中國地理研究所

測量專刊

第二號

(暫行本)

基線網圖形之研究

陳永齡

中國地理研究所大地測量組印行
四川李莊
中華民國三十二年七月

基線網圖形之研究

陳永齡

一 概論

基線網之目的在將基線長度擴展至三角網之一邊，此邊名為擴大邊，乃三角網長度計算之根據，其所需達到之精度極高。按擴大邊長度之精度一方面固與基線測量之精度有關，但同時亦須視基線網圖形之是否強固。是以在大三角測量中，基線網之位置與其圖形之選擇實具有基本之重要性。本文之目的即在研究各種基線網圖形之強度並比較其優劣，以為作業時之參考。

今設基線之長度為b，擴大邊之長度為a，其擴大倍數為e，則

$$e=\frac{a}{b}\quad, \tag{1}$$

e亦稱為邊長運算因數。蓋由基線網角度或方向觀測之結果所推算者即為此因數e。將式(1)微分，得

$$da=e\,db+b\,de$$

或

$$\frac{da}{a}=\frac{db}{b}+\frac{de}{e} \tag{2}$$

按誤差傳播定律，設m_a為擴大邊長度之中誤差，m_b為基線長度之中誤差，m_e為基線網擴大倍數之中誤差，則其關係如次：

$$\frac{m_a^2}{a^2}=\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_e^2}{e^2} \tag{3}$$

由此式可知基線網擴大邊 a 之相對誤差受兩種影响，一為基線長度量測之相對誤差，一為基線網邊長遞綵因数之相對誤差。

基線網邊長遞綵因数之精度又與下列兩種情形有関：一為基線網內角度或方向观測之精度，一為基線網之圖形。前者可用較精密之方法及儀器使其精度增進，但影响擴大邊計綵精度之最重要因素實為後者。倘基線網之圖形選擇不慎，雖用最精密之儀器與方法舉行觀測，亦難期獲得良好之擴大結果。欲求邊長遞綵因数之精度，吾人可按最小二乘法之公式，將邊長遞綵因数列為觀測值之函数，而求其權倒數。

設 l_1, l_2, ----, l_n 為圖形內所观測之方向值，其間共有 r 個條件方程式，

$$a_0+a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_nl_n=0$$
$$b_0+b_1l_1+b_2l_2+\cdots+b_nl_n=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則邊長遞綵因数 e 為此 n 個觀測值 l 之函数，

$$e=F(l_1,l_2,\cdots,l_n)$$

其權倒数 $\frac{1}{P_e}$ 可用下列公式求之：

$$\frac{1}{P_e}=[ff]-\frac{[af]}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf\cdot2]}{[cc\cdot2]}-\cdots \qquad (4)$$

式中之 f 為 e 依 l 之微分係数：

$$f_1=\frac{\partial e}{\partial l_1},\quad f_2=\frac{\partial e}{\partial l_2},\cdots\cdots,\quad f_n=\frac{\partial e}{\partial l_n}.$$

$[aa]$, $[bb\cdot1]$, ……, $[af]$, ……, $[ff]$ 為用高斯法解法方程式之符號。

將 e 之權倒化為中誤差 m_e，即得

$$\frac{m_e}{e}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1}{P_e}}\cdot\frac{m}{\rho},$$

$\frac{m_e}{e}$ 為擴大倍數 e 之相對中誤差，m 為權單位之中誤差，在等權觀測中，亦即每個方向之觀測中誤差（以秒為單位），ρ 為由秒化為弧度之常數。命

