經濟統計研究所

叢書之二

統計學續編

褚一飛編著

立信會計圖書用品社發行

中華經濟統計研究所

叢書之二

統計學續編

褚一飛編著

立信會計圖書用品社發行

卷頭語

邇來吾國統計學教科書已有不少佳著出版，故於任教時雖常有同學以余所授頗多爲各書所未及，屢請將講稿付印，然竊意終覺無此必要。蓋憑個人經驗，認爲筆記講授方法較有效益。但自抗戰以還，統計功用日益顯著，統計教育日見發達，兼以青年學子萃集後方，各校學生倍增，程度參差不一，遂使專憑筆記講授漸感困難。蓋整理筆記既需充分時間，且須有相當書籍以供參考。顧戰時學生課外活動較多，時間頗感缺乏，參考書籍亦因交通關係而殊感稀少，故各校同學皆紛紛要求編印講義，竟使余不得不勉爲其難。奈事實上因同時兼任中央政治學校重慶大學復旦大學華西工商專科學校四校課務，每週往來於南溫泉沙坪壩北碚江北之間，竟毫無餘暇從事寫作。今春適聞劉坤闓俞壽榮兩同志於軍需學校及中央政治學校普通科講授統計學時，曾編有講稿數章，因即商得劉俞兩君同意將該項講稿稍加補充，完成本書，以應目前迫切之需要。全書凡十二章，分訂上下兩冊。劉君撰寫上冊第一章緒論，第二章統計資料之搜集與整理 第三章表列法

，第四章圖示法，第五章平均數，第六章相差度，第七章偏斜度與峯度，第八章確度。俞君撰寫上冊第九章比例，第十章指數，下冊第五章時間數列之分析，第十章抽樣概論。余草擬下冊第一章機率，第二章相關度，第三章相關函數，第四章偏相關與複相關，第六章相變度，第七章插補法、第八章配合概論，第九章常態曲線與常態曲面，以及附錄各節。全書於短短數月內完成，掛漏之處，自所難免，尚望海內賢達不吝指教，俾再版時得以改正，幸甚幸甚！

又戰時印刷困難異常，此次承文化建設印刷公司諸位先生極力協助，始克儘速出版，並承內子郁韻琦女士親任抄寫，雖夏日炎炎，空襲頻傳，而工作迄未間斷，此皆所應感謝焉。

柔寫於四川萬縣

三十二年暑期

陳　　序

近世科學發達，自然科學藉實驗方法以求眞理，社會科學則以人類社會爲對象，殊未能置諸實驗室中硏求其因果變化關係，爲明瞭事物眞象起見，不得不注重數字之分析，於是統計學尙焉。

吾國科學落後，國人對於數字觀念尤爲忽視，影響學術硏究與政治設施，良非淺尠。中央政治學校有鑑於此，特於大學部第一期首創統計組，從事統學計術之硏究，造就統計專才，冀有助於學術探討與政治建設，而爲社會及各大學倡。褚君一飛，曩負笈法國巴黎大學統計學院，造詣甚深，回國後爲之主持，迄今十有餘載，志趣益堅，未嘗言勞，其教學不倦，孜孜兀兀，十數年如一日之精神，至可佩也。茲褚君以講學所用之講義，並得其弟子劉坤閩俞壽榮兩同志之助，輯爲是書，發刊問世，其有助於斯學之昌明，蓋可斷言，豈如褚君卷頭所言，僅以應各校同學之要求而已。因喜而爲之序。

陳果夫　三十三年十一月

鄒　　評

近二十年來，歐美統計學術突飛猛晉，其應用範圍，亦日趨廣泛。因此統計書籍之出版，正如雨後春筍，其中理論正確取材新穎者固多，而理論錯誤方法陳舊者亦復不少。至以吾國出版之統計書籍，十餘年來亦有數十種之多，其中善本雖亦不少，惟抗戰以來，一般書籍皆感缺乏，統計書籍自亦不能例外。如以各校對于統計教本與參考書之需要論，或較其他各科書籍更感缺乏。於是亦有將戰前出版之統計書籍，在後方重印者。但以時代變遷，材料內容與印刷紙張皆感滿意者，確屬太少。此外，亦有翻印外文統計名著作為教本者，則對于一般外文程度較差之學子，實有隔靴搔癢之感。今中央政治學校經濟系統計組教授褚君一飛劉君坤閩俞君壽榮等積十餘載之統計教育經驗，編著「統計學」出而問世，全書洋洋四十餘萬言，共計八百九十餘頁，分正編與續編兩冊，由立信會計圖書用品社出版印行，非特內容豐富，且印刷紙張，亦極精美，可稱吾國統計學術界之巨著。按歐美一般統計學內容之編著，約可分為兩類：第一類範圍較狹，內

容完全偏重于純粹的統計方法，即將內容分為兩個部份：第一部份敘述搜集整理與陳列統計資料的方法，第二部份敘述統計資料的分析。此類書籍甚多，例如 Mills: Statistical Method 與 Jones: A First Course of Statistics 等皆是也。第二類之內容範圍較廣，除包括第一類所述之材料外，更將統計應用數學方面的插補法與各種曲線配合問題，亦包括在內。此類範圍較廣泛之統計學教本，對于初習者之參攷與翻閱甚感便利，歐美統計名著如 Yule: Introduction to the Theory of Statistics Bowley: Elements of Statistics 以及 Rietz: Handbook of Mathematical Statistics 等皆屬於是類。今褚君等著本題亦屬于此類。例如該書續編中第七章與第八章完全敘述插補法與曲線配合等問題，即其明證。至以全書的一般情形論之，則非特文字簡明，且材料節目亦甚緊湊。此外，對於理論之敘述與公式之證解，尤多推陳出新之處。至以各章分別論之，則正編中指數論一章，尤為提要鈎玄，法詳理舉；其次，續編中相關論一章，盡取歐洲大陸與英美兩統計學派之精華，稱其為全書中最精采之一章，亦不為過。如以是書配合我國一般大學之學制與教本論：則以正

編爲一般學系，例如商學院統計會計保險等系法學院之經濟社會等系之統計學教本或主要參攷書，最爲相宜。

續編內容比較深奧，需用數學之處亦多，故如爲前述各系高級統計學程之主要參攷書，亦甚適當。惟是書所附註原文，在正編爲英文 續編爲法文，爲求統一與便利初學者參攷起見，望編著者于再版時有將原文一律改爲英文之必要。此外，由於排印困難所致符號與字句之差誤，亦有加以校正之需要。總之，當此抗戰後期，物質艱難，學術停滯之際，有此一純粹學術性的統計巨著出而問世，洵屬難能而可貴。爰贅數言，以作評語。

國立中央大學經濟系統計教授鄒依仁評

統計學概論續編目錄

第一章　機率　1—40頁

第一節　機遇數學與偶然觀念：(1)至(7)

第二節　總和機率：(8)至(14)

第三節　積和機率：(15)至(18)

第四節　總和機率與積合機率之混合定理

第二章　簡單相關　41—85頁

第一節　導言

第二節　相關度

第三節　數量統計與數量統計之相關

第四節　數量統計與質量統計之相關

第五節　質量統計與質量統計之相關

第三章　相關函數　86—111頁

第一節　導言

第二節　直線相關

第三節　直線相關示例

第四節　曲線相關

第四章　偏相關與複相關　112—127頁

第一節　導言

第二節　偏相關

第三節　複相關

第五章　時間數列之分析　128—174頁

第一節　總述

第二節　長期趨勢之測定方法

第三節　季節變動之測定方法

第四節　循環變動之測定方法

第六章　相變度　175—　頁

第一節　導言

第二節　關連指數與關連係數

第三節　J字係數及K字係數

第四節　相差變化與趨向變化

第五節　相變係數

第六節　相變度之分析

第七節　可測變化數之相變度原理
第八節　不測變化數之相變度原理
第九節　各種相變係數之批評

第七章　插補法　頁

第一節　插補法的意義及其用途
第二節　插補法之種類
第三節　簡易插補法
第四節　相差計算法
第五節　代數函數插補法
第六節　相差商
第七節　拉蔣郎氏插補公式
第八節　其他插補公式

第八章　配合概論

第一節　配合之意義
第二節　配合之功用
第三節　重複試驗之機率函數
第四節　總抽試驗之機率函數

第五節 次數數列之配合

第六節 普通統計數列之配合

第九章 常態曲線與常態曲面

第一節 常態曲線之意義

第二節 常態機率法則之由來

第三節 常態曲線之配合

第四節 兩個變數之常態曲面

章十章 抽樣概論

第一節 概論

第二節 抽樣之種類及其徵性

第三節 實地隨機抽樣之方法

第四節 樣本之動差與原始全體之動差之關係

第五節 抽樣可靠性之測定

附錄一 次數分配與表徵函數

附錄二 堤犁嘘雷積分與傅利歐交互公式

附錄三 華里斯公式與施端霖公式

附錄四 尤勒積分

附錄五　費雪氏克方測驗機率表

附錄六　常態曲線之面積及縱距表

附錄七　常態曲線之縱坐標

統計學續編

第一章　機率

(1)機遇數學與偶然觀念

宇宙間一切現象，悉有其因果之規律，非決定於「盲目之神靈」或「偶然」之意志者。此爲必然觀念之中心思想，亦即科學發達之主要原則。迄時至今日，科學雖有長足之進步，然人類間終不免有不可預測之事實，而此種事實猶非科學所得解決者。例如胎兒性別問題，其間雖僅有或男或女之差異，似甚簡單，然今吾人尚無法以預言其性別之所屬。蓋性別之原因，非常繁複，分析既難盡致，而欲明其因果，更屬不易，於是即歸諸「偶然」之一說。據此，則「偶然」性觀念，不過基於人類智力有限，不足以尋求其因果之法則耳，非宇宙間眞有逃乎必然原則之現象。此概爲十九世紀時代於機遇數學最有貢獻之法國學者 Laplace 氏對於「偶然性」所持之見解。然今亦有異於此者，依今之新見解，則謂宇宙間一切現象表面上雖似有一定之規律，然追溯其源，在在

均受「偶然」之支配，蓋其表面上之規律性，（吾人之因果觀念即基於此），皆不過由於吾人五官之粗陋而假覺其表現程序有一定之規律。例如銀幕上之表現，雖片片緊接還有少隙之間斷，然以吾人之肉眼視之，却似連續無斷，此無他，其惟吾人之視官具有蓄光之作用，遂不見其間斷。類此之連續性，固非由于影片之真能連續無斷，祗爲吾人視官之蓄光作用所造成。再如氣體之物理法則，固非原子之運動軌跡與速率具有一定之法則，良由吾人五官之粗陋，不能見其原子之無規則（或受偶然）所支配之運動，但見其平均現象而假覺有一種規律耳。雖然，「偶然」兩字之哲學見解，固不盡同，然吾人所認爲「偶然」之事實，殆時時而習見者，故偶然之觀念，自可就吾人直覺之能力以明之；至「偶然」之真實存在問題，乃一哲學問題，迥非吾人所願深討，且待哲學家之解決可也。至機遇數學之哲學基礎，固當隨「偶然」問題之決定而得其最後之解決，然於科學之立場上，則機遇數學亦不過爲吾人思想之產物，其有無價值，則當視其能否應用以解釋吾人所認爲偶然現象者爲斷；是猶幾何學之有無價值，亦全憑其能否適合於應

用者為證，固無論世間確有「無長無闊無高」之幾何點否；同理，於機遇數學，亦不必孜孜求「偶然」現象之究竟有無，但假定其有「合於機遇邏輯之偶然性」，斯得矣

（2）機遇數學之目的

科學之進步，每漸由質量之研究，進於數量之研究（1

今就研究「偶然性」而論，亦當首先研究偶然現象可能性之大小，再進而用數量以確示其可能程度，然後施以數學之計算，機遇數學之目的，即在於茲。

（3）偶然性之數量問題

用數目以表示「偶然性」之大小並欲施以數學之計算，則須首先證明其有合於邏輯之兩大原則，其一為「相等原則」（Principe d'egalite），其二為「相加原則」（Principe d-addition），若失其一，即不得謂為「可以數量」（Grandeur mesurable）。例若兩體之堅強性（Durete），雖人人能辨其硬軟，固適合於「相等原則」，然不合於「相加原則」，故「堅強性」終不過為物體之質量，尚非「可以數量之度量」（註一）。至偶然性

之能否適合此兩大原則，可舉例以明之。設有甲乙兩人，各購某項獎劵拾張，設若各張獎劵之中獎機運相等，則甲乙兩人之中獎機運亦相等，故偶然性實合於第一原則。又若甲之獎劵數目倍於乙，則甲之中獎機運自亦倍之，是偶然性亦合於第二原則。故「偶然性」爲一「可以數量之度量」而亦得施以數學計算矣。

註一： 有謂「凡科學皆能以數量者，」。（Le Dantec:Toute Science estmesurable）則又未免過形嚴格矣。

註二： 近雖有種種間接方法，亦可以數量表示其堅強性，然量得之結果，每因器具之不同而各異，故此類數量方法，尚欠科學之意義。

（4）機率之定義問題

偶然性之普通名詞，稱爲機運。今於機遇數學中，特名之曰「機率」。（亦有名爲機遇率，或是率，槪率，或然性，或然度，可能度等等名詞）。顧機率之定義，殊不一致，蓋因學者對於偶然性之觀念旣有不同，故所

取之定義遂亦相異。今日有抽象的，實驗的，數學的種種定義，利弊互見，令人莫知適從。茲以避免高深數理起見，試取其最通用之定義如下：

定義：某偶然事件(e'venement fortuit)之機率，(Probabilite,)等於「該事件所能出現之格數」(Nombre decasfavorables。亦可直譯爲適稱於該事件之格數)與各種事件所能出現之總共格數 (Nombre total descas Possibles 亦可直譯爲可能格數之總數)之比率，凡此格數：其機運均等。

亦可簡言之如次：

定義：機率等於其『可能格數』除其「適稱格數」之商。

若以 P=機率

N=同樣可能之格數

n=適稱於該偶然事件之格數

則即可得下列定義公式：

$$(1) \qquad p=\frac{n}{N}$$

然n必小於N，蓋「適稱格數」必並含於「可能格數之總數」之內，故P之數值必小於一。又n與N既均為正數，故P亦必為於正數，因可得下列不等式：

(2)　　$0 \leq P \leq 1$

對於本定義之批評，常有下列之論調，有謂依此定義以計算機率，須先確知其N個可能格數之機運均等；然欲知此N個可能格數之機運是否相等，又須問其機率是否相等；然則既以「同樣可能性」以確定其「機率」，復以「機率」再確定其「同樣可能性」，豈非入於「魔圈圈套」(Cercle vicieux)乎？欲解此疑難，須知在此定義中，所謂同樣可能格數”，乃一種「先天之假設」(hypothese a priori)〔或名「設準」(Postulat)〕，非有待於計算而後知。例如在骰戲之中，骰有六面，以1,2,3,4,5,6,之點數各別之。今「各點之機運均等」一語，乃不過吾人設此假說而已，既非計算之結果，亦不問世間之骰子果與吾人之假說相合與否，所宜注意者，惟於應用機遇計算之際，須慎審診「先天之假設」或「設定」是否與事實相近，俾免所得結果流於乖誤耳

(5) 機運均等問題

在機遇計算之應用中，尤宜注意及各種不同花樣之可能性是否相等。例以三骰擲戲，甲乙兩人戲之，其點數之和，可超過或不及於拾點之數，超於拾則甲勝，否則乙勝，故名「超拾遊戲」(jeu depasse dix)；此項遊戲，十七世紀時甚盛行於歐洲，其時或有問於意大利學者 Galile'e 氏曰："拾點與玖點之不同花樣各有六種：

$$\left.\begin{array}{l}1+2+6\\1+3+5\\1+4+4\\2+2+5\\2+3+4\\3+3+3\end{array}\right\}9 \qquad \left.\begin{array}{l}1+3+6\\2+4+5\\2+2+6\\2+3+5\\2+4+4\\3+3+4\end{array}\right\}10$$

但據其個人之經驗，却敗於拾點之次數多，而敗於玖點之次數少，其故安在？"Galile'e即答之曰："此係機率之不同耳，其機率不同之原因，蓋玖點與拾點之不同花樣雖各有六種，然每種花樣之可能性却不盡同。

例若$3+3+3=9$之機率爲

$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$，而$3+3+4=10$之機率却爲$\frac{3}{216}$。彼且證明玖點之機率爲$\frac{25}{216}$，拾點之機率爲$\frac{27}{216}$：

$(1+2+6=9)$之機率$=6\times\frac{1}{216}$

$(1+3+5=9)$之機率$=6\times\frac{1}{216}$

$(1+4+4=9)$之機率$=3\times\frac{1}{216}$

$(2+2+5=9)$之機率$=9\times\frac{1}{216}$

$(2+3+4=9)$之機率$=6\times\frac{1}{216}$

$(3+3+3=9)$之機率$=1\times\frac{1}{216}$

玖點之機率$=25\times\frac{1}{216}$

$(1+3+6=10)$之機率$=6\times\frac{1}{216}$

$(1+4+5=10)$之機率$=6\times\frac{1}{216}$

$(2+2+6=10)$之機率$=3\times\frac{1}{216}$

$(2+3+5=10)$之機率$=6\times\frac{1}{216}$

$(2+4+4=10)$之機率$=3\times\frac{1}{216}$

$$(3+3+4=10)\text{之機率}=3\times\frac{1}{216}$$

$$\text{拾點之機率}=27\times\frac{1}{216}$$

故在機遇數學歷史上，有稱Galile'e氏爲該學之先進(Pre.curseur)

(6)逆機率

定義：在N個可能格數內，除其n個適合於某種偶然事件A者外，復有N-n個爲不適合者，故該偶然事件A不致發生之機率當爲：

$$(3)\qquad q=\frac{N-n}{N}=1-p$$

該"非A之機率"，即名曰"A之逆機率"，亦名該偶然事件A之"相反機率"(Probabilit'e Contraire)。又因偶然事件A之機率p與其相反機率p之和等於一，故亦有稱此兩正反機率之一爲其他機率之"補充機率"(Probabilit'e Complementaire)。於機遇計算中，若知其一，即易得其他，是若遇有正機率不便於直接計算之時，可由逆機率間接計算之。例：設有甲乙丙三人，其年齡各

爲x,y,z.試問三人中至少有一人能再活n年之機率爲若干？今若直接求其正機率，則甚複雜，故首當分析其各可能情形，計有：

(1)甲乙丙三人均能再活n年

(2)惟甲乙二人再活n年

(3)惟甲丙二人再活n年

(4)惟乙丙二人再活n年

(5)惟甲能再活n年

(6)惟乙能再活n年

(7)惟丙能再活n年

設使 p_x^n，p_y^n，p_z^n 各爲甲乙丙三人再活n年之機率，

$1-p_x^n=q_x^n$，$1-p_y^n=q_y^n$，$1-p_z^n=q_z^n$ 各爲甲乙丙三人不能再活n年之機率，

則在上述七種情形之下，其機率各當爲；

$$(1)\quad p_x^n\,p_y^n\,p_z^n=p_{xyz}^n=(1-q_x^n)(1-q_y^n)(1-q_z^n)$$

$$=1+\Sigma q_{xy}^n-q_{xyz}^n$$

(2) $$q_z^n\, p_{xy}^n = (1-q_x^n)(1-q_y^n)q_z^n$$

$$= q_z^n - q_{zx}^n - q_{zy}^n + q_{xyz}^n$$

(3) $$q_y^n\, p_{xz}^n = (1-q_x^n)q_y^n(1-q_z^n)$$

$$= q_y^n - q_{yx}^n - q_{yz}^n + q_{xyz}^n$$

(4) $$q_x^n\, p_{yz}^n = q_x^n(1-q_y^n)(1-q_z^n)$$

$$= q_x^n - q_{xy}^n - q_{xz}^n + q_{xyz}^n$$

(5) $$p_x^n\, q_{yz}^n = (1-q_x^n)q_{yz}^n$$

$$= q_{yz}^n - q_{xyz}^n$$

(6) $$p_y^n\, q_{zx}^n = (1-q_y^n)q_{zx}^n$$

$$= q_{zx}^n - q_{xyz}^n$$

(7) $$p_z^n\, q_{xy}^u = (1-q_z^n)q_{xy}^n$$

$$= q_{xy}^n - q_{xyz}^n$$

以上各種情形之機率總和＝所求之機率

$$= 1 - q_{xyz}^{n}$$

然此答案若由逆機率間接計算之，則便利多矣。蓋吾人所求機率之逆機率爲甲乙丙三人無一能再活n年之機率，卽欲於n年後甲乙丙三人均已逝世之機率，則此逆機率可不費思索而知其爲 q_{xyz}^{n} ，故其補充機率 $1- q_{xyz}^{n}$ 卽爲吾人所求之正機率。

(7)符號之說明

前論及機率之定義時，吾人嘗謂計算機率之初，須預設一先天之假說，〔或名"設準(其根據或由於過去之經驗或由於理智之決斷)〕例若計算骰散中之各種機率，須預先假定某一骰子之六種點數有平等之可能性，他若吾人預知骰子之六面均標以四紅點之記號，則四點之機率等於一，而其餘點數之機率盡等於零，在此情形之下，偶然現象竟一變而爲必然現象矣； 又例若問年x 歲之某甲其死亡率若干一問題，於機遇數學方面言之，殊

欠確切之意義，蓋解答此問題之先，須預知其國籍何屬，始能按該國之人口統計以得其死亡率q_x；然若更知其性別何屬，則其死亡率將變爲q'_x；若更知其職業何屬，則其死亡率將變爲q''_x；然此q q'q'' 之數值，普通爲不相等之數值，故機率之數值，實隨吾人所預知之程度而有所變更。茲爲提明此點起見，特用新符號如下：

設以 h 表示有關於偶然現象之環境而爲吾人所預知者

a 表示偶然現象發生之事實

a／h表示偶然現象a在環境h時之機率

例：h＝骰子之六點其可能性均等

a＝骰子之點數爲一雙數

a｜h＝擲一雙點之機率（既知其所擲之骰子爲一"完全對稱"者）

因既知所擲之骰子爲一"完全對稱"者，因而知各點之機率均爲六分之一，而後始得其雙點之機率等於$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(8)總和機率

在一偶然現象中，常能發生A,B,C…………L等各種不同之結果，求A B之總和機率(Probabilitetotale)言者(註三)即欲求A或B之機率。例若骰子之點數可爲1,2,3,4,5,6,六種，今求三點與五點之總和機率，即欲求或三或五之機率。

若以　a＝骰子之點數爲三

　　　b＝骰子之點數爲五

今若以　a＋b＝骰子之點數或三或五

則或三或五之機率即可用下式表之：

(a＋b)|h＝或a或b之機率

註三：　總和機率亦有名爲「完全概率」(見中央大學周君適先生概算大綱講義第20頁)，惟其定理之原文爲「設某事可於種種不相關連之狀態中出現」，則其出現之機率，等於其在各種狀態中出現之概率之和」該定理內之「不相關連」四字，未知作何解法？倘與法文之"indepen dants entre eux" 相對照，則即似誤矣。倘與 's'excluentmutuellement 相對照，則「不相關

連」之譯義，似欠切合。

(9)積合機率

求兩種偶然現象A B之積合機率(Probabilite Composee)言者(四)，乃欲求又屬 A 又屬 B之機率。

例以　c＝骰之點數爲雙數

　　　d＝骰之點數爲三之倍數

今若以　cd＝又屬於c又屬於d之命題

則其欲骰子之點數既爲雙數，而復爲三之倍數之機率，即可用下式表之：

cd|h＝又屬於c又屬於d之機率

註四：　亦名「配合概率」(見中大周君適先生概算大綱講義第21頁)或「聯合事象起生之或是率」(見中央大學陸志鴻先生最小二乘方法講義第7頁)者。

(10)機率計算法之基本定理

機率之計算法，可依其定義公式直接計算之，亦可由其逆機率計算之，然按諸實際，其能由此兩種方法計算而不苦於繁複者，殊屬有限，今吾人所欲論述之基本

定理，即所以補其不足，且初等機遇數學之大部分習題，概可依據該兩定理以計算其機率，故特名之曰「基本定理」(Theoremes fondamentaux) 亦名「基本原則」(Principes fondamentaux) 基本定理凡二；一名「總和機率定理」(Theoreme de probpbil te totate)，亦名「加法定理」：(Theoreme d'addition)一名「積合機率定理」(Theoreme de probabilite Composee)，亦名「乘法定理」(Theoreme de multiplication)。試依次述之如下：

(11)總和機率定理

設若某偶然現象能發生$E_1E_2E_3$，……………Ek k種不同之結果，其中亦有能同時發生者，例若

偶然現象E＝在一副五十二張之撲克牌中任抽一張

E_1＝抽得一張As

E_2＝抽得一張紅色紙牌

則抽一張紅雞心或紅方塊之 As 時，即E_1E_2同時發生之現象，今若祇就E_1E_2兩偶然現象而論，則祇有四種不同之結果：(1)E_1與E_2同時發現；(2)是E_1而非E_2；

(3)是E_2而非E_3；(4)非E_1亦非E_2。今設以

a＝發生E_1之命題

a＝不發生E_1之命題

a/h＝E_1之機率

ab/h＝E_1E_2之機率

b＝發生E_2之命題

b＝不發生E_2之命題

b/h＝E_2之機率

$(a+b)/h$＝或E 或E_2之機率

設使N＝可能格數之總數，其中凡有α個爲適稱於"E_1與E_2同時發生"之格數，β個爲適稱於"E_1而非E_2"之格數，γ個適稱於"E_2而非E_1之格數，δ個適稱於"非E_1亦非E_2"之格數（$\alpha+\beta+\gamma+\delta=N$），凡此格數，其機運均等，則依上述機率之定義公式(3)，當得

$$ab/h=\frac{\alpha}{N}$$

$$a/h=\frac{\alpha+\beta}{N}$$

$$b/h=\frac{\alpha+\gamma}{N}$$

然或為E_1或為E_2之適稱恰數，凡$(\alpha+\beta+\gamma)$個，故其機率當等於

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{N}$$

$$(a+b)|h=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{N}$$

$$(a+b)\,h=\frac{\alpha+\beta}{N}+\frac{\gamma+\alpha}{N}-\frac{\alpha}{N}$$

故得　(4)　$\boxed{(a+b)h=ah+bh-ab|h}$

此第(四)公式即總和機率之定理公式。若以文詞表之，可云：設有一偶然事件E，適稱於該事件者，可爲E_1或E_2之發生，則該偶然事件之機率，名爲E與E_2之總和機率，當等於各偶然事件E_1及E_2之機率之和，減去其E與E_2一致發生之機率。

例：　於人壽保險中，有夫婦兩人合保一養老金，依其合同之規定，凡於n年後，若有一人倘能生存，則保險公司即當付其養老金S。請問其「數學保險費」(五)幾何？

欲求此數學保險費，先當求其數學機率，然欲於n年

後夫婦兩人中至少有一生存，其不同情形凡三1.夫婦生存，2夫存而妻亡，3妻存而夫亡，乃可依上述總和機率定理，得有下列公式：

夫妻兩人中至少有一能再活n年之機率＝(夫能再活n 年之機率)＋(妻能再活n年之機率)－(夫妻均能再活n 年之機率)

若欲以數學公式表之，則可以

$p^{n}_{\overline{xy}}$＝夫妻兩人中至少有一能再n 活年之機率

p^{n}_{x}＝夫能再活n 年之機率

p^{n}_{y}＝妻能再活n 年之機率

p^{n}_{xy}＝夫妻均能再活n年之機率

則卽可得下列公式

$$p^{n}_{\overline{xy}} = p^{n}_{x} + p^{n}_{y} - p^{n}_{xy}$$

旣知其機率，乃甚易求其數學保險費矣。

若使　∏＝所求之數學保險費　　i＝年息　則可由

下例公式求之：

$$p^n_{\overline{xy}}S=\pi(1+i)^n$$

$$\pi=Sp^n_{\overline{xy}}(1+i)^{-n}$$

$$=S(p^n_x+p^n_y-p^n_{xy})(1+i)^{-n}$$

若更以保險學所習用之符號(六)，P^n_x，P^n_y，P^n_{xy}，以代

$$\frac{p^n_x}{(1+i)^n},\ \frac{p^n_y}{(1+i)^n},\ \frac{p^n_{xy}}{(1+i)^n}$$，則又可寫如下式：

$$\pi=Sp^n_{\overline{xy}}=S\left(P^n_x+P^n_y-P^n_{xy}\right)$$

註五： 數學保險費(Prime mathem atique)亦名純保險費，(prin e pure)，可謂爲保險費之原價，卽設有一保險公司，倘無任何開消，復不於中取利，而當向顧客索取之保險費。

註六： p^n_x 亦名「年x者欲於n年後或能得一元之現價(Capital differe de n annees de 1 dollar pour la tete d'age x)o

(2)總和機率之特殊公式

在相當情形之下，E_1E_2可為兩不能並立之現象，例如：

E =在一副五十二張之撲克牌中，抽得一張紅色之紙牌

E_1=抽得一張紅雞心者

E_2=抽得一張紅方塊者

則E_1與E_2乃為不能並立之偶然現象矣，蓋普通無一紙牌能兼而有紅雞心與紅方塊兩種花樣者，故在此例中，$\alpha_1=0$，因而E_1E_2一致發生之機率即等於零，是則上述第(四)公式中之$ab|h$一項即可付諸消滅，在此情形之下，其總和機率(七)之定義公式，即可寫如下式：

E之機率=E_1之機率+E_2之機率

或　$(a+b)|h=a|h+b|h$

其言文定理亦可更改如次：

設有一偶然現象E，可由兩「不能並立之偶然

現象」(Evenements fortuits s'excluant mutullement) E 或 E_2 所致，則其機率卽等於其成因現象 E_1 及 E_2 之機率之總和。

註七：按 $E=E_1$ 或 E_2。然今以 (E_1+E_2) lh 表示或 E_1 或 E_2 之機率，且稱E之機率爲 E_1 及 E_2 之總和機率，又有名此總和機率定理爲「加法定理」，凡此均似不甚切當，然其所以如是者，殆卽根據此偶然現象E之機率可於特殊情形中，等於其各成因現象 E_1，E_2 之機率之總和一層，故有類是之符號與名稱也

(13)總和機率特殊公式之推廣

今若將上述第(五)公式推而廣之，卽可得其普通定理如下：

設有一偶然現象E，可各因S種不能並立之偶然現象 $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots E_S$ 所致，則其機率卽等於其各成因現象 $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots E_S$ 之機率之總和，若以數學公式表之，則得

(6) $E|h=(E_1+E_2+_3+\cdots\cdots+E_S)|h$

$$= E\,|h = E h + E_2|h + E_3|h + \cdots\cdots E_s h$$

(14)總和機率之普通公式

若$E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots E_s$並非不能並立之偶然現象，則其最普通之公式(八)當如下式：

(7) $E|h = (E_1 + E_2 + E_3 + \cdots\cdots + E_s)|h$

$$E|h = \sum(E_i|h) - \sum(E_i E_j|h) + \sum(E_i E_j E_k|h) - \cdots\cdots$$

$$\cdots - (-1)^s E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots E_s|h$$

其中，$\sum(E_1 E_2 \cdots\cdots E_m|h)$之符號，乃用以代$E_1 E_2 \cdots\cdots E_s$中取 m 個不同指標之各種組合之機率之總和。

例若：

$$\sum(E_i|h) = E_1 h + E_2 h + E_3 h + \cdots\cdots + E_s h$$

$$\sum(E_i E_j|h) = E_1 E_2 h + E_1 E_3|h + \cdots\cdots E_1 E_5|h +$$

$$E_2 E_3|h + \cdots\cdots + E_{s-1} E_s h$$

至總和機率之普通公式之言文對照，且付缺如。因在此複雜情形中，苟欲以言語表之，則不特有冗長之苦，且難臻於暢達也(九)。

註八：　總和機率之普通公式之證解：

其證解法可用「漸次遞進之方法」(methode de recurrenee)「亦名數學歸納法」卽由一而二，二而三，……，(n－1)而至n，不論其n數值之大小而皆準，乃得爲普遍之公式：顧應用此方法以證解其總和機率之普遍公式，非依據積合機率定理不可，故亦有先講積合機率定理而次述總和機率者，然本稿乃爲初習機運數學者著，故仍沿舊習，蓋採由簡入繁之旨耳。況類此繁雜之普遍公式，初學者儘可略而過之。設有一偶然現象E，可各由E_1E_2或E_3之原因而致，今可以E'代表E_1或E_2之偶然現象，則偶然現象亦可謂爲各由E'或E_3之原因所致，故得依第(四)公式寫其下列等式：E之機率＝E'之機率＋E_3之機率－$E'E_2$之機率

$$Eh=(E_1+E_2)h+E_3h-(E_1+E_2)E_3h$$

$$=E_1h+E_2h-E_1E_2h+E_3h-E_3h$$

$$(E_1+E_2)E_3h$$

$$=E_1h+E_2h+E_3h-E_1E_2h-E_3h$$

$$[E_1E_3h+E_2E_3h-E_2E_3E_2h]$$

$$=E_1h+E_2h+E_3h-E_1E_2h-E_3h$$

$$E_1E_3h-E_3hE_2E_3h+E_3hE_1E_2E_3h$$

$$Eh=E_1h+E_2h+E_3h-E_1E_2h-$$

$$E_2E_3h-E_3E_1h+E_1E_2E_3h$$

故卒得 $Eh=\sum(Eh)-\sum(E_1E_2h)+EE_2E_3h$

推而廣之，則可假定已經證明

$$E'h=(E_1+E_2+\cdots\cdots+En-1)h=\sum_1^{n-1}(Eh)$$

$$-\sum_1^{n-1}(E_1E_2h)+\cdots\cdots-(-1)n-1EE_2$$

$$\cdots\cdots En-1h$$

而後求其

$$Eh=(E_1+E_2+\cdots\cdots+En-1+E_n)h$$

茲爲便利書寫起見，且以

$$\sum_1^{n-1}=\sum_1^{n-1}(E_1E_2\cdots\cdots E_kh)$$

則

$$Eh=(E'+E_n)h=E'h+E_nh-E'E_nh$$

因得

$$E|h=\sum_{1}^{n}(E_1|h)-\sum_{1}^{n}(E_1E_2h)+\sum_{1}^{n}(E_1E_2E_3h)$$

$$-\cdots\cdots-(-1)^nE_1E_2E_3\cdots\cdots E_n|h$$

C.Q.F.D,

例： 設有m人，年各$x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m$，試問於n年後至少尚存一人之機率？

設以

$$P^n_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}=\text{吾人所求之機率}$$

則其逆機率卽當爲m人均已死亡之機率

$$q^n_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$$

故

$$p^n_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}=1-q^n_{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}$$

然設使各人之死亡率為互不相關之機率，則

$$q^n_{x_1x_2\cdots\cdots x_m}=q^n_{x_1}q^n_{x_2}q^n_{x_3}\cdots\cdots q^n_{x_m}$$

