定不易.

解 設等周為 $6s$, 則各邊為 $2s$ 及 s.

故各半徑 R, r 為

$$R^2 = \frac{1}{2}s^2, \quad r^2 = \frac{3}{4}s^2$$

故
$$R^2 : r^2 = \frac{1}{2}s^2 : \frac{3}{4}s^2 = 4 : 9$$

$$= \text{cons.}$$

100. 定圓 O 內接 $\triangle ABC$, 過 O 引各邊之平行線 EF,

GH, IK 交邊於 $E, F; G, H; I, K$. 則

$$AB \cdot EF + BC \cdot GH + CA \cdot IK = \text{cons.}$$

解 由 O 引 BC, CA, AB 之垂線 OM, ON, OP. 結 OA, OB, OC. 且 R 為 $\triangle ABC$ 之外半徑.

在 $\triangle OCI, OCH$:

$$R^2 = OI^2 + IC^2 + 2MI \cdot IC,$$

$$R^2 = OH^2 + HC^2 + 2NH \cdot HC$$

圖 133.

然 $\quad IC = OH, \ HC = OI$

$\therefore \quad 2R^2 = 2OI^2 + 2OH^2 + 2MI \cdot OH + 2NH \cdot OI$

然 $$MI = \frac{BC}{2} - OH,$$

$$NH = \frac{CA}{2} - OI$$

$\therefore \quad 2R^2 = BC \cdot OH + CA \cdot OI$

同樣 $\quad 2R^2 = CA \cdot OK + AB \cdot OE,$

$\quad 2R^2 = AB \cdot OF + BC \cdot OG$

$$\therefore \quad 6R^2 = AB(OE + OF) + BC(OG + OH) + CA(OI + OK)$$

即　　　$6R^2=AB\cdot EF+BC\cdot GH+CA\cdot IK$

∴　　　$AB\cdot EF+BC\cdot GH+CA\cdot IK=\text{cons.}$

101. **BC 中點 O 爲心之圓周上各點,對於 B,C 爲心且通過 BC 爲徑之圓周上一點 A 之二圓周之方羃有定和.**

解 BC 中點 O 爲中心晝 C_1 圓,B,C 爲中心晝 C_2, C_3 圓.則其各羃之和 S 爲

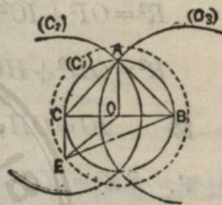


圖 134.

$$S=EC^2-AC^2+EB^2-AB^2$$

但 E 爲 C_1 圓周上任意點.

$$EC^2+EB^2=2(OE^2+CO^2)$$

且　　　$AC^2+AB^2=4CO^2$

∴　　　$S=2(OE^2-CO^2)$

$=\text{cons.}$

102. **$ABCD$ 爲四邊形,E 爲其對角線中點所結線分之中點.E 爲心晝圓,由此圓周上任一點 P 至四頂點距離之平方和有一定.**

[證] MN 爲對角線 AC, BD 中點之聯線，E 爲其中點.

$$PA^2+PC^2=2(PN^2+AN^2)$$

$$PB^2+PD^2=2(PM^2+BM^2)$$

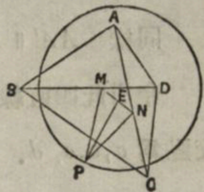


圖 135.

故由 P 至四頂點距離之平方和 S 爲

$$S=2(PM^2+PN^2+AN^2+BM^2)$$

然 $$PM^2+PN^2=2(PE^2+ME^2)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=2(2PE^2+2ME^2+AN^2+BM^2)\\&=4PE^2+2(AN^2+NE^2)+2(BM^2+ME^2)\\&=4PE^2+(EA^2+EC^2)+(BE^2+ED^2)\\&=\text{cons.}\end{aligned}$$

103. 邊數爲偶數多邊形之各邊有共通中點時則此種多邊形有定積.

[證] 茲就四邊形證之. 得以同一方法推於一般.

E, F, G, H 爲四邊形 $ABCD$ 邊 AB, BC, CD, DA 中點.

A', B', C', D' 爲他四邊形與前四邊形各邊中點爲公用.

$$AE=EB,\ A'E=EB'$$

$$\therefore \quad AA' \parallel BB'$$

同樣 $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$

今引此四直線之公垂線 X, 其交點爲 a,b,c,d. 但 X 不交此二四邊形.

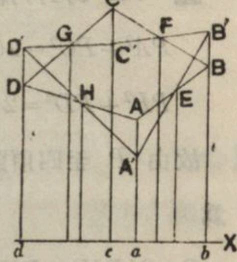


圖 136.

則 $AabB=A'abB'$

$$BbcC=B'bcC',\ CcdD=C'cdD',\ DdaA=D'daA'$$

然 $ABCD=BbcC+CcdD-DdaA-AabB$

$$A'B'C'D'=B'bcC'+C'cdD'-D'daA'-A'abB'$$

$\therefore \quad ABCD=A'B'C'D'$

104. 有定圓 O 及圓內一定點 G. 則 G 爲重心內接於圓 O 之三角形各邊平方和有定值.

解 AM,BN,CL 爲三中線. 結 OA,OB,OC. 由各頂點引 GO 垂線其足爲 A',B',C'.

$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2},$$

$$AB^2+BC^2=2BN^2+\frac{AC^2}{2},$$

$$AC^2+BC^2=2CL^2+\frac{AB^2}{2}$$

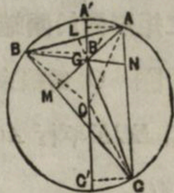


圖 137.

加此三式得

$$\frac{3}{2}(AB^2+BC^2+AC^2)$$

$$=2(AM^2+BN^2+CL^2)$$

然 $AM=\frac{3}{2}AG$, $BN=\frac{3}{2}BG$, $CL=\frac{3}{2}CG$

$\therefore$ $AB^2+BC^2+AC^2=3(AG^2+BG^2+CG^2)$

設 OG 爲 d,O 圓半徑爲 R. 則由 $\triangle AOG$ 得

$$R^2=AG^2+d^2+2d\cdot GA'$$

同樣由 $\triangle BOG$,COG 得

$$R^2=BG^2+d^2+2d\cdot GB',\quad R^2=CG^2+d^2+2d\cdot GC$$

$\therefore$ $\Sigma AG^2=3R^2-3d^2-2d(GA'+GB'+GC')$

然 A',B',C' 乃 A,B,C 射影於過 G 之直線.

$\therefore$ $GA'+GB'+GC'=0$

$\therefore$ $\Sigma AG^2=3(R^2-d^2)$

即 $\Sigma AB^2=9(R^2-d^2)=\text{cons.}$

105. 任意截線截四直線之線束時，則全線分與中央線分之矩形對於兩端矩形之比爲定量.

解 O 爲線束中心，截線截各射線於 A, B, C, D. 過 C 引 ECF 平行 AO，又引 LMN 平行 AO.

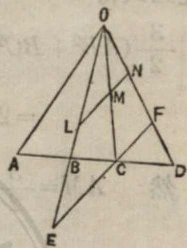


圖 138.

$$\triangle CBE \backsim ABO$$

$\therefore \quad BC:AB=EC:AO$

而 $\quad CF \parallel AO$

$\therefore \quad AD:DC=AO:CF$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} BC:AB \\ AD:DC \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} EC:AO \\ AO:CF \end{Bmatrix}$$

$$AD\cdot BC:AB\cdot CD=EC:CF$$

然 $\quad EC:CF=LM:MN$

$\therefore \quad AD\cdot BC:AB\cdot CD=\text{cons.}$

106. 切二定圓畫第一，第二，……，第 n 圓，各圓順次相切，則第一圓，第 n 圓公切線之平方與二圓直徑之積之比爲常量.

解 設一定圓全在他一定圓內.

二圓之中心爲 C,c; 半徑爲 R,r; 第一圓, 第 n 圓之直徑爲 D,d; 其共通切線爲 P; Cc 直線交定圓於 A,B,a,b; 定圓根軸交 Cc 於 D, 取 DO 等由 D 引定圓切線之長, 以 O 爲反形中心, 將各圓反倒之. A,B,a,b,C,c 之反點爲 A',B',a',b',C',c'; 第一圓, 第 n 圓之反形直徑爲 D',d'; 其共通切線爲 P'.

$$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'$$
$$=k^2$$

圖 139.

$\therefore\quad OA':OB'=OB:OA$

$\therefore\quad OA'+OB':OB+OA=OB':OA$

$$=OB'\cdot OB:OA\cdot OB=k^2:OC^2-R^2$$

然 $\quad R^2=DC^2-DO^2=(OC-OD)^2-OD^2$

$\therefore\quad OC^2-R^2=2OC\cdot OD$

又 $\quad OA'+OB'=2OC'$

$\therefore\quad OA+OB=2OC$

$\therefore\quad 2OC':2OC=k^2:2OC\cdot OD$

$\therefore\quad 2OD\cdot OC'=k^2$

同樣 $\quad 2OD\cdot Oc'=k^2$

$$\therefore \qquad OC' = Oc'$$

故二定圓之反形爲同心圓，則第一圓，……，第 n 圓之反形爲切於同心圓之等圓．

$$\therefore \qquad \frac{P^2}{D\cdot d} = \frac{P'^2}{D'\cdot d'} = \text{cons.}$$

107. 定圓內接任意三角形．則由定圓中心至三角形之內心及三傍心距離之平方和有定值．

解 定圓半徑爲 R，由定圓中心至內心及三傍心之距爲 $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$，內半徑，傍半徑爲 r, r', r'', r'''，則由前章 85 題 86 題得 $\delta^2 = R(R-2r)$，$\delta'^2 = R(R+2r')$，$\delta''^2 = R(R+2r'')$，$\delta'''^2 = R(R+2r''')$．

$$\therefore \quad \delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \delta'''^2 = 4R^2 + 2R\,(r' + r'' + r''' - r)$$

但 $$r' + r'' + r''' - r = 4R \qquad \text{(前章43題)}$$

$$\therefore \quad \delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \delta'''^2 = 12R^2 = \text{cons.}$$

108. 直角 M 之二邊過圓周上二定點 A, B，邊 BM 再交圓周於 N，引 NP 垂直直徑 AA'，則 $AM^2 : AP$ 爲定比．

解 O 爲圓心，AO 交圓周於 A'，PM，AB 相交於 Q．則

$$A\hat{M}N = A\hat{P}N = \hat{R}$$

故 A, M, P, N 爲共圓點.

$\therefore$ $$A\hat{P}Q = A\hat{N}M = A\hat{A'}B$$

$\therefore$ $$PQ \parallel A'B$$

$\therefore$ $$PQ \perp AB$$

$\therefore$ $$AM^2 = AP \cdot AQ$$

又 $AP : AA' = AQ : AB$

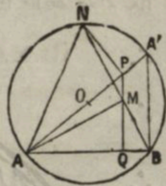


圖 140.

卽 $$AQ = \frac{AB \cdot AP}{AA'}$$

從而 $$\frac{AM^2}{AP} = \frac{AB^2}{AA'}$$

然 AB, AA' 一定. 故 $AM^2 : AP$ 一定.

109. A, B, C 爲定圓上之三點, D 在 AB 延線上, 而 $AB = BC = BD$, 則 $AB^2 : CD$ 有定比.

解 延長 DC 交圓周於 E. 結 AE, AC, BE.

$$DB \cdot DA = DC \cdot DE$$

然 $$DB = AB$$

$$DA = 2AB$$

$\therefore \qquad 2AB^2=DC\cdot DE$

又 $\qquad AB=BD=BC$

$\therefore \qquad A\hat{C}D=\hat{R}$

故 AE 爲直徑.

$\therefore \qquad \mathrm{Rt}\triangle ABE\equiv DBE$

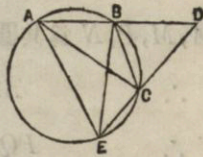


圖 141.

$\therefore \qquad AE=DE$

$\therefore \qquad AB^2:DC=\dfrac{DE}{2}=\dfrac{AE}{2}=\text{cons.}$

110. $\triangle ABC$ 之邊爲 a,b,c,D,D' 爲角 A 內外二等分線交對邊之點, $E,E';F,F'$ 同樣. 則

$$\frac{a^2}{DD'}+\frac{b^2}{EE'}+\frac{c^2}{FF'}=0.$$

解 $\dfrac{1}{DD'}=\dfrac{b^2-c^2}{2abc}$, $\dfrac{1}{EE'}=\dfrac{c^2-a^2}{2abc}$, $\dfrac{1}{FF'}=\dfrac{a^2-b^2}{2abc}$.

故上式成立.

111. 由一點 O 引 $\triangle ABC$ 名邊垂線,其足爲 x,y,z. 則

$$(Ax^2+Bx^2)-(By^2-Cy^2)+(Cz^2-Az^2)=0.$$

解　$AO^2-Ax^2=BO^2-Bx^2,$

$\therefore\quad Ax^2-Bx^2=AO^2-BO^2$

同樣 $By^2-Cy^2=BO^2-CO^2,$

$Cz^2-Az^2=CO^2-AO^2$

此等式各邊相加卽得上式.

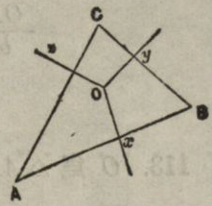


圖 142.

112. O 爲 $\triangle ABC$ 之內心,則

$$\frac{OA^2}{bc}+\frac{OB^2}{ca}+\frac{OC^2}{ab}=1.$$

解　O' 爲 B, C 外二等分線交點. 則

$$\triangle O'BA \backsim COA$$

$\therefore\qquad O'A : BA=AC : AO$

卽　$O'A\cdot OA=AB\cdot AC$

$\therefore\ OA^2 : AB\cdot AC=OA^2 : O'A\cdot OA$

$=OA : O'A$

$=AD : AE$

然　$AD=s-a,\quad AE=s,$

$\therefore\quad OA^2 : AB\cdot AC=(s-a) : s$

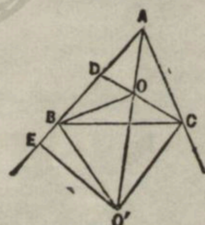


圖 143.

同樣　$OB^2 : ca=(s-b) : s,\quad OC^2 : ab=(s-c) : s$

$$\frac{OA^2}{bc}+\frac{OB^2}{ca}+\frac{OC^2}{ab}=1$$

113. O 爲 $\triangle ABC$ 對 A 角之傍心,則

$$\frac{O'B^2}{ca}+\frac{O'C^2}{ab}+\frac{O'A^2}{bc}=-1$$

第三章　體積

1. $\triangle ABC$，由各頂點引共點線 AA', BB', CC' 交對邊於 A', B', C'，則 $AB'\cdot BC'\cdot CA' / \triangle A'B'C'$ 為定量.