$$k=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1}{P_e}}\,. \tag{5}$$

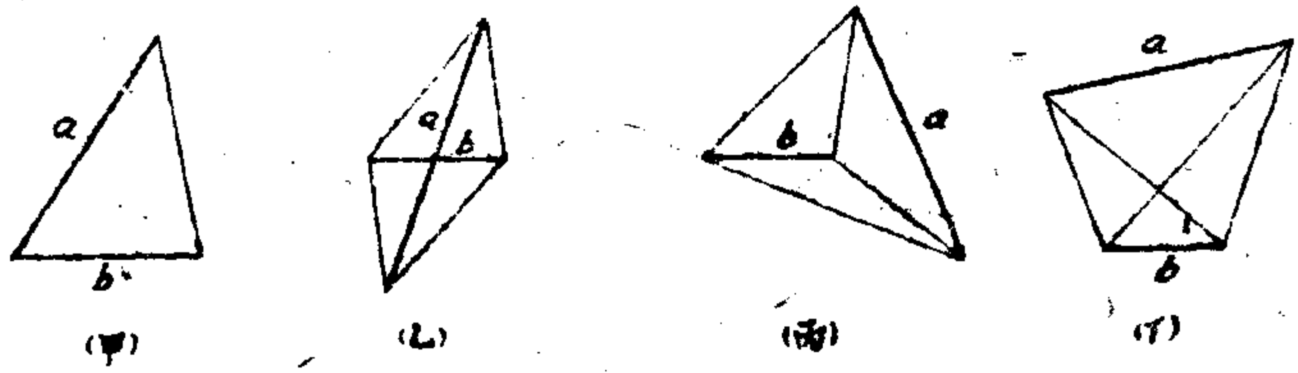
得

$$\frac{m_e}{e}=k\cdot\frac{m}{\rho}\,. \tag{6}$$

上式中 m 代表觀測值之精度，而 k 則純為與基線網圖形有關之因數。故名為圖形強度因數，k 之值愈小，圖形愈強。

二　基線網各種圖形之強度

基線網之構成雖常較普通三角網為複雜，但細加分析，仍不外為下列諸基本圖形之一，或由其組合而成者。（圖㈠）



圖㈠基線網之基本圖形

茲將上列各種基本圖形邊長邊誤同數之權倒數分别計算如後：

(1) 三角形

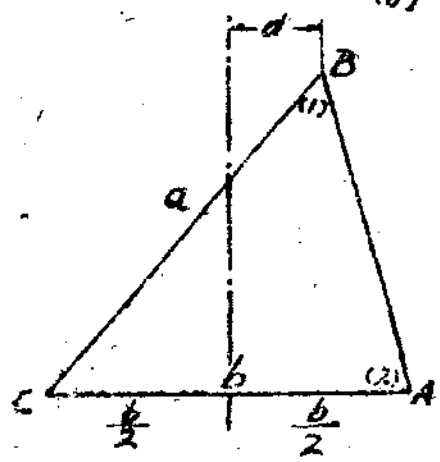
圖(二)示一三角形，b 為基線，a 為擴大邊，由 b 推算 a 邊，須經過(1)(2)兩角，其 $e=\frac{a}{b}$ 之權倒數極易求得，可參攷一般平差法或三角測量之書籍，茲將其結果列下：

$$\frac{1}{P}=\frac{4}{3}e^2(c_1^2+c_1c_2+c_2^2), \qquad (7)$$

式中 c_1，c_2 為圖(二)中所示(1)(2)兩角度之餘切。將(7)代入(5)得

$$k=\sqrt{\frac{4}{3}(c_1^2+c_1c_2+c_2^2)}, \qquad (8)$$

此式對於各種不同三角形之比較尚不適宜，茲將 c_1，c_2 應用 e，b 及圖(二)中之 d 表示之，d 為三角形頂點 B 偏出基線中線外之距離，應用三角及幾何之關係得



圖(二)

$$c_1^2+c_1c_2+c_2^2=\frac{4e^4b^2-2e^2b(b+6d)+(b^2+12d^2)}{4b^2e^2-(b+2d)^2} \qquad (9)$$

命

$$u=\frac{d}{b},$$

式(9)尚可化簡，代入(8)後，可得

$$k=\sqrt{\frac{4}{3}\left\{\frac{4e^4-2e^2(1+6u)+(1+12u^2)}{4e^2-(1+2u)^2}\right\}} \qquad (10)$$

命 e 為 1，2，3，4 諸值，代入上式而求相當於最小 k 值之 u 值，吾人得

$$e=1,\quad k=2\sqrt{\frac{1-2u}{3+2u}}\qquad \text{當}\ u=+0.50\ \text{時},\ k\ \text{為最小值}$$

$$e=2,\quad k=2\sqrt{\frac{19-16u+4u^2}{15-4u-4u^2}}\qquad \text{當}\ u=+0.78\ \text{時}\quad 〃$$

$$e=3,\quad k=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{307-108u+12u^2}{35-4u-4u^2}}\qquad \text{當}\ u=+0.89\ \text{時}\quad 〃 \tag{11}$$

$$e=4,\quad k=2\sqrt{\frac{331-64u+4u^2}{63-4u-4u^2}}\qquad \text{當}\ u=+0.93\ \text{時}\quad 〃$$