因而

$$q^n_{\overline{x_1x_2x_3\cdots\cdots x_m}}=1-q^n_{x_1x_2\cdots\cdots x_m}$$

$$=1-(1-p^n_{x_1})(1-p^n_{x_2})(1-p^n_{x_3})\cdots\cdots(1-p^n_{x_m})$$

$$=\sum_1-\sum_2+\sum_3-\cdots\cdots-(-1)^m\sum_m$$

其中

$$\sum_k=\sum p^n_{x_1x_2\cdots\cdots x_k}$$

註九： 今試由各種科學進步之程序觀之，概有「愈進步愈須數學化」之趨勢。蓋因各種科學之初步，研究者每預設種種化繁為簡之假說，以便其研究，故其初時研究之問題，既極簡單，僅文字之表述，亦堪使人領悟，固無須數學公式者；然若研究愈有進步，則恆有兩種趨向，一由不確切而確切之，一由簡單

而繁複之。夫由不確切而確切之，即當由質量之研究，進於數量之研究，此有待於數學計算者，固不待言；至欲由簡入繁，亦常感文字表述之不足，而有須數學公式以助之。例若經濟學中之交易現象，其初，祇就其兩物相互交易而論，固不難以文字表述之，然於推廣至多種物品相交易之際，即感文字表述之難明，而改以數學公式表示之，較為便利焉。於茲：曾憶十九世紀法國學者 Cournot 氏，初用數學公式著其「財富論之數學原理」(Recherches sur les principes mathematqiues de la Theorie des Richesses 1838) 一書，後復以前書之大意，但不用數學公式而全用文字，又著其「財富論之原理」(Principes de la Theorie des Richesses 1863)然其結果，則不特後書之頁數(五百頁有餘)倍增其前書(約二百頁)，且反不及前書之明瞭易解焉。

(15)積合機率定理

E_1E_2之積合機率，乃為E_1E_2一致發生之偶然現象之機率，其數值可直接依據機率之定義公式求之：

$$abh=\frac{\text{又屬於A又屬於B之格數}}{\text{可能格數之總數}}=\frac{\alpha}{N}$$

然吾人亦可首求其發生E_1之機率，次則既知其E_1已發生矣，乃再求其發生E_2之機率(註十)，今E_1之機率，固等於$\frac{\alpha+\beta}{N}$，但既知E_1已經實現，則E_2之機率，即不復如其原有之機率$bh=\frac{\alpha+\gamma}{N}$矣。設以$b|ah$表示其$E_1$實現以後再發生$E_2$之機率，則上述之命題，又可譯如下式：

$$bah \neq b|h$$

蓋因既知E_1已經實現，則E_2之可能格數即不復為N而減為$\alpha+\beta$個矣；且其中適稱於E_2者又僅存α個，故在此情形之下，E_2之機率即當改為$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

$$b|ah=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

因此，E_1E_2之積合機率，亦可寫如下式：

$$adh=\frac{\alpha}{N}=\frac{\alpha+\beta}{N}\times\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=a|h.b|ah$$

同理，欲使其偶然現象又為E_1又為E_2之命題，亦可先使其為E_2，諧而既知其為E_2，再使其為E_1。在此情形之下，則

E_1E_2之積合機率卽可寫如下式：

$$ab|h = \frac{\lambda}{N} = \frac{\lambda+Y}{N} \times \frac{a}{\lambda+Y} = bh.a|bh$$

綜上兩式，卽得：

$$(8) \qquad \boxed{ab|h = a|h.b|ah = b|h.a|bh}$$

此第（8）公式，卽積合機率之定理公式也。若以文詞表之，則可云：設有一偶然現象E當綜合E_1E_2兩現象所致者，則其機率，名曰E_1E_2之積合機率，當等於其成因現象之一（例如E_1）之機率，乘其既知前一現象已發生後再發生其他現象（例如E_2）之機率。

例：

E＝在一副五十二張之撲克牌中，甲乙兩人各抽得A_s

E_1＝甲在一副五十二張之撲克牌中任抽一張A_s

E_2＝乙在一副五十二張之撲克牌中任抽一張A_s

a ＝甲抽得一張A_s

b ＝乙抽得一張A_s、

ab ＝甲乙抽得之紙牌適為一對A_s

a|h ＝甲抽得一A_s之機率

$b|h$ =乙抽得一A_5之機率

$ab|h$=甲乙均得一A_5之機率

$b|ah$ = 既知其甲所抽得者爲一A_5後，而使乙所抽得者亦爲一A_5之機率

$a|bh$=既知其乙所抽得者爲一A_5後，而將使甲所抽得者亦爲一A_5之機率

今欲求E之機率，可先由機率之定義公式計算之。

甲乙兩人各於五十二張之撲克牌中任抽一張其可能格數N等於G^2_{52}此即52個物件兩個一組之"組合"數目(Nombr de Combinaisons deux a deux de 52 objets)

$$C^2_{52}=\frac{52\times51}{1\times2}=1326$$

其適稱格數G^2_4

$$C^2_4=\frac{4\times3}{1\times2}=6$$

故其機率$ab|h=\frac{1}{221}$：

$$ab|h=\frac{\text{適稱於}ab\text{之格數}}{\text{可能格數之總數}}$$

$$=\frac{\sigma}{N}=\frac{6}{1326}=\frac{1}{221}$$

然如此計算，必須借重於"組合"數目之數學公式，即必須具有"組合分析學"(Analyse Combinatoire) 之智識，且於計算方面，亦常感繁複之苦，故除非不得已及極形簡單之題目以外，鮮有用之者。例如上述例題，因極簡單，即用直接計算之方法，亦不見十分繁複，然若依積合機率之定理以解決之，則不特無須用組合分析學之數學公式，且於計算上，亦便利多矣。蓋

$$ah=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

$$bah=\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$$

該兩機率，殆毋勞吾人之思索而能驟得者，故其積合機率abh 既為此兩機率之乘積，則其計算自極便利。

註十： 此種機率亦有名曰"相對機率"而用PE1(E_2)為符號者(見中央大學周君適先生統算大綱講義第頁17－22)

(16)積合機率之特殊公式

在特殊情形之下，E_1與E_2可為「不相關」之偶然現象，其機率亦為「各不相關」之機率，蓋而E_1之機率將不為其他現象E_2之已未發生而有所變更，E_2之機率亦不隨E_1之發現與

否而變易。以數學公式言之，蓋卽當$b|ah=b|h$與$a|bh=a|h$之際，E_1E_2乃爲兩不相關之偶然現象，而上述第(8)公式，卽得改成下式：

$$(9)\qquad abh=a|h\cdot b|h$$

由此，亦可譯成其言文定理如下：

設有一偶然現象當綜合兩「不相關」之偶然現象E_1，E_2所致者，則其機率卽等於其各成因現象之機率之積(十一)。

例：　在前舉之例題中，設使甲乙兩人非在同一副牌各抽一張，而使甲乙兩人各在一副五十二張之撲克牌任抽一張，則甲能抽得一張A_s之機率當始終爲$\frac{1}{52}$而乙亦然　蓋因在前一例中，若旣知甲已抽得一A_s，則剩餘之五十一張牌中僅存三張A_s矣，故乙之機率$b|ah$卽當由$b|h=\frac{4}{52}$而改爲$\frac{3}{51}$然今甲乙兩人各在一全副紙牌中任抽一張，則一人之機率將不隨他人僥倖與否而有所增減。因此其機率卽定名爲「各不相關」之機率，在此情形之下，則所求之機率卽不復爲$\frac{1}{221}$而當改爲$\frac{4}{52}\times\frac{4}{52}=\frac{1}{169}$矣

註十一：於玆，亦有謂"積合機率"與機率之"乘法定理"諸名詞之由來，卽因在相當情形之下，積合機率

可直接等於其各構成現象之機率之積故耳。

(17)積合機率特殊公式之推廣

設有一偶然現象E當聚合$E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots E_k$，k個各不相關之偶然現象所致者，則E之機率即等於各成因現象之機率之總乘積。

若以數學公式表之，則可寫如下式：

$$(10)\quad Eh = E_1E_2\cdots\cdots E_k\, h = E_1|h \times E_2|h \times \cdots\cdots E_k\, h$$

(18)積合機率之普遍定理

試有一偶然現象E當聚集$E_1E_2, \cdots\cdots E_k$，k種偶然現象所致者，則其機率等於其成因現象E_1之機率，乘其既知E_1已實現後再發生E_2之機率，再乘其既知E_1E_2均已實現後再發生E_3之機率 依次類推，直至其既知其餘之成因現象均已實現後，再發生E_k之機率。

若用數學公式言之，則得

$$(11)\quad Eh = E_1E_2\cdots\cdots E_k\, h = E_1|h \times E_2|E_1h \times E_3|E_1E_2h \times \cdots\cdots \times E_k|E_1E_2\cdots\cdots E_{k-1}h$$

例： 以六骰爲戲，試問擲一「不同」之機率幾何？

設以 E＝六骰為戲而得一「不同」

E_i＝第(i)個骰子之點數

$(i=1,2,3,4,5,6,)$

E之命題為$E_1 \neq E_2 \neq E_3 \neq E_4 \neq E_5 \neq E_6$

若先擲以第一個骰子，則不論其E_i之點多少而皆能適合於E者，故其機率等於一。然既知其第一個骰子為E_1，則第二個骰子卽不得再為E_1，故其機率$E_2|E_1h$卽等於

$\frac{5}{6}$矣。同理，$E_3|E_1E_2h=\frac{4}{6}$，$E_4|E_1E_2E_3h=\frac{3}{6}$，$E_5|E_1E_2E_3E_4h=\frac{2}{6}$，$E_6|E_1E_2E_3E_4E_5h=\frac{1}{6}$而$E$之機率卽等於以上諸機率之乘積：

$$Eh=\frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{10}{648}$$

附： 上述之例題亦可由機率之定義公式計算之。以六個六面之骰子為戲，可得6^6之不同花樣，故該偶然現象之可能格數等於六之六次方，但適稱於E之格數當等於六物之錯列數目(Nombres de Permutations de 6 objets)。

$=6!=1\times\times2\times3\times4\times5\times6$

，故 E 之機率 $=\dfrac{\text{適稱格數}}{\text{可能總數}}=\dfrac{6!}{6^6}=\dfrac{10}{648}$，

(19)總和機率與積合機率之混合定理

本定理較形複雜，故試先舉例以明之。

設有球袋S隻：$C_1,C_2\cdots\cdots C_k\cdots\cdots\cdots C_s$，其中$C_1,C_2,\cdots\cdots\cdots C_k$，k隻球袋內盛有紅球及其他顏色者，其餘s－k隻內無一為紅色者，惟其前k隻球袋之組織亦各不盡同，如C_i袋共有n_i個內有f_i個為紅球者，故若在C_i袋中任抽一球，如抽得一紅球之機率為$p_1=\dfrac{f_1}{n_1}$，同理，在$C_2,C_3,\cdots\cdots\cdots C_k$袋中抽得一紅球之機率可各為$p_2=\dfrac{f_2}{n_2}$，$p_3=\dfrac{f_3}{n_3}$，$\cdots\cdots p_k=\dfrac{f_k}{n_k}$（$R|E_i\,h=p_i$），在此情形之下，試問在任何一袋內任抽一球而欲使其為紅球之機率幾何？

此間所求之機率即為一總和機率與積合機率之混合機率。其為總和機率者，蓋欲抽得一紅球，可各在$C_1,C_2,\cdots\cdots\cdots$或$C_k$之袋中抽之均可；其又為積合機率者，蓋即使已知其由$C_1,C_2,\cdots\cdots\cdots C_k$袋中抽出者，尤須抽出之球為一紅球而非其他者，今吾人所舉之例，具有三特點：

1. $E_1, E_2 \cdots\cdots E_k \cdots\cdots E_s$ 爲不能並立之偶然現象

2. $p_1, p_2 \cdots\cdots p_k$ 爲各不相關之機率

3. $E_1 h = E_2 h = \cdots\cdots = E_k h = \cdots\cdots = E_s h = \frac{1}{s}$

其中，$E_1, E_2, \cdots\cdots E_k$，$\cdots\cdots E_s$ 表示所抽之球乃由 C_1, $C_2, \cdots\cdots C_k \cdots\cdots C_s$ 袋內抽得者。在此情形之下，則吾人所欲求之機率 Rh 即將等於 $\sum_{i=1}^{k} RE_i h$：

$$Rh = \sum_{i=1}^{k} RE_i h = \sum_{i=1}^{k} E_i h \cdot RE_i h$$

$$Rh = \frac{1}{s}(p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_k) = W$$

該例題之第三特點甚易使其普遍化，蓋既組合 $C_1, C_2, \cdots \cdots C_k \cdots\cdots C_s$ 各有 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_k \cdots\cdots a_s$ 個 $(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k + \cdots\cdots + a_s = T)$，則 $E_1 h$，$E_2 h$，$\cdots\cdots E_k h$，$\cdots\cdots E_s h$ 不再均等，而各爲 $E_1 h = \pi_1 = \frac{a_1}{T}$，$E_2 h = \pi_2 = \frac{a_2}{T} \cdots\cdots E_k h = \pi_k = \frac{a_k}{T}$，$\cdots\cdots$，$E_s h = \pi_s = \frac{a_s}{T}$ 矣。在此情形之下，則所求之機率 $W = Rh$ 即將變爲：

(12) $W = p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \cdots\cdots + p_k\pi_k$

此公式卽爲不能並立之總和機率與各不相關之積合機率相混之合機率之數學公式。今吾人所論述之混合機率亦卽以此特例爲限。且試將其數學公式譯成言文如下：

設有一偶然現象R，可各由$E_1, E_2, \cdots\cdots E_k$ E_k個「不能並立」之事件所致，各事件之能否發生其偶然現象R之機率$R|E_ih$，又均爲「各不相關」之機率，在此情形之下，則R之機率，$R|h$，卽等於各積合機率RE_ih之總和。

例： 設有$(x_1)(x_2)\cdots\cdots(x_k)\cdots\cdots(x_s)$個年各$x_1, x_2, \cdots\cdots x_k\cdots\cdots x_s$之人，試問於n年後尙存其k人而盡亡其餘之機率W幾何？

欲使s個人內僅存其k個而亡其$(s-k)$，則所存之k人當爲s人中其k人一組之各種「組合」之一，凡此組合爲「不能并立」之組合，故欲求其總和機率W可先求其成因機率之一，例若先計算其：尙存其$(x_1)(x_2)\cdots\cdots(x_k)$諸人而亡其餘$(x_{k+1})\cdots\cdots(x_{k+2})\cdots\cdots(x_s)$之機率。$\pi(_{1,2}\cdots\cdots k)$，此機率爲一積合機率。設使各人之生存率爲「各不相關」之機率，則依積合機率定理，卽

得

$$\Pi(1,2,3,\cdots\cdots\cdots k)=p^{n}_{x_1x_2\cdots x_k}\quad q^{n}_{x_{k+1}x_{k+2}\cdots\cdots x_s}$$

而依混合機率定理，即得吾人所欲求之機率w：

$$W=\sum\frac{1}{C^{k}_{s}}\left[p^{n}_{x_1x_2\cdots\cdots x_k}\;q^{n}_{x_{k+1}x_{k+2}\cdots\cdots x_s}\right]$$

其間，p^{n}_{x}為x歲者於n年後尚能生存之機率，q^{n}_{x}為x歲者於n年後已逝之機率，C^{k}_{s}為s個人k箇一組之組合數目。

(20)餘言

機遇數學之發端，固由於昔Galile, pascal, Fermat 諸數學家遊戲之作，初無若干切實應用之地，然該學日漸發達，其應用之範圍，亦不再限於純粹理智之遊戲，而漸及於保險學，社會學，生物學，天文學，物理學矣。迨相對論極盛之際，機遇數學之地位更形提高，尤以最近「數學物理」，「數理統計」等學科之研究，皆非首先精通機遇數學不為功，故各國大學均早有機遇數學之講座。今吾國亦有若干大學內設機遇數學(亦名概算)專門。惟吾國關於機遇數學之書籍尚付缺如(十二)。然以機遇數學應用之廣，則需要該種數

學智識者，亦必不乏其人，本篇所述，因極淺易，無足供專攻該學者之參考，惟於一般習統計學，保險學，社會學者，凡欲對機遇數學得一確切之概念者或有小補焉。

註十二：現吾國雖無機遇數學專門著作，但述及該種數學之書籍，亦頗不少：例若李協著"最小二乘方法"亦論及機遇數學之兩大基本定理，卽本文所名曰"總和機率定理"與"積合機率定理"而君所名曰"或是率之和"與"或是率之積"（見李著第二章）然總和機率等於各簡單機率總和，祇在各現象為不能並立之場合，而非普通情形也；又積合機率等於各成因機率之乘積，亦在各成因現象為不相關之場合，而亦非普通情形也。於"舛差論"中，一般著者常隨Gauss之後，祇應用總和機率定理與積合機率定理之特殊公式，固無不可。然就機遇數學言之，尚以兼述普通公式較為完善。

第二章： 簡單相關

第一節： 導言

不論何種科學研究，其最終目的，務在尋求『法則』，惟『法則』之觀念，有廣狹之別：狹義言之，則宇宙萬象之變化，悉有因果可循，表示此因果之規則，名曰『法則』；廣義言之，則凡表示某某諸現象間之關係，初不必究其孰為因果，皆得謂之『法則』。現代科學家，概多採取此廣義觀念。至法則之性質，亦不盡同：譬若『凡人必死』定律，適用於個人可，適用於羣衆亦可；若謂『人類平均壽命為四十五歲左右』，固不能適用於個人，然未始不可為某時代某種族之死亡『平均法則』，再如研究物理學上之原子運動，則單個原子運動之速率，雖無一定之法則，然若集多數原子而統計之，以得其平均速率，則復有其法則可尋矣；類此法則，即名曰『統計的法則』(Loi Statistique)。

今既就廣義之定義以研究『統計的法則』，則更當確定其相關程度之疏密，蓋同在一『相關』之下，可有絕不相等

之疏密程度：例如夫婦間彼此年齡之關係，父子間彼此身材長短之關係，雖均可以『有關』兩字表之，然其相關程度之疏密，却殊各不同；再如通貨數量之增減與一般物價之漲落，一國婚姻率之升縮與其國外貿易之盛額，類此相互關係，雖均可以『變動有關』壹語表之，然各有其不同之相變程度茲欲用『數量』以確示其相關程度及相變程度者，則即統計學上『相關度』與『相變度』之理論。

設使吾人欲研究某時代某國家男女配偶之年齡關係。若任擇一三十歲之婦女而詢其夫之年齡，則或爲二十五，或爲三十，……或爲六十，更或在二十歲以下，六十歲以上均無不可，實無一定之法則。然若調查在十人以上，則三十歲婦女其丈夫之平均年齡，當在二十至六十之間。更若統計及萬人以上，則三十歲之婦女，其夫年齡之平均數，又當在二十八至四十之間矣。依此，擇任何年齡之婦女，亦必各得其夫之平均年齡；同理；擇任何年齡之男子，亦必各得其妻之平均年齡；故夫婦年齡之配合，雖無絕對固定之法則，然必有相當之關係。茲令y＝夫年，x＝妻年，則縱使不能得一數學函數如$y=f(x)$或$F(x,y)=0$，以表明單個x與單個y間之

關係，然在相當情形之下，可分得下列兩式：

$$X_{o}^{(i)}=\psi(yi)$$

＝某一年齡yi之男子，其妻之平均年齡

$$y_{o}^{(i)}=\phi(Xi)$$

＝某一年齡i之女子，其夫之平均年齡

ψ、ϕ為函數之記號，前者稱為『x從y的迴歸函數』＝fonction de regression de X en y ＝ $\psi(yi)$，後者稱為『y從Xi之迴歸函數』＝fouction de regrssion de y enXi＝$\phi(Xi)$ ，迴歸函數亦得改稱為"相關函數"。

凡『相關函數』之有無及其相關程度之疏密之研究，皆屬于『相關論』(Theorie de corerlation)之範圍。相關云者，卽兩種或多種變量其相互之關係也。

社會現象變幻無窮。譬之，工資購買力則時有漲落；失業人數則時有增減。惟工資與失業人數究有何關係？在工資之購買力增進時，失業人數抑同時增加？抑或同時減少？抑或不增亦不減？欲知其究竟，則當依據歷來工資及失業之統計以觀察其數目間有無關係；苟有關係，則更當研究其密切之程度又屬若何；類此之研究，皆屬于『相變論』(Theorie de covariation) 之範圍：相變云者，兩種或多種變量依時間而變動時其相互之關係也。

相關度原理與相變度原理不同之點：第一、後者具有時間觀念，而前者無之：第二、統計資料之性質，亦甚不同，故兩者所用算學公式，雖頗多類似之處，然決不可混爲一談，就統計數列之性質言，則相關研究之對象爲多個變數之統計數列。相變研究之對象爲多個時間數列之關係：多個變數之統計數列得以次數數列之形式表示之，故相關研究實亦屬於次數數列之分析問題，而次數旣得與機率相比擬，故有關於相關之理論，每有賴於機遇數學之應用。至相變研究乃時間數列之相關問題，罕有能引用機遇數學，故其理論根據亦與相關研究迥不相同。是則相關與相變實有分述之必要。

第二節：　相關度

相關研究之主要問題凡三：一爲相關之有無，二爲相關程度之疏密，三爲相關函數之公式。然苟知相關程度之疏密，卽同時解答相關之有無，故相關研究實僅有相關度與相關函數兩問題，相關函數容後另章討論，玆且專敍相關度問題

相關度者，乃以一簡單數字指示兩個或多個變數之相關程度者也。有關於多個變數之相關度問題，容於偏相關與複相關一章內論述之，本節擬先敍述兩個變數之相關度問題。惟兩個變數之相關度問題，又將隨變數之性質而不同，蓋兩個變量旣得分別爲（甲）均爲數量（乙）均爲質量（丙）一爲數量一爲質量，則相關研究亦得分爲（甲）數量統計與數量統計之相關，（乙）數量統計與質量統計之相關（丙）質量統計與質量統計之相關。

第三節： 數量統計與數量統計之相關

設使X與y表示兩變量，X可取得K種不同之數值：

$$X_1, X_2, X_3, \cdots\cdots Xi \cdots\cdots X_k$$

Y可取得L種不同之數值：

$$Y_1, Y_2, Y_3, \cdots\cdots Yj \cdots\cdots Y_L$$

而其次數分配如下表：

(第一圖)

$Y \backslash X$	X_1	X_2	……	……	……	X_i	……	……	……	……	X_k	總數
y_1	$n_{1/1}$	$n_{2/1}$	……	……	……	$n_{i/1}$	……	……	……	……	$n_{k/1}$	$n_{/1}$
y_2	$n_{1/2}$	$n_{2/2}$	……	……	……	$n_{i/2}$	……	……	……	……	$n_{k/2}$	$n_{/2}$
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
y_j	$n_{1/j}$	$n_{2/j}$	……	……	……	$n_{i/j}$	……	……	……	……	$n_{k/j}$	$n_{/j}$
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
y_L	$n_{1/L}$	$n_{2/L}$	……	……	……	$n_{i/j}$	……	……	……	……	$n_{k/L}$	$n_{/L}$
總數	$n_{1/}$	$n_{2/}$	……	……	……	$n_{i/}$	……	……	……	……	$n_{k/}$	N

該表內$n_{i/j}$即表示X等於X_i, y等於y_j之次數：

$$i=1,2,\cdots\cdots i\cdots\cdots k$$

$$j=1,2,\cdots\cdots j\cdots\cdots L$$

其相應對之機率爲 pi/j：

Pi/j 乃欲使X等於Xi，y等於yj的機率：

$$Pi/j=\frac{ni/j}{N}$$

N 爲次數之總數：

$$N=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L}n_{i/j}$$

由上表甚易求得X＝Xi之次數ni/

$$ni/=\sum_{j=1}^{L}n_{i/j}$$

及其相應對之機率Pi/，$P_i/$ 乃欲使X等於Xi之機率：

$$Pi/=\frac{ni/}{N}$$

同理

$$n/j=\sum_{i=1}^{k}n_{i/j}=y\text{等於}yj\text{之次數}$$

$$P/j=\frac{n/j}{N}=\text{欲使}y\text{等於}yj\text{之機率}$$

旣知其各數值與其相應對之機率，卽不難推求其希望數與希

望差（亦名動數與動差）。按希望數之最初定義爲：

希望數者，乃一偶然變數所能取得各數值各乘其機率之乘積之總和。意卽於大數原則之下，該偶然變數所能取得之平均數值，故其公式與算術平均數無異：

$$E(X)=P_{1}/X_1+P_{2}/X_2+\cdots+P_{i}/X_i+\cdots+P_{k}/X_k$$

$=$X之希望數

若以F(X)代X，卽得其廣義的定義公式如下：

$$E\left[F_{(X)}\right]=P_1/F_{(X)}+P_2/F_{(X_2)}+\cdots\cdots$$

$$+P_i/F_{(Xi)}+\cdots+P_{k}/F_{(Xk)}$$

$= F_{(X)}$ 之希望數

設使 $F_{(X)}=x^t$，則其希望數卽爲 X^t 之希望數，亦名X之 t 次希望數：

$$E\left[x^t\right]=P_1/x_1^t+P_{2}/x_2^t+\cdots+P_{i}/x_i^t+\cdots+P_{k}/X_k^t$$

$=$X之t次希望數

$=m_t$

$=X$之t次動數

$$=\sum_{i=1}^{k} P_{i} \quad X_i^t$$

設使X_0為X之算術平均數，亦即為X之希望數。倘以$X-X_0$代X，又得其t次希望差公式如下：

$$E\left[X-X_0\right]^t=\sum_{i=1}^{k} P_{i}\left[Xi-X_0\right]^t$$

$$=u_t$$

$=X$之t次希望差

$=X$之t次動差

今若以上述諸定義，推廣至兩個變數X，Y，則祗須以F(X,Y)代F(X)，並以P_{ij}代P_{i}，即得

$$F(X,Y)\text{之希望數}=F\left[F(X,Y)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} P_{ij} F(Xi,Yj)$$

若使$F_{(X,Y)}=XY$，則其希望數即為：

$$E(Xy)=\sum_{i=j}^{k}\sum_{i=l}^{L} P_{i/j}X_i y_j$$

推而廣之，又可使$F(X,y)=X^t y^s$即可得其$(t+s)$次希望數：

$$E\left[X^t y^s\right]=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L} P_{i/j}X_i^t y_j^s$$

$$=t+s\text{次希望數}$$

$$=m_{t/s}$$

設使X_o與y_o為$X\ y$之希望數，而以$(X-X_o)$與$(y-y_o)$代X與y，又得其$(t+s)$次希望差：

$$u_{t/s}=t+s\text{次希望差}$$

$$=E\left[(X-X_o)^t(y-y_o)^s\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L} P_{i/j}(X_i-X_o)^t(y_j-y_o)^s$$

(A) 相關係數之原理

由於希望差之觀察，即可判斷其相關之有無，蓋在X與

y 互不相關時，則 $u_{1/1}$ 之數值等於零：

$$u_{1/1}=E\Big[(X-X_o)(y-y_o)\Big]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L} P_{i/j}\,(X_i-X_o)(y_j-y_o)$$

按積合機率定理，在互不相關之條件下

$$P_{i/j}=P_{i/}\,P_{/j}$$

則

$$u_{1/1}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L} P_{i/j}(X_i-X_o)(y_j-y_o)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L} P_{i/}\,P_{/j}(X_i-X_o)(y_j-y_o)$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{k} P_{i/}(X_i-X_o)\right\}\left\{\sum_{j=1}^{L} P_{/j}(y_j-y)\right\}$$

$$=\Big[E(X-X_o)\Big]\Big[E(y-y_o)\Big]$$

換言之，即在互不相關條件之下，乘積之希望數等於希望數之乘積。該兩希望差 $u_{1/}$，$u_{/1}$ 均等於零：

$$u_{1/}=E\left[X-X_0\right]=0$$

$$u_{/1}=E\left[y-y_0\right]=0$$

$$u_{1/1}=u_{1/}\ u_{/1}=0$$

故希望差$u_{1/1}$之數值是否等於零，卽可藉以判斷X與y是否互不相關。然$u_{1/1}$雖可用以判斷其相關之有無，但不足以表示相關程度之疏密。蓋希望數乃含有度量之數値，而相關度應以一純粹數目表示之。又因希望差之數値初無一定限度而不能用以比較其相關程度之大小。茲欲消除其度量單位，可以一同一單位之數量除之。且若各以其標準差除之，則其希望差之絕對數値爲一純粹數目而其限度爲 1，卽

$$-1<\frac{u_{1/1}}{\sigma_x\sigma_y}=E\left[\left(\frac{X-X_0}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-y_0}{\sigma_y}\right)\right]<1$$

該數値卽可用作「相關度」，而名曰„相關係數"r：

$$r=\frac{u_{1/1}}{\sigma_x\sigma_y}$$

r之絕對値等於零或極接近於零，卽表示X與y之相關極微薄；若等於一或極接近於一，卽表示X與y之相關極密切

。r爲正數，卽X與y成"正相關"，r爲負數，卽X與y成"負相關"。

(B) 相關係數之計算公式

按相關係數之定義公式爲

$$r = \frac{u_{1/1}}{\sigma_x \sigma_y}$$

其分母標準差σ_x, σ_y 之計算，於相差度一章內業經詳加敍述矣；

$$\sigma_x = \sqrt{u_{2/o}}$$

$$= \sqrt{E(X - X_o)^2}$$

設以 λ_1 爲單位，α_1 爲新原點o'離舊原點之橫距離，則標準差σ_x之計算公式爲：

$$\sigma_x = \lambda_1 \sqrt{E\left(\frac{X-\alpha_1}{\lambda}\right)^2 - \left[E\left(\frac{X-\alpha_1}{\lambda}\right)\right]^2}$$

$$= \lambda_1 \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_{i/}\left(\frac{X_i-\alpha_1}{\lambda_1}\right)^2 - \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_{i/}\frac{X_i-\alpha_1}{\lambda_1}\right]^2}$$

同理，設以λ_2為y之單位，α_2為新原點O'離舊原點之縱距離，則標準差σ_y之計算公式為

$$\sigma_y = \lambda_2 \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L} n_{/j}\left(\frac{y_j-\alpha_2}{\lambda_2}\right)^2-\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L} n_{/j}\frac{y_j-\alpha_2}{\lambda_2}\right]^2}$$

今惟$u_{1/1}$之計算須另行敍述：

$$u_{1/1} = E\left[(X-X_0)(y-y_0)\right]$$

設以α_1,α_2為二任意常數；上式亦得寫如：

$$u_{1/1} = E\left\{\left[(X-\alpha_1)-(X_0-\alpha_1)\right]\left[(y-\alpha_2)-(y_0-\alpha_2)\right]\right\}$$

$$u_{1/1} = E\left[(X-\alpha_1)(y-\alpha_2)\right]-(X_0-\alpha_1)E(y-\alpha_2)$$

$$-(y_0-\alpha_2)E(X-\alpha_1)+(X_0-\alpha_1)(y_0-\alpha_2)$$

然

$$(X_0-\alpha_1)(y_0-\alpha_2)=E(X-\alpha_1)E(y-\alpha_2)$$

$$=(X_0-\alpha_1)E(y-\alpha_2)$$

$$=(y_0-\alpha_2)E(X-\alpha_1)$$

代入上式，則$u_{1/1}$亦得改寫如次：

$$u_{1/1}= E\left[(X-\alpha_1)(y-\alpha_2)\right]-E(X-\alpha_1)E(y-\alpha_2)$$

設使λ_1，λ_2另為二任意常數，亦得將上式化為：

$$u'_{11}=\lambda_1\lambda_2\left\{E\left[\left(\frac{X-\alpha'_1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{y-\alpha'_2}{\lambda_2}\right)\right]-E\left(\frac{X-\alpha'_1}{\lambda_1}\right)E\left(\frac{y-\alpha'_2}{\lambda_2}\right)\right\}$$

倘將希望數改寫為總和，則得

$$\frac{u'_{11}}{\lambda_1\lambda_2}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L}p_{ij}\left(\frac{X_i-\alpha'_1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{y_j-\alpha'_2}{\lambda_2}\right)-\sum_{i=1}^{k}p_{i1}\frac{X_i-\alpha'_1}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{L}p_{1j}\frac{y_j-\alpha'_2}{\lambda_2}$$

再將機率化為次數，即得：

$$\frac{u'_{11}}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L}N_{ij}\left(\frac{X_i-\alpha'_1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{y_j-\alpha'_2}{\lambda_2}\right)-\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i1}\frac{X_i-\alpha'_1}{\lambda_1}\right]\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L}n_{1j}\frac{y_j-\alpha'_2}{\lambda_2}\right]$$

將該希望差及標準差之數值俱代入相關係數之公式，即得其計算公式如下：

$$=\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L}n_{ij}X'_i\,y'_j-\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i1}\,X'_i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L}n_{1j}\,y'_j\right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i1}X'^2_i-\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i1}X'_i\right)^2}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L}n_{1j}y'^2_j-\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L}n_{1j}y'_j\right)^2}}$$

$$X_i' = \frac{X_i - \alpha_{11}}{\lambda_1}$$

$$y_j' = \frac{y_j - \alpha_{12}}{\lambda_2}$$

(G)　相關係數之計算步驟

按上述相關係數之計算公式，即得其計算步驟如次：(另有其他算法從略)

(一)選擇λ_1(為X之單位)，α_{11}(為新原點離舊原點之橫距離)，求各x'

$$x' = \frac{X - \alpha_{11}}{\lambda_1}$$

(二)選擇λ_2(為y之單位)，α_{12}(為新原點離舊原點之縱距離)，求各y'

$$y' = \frac{y - \alpha_{12}}{\lambda_2}$$

(三)求各 n_{il}

$$n_{i1} = \sum_{j=1}^{L} n_{i1j}$$

(四)求各 n_{1j}

$$n_{1j} = \sum_{i=1}^{k} n_{i1j}$$

(五)求各 $n_{1i}\ \ x_i'$

(六)求各 $n_{i1}\ \ x_i'^2$

(七)求各 $n_{1j}\ \ y_j'$

(八)求各 $n_{1j}\ \ y_j'^2$

(九)求各 $x_i'\ y_j'$ 寫於各次數格內之左上角

(十)求各 $n_{i1j}\ \ x_i'\ \ y_j'$ 寫於各次數格內之右下角

(十一)求同列各 $n_{i1j}\ \ x_i'\ \ y_j'$ 之總和 A_i

$$A_i = \sum_{j=1}^{L} n_{i1j}\ x_i'\ \ y_j'$$

（十二）求次數之總和N：

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_{il} = \sum_{j=1}^{L} n_{lj} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{L} n_{ilj}$$

（十三）求各 $n_{il}\ x_j'$ 之總和S_{1l}

$$S_{1l} = \sum_{i=1}^{k} n_{il}\ x_i'$$

（十四）求各 $n_{il}\ x_j'^2$ 之總和S_{2l}

$$S_{2l} = \sum_{i=1}^{k} n_{il}\ x_j'^2$$

（十五）求各 $n_{lj}\ y_j'$ 之總和S_{11}

$$S_{11} = \sum_{j=1}^{L} n_{lj}\ y_j$$

（十六）求各 $n_{lj}\ y_j'^2$ 之總和S_{12}

$$S_{12} = \sum_{j=1}^{L} n_{lj}\ y_j'^2$$

（十七）求各 $A_i = \sum_{j=1}^{L} n_{ilj}\ y_j'$ 之總和 S_{111}

$$S_{1|1}=\sum_{i=1}^{k}A_i=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L}n_{i|j}\,x'_i\,y'_j$$