解　畫外接圓其半徑為 R；p, q, r 乃由 B, C, A' 至 $B'C'$ 垂線之長. 則

$$BA'\cdot q+CA'\cdot p=BC\cdot r$$

$$\therefore\quad BA'\cdot\triangle CB'C'+CA'\cdot\triangle BB'C'=BC\cdot\triangle A'B'C' \qquad (1)$$

圖 144.

然　$\triangle CB'C' : CAC'=CB' : CA$

$\triangle CAC' : ABC=AC' : AB$

$\therefore\quad \triangle CB'C' : ABC=CB'\cdot AC' : CA\cdot AB$

同樣　$\triangle BC'B' : ABC=BC'\cdot AB' : CA\cdot AB$

以 BA' 乘前二式，以 CA' 乘前一式，然後加之，且由 (1) 得

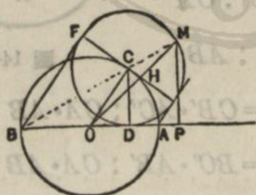
$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{BA'\cdot CB'\cdot AC'+CA'\cdot BC'\cdot AB'}{BC\cdot CA\cdot AB}$$

$$=\frac{2AB'\cdot BC'\cdot CA'}{BC\cdot CA\cdot AB}$$

$$\therefore\quad \frac{AB'\cdot BC'\cdot CA'}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{2\triangle ABC}=2R=\text{cons.}$$

2. 有二定點 A,B. 一動圓切於 AB 及過 A,B 互平行二直線. 此動圓之一與其包線之切點爲 M. 點 M 關於 AB 爲徑之圓之羃爲 p^2, 又 M 與 AB 之距爲 h, 則 $\frac{p^3}{h}$ 爲定量.

解 此等動圓中心之軌跡乃 AB 爲徑之圓周, 命此圓爲 (C), 半徑爲 a. 相鄰二動圓之中心爲 C,C', 其交點爲 D', M'. 則 D',M' 關於 CC' 爲對稱.



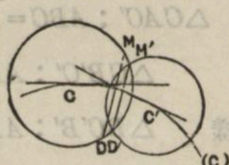


圖 145.

C',C 無限接近時則 M',D' 接近於 M, D. 但 M,D 乃

包線與 C 圓之切點，則 D, M 關於 CC' 爲對稱．CC'爲(C)圓之切線，卽 D,M 關於 EF 爲對稱．

$$\therefore \quad MO^2=OC^2+CM^2+2OC\cdot DH$$

$$\text{又} \quad \triangle OCD \backsim CDH$$

$$\therefore \quad DH:CD=CD:OC$$

$$\text{卽} \quad OC\cdot DH=CD^2$$

$$\text{故} \quad p^2=OM^2-OC^2=3\cdot CD^2$$

$$\text{又} \quad \triangle OCD \backsim DMP$$

$$\therefore \quad MP:CD=DM:OC$$

$$\text{卽} \quad h:CD=2CD^2:a^2$$

$$\text{卽} \quad h=\frac{2CD^3}{a^2}$$

$$\therefore \quad p^3:h=\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2}=\text{cons.}$$

3. 動直角 $\triangle OAB$ 斜邊 AB，以 C 點切 O 爲中心之定圓．D 爲關於 AB 中點 C 之對稱點．引 DE, DF 垂直 OA, OB．則 $AB\cdot DE\cdot DF$ 爲常量．

$$\text{解} \quad \triangle DEA \backsim BOA$$

$\therefore \quad DE : DA = BO : BA$

又 $\quad \triangle BFD \backsim BOA$

$\therefore \quad DF : BD = OA : BA$

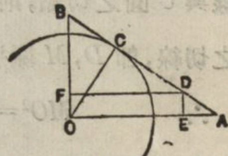


圖 146.

此等式兩邊相乘,則得

$$\frac{DE \cdot DF}{DA \cdot DB} = \frac{BO \cdot OA}{BA^2}$$

然 OC 爲直角三角形之高.

$$DA \cdot DB = BC \cdot CA = OC^2$$

且 $\qquad BO \cdot OA = AB \cdot OC$

$\therefore \qquad \dfrac{DE \cdot DF}{OC^2} = \dfrac{AB \cdot OC}{BA^2}$

卽 $\qquad AB \cdot DE \cdot DF = OC^3 = \text{cons.}$

4. 由一點引三直線交一定線於 A, B, C, 則

$OA^2 \cdot BC + OB^2 \cdot CA + OC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0.$

解 由 O 引此線垂線,其足爲 H,則

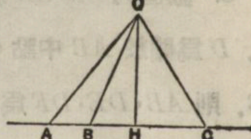


圖 147.

$OA^2 \cdot BC = (OH^2 + HA^2) BC,$

$OB^2 \cdot CA = (OH^2 + HB^2) CA,$

$$OC^2\cdot AB=(OH^2+HC^2)AB$$

加此等式,且注意

$$BC+CA+AB=0$$

則 $OA^2\cdot BC+OB^2\cdot CA+OC^2\cdot AB$

$=HA^2\cdot BC+HB^2\cdot CA+HC^2\cdot AB$

以 $AB=-(BC+CA)$ 代入右邊,得

$OA^2\cdot BC+OB^2\cdot CA+OC^2\cdot AB$

$=HA^2\cdot BC+HB^2\cdot CA-HC^2(BC+CA)$

$=BC(HA^2-HC^2)+CA(HB^2-HC^2)$

$=BC(HA-HC)(HA+HC)$

$\quad+CA(HB-HC)(HB+HC)$

$=BC\cdot CA(HA+HC)-CA\cdot BC(HB+HC)$

$=BC\cdot CA(HA-HB)$

$=-AB\cdot BC\cdot CA$

5. 圓 O 周取 A', B', C' 三點引切線交一直線於 A, B, C, 則

$$AA'^2\cdot BC+BB'^2\cdot CA+CC'^2\cdot AB+AB\cdot BC\cdot CA=0$$

解 圓之中心 O 與 A', B', C', A, B, C, 結直線.

$AA'^2 = OA^2 - R^2$

$BB'^2 = OB^2 - R^2$

$CC'^2 = OC^2 - R^2$

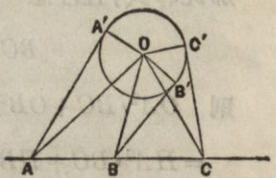


圖 148.

但 R 爲 O 圓半徑.

$\therefore \quad \Sigma(OA^2 - R^2)BC + \Pi AB$

$= \Sigma OA^2 \cdot BC + \Pi AB + R^2 \Sigma BC$

然 $\qquad \Sigma OA^2 \cdot BC + \Pi AB = 0, \quad \Sigma BC = 0$

$\therefore \; AA'^2 \cdot BC + BB'^2 \cdot CA + CC'^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0$

6. 一圓交 $\triangle ABC$ 邊 AB 於 D, D'; BC 於 E, E'; CA 於 F, F';則

$$\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{BD \cdot CE \cdot AF} \cdot \frac{AD' \cdot BE' \cdot CF'}{BD' \cdot CE' \cdot AF'} = 1$$

解 $AD \cdot AD' = AF \cdot AF'$

$BE \cdot BE' = BD \cdot BD'$

$CF \cdot CF' = CE \cdot CE'$

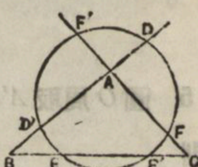


圖 149.

兩邊相乘卽得所求之結果.

7. 有三圓 O, O', O'' 具同一相似中心之相似圓，t, t', t'' 爲圓 $O, C; O', C; O'', C$ 共通切線之長．但圓 C 爲任意的．又 R, R', R'' 爲圓 O, O', O'' 之半徑．則

$$\Sigma(t^2+R^2)O'O''+\Pi OO'=0.$$

解
$$t^2=OC^2-R^2-2Rr-r^2$$

$$t'^2=O'C^2-R'^2-2R'r-r^2$$

$$t''^2=O''C^2-R''^2-2R''r-r^2$$

$\therefore$
$$\Sigma(t^2+R^2)O'O''=\Sigma\, CO^2\cdot O'O''-2r\Sigma R\cdot O'O''$$
$$-r^2\Sigma O'O''$$

然 $\Sigma CO^2\cdot O'O''=-\Pi OO'$，$\Sigma R\cdot O'O''=0$，$\Sigma O'O''=0$

$\therefore$
$$\Sigma(t^2+R^2)O'O''+\Pi OO'=0$$

8. $\triangle ABC$ 之內心爲 O，以之爲心任畫一圓，在其周上任取一點 M．則

$$MA^2\cdot BC+MB^2\cdot AC+MC^2\cdot AB=\text{cons.}$$

解 CO 延線交 AB 於 D．引 $ME, MF\perp AB, CD$，則

$$AM^2=AD^2+DM^2-2AD\cdot DE$$

$$BM^2=BD^2+DM^2-2BD\cdot DE$$

CD 二等分 C 角. 故

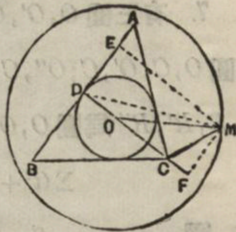


圖 150.

$$AD=\frac{bc}{a+b},\quad BD=\frac{ac}{a+b}$$

因之

$$AM^2=AD^2+DM^2-\frac{2bc}{a+b}DE$$

$$BM^2=BD^2+DM^2-\frac{2ac}{a+b}DE$$

$$\therefore \quad aAM^2+bBM^2=aAD^2+bBD^2+(a+b)DM^2 \qquad (1)$$

又

$$CM^2=CO^2+OM^2-2CO\cdot OF,$$

$$DM^2=DO^2+OM^2-2DO\cdot OF$$

$$CO=\sqrt{\frac{(s-c)ab}{s}},\quad DO=\frac{c}{a+b}\sqrt{\frac{(s-c)ab}{s}}$$

$$\therefore \quad CM^2=CO^2+OM^2-2OF\sqrt{\frac{(s-c)ab}{s}},$$

$$DM^2=DO^2+OM^2-2OF\frac{c}{a+b}\sqrt{\frac{(s-c)ab}{s}}$$

$$\therefore \quad cCM^2+(a+b)DM^2=cCO^2+(a+b)DO^2$$

$$+(a+b+c)OM^2 \qquad (2)$$

由(1)(2)兩式得

$$aAM^2+bBM^2+cCM^2=aAD^2+bBD^2+2cCO^2$$
$$+(a+b+c)OM^2$$
$$=\text{cons.}$$

但 a,b,c 表角 A,B,C 之對邊，s 表其半和。

9. 有一變圓切二定圓於 A, B, 直線 AB 再交定圓於 A',B', DD' 爲定圓之公切線，則

$$\frac{(R\pm r)(R\pm r')}{R^2}AB^2=\text{cons.}$$

解 定圓之中心爲 O,O'；變圓之中心爲 C。

又 S 爲二定圓之相似中心，即爲 AB,DD' 之交點．則直徑 CBO' 爲 $\triangle SAO$ 之截線．

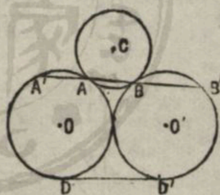


圖 151.

$$\therefore\quad \frac{OC}{R}=\frac{OO'}{O'S}\cdot\frac{SB}{BA}$$

又 CAO 爲 $\triangle O'BS$ 之截線．

$$\therefore\quad \frac{O'C}{R}=\frac{O'O}{OS}\cdot\frac{SA}{AB}$$

$$\therefore\quad \frac{OC\cdot O'C}{R^2}=\frac{SA\cdot SB}{SO\cdot SO'}\cdot\frac{OO'^2}{AB^2}$$

$$= \frac{SD \cdot SD'}{SO \cdot SO'} \cdot \frac{OO'^2}{AB^2}$$

$$= \frac{DD'^2}{AB^2}$$

即 $$\frac{(R \pm r)(R \pm r')}{R^2} AB^2 = \text{cons.}$$

10. 過 $\triangle ABC$ 之各頂點引共點線交對邊於 X, Y, Z,

則 $$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1 \qquad \text{(Ceva)}$$

解 $$\frac{BX}{CX} = \frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}$$

$$\frac{CY}{AY} = \frac{\triangle BCO}{\triangle ABO}$$

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{\triangle ACO}{\triangle BCO}$$

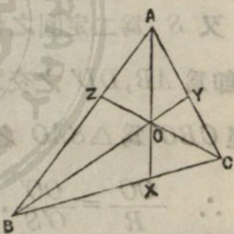


圖 152.

此三式連乘則得

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

11. 任意直線截 $\triangle ABC$ 之三邊於 D, E, F, 則

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1 \qquad \text{(Menelaus)}$$

解 引 CG 平行 BA 交 ED 於 G, 則

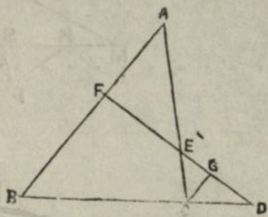


圖 153.

$$\frac{CE}{AE}=\frac{CG}{AF},$$

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CG}$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{BF}{CG}\cdot\frac{CG}{AF}\cdot\frac{AF}{BF}$$

$$=1$$

12. 一截線截任意多邊形之各邊,則一組不相鄰線分之積與他一組不相鄰線分之積有定比.

解 本題以六邊形爲例,餘可類推.

$ABCDEF$ 爲六邊形,其各邊爲橫截線 MQ 所截,截點爲 $M,N,P,\cdots\cdots$. 則

$$\frac{AM\cdot BN\cdot CP\cdot DQ\cdot ER\cdot FS}{AS\cdot BM\cdot CN\cdot DP\cdot EQ\cdot FR}=\text{cons.}$$

多邊形依對角線 BD, BE, BF 分四個三角形, 由

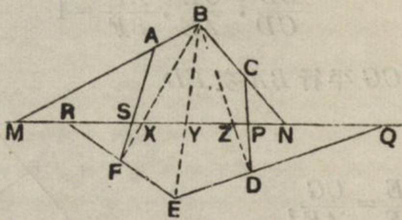


圖 154.