由此求得k之最小值如下表：

表(一)　三角形k之最小值

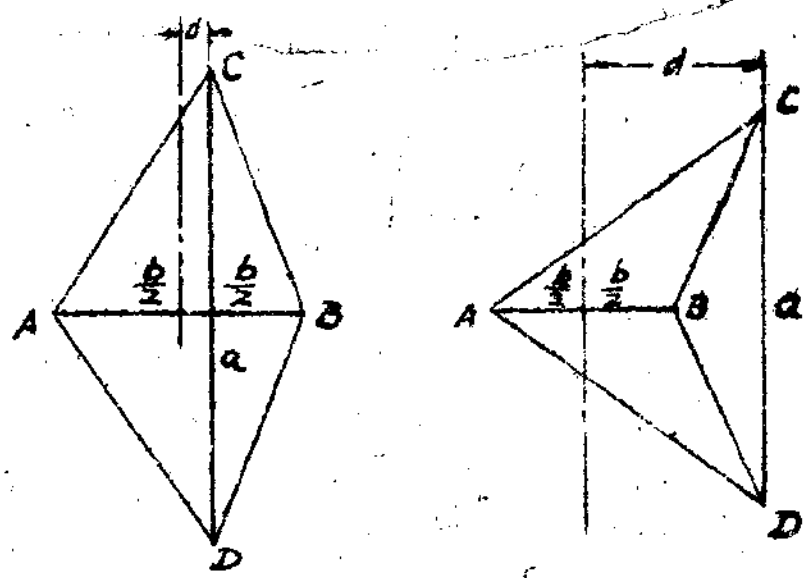
擴大倍數 e	$u=\frac{d}{b}$	k之最小值
$e=1$	+0.50	0
$e=2$	+0.78	1.94
$e=3$	+0.89	3.23
$e=4$	+0.93	4.44

觀表(一)可知，三角形頗不適於擴大基線之用。擴大三倍時，$\frac{m_e}{e}$已為$3.23\frac{m}{\rho}$。設m為$0''.2$，$\rho=206265$，則擴大邊之相對中誤差為$\frac{m_e}{e}=1:320000$。又表中相當於$\frac{m_e}{e}$最小值之u值，自+0.5起漸漸隨擴大倍數而增加，普通如u在+0.50與+1.00之間，$\frac{m_e}{e}$值與表中所列之最小值相差甚微。

(2) 菱形及三邊中點形

菱形及三邊中點形均為四邊形，其惟一之差別為，菱形之長對角線通過於基線兩端點之間，而三邊中點形之長對角線則通過於兩端點之外（見圖(一)或圖(三)）。是以一般而論，可將此兩種圖形歸於一類討論之。

四邊形之平差均包括四個條件方程式，普通為三個角度條件及一邊長條件。凡有邊長條件之圖形均難用式(4)求一普遍之公式，是以此處假定整個圖形與基線對稱，如圖(三)所示。圖中(甲)為一對稱之菱形，



(甲) (乙)

圖（三）

(乙)為一對稱之三邊中點形。兩形中均以 AB 為基線，CD 為擴大邊，二者之分別僅在 d 是否大於 $b/2$；d 小於 $b/2$ 時為菱形，大於 $b/2$ 時為三邊中點形。（d 為自頂點 C 或 D 至基線之平分垂直線之垂直距離

.)

角度條件方程式中之係數均為 $+1$ 或 -1。邊長條件方程式之係數，本為餘切函數，可以 a, b, d 諸值表示之。函數 e 之微分係數 f_1, f_2 ⋯等亦可以 a, b, d 諸值表示之。今們以 e, u 為變數，即

$$e = \frac{a}{b}, \qquad u = \frac{d}{b},$$

然後應用公式 (4) 求 e 之權倒數。各步計算公式甚長，此處不及備載，茲將其結果列下：

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{8}\{e^4 + 2e^2(1+4u^2) + (1+32u^2+16u^4)\} \qquad (12)$$