（十八）求下列各希望數：

$$m'_{1|},\ m'_{2|},\ m'_{|1},\ m'_{|2},\ m'_{1|1}$$

$$m'_{1|}=\frac{S_{1|}}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i|}\,x'_i$$

$$m'_{2|}=\frac{S_{2.}}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i|}\,x'^2_i$$

$$m'_{|1}=\frac{S_{|1}}{N}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L}n_{|j}\,y'_j$$

$$m'_{|2}=\frac{S_{|2}}{N}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L}n_{|j}\,y'^2_j$$

$$m'_{1|1}=\frac{S_{1|1}}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L}n_{i|j}\,x'_i\,y'_j$$

（十九）按下列公式計算相關係數 r ：

$$r=\frac{m'_{1|1}-m'_{1|}\,m'_{|1}}{\qquad}$$

$$\sqrt{m'_{21}-m'^2_{11}}\sqrt{m'_{12}-m'^2_{11}}$$

附則：

倘同時計算其算術平均數與標準差，則可由下式計算之：

$$X_0=\alpha_1+\lambda_1 m'_{11}$$

$$Y_0=\alpha_2+\lambda_2 m'_{11}$$

$$\sigma_x=\lambda_1\sqrt{m'_{21}-m'^2_{11}}$$

$$\sigma_y=\lambda_2\sqrt{m'_{12}-m'^2_{11}}$$

(D) 相關係數之計算示例

試就下列資料（錄自 julin: principes de Statistiqus theorique et appliquel第531頁）計算其結婚男女之年齡關係，用相關係數表示其相關度。

配偶年齡相關表

	妻年 夫年	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	y'	n_{1j}	$n_{1j}y'_j$	$n_{1j}y'^2_j$
壹												
貳	15—20	9 774 6966	6 426 2556	3 128 384	○ 40 ○	—3 26 —78	—6 2 —12	—9 1 —9	—3	1397	—4191	12573
叁	20—25	6 3401 30406	4 6086 24344	2 2152 4314	○ 409 ○	—2 96 —192	—4 39 —156	—5 25 —150	—2	12213	—24426	48852
肆	25—30	3 2073 6219	2 6739 13478	1 5720 5720	○ 1343 ○	—1 382 —382	—2 133 —265	—3 49 —147	—1	16439	—16439	16439
伍	30—35	○ 498 ○	○ 1669 ○	○ 2646 ○	○ 1601 ○	○ 442 ○	○ 130 ○	○ 78 ○	○	7114	○	○
陸	35—40	—3 140 —420	—2 441 —882	—1 838 —838	○ 652 ○	1 512 512	2 221 442	3 105 315	1	3109	3109	3109
柒	40—45	—6 40 —240	—4 170 —683	—2 344 —688	○ 380 ○	2 291 582	4 250 1000	6 133 798	2	1608	3216	6432
捌	45—50	—9 21 —180	—6 54 —324	—3 134 —402	○ 195 ○	3 187 561	6 208 1248	9 162 1458	3	961	3883	8649
玖	x'_i	—3	—2	—1	○	1	2	3		42841	—35848	96054
拾	n_{i1}	6947	15585	11967	4820	1936	1033	553	42841	拾	拾壹	拾貳
拾壹	$n_{i1}x'$	-20841	-31170	-11967	○	1936	2066	1659	-58317			
拾貳	$n_{i1}x'^2$	67523	62340	11967	○	1936	4132	4977	147875			
拾叁		32742	38492	8490	○	1003	2256	2265	85248			
	壹	貳	叁	肆	伍	陸	柒	捌	玖			

插在第六十面後面

上述計算步驟之第一至十七步所應求得之數字均見右表。

步驟次序	計算對象	在相關表中之行列次序
1	$x_i^{\prime}$	第 9 行
2	$y_i^{\prime}$	第 9 列
3	n_{li}	第 10 行
4	n_{lj}	第 10 列
5	$n_{il}\, x_i^{\prime}$	第 11 行
6	$n_{il}\, x_i^{\prime 2}$	第 12 行
7	$n_{lj}\, y_j^{\prime}$	第 11 列
8	$n_{lj}\, y_j^{\prime 2}$	第 12 列
9	$x_i^{\prime}\, y_j^{\prime}$	見各次數格之左上角
10	$n_{ilj} x_i^{\prime}\, y_j^{\prime}$	見各次數格之右下角
11	$\sum_{j=1}^{L} n_{ilj} x_i^{\prime} y_i^{\prime}$	第 13 行
12	N	第10行與第10列之總計欄
13	$S_{\cdot 1}$	第11行之總計欄
14	$S_{\cdot 2}$	第12行之總計欄
15	S_{l1}	第11列之總計欄
16	S_{l2}	第12列之總計欄
17	S_{ll}	第13行之總計欄

旣得各S及N，卽不難求其各次希望數：（第十八步驟）

$$m'_{1f}=\frac{S_{1f}}{N}=\frac{-58317}{42841}=-1.3613$$

$$m'_{2f}=\frac{S_{2f}}{N}=\frac{147875}{42841}=3.4517$$

$$m'_{f1}=\frac{S_{f1}}{N}=\frac{-35848}{42841}=-0.8368$$

$$m'_{f2}=\frac{S_{f2}}{N}=\frac{96054}{42841}=2.2421$$

$$m'_{1f1}=\frac{S_{1f1}}{N}=\frac{85248}{42841}=1.9899$$

而後按相關係公式卽得計算如次（第十九步驟）：

$$r=\frac{m_{1f1}-m_{1f}\,m_{f1}}{\sqrt{m_{2f}-m_{1f}^{2}}\sqrt{m_{f2}-m_{f1}^{2}}}$$

$$=\frac{1.9899-(1.3613)(0.8363)}{\sqrt{3.4517-1.3613^{2}}\ \sqrt{2.2421-0.8363^{2}}}$$

$$=\frac{0.8514}{1.264\times1.242}$$

$$\frac{0.8514}{1.569}=0.54$$

第四節： 數量統計與質量統計之相關

相關係數固可用以表示兩變量之相關度，但須該兩變量均屬於數量統計，否則相關係數即不能適用。例如研究壽命與職業之關係，壽命得以數量表示之，職業卽無法利用數量，是則壽命與職業之相關度問題，自亦無法應用相關係數，而必須另行研討焉。類此問題，卽屬於數量統計與質量統計之相關度問題。

(A) 相關率之原理

茲假定X為一質量統計，y為一數量統計。從每一質量 X_i 之次數分配得以下式表示之（稱為y從 X_i 的局部次數分配）

$$X_i\left\{\begin{array}{llllll} y_1 & y_2 & \cdots\cdots y_j & \cdots\cdots y_l & \text{數量} \\ n_{il^1} & n_{il^2} & \cdots\cdots n_{ilj} & \cdots\cdots n_{il} & \text{次數}\end{array}\right.$$

由該各次數分配，即不難將其改為機率分配（稱為y從 X_i 的局部機率分配）

$$X_i\left\{\begin{array}{llllll} y_1 & y_2 & \cdots\cdots y_j & \cdots\cdots y_l & \text{數量} \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{ij} & \cdots\cdots p_{il} & \text{機率}\end{array}\right.$$

$$p_{ij}=\frac{n_{ij}}{N}$$

$$i=1.2.3\cdots\cdots i\cdots\cdots k$$

設使y與X無關，則y之各局部機率分配，自亦不隨所從X之不同而相異。否則，y之各局部機率分配即將隨所從 X_i 而不同。故欲判斷X與y間果有相關與否，祗須觀察其各局部機率分配是否一致（或觀察其各局部次數分配是否相似），而各局部機率分配之是否一致，可就其表徵數如平均數相差度等數量一一比較之。故為便利起見，欲求X與y之有否相關，亦可僅視各局部機率分配之平均數是否相等。（試將

各局部機率分配之算術平均數 $y_o^{(i)}$ 稱爲 y 從X_i 的局部平均數）。是則各局部平均數之相差度，即可用以判斷 X與 y 間相關之有無。倘各 $y_o^{(i)}$ 之相差度等於零，即各 $y_o^{(i)}$ 均等，故y與X無關。倘各$y_o^{(i)}$之相差度不等於零，各 $y_o^{(i)}$ 將各隨所從 X_i 而不同，則其間卽有相當關係。今試將其局部平均數之標準差σ_{my} 以表示其相差度。該標準差σ_{my} 之數值是否爲零，卽可判斷X 與y 間相關之有無。但不能驟卽用爲相關度，猶前節所述希望差u_{ji} 之不能用爲相關度之理由相同。但若將y 之標準差σ_y 除該σ_{my} ，則卽爲一純粹數目而其限度爲一，卽

$$0<\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}<1$$

該數值卽可用作「相關度」，而名曰„相關率'；$\eta_{y/x}$

（詳言之，應稱爲y從X的相關率）

$$\eta_{y/x}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$$

該相關率之數值等於零或極接近於零，即表示X與y之相關極微薄；若相關率等於一或極接近於一，即X與y間之相關極密切。

附則：設使x亦爲一數量統計，則亦得推求其x從y的相關率；

$$\eta_{y/x} = \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}$$

故相關率之應用，亦可適用於數量統計與數量統計之相關。惟η_{yx}與$\eta_{x|y}$之數值未必盡同耳。亦有取η_{yx}與$\eta_{x|y}$之幾何平均數作爲X與y間之相關率η；

$$\eta = \sqrt{\eta_{yx}\ \eta_{x|y}}$$

(B)相關率之計算公式

按相關率之定義公式爲

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$$

其分母標準差σ_y之計算已於相差度一章內詳述矣。今

僅須討論其分子σ_{my}之計算；

$$\sigma_{my}=\sqrt{E\left(y_o^{(i)}-y_o\right)^2}$$

$$y_o^{(i)}=\sum_{j=1}^{l}p_{ij}^{(i)}\ y_j=\frac{1}{n_{i1}}\sum_{j=1}^{l}n_{ij}\ y_j$$

$p_{ij}^{(i)}$=既知X等於X_i 再求y等於y_j 的機率

$$=\frac{n_{ij}}{n_{i1}}$$

設使α_1為一任意常數，上式亦得改寫如次；

$$E\left[y_o^{(i)}-y_o\right]^2=E\left[(y_o^{(i)}-\alpha_1)-(y_o-\alpha_1)\right]^2$$

$$=E\left(y_o^{(i)}-\alpha_1\right)^2+E\left(y_o-\alpha_1\right)^2$$

$$-2E\left[(y_o-\alpha_1)(y_o^{(i)}-\alpha_1)\right]$$

但$E\left[(y_o-\alpha_1)(y_o^{(i)}-\alpha_1)\right]=\left[(y_o-\alpha_1)\right]^2=\left[E(y-\alpha_1)\right]^2$

代入上式，即得

$$E\left[y_o^{(i)}-y_o\right]^2=E(y_o^{(i)}-\alpha_1)^2-\left[E(y-\alpha_1)\right]^2$$

然

$$E\left(y_0^{(i)}-\alpha\right)^2=\sum_{i=1}^{k}p_{i1}\left[\sum_{j=1}^{L}p_{ij}^{(i)}y_j-\alpha\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}p_{i1}\left[\sum_{j=1}^{L}p_j^{(i)}\left(y_j-\alpha\right)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_{i1}}{N}\left[\sum_{j=1}^{L}\frac{n_{ij}}{n_{i1}}(y_j-\alpha)\right]^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\frac{\left[\sum_{i=1}^{l}n_{ij}(y_j-\alpha)\right]^2}{n_{i1}}$$

$$E(y-\alpha)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}n_{1j}\,(y_j-\alpha)$$

代入上式，並各以入除之，卽得其相率關之計算公式如下：

$$r_{y|x}=\frac{\sqrt{E(y_0^{(i)}-y_0)^2}}{\sqrt{E(y-y_0)^2}}$$

$$
=\frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_{il}}\left[\sum_{j=1}^{l}n_{ij}\left(\frac{y_i-\alpha_1'}{\lambda}\right)\right]^2-\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}n_{lj}\left(\frac{yj-\alpha_1'}{\lambda}\right)\right]^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L}n_{lj}\left(\frac{y_j-\alpha_1'}{\lambda'}\right)^2-\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}n_{lj}\left(\frac{y_i-\alpha_1'}{\lambda}\right)\right]^2}}
$$

(C) 相關率之計算步驟

按上述相關率之計算公式，即得其計算步驟如次：

(一) 選擇λ爲 y 之單位，α_1'爲新原點離舊原點之縱距離，

求各y'

$$y'=\frac{y-\alpha_1'}{\lambda}$$

(二) 求各 n_{il}

$$n_{il}=\sum_{j=1}^{l}n_{ij}$$

(三) 求各 n_{lj}

$$n_{lj}=\sum_{i=1}^{k}n_{ij}$$

(四) 求各 $n_{lj}\ y_j'$

(五) 求各 $n_{lj}\ y_j'^2$

(六)　求各 $n_{ij}\ y'_j$ 寫於各次數格之左下角

(七)　求同列各 $n_{ij}\ y'_j$ 之總和 A_i

$$A_i=\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\,y'_j$$

(八)　求各 A_i^2

$$A_i^2=\left[\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\,y'_j\right]^2$$

(九)　求各 $\frac{A_i^2}{n_{i1}}=Bi$

$$B_i=\frac{1}{n_{i1}}\left[\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\,y'_j\right]^2$$

(十)　求各次數之總和N

$$N=\sum_{i=1}^{k} n_{i1}=\sum_{j=1}^{l} n_{1j}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}$$

(十一)　求各 $n_{ij}\ y_j$ 之總和 S_{i1}

$$S_{i1} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}\, y'_j$$

(十二) 求各 $n_{ij}\, y'^2_j$ 之總和 S_{i2}

$$S_{i2} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}\, y'^2_j$$

(十三) 求各 B_i 之總和 S

$$S = \sum_{i=1}^{k} B_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_{i\cdot}} \left[\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\, y'_j \right]^2$$

(十四) 求下列各數 m'_{i1}，m'_{i2}，m'

$$m'_{i1} = \frac{S_1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} n_{ij}\, y'_j$$

$$m'_{i2} = \frac{S_1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} n_{ij}\, y'^2_j$$

$$m' = \frac{S}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_{i\cdot}} \left[\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\, y'_j \right]^2$$

(十五) 按下列公式計算其相關率

$$\eta_{y/x} = \frac{\sqrt{m' - m'^2_{i1}}}{\sqrt{m'_{i2} - m'^2_{i1}}}$$

(D) 相關率計算示例

試就下列資料(錄自馮和法：中國農村經濟資料第321頁)計算其農民階級與生活費之關係，用相關率以表示其相關度

生活費與農戶類別相關表

	每戶生活費 \ 農戶別	自耕	半自耕	佃耕	y'_j	n_{ij}	$n_{ij}y'_j$	$n_{ij}y'^2_j$
壹								
貳	1-100	1 -8	0 0	1 -8	-8	2	-16	128
叁	101-200	3 -12	4 -16	19 -76	-4	26	-104	416
肆	201-300	8 0	15 0	15 0	0	38	0	0
伍	301-450	8 40	12 60	7 35	5	27	135	675
陸	451-600	9 99	12 132	2 22	11	23	253	2783
柒	601-800	9 162	4 72	0 0	18	13	234	2412
捌	801-1000	8 208	0 0	0 0	26	8	208	5408
玖	1001-1250	1 35	0 0	0 0	35	1	35	1225
拾	1251-1500	2 90	0 0	0 0	45	2	90	4050
拾壹	n_{i1}	49	47	44		140	835	18897
拾貳		614	288	-27		陸	柒	捌
拾叁	A_i^2	376996	61504	729				
拾肆	B_i	7693.80	1308.60	16.57	9018.57			
	壹	貳	叁	肆	伍			

$$A_i^2=\left(\sum_{i=1} n_{ij}y'_j\right)^2$$

$$B_i=\frac{A_i^2}{n_{i1}}$$

上述計算步驟之第一至十三步，所應求得之數字均見下表。

步驟次序	計算對象	在相關表中之行列次序
1	y'	第 5 列
2	n_i	第 11 行
3	n_j	第 6 列
4	$n_i\ y'_i$	第 7 列
5	$n_i\ y'^2_i$	第 8 列
6	$n_{ij}\ y'_i$	各次數格之左下角
7	$\sum_{i=1}^{L} n_{ij}\ y'_i$	第 12 行
8	$\left(\sum_{i=1} n_{ij}\ y'_i\right)^2$	第 13 行
9	$\frac{1}{n_{j}}\left(\sum_{i=1} n_{ij} y'_i\right)^2$	第 14 行
10	N	第六列與第11行之總計欄
11	S_1	第列7總計欄
12	S_2	第8列總計欄
13	S	第14列總計欄

既得各S及N，即不難求其各m：(第十四步驟)

$$m'_1=\frac{S_1}{N}=\frac{845}{140}=5.964$$

$$m'_2=\frac{S_2}{N}=\frac{18897}{140}=134.98$$

$$m'=\frac{S}{N}=\frac{9818.87}{140}=94.421$$

而後按相關率公式，即得計算如次(第十五步驟)

$$\eta_{y/x}=\frac{\sqrt{m'-m_1^2}}{\sqrt{m_2-m_1^2}}$$

$$\eta_{y/x}=\frac{\sqrt{64.421-35.569}}{\sqrt{134.98-35.569}}$$

$$=\frac{\sqrt{28.852}}{\sqrt{99.411}}=\frac{5.37}{9.97}$$

$$=54\%$$

第五節：　質量統計與質量統計之相關

相關率雖亦得用以表示質量統計與數量統計之相關，但遇x與y二者均為質量統計時即不能適用。例如研究父子智愚之關係，夫妻籍貫或教育程度之關係，罪犯與眼膜色彩之關係，類此關係皆無法利用相關係數或相關率以表示其相關程度，而必須另求其他相關度以表示一質量統計與另一質量統計之相關程度。

(A)　相依係數之原理

茲據機遇數學積合機率定理，凡x與y爲兩互不相關的機遇變數，則xy之積合機率可等於機率之乘積。今吾人即可利用此積合機率定理，以測量x與y間之相關程度。苟使x與y間毫無關係，則即得 $p_{ij} = p_{i\cdot}\ p_{\cdot j}$ 或 $p_{ij} - p_{ij}\ p_{\cdot j} = 0$，否若 $(p_{ij} - p_{i}p_{\cdot j}) \neq 0$ 則x與y間即不無有關，亦即Karl Pearson氏所謂"x與y間互有依聯矣"，彼且以

$\frac{P_{ij}-P_{i.}P_{.j}}{P_{i.}P_{.j}}$ 之數量，定名爲$(x_i\ y_j)$之

"相依數"(Contingency)；復以φ^2定名爲x與y之"相依平均方"(Mean Square contingency)：

$$\varphi^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(p_{ij}-p_{i.}\ p_{.j})^2}{p_{i.}\ p_{.j}}$$

是若"相依平均方"φ^2等於零，則x與y間毫無關係，斷然無疑，若"相依平均方"不等於零，即指示x與y間容有關係矣。φ^2可用以表示x與y間相關之有無，但因其數值並無一定之最大限度(borne superieure)，遂不能竪以φ^2數值之大小，以斷其密切程度之高下，故不能即取φ^2爲指示相關程度之係數。

茲假定x與y間有嚴密之關係，即x與y間有一固定法則(Loi regide)，則當x之值爲x_i時，僅可得一相當之y值爲y_{io}乃除$x_i\ y_i$配偶以外，更無其他y值如y_j者能與x_i相配，換言之，即其他配偶$(x_i\ y_j)$之機率p_{ij}均當等於零；

$p_{ij}=0(i\neq j)$；且x值（$x_1x_2\cdots\cdots x_i\cdots\cdots x_k$）之個數，

必與y值（$y_1y_2y_3\cdots\cdots y_j\cdots\cdots y_k$）之個數相等：k=l並

x_i選定後，y必隨之亦定：

$y=y_i$，故 $p_i^{(i)}=1$，因可有下列等式：

$$p_{ii}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot i}^{(i)}=p_{i\cdot}=n_{\cdot i}$$

今且首先計算每配偶(x_iy_i)之$\dfrac{[p_{ii}-p_{i\cdot}\,p_{\cdot i}]^2}{p_{i\cdot}\,p_{\cdot i}}$

$$\frac{[p_{ii}-p_{i\cdot}\,p_{\cdot i}]^2}{p_{i\cdot}\,p_{\cdot i}}$$

$$=\frac{[p_{i\cdot}-p^2_{i\cdot}]^2}{p^2_{i\cdot}}$$

$$=[1-p_{i\cdot}]^2$$

次計算$\sum_{j=1}^{l}\dfrac{[p_{ij}-p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}]^2}{p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}}$：

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{(p_{ij} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot j})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}} = \frac{(p_{i1} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot 1})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot 1}} + \frac{(p_{i2} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot 2})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot 2}} + \cdots$$

$$+ \frac{(p_{i,i-1} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot i-1})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot i-1}} + \frac{(p_{ii} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot i})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot i}}$$

$$+ \frac{(p_{i,i+1} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot i+1})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot i+1}} + \cdots + \frac{(p_{il} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot l})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot l}}$$

但 $p_{ij} = 0\ (i \neq j)$，故

$$\sum_j \frac{(p_{ij} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot j})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}}$$

$$= p_{i\cdot}(p_{\cdot 1} + p_{\cdot 2} + \cdots + p_{\cdot i-1} + p_{\cdot i+1} + \cdots + p_{\cdot l})$$

$$+ (1 - p_{i\cdot})^2$$

$$= p_{i\cdot}(1 - p_{\cdot i}) + (1 - p_{i\cdot})^2$$

因 $p_{\cdot 1} + p_{\cdot 2} + \cdots + p_{\cdot i-1} + p_{\cdot i} + p_{\cdot i+1} + \cdots + p_{\cdot l} = 1$ 故也。

但 $p_{i\cdot} = p_{\cdot i}$ 故又

$$\sum_j \frac{(p_{ij} - p_{i\cdot}\, p_{\cdot j})^2}{p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}}$$

$1-p_{ij}$

由此可進而求相依平均方φ_2之數值：

$$\varphi^2=\sum\sum i\frac{[p_{ij}-p_{ij}\ p_{ji}]^2}{p_i\ \ p_j}$$

$$=\sum[1-p_i]$$

$$=K-\sum p_i$$

$$=K-1$$

$$\varphi^2=K-1$$

同理　　$\varphi^2=L-1$

故可寫作

$$\varphi^2=\sqrt{(K-1)(L-1)}$$

綜上所言，則φ^2之變更，可由零以至 $\sqrt{(K-1)(L-1)}$

Tschuprow 即根據此算學結果，擬其相"依係數"(

Coeffcieht de contingence dc Tschuprow) C_t之定義如次:

$$C_t=\frac{\varphi^2}{\sqrt{(K-1)(L-1)}}$$

倘使x與y間毫無關係，則該係數之數值爲零；若其關係非常密切而一定不易，則彼之數值等於一；若x與y雖無固定關係而有相當關係之時，則彼之數值當處於零與一之間，其值愈大，其關係愈密，故該係數即得用以表示相關度。

Karl Pearson 氏亦曾另擬一相依係數C_p —Coefficient ieContingence de Karl Pearson：

$$C_p=\sqrt{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}}$$

該C_p於常態相關時得與相關係數相等，故一般應用統計者採取此Karl Pearson之公式，而吾人亦僅依此披氏公式以敍述其計算步驟。（今後 C_p 將簡寫爲C）

(B) 相依係數之計算公式

按相依係數之定義公式爲

$$C=\sqrt{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}}$$

$$\varphi^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{L}\frac{(p_{ij}-p_{i|}\ p_{|j})^2}{p_{i|}\ p_{|j}}$$

則其實際計算當從φ^2入手，然φ^2得展開如下式：

$$\varphi^2=\sum_{j=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left\{\frac{p_{ij}{}^2}{p_{i.}\ p_{.j}}-2p_{ij}+p_{i.}p_{.j}\right\}$$

但

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}p_{ij}=1$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}p_{i.}\ p_{.j}=1$$

故

$$\varphi^2=\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{p_{ij}{}^2}{p_{i.}\ p_{.j}}\right)-1$$

將機率化為次數：

$$P_{i.}=\frac{n_{i.}}{N}$$

$$P_{.j}=\frac{n_{.j}}{N}$$

$$P_{ij}=\frac{n_{ij}}{N}$$

代入上式，卽得

$$\varphi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}\ n_{.j}} - 1$$

$$\varphi^2 = S - 1$$

$$S = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}\ n_{.j}}$$

$$= 1 + \varphi^2$$

故相依係數之計算公式可寫如下式：

$$C = \sqrt{\frac{S-1}{S}}$$

(C)　相依係數之計算步驟

按上述相依係數之計算公式，卽得其計算步驟如次：

求各 $n_{i.}$

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}$$

(二)　求各 $n_{.j}$

$$n_{.j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$$

(三) 求各 n^2_{ij} 寫於各次數格內之左上角

(四) 求各 $n_i \quad n_j$ 寫於各次數格內之左下角

(五) 求各 $\frac{n^2_{ij}}{n_i \quad n_j}$ 寫於各次數格內之右下角

(六) 求 $\sum_{j=1}^{l} \frac{n_{ij}}{n_i \quad n_j} = A_i$

(七) 求 $S = \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{l} \frac{n_{ij}^2}{n_i \quad n_j} \right] = \sum_{i=1}^{k} A_i$

(八) 按下列公式計算C：

$$C = \sqrt{\frac{S-1}{S}}$$

(D) 相依係數計算示例

茲就下列資料(錄自Niceforo: La methode Statistique 第471頁) 計算其犯罪類別與眼膜顏色之關係，用相依係數以表示其相關度。

犯罪類別與眼膜顏色相關表

壹	眼膜顏色 / 犯罪類別	孤色	黃色	橘色	聚色	棱色	$n_{i.}$
貳	竊賊	2704 0.0685 52 39480	16384 0.1670 128 9`136	58564 0.3072 242 195632	9604 0.1166 98 82344	1936 0.0624 44 31020	564
叁	殺人犯	100 0.0094 10 10640	1089 0.0412 33 26448	5625 0.1099 75 51376	784 0.0353 28 22192	36 0.0043 6 8360	152
肆	風化犯	64 0.0136 8 4690	169 0.0145 13 11658	441 0.0195 21 22646	400 0.0409 70 9782	25 0.0068 5 3685	67
伍	$n_{.j}$	70	174	338	147	55	783
陸	$\sum_{i=1}^{l}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}}$	0.0915	0.2227	0.4366	0.1928	0.0735	1.0171
	壹	貳	叁	肆	伍	陸	柒

上述計算步驟之第一至第七步所應求得之數字均見下表

計算步驟	計算對象	在相關表中之行列次序
1	$n_{i\cdot}$	第伍行
2	$n_{\cdot j}$	第七列
3	n^2_{ij}	各次數格之左上角
4	$n_{i\cdot}\ n_{\cdot j}$	各次數格之左下角
5	$\frac{n^2_{ij}}{n_{i\cdot}\ n_{\cdot j}}$	各次數格之右上角
6	A_i	第六行
7	S	第六行之總計欄

既得S，即不難按下列公式求C(第八步驟)

$$C=\sqrt{\frac{S-1}{S}}$$

$$=\sqrt{\frac{1.0171-1}{1.0171}}$$

$$=0.13$$

第三章　相關函數

第一節　導言

當兩變量x與y均爲數量統計時，則除相關度外，尙得進而推求其x與y間之函數關係。特此種函數關係之性質與普通數學函數稍異。蓋統計上所能推求之關係，非單個x與單個y間之關係，乃係一x與其相應對之y之平均數之關係。今凡表示此平均關係之函數，即名曰"相關函數"（亦有名曰迴歸函數或感應公式）而得以下列兩式表示之：

$$y_{o}^{(i)} = F_{(xi)}$$

$$x_{o}^{(i)} = G_{(yi)}$$

相關函數之研究，即如何由實際統計資料以確定其相關函數之形式，如何確定其由相關函數計算所得諸數值與其實際數字之差度，該類問題實即統計數字之配合問題耳。關於配合方法之一般理論，當於配合論一章內敍述之。本章僅就其在相關論中最通用之配合公式（直線公式與二次拋物線公式）加以敍述。

設使相關函數爲一一次代數方程式，則其圖表卽爲一直線，而x與y之關係亦得稱爲„直線相關"。否則，其圖形卽爲一曲線，而x與y之關係得稱爲„曲線相關"。今卽按其相關函數形式之不同而分述之如次。

第二節　　直線相關

茲爲便於敍述起見，擬專就y從x之相關函數論述之。該相關函數之數學公式爲：$y_o^{(i)} = F_{(xi)}$

$y_o^{(i)}$表示與各 x_i 相應對之y之平均數。設使x與y有關，則該 $y_o^{(i)}$之數值將隨 x_i而不同，並 y與 x_i之間容有函數之關係存焉。如果能假定x與y間存有函數關係，則卽當進而確定其函數之形式；旣經確定其形式，卽可進以確定其常數而公式於焉確定，旣得其公式，卽可藉以推求各y之局部平均數理論值而使與實際數字(經驗值)相比較。今在直線相關之條件下，卽須(A)直線之判定(B)常數之確定(C)理論值與經驗值之比較。

(A) 直線之判定

欲判斷相關函數之形式，可就相關表之數字或其點圖之分佈狀況加以觀察。假使相關表中各行列之較大次數或其點圖之分佈密集於一直線之上下左右，則即可判定其爲直線相關。然比較精密之方法，應先就實際資料計算各局部平均數 $y_o^{(i)}$

$$\begin{cases} x_1 & x_2 \cdots\cdots x_i & \cdots\cdots & x_k \\ y_o^{(1)} & y_o^{(2)} \cdots\cdots y_o^{(i)} & \cdots\cdots & y_o^{(k)} \end{cases}$$

然後將各該配對數値 $\left[x_i,\ y_o^{(i)}\right]$ 用圖表方法各求得其經驗點。苟各該經驗點之分佈成一直線，則即可判定y從x之相關爲直線性。倘使各x成算術級數，則亦得就各局部平均數 $y_o^{(i)}$ 之數値加以觀察。苟各該局部平均數 $y_o^{(i)}$ 亦成算術級數(或近乎算術級數)，則亦可藉以判定x與y成直線相關。

(B) 常數之確定

旣經判定其爲直線相關，卽假定其局部平均數函數如下式：

$$y_o^{(i)} = a + bx_i$$

a為其相關函數之常數項，b爲其變數x項之係數，該係數亦有取名爲„迴歸係數"(Coefficient de regression)。常數之確定，卽如何利用實際資料以推求其常數項a與其迴歸係數b。

設使僅有二個配對 $\left[x_1, y_o^{(1)}\right]$ 與 $\left[x_2, y_o^{(2)}\right]$，則a,b，兩數値卽不難由下列兩式推求之：

$$\begin{cases} y^{(1)} = a + bx_1 \\ y^{(2)} = a + bx_2 \end{cases}$$

然普通統計上 $\left[x_i, y_o^{(i)}\right]$ 之配對不止兩個(k>2)，是則a,b之推求，必須另憑他法。此類方法甚多，惟以最小二乘法爲最適用。所謂最小二乘法者，卽須使各經驗値與各理論値之差數之二次乘方之希望數爲最小，亦卽

$$E\left[y_o^{(i)} - (a + bx_i)\right]^2 = \text{最小}$$

依據此一原則，卽得

$$\begin{cases} E(y)=a+bE(x) \\ E(xy)=aE(x)+bE(x^2) \end{cases}$$

解此二式，卽得

$$a=\frac{E(y)E(x^2)-E(x)E(xy)}{E(x^2)-\left[E(x)\right]^2}$$

$$b=\frac{E(xy)-E(x)E(y)}{E(x^2)-)-\left[E(x)\right]^2}$$

設使改以$(x-x_o)$替代x，$(y-y_o)$替代y，則a，b之數值亦得寫如下式：

$$\begin{cases} a=o \\ b=\dfrac{E\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]}{E(x-x_o)^2} \end{cases}$$

而其相關函數亦得隨之變成下式：

$$y-y_o=b(x-x_o)$$

或

$$\begin{cases} y_o^{(i)}=(y_o-bx_o)+bx_i \\ b=\dfrac{E\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]}{E(x-x_o)^2} \\ a=y_o-bx_o \end{cases}$$

同理，亦得推求x從y之局部平均數 $x_o^{(j)}$ 之函數。茲爲便於區別起見，將直線相關函數一一改寫如次：

$$x_o^{(j)}=a_1+b_{12}\ y_j$$

$$y_o^{(i)}=a_2+b_{21}\ x_i$$

$$b_{12}=\frac{E\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]}{E\left[y-y_o\right]^2}$$

$$b_{21}=\frac{E\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]}{E(x-x_o)^2}$$

將上列二式相乘，

$$b_{12}b_{21}=\frac{\left\{E\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]\right\}^2}{E(x-x_o)^2E(y-y_o)^2}$$

故亦得

$$b_{21}b_{12}=r^2$$

r 爲相關係數。故相關係數之數值等於兩迴歸係數之幾何平均數：

$$r=\sqrt{b_{12}\quad b_{21}}$$

設以σ_1表示x之標準差，σ_2表示y之標準差，則迴歸係數之數值，亦得由相關係數與標準差之數值推求之：

$$b_{21}=\frac{E\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]}{E(x-x_o)^2}$$

$$=\frac{E\left[\ (x-x_o)(y-y_o)\ \right]}{\sqrt{E(x-x_o)^2}\sqrt{E(y-y)^2}}\circ\frac{\sqrt{E(y-y_o)^2}}{\sqrt{E(x-x_o)^2}}$$

故

$$b_{21}=r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

同理

$$b_2=r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

(C)　經驗值與理論值之比較

既求得其常數，則其相關函數即已完全確定。然後由該相關函數即不難計算其與各x相應對之數值，由是求得之數值，即名曰理論值，試以z表示之：

$$z_1=a+bx_1$$
$$z_2=a+bx^2$$
$$\vdots$$
$$zi=a+bxi$$
$$\cdots\cdots$$

$$z_k = a + bx_k$$

各該 z 之數列未必一一與各$y^{(i)}$相符合，意即各經驗點未必盡在於直線上，故尚須將各z與$y^{(i)}$ 相比較，而攷察其差別之大小。設使其差別過鉅，則該直線相關函數即無甚價值可言。設使其差別尚微，則該直線相關函數，即可認爲適用。至其差度之大小，普通即以各y與各z間之標準差 S_y 表示之。該差度亦名"標準誤"
(Standard error)

$$S_y^2 = E(y_o^{(i)} - z_i)^2$$

$$= E\left[y_o^{(i)} - (a + bx_i) \right]^2$$

亦有用下式表示之：

$$d_{2 \cdot 1} = y - (a + bx)$$

$$E(d_{2 \cdot 1}^2) = \sigma_{2 \cdot 1}^2 = S_y^2$$

而$\sigma_{2 \cdot 1}$亦名"y之一級標準差"。($\sigma_y = \sigma_2$名曰"y之零

級標準差")。依據此一公式，亦得推求標準誤與相關係數之關係，因

$$S_y^2=\sigma_{2\cdot 1}^2$$

$$=E\left(d_{2\cdot 1}^2\right)$$

$$=E\left[y-(a+bx)\right]^2$$

$$=E\left[(y-y_o)-b(x-x_o)\right]^2$$

$$=E(y-y_o)^2-2bE\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]+b^2E\left[(x-x_o)\right]^2$$