Menelaus 定理得

$$AM\cdot BX\cdot FS=AS\cdot BM\cdot FX$$

$$BY\cdot ER\cdot FX=BX\cdot EY\cdot FR$$

$$BZ\cdot DQ\cdot EY=BY\cdot EQ\cdot DZ$$

$$BN\cdot CP\cdot DZ=BZ\cdot DP\cdot CN$$

兩邊相乘，且消去共通因子，則得原比等 1，故有定值。

13. 奇數邊多角形，由各角頂至同平面上一點 O 引直線交對邊於各點，則一組不相鄰線分之積與他組不相鄰線分之積有定比。 (Poncelet)

解 本證明以五邊形爲例，餘可類推。

五邊形 $ABCDE$，OA，OB 等交對邊於 A'，B'，……，則

$$\frac{AD'\cdot BE'\cdot CA'\cdot DB'\cdot EC'}{BD'\cdot CE'\cdot DA'\cdot EB'\cdot AC'}=\text{cons.}$$

$\triangle AOD', DOA'$ 有一角相等．故

$$\frac{AOD'}{DOA'}=\frac{OA}{OA'}\cdot\frac{OD'}{OD}$$

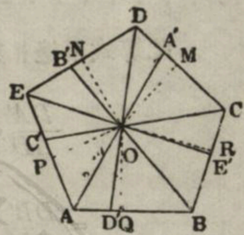


圖 155.

同樣 $$\frac{BOD'}{DOB'}=\frac{OB}{OB'}\cdot\frac{OD'}{OD}$$

$$\therefore\ \frac{AOD'}{BOD'}:\frac{DOA'}{DOB'}=\frac{OA}{OA'}:\frac{OB}{OB'}$$

然 $$\frac{AOD'}{BOD'}=\frac{AD'}{BD'}$$

又引 OM, ON 垂直 DC, DE．則

$$\frac{DOA'}{DOB'}=\frac{DA'}{DB'}\cdot\frac{OM}{ON}$$

由是 $$\frac{AD'}{BD'}:\frac{DA'}{DB'}\cdot\frac{OM}{ON}=\frac{OA}{OA'}:\frac{OB}{OB'}$$

卽 $$OM\cdot\frac{OA}{OA'}\cdot\frac{DA'}{AD'}=ON\cdot\frac{OB}{OB'}\cdot\frac{DB'}{BD'}$$

同樣 $$ON\cdot\frac{OB}{OB'}\cdot\frac{EB'}{BE'}=OP\cdot\frac{OC}{OC'}\cdot\frac{EC'}{CE'}$$

$$OP\cdot\frac{OC}{OC'}\cdot\frac{AC'}{CA'}=OQ\cdot\frac{OD}{OD'}\cdot\frac{AD'}{DA'}$$

$$OQ\cdot\frac{OD}{OD'}\cdot\frac{BD'}{DB'}=OR\cdot\frac{OE}{OE'}\cdot\frac{BE'}{EB'}$$

$$OR\cdot\frac{OE}{OE'}\cdot\frac{CE'}{EC'}=OM\cdot\frac{OA}{OA'}\cdot\frac{CA'}{AC'}$$

此等式兩邊相乘,且消去相等因子,則得

$$\frac{DA'}{AD'}\cdot\frac{EB'}{BE'}\cdot\frac{AC'}{CA'}\cdot\frac{BD'}{DB'}\cdot\frac{CE'}{EC'}$$

$$=\frac{DB'}{BD'}\cdot\frac{EC'}{CE'}\cdot\frac{AD'}{DA'}\cdot\frac{BE'}{EB'}\cdot\frac{CA'}{AC'}$$

$$\therefore\quad \frac{AD'\cdot BE'\cdot CA'\cdot DB'\cdot EC'}{BD'\cdot CE'\cdot DA'\cdot EB'\cdot AC'}=1$$

14. 任意四點 A,B,C,D 作六直線 AB,BC,CA,DA,DB,DC, 此六線分之長順次以 c,a,b,a',b',c' 表之. 則

$$\Sigma a^2a'^2(b^2+c^2-a^2)-\Sigma a^2(a'^2-b'^2)(a'^2-c'^2)-\Pi a^2=0$$

解 設 D 爲 $\triangle ABC$ 內之一點,則

$$A\hat{D}B+B\hat{D}C+C\hat{D}A=4\hat{R}$$

$$\therefore\quad \cos^2ADB=\cos^2(BDC+CDA)$$

$$=\cos^2 BDC\cos^2 CDA-2\cos BDC\cos CDA\sin BDC\sin CDA$$

$$+\sin^2 BDC \sin^2 CDA$$

$$=\cos^2 BDC\cos^2 CDA-2\cos BDC\cos CDA\sin BDC\sin CDA$$

$$+1-\cos^2 BDC-\cos^2 CDA+\cos^2 BDC\cos^2 CDA$$

$$=1-\cos^2 BDC-\cos^2 CDA$$

$$+2\cos BDC\cos CDA\cos(BDC+CDA)$$

$$=1-\cos^2 BDC-\cos^2 CDA+2\cos BDC\cos CDA\cos ADB$$

$\therefore$ $$\cos^2 ADB+\cos^2 BDC+\cos^2 CDA$$

$$-2\cos ADB\cos BDC\cos CDA=1$$

又 $$\cos ADB=\frac{a'^2+b'^2-c'^2}{2a'b'}$$

$$\cos BDC=\frac{b'^2+c'^2-a'^2}{2b'c'}$$

$$\cos CDA=\frac{c'^2+a'^2-b'^2}{2c'a'}$$

以此值代入前式簡之，即得所求之關係式.

第四章　角

1. 二等邊 $\triangle ABC$ 邊 AB 等 AC, P 爲形內一點,由 P 引 BC 垂線 PQ, 又引 AB, AC 垂線 PR, PS. 若 $PQ^2=PR\cdot PS$, 則角 BPC 有定大.

解　　$R\hat{P}Q=Q\hat{P}S$

且　　$PQ^2=PR\cdot PS$

$\therefore$　　$\triangle PQR \backsim PSQ$

故 $Q\hat{R}P$, $P\hat{Q}R$ 有定和.

故 $B\hat{P}C$ 有定大.

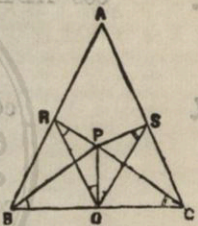


圖 156.

2. $\triangle ABC$ 邊 AC, BC 相等,引延 BC 至 D, 截 CD 等 BC, 則 BAD 爲直角.

解　因 B, A, D 在 C 爲中心之半圓周上.

3. $\triangle ABC$ 角 A 有定大, B, C 二角外二等分線相交於

D,則 BDC 角有定大.

解 $$D\hat{B}C=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{C}),\ D\hat{C}B=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B})$$

$$\therefore \quad D\hat{B}C+D\hat{C}B=\hat{A}+\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$$

$$\therefore \quad B\hat{D}C=2\hat{R}-D\hat{B}C-D\hat{C}B$$

$$=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\hat{A}-\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$$

$$=\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$$

$$=\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{A}$$

$$=\text{cons.}$$

4. 平行四邊形 $ABCD$ 邊 $AD=2AB$, 將 AB 雙方引延, 於其上取 E, F 使 $AE=AB=BF$, 則 DF, CE 以直角相交.

解 $$E\hat{F}D=\frac{1}{2}A\hat{D}C,\ F\hat{E}C=\frac{1}{2}B\hat{C}D$$

$$\therefore \quad E\hat{F}D+F\hat{E}C=\hat{R}$$

$$\therefore \quad \widehat{DF,CE}=\hat{R}$$

5. 二等邊三角形頂點與底邊中點之聯線必直交於底.

6. 直線 AB 上任取一點 C, AC, CB 上各同側畫正方形 $ACDE, CBFG$,則 BD, AG 爲直交.

解　BD, AG 相交於 H. 則

$\triangle AGC \equiv BCD$

$\therefore \quad C\hat{A}G = C\hat{D}B$

又　$D\hat{G}H = A\hat{G}C$

$\therefore \quad D\hat{H}G = G\hat{C}A = \hat{R}$

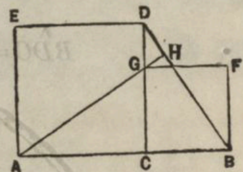


圖 157.

7. $\triangle ABC$ 角 A 有定大,角 B 內二等分線與角 C 外二等分線相交於 D. 則 BDC 角有定大.

解　$D\hat{B}C = \frac{1}{2}\hat{B}, \quad D\hat{C}B = \hat{C} + \frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B})$

$$\begin{aligned}\therefore \quad B\hat{D}C &= 2\hat{R} - D\hat{B}C - D\hat{C}B \\ &= \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} - \frac{1}{2}\hat{B} - \hat{C} - \frac{1}{2}\hat{A} - \frac{1}{2}\hat{B} \\ &= \frac{1}{2}\hat{A} \\ &= \text{cons.}\end{aligned}$$

8. **任意** $\triangle ABC$ **各邊中點爲** D, E, F, **過** E, F **引** AC, AB **之垂線** EQ, FP, **且截** EQ, FP **等** AC, AB **之半,則角** PDQ **有定大.**

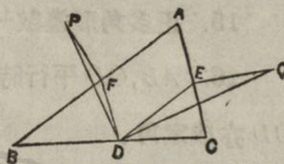


圖 158.

解

$$DF=\frac{AC}{2}=QE$$

$$PF=\frac{AB}{2}=DE$$

$$P\hat{F}D=\hat{R}+\hat{A}=Q\hat{E}D$$

$\therefore$ $$\triangle DFP\equiv QED$$

$\therefore$ $$P\hat{D}Q=P\hat{D}F+F\hat{D}E+E\hat{D}Q$$

$$=E\hat{Q}D+\hat{A}+E\hat{D}Q$$

$$=E\hat{Q}D+D\hat{E}C+E\hat{D}Q$$

$$=2\hat{R}-Q\hat{E}C$$

$$=\hat{R}$$

$$=\text{cons.}$$

9. **補鄰角之二等分線夾成定角.**

10. **任意相交二直線所生四角之二等分線成定角.**

11. **由一點引出數直線鄰接各角之和有定値.**

12. 三角形內角之和有定值.

13. 凸多角形邊數一定時內角之和有定值.

14. 凡凸多角形外角之和有定值.

15. 正多角形邊數一定時則內角有定大,外角亦然.

16. AB,CD平行時,若EF與 AB 成定角,則 EF 與 CD亦成定角.

17. 由直線外任一點至此線引最短線,則其所成之角有定大.

18. 任意二等邊三角形頂角內二等分線與底成定角.

19. 有公底之二個二等邊三角形,其頂點聯線與底成定角.

20. 菱形對角線以定角相交.

21. 任意正方形二對角線夾定角.

22. 定弓形上所立之圓周角有定大.

23. 相交二圓聯心線與公弦成定角.

24. 切線與過切點之徑成定角.

25. 弦之中點與圓心聯直線,此二線夾定角.

26. 相切二圓共通切線與聯心線夾定角.

27. 圓內切四邊形相對二角之和有定值.

28. 圓內切平行四邊形各角有定大.

29. 弓形 ABD 內有定長之動弦 BC,則 AB, DC 所夾之角有定大.

解　$$\widehat{AB,DC}=\frac{1}{2}(\widehat{AD}\pm\widehat{BC})=\text{cons.}$$

30. 定圓內有定長二動弦 AB,CD,則 AC,BD 夾定角.

解　$$\widehat{AC,BD}=\frac{1}{2}(\widehat{AB}\pm\widehat{CD})=\text{cons.}$$

31. 共通定弦 AC 之同側有二定圓弧,在內圓弧上任取一點 E, 結 AE,BE, 交外圓弧於 B,D, 則 AD,CB 夾定角.

解　設 AD,CB 相交於 F. 在四邊形 $DEBF$ 內, D,E,B 三角有定大. 故 AFC 角有定大.

32. 過定圓 O 之定弦 BC 上定點 A 引弦 EF,BC,EF 之中點為 M,N. 則 ANM 為定角.

解　結 OM,ON, 則角 ONA,OMA 俱為直角,故 O,N,A,M 為共圓點. 則

$$A\hat{N}M = A\hat{O}M = \text{cons.}$$

33. A, B, C, D **爲共圓點,** A', B', C', D' **爲弧** AB, BC, CD, DA **中點,則** $A'C'$, $B'D'$ **以定角相交.**

解 $A'C'$, $B'D'$ 相交於 E,則

$$A'\hat{E}B' = \frac{1}{2}(\overparen{A'B'} + \overparen{C'D'})$$

$$= \frac{1}{2}(\overparen{A'B} + \overparen{BB'} + \overparen{C'D} + \overparen{DD'})$$

$$= \frac{1}{4}(\overparen{AB} + \overparen{BC} + \overparen{CD} + \overparen{DA})$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

34. 線分 AB **上取** X **點使** $AB \cdot BX = AX^2$,**在** AB, AX **上作正方形** $ABCD$, $AFGX$,**點** E **爲** AD **中點,延長** GX **交** CD **於** H, DX **交** BE **於** Y, BF **於** Z,**則** DZ **垂直** BF, AY.

解 $\triangle BAF \equiv DAX$

∴ $Z\hat{B}X = A\hat{D}X$

而　$B\hat{X}Z=A\hat{X}D$

∴　$B\hat{Z}X=D\hat{A}X=\hat{R}$

又　$D\hat{Y}E=Z\hat{Y}B$

$=\hat{R}-Y\hat{B}Z$

$=\hat{R}-D\hat{F}Z=Y\hat{D}E$

∴　$ED=EY=EA$

∴　$A\hat{Y}D=\hat{R}$

圖 159.

35. 在 Rt$\triangle ABC$ **各邊上畫正方形** $ABIH$, $BCED$, $CAGF$, **則** AD, IC; AE, BF **互正交. 但角** A **為直角.**

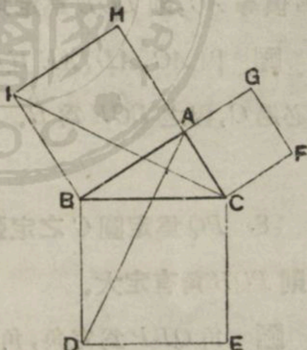


圖 160.

解　$\triangle ABD \equiv IBC$

因　$AB=IB$, $BD=BC$,

$A\hat{B}D=\hat{R}+\hat{B}=I\hat{B}C$

然其二雙對應邊 AB, BI; BD, BC 互垂直. 故第三雙對應邊 AD, IC 亦必垂直.

AE, BF 同樣證之.

36. I 爲 $\triangle ABC$ 之內心. A 爲中心任意半徑畫圓交 AB, AC 於 D, E;交 A 角高線於 K. 則

$$B\hat{I}C+D\hat{K}E=3\hat{R}$$

解　$B\hat{I}C=2\hat{R}-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}$, $D\hat{K}E=2\hat{R}-\frac{A}{2}$

$$\therefore \quad B\hat{I}C+D\hat{K}E=4\hat{R}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}$$

$$=3\hat{R}$$

37. $\triangle ABC$ 邊 AB 及其延線上各取一點 D, E 使 AD, AE 俱等 AC,則 DCE 爲定角.

解　因 AC, AD, AE 互相等. 故 A 爲心 DE 爲直徑之圓必過 C,因之 $D\hat{C}E$ 爲 $\hat{R}$.