將此式代入 (5)，即得圖形強度因數之公式，

$$k = \frac{1}{2e}\sqrt{e^4 + 2e^2(1+4u^2) + (1+32u^2+16u^4)} \qquad (13)$$

命 u 為不同之數值，得下列諸式，

$$\left.\begin{array}{ll}
u = 0 & k = \frac{\sqrt{2}}{4e}(e^2+1) \\[2ex]
u = \pm\frac{1}{4} & k = \frac{\sqrt{2}}{16e}\sqrt{16e^4+40e^2+49} \\[2ex]
u = \pm\frac{1}{2} & k = \frac{\sqrt{2}}{4e}\sqrt{e^4+4e^2+10} \\[2ex]
u = \pm\frac{3}{4} & k = \frac{\sqrt{2}}{16e}\sqrt{16e^4+104e^2+385} \\[2ex]
u = \pm 1 & k = \frac{\sqrt{2}}{4e}\sqrt{e^4+10e^2+49}
\end{array}\right\} \qquad (14)$$

根據公式(14)可計算得下表

表(二)

菱形及三邊中點形之圖形強度因數k

e \ u	0	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{3}{4}$	± 1
1	0.71	0.91	1.36	1.99	2.73
2	0.88	0.95	1.15	1.43	1.81
3	1.18	1.22	1.33	1.51	1.75
4	1.50	1.53	1.61	1.73	1.91
5	1.84	1.86	1.92	2.01	2.15

由表(二)中之k值可以看出當$u=0$時，即C, D兩頂點適在基線之中央位置時圖形最為強固，但當擴大倍數e較大時，C, D之位置縱向外偏出甚大，對於圖形強度之影响亦不甚大，換而言之，當基線擴大數較小時，菱形遠較三邊中點形為佳，但基線擴大倍數增高時，菱形雖仍較佳，而與三邊中點形所差並不多。此點頗足為選點者之參考。

關於$\frac{m}{\rho}$之值，通常基線網中每個方向觀測之中誤差m可估計為$0''.2$，故

$$\frac{m}{\rho}=\frac{0.2}{206265}\approx 1:1000000=1\cdot 10^{-6}$$

即約為一百萬分之一。如$u=0$，$e=4$，則由表(二)得$k=1.50$，按式(6)

$$\frac{m_e}{e}=1.50\cdot 10^{-6}=1:670000$$

此外當基線網觀測時，如在 CD 兩測站僅觀測 AB 間之角度，而不測對角線 CD 之方向，其所得之結果與前所求得者相差甚微，此時相當於 (12) 之公式為：

$$\frac{1}{P_e}=\frac{1}{8}\{e^4+2e^2(1+4u^2)+(1+40u^2+16u^4)\} \qquad (15)$$

比較 (12) 與 (15) 兩式，可知其差僅為括弧中之 u^2 一項，對於 $\frac{1}{P_e}$ 之影響極小。當 $u=0$ 時，兩式完全相符。茲將公式 (15) 計算之 k 值列表於下（表(三)）

表 (三)