然

$$E(x-x_o)^2=\sigma_1^2$$

$$E(y-y_o)^2=\sigma_2^2$$

$$E\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]=r\sigma_1\sigma_2$$

$$b=r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

則代入上式，即得

$$\sigma_{2\cdot 1}^2=\sigma_2^2(1-r^2)$$

或

$$r=\sqrt{1-\frac{\sigma_{2.1}^2}{\sigma_2^2}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{Sy^2}{\sigma y^2}}$$

同理，設將各 $x_o^{(i)}$ 與其理論値相比較，亦得計算其 x 之標準誤，並亦得其標準誤(或x之"一級標準差")與相關係數之關係如下：

$$S_x^2=\sigma_{1.2}^2=\sigma_1^2(1-r^2)$$

或

$$r=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1.2}^2}{\sigma_1^2}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{Sx^2}{\sigma x^2}}$$

是則相關之疏密亦得隨高級標準差對零級標準差之比例如 $\left(\frac{\sigma_{2.1}}{\sigma_2}\right)$ 或 $\left(\frac{\sigma_{1.2}}{\sigma_1}\right)$ 之大小而不等。高級標準差自必小於零級標準差。苟使高級標準差與零級標準差對比之數値愈接近於零，則其相關係數愈大。苟使該對比之數値愈接近於一，

則其相關係數愈微。然則，相關係數之大小，正與標準誤相反，換言之，標準誤愈接近於零，即相關函數愈接近乎直線，而相關係數亦愈接近於一，否則，標準誤愈接近於標準差，即相關函數愈與直線相乖離，而相關係數亦愈接近於零，故相關係數之所以能用作相關度，亦惟在直線相關時最稱適宜。蓋在曲線相關，則相關係數之數值，似嫌過低而不足用以表示相關度。今試與相關率相比較，即可證明相關係數恆小於相關率，而惟直線相關時二者始能相等，蓋

$$\eta^2_{y/x}=\frac{E\left[y_o^{(i)}-y_o\right]^2}{\left[y-y_o\right]^2}=\frac{\sigma^2_{my}}{\sigma^2_y}$$

然

$$E\left[y_o^{(i)}-y_o\right]^2=E\left[(z_i-y_o)-(z_i-y_o^{(i)})\right]^2$$

$$=E(z_i-y_o)^2+E(z_i-y_o^{(i)})^2$$

$$-2E\left[(z_i-y_o)(z_i-y_o^{(i)})\right]$$

$$z_i=y_o+b(x_i-x_o)$$

$$= y_o + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r \ (x_i - x_o)$$

$$z_i - y_o = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r (x_i - x_o)$$

$$E\left[\ z_i - y_o\right]^2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} r^2 E(x_i - x_o)^2$$

$$= \sigma_2^2 r^2$$

$$z_i - y_o^{(i)} = y_o - y_o^{(i)} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r (x_i - x_o)$$

$$E\left[(z - y_o)(\ z_i - y_o^{(i)})\ \right] = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r E\left[(x_i - x_o)(y_o - y_o^{(i)})\right]$$

$$+ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} r^2 E\ (x_i - x_o)^2$$

$$= \sigma_2^2 r^2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r E\left[(y_o - y_o^{(i)})(x_i - x_o)\right]$$

但

$$y_o - y_o^{(i)} = y_o - \sum_{j=1}^{l} p_{ij}^{(i)} y_i$$

$$= \left[\ \sum_{j=1}^{l} p_{ij}^{(i)} (y_j - y_o)\ \right]$$

$$E\left[(x_i-x_o)(y_o-y_o^{(i)})\right]=-\sum_{i=1}^{k}p_{i}(x_i-x_o)\sum_{j=1}^{l}p_{|j}^{(i)}(y_j-y_o)$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}p_{ij}(x_i-x_o)(y_j-y_o)$$

$$=-E\left[(x-x_o)(y-y_o)\right]$$

$$=-r\,\sigma_1\,\sigma_2$$

代入上式，即得

$$E\left[(z_i-y_o)\ (z_i-y_o^{(i)})\ \right]=0$$

故

$$E\left[y_o^{(i)}-y_o\right]^2=E\ (z_i-y_o)^2+r^2\sigma_2^2$$

因得

$$\frac{E\left[y_o^{(i)}-y_o\right]^2}{E\left[\ y-y_o\ \right]^2}-r^2=\frac{E\left[\ z_i-y_o\right]^2}{E\left[\ y-y_o\ \right]^2}$$

亦即

$$\eta^2_{y/x}-r^2=\frac{E\left[\ z_i-y_o\right]^2}{E\left[\ y-y_o\ \right]^2}>0$$

同理

$$n^2_{y/x}-r^2>0$$

故相關率之數值必大於相關係數，而僅在標準誤$\sigma_{1\cdot 2}$或$\sigma_{2\cdot 1}$等於零時，二者始相等，換言之，即當直線相關時，相關率與相關係數相等；故($n^2y/x-r^2$)或($n^2x/y-r^2$)之數值亦得用以表示相關函數之直線性(亦有名之曰„Blakeman之直線性判別測驗„ Test of linearity of regression by Blakemans criterion)

第三節 直綫相關示例

試就前章配偶年齡相關以研究其夫年從妻年之相關函數。

(A) 直線之判定

試由該相關表計算其與妻年18歲，23歲……48歲相配對之丈夫之平均年齡。該各局部平均年齡(即各y_2 (i))之計算步驟如次：

(1)求各n_q

$$n_{i|} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}$$

(2)選擇α_2,λ_2求各

$$y' = \frac{y - \alpha_2}{\lambda_2}$$

(3)求各$n_{i|j}\ y'_j$(寫於各次數格之左下角)

(4)求各$S^{(i)}_{\mu}$

$$S^{(i)}_{\mu} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}\, y'_j$$

(5)求各 $m^{(i)}_{\mu}$

$$m^{(i)}_{\mu} = \frac{S^{(i)}_{\mu}}{n_{i|}} = \frac{1}{n_{i|}} \sum n_{ij}\ y'_j$$

(6)求各局部平均數$y^{(i)}_{o}$

$$y^{(i)}_{o} = \alpha_2 + \lambda_2 m^{(i)}_{\mu}$$

上述第一步至第五步所應求得之數字均見下表

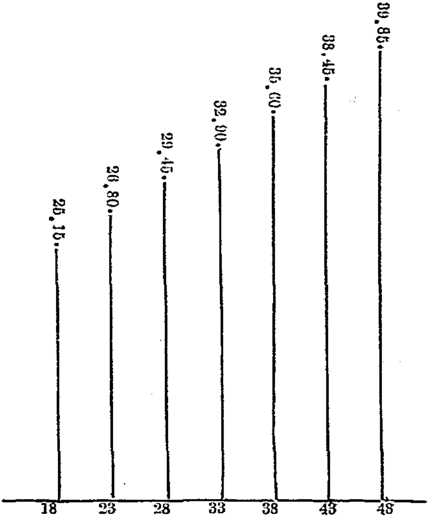
步驟次序	計算對象	在相關表中之行列次序
1	n_{ij}	第九行
2	y'	第九列
3	$n_{ij}\ y'$	各次數格之左下角
4	$S^{(i)}_{\mu}$	第十行
5	$m^{(i)}_{\mu}$	第十一行

既得各 $m^{(i)}_{\mu}$，卽不難一一計算其局部平均數 $y^{(i)}_{o}$（第六步驟）。玆將其結果列成下表

妻年	其丈夫之平均年齡
18	25.15
23	26.80
28	29.45
33	32.90
38	35.60
43	38.45
48	39.55

將上表各配對值繪成下圖：

配偶平均年齡分佈圖



就上圖各點之分佈狀況加以觀察，似形成一直線，因即得暫時判定其爲直線相關。

(B) 常數之確定

既經假定其直線相關，即得其相關函數之形式如下：

$$y = a + bx$$

或

$$y - y_0 = b(x - x_0)$$

$x_0 = x$之平均數＝妻子之平均年齡

$= \alpha_1 + \lambda_1 m_1^1$

$= 33 + 5(-1.3613)$

$= 26.19$歲

$y_0 = y$之平均數＝丈夫之平均年齡

$= \alpha_2 + \lambda_2 m_1'$

$= 33 + 5(-0.8363)$

$= 28.82$歲

而

$$b = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$\sigma_1 = \lambda_1\sqrt{m_2' - (m_1')^2}$$

$$= 5\sqrt{3.4517 - (1.3613)^2}$$

$$= 6.3$$

$$\sigma_2 = \lambda_2\sqrt{m_2' - (m_1')^2}$$

$$= 5\sqrt{2.2421 - (0.8363)^2}$$

$$= 6.2$$

$$r = 0.54$$

$$b = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0.54\frac{6.2}{6.3}$$

$$= \frac{E[(x-x_0)(y-y_0)]}{E(x-x_0)^2}$$

$$= \frac{0.8514}{1.5986} = 0.533$$

$$b = 0.533$$

$$a = y_0 - bx_0$$

$=28.82-0.53\times 26.19$

$=14.94$

故其直線公式爲

$$y=14.94+0.533x$$

(C) 經驗值與理論值之比較

既經求出其相關函數，即得藉以計算其與各 x 相應對之 y 之數值，並得列表比較如次：

x	$y_o^{(i)}$	$z_i=a+bx_i$
18	25.15	24.48
23	26.80	27.13
28	29.45	29.78
33	32.90	32.43
38	35.60	35,08
43	38.45	37.73
48	39.85	40.38

由上表亦可觀察其理論值與經驗值相差之大概情形。但若必欲得一確切數字以表示其各經驗值y與其理論值z之差度

，則尙須計算其標準誤。茲且將標準誤之計算及其步驟列表如次：（假定已知其迴歸係數之數値）

計算步驟	計 算 對 象	在相關表中行列次序
1	$n_{ij}\ y'_j$	各次數格之左下角
2	$n_{ij}\ y'^2_j$	各次數格之右上角
3	$\sum n_{ij}\ y'_j$	第 拾 行
4	$m_1^{(i)}=\frac{1}{n_i}\sum n_{ij}\ y'_j$	第 拾 壹 行
5	$\sum n_{ij}\ y'^2_j$	第 拾 貳 行
6	$m_2^{(i)}=\frac{1}{n_i}\sum n_{ij} y'^2_j$	第 拾 叁 行
7	$z'_i=\frac{z_i-\alpha^2}{\lambda^2}$	第 拾 肆 行
8	z'^2_i	第 拾 伍 行
9	$m_2^{(i)}-z'^2_i$	第 拾 陸 行
10	$n_i\left[m_2^{(i)}-z'^2_i\right]$	第 拾 柒 行
11	$\sum_{i=1}^{k} n_i\left[m_2^{(i)}-z'^2_i\right]$	第拾柒行之總計欄

既得其 $\sum_{i=1}^{k} n_i\left[m_2^{(i)}-z'^2_i\right]$，卽不難推求其標準誤 S_y 矣。

$$\left(\frac{S}{\lambda_2}\right)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{ij}\left[m_{i'}^{(i)}-z_i'^2\right]$$

$$=\frac{53925.2887}{42841}=1.2587$$

$$\sigma_{2\cdot 1}=\quad S_y=\lambda_2\sqrt{1.2587}=1.12\times 5=5.6$$

附註：吾人亦得由$\frac{\sigma_{2\cdot 1}}{\sigma_2}$推求相關係數r

$$r=\sqrt{1-\left(\frac{\sigma_{2\cdot 1}}{\sigma_2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-0.81}$$

$$=\sqrt{0.29}$$

$$=0.54$$

配偶年齡相關表

壹	夫年 \ 妻年	16—20	21—25	26—30	31—35	36—40	41—45	46—50	y'
貳	16—20	6966 774 —2322	3834 426 —1278	1152 128 —384	360 40 —120	234 39 —78	18 2 —6	9 1 —3	—3
叁	21—25	13604 3401 —6802	24344 6086 —11172	8628 2157 —4314	1636 409 —818	384 96 —192	156 39 —78	100 25 —50	—2
肆	26—35	2078 2078 —2078	6739 6739 —6739	5720 5820 —5725	1343 1343 —1343	382 382 —382	138 138 —138	49 40 49	—1
伍	31—35	0 498 0	0 1669	0 2646 0	0 1601 0	0 442 0	0 18) 0	0 78 0	—0
陸	36—40	140 140 140	441 441 441	838 838 838	852 852 852	512 512 512	221 221 212	105 105 105	1
柒	41—45	160 40 80	680 170 340	1376 344 688	1520 380 760	1164 291 582	1000 250 500	532 188 266	2
捌	46—50	189 21 63	486 54 162	1206 134 402	1755 195 585	168 187 561	1872 208 624	1458 162 486	3
玖	n_{i1}	6947	15585	11967	4820	1936	1035	5,,	42841
拾	$\sum n_{i1i} y'_i$	— 10914	— 19246	— 8490	— 84	1008	1128	755	
拾壹	$m'_{11}{}^{(i)}$	— 1.57	— 1.24	— 0.71	— 0.02	0.52	1.09	1.37	
拾貳	$\sum n_{i1i}\, y'^2_i$	— 23182	— 36542	— 16920	7466	4359	3400	2258	
拾叁	$m'_{2}{}^{(i)}$	3.3298	2.3437	1.5810	1.5490	2.2516	3.2914	4.0741	
拾肆	z'_i	— 1.60	— 1.07	— 0.53	0	0.53	1.07	1.60	
拾伍	z'^2_i	2.5600	1.449	0.2809	0	0.2809	1.1449	25.000	
拾陸	$m'_{12}{}^{(i)} - z'^2_i$	0.8698	1.1988	1.3001	1.5490	1.9706	2.1465	1.5141	
拾柒	$n_{i1}\left[m_2^{(i)} - z'^2_i\right]$	5347.8006	1863.2986	15558.2907	7466.1800	3815.0816	2217.3345	887.2973	53925.2887
	壹	貳	叁	肆	伍	陸	柒	捌	玖

枝甫八〇一入抽

第四節 曲線相關

設使直線相關與實際資料不相適合，則即可改以曲線相關試之。惟曲線之種類不一，勢難一一分述，今且僅就二次拋物線敍述之。關於曲線形式之判定以及理論值與經驗值之比較與直線相關大略相同，茲不贅述。本節且專論其常數之確定。

假定其爲二次拋物線相關，即假定其相關函數之公式爲

$$y_o^{(i)}=a+bx+cx^2$$

吾人亦得憑最小二乘方法以確定其常數。由下列三式（亦名„規則方程式"normal equations）即不難推求其常數a,b,c

$$\begin{cases} E(y) = a+bE(x)+cE(x^2) \\ E(xy) = aE(x)+bE(x^2)+cE(x^3) \\ E(x^2y) = aE(x^2)+bE(x^3)+cE(x^4) \end{cases}$$

解此聯立一次方程式，即得

$$
a=\frac{\begin{vmatrix} E(y) & E(x) & E(x^2) \\ E(xy) & E(x^2) & E(x^3) \\ E(x^2y) & E(x^3) & E(x^4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & E(x) & E(x^2) \\ E(x) & E(x^2) & E(x^3) \\ E(x^3 & E(x^3) & E(x^4) \end{vmatrix}}
$$

$$
b=\frac{\begin{vmatrix} 1 & E(y) & E(x^2) \\ E(x) & E(xy) & E(x^3) \\ E(x^2) & E(x^2y) & E(x^4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & E(x) & E(x^2) \\ E(x) & E(x^2) & E(x^3) \\ E(x^2) & E(x^3) & E(x^4) \end{vmatrix}}
$$

$$
c=\frac{\begin{vmatrix} 1 & E(x) & E(y) \\ E(x) & E(x^2) & E(xy) \\ E(x^2) & E(x^3) & E(x^2y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & E(x) & E(x^2) \\ E(x) & E(x^2) & E(x^3) \\ E(x^3) & E(x^3) & E(x^4) \end{vmatrix}}
$$

將$E(x)$,$E(x^2)$,$E(x^3)$,$E(x^4)$,$E(y)$,$E(xy)$,$E(x^2y)$各值一一算出。代入上式，卽得a,b,c之數值矣。惟此類公式，於實際計算時頗感繁複，故亦有另採其他較簡方法，惟精確程度則稍差，茲且從略。（示例亦暫從略）

又在曲線相關之假定中，其相關度得應用相關指數或相關率以表示之。相關率已詳見上章，相關指數之公式為

$$\rho_{y/x}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{2.1}}{\sigma_2^2}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{S^2_y}{\sigma^2_y}}$$

$\sigma_{2.1}$仍表示一級標準差，S_y仍表示標準誤

$$S^2_y=\sigma^2_{2.1}=E\left[y-(a+bx+cx^2)\right]^2$$

第四章　偏相關與複相關

第一節　導言

宇宙現象，錯綜複雜，甲現象之變化，不僅與另一現象乙有關，且得與其他現象丙，丁……等現象皆有關係。例如某一物價之變化，不僅受其生產量之多寡而貴賤，並將隨貨幣之購買力，替代品之價格，及其各項生產要素之成本等變化而交受其影響。再如子女某一品質之特性，不僅受其父或母一人之影響，而亦得並受其父母祖父母以及其前代祖宗之遺傳，故有關於此類問題之相關研究，不僅應推求甲與乙之相關度多少及其相關函數如何，尚得推求甲丙，甲丁，乙丙，乙丁，丙丁……各該兩現象間之相關，亦得推求甲與乙，丙，丁，……諸現象間之相關如何。今若專求甲乙兩現象間之相關而假定其他現象丙，丁……不變，則此類研究卽名曰„偏相關"(Partial correlation)。設若研究甲現象與其他各現象乙，丙，丁……之相關，則此類研究卽名曰„複相關"(multiple Correlation)。玆且分述之如次：

附註：吾人亦得消除甲現象所受丙，丁……………諸現象之影響而後再推求其與乙現象之相關，則此類研究即名曰„部分相關"(Part Correlation)本書限於篇幅，暫且從略。

第二節　偏相關

茲爲便於說明起見，僅就三個變數 x,y,z，之相關敍述之。又多個變數之相關論較深奧，本書擬專述直線性相關。所謂直線性相關者，即其相關函數均爲一次代數方程式，就數學公式言，即

$$x=a_1+b_{12\cdot3}y+b_{13\cdot2}z$$

$$y=a_2+b_{21\cdot3}x+b_{23\cdot1}z$$

$$z=a_3+b_{31\cdot2}x+b_{32\cdot1}y$$

而偏相關研究，即一方面須確定各該相關函數之常數 a，b，另一方面須確定各該變數間之相關度。

附註：a_1,a_2,a_3 爲常數項，$b_{12\cdot3}$，$b_{13\cdot2}$，$b_{21\cdot3}$，$b_{23\cdot1}$，$b_{31\cdot2}$，$b_{32\cdot1}$，稱爲„偏迴歸係數"(Coefficient of Partial regression)。偏迴歸係數之指標有兩部分而隔以

一點，前者為正指標，後者為附指標，正指標有次序之關係而附指標無之。例如$b_{21\cdot3}$為y從x之偏迴歸係數，而$b_{12\cdot3}$為x從y之偏迴歸係數，兩者不相同。至$b_{12\cdot34}$與$b_{12\cdot43}$則同為第一變數從第二變數之偏迴歸係數，而假定第三第四兩變數為不變者。又偏迴歸係數有級次之分別。其級次之大小隨附指標之數目而為零級，一級二級…………偏迴歸係數。例如$b_{12\cdot3}$為一級偏迴歸係數，$b_{12\cdot34}$為二級迴歸係數，而b_{12}即為零級迴歸係數。

(A) 偏迴歸係數

試專就下式討論之

$$x=a_1+b_{12\cdot3}y+b_{13\cdot2}z$$

欲推求該公式之常數，亦得憑最小二乘法求得其規則方程式如下：

$$\begin{cases} E(x)=a_1+b_{12\cdot3}E(y)+b_{13\cdot2}E(z) \\ E(xy)=a_1E(y)+b_{12\cdot3}E(y^2)+b_{13\cdot2}E(yz) \\ E(xz)=a_1E(z)+b_{12\cdot3}E(yz)+b_{13\cdot2}E(z^2) \end{cases}$$

設使

$$d_1=x-x_0$$

$$d_2=y-y_0$$

$$d_3=z-z_0$$

則上列聯立一次方程式即得改寫如次：

$$E(d_1)\quad=a_1+b_{12\cdot3}E(d_2)+b_{13\cdot2}E(d_3)$$

$$E(d_1d_2)=a_1E(d_2)+b_{12\cdot3}E(d^2_2)+b_{13\cdot2}E(d_2d_3)$$

$$E(d_1d_3)=a_1E(d_3)+b_{12\cdot3}E(d_2d_3)+b_{13\cdot2}E(d_3^2)$$

然則

$$E(d_1)=E(d_2)=E(d_3)=$$

故

$$a_1=O$$

$$\begin{cases}E(b_1b_2)=b_{12\cdot3}E(d^2_2)+b_{13\cdot2}E(d_2d_3)\\E(d_1d_3)=b_{12\cdot3}E(d_2d_3)+b_{13\cdot2}E(d_3^2)\end{cases}$$

因得

$$b_{12\cdot3}=\frac{\begin{vmatrix}E(d_1d_2) & E(d_2d_3)\\ E(d_1d_3) & E(d^2_3)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}E(d^2_2) & E(d_2d_3)\\ Ed_2d_3) & E(d_2^3)\end{vmatrix}}$$

$$b_{13\cdot2}=\frac{\begin{vmatrix}E(d_2^2) & E(d_1d_2)\\ E(d_2d_3) & E(d_1d_3)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}E(d_2^2) & E(d_2d_3)\\ E(d_2d_3) & E(b_3^2)\end{vmatrix}}$$

又一級偏迴歸係數亦得化為零級迴歸係數及零級相關係數之函數；且就 $d_{12\cdot3}$ 化之如次：

$$b_{12\cdot3}=\frac{E(d_1d_2)E(d_3^2)-E(d_1d_3)E(d_2d_3)}{E(d_2^2)E(d_3^3)-E(d_2d_3)E(d_2e_3)}$$

然

$$E(d_1d_2)=b_{12}E(d_2^2)=b_{21}E(d_1^2)$$

$$E(d_1d_3)=b_{13}E(d_3^2)=b_{21}E(d_1^2)$$

$$E(d_2d_3)=b_{23}E(d_3^2)=b_{32}E(d_2^2)$$

代入上式，即得

$$b_{12\cdot3}=\frac{b_{12}E(d_2^2)E(d_3^2)-b_{13}E(d_3^2)b_{32}E(d_2^2)}{E(d_2^2)E(d_3^2)-b_{23}E(d_3^2)b_{32}E(d_2^2)}$$

$$=\frac{b_{12}-b_{13}b_{32}}{1-b_{23}b_{32}}$$

同理，

$$b_{21\cdot3}=\frac{b_{21}-b_{23}b_{32}}{1-b_{13}b_{31}}$$

餘仿此。

至迴歸係數與相關係數之關係（相關係數之指標並無次序關係即$r_{12}=r_{21}$），則按

$$b_{12}=r_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$b_{21}=r_{12}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$b_{13}=r_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

$$b_{31}=r_{13}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$$

$$b_{23}=r_{23}\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

$$b_{23}=r_{32}\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$$

代入迴歸係數之公式，即得

$$b_{12.3}=\frac{r_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-r_{13}\frac{\sigma}{\sigma_3}\,r_{23}\frac{\sigma_3}{\sigma_2}}{1-r_{23}\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\,r_{23}\frac{\sigma_3}{\sigma_2}}$$

$$b_{12.3}=\frac{r_{12}-r_{13}\,r_{23}}{1-r_{23}^2}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

同理，

$$b_{21.3}=\frac{r_{12}-r_{13}\,r_{23}}{1-r_{13}^{2}}\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

餘仿此。

由此可見一級偏迴歸係數之推求，可由零級迴歸係數與零級相關係數。並吾人亦得由一級偏迴歸係數以求二級偏迴歸係數，由二級而三級，…………以至於由n－3級以推求n－2級。其普通公式如次（證解從略）

$$b_{12.34\cdots n}=\frac{b_{12.34\cdots(n-1)}-b_{1n.34\cdots(n-1)}\,b_{n2.34\cdots(n-1)}}{1-b_{2n.34\cdots(n-1)}\,b_{n2.34\cdots(n-1)}}$$

$$b_{21.34\cdots n}=\frac{b_{21.34\cdots(n-1)}-b_{2n.34\cdots(n-1)}\,b_{n1.34\cdots(n-1)}}{1-b_{1n.34\cdots(n-1)}\,b_{n1.34\cdots(n-1)}}$$

或寫為相關係數與標準差之函數如次：

$$b_{12.34\cdots n}=\frac{r_{12.34\cdots(n-1)}-r_{1n.34\cdots(n-1)}\,r_{2n.34\cdots(n-1)}}{1-r^{2}_{2n.34\cdots(n-1)}}$$

$$\frac{\sigma_{1.34\cdots(n-1)}}{\sigma_{2.34\cdots(n-1)}}$$

$$b_{21.34\cdots n}=\frac{r_{12.34\cdots(n-1)}-r_{1n.34\cdots(n-1)}r_{2n.34\cdots(n-1)}}{1-r^2_{1n.34\cdots(n-1)}}$$

$$\frac{\sigma_{2.34\cdots(n-1)}}{\sigma_{1.34\cdots(n-1)}}$$

$\sigma_{1.34\cdots(n-1)}$及$\sigma_{2.34\cdots(n-1)}$名曰"高級標準差"[此間爲(n－3)級標準差]其級次亦隨其附指標之個數以確定者。例如第一變數之(n－1)級標準差卽爲

$$\sigma_{1.23\cdots n}=\sqrt{E(d^2_{1.23\cdots n})}$$

(B)　偏相關係數

由於迴歸係數與相關係數之關係，因亦得擬一偏相關係數如下式

$$r_{12.3}=\sqrt{b_{12.3}\,b_{21.3}}$$

(卽按前章所述相關係數應等於兩迴歸係數之幾何平均數)

該偏相關係數之數值，卽得用以表示其某兩變數之相關度，而假定其他變數不變。該偏相關係數之意義與簡單相關

係數相同，即其絕對值接近於零時，其相關程度頗微，而極接近於一時，其相關程度即甚密切。

至偏相關係數之計算，亦可用漸次推求之方法，即由零級而一級，一級而二級，以至於由(n－3)級而(n－2)級，其於三個變數時，偏相關係數之公式如下：

$$r_{12.3}=\frac{r_{12}-r_{13}\,r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\,\sqrt{1-r_{23}^2}}$$

至其普通公式則為

$$r_{12.34\cdots n}=\frac{r_{12.34\cdots(n-1)}-r_{1n.34\cdots(n-1)}\,r_{2n.34\cdots(n-1)}}{\sqrt{1-r^2_{1n.34\cdots(n-1)}}\,\sqrt{1-r^2_{2n.34\cdots(n-1)}}}$$

附註：上述偏迴歸係數與偏相關係數既得由漸推公式依次計算之，故吾人既已詳述簡單相關係數與迴歸係數，讀者即不難按式推算。惟是項計算頗繁複，茲暫從略。

第三節　複相關

為便於說明起見，仍就三個變數討論之。設使 x_1 之相關

函數爲：

$$x=F(y,z)$$

$F(y,z)$ 卽爲一多個變數之函數，而x與其他變數 y,z 之關係卽爲一複相關。該複相關函數$x=F(y,z)$ 之確定，將隨函數 F之形式而不同。普通得以一曲面表示之，因亦得名曰„曲面相關”。若F爲一一次代數方程式，則卽得以一平面表示之，因亦得名曰„平面相關”或„直線性相關”。本節所論擬專以直線性相關爲限。惟直線性相關函數之確定，已於前節偏迴歸係數一節中詳述矣，茲不贅。今且專就其相關度問題討論之。在直線性相關，用以表示其相關度者爲„複相關係數”(Coefficiens of multiple correlation)。在曲面相關中用以表示其相關度者爲„複相關指數”(index cfmultiple eorrelation)

(A) 複相關係數

在簡單相關中，吾人曾得有相關係數與標準差之關係

$$r_{21}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{2.1}^2}{\sigma_2^2}}$$

$$r_{12}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1.2}^2}{\sigma_1^2}}$$

惟在簡單相關中 r_{12}等於 r_{21}耳。

該兩相關係數亦得改寫如次：

$$R_{1.2}=r_{12}$$

$$R_{2.1}=r_{21}$$

$R_{1.2}$名曰x從y之相關係數，$R_{2.1}$名曰y從x之相關係數。倘所從之變數不止一個，則即得名曰複相關係數。例如$R_{1.23}$即爲x從y,z之複相關係數，而該複相關係數之公式，得比照上式訂定如次：

$$R_{1.23}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1.23}^2}{\sigma_1^2}}$$

該複相關係數亦有級次之分別，其附指標之個數（亦即其所從變數之個數）即等於其級次。至其零級標準差σ爲：

$$\sigma_1^2 = E(d_1^2)$$

而在直線性相關，其高級標準差$\sigma_{1.23}$為：

$$\sigma_{1.23}^2 = E\left[d_1 - (b_{12.3}\,d_2 + b_{13.2}\,d_3)\right]^2$$

該二級標準差亦得簡化如次：

$$\sigma_{1.23}^2 = E(d_{1.23}^2)$$

$$d_{1.23} = d_1 - b_{12.3}\,d_2 - b_{13.2}\,d_3$$

但按高級偏差之乘積之希望數定理，凡零級偏差之正指標為高級偏差之附指標之一，則零級偏差與高級偏差相乘之乘積之希望數等於零，換言之，即

$$E(d_2\,d_{1.23}) = 0$$

$$E(d_3\,d_{1.23}) = 0$$

故

$$E(d_{1.23}^2) = E(d_{1.23}\,d_{1.23})$$

$$= E(d_{1.2}\,d_{1.23})$$

$$E(d^2_{1.23})=E(d_1\ d_{1.23})$$

但 $$d_{1.2}=d_1-b_{12}\ d_2$$

故亦得

$$E(d^2_{1.23})=E(d_{1.2}\ d_{1.23})$$

$$E(d^2_{1.23})=E\left[d_{1.2}(d_1-b_{12.3}d_2-b_{13.2}d_3)\right]$$

$$=E(d_1\ d_{1.2})-b_{13.2}\ E(d_3\ d_{1.2})$$

因 $E(d_2\ d_{1.2})=0$

又 $$E(d_1\ d_{1.2})=E(d^2_{1.2})$$

$$E(d_3\ d_{1.2})=E(d_{3.2}\ d_{1.2})$$

則上式亦得改寫如次：

$$E(d^2_{1.23})=E(d^2_{1.2})-b_{13.2}\ E(d_{1.2}\ d_{3.2})$$

然

$$E(d_{1.2}\ d_{3.2})=b_{13.2}E(d^2_{3.2})$$

$$=d_{31.2}E(d^2_{1.2})$$

代入上式，因得

$$E(d^2_{1.23})=E(d^2_{1.2})-b_{13.2}\,b_{31.2}E(d^2_{1.2}$$

或

$$\sigma^2_{1.23}=\sigma^2_{1.2}\left[1-b_{13.2}\;b_{31.2}\right]$$

$$=\sigma^2_{1.2}\left[1-r^2_{13.2}\right]$$

同理

$$\sigma^2_{1.2}=\sigma^2_1(1-\;r^2_{12})$$

故

$$\sigma^2_{1.23}=\sigma^2_1(1-r^2_{13.2})(1-r^2_{12}\;)$$

代入上列複相關係數公式，即得

$$R_{1.23}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{1.23}}{\sigma^2_1}}$$

$$=\sqrt{1-(1-r^2_{12})(1-r^2_{13\;2}\;)}$$

故複相關係數之計算，可由偏相關係數推求之。（示例亦暫從略）該複相關係數亦可推廣至 n 個變數而得其普遍公式如下：

$$R_{1.23\cdots n}=\sqrt{1-\left[1-r_{12}^2\right]\left[1-r_{13.2}^2\right]\cdots\left[1-r_{1n.23\cdots(n-1)}^2\right]}$$

（B）　複相關指數

倘相關函數並非為直線性函數，則複相關係數即不能由偏相關係數計算，但仍得由其標準差以推求其相關度。茲為分別起見，改稱為複相關指數而用 ρ 表示之：

$$\rho_{1.23}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1.23}^2}{\sigma_1^2}}$$

式中標準差之數值仍為：

$$\sigma_1^2=E\left(d_1^2\right)$$

$$\sigma_{1.23}^2=E\left[d_{1.23}^2\right]$$

惟偏差之數值為

$$d_{1.23}=d_1-F\left(d_2,\ d_3\right)$$

而F (d_2, d_3) 得爲任何形式之函數而不必爲一次代數方程式耳。

至在n個變數，則其複相關指數即爲

$$\rho_{1.23\cdots n}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{1.23\cdots n}}{\sigma^2_1}}$$

第五章 時間數列之分析

第一節 總述

時間數列之分析，在經濟統計範疇內有其重大之效用，蓋以多數經濟資料，係按時間而變動，例如銀行歷年放款額，鋼鐵歷年生產量，商店各月銷貨量等是。故近年來，在經濟統計方面，時間數列之分析法益為推廣而重要。

時間數列較次數數列易于組成，蓋不論其為初級或次級資料，其原有數列形式即常可作為分析之根據，而無需先加分類以列成次數表也，惟須注意者其文字所指之時期必須明瞭而確定，例如每月資料可為每月月初之數字（如美國勃勒特斯脫里特慈售物價指數），可為每月之平均數字（如美國勞動統計局之物價指數）亦可為每月之總數字（如吾國社會部工資實際收入指數），其為每月之平均數字，則又須注意其平均之方法，此甚易忽視而實不可忽視者也。

時間數列首先可繪成時間數列圖，以觀其趨勢與一般特性，并為作進一步分析之參考，至其繪製方法吾人於圖示法一章中已曾述及，茲不贅。在某種情形下，或僅有統計圖已

可足夠，蓋由此種圖形已可略示其趨勢，甚或亦可略見季節或循環變動之形跡，但欲求較精確之數字以表示其趨勢或變動程度，及較精確之分析時，此種圖示方法實感粗率，而必須應用較精細之方法。