38. PQ 爲定圓 C 之定弧,AB 爲直徑, PA, BQ 相交於 O,則 POB 角有定大.

解　角 QBP 爲定角,角 BPO 爲直角,故 POB 爲定角.

39. 二定圓相交於 A, B, P 爲 O 圓周上任一點,結 PAX,

PBY 交他圓周於 X, Y. 則 XY 與 PO 爲定角.

解 過 P 引 O 圓切線 PT,

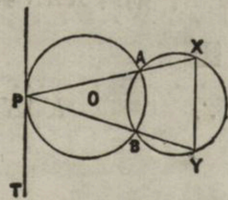


圖 161.

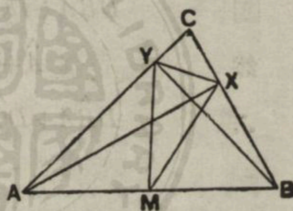
則 $\qquad T\hat{P}B = P\hat{A}B$

$\qquad\qquad = P\hat{Y}X$

$\therefore \qquad XY \parallel PT$

$\therefore \qquad XY \perp PO$

40. X, Y 爲 $\triangle ABC$ 邊 BC, CA 之高足. M 爲 AB 中點, 頂點 C 動於 AB 爲徑之定弧上, 則 MXY, MYX 均定角.



162.

解 X, Y 在 AB 爲直徑之圓周上.

$\therefore \qquad Y\hat{X}B = 2\hat{R} - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$

然 $\qquad \hat{B} = M\hat{X}B \quad (\because MX = MB)$

$\therefore \qquad M\hat{X}Y = \hat{C} = \text{cons.}$

同樣 $\qquad M\hat{Y}X = \hat{C} = \text{cons.}$

41. 二定圓互外切於 A，引任意割線順次交二圓於 K，L, M, N. 則角 KAN 與 LAM 之和有定值.

解 $$L\hat{A}M=\hat{K}+\hat{N}$$

∴ $$K\hat{A}N+L\hat{A}M=2\hat{R}$$

42. 由定圓外定點 A 引切線 AB，AC. 在其夾弧之共軛弧上取 D 點. 則 $A\hat{B}D+A\hat{C}D$ 有定和.

解 $$D\hat{B}A+D\hat{C}A=4\hat{R}-(\hat{A}+\hat{D})$$

然 $$\hat{A}+\hat{D}=\text{cons.}$$

∴ $$D\hat{B}A+D\hat{C}A=\text{cons.}$$

43. 一動切線夾於二定切線間之部分對於中心張定角.

解 DE 爲動切線，AB，AC 爲定切線. DE 與 AB,AC 相交於 D，E. O 爲圓心，P 爲 DE 切點.

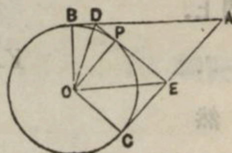


圖 163.

$$D\hat{O}P=\frac{1}{2}B\hat{O}P$$

$$P\hat{O}E=\frac{1}{2}P\hat{O}C$$

$$\therefore \qquad D\hat{O}E=\frac{1}{2}B\hat{O}C=\text{cons.}$$

44. 過二圓交點 P 終於二圓周引二直線 APB, CPD, CA, BD 延線之交角 Q 為定角. 但 CD 有定位.

解　PBD, CAP 俱為定角. 故 Q 為定角.

45. A, B, C, D 為調和點列, 則 AB 為徑之圓必直交於過 C, D 之任意圓.

解　AB 為徑圓之中心為 O, 交過 C, D 之圓於 M. 則 OM 為 OC, OD 之比例中項. 故 OM 切 CD 圓於 M.

故二圓互直交.

46. 圓內接定邊形多邊形, 其相間各內角之和加以二直角為常數.

解　相間各頂點各引切線, 又相間各頂點各結對角線.

則得

$$\frac{n\pi}{2}-\Sigma=\pi$$

卽 $$\Sigma+\pi=\frac{n\pi}{2}=\text{cons.}$$

但 Σ 表相間各內角之和.

47. 三角形高線上之平方等於其所分底邊二分所包之矩形,則頂角爲直角.

解 由 $\triangle ABC$ 之頂角 C 引 CM 垂直 AB. 則

$$\begin{aligned} AB^2 &= AM^2+MB^2+2AM\cdot MB \\ &= AM^2+MB^2+2CM^2 \\ &= AC^2+BC^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \hat{C}=\hat{R}$$

48. 三角形一邊上之平方等於他二邊上平方之和,則其對角爲直角.

49. AB 爲直徑畫半圓,其周上取二點 P,Q. AP,BQ 交於 X; AQ,BP 交於 Y. 則 AB,XY 爲正交.

解 點 Y 爲 $\triangle ABX$ 之垂心.

50. $\triangle ABC$, AB 等 AC, 作高線 AH, BL 相交於 D, 延長 AH 至 K 截 HK 等由 L 至 BC 之距 LF. E 爲 AD 中點。則 EBK 角爲直角.

證　由相似三角形得

$$\frac{DH}{LF}=\frac{BH}{BF},$$

$$\frac{AH}{LF}=\frac{HC}{FC}$$

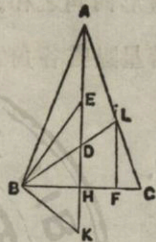


圖 164.

$$\therefore\quad \frac{DH+AH}{LF}$$

$$=\frac{BH(BF+FC)}{BF\cdot FC}$$

但　$$DH+AH=2EH,$$

$$BF+FC=2BH,\quad BF\cdot FC=LF^2$$

$$\therefore\quad \frac{2EH}{LF}=\frac{2BH^2}{LF^2}$$

LF 以 HK 代之. 則

$$EH\cdot HK=BH^2$$

$$\therefore\quad E\hat{B}K=\hat{R}$$

51. $n(n>4)$ 邊形各邊交互延長之成星形, 則星點處各

角之和有定值．但 n 爲定數．

解 多邊形之邊同向延長之所生外角之和爲 2π.

圖 165.

又此等角與星點處各角之和等多邊形內角之和．

若星點處各角之和爲 s,則

$$2\pi+s=(n-2)\pi$$

$$\therefore \qquad s=(n-4)\pi$$

52. 圓內接任意五邊形 $ABCDE$. 結 AC, BD, CE, DA, EB. 則

$$A\hat{B}E+B\hat{C}A+C\hat{D}B+D\hat{E}C+E\hat{A}D=\pi$$

解 此等角所對之弧之和爲全周,故其和爲 π.

53. 在 $\triangle ABC$, $AX\perp BC$, $XP\perp AB$, $XQ\perp AC$. AD 爲 $\triangle ABC$ 外接圓之直徑,則 $PQ\perp AD$.

解 O 爲 $\triangle ABC$ 之外心．結 OA 交圓周於 D,結 BD. 則

$A\hat{P}Q=A\hat{X}Q$

$=A\hat{C}B=A\hat{D}B$

$=\pi-B\hat{A}D$

$\therefore \quad PQ\perp AD$

圖 166.

51. 圓內接四邊形，其對角線互爲正交．則任一邊中點與對角線交點之聯線必垂直於其相對之邊．

解　$ABCD$ 爲圓內接四邊形，對角線 AC,BD 正交於 O．E 爲 BC 中點，結 EO 交 AD 於 F．

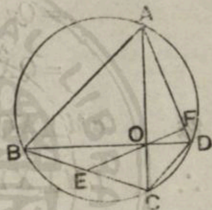


圖 167.

因 E 爲 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 斜邊 BC 中點，

$\therefore \quad BE=EO=EC$

$\therefore \quad D\hat{A}C=D\hat{B}C=B\hat{O}E=F\hat{O}D$

但 $\quad F\hat{O}D+A\hat{O}F=\hat{R}$

$\therefore \quad F\hat{A}O+A\hat{O}F=\hat{R}$

$\therefore \quad OF\perp AD$

55. 關於圓徑兩端之 Simson 線必互為正交.

解 C 為 $\triangle abc$ 之外心,O 為垂心;P, Q 為一直徑之端.又 PM, PL, QX, QY 為邊 ab, ac 上之垂線.又 PO, QO 之中點為 U, V.則 U, V 在點 P, Q 之 Simson 線上.

$$a\hat{M}L = a\hat{P}L$$

$$= \pi - P\hat{a}L$$

$$= Q\hat{a}Y$$

$$= Q\hat{X}Y$$

然 $aM \perp XQ$

∴ $LM \perp XY$

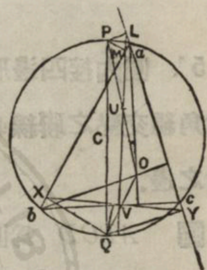


圖 168.

56. 過 O 任引四直線外二角相等,引直線 $AXBC, aXbc$,同線上以同文字表之,且角 OAX, OXb 為直角,則 OBc 亦直角.

解 $$B\hat{X}c = A\hat{O}X$$

$$= B\hat{O}c$$

故 B, X, O, c 為共圓點.

∴ $$O\hat{B}c = O\hat{X}c$$

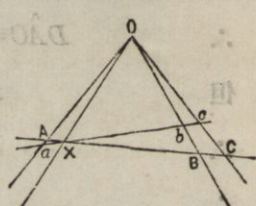


圖 169.

$$=\hat{R}$$

57. **二圓相交,過其交點之一引二直徑,則其他端之聯線與公弦夾定角.**

解　二圓相交於 A, B. AC, AD 爲直徑. 則

$$A\hat{B}C = A\hat{B}D = \hat{R}$$

故 CB, BD 爲一直線.

$$\therefore \quad AB \perp CD$$

58. **圓內接四邊形 $ABCD$ 對邊 AD, BC; AB, DC 交角 E, F 之二等分線必垂直.**

解　二等分線相交於 G. EG 交 AB 於 H, FG 交 AD 於 I.

又 FG, BC 相交於 J. 則

$$G\hat{J}E = J\hat{F}C + J\hat{C}F,$$

$$J\hat{I}D = A\hat{F}I + B\hat{A}I$$

而 $B\hat{A}I = J\hat{C}F,$

$$J\hat{F}C = A\hat{F}I$$

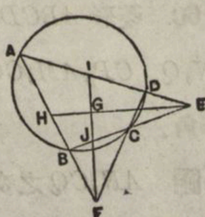


圖 170.

$$\therefore \qquad G\hat{J}E = J\hat{I}D$$

因此 $\triangle EIJ$ 爲二等邊.

故頂角 E 之二等分線 EG 必垂直於底 IJ.

59. 四邊形 $ABCD$ 內接一圓,外切於他圓. 則其相對切點之聯線互正交.

解 HF 垂直 AD, BC 所成之角之二等分線. EG 垂直 AB, DC 所成之角之二等分線.

然圓內接四邊形 $ABCD$ 相對邊所成之角之二等分線必直交.

故 EG, HF 必直交.

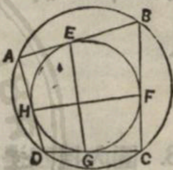


圖 171.

60. 菱形 $ABCD$ 之小對角線 AC 爲徑畫圓截各邊於 P, M, N, Q. $CP, AM; CQ, AN$ 之交點爲 O, L. 則 $AOCL$ 與原形等角.

解 AN, CQ 之交點, AM, CP 之交點必同在 BD 線上.

$$B\hat{A}C = \pi - A\hat{B}D$$

$Q\hat{L}B=\pi-A\hat{B}D$

$\therefore\quad B\hat{A}C=C\hat{L}O$

$B\hat{A}D=A\hat{L}C$

$A\hat{B}C=L\hat{A}O$

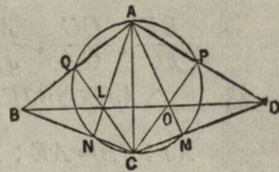


圖 172.

故菱形 $ALCO$ 與原形等角.

61. Rt$\triangle ABC$ 角 A 爲直角,由 A 引 AD 垂直斜邊 BC 其足爲 D. 次於 AB, AC 上取 E,F 點使 $CE:AE=AF:FB$, 則 EDF 爲直角.

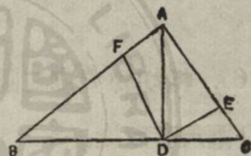


圖 173.

解　$\triangle CDE \backsim ADF$

$\therefore\qquad C\hat{D}E=A\hat{D}F$

62. $\triangle ABC$, 由頂點 A 引對邊 BC 垂線 AF,由頂點 B 引任意直線 BG 交 AC 於 G, AF 於 O,結 OC 交 AB 於 J. 則 AFJ, AFG 兩角有定比.

解　過 A 引 BC 平行線交 FG, FJ 延線於 D, E. 由 Ceva 定理:

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AJ}{JB}=1$$

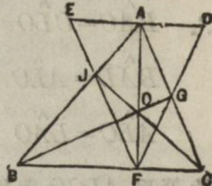


圖 174.

然 $\triangle AJE \backsim BJF$

$AJ : JB = AE : BF$

又 $\triangle AGD \backsim CGF$

$CG : GA = FC : AD$

由前三式得 $AE = DA$

$\therefore$ $A\hat{F}J = A\hat{F}G$

63. 相切於 P 之二圓截一直線於 $A, B; C, D$, 則 APB, CPD 兩角有定比.

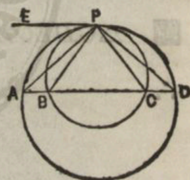


圖 175.

解 由點 P 引切線 PE. 則

$E\hat{P}B = P\hat{C}B$

$E\hat{P}A = P\hat{D}A$

$\therefore$ $A\hat{P}B = C\hat{P}D$

64. 自定點 A 引二直線 ABC, AEF 交二定線於 B, C 及 E, F. 則 $\triangle ABE, ACF$ 之外接圓以定角相交.

解 過 A 引二圓切線 AG, AH. 則

$A\hat{E}B=G\hat{A}C$,

$A\hat{F}C=H\hat{A}C$

∴　$G\hat{A}H=A\hat{E}B\sim A\hat{F}C$

$=B\hat{O}C$

$=$ cons.

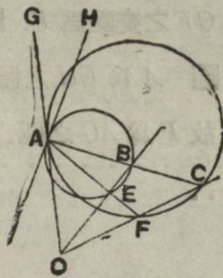


圖 176.

但 GAH 角為二圓 ABC, AEF 之交角, O 為二定線之交點.

65. O 為 $\triangle ABC$ 外接圓周上任一點, 引 OL 平行 BC 交圓周於 L. 則 AL 與 O 點 Simson 線夾定角.

解　O 在 AB 弧上, L 在 AC 弧上.

命 $OX\perp BC, OY\perp CA, OZ\perp AB, XY$ 交 OL 於 P.