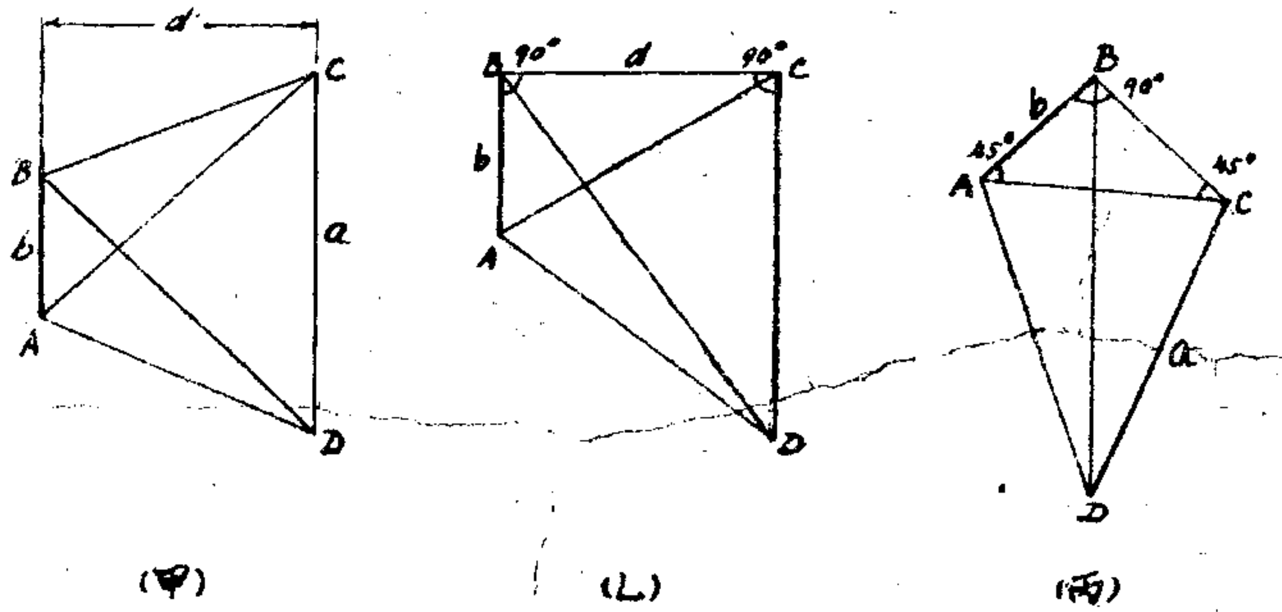
菱形或三邊中點形不測對角線時之 k 值

e \ u	0	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{3}{4}$	± 1
1	0.71	0.94	1.46	2.13	2.92
2	0.88	0.96	1.17	1.48	1.88
3	1.18	1.22	1.34	1.53	1.78
4	1.50	1.53	1.61	1.74	1.92
5	1.84	1.86	1.92	2.02	2.16

比較表(二)與表(三)相當之值，可知觀測對角線是否對於擴大之精度影響極小，但在基線網中如不觀測對角線，不但觀測工作減少，即計算時亦較簡單，此點實值得吾人注意。

(3) 普通四邊形

此處所稱之普通四邊形，乃指以四邊形之一外邊（非對角線）為基線，以其相對之外邊為擴大邊之圖形。為演称方便起見，今假定圖(四)中之(甲)，(乙)(丙)三種不同形式，分別檢討之。



圖(四) 四边形

(A) 圖(四甲)為一與基線之平分中線對稱之圖形，a邊與b邊平行，其間之距離為d，仍命

$$e=\frac{a}{b}, \qquad u=\frac{d}{b},$$

則e之權倒數為

$$\frac{1}{P_E}=\frac{3}{64}\left\{16u^2(e^2+1)+8(e^2-1)^2+\frac{1}{u^2}(e^2-1)^2(e^2+1)\right\}. \qquad (16)$$

將式(16)依u微分，令$\frac{d(\frac{1}{P_E})}{du}=0$，得 $16u^4=(e^2-1)^2$，

式 $$u=\frac{1}{2}\sqrt{e^2-1} \tag{17}$$

由式(17)可計祘相當於最大R之u值。茲命e＝1，2，3，4，5諸值，即得最適宜之距離比數u如下表：

e	1	2	3	4	5
u	0	0.866	1.414	1.936	2.450

茲將u＝0.866，1.000，1.414，1.936，2.450，3.000及擴大倍數e為1，2，3，4，5時之$\frac{1}{R}$值求出，並按公式(5)祘出k值，列於表(四)。

表(四) 四邊形（圖(四甲)）之k值

e \ u	0.866	1.000	1.414	1.936	2.450	3.000
1	1.06	1.23	1.73	2.37	3.00	3.68
2	1.50*	1.52	1.72	2.12	2.56	3.06
3	2.78	2.61	2.45*	2.58	2.87	3.25
4	4.56	4.15	3.53	3.35*	3.46	3.70
5	6.84	6.13	4.92	4.37	4.24*	4.33