普通分析時間數列之目的在研究其所受一種或數種因素之影響程度，而影響時間數列之因素，有如下列數種：

（一）長期趨勢（ Secular trend ）多數時間數列，均存有一種趨勢向某一方面進行，或依一定速率變動其方向，例如某鋼鐵公司之鋼鐵生產量與銷貨，在長時期內，係繼續的增長發展，此種數列發展之速率自為正數，但某幾種時間數列之變動速率亦可為負數，如美國最近半世紀的利率。故所謂長期趨勢即長時期內之發展趨勢而其趨勢包括正負時期之兩種形態。此種趨勢須平滑，有規律，與長變動，若為突然或偶然之增加或減少，則不合長期趨勢之原義。其次須明瞭者，并非所有時間數列均受一定長期趨勢之影響，有時并無長期趨勢之存在，如某地每年，某一時期之氣溫統計，常在某一水準之上下變動，而非按時間之變動而變動者。

（二）季節變動（Seasonal variations）時間數列雖含有長期趨勢，但吾人觀察繪於圖上之時間數列，常不易直接用觀察法決定，蓋長期趨勢之上下尚有無數之波動存在，此諸波動可有規律或無規律，或極單純，或極複雜而均可使實際數值變動于長期趨勢能上下。此種變動必須每月均有統計資料始能求出，而其徵性，為每月均有一定之變動，其週期為十二個月，（在每年之統計資料中，自無此種變動，固無須再加研討也）

（三）循環變動（Cyclical fluctuations）循環變動不及季節變動之顯著、但亦為一種規則之變動，此種變動係受經濟循環之影響、如價格、工資、生產量、交易所之交易額，以及一切與商業活動有關之現象，均為經濟之繁榮或衰落所支配，故其用數字所表現之數列，自存有循環起伏之變動，至其變動週期之長短與夫變幅之大小卻待吾人之研究。

（四）偶然變動（Random Phututions）除上述諸種規則變動外，經濟現象亦尚能因一種偶發之因素而發生變動，諸如戰爭、水災、地震等等均能使經濟現象發生變動，此種變動發生旣因偶然之因素，自毫無規律可言，而其影響實際

數値超越於常態數值以外，因與其他變動毫無二致也。

影響時間數列之因素既有上述數種變動，而吾人分析時間數列之變動又在研究其所受一種或數種因素之影響程度，則吾人之工作、自為研究測量諸種變動之方法。

第二節　長期趨勢之測定方法

長期趨勢乃一時間數列之一長時期內，逐漸向上或向下變動之趨勢，依其趨勢之種類大別之可為兩種．一為算術級數式趨勢，即數列變動每年作同額有規律之增減者；一為幾何級數式趨勢即每年作同比率有規則之增減者；但除上述兩種外，尚有根據數學原理推測之各種曲線趨勢，但吾人所擬討論者僅爲最簡單之一種，即算術級數式長期趨勢，亦即直線式長期趨勢。

惟于測定長期趨勢之先，吾人尤應注意者，即長期趨勢之測定須注意以下兩點：(一)須有適當之時期，計算長期趨勢之時間愈短，所測定之長期趨勢愈不可恃，蓋時期愈短，受經濟循環之影響愈大，致長期趨勢被混淆而不顯著，一般言之，測定長期趨勢之時期，一般須在二三十年以上，此就時

期之長短而言，再所取時期之始末尤須審愼選擇，設若選擇不當，取衰落之期末始，而以繁盛期之末終，則長期趨勢之測定將失之過高。反之，若取繁盛期之末始而以衰落期之末終，則長期趨勢之測定，將失之過低，在普通情形下，常取包含若干循環期之時期。（二）剔除極端變量，即應剔除所受偶然變動之影響之極端數值，此種數值若不剔除，則必致影響長期趨勢之準確程度。

一般測定長期趨勢之方法有三：（一）隨手畫法（Free hand method)或稱隨手配合法，即時間數列用曲線繪示後，依曲綫之趨向隨手配合一曲線即是，（二）移動平均數法（Moving average method）即採繼續平均方法，繼續計算時間數列若干期之平均數，以所得平均數代表長期趨勢，至平均方法通常採用算術平均數；其所取期數則不定，通常爲奇數而須與經濟循環之時期相等，要之，其目的在使獲一平均之長期趨勢而能消去其他變動之因素。(三)最小二乘法，即依最小二乘之原則，用數學方法以求得代表長期趨勢之曲線方法。

上述三種方法，隨手畫法雖簡便，但悉依研究者之主觀而定，其不可靠至爲顯然；移動平均數法，雖亦計算簡易，

且能測定趨勢方向之變動，但用移動平均數代替原有數列之各項，其研究時期之兩端必須縮短若干年，此其不便一；計算移動平均數之期數隨研究者主觀而定，所取期數不同，其所得結果可相差甚遠，此其不便二；經濟循環變動之時期，有長有短，是以由移動平均數法，求得之長期趨勢不能盡除循環變動之影響，此其不便三；故應用亦不甚廣。其採用最廣者厥為最小二乘法，爰就最後一法加以申論。

所謂最小平方者，即各實際數值與此趨勢數值相差度之平方和為最小。準此原則，設各實際數值為 $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots$ 長期趨勢值為 $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ 則

$$\sum(y_i - Y_i)^2 = \text{最小}$$

而設長期趨勢值適合下列方程式。

$$Y = a + bx \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故

$$\sum(y-Y)^2 = \sum(y-a-bx)^2 = \text{最小} \cdots\cdots(2)$$

而依微分之原理，欲使適合，應令 $\frac{\delta\sum(y-a-bx)^2}{\delta a}=0$ 與 $\frac{\delta\sum(y-a-bx)^2}{\delta b}=0$ 解此兩方程式，得

$$\begin{cases}\dfrac{\delta\sum(y-a-bx)^2}{\delta a}=\delta\sum(y-a-bx)=0\\[2ex]\dfrac{\delta\sum(y-a-bx)^2}{\delta b}=\delta\sum x(y-a-bx)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum y-na-b\sum x=0\\\sum xy-a\sum x-b\sum x^2=0\end{cases}$$

式中x,y均為實際數值，$\sum y,\sum x,\sum xy,\sum x^2$自均為已知數，故用聯立方程式解法，可求得a與b卽：

$$a=\frac{\sum y\sum x^2-\sum x\sum xy}{n\sum x^2-(\sum x)^2}\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$b=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-(\sum x)^2}\cdots\cdots(4)$$

以a,b之數值x代入(1)式，卽可求得長期趨勢值，故測定長期趨勢，實卽確定長期趨勢公式中所含之常數

由上所述，吾人已知根據最小二乘原則測定長期趨勢之方法，但實際計算時尙可簡化。若以各x之平均數爲原點，則

$$\sum X=\sum(x-\bar{X})=0$$

故(3)式與(4)式可化簡如次：

$$a=\frac{\sum y}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$b=\frac{\sum Xy}{\sum X^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

上列公式中，吾人須注意者，X為以x之平均數為原點所求得之數值，若年數為奇數，則中間一年適為時期之中點，各X即為各年與中間一年相差之年數；若年數為偶數，則中點在中間兩年之間，設有連續十八年之資料，則時期之中點在第九年之末，第十年之始，故在長期趨勢中，第九年之數量當自其算術平均數減去半年增加之量，第十年之數量當加以半年增加之量，故可以半年為單位，則各X成為……－5，－，3－1，＋1，＋3，＋5……之數列。

由上所述，吾人可得測定長期趨勢之計算程序如次。

（甲）年數為奇數：

（A）求各年與中間一年相差之年數X。

（B）將時間數列之各項y乘各項相應對之X得Xy.總加之得$\sum Xy$.

（C）求各X之平方，再將各X之平方總加之得$\sum X^2$.

（D）以第三步所得結果$\sum X^2$除第二步所得之結果$\sum Xy$，即得斜度b之數值。

(E)求各y之總和而後得$\sum y$，以項數n得除之，時間數列各項數值之算術平均數，即直線趨勢公式中之常數a，亦即中間一年之長期趨勢值。

(f)依公式$Y=a+bx$將後半期各年依次遞加b之數值，前半期各年依次遞減b之數值，即得各年之長期趨勢值。

(乙)年數爲偶數：

(a)求時間數列時期之中點。

(b)求各年與此中點相差之數(以半年爲單位)，得X爲……$-5, -3, -1, +1, +3, +5$……。

(c)將時間數列之各項y乘各項相應對之X得各Xy，總加之得$\sum Xy$。

(d)求各X之平方，再將各X之平方總加之得$\sum X^2$。

(e)以第四步所得結果$\sum X^2$除第三步所得之結果$\sum Xy$，即得斜度b之數值。

(f)求各y之總和得$\sum y$，而後以項數n除之，得時間數列各項數值之算術平均數，即直線趨勢公式

中之常數a，亦卽時期中點之長期趨勢值。

(g)依公式$Y=a+bx$，將時間數列各項數值之算術平均數(卽常數a)加b，卽得時期中點後半年之長期趨勢值，其後各年依次遞加2b，卽得後半期各年之長期趨勢值；反之，將常數a減b卽得時期中點前半年之長期趨勢值，依次遞減2b，卽得前半期各年之長期趨勢值。

玆再舉例以明之，設有我國歷年輸出值總額如表一第一第二兩欄所示，則依上述之計算程序，求得長期趨勢值如次：

(a)求時間數列時期之中點爲民國十年之末十一年之初。

(b)求各年與此點相差之數得X(見表一第三欄)

(c)將時間數列之各項y乘各項相應對之X得Xy(見表一第五欄)總加之得$\sum Xy=74416$.

(d)求各x之平方(見表一第四欄)總加之得$\sum X^2=2660$

(e)以第四步所得結果之X^2除第三步所得之結果$\sum Xy$，得$b=27.976$.

(f)求各y之總值$\sum y=207260$，以項數$n=20$除之得$a=103630$.

(g)將a加b即得民國十一年之長期趨勢值，其後各年依次遞加2b；將a減b即得民國十年之長期趨勢值，其後各年依次遞減2b(見表一第六欄)

表一 歷年我國輸出值總額長期趨勢表

(1) 年次	(2) 輸出值總額(百萬元) y	(3) X	(4) X^2	(5) Xy	(6) 長期趨勢值(百萬元)
民國元年	578	−19	361	−10982	504.76
二年	628	−19	289	−10676	560.71
三年	554	−15	225	−8310	616.66
四年	653	−13	169	−8489	672.61
五年	751	−11	121	−8261	728.56
六年	721	−9	81	−6489	784.52
七年	757	−7	49	−5299	840.47
八年	783	−5	25	−4915	896.42
九年	884	−3	9	−2532	952.37
十年	937	−1	1	−937	1008.32
十一年	1,020	1	1	1,020	1064.28
十二年	1,173	3	9	3.519	1120.23

十三年	1,202	5	25	6,010	1176.18
十四年	1,210	7	49	8470	1232.13
十五年	1,347	9	81	12123	1288.08
十六年	1,431	11	121	15741	1344.04
十七年	1,544	13	169	20072	1399.99
十八年	1,582	15	225	23731	1455.94
十九年	1,394	17	289	23698	1511.89
二十年	1,417	19	361	26923	1567.84
總　計	20726		2660	74416	

上述就公式直接計算，實則當x為順序之年數時，$\sum X^2$與$\sum Xy$均有更簡捷之方法代替，茲按年數為奇數或偶數兩種情形分別敍述如次：

(甲)年數為奇數：年數為奇數時，各X成……$-3,-2,-1,0,1,2,3,$……之數列，根據數學定理，數列$1^2,2^2,3^2$……t^2之總和為

$$\sum t^2 = \frac{t}{6}(2t+1)(t+1)$$

而$\sum X^2 = 2\sum t^2$，若以$t=\frac{n-1}{2}$代入即得$\sum X^2$之公式如次：

$$\sum X^2 = \frac{n-1}{6}\,n\,\frac{n+1}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{12}$$

同樣∑Xy亦可用簡捷法計算，蓋以年數爲奇數時，各X與y之數值如下表所列：

$-t$	y_1
$-(t-1)$	y_2
$-(t-2)$	y_3
⋮	⋮
-2	y_{t-1}
-1	y_t
0	y_{t+1}
1	y_{t+2}
2	y_{t+3}
⋮	⋮
$t-2$	y_{n+2}

$t-1$	y_{n-1}
t	y_n

故 $\sum Xy = ty_n - ty_1 + (t-1)y_{n-1} - (t-1)y_2 + (t-2)y_{n-2} - (t-2)y_2 + \cdots\cdots + 2y_{t-3} - 2y_{t-1} + y_{t-2} - y_2$

$$= t(y_n - y_1) + (t-1)(y_{n-1} - y_2) + (t-2)(y_{n-2} - y_3) + \cdots\cdots + 2(y_{t+3} - y_{t-1}) + (y_{t+2} - y_t)$$

因是可得計算之程序如次：

(A) 將各年之數值分成兩行，中間一年不書，前半期各年自上而下書於第一欄，後半期各年自下而上書于第二欄。

(B) 自第二欄各項數值減去第一欄各項數值而書其差數于第三欄。

(C) 于第四欄自下而上書 1,2,3,4……

(D) 將第三欄與第四欄各項兩兩相乘，而書其乘積于第五欄，

(E) 將第五欄各項相加即得$\sum(Xy)$。

(乙)年數爲偶數　年數爲偶數時，各X成……−5，−3，−1，1，3，5，……之數列，依據數學定理，數列1^2，3^2，5^2，7^2……$(2t-1)^2$之總和爲

$$\sum t^2 = \frac{t}{3}(2t+1)(2t-1)$$

而　$\sum X^2 = 2\sum t^2$，若以$t=\frac{n}{2}$代入即得$\sum X^2$之公式如次

$$\sum X^2 = 2\sum t^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

同樣在年數爲偶數時，$\sum X_y$亦可用簡捷法計算，其理與年數爲奇數時相同，讀者自可明瞭，茲不贅述，僅將其計算程序說明如次

(A) 將各年之數值分成兩行，前半期各年自上而下書于第一欄，後半期各年自下而上書于第二欄。

(B) 自第二欄各項數值減去第一欄各項數值而書其差數於第三欄。

(C) 於第四欄自下而上書 1，3，5，7……

(D) 將第三欄各項與第四欄各項兩兩相乘，而書其乘積於第五欄

(E) 將第五欄各項相加即得$\sum(Xy)$。

如前述之例，$\sum X^2$與$\sum Xy$ 用簡捷法計算所得之結果如次：

$$\sum X^2=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}=\frac{20.21.19}{3}=2660$$

$\sum Xy=74416$(見下表第五欄總計)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
578	1417	839	19	15941
628	1394	766	17	13022
554	1582	1028	15	15420
653	1544	891	13	11583
751	1431	680	11	7480
721	1347	626	9	5634
757	1210	453	7	3171
983	1202	219	5	1095
844	1173	329	3	987
973	1020	83	1	83
總計				74416

以上所述均爲核算各年之長期趨勢値，若根據年趨勢公式，進而核算各月之長期趨勢値，以十二除每年增加之量或以六除每半年增加之量即得。如年數爲偶數，則時期之中點在中央兩年之間，故將常數a加半個月之增加量（每月增加量除以2），即得中間兩年中前一年十二月之長期趨勢値，依此遞加或遞減每月之增加量，即得各月之長期趨勢値，例如表一民國元年至廿年我國輸出値總額統計，其時期爲廿年，故時期之中點在第十年與第十一年之間，若常數a加上半月增加之量，即得民國十一年一月之長期趨勢値，其後各月依次遞加每月增加之量，在其前各月依次遞減每月增加之量，今試計算第一表中民國十一年各月之長期趨勢値（餘類推）。

本例年數爲偶數，b之値爲半年增加之量，故以六除之得每月增加之量，即，$\frac{27.976}{6}$復以2除之得半月增加之量即$\frac{4.66}{2}=2.33$。以此半月增加之量加於a即得一月之長期趨勢値爲$1036.30+2.33=1038.63$，其後各月依次遞加每月增加之4.66其結果如次：

一　月	1038.63	七　月	1266.59
二　月	1043.29	八　月	1071.25
三　月	1047.95	九　月	4075.91
四　月	1052.61	十　月	1080.57
五　月	1057.27	十一月	1085.23
六　月	1061.93	十二月	1089.89

上述最小二乘法之應用，僅以直綫趨勢爲例，其他曲綫趨勢，亦莫不可以最小二乘法求定其常數，而後就求定之常數，應用實際數值以配合其長期趨勢公式，惟其理論較爲複雜而應用並不甚廣，故本書對曲綫趨勢之討論從略。

第三節　季節變動測定方法

影響時間數列變動之第二種因素，即爲季節變動，前已約略述及，但非謂一切時間數列均有季節變動存在，是以吾人在測定季節變動之前，須先斷定該時間數列有否受季節變動之影響，其斷定方法有二：(一)圖示法，將每年各月之數值，均於透明紙上繪成曲綫，然後將各曲綫疊而視之，觀其是否有一致某月特高某月特低之傾向。如各年各月存有趨勢

之升降變動，則可斷定季節變動之存在，反之即未受季節變動之影響。(二)環比法，將各年各月之數值，各以前一月之數值爲比較標準，計算各月對前一月之環比，而後將各年同月環比組成分組次數表；視各月次數分配之集中與否以斷定季節變動之有無。

旣確定其受有季節變動之影響，即可進而研求測定之方法，但吾人須注意者，在測定季節變動之先，必須先消去其所受長期趨勢之影響，而所有測定季節變動之方法，亦即因消去長期趨勢與求定平均變動之方法而有異，其方法固多，但一般習用者爲環比中位數法與移動平均數法兩種：

(一)環比中位數法(Link raltive method)此法爲美國哈佛大學教授潘孫氏所創用，係利用環比消去長期趨勢，而利用中位數表示平均變動，其計算步驟如次：

(1) 求環比(Link relatives)——將時間數列中各月之數值均以前一月之數值除之，以求得各月之環比。

(2)求環比之中位數——各月環比得後，即爲求定各月環比之平均數以示各月之平均變動，但平均數有多種，究以何者爲適宜？一般之意見，咸認中位數爲最適宜，蓋各月

之價格容有例外之變化，而吾人所求者乃爲通常之變化，是以一切極端的不規則之影響必須除去，而中位數固可不受此種極端數值之影響也。既取環比之中位數，則首須將異年同月之各環比按大小次序排列，而後取其中間一項（項數爲奇數時）或中間兩項之算術平均數（項數爲偶數時），但若環比之次數分配不甚集中，則可取中間三項或四項之算術平均數以爲中位數。

（3） 求鎖比(chain relatives)——各月環比之中位數既已求得，但尚不能卽以此表示季節變動，何則？蓋環比之所表示者不過一月與下一月之關係，若欲十二月之數字能相互比較，則非改爲同一標準不可，故宜先擇定一月（通常取十二月或一月）爲標準，而後計算其他十一月對此一月之百分比，是卽各月之鎖比。

（4） 校正差誤——設以一月爲標準，求得各月之鎖比，其中一月之鎖比(卽十二月之鎖比乘以一月之環比)按之理論當爲100%，若不等于100%，則表示有差誤存在，此項差誤之發生，半由于他種勢力之影響，半由於計算之不能絕對正確所致，而欲求正確表示季節變動，則此種差誤必須校

正，其校正之方法有二：

（甲）算術法，即假定差誤之累積係依算術級數而增加，如上所述之例，設十二月之鏈比以一月之環比，其結果爲A，A-100% 累積差誤，假定其依算術級數增加，則第一月之差誤 $d=\frac{A-100\%}{12}$ 而後於二月減d，三月減 2d，四月減3d，依此類推得校正鏈比，而一月之校正鏈比爲100%

（乙）幾何法，即假定差誤之累積係依幾何級數而增加，亦即利用複利公式：$A=100(1+d)^{12}$，求得(1+d)，而後以(1+d)除二月之鏈比，$(1+d)^2$除三月之鏈比$(1+d)^3$除四月之鏈比，依此類推。

（5） 求季節指數——由第四步求得校正鏈比寫成百分數形式後，雖已可表示季節變動，但爲使其意義明顯應使其百分數之總和爲1200，其法可以諸校正鏈比之平均數，除各月校正鏈比，後乘以100 ，此所得之諸百分數即足示季節變動，而一般稱之爲季節指數。

茲舉例以明之，設有表二之資料，欲測定其季節變動，首爲確定其有否受季節變動之影響，利用環比法，求各月之環比列如表三，而後組成分組次數表如表四，除九，十兩月之次數分配略見集中外，其餘各月均尙集中，故可斷定有季節變動存在。即可進而測定季節變動：

表二　　歷年上海秈米每月零售價格表(每市石價格)

年份/月份	民十五年	民十六年	民十七年	民十八年	民十九年	民二十年	民二十一年	民二十二年	民二十三年	民二十四年	民二十五年
1月	11.074	12.278	9.129	10.262	13.911	10.518	10.934	8.001	6.982	11.147	9.275
2月	11.697	12.018	9.425	10.262	13.975	10.185	11.488	8.845	7.078	10.863	9.445
3月	11.648	14.845	9.321	10.507	14.117	10.260	10.985	8.193	7.059	10.041	10.097
4月	11.486	11.904	9.298	10.183	14.867	9.930	10.530	7.618	6.988	10.342	10.380
5月	11.496	12.187	9.298	10.515	15.456	10.340	10.793	7.715	7.584	10.529	10.169
6月	11.141	12.618	8.784	10.799	15.454	10.458	10.586	7.655	8.07	10.863	10.137
7月	12.036	12.447	8.390	11.049	16.123	10.366	9.997	7.744	9.694	9.760	10.100
8月	12.384	11.919	8.301	12.014	15.007	13.012	9.428	7.585	11.024	9.592	9.597
9月	12.976	10.552	9.052	12.326	13.339	13.279	8.390	7.408	10.932	9.128	9.131
10月	12.743	9.207	9.400	13.258	10.304	11.349	7.587	7.235	10.113	9.791	9.148
11月	12.680	8.797	9.791	12.647	10.366	11.002	7.076	7.098	11.516	9.839	9.388
12月	12.494	8.319	9.862	13.215	10.342	10.841	7.343	6.963	11.029	9.288	10.000

資料來源查　上海市社會局側：

表三　歷年上海秈米零售價格逐月環比表

年份 月份	民十五年	民十六年	民十七年	民十八年	民十九年	民二十年	民二十一年	民二十二年	民二十三年	民二十四年	民二十五年
1月		98.27	109.74	104.06	105.27	101.70	100.86	110.19	100.27	101.07	99.86
2月	105.63	97.88	103.24	100.00	100.46	96.85	105.07	109.32	101.37	97.45	101.83
3月	99.58	98.50	98.90	102.39	101.02	100.74	95.60	92.63	99.73	92.43	106.90
4月	98.61	100.50	99.75	96.92	105.31	96.78	95.86	92.98	98.99	103.00	102.31
5月	100.09	102.38	100.00	103.26	103.96	104.13	102.50	101.27	108.53	101.81	98.44
6月	96.91	103.54	94.49	102.70	99.99	101.14	98.08	99.22	106.53	103.17	99.69
7月	108.03	98.04	95.58	102.32	104.33	99.12	94.93	101.16	119.99	89.36	99.64
8月	102.89	95.76	98.87	108.73	93.08	126.53	94.32	97.95	113.72	48.83	95.02
9月	104.78	88.53	109.05	102.60	88.89	102.05	88.99	97.67	99.17	95.16	95.14
10月	98.20	87.25	103.84	107.56	77.25	85.47	90.43	97.66	92.51	107.26	100.19
11月	99.51	95.25	104.16	95.39	100.00	96.94	93.25	98.11	113.87	100.48	102.62
12月	98.53	94.57	100.73	104.49	99.77	98.54	103.79	98.10	95.77	94.40	106.62

表四 上海籼米零售價格逐月環比分組表

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	11月	12月
85.99以下										2		
86.00— 87.99										1		
98.00— 89.99							1		3			
90.00— 91.99										1		
92.00— 93.99			3					1		1	1	
94.00— 95.99			1	1		1	2	3	2		2	3
96.00— 97.99		8		2		1		1	1	1	1	
98.00— 99.99	2		4	3	1	4	3	2	1	1	2	4
100.00—101.99	4	4	2	1	4	1	1			1	2	1
102.00—103.99		1	1	2	4	3	1	1	2	1	1	1
104.00—105.99	2	2		1	1		1		1		1	1
106.00—107.99			1							2		1
108.00—109.99	1	1			1	1	1	1	1			
110.00—111.99	1											
112.00—113.99								1			1	
114.00以上							1	1				

第一步　求各月環比(見表三)

第二步　求各月環比中位數(表五第二欄)

第三步　以一月爲基準求各月鎖比(見表五第三欄)

第四步　求各月校正鎖比(見表五第四欄)

第五步　以校正鎖比之平均數，除各月校正鎖比求得季節指數(表五第五欄)

表五　計算上海和米零售價格季節指數表
(環比中位數法)

(1) 月份	(2) 中位數	(3) 鎖比	(4) 修正鎖比 (A)	(4) 修正鎖比 (B)	(5) 季節指數 (A)	(5) 季節指數 (B)
一月	101.39	98.47	100.00	100.60	91.58	52.96
二月	101.37	99.98	103.04	103.10	94.36	95.84
三月	99.58	98.21	102.80	102.85	94.14	95.61
四月	98.99	97.62	103.74	103.81	95.00	96.50
五月	102.38	100.94	108.59	109.01	99.44	101.33
六月	99.99	98.58	107.70	108.10	98.68	100.49
七月	89.35	88.08	98.79	98.09	90.47	91.18
八月	98.83	97.42	109.60	110.17	100.42	102.41
九月	97.67	96.27	110.04	110.56	100.77	102.77
十月	97.66	96.26	111.56	112.26	102.16	104.35
十一月	99.51	98.08	114.91	116.16	105.23	107.98
十二月	99.54	97.12	115.48	16.81	105.75	108.58

(A)算術法(B)幾何法　　　社會部勞動局統計室

(二)移動平均數法

此法爲馬加利氏(T.R. Macaulay)所創用，係先求12項移動平均數俾消去季節變動，而保留其餘一切變動，然後以此移動平均數除各實際數值以消去其餘一切變動而保留季節變動，再求其平均數卽得平均季節變動，茲本此原則述其計算步驟如次：

(1)求移動平均數——季節變動係一年十二月之變動則求12項移動平均數，自卽消去季節變動，但十二月數值之移動平均數，其中心在中間兩月之間，如求一月至十二月之平均數，其中心在七月初一而每月之平均價格常在十五號，爲使時日之一致，故求12項移動平均數後，並須再求二項移動平均數。

(2)將每月實際數值除以相應對之移動平均數——移動平均數係消去季節變動存有其他各種變動之數值，若復將每月實際數值除以各月相應對之移動平均數，則卽爲僅存有季節變動之數字。

(3)就第二步所求得之數值，分別求異年同月各數值

之平均數——就第二步所求得之比例數字，各年各月均不相同，以是欲求得代表各月季節變動之數字，必須取異年同月各數值之平均數，至於平均之方法或用算術平均數或用中位數均無不可。

(4)求季節指數——由第三步，求得之平均數，固可表示季節變動，但其總和未必等于1200。故亦宜加以調整，其法與環比中位數法相同，即以第三步所求得之各月平均數更求其平均數(取算術平均數)後以之除各月平均數，乘以100即得所求之季節指數。茲仍以同一例用移動平均數法求其季節指數如次：

第一步，求十二項移動平均數後，復求二項移動平均數。(見表六第四欄)

第二步，求各月實際價格對其相應對之移動平均數之百分比。(見表六第四欄)

第三步，求異年同月各百分比之平均數，即求校正季節指數(見表七第三欄)

第四步，求季節指數(見表七第四欄)

表六 計算上海和米零售價格季節指數表(甲)

(移動平均數法)

(1) 月次	(2) 實際價格	(3) 十二個月均價	(4) 實價對均價之%比	(1) 月次	(2) 實際價格	(3) 十二個月均價	(4) 實價對均價之%比
民國十五年				四月	1.298	8.9520	96.28
一月	11.074			五月	9.298	9.0014	96.81
二月	11.697			六月	8.784	9.1071	103.68
三月	11.648			七月	8.396	9.2180	109.80
四月	11.486			八月	8.301	9.3007	112.04
五月	11.496			九月	9.052	9.3850	103.68
六月	11.141			十月	9.400	9.4713	100.76
七月	12.036	12.0381	100.02	十一月	9.791	9.5589	97.63
八月	12.384	12.1017	97.72	十二月	9.882	9.6936	98.20
九月	12.976	12.1232	93. 3	民國十八年			
十月	12.743	12.1480	95.34	一月	10.262	9.8881	96.36
十一月	12.680	12.1951	96.18	二月	10.262	10.1532	498.9

十二月	12.494	12.2844	182.84	三　月	10.507	10.4444	99.40
民國十六年				四　月	10.183	10.7416	105.49
一　月	12.278	12.3641	100.90	五　月	10.515	11.0213	104.82
二　月	12.018	12.3618	102.86	六　月	10.799	11.2801	104.46
三　月	11.845	12.2414	103.35	七　月	11.049	11.5718	104.73
四　月	11.901	11.9931	100.75	八　月	12.014	11.8780	98.87
五　月	12.187	11.6840	95.87	九　月	12.326	12.1897	98.85
六　月	12.618	11.3483	89.94	十　月	13.258	12.529	94.50
七　月	12.447	11.0181	88.74	十一月	12.647	12.9308	102.24
八　月	11.919	10.8033	90.64	十二月	13.215	13.3302	100.87
九　月	10.552	10.5906	100.37	民國十九年			
十　月	9.207	10.3769	112.71	一　月	13.911	13.7355	98.74
十一月	8.707	10.1479	115.86	二　月	13.975	14.0710	100.69
十二月	8.319	9.8678	118.62	三　月	14.117	14.2380	100.86
民國十七年				四　月	14.867	14.1577	95.23
一　月	4.129	9.6892	104.49	五　月	15.456	13.9396	90.19
二　月	9.425	9.2197	97.82	六　月	15.454	13.7248	88.81

三　月	9.321	9.0064	96.62	七　月	10.123	13.4687	83.51
八　月	15.007	13.1644	87.72	二　月	8.845	7.8969	89.28
九　月	13.339	12.8458	96.80	三　月	8.193	7.7792	94.95
十　月	10.304	12.4794	121.11	四　月	7.018	7.7236	100.39
十一月	10.366	12.0605	116.35	五　月	7.716	7.709[illegible]	99.93
十二月	10.342	11.6392	112.54	六　月	7.655	7.6950	100.52
民國二十年				七　月	7.744	7.6330	98.57
一　月	10.518	11.1912	106.40	八　月	7.585	7.513[illegible]	99.05
二　月	10.185	10.8682	106.71	九　月	7.408	7.3929	99.79
三　月	10.260	10.7825	105.09	十　月	7.236	7.3186	101.16
四　月	9.930	10.8236	109.00	十一月	7.098	7.2871	102.66
五　月	10.340	10.8936	105.35	十二月	6.963	7.2099	104.83
六　月	10.458	10.9409	104.62	民國廿三年			
七　月	10.366	10.9790	105.91	一　月	6.982	7.3982	105.96
八　月	13.012	11.0506	84.93	二　月	7.078	7.6227	107.70
九　月	13.279	11.1351	83.8	三　月	7.059	7.9129	112.10
十　月	11.349	11.1903	98.00	四　月	6.988	8.1796	117.05

十一月	11.002	11.2342	102.11	五　月	7.584	8.4836	111.86
十二月	10.841	11.2585	95.08	六　月	8.079	8.8371	107.38
民國廿一年				七　月	9.694	9.1801	94.70
一　月	10.934	11.2484	102.88	八　月	11.024	9.5113	86.28
二　月	11.488	11.0830	96.48	九　月	10.932	9.7933	89.56
三　月	10.985	10.7500	97.08	十　月	10.113	10.0573	99.45
四　月	10.530	10.7300	98.48	十一月	11.516	10.3107	89.61
五　月	10.793	10.0497	93.11	十二月	11.020	10.5584	95.78
六　月	10.586	9.7404	92.01	民國廿四年			
七　月	9.990	9.4702	94.80	一　月	11.147	10.6749	95.76
八　月	9.428	9.2470	98.09	二　月	10.863	10.6168	97.72
九　月	8.390	9.0211	107.52	三　月	10.041	10.4810	104.38
十　月	7.587	8.7855	115.77	四　月	10.342	10.3924	100.49
十一月	7.075	8.5339	120.62	五　月	10.529	10.3091	97.91
十二月	7.343	8.2835	112.81	六　月	10.863	10.1667	93.59
民國廿二年				七　月	9.706	10.0161	103.19
一　月	8.091	8.0675	99.71	八　月	9.590	9.8792	102.99

九　月	9.128	9.8223	107.61	五　月	10.169	9.6942	95.33
十　月	9.791	9.8241	100.34	六　月	10.187	9.7051	95.74
十一月	9.889	9.8086	99.69	七　月	10.100		
十二月	9.288	9.7694	105.12	八　月	9.597		
民國廿五年				九　月	9.181		
一　月	9.276	9.7495	105.12	十　月	9.148		
二　月	9.445	9.7661	193.40	十一月	9.388		
三　月	10.097	9.7665	96.73	十二月	10.000		
四　月	10.330	9.7398	94.29				

計算上海秈米零售價格季節指數表　（乙）

（移動平均數法）

插在 160 下

(1)	(2)			實價對均價之百分比								(3)	(4)
月次	民國十五年	民國十六年	民國十七年	民國十八年	民國十九年	民國二十年	民國二十一年	民國二十二年	民國二十三年	民國二十四年	民國二十五年	未校正季節指數	校正季節指數
一月		100.70	104.49	96.30	98.34	106.40	102.88	99.71	105.96	95.76	105.12	101.79	101.62
二月		102.80	97.82	98.94	100.69	106.71	96.48	89.28	107.70	97.72	103.40	99.82	99.65
三月		108.85	96.02	99.40	100.80	105.09	97.68	94.95	112.10	104.80	96.73	100.13	99.96
四月		100.75	96.28	105.48	95.23	109.00	98.48	101.89	117.05	100.49	94.29	100.62	100.45
五月		95.87	69.81	104.82	90.19	106.35	98.11	99.98	111.86	97.91	95.33	97.36	97.19
六月		86.94	108.68	104.46	88.61	140.62	92.01	100.52	107.88	98.59	95.74	98.13	97.96
七月	100.02	88.72	109.80	104.79	83.51	105.91	94.80	98.57	98.70	103.19		99.30	99.13
八月	97.72	90.64	122.04	98.87	87.72	84.93	98.09	99.03	86.28	102.99		77.91	97.74
九月	93.43	100.37	103.68	98.85	96.30	88.86	107.52	99.79	89.58	107.61		99.32	99.15
十月	95.34	112.71	100.76	94.50	121.11	98.60	115.77	101.16	99.45	100.34		100.55	100.38
十一月	96.18	115.86	97.63	102.24	116.35	102.11	124.62	102.66	89.61	99.69		102.18	100.01
十二月	182.84	118.62	98.20	100.87	112.64	95.08	112.81	104.88	95.78	105.12		104.9	104.80
平均												100.17	100.00

第四節　循環變動之測定方法

循環變動爲四種變動中最爲微妙而最重要之變動，經濟現象無不受循環變動之支配。設經濟學者忽略此種變動，則其研究經濟現象之變化時必不得要領，故有人謂長期趨勢與季節變動之研究非爲其本身之目的，而但欲在時間數列中除去此二種變動之影響以確定其循環變動，此言雖或過甚，但亦可知循環變動研究之重要。