則　$Y\hat{P}L=P\hat{X}C=B\hat{O}Z$

又　$A\hat{L}P=O\hat{B}Z$

但　$B\hat{O}Z+O\hat{B}Z=\hat{R}$

∴　$LA\perp XY$

66. 圓外切四邊形 $ABCD$ 之切點為 E, F, G, H; 而

HE, GF之交點爲 P. 則 PO 與 AC 成直交.

解　A 爲 EH 之極, C 爲 GF 之極; 而 P 在 EH, GF 上. 故 P 爲 AC 之極.

$$\therefore \qquad OP \perp AC$$

67. 直交二定圓之各圓,亦直交於定圓之相似圓及二逆相似圓.

解　相似圓及二逆相似圓均與定圓爲同軸圓.

直交二定圓之圓之中心必在二定圓之根軸上.

故此等圓與前三圓爲直交.

68. 完全四邊形 $ABCD$ 對角線 AC, BD, XY 之交點爲 P, Q, R. 則 AC, BD, XY 爲徑之圓,直交於 $\triangle XBC$, XAD, YAB, YCD 之極圓與 $\triangle PQR$ 之外接圓.

解　O_1爲 $\triangle XBC$ 之垂心, O_1B, O_1C, O_1X 交對邊於 U, V, W. L 爲 AC 中點; A, C, R, Q 爲調和點.

$$\therefore \qquad LR \cdot LQ = LC^2$$

由是 AC 爲徑之圓直交於 $\triangle PQR$ 之外接圓.

同樣，BD, XY 爲徑之圓直交於 $\triangle PQR$ 之外接圓.

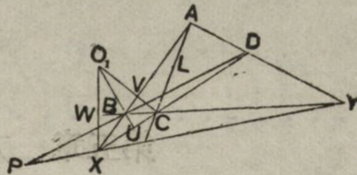


圖 177.

又 $\triangle XBC$ 之極圓中心爲 O_1，且其半徑之平方等

$$O_1W\cdot O_1X=O_1U\cdot O_1B=O_1V\cdot O_1C$$

而 W, U, V 在 XY, BD, AC 爲徑之圓周上. 由是 $\triangle BCX$ 之極圓直交此三圓.

同樣 $\triangle XAD, YAB, YCD$ 之極圓直交於此三圓.

故 $\triangle XBC, XAD, YAB, YCD$ 之極圓與 $\triangle PQR$ 之外接圓均直交於 BD, AC, XY 爲徑之圓.

第五章　方向

1. 二等邊三角形底邊有定位,則其頂角外二等分線有定向.

2. $\triangle ABC$ 底邊 BC 有定位,AB,AC 中點爲 D,E. 則直線 DE 有定向.

3. 垂直定線之直線有定向.

4. 正多邊形一邊有定位,則其餘各邊及對角線均定向.

5. 四邊形 $ABCD$ 邊 CD 有定位而 BD,AC 與 DC 成等角,又 AC,AD 所成之角等於 BD,BC 所成之角,則 AB 邊有定向.

解　　$\triangle ADC \equiv BDC$

$\therefore$　　$AB \parallel CD$

6. BD 爲 $\triangle ABC$ 之中線,引任意直線 CE 交 AB 於

E, BD 於 G. 結 AG 交 BC 於 F, 則 EF 有定向

解　由 Ceva 定理:

$$\frac{DA}{DC}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{EB}{EA}=1$$

然　$$DA=DC$$

∴　$$\frac{FC}{FB}=\frac{EA}{EB}$$

∴　$$EF \parallel AC$$

7. EF 爲平行於 $\square ABCD$ 邊 AD 之直線. BE, CF 交於 G; AE, DF 交於 H. 則 GH 有定向.

解　$$EF \parallel BC$$

∴　$$\frac{GE}{GB}=\frac{EF}{BC}$$

$$\frac{HE}{HA}=\frac{EF}{AD}$$

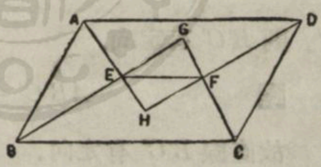


圖 178.

然　$$BC=AD$$

∴　$$\frac{GE}{GB}=\frac{HE}{HA}$$

∴　$$GH \parallel AB$$

8. AB 爲定圓之定徑，C 爲周上任意點，過 C 引切線交 A, B 切線於 E, F，直線 AF, BE 相交於 M. 則 MC 有定向.

解　$\triangle AME \backsim BMF$

$\therefore \quad \dfrac{AM}{MF}=\dfrac{AE}{BF}$

然　$AE=EC$

$BF=CF$

$\therefore \quad \dfrac{AM}{MF}=\dfrac{EC}{CF}$

$\therefore \quad MC \parallel AE$

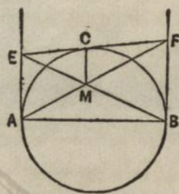


圖 179.

9. 過所設 $\triangle ABC$ 之二頂點 B, C 畫圓交 AB, AC 於 B', C'. 則 $B'C'$ 有定向.

解　$A\hat{B'}C'=A\hat{C}B=\text{cons.}$

故直線 $B'C'$ 有定向.

10. 定圓 O 之周上有定點 C，C 爲心畫第二小圓，由第一圓周上任意點 P 引小圓切線交第一圓周於 A, B. 則 AB 有定向.

證　PC 二等分 APB 角。故

C 爲弧 AB 中點。

$\therefore \qquad OC \perp AB$

故 AB 有定向。

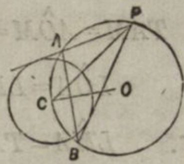


圖 180.

11. 定圓周上有三定點 L, M, N, 作弦 PM, QM 與弦 LN 爲等角，則 PQ 有定向。

證　直線 LN, PQ 相交於 G。則

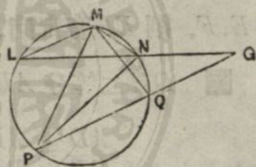


圖 181.

$$\hat{G}=L\hat{N}P-N\hat{P}Q$$

$$=L\hat{M}P-Q\hat{M}N$$

$$=M\hat{N}L-M\hat{L}N$$

$$=\text{cons.}$$

而 LN 有定位，故 PQ 有定向。

12. 由定圓周上一定點 O 引二弦 OL, OM 與定弦 OA 爲等角，則 LM 有定向。

證　引 LM 又引 AT 切線。則

$$T\hat{A}M = A\hat{O}M = A\hat{O}L$$

$$L\hat{O}A = L\hat{M}A$$

$$\therefore \quad L\hat{M}A = T\hat{A}M$$

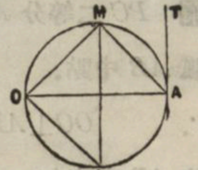


圖 182.

點 A 爲定點, AT 有定位.

故 LM 有定向.

13. D 爲所與線分 BC 之中點,由 D 引任意直線 DX,在 DX 上任取一點 A, 角 ADB, ADC 之二等分線交 AB, AC 於 E, F. 則 EF 有定向.

解 DE 二等分 ADB 角.

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$$

同樣

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{CF}$$

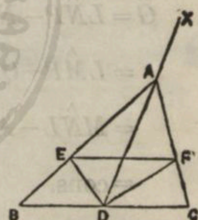


圖 183.

而 $\qquad BD = CD$

$\therefore \qquad \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AF}{CF}$

$\therefore \qquad EF \parallel BC$

故 EF 有定向.

14. 畫數圓相切於一點,過切點引任意直線除共通外倘交於各點,過此等點引半徑皆具同一方向.

解　圓 O, O', O'' 等相切於 A, 過 A 引任意直線交圓周於 B, D, C 等點. 則 $OB, O'D, O''C$ 等爲同向. 因此等半徑與中心線 OO' 爲等角故也.

15. P 爲 $\triangle ABC$ 之中線 AM 上任意點,結 BP, CP 交 AC, AB 於 X, Y,則 XY 有定向.

解　由 P 引 BC 平行線交 AB, AC 於 Q, R. 則

$$QP = PR$$

又　$$BX : XP = BC : PR$$

$$= BC : QP$$

$$= CY : YP$$

∴　$$XY \parallel BC$$

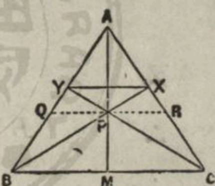


圖 184.

16. $\triangle ABC$ 底 AB 有定位. AM, AN 爲角 A 之中線及分角線交 BC 於 M, N. 由 B 引 AN 之垂線交 AM 或其延

線於 P,則 PN 有定向.

解 BP, AC 相交於 E. 由 B 引 AN 垂線之足爲 D.

假定 $AB>AC$. 其他得同樣證明之.

BD, AC 之交點爲 E.

$$MD \parallel AE$$

又以 a, b, c 表 $\triangle ABC$ 之三邊.

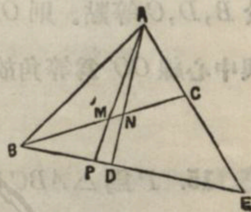


圖 185.

則

$$MP : PA = MD : AE$$

$$= \frac{1}{2}(c-b) : c$$

又 $$BN : NC = c : b$$

$\therefore$ $$BN-NC : BN = (c-b) : c$$

$\therefore$ $$2MN : BN = (c-b) : c$$

$\therefore$ $$MN : BN = \frac{1}{2}(c-b) : c = MP : PA$$

$\therefore$ $$PN \parallel AB$$

17. $\triangle CAB, DAB$ 有公共之底 AB,在 AB 上任取一點 X 引 PX, PY 平行 AC, AD 交 BC, BD 於 X, Y,則 XY 有

定向。

解　$$BD : BY = BA : BP = BC : BX$$

∴　$$XY \parallel CD$$

18. $\triangle ABC$ 二邊 AC, AB 上各取一點 M, N 使 B, C, M, N 爲共圓點，NC, MB 交於 P, AP, BC 之中點爲 L, D. 則角 DLP 之二等分線有定向.

解　E, F 爲 AC, AB 中點. 作 $XL, ZL \parallel AB, AC$ 交 FD, DE 於 Y, W.

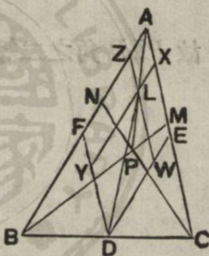


圖 186

因 $BNMC$ 內接於圓，則

$$A\hat{B}P = A\hat{C}P$$

故　$$A\hat{F}L = A\hat{E}L$$

∴　$$\triangle ZFL \backsim XEL$$

∴　$$LZ : ZF = LX : XE$$

卽　$$LZ : LX = ZF : XE$$

卽　$$LZ : AZ = LY : YD$$

∴　$$L\hat{A}Z = L\hat{D}Y$$

但 $$DY \parallel CA$$

∴ $$\overset{\frown}{AP,AB}=\overset{\frown}{LD,AC}$$

即 $$P\hat{A}B=D\hat{L}W$$

∴ $$P\hat{L}Y=D\hat{L}W$$

∴ $$P\hat{L}W=D\hat{L}Y$$

又 $$Y\hat{L}W=B\hat{A}C$$

∴ $$\frac{1}{2}Y\hat{L}W=\frac{1}{2}B\hat{A}C$$

故 PLD 角之二等分線平行 $B\hat{A}C$ 之二等分線．故有定向。

第六章　立體問題

1. 一直線垂直於他相交二直線則在此二直線所定平面上之諸直線必與前一直線成定角.

解　此一直線垂直於他相交二直線所定之平面.

故面上各線與此一直線爲正交.

2. AP 垂直平面 M. BC 爲 M 上任一線, PD 垂直之. AP 上任一點 A 與 D 結直線. 則 AD, BC 爲正交.

解　截 $BD=DC$, 結 AB, AC, PB, PC. 則

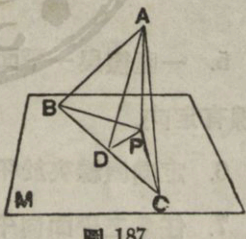


圖 187.

$\triangle PDB \equiv PDC$,

$\therefore$　$\triangle APB \equiv APC$,

$\therefore$　$\triangle ABD \equiv ACD$

$\therefore$　$AD \perp BC$

3. AP 垂直平面 M. BC 爲 M 上任一線, A 爲 AP 上任一點。引 AD 垂直 BC. 則 PD, BC 爲正交.

4. M, N 爲相交二平面,由 M 面上任一點 A 引各面垂線,交 N 面於 B, C 二點,則 BC 與二面交線 EF 爲正交.

解 $AB \perp N, AC \perp M$

引 $BD \perp EF$

則 $AD \perp EF$

又 $CA \perp M$

$\therefore$ $CD \perp EF$

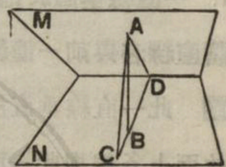


圖 188.

故 BD, CD 相合爲一.

$\therefore$ $BC \perp EF$

5. 一直線與一平面平行則過此直線之平面與原平面之交線有定向.

6. 定向直線夾於平行二定面間有定長.

7. 任意二平面同平行於一定線則其交線有定向.

8. 同一定線之垂直面有定向.

9. 同一定面之垂直線有定向.

10. 或角之二邊平行一定角之二邊則此角有定值.

11. 空間四邊形 $ABCD$ 之四邊交任一平面於 a,b,c,d 則

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1.$$

解 $abcd$ 平面交 AC 延線於 e, 則 eab, ecd 為 $\triangle ABC$, ADC 之截線. 故由 Menelaus 定理得

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{eC}{eA}=1,\quad \frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}\cdot\frac{eA}{eC}=1$$

兩邊相乘之則得

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1$$

12. 由互平行二定線 AB, CD 之端任引同向直線 Aa, Bb, Cc, Dd 交一平面 M 於 a, b, c, d 則 ab, cd 有定比.

解 ac, bd 相交於 O. 因 $Aa \parallel Cc$, 故 aO 為平面 Ac 與平面 M 之交線; 同樣 bO 乃平面 Bd 與 M 之交線.

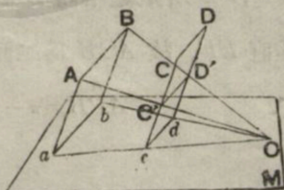


圖 189.

由是 AO, Cc 相交於 C', BO, Dd 相交於 D'.

$$Aa \parallel Bb \parallel Cc \parallel Dd$$

$$AB \parallel CD$$

$\therefore$ 平面 $Ab \parallel Cd$, $ab \parallel cd$

$\therefore$ $ab : cd = aO : cO = AO : C'O$

又 $AB \parallel C'D'$

$\therefore$ $AO : C'O = AB : C'D'$

又 $C'D' = CD$

$\therefore$ $ab : cd = AB : C'D' = AB : CD = \text{cons.}$

13. 由二面角內任一點至各面引垂線其所夾之角有定值.