*為在該擴大倍數時k之最小值。

比較表(二)與表(五)可知四邊形對於擴大基線遠不如菱形或三邊中點形有利。擴大倍數較小時，如e＝2，即選用最適宜之比例u＝0.866

尚不能與三邊中點形相比擬，如擴大倍數較大，則此圖形完全不能採用。

(B) 圖(四乙)內之 a, b 兩邊亦平行，但 ABC 及 BCD 兩角為直角，$a\ b$ 兩邊之距離為 d. 當 e 等於 $1, 2, 3, 4, 5$ 諸值時，此種圖形之 e 之權倒數公式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
e&=1 & \frac{1}{P_e}&=\frac{3}{2}u^2 \\
e&=2 & \frac{1}{P_e}&=\frac{3}{4u^2}\cdot\frac{40u^8+176u^6+440u^4+360u^2+273}{8u^4+24u^2+57} \\
e&=3 & \frac{1}{P_e}&=\frac{3}{2u^2}\cdot\frac{5u^8+61u^6+290u^4+450u^2+792}{u^4+7u^2+34} \\
e&=4 & \frac{1}{P_e}&=\frac{3}{u^2}\cdot\frac{34u^8+820u^6+6466u^4+13032u^2+42273}{8u^4+104u^2+893} \\
e&=5 & \frac{1}{P_e}&=\frac{1}{2u^2}\cdot\frac{29u^8+1563u^6+18699u^4+43200u^2+225050}{u^4+21u^2+285}
\end{aligned}\right\}\quad(18)
$$

上式內僅含有 u 之偶次項，為計算之方便，命 u^2 為 $0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 6.0$ 諸值，得 K 之值如表(五)所列。

比較表(四)與表(五)，即知當擴大倍數 e 較小時，兩種圖形所差不多；如擴大倍數在三倍以上，圖(四乙)之圖形較優於(四甲)，但與表(二)之菱形比，則相差仍多。

表(五) 四邊形(圖(四乙))之K值

e \ U	0.707	1.000	1.414	2.000	2.449
1	0.87	1.22	1.73	2.45	3.00
2	1.76	1.65	1.81	2.38	2.63
3	3.11	2.52	2.34	2.57	2.88
4	4.47	3.42	2.90	2.91	3.15
5	5.84	4.34	3.47	3.24	3.38

(C) 圖(四丙)之ABC為一45°直角三角形，ACD為一等腰三角形，其擴大倍數e之倒數公式如下，

$$\frac{1}{k_e}=\frac{e^2}{8}\,\frac{(25e^6+50e^4-4e^2+36)+\sqrt{2e^2-1}\,(15e^4+2e^2-25)}{(5e^4+2e^2-1)+2e^2\sqrt{2e^2-1}} \qquad (19)$$

由此得k之值如下：

表(六) 四邊形(圖(四丙))之k值

e	1	2	3	4	5
k	1.22	1.86	2.62	3.39	4.16

將此表之值與表(四)表(五)相比，可見圖形(丙)當擴大倍數較低時不如圖形(甲)，當擴大倍數較高時又較(乙)略遜，實介於二者之間。

不規則四邊形所可取之形狀自不能盡以上列三例完全代表之，[illegible]種，擬[illegible]選較為[illegible]大之[illegible]中有[illegible]

個直角，(丙) 中有一個直角，而其他角度亦不太小，故吾人已可由此推斷四邊形對於擴大基線精度之一般情形。

三、各種圖形之比較

由以上所得之結果，對各種圖形之優劣已可得一比較。吾人首應注意者，即上列各表中均包括擴大倍數由 1 至 5 時之中誤差，實際上如須擴大之倍數較大時，不宜直接用一次擴大，而應將其分為兩次或三次。蓋擴大多次時，擴大邊之精度為各次擴大因數相對中誤差之平方和，即

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2=\left(\frac{m_{e_1}}{e_1}\right)^2+\left(\frac{m_{e_2}}{e_2}\right)^2+\cdots, \qquad (20)$$