循環變動之重要性固如上述，但其變動則最不顯著，若長期趨勢，若季節變動，均可用簡單之方法觀測其大概，而循環變動則必須消去上述各種變動以後始能測知。至測定之方法最習用者僅一種，惟因資料之按年或按月編製而略有差異，玆分述之如次：

(一)按年編製之資料　若時間數列係按年編組而成，則季節變動之影響業已消除，故僅須除去長期趨勢，即得循環變動。其法係由時間數列之各項實際數值中減去相應對之長期趨勢值，其所得差量有正有負即表示循環變動之變差，稱爲循環變差，此項差量在長期趨勢變動不大時。自可表示循

環變動，但若長期趨勢變動甚大，則尚不足表示。例如甲乙兩年之實際數值，甲為100，乙為200；而長期趨勢值甲為98，乙為198，雖其循環變差均為+2，然就實際變動而言，甲年應大于乙年，故欲測定可靠之循環變動，須將各年循環變差更以各年長期趨勢值除之，求得其百分比，此項百分比稱循環變動率其公式如次：

設C為循環變動率

O 為長期趨勢值

y 為時間數列之各項數值

則 $$C=\frac{y-O}{O}\times 100$$

尤有進者，當比較數種數列之循環變動時，用循環變動率，仍有不足，蓋以單位不同不能比較也。故當二個以上數列同時比較研究時，更須進而消去其單位，消去單位之法通常以標準差除之，即求得循環變動率之標準差σ_c而後以σ_c除各循環變動率，由此項步驟所得結果稱為循環環變係數。惟循環變動率本身為一差量，故其標準差僅須將循環環變率之平方和除以項數再開方即得，亦即

$$\sigma_c=\sqrt{\frac{\sum c^2}{n}}$$

例如表一所列歷年我國輸出總值額，求定其循環變動率，其步驟如次：

(1) 求定長期趨勢值(見表八第三欄)。

(2) 求循環變差卽各實際數值減去長期趨勢值，亦卽求各y－0之數值(見表八第四欄)。

(3) 求循環變動率，卽以長期趨勢值除第二步所得各差量後乘以100(見表八第五欄)

(4) 求循環變動率之標準差σ_c

(5) 求循環變動係數，(見表八第六欄)

計算歷年我國輸出總值額之循環變動

(1) 年次	(2) 輸出值總額(百萬元) y	(3) 長期趨勢值(百萬元) 0	(4) 循環變差 y－0	(5) 循環變動率 c $\frac{y-0}{0}\times100$	(6) 循環變動係數
民元年	578	504.76	73.24	14.51	1.76
二年	628	560.71	67.29	12.00	1.36
三年	554	618.66	－62.66	－10.16	－1.13

四年	653	672.61	−19.61	−2.92	−0.25
五年	751	728.56	22.44	3.08	0.27
六年	721	784.52	−63.52	−8.10	0.98
七年	757	840.47	−83.47	−9.93	1.21
八年	983	896.42	86.58	9.66	1.17
九年	844	952.37	−108.37	−11.38	−1.38
十年	937	1008.32	−77.32	−7.07	−0.86
十一年	1020	1064.28	−44.28	−4.16	−0.50
十二年	1173	1120.23	52.77	4.71	0.57
十三年	1202	1176.18	25.82	2.20	5.27
十四年	1210	1232.13	−22.13	−1.80	−0.22
十五年	1347	1288.08	58.92	4.57	0.55
十六年	1431	1344.04	86.96	6.47	0.79
十七年	1544	1399.99	144.01	10.29	1.25
十八年	1582	1455.94	126.06	8.66	1.05
十九年	1394	1511.89	−117.89	−7.80	−0.95
二十年	1417	1567.84	−150.84	−9.62	−1.17

(二)按月編製之資料：若時間數列係按月編製者，則長期趨勢暨季節變動當消除。其消除之法，得自各月實際數值中減去長期趨勢值與季節變動數值之乘積，所得即爲循環變差。惟由循環變差計算循環變動率亦有兩法：一爲以長期趨勢值與季節變動數值之乘積除循環變差；一爲以長期趨

勢值除循環變差，由上所述，并設y爲實際數值，0爲長期趨勢值，s爲季節指數除以100之數值，則得循環變動率c之公式如下：

$$C=\frac{y-s0}{s0}=\frac{y}{s0}-1$$

$$C=\frac{y-s0}{0}=\frac{y}{0}-s$$

上列兩公式，就理論而言，第一公式較爲合理；就實際而論，第二公式較爲通行。當季節指數之上落不出百分之十五時，兩法相差較微。

當同時比較二個以上數列之循環變動時，亦必須求循環變動係數，其法如前所述。

茲就表二所列歷年上海秈米零售價格，用第二公式求其循環變動，其步驟如次，至第一公式之應用，亦不難推得之

（1） 求定長期趨勢值（見表九第四攔）。

（2） 求定季節指數（見表九第六攔）。

（3） 以長期趨勢值除各實際數值即求各$\frac{y}{0}$（見表九第五攔）。

（4） 以第三步所求得之比值減去季節變動數值即

求各$\frac{V}{U}$（見表九第七欄）

（5） 求循環變動率之標準差σc。

（6） 求各循環變動係數（見表九第八欄）。

計算歷年上海和米零售價格之循環變動

(1) 年	(2) 月	(3) 實際價格	(4) 長期趨勢	(5) $\frac{Y}{U}$ (3)÷(4)	(6) 季節指數	(7) 循環變差 (5)−(6)	(8) (單位標準差)循環變差 (7) ÷ σ
民十五年	1	11,074	11,621	95.29	101.62	− 6.33	− .36
	2	11,697	11,603	100.81	99.65	1.16	.06
	3	11,648	11,584	100.55	99.96	0.59	.03
	4	11,486	11,566	99.31	100.45	1.14	.06
	5	11,496	11,547	99.56	97.19	2.37	.13
	6	11,141	11,528	99.64	97.96	− 1.32	− .08
	7	12,036	11,510	104.57	99.13	5.44	.31
	8	12,384	11,491	107.77	97.74	10.03	.57
	9	12,976	11,473	113.10	99.15	13.95	.79
	10	12,743	11,454	111.25	100.38	10.87	.62
	11	12,680	11,435	110.89	102.01	8.88	.51
	12	12,494	11,417	109.43	104.80	4.63	.26
民十六年	1	12,278	11,398	107.72	101.62	6.10	.35

	2	12,018	11,380	105,61	99,65	5,96	.34
	3	11,845	12.361	104,26	99,96	4,30	.24
	4	11,904	11,342	104,96	100,45	4,51	.26
	5	12,187	11,324	107,62	97,19	10.43	.59
	6	12.018	11,305	111,61	97,96	13,65	.78
	7	12,447	11,282	110,28	99,13	11,15	.63
	8	11,910	11,268	105,78	97,74	8,04	.64
	9	10,552	11.249	93,80	99,15	− 5,35	− .30
	10	9,207	11,231	81,98	100.38	− 18.40	− .10
	11	8,797	11,212	78.46	102,01	− 23,55	−1,34
	12	8,319	11,194	74,32	104,80	− 30,48	−1.73
民十七年	1	9,129	11,175	80,60	101,62	− 19,93	−1,13
	2	9,425	11,156	84,48	99,65	− 15,17	− .86
	3	9,321	11,138	83,69	99,96	− 16,27	− .93
	4	9,298	11,119	83,62	100,45	− 16,83	− .96
	5	9,298	11,101	83.76	97,19	− 13,43	− .76
	6	8,784	11,083	79,26	97,96	− 18,70	−1,06

	7	8.386	11.063	75.80	99.13	−23.24	−1.32
	8	8.301	11.045	75.16	97.74	−22.58	−1.28
	9	9.052	11.026	82.16	99.15	−17.05	−.97
	10	9.400	11.008	85.39	100.38	−14.99	−.85
	11	9.791	10.989	89.10	102.01	−12.91	−.73
	12	9.862	10.970	89.90	101.80	−14.90	−.85
民十八年	1	10.262	10.952	93.70	101.62	−7.92	−.45
	2	10.262	10.933	93586	99.65	−5.79	−.33
	3	10.507	10.915	96.21	99.96	−3.70	−.21
	4	10.183	10.896	93.46	100.45	−6.99	−.40
	5	10.515	10.877	96.67	97.10	−0.52	−.03
	6	10.799	10.859	99.45	97.96	1.49	.08
	7	11.049	10.840	101.93	99.13	2.80	.16
	8	12.014	10.822	111.01	97.74	13.27	.76
	9	12.326	10.803	114.10	99.15	14.95	.85
	10	13.258	10.784	122.94	100.38	22.56	1.21
	11	12.647	10.766	117.47	102.01	15.46	.88

	12	13.215	10.747	122.96	104.80	18.16	1.08
民十九年	1	13.911	10.729	129.66	101.62	28.04	1.60
	2	13.975	10.710	130.49	99.65	30.84	1.76
	3	14.117	10.691	132.05	99.96	32.09	1.83
	4	14.867	10.673	139.30	100.45	38.85	2.21
	5	15.450	10.654	145.07	97.19	47.88	2.72
	6	15.464	10.636	145.30	97.96	47.34	2.69
	7	16.123	10.617	151.86	99.13	52.73	3.00
	8	15.007	10.598	141.60	97.74	43.86	2.50
	9	13.339	10.580	126.08	99.15	26.93	1.58
	10	100301	10.561	97.57	100.38	−2.81	−.10
	11	10.366	10.543	98.32	102.01	−3.69	−.21
	12	10.342	10.524	98.27	104.80	−6.53	−.37
民二十年	1	10.518	10.505	100.12	101.62	−1.50	−.09
	2	10.185	10.487	97.12	99.65	−2.53	−.14
	3	10.260	10.468	98.01	99.96	−7.95	−.11
	4	9.930	10.450	95.02	100.45	−5.43	−.31

	5	10.340	10.431	99.13	97.19	1.94	.11
	6	10.458	10.412	100.41	97.96	2.48	.14
	7	10.366	10.394	99.73	99.13	0.60	.09
	8	13.012	10.375	125.42	97.74	27.68	1.58
	9	13.279	10.375	128.21	99.15	29.06	1.65
	10	11.349	10.338	109.78	100.38	9.40	.53
	11	10.002	10.319	106.62	102.01	4.61	.26
	12	10.841	10.301	105.24	104.80	0.44	.03
民廿一年	1	10.934	10.282	106.34	101.62	4.72	.27
	2	11.488	10.264	111.93	99.65	12.28	.70
	3	10.485	10.245	107.22	99.96	7.26	.41
	4	10.530	10.226	102.97	100.45	2.52	.14
	5	10.793	10.208	105.73	97.19	8.54	.49
	6	10.586	10.189	103.90	97.96	5.94	.34
	7	9.996	10.171	98.28	99.13	− 0.85	− .05
	8	9.428	10.152	92.87	97.74	− 4.87	− .28
	9	8.890	10.133	82.56	99.15	− 10.80	− .03

	10	7.587	10.115	75.01	100.38 − 25.37	−1.44
	11	7.075	10.096	70.08	102.01 − 31.93	−1.82
	12	7.349	10.078	72.86	104.80 − 31.94	−1.83
民廿二年	1	9.091	10.059	80 44	101.62 − 21.18	−1.21
	2	8.845	10.040	88.10	99.65 − 11.55	− .66
	3	8.193	10.022	81.75	99.96 − 18.21	−1.04
	4	7.618	10.003	76.16	100.45 − 24.29	−1.38
	5	7.715	9.985	77.27	97.19 − 19.92	−1.13
	6	7.655	9.966	76.81	97.96 − 21.15	−1.20
	7	7.744	9.947	77.85	99.13 − 21.28	−1.21
	8	7.585	9.929	76.39	97.74 − 21.35	−1.22
	9	7.408	9.910	74.75	99.15 − 24.40	−1.38
	10	7.235	9.892	73.14	100.38 − 27.24	−1.56
	11	7.098	9.873	71.89	102.01 − 30.12	−1.71
	12	6.903	9.854	70.66	004.80 − 34.14	−1.94
民廿三年	1	6.982	9.836	70.98	101.62 − 30.64	−1.74
	2	7.078	9.817	72.10	99.65 − 27.55	−1.57

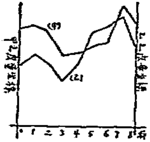
	3	7,059	9,799	72.04	99.96	−27.92	−1.69
	4	6,988	9,780	71.45	100.45	−29.00	−1.66
	5	7,584	9,761	77.70	97.19	−19.40	−1.11
	6	8,070	9,743	82.92	97.90	−15.04	−0.86
	7	9,694	9,724	99.69	99.13	0.56	.03
	8	11,024	9,706	113.58	97.74	15.84	.90
	9	10,932	9,687	112.85	99.15	13.70	.78
	10	10,113	9,668	104.60	100.38	4.22	.24
	11	11,516	9,650	119.34	102.01	17.33	.99
	12	11,029	9,631	114.52	104.80	9.72	.55
民廿四年	1	11,147	9,613	115.96	101.62	14.34	.82
	2	10,863	9,594	113.23	99.65	13.58	.77
	3	10,041	9,575	104.87	99.96	4.91	.28
	4	10,842	9,557	108.21	100.45	7.76	.44
	5	10,529	9,538	110.39	97.19	13.20	.75
	6	10,863	9,520	114.11	97.90	16.15	.92
	7	9,706	9,501	102.16	99.13	3.03	.17

	8	9.592	9.482	101.16	97.44	3.42	.19
	9	9.128	9.464	96.45	99.15	−2.70	−.15
	10	9.791	9.446	103.66	100.38	3.28	.19
	11	9.839	9.427	104.37	102.01	2.36	.13
	12	9.288	9.408	98.72	104.80	−6.08	−.35
民二五年	1	9.275	9.389	98.79	101.62	−2.83	−.16
	2	9.445	9.371	100.79	99.65	1.14	.06
	3	10.097	9.352	107.97	99.96	8.01	.46
	4	10.330	9.334	110.67	100.45	10.22	.58
	5	10.169	9.315	109.17	97.19	11.98	.68
	6	10.137	9.296	109.05	97.96	11.09	.63
	7	10.100	9.278	108.86	99.13	9.73	.55
	8	9.597	9.259	103.65	97.74	5.91	.34
	9	9.131	9.241	98.81	99.15	−0.34	−.02
	10	9.148	9.222	99.20	100.38	−1.38	−.08
	11	9.388	9.203	102.01	102.01	0	0
	12	10.000	9.185	108.87	104.80	4.07	.23

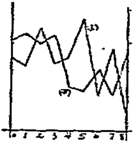
第六章 相變度

第一節 導言

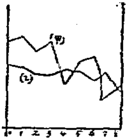
用統計方法以觀察事物，猶用照相機以拍攝景象；若景象靜而不變，則由各面攝之一次，即足以盡得其真相；然若景象動盪無定，則非用活動照相機，不可以盡得其真相焉。原社會現象，變幻無常，設欲明其真態，務須考其變遷；設欲明其變遷，尤非零星片段之靜態統計所足以指示者，務當取多年之動態統計而研究之，方能推測其現象之常態及趨勢，常態及趨勢既明，方能解釋各時期之特態，如斯以往，始盡統計之能事。在社會統計學上，動態統計更有其特殊之地位。蓋社會現象最稱複雜，各現象間究竟有無關係，亦最難判斷；而研究社會科學之論解最爲紛歧，殆即以此。夫甲現象變動之時，乙現象既能始終與之生同樣之變動（圖一），或始終相反之變動（圖二），然其最普遍者，乃其變動時合時反，竟無從斷言甲乙兩現象間究屬有無關係；苟有之，則其於變動時之相關程度又屬若何：今相變度原理，即爲解決此等問題之學理。



第一圖



第二圖



第三圖

今設有(X),(Y)兩時間數列(deux series chronologiques):

$$(1)\begin{cases} X_1, X_2 \cdots\cdots X_i \cdots\cdots X_n \\ y_1, y_2 \cdots\cdots y_i \cdots\cdots y_n \end{cases}$$

其中X_i,y_i普通為同一時期X,y之數值,然在特別情形之下,可不必限定其爲同一時間之數值,例如X_i=婚姻率,y_i=生育率,若吾人假定『婚姻』大約在一年後始能影響『生育』,則可取去年之婚姻率與今年之生育率相配對,而授以同一指標(indice)。又X_iy_i之數值亦不限於統計之『原數』(Valeurs brutes):在社會動態統計中,欲確切明瞭其現象之變動情形,宜先作一精微之分析,如將原始統計材料

分析其「長期趨勢」(Tendance seculaire)，季節變化(Variations saisonnieres)，循環變化(Variations Cycliques)及偶然變化(Variations accidentelles)等各種變化，是若X，y代表已經分析之某種變化，則其數值即非實在之數目，而殆爲一種臆造之數值，惟不論其爲統計直接所得之數值，(Valeurs brutes)，抑爲抽象之數值(Valeurs abstraites)，要當爲吾人所欲尋求相關之配偶數值耳。

今以統計之術語言之，相變度原理者，即研究兩個或多個時間數列之相互關係之原理：故亦名"時間數列之相關"。表示時間數列之相關程度者即名曰"相變度"相變度之最簡單並最早發明者，當推心理大家范熙納氏(Fechner)之「關連指數」(indice de dependance)及其關連係數(Coefficient ed dependance)，且首述之。

第二節　關連指數與關連係數

Fechner 氏方法之原則，極其簡單，可先將原來之時間數列：

$$(1)\begin{cases} X_1X_2\cdots\cdots X_i\cdots\cdots X_n \\ y_1\ y_2\cdots\cdots y_i\cdots\cdots\ y_n \end{cases}$$

化成其變化數$u_i v_i$之數列：

$$
(2)\quad \begin{matrix} u_1 u_2 \cdots\cdots u_i \cdots\cdots u_n \\ v_1 v_2 \cdots\cdots v_i \cdots\cdots v_n \end{matrix}
$$

其中

$$u_i = \frac{X_i - a_i}{\alpha_i}$$

$$v_i = \frac{y_i - b_i}{\beta_i}$$

$a_i \alpha_i$可爲X之函數(Fonction de X)或爲常數(Constante) $b_i \beta_i$可爲y之函數(fonction de y)或爲常數(Constante)$a_i \alpha_i$ $b_i \beta_i$之選擇，當各隨吾人所欲研究之「變化數」之性質而各異。今欲說明方法之原則，本無須確定該$a_i \alpha_i b_i \beta_i$之數值，然因便於了解起見，特舉最通用之兩種變化數作例以明之：其一爲"相差變化"(註一)(Variations differentielles)，其二爲„趨向變化"(Variotions tendentielles)。在„相差變化"中，則常以

$$\alpha_i = 1$$

$$\beta_i = 1$$

$$a_i = X_{i-1}$$

$$b_i = y_{i-1}$$

$$u_i = X_i - X_{i-1}$$

$$v_i = y_i - y_{i-1}$$

故其變化數的數列祇有(n－1)項：

$$(3)\begin{cases}(X_2-X_1),(X_3-X_2),\cdots(X_i-X_{i-1}),\cdots(X_n-X_{n-1})\\(y_2-y_1),(y_3-y_2),\cdots(y_i-y_{i-1}),\cdots(y_n-y_{n-1})\end{cases}$$

在趨向變化中，則常以$\alpha_1=1$，$\beta_1=1$

$$a_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$

$$b_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{1}y_i=\overline{y}$$

註(一)：相差變化之名稱，乃依據法國統計大家 Lucien March 氏之術語；其意謂「相差變化」殆即「相差方法」(Method des differences)中之「初次相差」(diffeence premiere) $\triangle y_1=y_{1+1}-y_1$ 耳；然鄙意當名爲「逐期變化」(Variation d',un terme au suivant)較切該意。

$$u_i = X_i - \overline{X}$$

$$v_i = y_i - \overline{y}$$

其變化數的數列當為

$$(4)\begin{cases} X_1-\overline{X},X_2-\overline{X},\cdots(X_i-\overline{X})\cdots(X_n-\overline{X}) \\ y_1-\overline{y},y_2-\overline{y},\cdots(y_i-\overline{y})\cdots(y_n-\overline{y}) \end{cases}$$

總之，u,v可表示各種不同之變化數；是故由u,v所算出之關連指數(或係數)，亦各不同。如用『相差變化數』，則當為『相差變化數的關連指數(或係數)』，備以指示X與y同時進行中之逐期變化的『相變度』。他若用『趨向變化數』，則當為『趨向變化的關連指數(或係數)』，備以指示X與y間同時進行中之長期變化的『相變度』，然以其數學形式而論，則不論其為『相差變化』『趨向變化』或其他變化，其代數形式與不相同，故可暫且不顧其變化數之性質，先求其關連指數及關連係數之數學公式為要：

(1)關連指數： 試觀變化數之數學公式：

$$u_i = \frac{X_i - a_i}{\sigma_u}$$

$$v_i = \frac{y_i - b_i}{\beta_i}.$$

則u,v含有兩數相差之性質，故其數値可正可負；在u_i，v_i之記號相同之時，吾人可謂X與y間在第i階段有一『合節』(Concordance)；反之，在u_i，v_i之記號相反之際，則可謂X與y間在該階段有一『脫節』(discordance)；遇一『合節』之時，吾人以正號(十)表之；遇一『脫節』之時，以負號(一)表之；若u_i，v中有一爲零，則亦以一零號(○)表之，此時又可謂X與y間之關係爲『不明』。

關連指數之計算步驟，可先將原來之數列

$$(5)\begin{cases} u_1 \ u_2 \cdots u_i \cdots u_n \\ v_1 \ v_2 \cdots v_i \cdots v_n \end{cases}$$

變化成其記號數列(series de signes)：

$$(6)\begin{cases} \operatorname{sgn} u_1 \ \operatorname{sgn} u_2 \cdots \operatorname{sgn} u_i \cdots \operatorname{sgn} u_n \\ \operatorname{sgn} v_1 \ \operatorname{sgn} v_2 \cdots \operatorname{sgn} v_i \cdots \operatorname{sgn} v_n \end{cases}$$

其中sgn u_i sgn v_i爲『u_i，v_i之記號』之記號。同號相乘(或相除)爲正，異號相乘(或除)爲負，故又可用下列記號行式以表示X與y間之『合節』或『脫節』之統計：

(7) $\operatorname{sgn} u_1 v_1, \operatorname{sgn} u_2 v_2, \cdots \operatorname{sgn} u_i v_i, \cdots \operatorname{sgn} u_n v_n$

或

(7) $\operatorname{sgn}\frac{u_1}{v_1}, \operatorname{sgn}\frac{u_2}{v_2}, \cdots \operatorname{sgn}\frac{u_i}{v_i} \cdots \operatorname{sgn}\frac{u_n}{v_n}$

其中，有多少正號，卽有多少『合節』，有多少負號，卽有多少『脫節』。若X與y始終合節，則第(7)記號數列當均爲正號；若X與y始終背馳，則當盡爲負號。但若X與y時"合"時"背"時而"不明"』，則可有『正』有『負』又有『零』。試以

C＝X與y『合節』之次數＝第(7)記號行式中之正號數目

D＝X與y『脫節』之次數＝第(7)記號行式中之負號數目

Q＝X與y『不明』之次數＝第(7)記號行式中之零號數目

關連指數之學公式有二：

一爲（註二）

$$i_1=\frac{C-d-q}{C+d+q}=\frac{C-(n-C)}{n}=\frac{2C-n}{n}$$

他爲

$$i_2=\frac{C-d}{C+d}$$

若q不等於零：$q\neq0$，則i_1, i_2亦不相等：$i_1\neq i_2$而i_2之絕對值必大於i_1：$|i_2|<|i_1|$，然在實際上，設使n相當大，則零號的數目q即可相對的少，則i_1與i_2可無大差別。今吾人欲使其數學公式與關連係數相似，故僅採取$i_2=i$

$$(8)\qquad i=\frac{C-d}{C+d}$$

C+d必較(C—d)爲大，故關連指數i之絕對數值必小於一；其左右極限值當爲$-1, +1$，其絕對數值愈近於一，則X與y間之關連程度愈深；愈近於零，則愈淺，正負之記號，所以示其變動抑同道相馳乎？抑背道相馳乎？

此指數之算法固甚簡便，但其觀察僅在Xy之升降，而不究其數值增減之多寡，其欠準確也可知，現一極微之『脫節』或『合節』，即可抵銷一甚大之『合節』或『脫節』，故Fechner氏在創此關連指數後，未幾即繼以改良，而以關連係數代之。

（2）關連係數　關連係數之數學公式爲

$$(9)\qquad 1=\frac{C-D}{C+D}$$

此公式與關連指數形式上無甚大異，惟將其小寫字母改爲大寫耳。然其C及D所代表者，非僅爲『合節』及『脫節』之次數，却各有數量。C可名爲『合節之度數』，等于各同記號之u_i及v_i之積之和：

$$C=\sum u_i v_i$$

若$u_i v_i>0$

> 註（二）：在相關度計算中，亦有應用此Fechner的關連指數之原則，創其『變量相應法』(Method of concurrent deviation及其係數R：
>
> $$R=[\operatorname{sgn}(2C-n)]\sqrt{\left|\frac{2C-n}{n}\right|}$$
>
> 其中$\operatorname{sg}_n(2C-n)$爲"2C−n之記號"之記號。
>
> C=『節合之次數』，
>
> n=配偶之總數

D爲『脫節之度數』，等於各異號之u_i及V_i之積之和，

$$D=\sum u_i\ v_i$$

若$u_i\ v_i<0$

因此，關連係數之數學公式亦可寫成下式：

$$I=\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\ v_i}{\sum_{i=1}^{n}\left|u_i\ v_i\right|} \tag{10}$$

$|u_i\ v_i|$爲$(u_i\ v_i)$之絕對數值，（正數），而$u_i\ v_i$爲代數值，可正可負。

至關連係數之作用，則與關連指數無異，即I之絕對數值必小於一，愈近於一，則X與y間之關連程度愈深，愈近於零，則愈淺，正負之記號，所以示X與y間關連之正反，然其指示能力，則較關連指數確切多矣。

第三節； J字係數及K字係數

上述之關連係數I雖較關連指數i確切良多，然猶有不便，因其公式之分母$C+D=\sum_{i=}^{n}\left|u_i\ v_i\right|$，須用絕對數值，

然絕對數值在代數計算上殊感不便。因此，後人復將其稍事修改，另創一J字係數，及Lucien March氏創其K字係數。（見Armand Julin氏所著Pvincipes de Statistique theorique et appliquee第一卷第五〇二至五〇六頁）J字係數(Coefficient J)之數學公式爲：

$$(11)\qquad J=\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \div \sum_{i=1}^{n} v_i^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

及K字係數(Coefficient K)之數學公式爲：

$$(12)\qquad K=\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}}$$

因此，絕對數值之記號消滅，其代數計算自較便利矣。

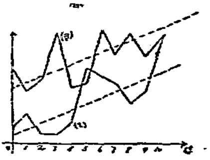
第四節；　相差變化與趨向變化

在(a)節中，吾人已言及關連指數或係數之意義當各隨變化數u.v之性質而有不同；同時，吾人亦已言及最通用之

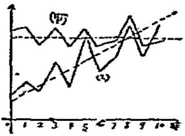
變化數爲『相差變化數』及『趨向變化數』，今吾人卽借此最通用之兩特例，以申述關連指數或係數其具體之意義。

相變度原理之主要對象，務在研究某某兩現象甲，乙（或諸多現象甲，乙，丙，丁，⋯⋯）之變化之相關。然變化之種類，可大分爲二：一就其進行程序上着想；則有『相差變化』；一就其大體上着想，則有『趨向變化』。蓋因在其進行程序中所最當注意者，無過於彼逐期之增減，比較其前後之相差，是名『相差變化』；又就其大體上觀察，其最簡單之方法，莫過於各以其平均數相比較，忽略其短期升降，以發現其趨勢，是名『趨向變化』。此兩種變化各有其效力，蓋有時甲乙兩現象其趨勢雖同，然其進退之 驟却未必能恰相適合（圖四）；反之，其進退之步往雖能合節，然其趨向却各不同；（圖五）

第 四 圖



第 五 圖



故最善當同時研究此兩者不同之變化，計算其『相差變化的關連係數』及其『趨向變化的關連係數』。依 Luciens march 夫意見(見其所著Differences et correlation en Statistipue第十七頁)，倘此兩種不同之關連係數其絕對之數值均在0.50以上，則甲乙之相互變動不無有關連矣。

至其關連指數或係數之計算方法，則祇須各依其變化數 u,v之數學定義及上述(a)(b)兩節中之數學公式計算之，並無困難無庸贅述。惟在計算係數之時，却有不可不注意者，即係數數值之大小，常能隨X與 y 單位之不同而有所變更，蓋若試以 X Y 本來之單位u_x, u_y 易以新單位u_x', u'_y其變逕單位之最簡公式爲：

$$u_x = k\, u_x'$$

$$u_y = h\, u'_y$$

在此新制度中，X,y之數值即將變爲：

$$X'_i = KX_i$$

$$y'_i = hy_i$$

而

$$u'_i = ku_i$$

$$v'_i = hv_i$$

而 J 字係數卽將變爲：

$$J' = \frac{\sum_{i=1}^{n} u'_i \, v'_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} u'^2_i + \sum_{i=1}^{n} v'^2_i\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{hk\sum_{i=1}^{n} u_i \, v_i}{\left[k^2\sum_{i=1}^{n} u^2_i + h^2\sum_{i=1}^{n} v^2_i\right]^{\frac{1}{2}}} \neq J$$

因此，卽取最簡單之變更單位公式，已可變更 J 字係數之數值，更遑論其他變更單位公式矣，在此點觀之，則 J 字係數最感缺略，因亦不甚通用。一般則概取 X, y 之標準差 σ_x σ_y 各爲其變化數 u v 度量之單位。因此，在相差變化之研究中，當取（註三）

$$\begin{cases} u_i = \dfrac{X_{i+1} - X_i}{\sigma_x} & \sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i - \overline{X})^2}{n}} \\ v_i = \dfrac{y_{i+1} - X_i}{\sigma} & \sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(y_i - \overline{Y})^2}{n}} \end{cases}$$

又在趨向變化之研究中，則當取

$$\begin{cases} u_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma_x} \\ v_i = \dfrac{y_i - \overline{y}}{\sigma_y} \end{cases}$$

在此制度中，趨向變化的 k 字係數其數學公式即為:

$$(13)\quad K = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma_x}\right]\left[\dfrac{y_i - \overline{y}}{\sigma_y}\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma_x}\right]^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\dfrac{y_i - \overline{y}}{\sigma_y}\right]^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[X_i - \overline{X}\right]\left[y_i - \overline{y}\right]}{n\sigma_x\,\sigma_y}.$$

其數學公式竟與相關度原理中之『相關係數』一無差別，故亦有呼之為『相關係數』者，今吾人以『相變係數』名之分所以示其相似，却同時亦不忘其區別。

第五節； 相變係數

相變係數爲時下最通用之相變度指數，故特再詳究之。按其公式：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(y_i-\overline{y})}{n\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n}}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\overline{y})^2}{n}}$$

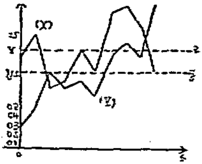
茲爲便利起見，可使 $\overline{X}=0$， $\overline{y}=0$ 其幾何上之意義，

註(三)： $u_i=\frac{X_i-X_{i-1}}{\sigma_x}$ 或 $u_i=\frac{X_{i+1}-X_i}{\sigma_x}$

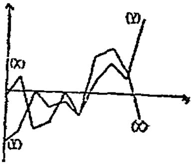
本無大別，茲爲合於『相差方法』中其『初次相差』$\triangle X$ 之定義爲 $\triangle X=X_{i+1}-X_i$ 故今將(a)節中之公式改爲現

式 $u_i=\frac{\triangle X}{\sigma_x}$

即可各將Xy之圖表曲線(Courbes representatives)降低其 $\overline{X}$, $\overline{y}$，亦即各將X,y總平均數之水平線與時間之坐標0t相併合（圖六，圖七）：



第六圖



第七圖

藉此移變手續，即可將其數學公式變爲（註四）

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\ y_i}{\sigma_x\ \sigma_y}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{n}=\sigma_x^2$$

註（四）：　今之X_i, y_i當非昔之X_i, y_i

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{n}=\sigma_y^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i=0$$

又若使$\sigma_x=1$,$\sigma_y=1$,即取吾人在相關度原理中已言及之標準制度,則

(14) $$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i y_i$$

然 $$Xy=\frac{1}{4}\left[(X+y)^2-(X-y)^2\right]$$

故亦可使 $$r=\frac{1}{4n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i+y_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(X_i-y_i)^2\right]$$

若欲 $$\sum_{i=0}^{n}(X_i-y_i)^2=0$$

當使 (15) $X_i-y_i=0$, $y_i=X_i$

則 $$r=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}(2X_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_n^2}{n}=1$$

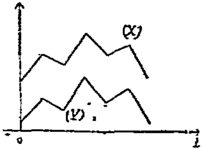
若欲 $$\sum_{i=0}^{n}(X_i+y_i)=0$$

當使 (16) $X_i+y_i=0 \quad y_i=(-X_i)$

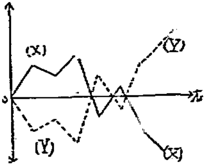
則 $$r=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i-(-X_i)\right]^2=-1$$

至若欲使 r 之絕對數值達其最小點，則當使 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-y_i)^2$ 達其最大點，即須令各 X_i 與 y_i 間有極大之相差，故此相變係數居卽指示X與y其圖表曲線之『平行程度』(degre de parallelisme entre leurs courbes representatives)耳。其 $X_i=y_i$ 之條件，卽須令(X)(y)兩圖表曲線始終平行（圖八）〔若用標準制度，則當合而爲一〕；其Xi＝$(-y_i)$之條件，卽須令兩線互成『對合線』(Courbe symetrique)，〔若用標準制度

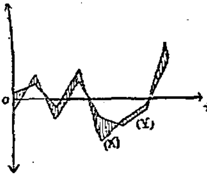
，則當爲時間坐標 ot 所軸分之兩對合線〔Deux courbes symetriques par rapport a axe ot（圖九）若以ot爲軸線而摺併其兩半面，則該兩線即將緊合無隙〕；他若 $r \fallingdotseq 1 > 0$，則兩線間之距離愈小，其相變係數之數值必愈近於零；若 $r \fallingdotseq -1 < 0$ 則可先將其兩表曲線之一〔例如(y)〕以ot爲旋轉軸而旋以180度角，換言之，即可取其一線之『對合線』，其『對合軸』(axe de symetrie) 爲ot。然後與其另一曲線相較（圖十一），相較之結果及意義，則當與上述 $r \fallingdotseq 1 > 0$ 相同。綜言之，相變係數r爲(X)(y) 兩圖表曲線之平行度之係數。因此，r之意義既得一簡單之解釋，且可藉此得一圖解方法，由其兩線之平行度以定其相變係數之大約度數。