證 P 爲角內任一點. PA, PB 垂直其二面 M, N. PA, PB 所定之平面 L 交二面角之稜 EF 於 C. 則 AC, BC 垂直 EF. 故 $A\hat{C}B$ 爲二面角之平面角.

$\therefore$ $A\hat{P}B = \pi - A\hat{C}B = \text{cons.}$

14. 由二定點 A, B 至二定面引垂線,若 A 點所引二垂線之和等於 B 點所引二垂線之和,則在 AB 上任一點至二

面引垂線其和有定值.

證　由 A, B 引平面 P 之垂線爲 AA', BB'；平面 Q 之垂線爲 AA'', BB''.

C 爲 AB 上任一點，由 C 至二面 P, Q 之垂線爲 CC', CC''.

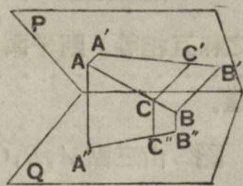


圖 190.

ABC 爲一直線則 $A'B'C', A''B''C''$ 亦一直線，且 $A'B'C'$, $A''B''C''$ 爲 ABC 投各面之正射影.

若 $$AB : BC = m : n$$

則 $$(m+n)BB' = nAA' + mCC',$$

$$(m+n)BB'' = nAA'' + mCC''$$

$$\therefore \quad (m+n)(BB'+BB'') = n(AA'+AA'') + m(CC'+CC'')$$

然由假設 $$BB'+BB'' = AA'+AA''$$

$$\therefore \quad CC'+CC'' = AA'+AA'' = \text{cons.}$$

15. **由二定點 A, B 至數個定平面各引垂線，若 A 點所引各垂線之和等於 B 點所引各垂線之和，則在 AB 線上任**

一點至各面引垂線其和有定值.

16. **由三定點 A,B,C 各至二定面 M,N 引垂線,各點垂線之和互相等. 則平面 ABC 上任一點至各面垂線之和有定值.**

解 由三點 A,B,C 至平面 M 引垂線 a,b,c; 至平面 N 引垂線 a',b',c'. P 爲平面 ABC 上任一點,至 M,N 之垂線爲 p,p'. 結 Bp 交 AC 於 Q. 由 Q 引二面垂線 q,q'.

則由 14 題知

$$q+q'=a+a'$$

由是 $$p+p'=a+a'=\text{cons.}$$

17. **由三定點 $A,\ B,\ C$ 各至數定面引垂線. 若各點各垂線之和互相等,則平面 ABC 上任一點至各面垂線之和有定值.**

18. **由三角形各頂點及重心至任一面引垂線,若重心所引垂線有定長,則由各頂點所引垂線之代數和有定值.**

解 由 $\triangle ABC$ 各頂點及重心 G 至任一平面 M 引垂線 AA',BB',CC',GG'. 而 GG' 有定長.

引 AG 交 BC 於 D. 則 D 爲 BC 中點. 引 DD' 垂直 M.

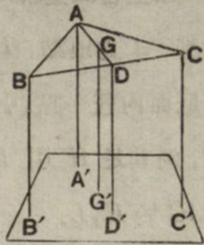


圖 191.

則　$BB'+CC'=2DD'$

又　$AG:GD=2:1$

$\therefore$　$2DD'+AA'=3GG'$

$\therefore$　$AA'+BB'+CC'=3GG'$

$=\text{cons}.$

19. 由一平面多邊形各頂點及重心至任一面引垂線,若重心所引垂線有定長,則由各頂點所引垂線之代數和有定值.

20. 由三面角內任一點至三面引垂線成一三面角,則此三面角有定大.

解　V' 爲三面角 $V-ABC$ 內一點,由 V' 至各面引垂線 $V'A'$, $V'B'$, $V'C'$ 成三面角 $V'-A'B'C'$.

由問題 13 知三面角 $V'-A'B'C'$ 之各平面角有定大.

故三面角 $V'-A'B'C'$ 亦定大.

21. 四面體之底爲正三角形,頂角各角爲直角,則由底

內任一點至各面垂線之和有定值.

證 A 爲頂點, BCD 爲底面, F 爲底面內任一點, 引 FH 垂直面 ACB, 過其足 H 引 BC 平行線交 AB, AC 於 K, L.

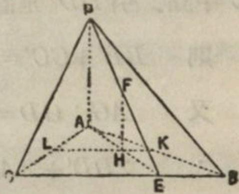


圖 192.

因 $AD \parallel FH$ 故 DE, AH 在同平面內, 命其交點爲 E. 則

$$AD : HF = AE : HE = AB : KB$$

然 $$AD = AB$$

$\therefore$ $$FH = KB$$

又由 F 至面 ACD, ABD 之垂線, 等於由 H 下 AL, AK 之垂線.

$\triangle ALK$ 爲直角二等邊故此二垂線之和等 AK.

故由 F 至三面垂線之和等 AB 爲定值.

22. 四面體底面爲等邊三角形, 頂角各角爲直角時, 則其高線與過頂點一稜之二乘比有定值.

證 四面體 $ABCD$ 底面 ABC 爲正三角形, 且頂點 D

之三個面角爲直角.

由 D 引平面 ABC 垂線 DE,其足爲 E,則 E 乃 $\triangle ABC$ 之垂心. 結 AE 延長之交 BC 於 F,則 $\triangle AFC$ 爲直角形.

又 $\triangle ABC$ 爲正三角形,故 E 亦重心.

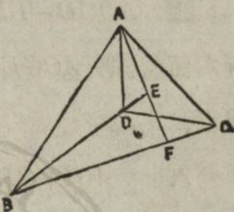


圖 193.

$$\therefore \qquad AE=\frac{2}{3}AF$$

$$然 \qquad AF=\frac{\sqrt{3}}{2}AC$$

$$\therefore \qquad AE=\frac{\sqrt{3}}{3}AC$$

$$又 \qquad AD=\frac{AC}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \qquad DE^2=AD^2-AE^2$$

$$=\frac{AC^2}{2}-\frac{AC^2}{3}$$

$$=\frac{AC^2}{6}$$

$$\therefore \qquad DE^2 : AC^2=1:6$$

$$即 \qquad DE^2 : AD^2=1:3=\text{cons.}$$

23. 一角柱爲定向平面所截其截口爲定形.

24. 平行六面體同一頂點之三稜有定長,則其四對角線之平方和有定値.

解 $ABCD-EFGH$ 爲平行六面體,則 $ACGE$ 爲平行四邊形.

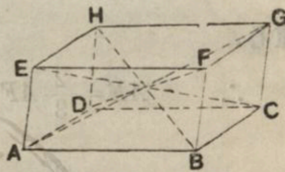


圖 194.

$\therefore \quad AG^2+CE^2$

$=2(AE^2+AC^2)$

同樣 $\quad BH^2+DF^2=2(BF^2+BD^2)$

$\therefore \quad AG^2+BH^2+CE^2+DF^2$

$=2(AE^2+AC^2+BF^2+BD^2)$

$=4AE^2+2(AC^2+BD^2)$

然 $\quad AC^2+BD^2=2(AD^2+AB^2)$

$\therefore \quad AG^2+BH^2+CE^2+DF^2=4(AE^2+AD^2+AB^2)$

但 AE, AD, AB 爲過一頂點 A 之三稜有定長.

$\therefore \quad AG^2+BH^2+CE^2+DF^2=\text{cons.}$

25. 不在同平面上互平行數定線於其上截定長爲稜作

角柱體,則其體積有定大.

解　角柱體之體積,等於側稜乘正截面.然此類角柱體側稜有定長,正截面有定大,故其體積爲定値.

26. 不在同平面上三平行線,在其中之一截定長 AB,其餘二線上各取任意點 C,D. 則四面體 $ABCD$ 體積有定大.

解　設三平行線爲 a,b,c. 線分 AB 在 a 上,C,D 在 b,c 上. 則 c 與平面 (a,b) 之距 h 有定長,$\triangle ABC$ 有定大.

故所求體積爲

$$\frac{1}{3}h\cdot\triangle ABC=\text{cons.}$$

27. 由正角錐體底面上任一點 A 立垂線,由點 A 至垂線與各側面(或其延面)交點之距離有定和.

解　$A-BCD$ 爲正角錐體(以正三角錐體爲例),O 爲底面中心,P 爲面上任一點.

引 PX 垂直 BCD 面,交 ACD 面於X,其他各面於 Y, Z等.

由 P 至 CD,DB 等邊,引垂線 PL,PM 等. 又由 O 亦

至各邊引垂線 OE, OF 等.

AO, XP 同垂直 BCD 面故平行, OE, PL 同垂直 CD 亦平行. 故面 AOE 平行 XPL; 因此 AE 平行 XL.

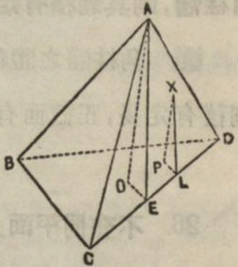


圖 195.

$$\therefore \quad \triangle AOE \backsim XPL$$

$$\therefore \quad XP : AO = PL : OE$$

由是推之

$$\Sigma PX : AO = \Sigma PL : OE$$

因 O 爲底面中心則 OE, OF 等互相等.

又底面爲正多角邊則

$$PL + PM + \cdots\cdots\cdots\cdots = n \cdot OE$$

$$\therefore \quad PX + PY + \cdots\cdots\cdots\cdots = n \cdot OA = \text{cons.}$$

28. 由正角錐底面上任一點, 至各側面引直線, 其斜度一定則此等線之和有定值.

圖 設其等角爲 α 則

$$PX + PY + \cdots\cdots\cdots\cdots = n \cdot OA \cdot \csc\alpha = \text{cons.}$$

29. **任一面與四面體之重心有定距,則由四面體各頂點至此面所引垂線有定和.**

證　G為四面體 $ABCD$ 之重心. 由 G 及各頂點至任一面 M 之垂線為 GG', AA', BB', CC', DD', 其長為 g, a, b, c, d

E 為 BC 中點, F 為 $\triangle BCD$ 之重心. 由 E, F 至 M 面之垂線為 EE', FF' 其長為 e, f. 則

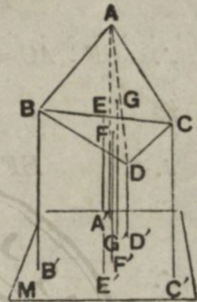


圖 196.

$$b+c=2e$$

$$2e+d=3f$$

$$3f+a=4g$$

$$\therefore \qquad a+b+c+d=4g=\text{cons.}$$

30. **任一平面與平行六面體對角線交點有定距,則由各頂點至此面引垂線,其代數和有定值.**

31. **四面體一雙對稜相等時則平行此二稜之截面,其截口之周有定長.**

解 四面體 $ABCD$ 相對稜 AC, BD 相等. 平行於 AC, BD 作截面, 其截口 $EFGH$ 爲平行四邊形. 則

$$EF \parallel AC, \quad EH \parallel BD$$

$$\therefore \quad EF : AC = BE : AB, \quad EH : BD = AE : AB$$

然 $$AC = BD$$

$$\therefore \quad EF + EH : AC = AE + BE : AB$$

$$= AB : AB$$

$$\therefore \quad EF + EH = AC = \text{cons.}$$

$EF+EH$ 爲截口半周, 既有定長, 則全周亦定長可知.

32. 四面體 $ABCD$, 平行其一雙對稜 AC, BD 作截面, 其截口爲 $EFGH$, 則 $\dfrac{EF}{AC}+\dfrac{EH}{BD}$ 有定値.

解 $$EF \parallel AC, \quad EH \parallel BD$$

$$\therefore \quad EF : AC = BE : AB, \quad EH : BD = AE : AB$$

$$\therefore \quad \frac{EF}{AC}+\frac{EH}{BD}=\frac{BE}{AB}+\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

33. O 爲四面體 $ABCD$ 內一點. OA, OB, OC, OD 延

長之交對面於 A',B',C',D'，則

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

解　過 O 作平行 AB,DC 之平面，截四面體於 $EFGH$.

過 O 引 MN 平行 AB，則 MN 過 $A'B,HE$ 之交點 N.

$$\therefore\quad \frac{OA'}{AA'}=\frac{ON}{AB}$$

同樣　$$\frac{OB'}{BB'}=\frac{OM}{AB}$$

$$\therefore\quad \frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}$$

$$=\frac{MN}{AB}=\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{AC}$$

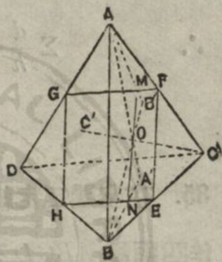


圖 197.

同樣　$$\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=\frac{AF}{AC}$$

$$\therefore\quad \Sigma\frac{OA'}{AA'}=1$$

34. **由任一點至四面體各面下垂線其長為 d,d',d'',d'''，其對應各面之高線為 h,h',h'',h'''，則**

$$\frac{d}{h}+\frac{d'}{h'}+\frac{d''}{h''}+\frac{d'''}{h'''}=1.$$

解 P 爲任意點，$ABCD$ 爲四面體.

$$\frac{PABC}{DABC}=\frac{d}{h},\quad \frac{PDBC}{DABC}=\frac{d'}{h'},$$

$$\frac{PDAC}{DABC}=\frac{d''}{h''},\quad \frac{PDAB}{DABC}=\frac{d'''}{h'''},$$

$$\therefore \qquad \Sigma\frac{d}{h}=\frac{\Sigma PABC}{DABC}=1$$

35. 在空間二定線 XX', YY' 上截取二定長線分 AB, CD 作四面體 $ABCD$ 有定積.

解 外接 $ABCD$ 之平行六面體有一定之體積.

設此六面體爲 $AFBE-LDHC$. 則 DC, LH 有定長，定向. 故底面 $LDHC$ 爲定積. 又高 BH 爲二定線 XX', YY' 間之距離有定長. 故 $AFBE-LDHC$ 有定積.

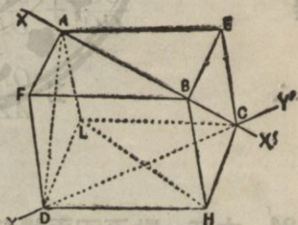


圖 198.

由是其三分之一之四面體 $ABCD$ 亦定積.

36. 三與長線分 AB, CD, EF 互以定角相交於 O, 則其端結成之立體有定積.

解　四邊形 $CFDE$ 有定積, AB 有定長且對 $CFDE$ 面有一定之斜度, 故此立體有定積.

37. 在三角臺之二底上取不平行之二邊爲相對稜作四面體其積有定值.

解　$A'B'C'-ABC$ 爲三角臺. 則四面體 $A'-BB'C$, $A-BB'C'$ 等互等積.