一般而論較用一次直接擴大為有利。試舉正菱形之例以說明之：當擴大二倍時，

$$\frac{m_e}{e}=0.88\frac{m}{\rho},$$

如連續擴大二次，即 a 為 b 之四倍，則擴大邊之相對中誤差為

$$\frac{m_a}{a}=\sqrt{2}\cdot 0.88\frac{m}{\rho}=1.24\frac{m}{\rho};$$

倘一次擴大四倍，由表(二)中得

$$\frac{m_a}{a}=1.50\frac{m}{\rho},$$

較分兩次擴大之相對中誤差為大。但除此之外，實際應用時尚須考慮

測工作之多寡。分兩次擴大時，觀測工作雖多一倍，故擴大次數亦不宜於過多。一般之習慣每次擴大倍數以在三倍以下為最適宜，遇較為不利之圖形，應減至二倍左右。

以每次擴大二倍至三倍為原則而比較各圖形之優劣，吾人可排成下列次序：最優者為菱形，其次為三邊中點形，再次為四邊形，三角形則僅用於擴大倍數在二倍以下時。菱形為基線網最適宜之圖形，在歐洲各國最早之三角測量中已經發現，但美國至今仍有採用四边形為基線擴大網者，其故蓋由於彼等所用以判斷圖形強弱之公式並非嚴格的，應用於四邊形時，往往得錯誤之結果。關於此點，作者擬另為文檢討，茲不贅述。本文下節將述一簡單判斷基線網圖形強弱之方法，对於測量者或可有若干助益也。

又由表(三)與表(二)之比較，可知菱形之对角線觀測與否對於精度影响極為有限，而不觀測對角線時，節省邊長條件，計算工作可減省不少，此點亦為實際工作時所應注意者。

四 菱形及三邊中點形擴大倍數誤差之計算

以上為公式導演之方便計，吾人假定之菱形及三邊中點形均與基線對稱，而實際所遇之圖形則未必均為對稱者。但由於以上所得之結果，已可斷言基線擴大之倍數之中誤差與擴大倍數及頂點偏出基線之平分垂直線外距離有關，故吾人可用本文所得之公式及表(二)之值繪出曲線如圖(五)。實際應用時，可先量出一個圖形之擴大倍數 e 以及上下兩頂點偏出基線中線之距離 d_1 及 d_2，取 d_1 與 d_2 之中數 d 與 e 相配，即