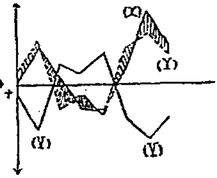
第八圖



第九圖



第十圖

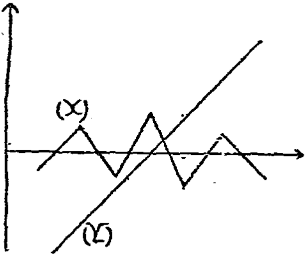


第十一圖

雖然，言『其圖表曲線之平行度卽能指示X與y之相變度，』，卽暗中假設『X與之關y連法則)Loi dependauce)可用一單位次方程式』；然X與y之關連函數(Fsnction de la dependance entre X et y)，未必盡合於單次方程式，亦卽Xy之圖表曲線雖不平行，然不能因此卽斷定X與y間毫無關連，例如輪上某點之速度及其行過之途度，當有密切之關係，然其圖表曲線却大相逕庭！（圖十二，錄自Lucien M-arek 所著 Differeuces et eorrelation en Statistigue 第十六

頁）。故上述之相變係數，其在應用上之功用雖已不淺，然在學理上，殊難令人滿意，尚有待於推廣及補充。

今假使X與y之『或然的關連函數』爲f，此函數f之數學形式



第十二圖

(Forme mathematique)乃由其圖表曲線之形式上推測者，或有其學理上之依據者。又假定此函數含有k個『定數』(Parametres)。〔K＜n且K愈小，則其數學公式愈簡，因亦愈便於記憶及計算，並易於解釋其假說。關連函數之意義與相關函數無異，今於相變原理中改用此名，略示區別耳〕

$$(17)\quad y=f(X,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\cdots\lambda_k)$$

苟使此假說(hypothese)果與事實盡合，則必須令下列n等式均適相恰合：

$$(18)\quad \begin{cases} y_1=f(X_1,\lambda_1,\lambda_2\cdots\cdots\cdots\lambda_k) \\ \vdots \\ y_i=f(X_i,\lambda_1,\lambda_2\cdots\cdots\cdots\lambda_k) \\ \vdots \\ y_n=f(X_n,\lambda_1,\lambda_2\cdots\cdots\cdots\lambda_k) \end{cases}$$

然在此n個等式中，惟有k個未知數，$\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_k$，故普通為「不能互容之等式」(Systeme d' equations incompatible)因此，普通為不可解決之等式。換言之，即普通不能使吾人所假設之關連函數f為(X,y)間絕對的準則(Loi absolument rigide)。惟能使之為其相當之近似法則(Loi approchee)耳。然近似至若何程度，乃可斷言吾人假說大約無誤？又至若何程度，乃可斷言其不確而當另尋假說(hypothese)或X與y間竟無關連之法則？若能答此問題，即能答：X與y間之關連是否合乎此f法則，或X與y間有無關連之法則。苟使此關連法則f為一單次方程式，則上述之相關係數即可為其甚良之指數：然f未必定為單次方程式，故當另求一指數，此指數將隨f而不同，故其名目一方當明示其與f有關，一方須包含上

述之相變係數，今且以『合於 f 之相變係數』名之。

今假設此『合於 f 之相變係數』為 r：

(19) $r=F(X_1,X_2,\cdots\cdots X_n,y_1,y_2\cdots\cdots y_n)$

r之數值當隨$X_1,X_2\cdots\cdots X_n$及$y_1,y_2,\cdots\cdots y_n$為轉移，當為一$X_1,X_2\cdots\cdots X_n$及$y_1,y_2\cdots\cdots y_n$之函數F。

r當為一純粹數目（nombre pur），且亟宜避免x、y之單位選擇之影響，故其依$X_1,X_2\cdots\cdots X_n$或依$y_1,y_2,\cdots\cdots y_n$之『齊次之次數』(de'gre d'homogeneite par rapport aux variables $X_1,X_2,\cdots\cdots X_n$ d'une part et aux variables $y_1,y_2\cdots\cdots y_n$ de l,autre)皆當等於零，故其第一條件須令$r=F(X_1,X_2\cdots X_n,y_1,y_2\cdots y_n)$為一『齊次函數』(Fonction homogene)；他方復當為便利比較起見，務使r之絕對數值不得超過於一：$r^2<1$；若r之絕對值等於一：$r^2=1$，則卽能準確確定其第(18)等式中之K個定數$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_k$；反之，若不論其i為$1,2\cdots n$，$X_i y_i$之數值均能合其關連法則：$y_i=f(X_i\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_k)$，則亦必$r^2=1$；此為其第二條件。依此定義之條件，卽不難設想其當如何以結構之。若f確為X,y之關連函數，則X_i,y_i當適合于下式：

$$(20) \qquad y_i = f(X_i \lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_k)$$

$i=1.2,\cdots\cdots n$,故共有 n 個類此等式，然僅有 k 個定數 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_k$ 為其未知數，故欲使其 n 個公式能互相融洽，則當令 $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n, y_1 y_2 \cdots\cdots y_n$ 能滿足 $(n-K)$ 個條件，名曰『相消條件』(Condition d'elimination)或『互容條件』(Condition de compatibilite)：

$$(21) \begin{cases} G_1(X_1, X_2 \cdots\cdots X_n, y_1, y_2, \cdots\cdots y_n) = 0 \\ G_2(X_1, X_2 \cdots\cdots X_n, y_1, y_2, \cdots\cdots y_n) = 0 \\ \vdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{n-k}\ (X_1, X_2, \cdots X_n, y_1, y_2, \cdots y) = 0 \end{cases}$$

此$(n-k)$個條件等式亦當為『齊次函數』，因關連函數既為『齊次函數』故。

次當得一『齊次函數』：$H(X_1, X_2 \cdots X_n, y_1 y_2 \cdots y_n)$務使該函數H能隨$G_1, G_2 \cdots G_{n-k}$ 諸函數同時為零；其意即苟使 $G_1 = G_2 = \cdots G_{n-k} = 0$,則必$H=0$；反之，若$H=0$,亦必 $G_1 = G_2 = \cdots = G_{n-k} = 0$。

顧能圓滿此條件之函數却不止一個，而有無量數個。

設使

$$(22)\qquad H=u^2 G^2+u_2^2G_2^2+\cdots u_{n-k}^2\ G_{n-k}^2$$
$$+K^2(X_1,X_2\cdots X_n,y_1,y_2,\cdots y_n)$$

其中u ,$u_2,\cdots u_{n-k}$ 可各為$X_1,X_2,\cdots X_n,y_1,y_2,\cdots y_n$之『零外無實根』(N'admettant aucune racine r'eelle saufzero)之齊次函數(常數或雙次方之齊次函數)：

K亦為一『齊次函數』，其次數與其餘各項u_iG_i之次數相等，並亦適當$G_1,G_2,\cdots G_{n-k}$ 同時為零。

然在第(22)公式中，亦可改各項之二次方為任何雙次方，同能滿足上述諸條件，故H之形式，亦不止一個。

今設使H已經選定，則可變之如下：

$$(23)\ H=(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_m v_m)-$$
$$(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_m^2)(v_1^2+v_2^2+\cdots+U_m^2)$$

其中u_i,v_i均為『齊次函數』，惟其形式與數值，則當視其所選擇之函數H為轉移，容後舉例以明之，茲不具論。

u,v 既定之後，即可定其相變係數r：

$$(24)\qquad r=\frac{u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_m v_m}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_m^2)(u_1^2+v_2^2+\cdots+v_m^2)}}$$

今r之數值旣當隨u,v而不同，u,v隨H而各異，H惟 G_1, G_2,....G_{n-k} 是資，G_1,G_2 .... $_{n-k}$ 諸條件乃由其關連法則f而來，故r之數值，當緊隨f而變更，是r之意義不能與f或離。然普通簡名此『合於f之相變係數』爲『相變係數』者，蓋普通所假說之關連函數常爲單次方程式，『合於f』諸字雖已節去，實則仍含『合於單次方程式之關連法則的相變係數』之意。

相變係數之一般原理(Theorie generale des coefficients de covariation)旣如上述，r之數值當各隨f及H之選擇而不同。然f與H之選擇却無一定之規律，故於理論言之，殊難決定一當由之道，惟有詳察事實，隨機應變耳。然以應用而論，則f與H愈簡愈妙，且略舉數例如下：

最簡單之函數莫若單次方程式，故在應用上常假定f爲一單次方程式。

設使

$$f(X,a,b)=aX+b$$

$$y'_i=aX_i+b$$

吾人共有n個等式，但僅有兩個未知數(a與b)，故當有

(n—2)個相消條件。今假設之關連函數既爲一單次方程式，故其相消條件可用『列方陣』(註五)(determinant)表之：

若以

$$\triangle_{\alpha,\beta,\gamma}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ X_\alpha & X_\beta & X_\gamma\\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma\end{vmatrix}$$

則其(n—2)相消條件當各爲；

$$G_1=\triangle_{1,2,3}=0$$

$$G_2=\triangle_{2,3,4}=0$$

$$\vdots$$

$$G_i=\triangle_{i,i+1,i+2}=0$$

$$\vdots$$

$$G_{n-2}=\triangle_{n-2,n-1,n}=0$$

註(五)： Determinant 有譯爲『行列式』，但其數項之數目共有n^2個，其形式爲方陣，故似宜譯爲『列方陣』，所以別『行列陣(Tableau或matrice)：

$$\begin{Vmatrix}a_1^1 & a_1^2 \cdots\cdots & a_1^n\\ \vdots & \cdots\cdots\cdots & \\ a_p^1 & a_p^2 \cdots\cdots & a_p^n\end{Vmatrix}$$

又若以

$$S=G_1^2+G_2^2+\cdots+G_n^2$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n-2}\Delta^2_{\alpha,\alpha+1,\alpha+2}$$

及

$$K^2=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{n-1}\Big[(X_{\alpha+1}-X_{\alpha})(y_{\beta+1}-y_{\beta})-(X_{\beta+1}-X_{\beta})(y_{\alpha+1}-y_{\alpha})\Big]^2$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{n-2}\Delta^2_{\alpha,\alpha+1,\alpha+2}$$

此K必與S同時爲零。

又若使第(22)式中之$u_1=u_2=\cdots\cdots=u_{n-k}=1$

則 $$H=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{n-1}\Big[(X_{\alpha+1}-X_{\alpha})(y_{\beta+1}-y_{\beta})-(X_{\beta+1}-X_{\beta})(y_{\alpha+1}-y_{\alpha})\Big]^2$$

由此而得

$$u_i = X_{i+1} - X_i$$

$$v_i = y_{i+1} - y_i$$

及 $m = n - 1$

故其相變係數：

$$(26)\ r = \frac{\sum_{i=1}^{u-1} u_i v_i}{\sqrt{\sum u_i^2 \sum v_i^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} ({}_{i+1} - X_i)(y_{i+1} - y_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+.} - y_i)_i}}$$

此卽上述（本章C節中）之『相差變化的相變係數』（亦名Lucicn March 氏之相變係數）之數學公式，故凡通用之相變係數，殆爲此廣義之相變係數之一特例耳.

又依相變係數之定義，如$r^2 = 1$則X與y之關連法則當適爲吾人所假設之f，今在本例之中，則X與y之關連線當爲直線。茍如是，則當使其相消條件均皆滿足：G =0,而有

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{X_n - X_{n-1}} = \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{X_{n-1} - X_{n-2}} = \cdots\cdots = \frac{y_2 - y_1}{X_2 - X_1}$$

反之，若X與y之關連線果屬直線，則r^2亦必等於一。之意義與其關連法則不可或離者，又得一明證焉。

又若以

$$H = \frac{1}{6}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\sum_{r=1}^{u}\Delta^2_{\alpha,\beta,\gamma}$$

$$H = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(x - \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)\left(y_i - \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)\right]^2$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n}{n}\right)^2\right]$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)^2\right]$$

$$H = \left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(y_i - \overline{y})\right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]\cdot$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2\right]$$

則 $u_i = X_i - \overline{X}$

$$v_i = y_i - \overline{y}$$

及 $m = n$

而其相變係數 r 即當為：

$$(27) \qquad r = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}}$$

此又即上述（本章C節中）之『趨向變化之相變係數』（或名 Karl Pearson 氏之相變係數），是通用之相變係數不過為此廣義之相變係數之特例，又得一明證焉。又藉此可見H之不同，其相變係數之數值亦必隨之不同。

又假設X,y間之關連函數為一單次方程式，不特為最簡單而最通用之假設，有時且可使其他假說，略經變更手續，亦歸入此例。

例若X,y之關連法則可用下式表之：

$$\eta_i = \alpha + \beta \xi_i$$

其中 η_i, ξ_i 各為 $X_1X_2\cdots X_n$ $y_1 y_2\cdots y_n$ 之函數，η ξ 間之關連函數乃一單次方程式。

經此變更手續，即將原來之時間數列變為下列新時間數列：

$$\begin{cases} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots \xi_i \cdots\cdots \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 \cdots\cdots \eta_i \cdots\cdots \eta_n \end{cases}$$

此新時間數列之變數ξ、η其關連函數既屬單次方程式，故即可依上述方法求其相變係數，此η、ξ之『合於單次方程式之相變係數』即為X,y之『合於f之相變係數』矣，故『合於單次方程式之相變係數』（即通用之相變係數），雖於理論上其效力範圍稍嫌狹隘，然其應用則甚有擴充之餘地。

試復略舉數例以明之

若假說X,y之關連函數為一『二次方程式』：

$$y_i = a + bX + cX^2$$

可化為：

$$\frac{y_i - y_1}{X_i - X_1} = b + C(X_i + X_1)$$

因此即當使

$$\eta_1 = \frac{y_i - y_1}{X_i - X_1}$$

$$\xi_i = X_i + X_1$$

而祗須計算此ξ,ζ之『合於單次方程式之相變係數』即從而知X,y之『合於二次方程之相變係數』矣。

又若假設X・y之關連函數爲一單項之多次方：$y_i=aX^m$,〔或爲一『直線的指數函數』((Fonction exponentielle lineaire)：$y_i=A^{aX_i+b}$)〕，則可各取其對數：$\log y_i=m\log X_i$〔或$\log y_i=(aX_i+b)\log A$〕而其新變數當爲$\xi_i=\log X_i$,$\zeta_i=\log y_i$〔或$\xi_i=X_i$,$\zeta_i=\log y_i$〕則

$$\begin{cases} \log X_1 \quad \log X_2 \cdots\cdots \log X_i \cdots\cdots \log X_n \\ \log y_1 \quad \log y_2 \cdots\cdots \log y_i \cdots\cdots \log y_n \end{cases}$$

之相變係數即能爲原來之時間數列

$$\begin{cases} X_1 \quad X_2 \cdots\cdots X_i \cdots\cdots X_n \\ y_1 \quad y_2 \cdots\cdots y_i \cdots\cdots y_n \end{cases}$$

之『合於$y_i=X^m$之相變係數』。

又

$$\begin{cases} X_1 \qquad X_2 \cdots\cdots\cdots\cdots X_i \cdots\cdots\cdots\cdots X_n \\ \log y_1 \quad \log y_2 \cdots\cdots\cdots\cdots \log y_i \cdots\cdots\cdots \log y_n \end{cases}$$

之相變係數即能爲原來之變數X,y之『合於$y_i=A^{ax_i+b}$之相變係數』也。

第六節： 相變度之分析

吾人在本章章首曾言『研究社會現象，測其常態及趨勢，方能解釋各時期之特態，如斯以往，始盡統計之能事』；又曾言『欲確切明瞭社會現象之變動情形，宜先作一精微之分析，如將原始統計材料分析其長期趨勢，季節變化，循環變化及偶然變化等』。然現象之有無是類變化，則當各隨所遇現象之性質如何為斷，至如何分析，則有各種不同之方法，如哈佛大學 Persons氏之方法等，固不勝贅述，本章僅顧討論相變度之原理，更無需旁涉其統計材料之分析方法；惟在相變度原理中有不得不加分析者，即其變化數之性質。因變化數性質之不同，其相變係數之意義亦當隨之而各異。今將變化數之性質大分為二：一名『恆變』，他名『偶變』，試舉例以明之。農產物每年每畝收獲之多寡有兩大成因：農業技術其一，風雨情形其二，設使

$$X_i = X_i' + \xi_i$$

其中 X_i＝i年每畝該農產物之收穫量

X_i'＝以i年之農業技術而當得之收穫量（或名 i 年平

均量)

ε_i＝年風雨情形所賜予之收穫量(其數量可正可負，正即逢豐年，負即逢歉年)

夫農業技術恆有進步，則農產物之收穫，若無其他成因，亦必恆見增加，故其長期變化恆向上進，其變化數之性質常屬『恆變』；反之，每年風雨情形之變化不測，故其於農產物收穫之影響亦殊不測，故變化數ε_i之進退變化亦屬偶然，而有『偶變』之性質。

由上觀之，『恆變』之變化數與尋常數學上之變數無別，然『偶變』之變化數却有機遇變數(varible aleatoire)之性質，然則吾人固知尋常變數之計算可用尋常數學，而機遇變數之計算自當依機遇數學之原則。故研究『恆變變化數』之相變度其所用之數學當為尋常數學，研究『偶變變化數』之相變度其所用之數學當為機遇數學，故研究相變度之原理不得不先加以分析，而後知其用所當用之數學，此種分析工作對於相變度原理將來之闡發，實有莫大之貢獻。

設有下列兩時間數列

$$(32)\begin{cases} X_1, & X_2,\cdots\cdots X_i,\cdots\cdots X_n \\ y_1, & y_2,\cdots\cdots y_i,\cdots\cdots y_n \end{cases}$$

研究步驟可首將各項統計分析其『恆變變化數』(或名『可測變化數』)及其『偶變變化數』(或名『不測變化數』)。其『恆變變化數』與『偶變變化數』之個數均不以一個為限。X可有p個『可測變化數』X_i及q個『不測變化數』ξ_i:

$$X_i = f(X_i', X_i'' \cdots\cdots X_i^{(p)}, \xi_i', \xi_i'' \cdots\cdots \xi_i^{(q)})$$

y_i亦可有s個『可測變化數』y及t個『不測變化數』η_i:

$$y_i = g(y_i', y_i'' \cdots\cdots y_i^{(s)}, \eta_i', \eta_i'' \cdots\cdots \eta_i^{(t)})$$

茲為便於說明起見，可假設:

$$(29)\begin{cases} X_i = X_i + \xi_i \\ y_i = y_i \div \eta_i \end{cases}$$

此種假設，於相變度原理本身則一無妨害也。

分析工作既畢，乃可分途研究其『可測變化數』X與y之相變度及其『不測變化數』ξ與η之相變度，其『可測變化數』x與y之相變度原理，則於上述諸節中已詳加論述，固無庸再贅，惟本節所述之證解法甚簡，特亦略敍以供對照。

第七節：『可測變化數』之相變度原理

設有兩種『可測變化數』之時間數列；

$$(30)\begin{cases} X_1 \ X_2\cdots\cdots X_i\cdots\cdots X_n \\ y_1 \ y_2\cdots\cdots y_i\cdots\cdots y_n \end{cases}$$

X_i與y之有無關連法則？苟有之，則何爲其關連法則？旣知其法則，又當問其究屬準確法則歟？抑爲近似法則歟？苟屬近似法則，則其近似程度又若何？凡諸問題，已詳於本章有關于『合於』之相變係數』之論題之論述中，其中所述，當能盡量適用於茲，今不過另用方法求其同樣之結果。

關連法則之選擇，實無一定規律，惟宜詳察事實隨機應變，此吾人已再三申言者矣；然於應用言之，則終以就簡避繁爲要。今且略舉最簡單之關連函數數則以說明其相變度原理。

(1) 假設X,y之關連法則爲

(31) $y=aX$

若所集之統計材料果能準合此關連法則，則當有

(32) $\frac{y_1}{X_1}=\frac{y_2}{X_2}=\cdots\cdots=\frac{y_i}{X_i}=\cdots\cdots=\frac{y_n}{X_n}=a$

今可利用『n度空間之幾何學』(Geometrie a n dimenseons)以便說明。設使$X_1, X_2, \cdots X_n$爲A點之在該『n度空間各坐標之度量，$y_1, y_2, \cdots y_n$爲B點在該『n度空間』各坐標之度量(C-ordonnees)，則第(32)諸等式不過爲AB與其原點O成直線之條件，亦卽OA，OB合併成一線之條件耳。

若以平常三度空間之解析幾何公式而推廣之，則可得：

$$(33)\qquad \sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}=\text{OA 之距離}$$

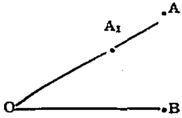
$$(34)\qquad \sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=\text{OB 之距離}$$

$$(35)\qquad \frac{X_1y_1+X_2y_2+\cdots X_ny_n}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}=\cos(\overline{oA},\overline{oB})$$

此$\cos(\overline{oA},\overline{oB})$之絕對數值亦必小於一，蓋若取

$$(y_1-\lambda X_1)^2+(y_2-\lambda X_2)^2+\cdots+(y_n-\lambda X_n)^2$$

$$=\overline{oB}^2-2\lambda\overline{oA}.\overline{oB}\cos(\overline{oA},\overline{oB})+\lambda^2\overline{oA}^2$$



此式之左項既爲乘平方數之和，且表示BA之距度之平方，A_1爲A點之『位似點』(.oint homothetique)，λ爲其『位似率』(rapport homothetiguc)，原點O爲其『位似中心』(centre d'homothetie)，故必屬正數：

$$\lambda^2\overline{OB}-2\lambda\overline{OA}.\overline{OB}\cos(\overline{OA},\overline{OB})+\overline{OB}^2>O$$

故不論λ之數值爲何，當令：

$$[\overline{OA},\overline{OB}\cos(\overline{OA},\overline{OB})]^2-\overline{OA}^2.\overline{OB}^2>O$$

或 $$\cos^2(\overline{OA},\overline{OB})-1>O$$

若第(32)諸等式果能適合，即AB線果能經過其原點O，則$(\overline{OA},\overline{OB})$之角度當等於零而其cos當等於±1，其±之記號，則以A,B是否處於O點之同一方面，亦即以其a之數量正負爲斷，反之，若$\cos(\overline{OA},\overline{OB})=\pm1$，則$(OA,OB)=K$，OAB必接連成直線；若K爲單數，則$\cos(\overline{OA},\overline{OB})=-1$，AB當分立於O點之左右而$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=a<O$；若K爲雙數，則$\cos(\overline{OA},\overline{OB})$

$=+1$，AB當同在O點之一方 $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=a>O$

由此觀之，則 $\cos(\overline{OA},\overline{OB})$ 實可爲『X與y間合於 $y=aX$ 之相變度之一優良係數』(un bon eoffieient de iovariation entre X et y relatif a la loi de dependance $y=aX$)：

$$(36)\qquad \cos(\overline{OA},\overline{OB})=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}=r$$

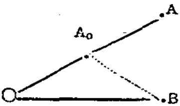
此即本章前兩節中所得之相變係數，玆可見吾人所用之方法雖異，而其結果相同。況此間所用之數學公式既極簡單，並能藉此知其幾何之意義"(signifieation geometripue)，故吾人不辭贅煩，特一再申說之。

相變係數 $r=\cos(\overline{OA},\overline{OB})$ 其主要意義不過指示X與y之關連曲線是否爲直線，故亦宜名之爲"直線性係數"(Coefficient de linearite)，

若 $r=\pm1$，則X與y之關連曲線當適巧爲一直線。然於實際殊

難得此巧遇，因此，a之數值亦不能由第(32)諸等式計算之，因而發生選擇問題。

依"最小二乘"之條件當令$E=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\lambda X_i)^2$



達其最小點，其"幾何之意義"即當令$\overline{AB}$,之距離達其最小點。但$\overline{BA_1}$之距離最小莫若$\overline{BA_0}$; A_0為B點在OA線上之垂直線，故依"最小二乘"之條件，則當令：

$$(37)\quad a=\alpha=\frac{\overline{OA},}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\cos(\overline{OA},\overline{OB})=r\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

故由此幾何方法，亦當取$r=\cos(\overline{OA},\overline{OB}=)$為相變係數。

又若吾人假說X與y之關連法則為X=by，則所得

$$(38)\quad b=\beta=r\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

(39) $\alpha\beta=r^2$

於茲尤顯相變度原理與相關度原理之相似處，相變係數與相關係數之相似固不待言，即今 α, β 兩數之數學公式與相關度原理中之迴歸係數（coefficients de regression）亦何有不同之處？然其所由之途徑及其計算之意義却各不同．相變係數 $r=\cos(\overline{OA},\overline{OB})$ 之意義不過表明OA, OB兩線相交之角度之大小，即欲表明其關連法則 $y=aX$ 之近似程度耳。若 $r=\cos(\overline{OA},\overline{OB})$ 之絕對數值極近於一，則其關連法則 $y=aX$ 之假說殆離事實不遠而B點亦必離OA線不遠，故宜以B點離OA之距度 $=BA_0$：

$$(40)\qquad BA_0=OB\sin(OB,OA)=OB\sqrt{1-r^2}$$

或以A點離OB之距度 $=AB_0$：

$$(41)\qquad AB_0=OA\sin(OA,OB)=OA\sqrt{1-r^2}$$

以測量其假說與事實之符合程度。於茲可見 $\sin(OA,OB)=\sqrt{1-r^2}$ 之數量實甚關重要也。

總之，相關係數 $r=\cos(\overline{OA},\overline{OB})$ 可以示X與y間之關連法則是否爲一單次方程式，$\sqrt{1-r^2}$ 之數植則可指示吾人所

假定之關連直線與其經驗曲線兩者相差之多寡。

（2） 假說X與y之關連函數爲

(42) $y = aX + b$

此假說祇須略經變更手續卽可歸入上項假說$y = aX$。如將

$$u_i = X_i - \overline{X}$$

$$v_i = y_i - \overline{y}$$

以幾何學之術語言之，卽當取其重心點$(\overline{X}, \overline{y})$爲其原點O，則第(42)公式卽可變爲

$$v_i = au_i$$

$$(43)\quad r = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}}$$

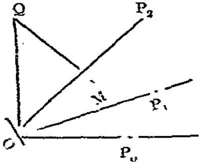
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - \overline{y})^2}}$$

此卽上述之"趨向變化之相變係數"，茲不再贅述。

（3） 假設X與y之關連函數爲

(44) $y=a_0+a_1X+a_2X^2=f(X)$

今仍用"n度空間之幾何學"以便說明，設使



$y_1,y_2,\cdots y_n$爲Q點在該n度空間各坐標之度量

$1,1,\cdots 1$爲P_0點在該n度空間各坐標之度量

$X_1,X_2,\cdots X_n$爲P_1點在該n度空間各坐標之度量

$X_1^2,X_2^2,\cdots X_n^2$爲P_2點在該n度空間各坐標之度量，又設使

(45) $\overline{OM}=a_0\overline{OP_0}+a_1\overline{OP_1}+a_2\overline{OP_2}$

若各偶然之數值果能準合此關連法則：$y=a_0+a_1X+a_2X^2$，則$\overline{OM}$與$\overline{OQ}$卽當併成一起，今試以上述第(31)假說中

之OA，OB較之，則當取cos($\overline{OM}$，$\overline{OQ}$ 爲其相變係數其理甚明。

至其"定數"a_0，a_1，a_2，之選擇，則亦當用"最小二乘"方法求之。其"最小二乘"之條件，即當使$\overline{QM}^2$達其最小點；

$$(46)\quad \overline{QM}^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big[y_i - f(X_i)\Big]^2 = \text{minimun}$$

茲爲便利起見，且借"Tchebichef之垂直制度，(systeme orthogonal de Tchebichef)—用。

設使

$$(47)\begin{cases}\overline{OQ_0} = b_0\overline{OP_0}\\[2ex] \overline{OQ_1} = b_1\overline{OP_0} + C_1\\[2ex] OQ_2 = b_2\,\overline{OP_0} + C_2\overline{OP_1} + d_2\overline{OP_2}\end{cases}$$

Q_0點其在該"n度空間"各坐標之度量爲$\varphi_{0(x_1)}\varphi_{0(x_2)}$ ……… $\varphi_{0(x_n)}$

Q_1點其在該"n度空間"各坐標之度量爲$\varphi(x_1)$，$\varphi_1(x_2)$……… $\varphi_{1(x_n)}$

Q_2點其在該"n度空間"各坐標之度量爲$\varphi_2(x_1)$，$\varphi_2(x_2)$ ……… $\varphi_2(x_n)$

其中 b_0,b_1,b_2,C_1,C_2,d_2 均爲常數；$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$，爲X之零次，一次二次方程式。

又且使

$$(48)\quad \begin{cases} \varphi_0(X)=1 \\ \varphi_1(X)=X-K_0 \\ \varphi_2(X)=X_2-K_1X-K_2 \end{cases}$$

所謂"垂直制度"者，即須令$\overline{OQ_0}$，$\overline{OQ_1}$，$\overline{OQ_2}$ 兩相垂直，(d'etre perpendiculaires deux a deux)，亦即須令$\cos(\overline{OQ_i},\overline{OQ_j})=0$耳。

欲使$\cos(\overline{OQ_0},\overline{OQ_1})=0$，當令

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_0(X_i)\varphi_1(X_i)=0$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}X_i-nK_0=0$$

$$K_0=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}=\overline{X}$$

茲又爲便利起見，可假設$\overline{X}=0$.則$K_0=0$,而欲使$\cos(\overline{OQ_0},\overline{OQ_2})=0$,則當令

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_0(X_i)\varphi_2(X_i)=0$$

或

$$(49)\qquad \sum_{i=1}^{n}(X_i^2-K_1X_i-K_2)=0$$

欲使$\cos(\overline{OQ_1},\overline{OQ_2})=0$,則當令

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(X_i)\varphi_2(X_i)=0$$

或 $$(50)\qquad \sum_{i=1}^{n}X_i(X_i^2-K_1X_i-K_2)=0$$

由上節(49),(50)兩式，即得

$$K_1=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^3}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

$$K_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

經此計算手續，乃可得下列差方程式$\mathcal{P}_0$,$\mathcal{P}_1$,$\mathcal{P}_2$:

$$(51)\begin{cases} \mathcal{P}_0(X)=1 \\ \mathcal{P}_1(X)=X \\ \mathcal{P}_2(X)=X=X^2-K_1X-K_2 \end{cases}$$

爲「$X_1X_2\cdots\cdots X_n$之垂直方程式」(Polynomes orthogonaux sur la base $X_1X_2\cdots\cdots X_n$)。

用此「垂直制度」，則可將其關連法則列成下式：

(52) $y=f(X)=a_0\mathcal{P}_0(X)+a_1\mathcal{P}_1(X)+a_2\mathcal{P}_2(X)$

用此新公式，則第(46式$\overline{QM}^2$達其最小點之條件，當令

(53) $\dfrac{\partial\overline{QM}^2}{\partial a}=0$

即當令

$$(54)\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_0(X_i)[y_i-a_0\mathcal{P}_0(X_i)-a_1\mathcal{P}_1(X_i)-a_2\mathcal{P}_2(X_i)]=0 \\ \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_1(X_i)[y_i-a_0\mathcal{P}_0(X_i)-a_1\mathcal{P}_1(X_i)-a_2\mathcal{P}_2(X_i)]=0 \\ \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_2(X_i)[y_i-a_0\mathcal{P}_0(X_i)-a_1\mathcal{P}_1(X_i)-a_2\mathcal{P}_2(X_i)]=0 \end{cases}$$

然依其『垂直性之條件』(Conditions d'orthogonalite)，則當有

$$
(55)\begin{cases}\sum\varphi_0\varphi_1=0\\ \sum\varphi_0\varphi_2=0\\ \sum\varphi_0\varphi_2=0\end{cases}
$$

故第(54)式可改爲：

$$
(56)\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_1(X_i)[y_i-a_0\varphi_0(X_i)]=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_1(X_i)[y_i-a_1\varphi_1(X_i)]=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_2(X_i)[y_i-a_2\varphi_2(X_i)]=0\end{cases}
$$

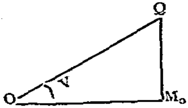
玆又爲便利起見，可假設 $\overline{y}=0$，並利用Tchebichef之特別記號如 $(y\varphi_1)$ 以代 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\varphi_1(Xi)$，餘如 $(\varphi_1\varphi_1)$．$(\varphi_2\varphi_2)$，$(y\varphi_2)$ 諸記號之意義，則甚顯著，似無重複解釋之必要。

藉此假設與新記號，則可將第(56)式改爲：

$$(56)\quad \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=\dfrac{(y\varphi_1)}{(\varphi_1\varphi_1)} \\ a_2=\dfrac{(y\varphi_2)}{(\varphi_2\varphi_2)} \end{cases}$$

由此而得

$$(58)\qquad \overline{OM}=a_1\overline{OQ_1}+a_2\overline{OQ_2}$$



M_0點其『幾何之意義』當爲Q點在OM線上之垂直點；蓋以$\overline{QM}$之距度爲最小。

今既有a_1a_2之數值，即可得其相關係數r_2：

$$(59)r_2=\cos(\overline{OQ},\overline{OM})=\frac{\sqrt{\dfrac{(y\varphi_1)^2}{(\varphi_1\varphi_1)}+\dfrac{(y\varphi_2)^2}{(\varphi_2\varphi_2)}}}{\sqrt{y_1^2+y^2_2+\cdots y_n^2}}$$

倘以推測 X 與 y 之關連法則是否爲一二次方程式。其$\overline{QM}$之距度

$$(60)\overline{QM}_0=\overline{OQ}\sin v=\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y^2n}\sqrt{1-r_2}$$

備以測量此關連法則$y=a_0+a_1X+a_2X_2^2$之近似程度。

(4)假設X與y之關連法則為

$$(61)\qquad y=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_pX^p=f(X)$$

此多次方程式之假說不過爲上述二次方程式其推廣之假設耳。其相變係數之計算方法，亦完全相同。且用「Tehebichef 氏之垂直制度」，於推廣時更屬便利，此卽該制度之最大優點，亦吾人所以採用之理由。今設使$(\overline{X},\overline{y})$爲基點，$\varphi_1$、$\varphi_2$、…$\varphi_p$ P個$X_1X_2\cdots X_n$之一次，二次…P次垂直方程式，並將關連法則f(X)變爲下式：

$$(62)\quad y=f(X)=a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\cdots+a_pa_p=\sum_{k=1}^{p}\varphi_k\varphi_k\ (X)$$

依「最小二乘」之原則，則當使$\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(X_i)]^2$達其最小點。又因利用「垂直制度」之關係，其a之計算實甚簡便：

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi\ [y_i-a_k\varphi_k]=0$$

故 (63) $$a_k=\frac{(y\varphi_k)}{(\varphi_k\varphi_k)}$$

由此，即不難得其相變係數 r：

(64) $$r_k=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{(y\varphi_k)^2}{(\varphi_k\varphi_k)}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}$$

若使 $p=1$，則 $\varphi_1=X$，$(y\varphi_1)=\sum_{i=1}^{n}X_iy_i$，$(\varphi_1\varphi_1)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