由 A, A' 各至底面 $BB'CC'$ 引垂線 $AD, A'D'$. 則

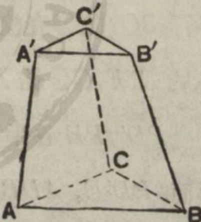


圖 199.

$$A'-BB'C=\frac{1}{2}A'D'\cdot\triangle BB'C,$$

$$A-BB'C'=\frac{1}{2}AD\cdot\triangle BB'C'$$

$$\therefore\qquad \frac{A'-BB'C}{A-BB'C'}=\frac{A'D'}{AD}\cdot\frac{\triangle BB'C}{\triangle BB'C'}$$

然
$$A'D' : AD=A'B' : AB$$

$$\triangle BB'C : BB'C'=CB : C'B'$$

$$=AB:A'B'$$

$$\therefore \qquad A'-BB'C:A-BB'C'=1$$

即　$A'-BB'C=A-BB'C'=\cdots\cdots\cdots\cdots=\text{cons.}$

38. 正四面體 $ABCD$ 之底 BCD 內任取一點 P 引 AB, AC, AD 平行線交各面於 B', C', D' 則

$$\frac{PB'}{AB}+\frac{PC'}{AC}+\frac{PD'}{AD}=1.$$

解　由 P 引 EF 平行 BD, PG 平行 BC 此等直線交 $\triangle CBD$ 之三邊於 E, F, G。結 D', E.

PD', PE 各平行 DA, DB, 故兩面 $PD'E$, ADB 互平行. 因此 $D'E$ 平行 AB.

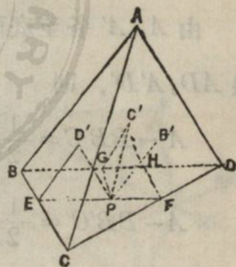


圖 200.

$$\therefore \qquad \triangle PD'E \backsim ADB$$

$$\therefore \qquad PD':AD=PE:DB$$

同樣　$$PB':AB=PF:BD$$

$$PC':AC=PG:BC$$

引 FH 平行 CB 則得 PG 等 FH.

$$\therefore \quad PC':AC=FH:BC=HD:BD$$

$$\therefore \quad \frac{PD'}{AD}+\frac{PB'}{AB}+\frac{PC'}{AC}=\frac{PE}{BD}+\frac{PF}{BD}+\frac{HD}{BD}$$

而 $$EF=BH$$

$$\therefore \quad \frac{PD'}{AD}+\frac{PB'}{AB}+\frac{PC'}{AC}=\frac{BD}{DB}=1$$

39. 由正多面體內一點至各面引垂線其和有定值.

證 V 爲正多面體之體積, S 爲其一面之面積, P 爲形內一點, 由 P 至各面之垂線爲 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots\cdots,n$.

以 P 爲頂點各面爲底分正多面體爲 n 個角錐體, 而其底均相等.

$$\therefore \quad V=\frac{1}{3}Sa+\frac{1}{3}Sb+\frac{1}{3}Sc+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{3}Sn$$

$$=\frac{1}{3}S(a+b+c+\cdots\cdots\cdots+n)$$

$$\therefore \quad a+b+c+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{3V}{S}=\text{cons.}$$

40. 由等面半正多面體內一點截各面引垂線其和有定

值.

41. 正多角錐體底面內任一點至各側面引垂線其和有定值.

42. 由正四面體一稜上任意點至不含此稜之二面引垂線有定和.

圖 $ABCD$ 爲正四面體,P 爲稜 AD 上任意點,由 P 至不含 AD 之二平面 ABC, BCD 引垂線PE, PF. 則

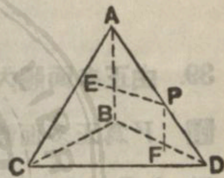


圖 201.

$$P-ABC+P-BCD$$

$$=\frac{1}{3}(PE\cdot\triangle ABC+PF\cdot\triangle BCD)$$

$$=ABCD$$

若正四面體 $ABCD$ 之高爲 h. 則

$$\frac{1}{3}(PE\cdot\triangle ABC+PF\cdot\triangle BCD)=\frac{1}{3}h\cdot\triangle ABC$$

卽 $\quad (PE+PF)\triangle ABC=h\cdot\triangle ABC$

$\therefore \quad PE+PF=h=\text{cons.}$

43. 由正四面體一面上任意點至他三面引垂線其和有

定値.

解　與前題同樣證明之,得其各垂線之和等正四面體之高線爲定値.

44. 任意凸多面體,稜之數與頂點之數及面數之和之差有定値.　(Euler)

解　任意多面體稜之數爲 E, 頂點之數爲 V, 面之數爲 F. 則 $E-(V+F)$有定値.

最初取一面 $ABCDE$, 後一一附以他面成凸多面體 GH. 當各面附加之際,稜,面,頂點等之數其間生如何關係試探究之.

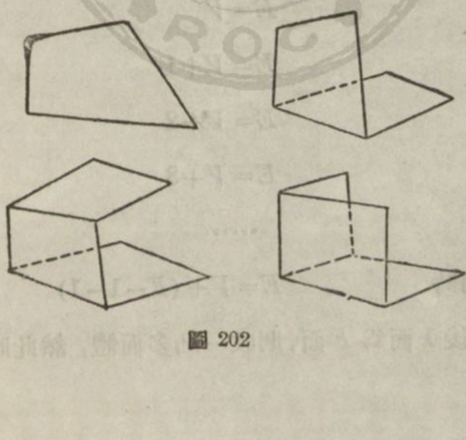


圖 202

在最初之一面得

$$E=V$$

次附加一面使一稜爲公用,則此時有二頂點及一稜爲公用。因此

$$E=V+1$$

再附加一面,使與第一第二兩面有公用之二稜及三頂點;或與一,二任一面有公用之一稜及二頂點。然無論如何稜之增加比頂點之增加多1。故

$$E=V+2$$

由是推之每附加一面稜數必比頂點之數多增加1。故得次之關係:

1面時	$E=V$
2面時	$E=V+1$
3面時	$E=V+2$
4面時	$E=V+3$
……	……
$F-1$面時	$E=V+(F-1-1)$

附加最後1面爲F面,則成一凸多面體,然此時頂點及

稜之數與 $F-1$ 面時同毫無增加。

故面數爲 F 時則

$$E=V+F-2$$

$$\therefore \qquad E-(V+F)=-2=\text{cons.}$$

45. 頂點有定數之多面體其各面總面角之和有定值。

證　任意多面體稜之數爲 E，頂點之數爲 V，面之數爲 F，總面角之和爲 S。

多面體有 F 個多邊形之面，而多邊形內角之和等邊數減 2 乘 $2\hat{R}$，然則 F 個多邊形總內角之和即 S 爲總邊數減 $2F$ 乘 $2\hat{R}$。但總邊數爲稜之 2 倍即 $2E$。

$$\therefore \qquad S=2(E-F)2\hat{R}$$

$$\text{然} \qquad E-F=V-2$$

$$\therefore \qquad S=(V-2)4\hat{R}=\text{cons.}$$

46. 多面體各面之邊數爲 m，各頂之稜數爲 n，則

$$\frac{F}{2n}=\frac{V}{2m}=\frac{E}{nm}=\frac{2}{2(m+n)-mn}.$$

證　多面體各面有 m 邊，面數爲 F，則其總邊數爲 mF。

然各面之總邊數爲稜之 2 倍．故

$$mF=2E$$

又由各頂點計稜之數其總和爲 nV．然此亦多面體稜之 2 倍．故

$$nV=2E=mF$$

$$\therefore \quad \frac{F}{2n}=\frac{V}{2m}=\frac{E}{mn}=\frac{F+V-E}{2(m+n)-mn}$$

$$=\frac{2}{2(m+n)-mn}$$

47. 同前之假定又得

$$\frac{1}{F}=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right),\quad \frac{1}{V}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{1}{E}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}.$$

解 由前問得

$$F=\frac{4n}{2(m+n)-mn}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{F}=\frac{2(m+n)-mn}{4n}=\frac{m}{2}\cdot\frac{2(m+n)-mn}{2mn}$$

$$=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)$$

同樣得求其餘。

48. **過直圓柱之軸引截面，其截口為定形。**

49. **過直圓錐之軸引截面，其截口為定形。**

50. **過定球中心之截面其截口為定形。**

51. **圓錐面或圓柱面上有定母線 SN，過 N 作任意曲線 ANB，引此曲線之切線 NT。則 NT，SN 所含之面為定面。**

解　任作第二曲線 CM 交 SN 於 M。引曲線 CM 之切線 MR。則 MR 在平面 SNT 上。

何則？在母線 SMN 極接近處作一母線 $SM'N'$ 交二曲線於 M'，N'。若弦 NN' 到極限為 NT 時，則平面 SNN' 合於 SNT。弦 MM' 合於 MR。故 MR 在平面 SNT 上。

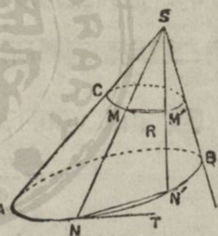


圖 203.

52. **過一定點 P 之互正交三平面截一定球 O，其截口三**

小圓面積之和有定值.

解　設三圓之半徑爲 a,b,c, 球之半徑爲 r, 由球心至三圓之距爲 a',b',c'. 則

$$a^2=r^2-a'^2,\quad b^2=r^2-b'^2,\quad c^2=r^2-c'^2$$

∴ $$a^2+b^2+c^2=3r^2-(a'^2+b'^2+c'^2)$$

然 $$a'^2+b'^2+c'^2=OP^2=\text{cons.}$$

∴ $$\pi(a^2+b^2+c^2)=\text{cons.}$$

53. 直角三角形以斜邊爲軸迴轉所生之體積爲 C, 又夾直角二邊爲軸迴轉所生之體積爲 A,B. 則 $\dfrac{C^2}{A^2}+\dfrac{C^2}{B^2}=1$.

解　由直角頂下斜邊之垂線爲 x. 則

$$x=\frac{ab}{c}$$

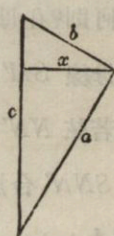


圖 204.

但 c 表斜邊, a,b 表其餘二邊.

∴ $$\frac{1}{C^2}=\frac{c^4}{\pi^2a^4b^4}$$

同理 $$\frac{1}{B^2}=\frac{c^2}{\pi^2a^4b^2},$$

$$\frac{1}{A^2}=\frac{c^2}{\pi^2a^2b^4}$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=\frac{c^2}{\pi^2a^2b^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$=\frac{c^2}{\pi^2a^4b^4}(a^2+b^2)=\frac{c^4}{\pi^2a^4b^4}$$

$$=\frac{1}{C^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{C^2}{A^2}+\frac{C^2}{B^2}=1$$

54. 迴轉面上一點 M 之切面，垂直於含過切點子午線之平面 ZOM。但 ZOZ_1 爲軸，O 爲 M 圓中心.

圖 205.

解　過點 M 所引之切平面，必含過 M 所引 O 圓之切線.

然此切線垂直於 OM, OZ. 故垂直於平面 ZOM.

55. 過一定點 P 引球之割線 CC'，則 $PC\cdot PC'$ 爲定值.

解　過 CC' 及球心 O 作平面，截球之大圓，其半徑卽球

半徑 R.

$$\therefore \qquad CP\cdot C'P=R^2-OP^2=\text{cons.}$$

56. 過一定點 P 引定球之切線有定長.

57. O 爲中心之一定球,過 O 任引一球,則第二球爲第一球所截之球帶面積有定值.

解 第二球之中心爲 C,直徑爲 OD.

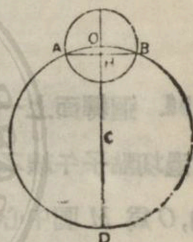


圖 206.

過 OD 作截面就其截口考之,其二圓之公弦爲 AB, AB, OD 之交點爲 H. 則

$$OD=2OC=2r$$

但 r 爲第二球之半徑.

所求球帶之面積爲 $2\pi r\cdot OH$.

然 $$OD\cdot OH=AO^2$$

若定球之半徑爲 a,則前式爲

$$2r\cdot OH=a^2$$

$$\therefore \qquad 2\pi r\cdot OH=\pi a^2=\text{cons.}$$

58. 過同心二球之中心作任意球,則此球面夾於二定球間之球帶面積有定值.

解　由前問知本題之球帶爲二個定值球帶之差,故亦定值.

59. 過一定互直交之三直線交於球面時,則三弦上正方形之和爲常數.

解　AA', BB', CC' 爲定球 O 內互直交於 P 之三弦. 過 AA', BB' 平面截球小圓之中心爲 Q. 又 L, M, N 爲各弦中點, r 爲小圓半徑, R 爲球半徑. 則

$$AL^2=r^2-QL^2$$

$$BM^2=r^2-QM^2$$

而　$QL^2+QM^2=QP^2$

$\therefore$　$AL^2+BM^2=2r^2-QP^2$

$\therefore$　$AA'^2+BB'^2=8r^2-4QP^2$

然　$CN^2=R^2-ON^2$

而　$ON=QP$

$\therefore$　$CC'^2=4R^2-4QP^2$

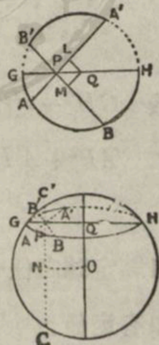


圖 207.

$\therefore\quad AA'^2+BB'^2+CC'^2=4R^2+8r^2-8QP^2$

然 $\quad r^2-QP^2=R^2-OP^2$

$\therefore\quad AA'^2+BB'^2+CC'^2=4R^2+8(R^2-OP^2)$

$=12R^2-OP^2=\text{cons.}$

60. 上述問題六線分 $AP, A'P, BP, B'P, CP, C'P$ 正方之和亦定值.

解 $\quad AP^2+BP^2=AB^2,\quad A'P^2+B'P^2=A'B'^2$

$\therefore\quad AP^2+BP^2+A'P^2+B'P^2=AB^2+A'B'^2=GH^2$

又 $\quad GP^2+HP^2+CP^2+C'P^2=4R^2$

$\therefore\quad AP^2+A'P^2+BP^2+B'P^2+CP^2+C'P^2$

$=4R^2+GH^2-(GP^2+HP^2)$

然 $\quad GH^2-(GP^2+HP^2)=2GP\cdot HP=2(R^2-OP^2)$

$\therefore\quad AP^2+A'P^2+BP^2+B'P^2+CP^2+C'P^2=\text{cons.}$

61. 定球之任一半徑投於他互正交三半徑之正射影其平方和有定值.