可由圖中查出k值。此k雖非嚴格之值，但與嚴格值差甚少，茲舉

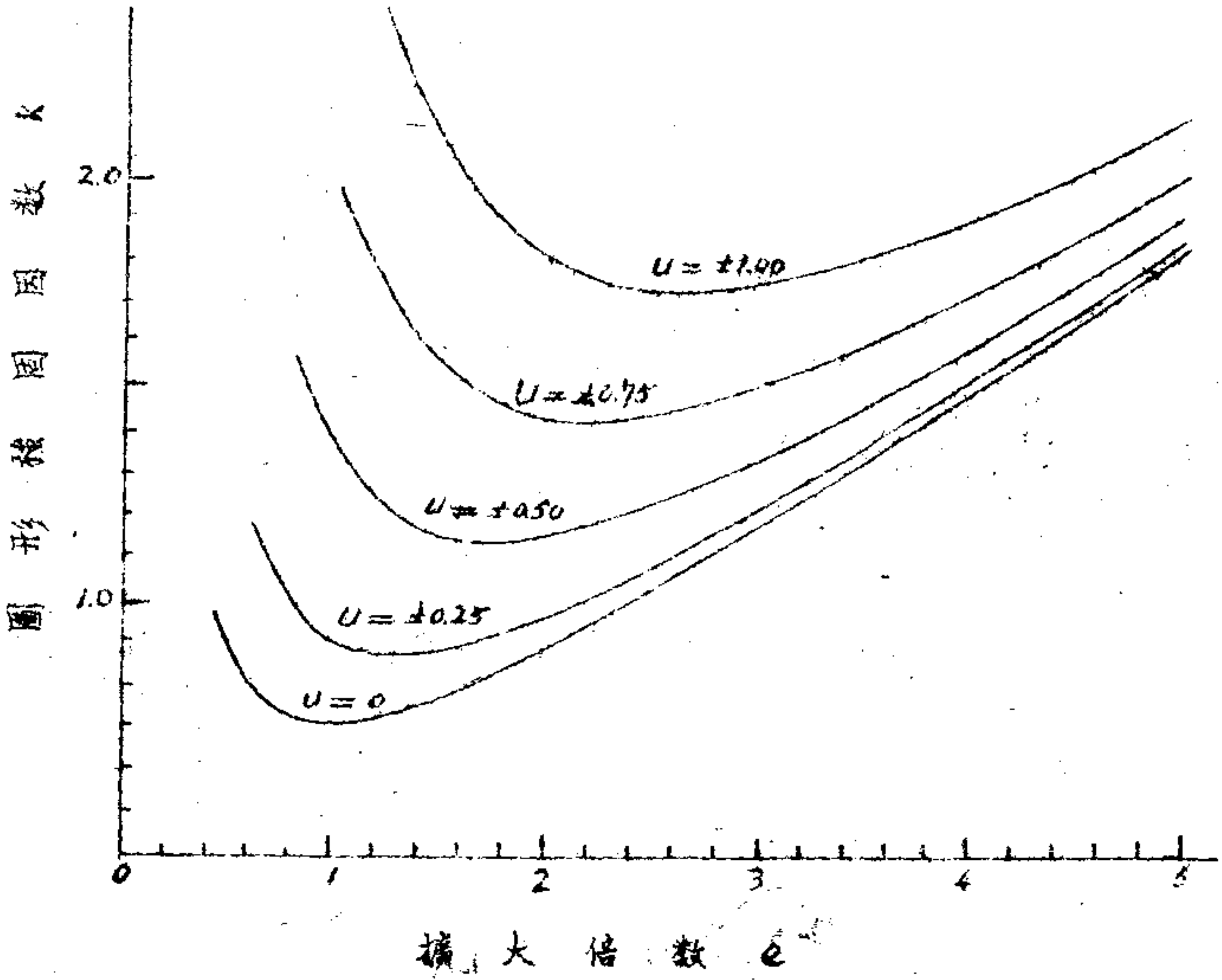


圖 (五)

兩例如下以明之，

圖(六)為一菱形，由圖量得

$$b = 42\ mm,\quad a = 131\ mm,\quad d_1 = 8\ mm,\quad d_2 = 12\ mm.$$

故

$$e = \frac{131}{42} = 3.12,\qquad u = \frac{\frac{1}{2}(8+12)}{42} = 0.238.$$

由圖(五)中插求，得 $K = 1.25$

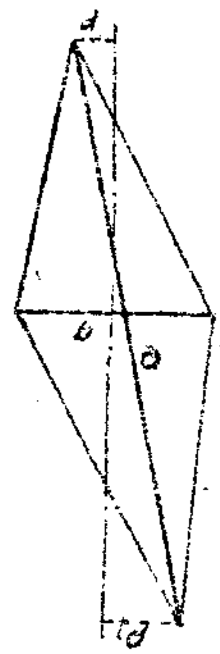


圖 (六)

如用逐差法驗格計标，吾人得 $K = 1.24$ 殆與上值完全符合。

今再舉一毫不對稱之三邊中點形如圖(七)為例，由圖中量得

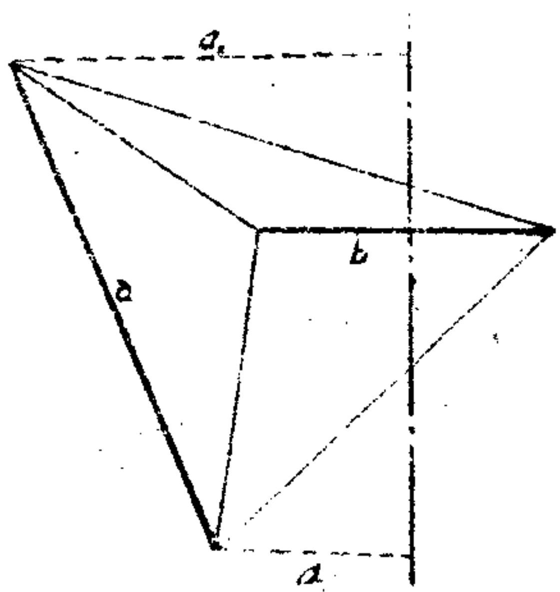


圖 (七)

$$b=66^{mm},\quad a=117.4^{mm}\quad d_1=418^{mm},\quad d_2=88.5^{mm}$$

故

$$\epsilon=\frac{117.4}{66}=1.78\qquad u=\frac{65.2}{66}=0.99$$

由圖(五)中得　　　$k=1.90$

倘用平差法嚴格計算　得 $K=1.99$，相差亦極微也。

由以上兩例可證明應用圖(五)以求菱形及三邊中點形之圖形強度可得極近似之結果，對於實際應用亦極簡便。吾人亦可應用同樣方法，製成四邊形圖形強度因數之曲線，惟四邊形對於基線擴大網之價值過低，通常不宜採用，故本文對此從略。