解 OA, OB, OC 爲半徑 R 球互正交之三半徑. OD 爲

任一半徑．以 OA, OB, OC 爲稜，OD 爲對角線，作直六面體 OD．交 OA, OB, OC 於 E, F, G 三點．則 OE, OF, OG 卽 OD 投於 OA, OB, OC 之正射影．得

$$OE^2+OF^2+OG^2=OD^2=R^2$$

$$=\text{cons.}$$

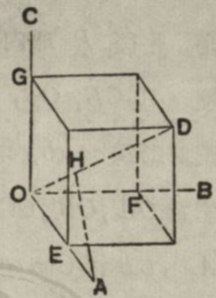


圖 208.

62. **定球內有互正交三半徑，則此等半徑投於他任一半徑正射影之平方和有定值．**

解　用前問之圖．

OA 投於 OD 之正射影爲 OH，則

$$OH=OE$$

卽 OA 投於 OD 之正射影等於 OD 投 OA 正射影．

故 OA, OB, OC 投於 OD 正射影等 OE, OF, OG．由前問知其平方和爲 R^2 爲常數．

63. **定球內互正交三半徑投於任一面正射影之平方和**

爲常數.

解　半徑 R 球內有互正交之三半徑 OA, OB, OC, 投於任一面 P 之正射影爲 oa, ob, oc; 投於 Oo 之正射影爲 OA', OB', OC'. 則

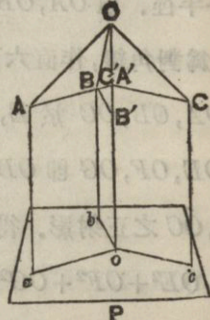


圖 209.

$$AA', BB', CC' = oa, ob, oc$$

而 $$AA'^2 + OA'^2 = OA^2,$$

$$BB'^2 + OB'^2 = OB^2, \quad CC'^2 + OC'^2 = OC^2$$

$\therefore$ $$oa^2 + ob^2 + oc^2 + OA'^2 + OB'^2 + OC'^2 = 3R^2$$

然 $$OA'^2 + OB'^2 + OC'^2 = R^2$$

$\therefore$ $$oa^2 + ob^2 + oc^2 = 2R^2 = \text{cons.}$$

64.　球半徑一定時則其表面積及體積亦一定.

65.　角柱,圓柱,角錐,圓錐,底面積及高一定時,體積亦一定.

66.　外切於定球之任意四面體其傍半徑之逆數和有定值.

解　O 爲定球中心, r 爲其半徑, $ABCD$ 爲外切四面體

之一，其傍半徑爲 r_1, r_2, r_3, r_4，體積爲 V.

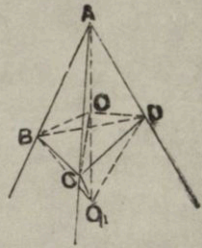


圖 210.

結 OA, OB, OC, OD 則分 $ABCD$ 爲四個四面體，其高俱爲 r，則

$$V=\frac{1}{3}r(ABC+ACD+ADB+BCD)$$

次切 BCD 面之傍切球中心爲 O_1，半徑爲 r_1，則

$$V=\frac{1}{3}r_1(ABC+ACD+ADB-BCD)$$

其餘 r_2, r_3, r_4 亦有同樣之關係.

$$\therefore\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{3V}(ABC+ACD+ADB+BCD)$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{3V}(ABC+ACD+ADB-BCD)$$

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{3V}(ABC-ACD+ADB+BCD)$$

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{3V}(ABC+ACD-ADB+BCD)$$

$$\frac{1}{r_4}=\frac{1}{3V}(-ABC+ACD+ADB+BCD)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}$$

$$=\frac{3}{3V}(ABC+ACD+ADB+BCD)$$

$$=\frac{3}{r}=\text{cons}.$$

67. 直交二定球之各球在中心線上截定長之線分.

解 直交球交中心線之點爲定點.

因二定球之中心各爲諸直交球等方羃之點,故二定球之中心線爲諸直交球中任意二球之根軸.

由是諸直交球同過中心線上二定點卽關於各直交球方羃爲零之點.

68. 過一定點至定球作弦,其兩分所張中心角之半之正切其積有定値.

解 O 爲球心, P 爲定點, AB 爲過 P 之弦.

結 PO 交球面於 C, D.

則 A, B, C, D, P 在一平面

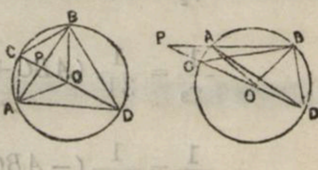


圖 211.

上.

$$\hat{ADC}=\frac{1}{2}\hat{AOP},$$

$$\hat{BDC}=\frac{1}{2}\hat{BOP}$$

而　$$\tan ADC=\frac{CA}{AD},$$

$$\tan BDC=\frac{CB}{BD}$$

∴　$$\tan ADC\tan BDC=\frac{CA}{AD}\cdot\frac{CB}{BD}$$

然　$$\triangle PAC\backsim PBD$$

∴　$$AC:BD=PC:PB$$

又　$$CB:AD=PB:PD$$

∴　$$\tan ADC\tan BDC=\frac{PC}{PD}=\text{cons.}$$

69. 球面上一小圓之極與小圓周之距為定長.

70. 球面三角形三角之和為定值則面積為定大.

71. 過球面上一定點 P 畫任意大圓弧交一定小圓 O 於 A,B 二點,則 $\tan\frac{1}{2}PA\tan\frac{1}{2}PB$ 為定值.

解 弧 AB 之中點為 M. 結大圓弧 OM, OP, OA, OB.

就球面直角三角形 AOM 用第二餘弦定理得

$$\cos PM : \cos PO = 1 : \cos MO = \cos AM : \cos AO$$

$$\therefore \quad (\cos AM - \cos PM) : (\cos AM + \cos PM)$$

$$= (\cos AO - \cos PO) : (\cos AO + \cos PO)$$

即 $$\tan\frac{1}{2}(PM - AM)\cdot\tan\frac{1}{2}(PM + AM)$$

$$= \tan\frac{1}{2}(PO - AO)\cdot\tan\frac{1}{2}(PO + AO) = \text{cons.}$$

72. 一平面 XY 截 $\triangle ABC$ 之三邊,則不相鄰三線分之積與他不相鄰三線分之積有定比.

解 平面 XY 截 $\triangle ABC$ 之三邊於 A', B', C';則 A', B', C' 為共線點. 故本題由 Menelaus 定理認為眞.

73. 一平面截 Ganche 多邊形之各邊,則其不相鄰線分之積與他不相鄰線分之積有定比.

74. 過任意直線及奇數邊 Ganche 多邊形各頂點作平面,分其對邊為二線分,則不鄰接各線分之積與他不鄰接各

線分之積爲定比。

解　任意直線爲 XY，奇數邊 Ganche 多邊形爲 $ABCDE$（本解以五邊爲例）。

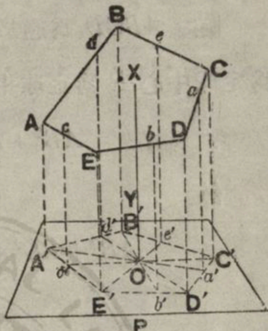


圖 212.

作平面 P 垂直 XY，多邊形 $ABCDE$ 投於 P 之正射影爲 $A'B'C'D'E'$。平面 AXY, BXY, ……投於 P 面之正射影爲同過 O 點之直線 $A'O, B'O$, ……。

橫截線 $A'O$, $B'O$, ……交平面形 $A'B'C'D'E'$ 之各邊於 a', b', ……。則 a', b', …… 乃平面 AXY, BXY, ……交 Ganche 多邊形各邊於 a, b, ……之正射影。

任取一邊 CD 考之：CC', DD', aa' 互平行。故

$$\frac{C'a'}{D'a'}=\frac{Ca}{Da}$$

然由第三章問題 13 得

$$\frac{A'd'\cdot B'e'\cdot C'a'\cdot D'b'\cdot E'c'}{A'c'\cdot E'b'\cdot D'a'\cdot C'e'\cdot B'd'}=1$$

$$\therefore\quad \frac{Ad\cdot Be\cdot Ca\cdot Db\cdot Ec}{Ac\cdot Eb\cdot Da\cdot Ce\cdot Bd}=1=\text{cons.}$$

75. 有截面與球心爲定距,作截口內接四邊形其對角線互垂直,則其各邊之平方和有定値.

解 $ABCD$ 爲適於條件之一四邊形,O' 爲截口中心,O 爲定球中心,R 爲定球半徑,δ 爲截口與球心 O 之定距卽 OO'.

$$\therefore \qquad AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=8O'A^2$$

然 $$O'A^2=R^2-\delta^2$$

$$\therefore \qquad AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=8R^2-8\delta^2=\text{cons.}$$

76. 在定球內有動點 M, 其與球心 O 之距離爲常數 δ, 過 M 引互直交之三弦作內接八面體,則其各稜之平方和有定値.

解 互直交之三弦爲 AA',BB',CC'. 由球心 O 至平面 $AB'A'B$,$BC'B'C$,$CA'C'A$ 之距爲 p,q,r. 由前題得

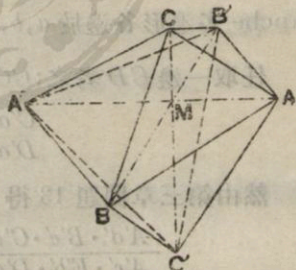


圖 213.

$$AB'^2+B'A'^2+A'B^2+BA^2$$
$$=8R^2-8p^2$$

$$BC'^2+C'B'^2+B'C^2+CB^2=8R^2-8q^2$$

$$CA'^2+A'C'^2+C'A^2+AC^2=8R^2-8r^2$$

R 爲球半徑.

上式左邊之和以 Σ 表之. 則得

$$\Sigma=24R^2-8(p^2+q^2+r^2)$$

但 $$p^2+q^2+r^2=\delta^2$$

$\therefore$ $$\Sigma=24R^2-8\delta^2=\text{cons.}$$

77. 球面三角形 ABC 之各邊爲一大圓弧截於 A', B', C'. 則

1. $〔AB,C'〕〔BC,A'〕〔CA,B'〕=1.$

2. $〔ab,\overline{CC'}〕〔bc,\overline{AA'}〕〔ca,\overline{BB'}〕=1.$

但記號$〔AB,C'〕$ **乃表** $\sin C'A:\sin C'B$.

解 由各頂點至大圓弧 $C'B'A'$ 引垂直弧 p', p'', p'''. 則由直角三角形之性質得:

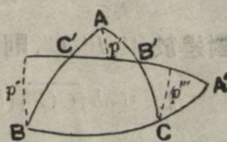


圖 214.

$$〔AB,C'〕=-\frac{\sin p'}{\sin p''}$$

$$〔BC,A'〕=-\frac{\sin p''}{\sin p'''}$$

$$[CA,B']=-\frac{\sin p'''}{\sin p'}$$

$\therefore$ $$[AB,C'][BC,A'][CA,B']=-1$$

次 $$\frac{\sin C'A}{\sin C'B}=\frac{\sin C'CA}{\sin C'CB}:\frac{\sin A}{\sin B}$$

卽 $$[AB,C']=[ba,\overline{CC'}]:\frac{\sin A}{\sin B}$$

同樣 $$[BC,A']=[cb,\overline{AA'}]:\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$[CA,B']=[ac,\overline{BB'}]:\frac{\sin C}{\sin A}$$

$\therefore$ $$[ab,\overline{CC'}][bc,\overline{AA'}][ca,\overline{CC'}]=1$$

78. $\triangle ABC$ **從頂點向球面上任一點** O **畫弧延長之交對邊於**A',B',C'**,則**

1. $[ab,\overline{CC'}][bc,\overline{AA'}][ca,\overline{BB'}]=-1.$

2. $[AB,C'][BC,A'][CA,B']=-1.$

解　分原形爲三個 $\triangle AOB, BOC, COA$. 由前問得:

$$[BA',C][A'A,O][AB,C']=1$$

$[CA', B][CA, B'][AA', O]=1$

$[CB', A][B'B, O][BC, A']=1$

$[AB', C][AB, C'][BB', O]=1$

$[AC', B][C'C, O][CA, B']=1$

$[BC', A][BC, A'][CC', O]=1$

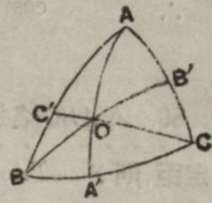


圖 215.

$$\therefore \qquad [CA, B']^2[BC, A']^2[AB, C']^2=1$$

$$\therefore \qquad [CA, B'][BC, A'][AB, C']=\pm 1$$

此三比俱爲負,故符號爲負.

$$\therefore \qquad [CA, B'][BC, A'][AB, C']=-1$$

依前段同樣方法由前題推之可得(2).

79. $\triangle ABC$ 各邊爲象限,T 爲球面上任一點.則

$$\cos^2 TA+\cos^2 TB+\cos^2 TC=1$$

解　$\cos TA=\cos AB\cos TB+\sin AB\sin TB\cos TBA$

$$=\sin TB\cos TBA$$

同理　$\cos TC=\sin TB\cos TBC=\sin TB\sin TBA$

以上兩式平方之,其和爲:

$$\cos^2 TA+\cos^2 TC=\sin^2 TB=1-\cos^2 TB$$

$\therefore \qquad \cos^2 TA+\cos^2 TB+\cos^2 TC=1$

80. $\triangle ABC$ 各邊爲象限弧，T, U 爲球面上任意點，TU 有定距，則 $\Sigma\cos TA\cos UA$ 有定值．

解 $\qquad \cos TU=\cos TA\cos UA+\sin TA\sin UA\cos TAU$

而 $\qquad \cos TAU=\cos(BAU-BAT)$

$$=\cos BAU\cos BAT+\sin BAU\sin BAT$$

$$=\cos BAU\cos BAT+\cos CAU\cos CAT$$

$\therefore \qquad \cos TU=\cos TA\cos UA$

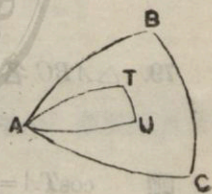
$+\sin TA\sin UA(\cos BAU\cos BAT+\cos CAU\cos CAT)$

而 $\quad \cos TB=\sin TA\cos BAT$

$\cos TC=\sin TA\cos CAT$

$\cos UB=\sin UA\cos BAU$

$\cos UC=\sin UA\cos CAU$



$\therefore \quad \Sigma\cos TA\cos UA=\cos TU$

圖 216.

$$=\text{cons.}$$

民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營隳於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉爲其難因將需用較切各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式事勢所限想荷鑒原謹布下忱統祈 垂鑒

上海商務印書館謹啓

中華民國十七年七月初版
民國廿二年四月印行 國難後第一版

學藝叢書 定量問題一冊 (七九六)

每冊定價大洋玖角
外埠酌加運費匯費

編輯者 中華學藝社 王邦珍

發行兼印刷者 上海河南路 商務印書館

發行所 上海及各埠 商務印書館