而 r 將等於：

$$r_p=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}=r$$

此又吾人所孰稔且通用之相變係數也。

又 r_p 之數值，當隨 P 之數值而漸長。若使 $P\to n$，則 $r_p\to 1$。換言之，皆吾人所假設之關連方程式之次數愈高

，則離事實當亦愈近。若該關連法則竟爲一n次方程式，則必能與事實盡合因一n次方之曲線必可經過n點，而其『相變係數』r_n當等於一。然法則之效用，貴在用簡單之方式，以表明繁複之事實，則P當以小爲宜。然P之數值究如何而始爲合格，則當視r_p之數值究有若干。若r_p之數值太近於零，則當漸將P之次數提高爲P+1，P+2……………，直至其r_{p+1}甚近於於一爲止。今用『垂直制度』，其r_p及r_{p+1}之數學公式爲

$$r_p=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{(y\varphi_k)^2}{(\varphi_k\varphi_k)}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}$$

及

$$r_{p+1}=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{p+1}\frac{(y\varphi_k)^2}{(\varphi_k\varphi_k)}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}$$

由 r_p 進而至 r_{p+1} 之計算，仍可利用 r_p 之計算，祇須添以 $\frac{(y\varphi_{p+1})^2}{(\varphi_{p+1}\varphi_{p+1})}$ 之計算，故『Teheblchef 氏垂直制度』不特有便於推廣學理，且亦甚便於計算。

第八節： 不測變化數之相變度原理

設有兩『不測變化數』之時間數列：

$$(65)\begin{cases} \bar{\xi}_1\ \bar{\xi}_2\cdots\cdots\bar{\xi}_i\cdots\cdots\bar{\xi}_n \\ \eta_1\eta_2\cdots\cdots\eta_i\cdots\cdots\eta_n \end{cases}$$

今分三步研究之：(1)$\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j$之間有無關連？此種關連名曰$\bar{\xi}$之『內關連』(liason interne entre les $\bar{\xi}$)；(2)$\eta_i\eta_j$之間有無關連？此種關連名曰η之『內關連』。(3)$\bar{\xi}_i\eta_j$(或$\bar{\xi}_j\eta_i$)之間有無關連，類此研究，皆當視$\bar{\xi}$，η之性質而異其方法。然$\bar{\xi}$，η既為『不可測』，又何由知其性質？故首當於$\bar{\xi}$，η之性質上設一假說，然後能採用適當之方法。今且假說$\bar{\xi}$，η各具『偶然變數』(Variables aleatoires) 之性質，並舉例以明之。

設有甲乙兩人，以二骰為戲；於每單位時間，甲擲一骰

而記其點數a；乙擲他骰，得其點數β而記其$(a+\beta)$之和；在t單位時間以後，甲所記之總數為$X_t=\sum_{i=1}^{t} a_i$，乙所記之總數為$y_t=\sum_{i=1}^{t}(a_i+\beta_i)$，此$X_t$ y_t之數值當各為時間 t 之函數。

然a之希望數 $E(a)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3.5$；$(a+\beta)$之希望數$E(a+\beta)=2E(a)=7$；故可取$\overline{X_t}=3.5t$ 及$\overline{y_t}=7t$兩函數各為X_t及y_t之平均變動法則。又若以

$$(66)\begin{cases} X_t=\overline{X_t}+\xi_t \\ y_t=\overline{y_t}+\eta_t \end{cases}$$

則ξ,η殆即X,y之『不測變化數』。又ξ_t,η_t之『機遇法則』(Loi de probabilite)亦當隨時間為轉移，故關於ξ_t, η_t之研究，當注意其時間之長短及其在時間上之位置(rang dans le temps)，此實為時間數列之特點，亦卽相變度原理之特點。

試以

$$(67)\begin{cases} u_i=\alpha_i-3.5 \\ v_i=\beta_i-3.5 \end{cases}$$

則

$$(68)\begin{cases} \xi_1=u_1 & \eta_1=u_1+v_1 \\ \xi_2=u_1+u_2 & \eta_2=u_1+v_1+u_2+v_2 \\ \vdots & \vdots \\ \xi_t=u_1+u_2+\cdots u_t & \eta_t=(u_1+v_1)+(u_2+v_2) \\ & \quad +\cdots+(u_t+v_t) \end{cases}$$

$\alpha_t\beta_t$「或然數值」(Valeur probable)既皆等于3.5，故u_t v_t之「或然數值」皆當等于零，$\xi_t\eta_t$之「或然數值」亦皆等于零，其「標準差」(deviation type)則當隨$\sqrt{t}$而大小。

今首當研究$\xi_1\xi_t$之相關，α_1，α_t既屬爾「不相關之機遇變數」(Variables aleatoires ind'ependants)，則u_1u_t當亦各不相關，故ξ_1，ξ_t之「標準差」之平方$E(\xi_1)^2E(\xi_t)^2$—即ξ_1，ξ_t之二希望差或變度，一當爲：

$$E(\xi_1)^2=E(u_1)^2$$

$$E(\xi_t)^2=E(u_1)^2+E(u_2)^2+\cdots+E(u_t)^2$$

然α_1，α_t之機遇法則既各相同，則u_1，u_t之機遇法則亦無異致，故

$$E(u_1)^2=E(u_2)^2=\cdots\cdots=E(u_t)^2=u_2$$

則 $$E(\xi_t)^2=tu_2$$

又因 $$E(\xi_1\xi_t)=E(u)^2=u_2$$

故$\xi_1\xi_t$之相關係數當為

$$(69)\qquad r_{1/t}=\frac{E(\xi_1\xi_t)}{\sqrt{E(\xi_1)^2}\ \sqrt{E(\xi_t)^2}}=\frac{u_2}{\sqrt{tu_2^2}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$$

由此可見ξ_1與以下各ξ_2($\xi_3\cdots\xi_t$)均有「機遇之相關」(liaison stochastique),其程度則漸次遞減,蓋因其相關係數($r=\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots,\frac{1}{\sqrt{t}}$ 漸次遞減故。他若求其ξ_1,ξ_t之相關,則可得其相關係數r; $r=\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$ ($t_1<t_2$),其數值亦當隨t_2而漸減。綜言之,各ξ均互有「機遇之相關」(Liaison stochastique),但其相關程度,則視其相互距離之遠近而淺深焉。

又變化數之「內關連」,可設法消除除之;其取消方法則常用「相差方法」(Methode des differences);至「相差之級次」(ordre de differences)則各隨ξ之性質而大小之;在

本例中，則取其『一次相差 (difference premiere) 足矣』；其$\Delta\xi_t$即屬無『內關連』之變化數。

今$\xi_i\xi_j$ 之相關既經研究，乃可進而研究η之『內關連』；然其方法與結果當與ξ之研究完全相同，故不再贅述；且即以ξ, η 之相關爲研究。

$\xi_t\eta_t$之相關實極甚顯著。蓋因

$$\xi_t = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + $$

$$\eta_t = u_1 + u_2 + \cdots + u_t + v_1 + v_2 + \cdots v_t$$

故ξ, η_t有一公同之數項：

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_t$$

又 u_t, v_t 既屬不相關之『機遇變數』，且有公同之『機遇法則』，故

$$E(\xi_t^2) = tu_2$$

$$E(\eta_t^2) = 2tu_2$$

$$E(\xi_t\eta_t) = tu_2$$

故其相關係數即爲：

$$(70) \qquad r = \frac{E(\xi_t\eta_t)}{\sqrt{E(\xi_t^2)}\ \sqrt{E(\eta_t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

至$\alpha_{t_1}\beta_{t_2}$(或α_{t_2}□t_1之相關係數，則當等於 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$ ($t_1<t_2$),必較同位置α_t□t者為小,又若各以其『初次相差』$\Delta\alpha$，$\Delta\beta$以代α,β,則又僅同班之$\Delta\alpha$,$\Delta\beta$可有其『機遇之關連』(Liaison stochastique)，其相關係數亦為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。今既將例題之各種關連分析研究，當不難就此推廣之，以闡發相變度之一般原理。然在推廣之先，不得不注意者,即以上所述之各種相關係數之數值,盡屬『學理上之數值』；欲知此『學理上之數值』，必須預知其α及β之『機遇法則』(loi de probabilites)；然按諸實際罕能預知此『機遇法則』，故實際所得之相關係數，亦罕能與其『理想之數值』適相滚合。設有甲乙兩人 ， 能盡依上述例題之規則而試驗之，其試驗結果,亦罕能使其$\alpha_t\beta_t$之『實驗相關係數』r 適巧與其理想相關係數 $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$相等。惟依大數之原則得祗需 n 有相當大，即其時間數列有相當之久長，則其實驗所得之

相關係數r'(Coefficient empiripue de correlation)

$$(71)\quad r'=\frac{\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}\;\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2}}$$

當與其『準確相關係數』(coefficient de correlation vraie 相差不遠也。

於前例中，又曾證明$\xi_i\xi_j$, $\eta_i\eta_j$ ($i\neq j$) 之相關均可用『相差方法』消除之，故可假設$\xi_t\eta_t$爲已經消除該類關連之變化數，亦卽假設ξ與η間惟$\xi_t\eta_t$互有『機遇之關連』其他關連則俱已消除。藉此假設，則吾人之研究範圍，卽縮減至$\xi_t\eta_t$之關連研究。並假設$\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$有一公同之機遇法則，其$\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n$之機遇法則亦然。

若x,y之『可測變化數』之關連法則爲一單次方程式，則其不測變化數$\xi_t\eta_t$之相關係數，卽將與其『初次相差』$\Delta\xi_t$,$\Delta\eta_t$之相關係數相等：

$$(72)\begin{cases}\Delta\xi_t=\xi_{t+1}-\xi_t\\ \Delta\eta_t=\eta_{t+1}-\eta_t\end{cases}$$

今各ξ有同一之『機遇法則』，則

$$E(\xi_{t+1})=E(\xi_t),$$

故 $$E(\Delta\xi_t)=E(\xi_{t+1}-\xi_t)=0。$$

各η亦有同一之『機遇法則』，則

$$E(\eta_{t+1})=E(\eta_t),$$

故亦 $$E(\Delta\eta_t)=E(\eta_{t+1}-\eta_t)=0。$$

又ξ_t，ξ_{t+1}既無關連，則

$$E\ (\Delta\xi_t)^2=E\ (\xi_{t+1}-\xi_t)^2=2E(\xi_t^2)$$

$=2E(\xi^2)$ $\eta_t\eta_{t+1}$亦無關連，則

$$E(\Delta\eta_t)^2=E(\eta_{t+1}-\eta_t)^2=2E(\eta_t^2)=2E(\eta)^2$$

且$\eta_t\xi_{t+1}$，$\xi_t\eta_{t+1}$均各無關連，則

$$E(\Delta\xi_t\Delta\eta_t)=E(\xi_{t+1}-\xi_t)(\eta_{t+1}-\eta_t)$$

$$=2E(\xi\eta)=E(\xi_{t+1}\eta_{t+1})+E(\xi_t\eta_t)$$

故$\Delta\xi$,$\Delta\eta$之相關係數$r_{\Delta\xi,\Delta\eta}$

$$(73)\quad r_{\Delta\xi,\Delta\eta}\fallingdotseq\frac{2E(\xi\eta)}{\sqrt{2E(\xi^2)2E(\eta^2)}}$$

$$=\frac{E(\xi\eta)}{\sqrt{E(\xi)^2E(\eta)^2}}=\lambda_{\xi,\eta}$$

今卽可以此公式推廣之。若假設X,y之『可測變化數』

其關連法則爲一二次方程式，則$\bar{\xi},\eta$之『二次相差』(differences secondaires)$\Delta^2\bar{\xi},\Delta^2\bar{\eta}$之相關係數將與$r_{\bar{\xi},\eta}$相等：

$$r_{\Delta^2\bar{\xi},\Delta^2\eta}=r_{\bar{\xi},\eta}$$

再推廣至K次方程式，則其『K次相差』(differences d'ordre K)$\Delta^k\bar{\xi}\Delta^k\eta$之相關係數當與$r(\bar{\xi},\bar{\eta})$相等，不特此也，苟使其『K次相差』之相關係數能與$r(\bar{\xi},\bar{\eta}$相等，則其次數較高之相差數$\Delta^{k+1}\bar{\xi},\Delta^{k+1}\bar{\eta}$之相關係數均當與$r_{\bar{\xi},\eta}$相等，(Student, Biometrika vol. X, P. 179—180)。故又能由其『不測變化數』之相差數其相關係數之固定性之觀察，以斷定其『可測變化數』之關連方程式之次數究以孰爲最適宜者(Anderson, Blomtrika vol. X, P. 269—276)。故『不測變化數』與『可測變化數』之分析，不特藉以明瞭各種變化數之相變度，且從而知X與y之最可能之關連法則。顧任何科學之目的，務在尋求法則，故統計學在各種科學之應用，實以相關度及相變度之原理爲最。然在統計學，却以相關度及相變度之原理爲最難；卽以相變度而論，在本文末段『不測變化數之相變度原理』中，尙有兩大疑問存焉：(1)相差次

數不宜過高，否則將何以實行分析之計算？(2)實際上是否能消除各時間數列之『內關連』？故今相關度與相變度其原理之研究，殆猶在方興未艾之期歟！

第九節 各種相變係數之批評

本章由最簡單之關連指數，直至分析入微之相變度原理，其間所述各種相變係數，就其學理而言，本無評論之必要，蓋因後者不過前者之擴充與深進耳，但各種相變係數在學理上之價值雖已無庸爭論，然在應用上，尚各有其相當之地位，即以關連指數而論，其學理上根據之淺薄，固不待言，然因其計算便利，尚為一般所樂用，他若『合於k次方程式之相變係數』其於學理上之根據固屬堅固，然因計算繁複，非至極精確之研究，鮮有用之者，處茲最簡單，最淺陋之關連指數與最繁複，最精確之『合於k次方程式之相變係數』之間，則當以最通用之 Karl Pearson 氏及Lucien March 氏兩相變係數較適於中庸之道。然應用此相變係數時，有不得不加注意者，即相變係數乃指示X與 y『合於單次方程式』之相變度，然則其數值極微之時，祇可斷言X與 y 之關連法則決非單次方程式，

但X與y未必即爲『無關連』者，蓋其關連法則不限於單次方程式，而亦可爲K次方程式或其他函數也。又相變係數之數值，常與分析工作有莫大之關係；時因其長期趨勢之不同，竟將其短期變化之關連掩飾不彰。Hooker氏研究英國自1861至1895間五十五年來國外貿易與婚姻率之相變度(B.H.Hooker, journal of he Royal Statistical Society, vol.LXIy, 1901, September, PP－854－492)，初不加分析，僅得一極微之相關係數，(r=0,18)後消去其長期趨勢，遂得r=0.80 而英國國外貿易與其婚姻率之相關程度於茲遂顯。故研究相變度時，切不可輕易下斷語！當詳審事實，細心分析，方不致流於謬妄而反失統計方法之信用！

第十章； 相變度之計算

（從略）

第七章 插補法

第壹節 插補法之意義及其用途

何謂"插補法" (interpolation) ? 簡言之，即遇統計材料有缺失時，用以求得其"插補數字"之方法(即補足實際統計所缺數字的方法)。插補數字與直接調查所得之統計數字當然不同因插補數字既非直接由事實觀察中求得，乃僅憑人類理智所推得，自然比較不可靠，但亦非完全無稽而能任意憑空臆造者，亦必有相當根據，應用合理方法，始能離事實不遠，概具有相當可靠性而後能令人認可。

宇宙間一般現象，概具有連續性，在時間不斷向前推動時，空間大部份現象的變化，似能循着一定的軌道進行，則此類現象在某一時間的歷程與其前其後的歷程不無有相當的關係，故往往能由其前後的歷程推測其中間的歷程。據此觀念，則列在統計時間數列中之某一項數字，與其前其後若干項應有相當關係。倘逢該項有缺失時，不難由其前其後諸項推求之；推求所得之數字，即名"插補數字"。如是求得之數字，雖不能斷爲必是，然依連續性原則(principe de continuite) 自當與實際數字所差無多。但亦有僅根據其前若干項或其後若干項以施行插補法，以預測未來或推測過去，此類插補法，特名"外插補"，(extrapolation)，以別於尋常插補法（內插補interpolation）。此於應用方面，固然擴大範圍，但外插補法所得數字之可靠度較為低弱，故外插補法的應用，宜十二分謹慎，始不致陷入謬誤。（Jevons於1866年在其所著"The coal question"中用外插補法預料英國煤炭將於一九七〇年將告罄云云，已被事實否證一例，堪資吾人前車之鑒。）

又宇宙間各種現象的變化，彼此之間，常有"相似"或"相關"的關係，知此即可測彼。偶逢某甲現象某時期的數字有缺失時，每能間接由其"相似的"或"相關的"某乙現象同時期的數字以推測之。此種推測方法，亦插補法之一種。據此，則插補法所據原則，不外由宇宙現象之有"連續性"(continuite)，"相似性"(analogie)或"相關性"(correlation)，換言之，"插補法乃根據(連續性)相似性或(相關性)以推測缺失或未知數字之方法"。

至插補法之應用，當然以求得實際統計所未及調查之數字為主。例如人口統計，手續繁複，需費浩大，勢不能年年

清查，即統計事業最發達的國家，亦祇能五年或十年一次，然則於未行清查年份之全國人口總數（此項人口總數用處甚多，例如每年死亡率，出生率，婚姻率等即須以該年度之人口總數除其死亡，出生，婚姻人數等。）將從何得知？乃祇有應用插補法一途。由此求得之每年人口總數，固不能分毫無差，然苟無特別事故（如劇烈的戰爭，災害，流疫等）人口總數既鮮突然的變遷，則插補數字自當不致與事實相去甚遠，其確度幾能與實際調查所得者相埒。再如吾國於一二八暴日擾滬時期上海物價指數調查無法進行，民國廿一年度二三兩月之數字祇有付諸缺如，今日若欲求得該兩月份之上海物價指數，亦祇有插補之一法。故插補法亦可謂為統計材料有缺失而無法求得真實數字時唯一補救之辦法。然插補法之用途，並不以此補缺填空為限，有時亦可用以預測未來，且實際上常有預測未來數字之必要。例如財政家於計劃預算時，欲知明年全國人數以預測其稅收數目，欲預知明年全國國家支出總數以決定其租稅政策等等。設使預測須有相當可靠與精確，則除根據以往歷年統計和借重插補法外，直別無他法。此外，插補法另有一妙用，即具有糾正調查所得數字的

功能」。此言初視似難盡信，蓋插補數字本身微帶虛幻性質且不無稍含主觀成分，其可靠程度，安能勝過實地調查所得數字？然考諸實際，却確有實地調查所得數字反不足信，轉待插補法糾正之後較能符合事實者。此種情形，大概由於調查者之技術或被調查者之智識尚未達到應有程度，以致報告未能眞實。」當然，民智漸開通，調查技術愈進步，統計數字亦漸可信，固無庸再借重插補法之糾正。果使統計技術進展到相當程度，則或有統計家無庸知插補法之一日。惜現在尚未到此程度，尤其在今日中國，調查所得數字，恐尚不免不實而容有糾正之必要。目下吾國辦理統計者不研究高深理論，（他們認為高深）似以為"理論無甚用處"，不知調查工具愈不完備，需要學識之幫助愈多，正似照相機之於攝影者，倘照相器具精良，則雖略知其術，亦能如願以償，若器具稍不精良，則非熟於是道者即將失敗；準此以言，則現今吾國統計事業苟欲發達，不特希望統計數字的數量日增，尤應希望其質量漸趨可靠，是望吾國從事統計工作者於統計學術方面亦應稍稍努力！此節所言，原與本文無關，祇因鑒於吾國目前統計事業仍甚幼稚，政治又未上軌道，不習統計學

者可主持統計事業，轉若統計事業不需要統計學識者然，偶爾興感所及，遂不禁詞費，惟讀者諒之。〕報告旣未能信實，原始統計數字卽不可靠，所以插補所得數字轉有比較接近事實之可能。例如人口統計年齡分配表，實際調查的結果，倘使將其每歲的人數排列之，每呈"突密"狀態，"突密點"常在於五的倍數如5,10,15,25等歲數。此種狀態，決非事實使然，必由被調查者報告失實之故。因此，實際調查所得到之人口統計年齡按歲分配表斷不足信，而現今各國所發表之年齡分配表，而後用插補法以求其按歲之年齡分配表，較能接近事實。

第二節 插補法之種類

插補法可大別爲二：一爲圖解方法，一爲計算方法。爲說明此兩方法起見，可使x表示某一現象之數量（（倘逢一時間數列，x常表示時間），y表示另一現象之數量（（倘逢一次數數列，y常表示次數）。設已知下列x,y各對之數值：

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \cdots\cdots x_i \quad x_{i+1} \cdots\cdots x_k$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \cdots\cdots y_i \quad y_{i+1} \cdots\cdots y_k$$

由此xy數值對照表，固知在$x=x_1$時，$y=y_1$；當$x=x_2$，$y=y_2$；………當$x=x_k$時，$y=y_k$；但若問x等於x_i與x_{i+1}間某一數值時，

$$x_i \angle \xi_i \angle x_{i+1}$$

即無從知其y應等於何值。此一問題之解決，唯有用插補法。插補法有圖解方法與計算方法兩種，前已講及，但計算方法如何，圖解方法又如何，且容下節分解。

圖解方法的第一步驟，應於一平面紙上取定兩坐標軸）普通用兩互相垂直線爲縱橫坐標軸，該坐標制即名"正坐標制"），一名橫坐標軸(ox)，另一名縱坐標軸(oy)，於各坐標軸各選一適當單位（不必相同），於是每對配偶(x,y)即得以一點表之。而圖解方法之第一步驟，應以上列已知(xy)值表內各對之數值，用若干幾何點（統計學上亦名"經驗點"）表之於平面。其第二步驟，即根據該若干"經驗點"繪一"經驗配合曲線"(courbe empirque ajustee)，該經驗曲線的繪法，初無一定標準，但與諸經驗點之距離愈近愈妙。既得其經驗曲線則其第三步驟即甚易易，祇須取一平行於oy軸之直線

$$x=\eta_i$$

與該曲線之相交點，該相交點的縱度，即所問於$x=\eta_i$時y應取之"插補值"(Valeur interpolee)。同法，亦得間在y等於y_j與y_{j+1}間某一數值η_j時：

$$y_j \angle \eta_j \angle y_{j+1}$$

x應等於何值，則祇須取一平行於ox軸的直線

$$y=\eta_j$$

與"經驗曲線"之相交點，該相交點之橫度，即所問於$y=\eta_j$時x應取之"插補值"。

至於計算方法之步驟，亦須根據上列已知(x,y)值對照表內各對數值(或另有學理上理論的根據)，先決定x與y的關係，即先確定(或假定)"插補函數(亦名"插補公式"formu le d'interpolation)，

$$y=f(x)$$

或　$$x=\varphi(y)$$

又或　$$F(x,y)=o$$

之形式；次再根據某種原則(如最小二乘等原則)並利用"經

驗值"以求得插補公式內含諸常數；旣得該插補公式，卽可用計算方法求其與ξ_i相應對的y值：

$$y=f(\xi_i)$$

或求其與η_j相應對的x值：

$$x=\varphi(\eta_j)$$

圖解方法與計算方法相較，圖解方法比較簡便，惟不若計算方法精確。然插補數字原不過為一近似值，插補法無論如何精確，終不能達到完全準確之程度，故實際上每用簡單圖解法已夠精確，無須用較繁複的計算方法。但圖解法的關鍵，全在"經驗曲線"，而"經驗曲線"之繪法，全憑經驗，無甚理論可言。以下卽導譯計算公式的插補法，與簡易插補法。

第三節 簡易插補法

簡易插補法有二：(甲)比例插補法(乙)圖示插補法

(甲)比例插補法

比例插補法係基於現象類似性之原則，用比例方法，根據某一數列之數字插補其類似數列數字之方法。設使缺y'，則苟知x數列與y數列相類似，卽可由比例公式$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$求得之

。此種方法固甚簡單，但應用之處頗多。茲舉數實例以明之。

（1）設某機關編製重慶市躉零售物價指數，其中大河嵐炭缺二十六年上半年各月份之零售價格，而又無法補查，則即可用比例插補法由躉售價格推知其零售價格。蓋一物躉售價格與零售價格變動之趨勢大致相似也。其計算如次：

已知二十六年下半年各月大河嵐炭之零售價格為每挑2.00元，\$2.20，\$2.20，\$2.20，\$2.50，\$2.50；二十六年下半年各月大河嵐炭之躉售價格為每噸\$9.80，\$10.92，\$10.75，\$11.82，\$13.30，二十六年上半年各月大河嵐炭之躉售價格為每噸11.60，\$11.37，\$11.20，\$10.75，\$8.54，\$8.45；求二十六年上半年各月大河嵐炭之零售價格

茲用簡易插補方法，即可依據七月份躉零價格之比例關係，以推求之。

由比例：$$\frac{\text{七月零售價格}}{\text{七月躉售價格}}=\frac{\text{各月零售價格}}{\text{各月躉售價格}}$$

得 $$\text{各月零售價格}=\text{各月躉售價格}\times\frac{\text{七月零售價格}}{\text{七月躉售價格}}$$

故 $$\text{六月零售價格}=\text{六月躉售價格}\times\frac{\text{七月零售價格}}{\text{七月躉售價格}}$$

$$=8.54\times\frac{2.00}{9.00}=1.74\text{元}$$

$$\text{五月零售價格}=8.54\times\frac{2.00}{9.80}=1.74\text{元}$$

$$\text{四月零售價格}=10.75\times\frac{2.00}{9.80}=2.19\text{元}$$

$$\text{三月零售價格}=11.20\times\frac{2.00}{9.00}=2.29\text{元}$$

$$\text{二月零售價格}=11.60\times\frac{2.00}{9.80}=2.32\text{元}$$

$$\text{一月零售價格}=11.60\times\frac{2.00}{9.80}=2.37\text{元}$$

但爲精確起見，亦可依據二十六年下半年各月份躉零售價格綜合比例關係以推求之。卽用比例式：

$$\frac{\text{各月零售價格}}{\text{各月躉售價格}}=\frac{\text{二十六年下半年各月零售價格總和}}{\text{二十六年下半年各月躉售價格總和}}$$

由此比例式求得二十六年上半年各月零售價格如次：

一月	2.30元	四月	2.13元
二月	2.26元	五月	1.70元
三月	2.22元	六月	1.70元

(二)甲乙兩地某戶口組織極相類似，今知乙地有132.46

7戶,523,428,口，而甲地僅知有214.672,戶，設若欲求甲地之人口數，則可以比例插補法推求之。即由比例公式：

$$\frac{\text{甲地人口數}}{\text{甲地戶數}}=\frac{\text{乙地人口數}}{\text{乙地戶數}}$$

得
$$\text{甲地人口數}=\text{甲地戶數}\times\frac{\text{乙地人口數}}{\text{乙地戶數}}$$

$$=214,672\times\frac{523,428}{132,467}$$

$$=847,955$$

(3)設抽樣調查某縣一部分戶口之結果爲11,324戶，46,831口，復知某縣總戶數爲134,523，欲求某縣之總人口，則亦可使用比例插補法以推求之。蓋抽樣所得戶口狀況與其全部戶口狀況殆相類似也。其求法如次：

$$\text{某縣之總人口數}=134,523\times\frac{46,831}{11,324}=55,580$$

適用比例補插法之實例，不勝枚舉，凡同一類之現象，均可採用比例公式相互推求，要在其變動趨勢是否類似，而類似之程度實影響所得結果之正確與否也。

(乙)圖示插補法

圖示插補法，係根據已知經驗點畫一隨手配合曲線，然

後由x點畫一與y軸相平行之線，此線與隨手配合曲線相交點之縱坐標，即所求之插補值。例如重慶關亭陰丹士林布之躉售價格自二十六年一月至二十七年八月之價格如下表，而缺二十七年五月份之價格，乃即可根據實際價格畫一隨手配合曲線如下圖，而後就x軸上取得二十七年五月份相應對之一點，畫一直線與y軸平行，其與隨手配合曲線相交點之縱坐標為179.0即所求二十七年五月份之價格。

	二十六年	二十七年
一月	86.2	115.3
二月	85.2	125.1
三月	83.4	177.7
四月	87.5	171.5
五月	91.7	
六月	91.5	183.2
七月	91.7	191.9
八月	80.2	197.9
九月	132.7	
十月	130.1	

十一月	119.6
十二月	119.6

此種方法亦甚簡易，且無高深理論，故其為用頗廣，但僅在不求十分準確時始可。

第四節 相差計算法

用計算公式之插補法，要在"插補公式"之確定。但"插補公式"之確定，可取前述(x,y)對照表之全部數字，亦可僅取其一部分數字。由其全部數字所確定(x,y)間的關係，在統計學上另名，"配合公式"(亦名"經驗公式")自可用作插補公式，但手續非常繁複，故實際應用除非已有配合公式而即用以插補者外，罕有特地求配合公式專為插補用者。通常插補公式亦祇用缺失數字的前後若干項而已。因此，插補法亦祇能限於利用一部分數字以求插補公式的方法，而利用全部數字以求"經驗公式"的方法應屬於"配合法"。

又用計算公式的插補法，其最初步驟，乃確定插補公式的形式。由其形式之不同，又分"代數函數插補法"與"超越函數插補法"兩種(超越函數插補法之中，又可細分"三角函數插補法""指數函數插補法"等等)以一般言，代數函數插

補法已夠應用。本稿不在深刻的探討，祗願就最通用之插補法作一簡略的論述，故超越函數插補法略而不述，專講代數函數插補法。然代數函數插補法常用相差數計算，故擬先述相差計算法：

a.相差數之定義

設使y爲x的函數，當$x=x_0,x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$時，

$$y=y_0,y_1,y_2,\cdots\cdots y_n$$

所謂"y的相差數"(Difference)，亦名"有定相差數"(Diffe encefirie)，乃其前後兩值之相差。例如y_0之相差數爲

$$\Delta y_0=y_1-y_0$$

y_1之相差數爲

$$\Delta y_1=y_2-y_1$$

y_t之相差數爲 $\left[t=0,1,2\cdots\cdots,(n-1)\right]$

$$\Delta y_t=y_{t+1}-y_t$$

b.相差數之級次

由各y取其前後兩值之差，所得相差數Δy，亦名"y的初級相差"(Differenice premire)。倘由各Δy再取其前後兩

值之差，所得相差數$\Delta^2 y$，即名"y的二級相差"。由此類推，凡由k級相差$\Delta^k y$，再取其前後兩值之差，所得相差數$\Delta^{k+1}y$，即名"y的$\overline{k+1}$級相差"。

$$\Delta^{k+1} y_t = \Delta^k y_{t+1} - \Delta^k y_t$$

是由各y值可依次求其各級相差數如下表：

相差數計算表

變數	應變數	初級相差	二級相差……	k級相差……
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			
⋮	⋮	⋮	⋮	$\Delta^k y_0$
x_{t-1}	y_{t-1}			
		Δy_{t-1}		
x_t	y_t		Δy_{t-1}	
		Δy_t		
x_{t+1}	y_{t+1}			
⋮	⋮	⋮	⋮	$\Delta^k y_{t-1}$
x_{n-2}	y_{n-2}			
		Δy_{n-2}		
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$	
		Δy_{n-1}		
x_n	y_n			

舉一實例$y=x^3+2x+{}^2x$，即得下列相差數計算表：

表一： 相差數計算例表

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$	$\Delta^9 y$
0	1									
		5								
1	6		8							
		13		8						
2	19		16		16					
		29		24		32				
3	48		40		48		64			
		69		72		96		128		
4	117		112		144		192		256	
		181		216		288		384		512
5	298		328		432		576		768	
		509		648		864		1152		
6	807		976		1296		1728			
		1485		1944		2592				
7	2292		2920		3888					
		4405		5832						
8	6697		8752							
		13157								
9	19854									

c, 相差數計算公式：

按定義以求 y 的 k 級相差，須先由各 y 求其初級，二級，…………(k－1)級諸相差數，依次計算之。此種計算方法，在求各 y 的各級相差數時，最稱適用。然在僅求某 y 的某級

相差數時，便嫌繁複，不及直接由各 y 値求得者便利。如何逕由各 y 求其某 y 某級相差數，則祇須應用下列相差數計算公式得矣。

按定義，

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t$$

$$= y_{t+2} - y_{t+1} - (y_{t+1} - y_t)$$

$$= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

$$\Delta^3 y_t = \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t$$

$$= (y_{t+3} - 2y_{t+2} + y_{t+1}) - (y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t)$$

$$= y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$$

依次類推，即得其普通公式如次：

(1) $$\Delta^k y_t = \Delta^{k-1} y_{t+1} - \Delta^{k-1} y_t$$

$$= y_{t+k} - C^1_k\, y_{t+k-1} + C^2_k\, y_{t+k-2} \cdots$$

$$\cdots + (-1)^m C^m_k\, y_{t+k-m} \cdots + (-1)^k y_t$$

其間

$$C^m_k = \frac{k.(k-1).\cdots(k-2)(k-m+1)}{1.\ 2.\ 3.\cdots\cdots m}$$

有此公式，便不必用逐步推求的方法，得逕由各y以求任何級次的相差數。如求上例$y=x^3+2x^2+x$其$\triangle^3y_2$之數值，即不必先求其各初級相差與二級相差，祇須用上述第(一)公式逕由各y值計算之：

$$\begin{aligned}\triangle^3y_2&=y_5-3y_4+3y_3-y_2\\&=268-3\times117+3\times48-19\\&=72\end{aligned}$$

該數值與上述例表用逐步推求法所得結果完全一致。

反之，由各相差數亦得求其各y的數值。

按定義

$$\begin{aligned}y_1&=y_0+\triangle y_0\\y_2&=y_1+\triangle y_1\\y_2&=y_0+\triangle y_0+\triangle y_0+{}^2y_0\\&=y_0+2\triangle y_0+\triangle^2y_0\\y_3&=y_2+\triangle y_2\\&=y_0+3\triangle y_0+3\triangle^3y_0+\triangle^2y_0\end{aligned}$$

依此類推，即得其普通公式：

$$y_k=y_0+C^1_k\triangle y_0+C^2_k\triangle^2y_0+\cdots+C^m_k\triangle^my_0+\cdots+\triangle^ky_0$$

或其更普通公式如次：

$$(2)\ y_{k+t}=y_t+C^1_k\,\Delta y_t+C^2_k\,\Delta^2 y_t+\cdots+C^m_k\,\Delta^m y_t$$

$$+\cdots+\Delta^k y_t$$

如求上例$y=x^3+2x^2+x$其y_7　則按此第二公式卽得：

$$y_7=y_0+7\Delta y_0+21\Delta^2 y_0+35\Delta^3 y_0+35\Delta^4 y_0+21\Delta^5$$

$$y_0+7\Delta^6 y_0+\Delta^7 y_0$$

$$=1+7\times5+21\times8+35\times8+35\times16+21\times32+7$$

$$\times64+128$$

$$=1+35+168+280+560+672+448+128$$

$$=2292$$

此間計算所得結果，與上述例表(一)所載亦毫無二致。

第五節　代數函數插補法

所謂代數函數插補法，卽當插補公式$f(x)$有如下式：

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n$$

今果使$f(x)$為一n次方程式，並各x成一算術級數，則其各y的相差數卽將為壹$(n-1)$次方程式，其二級相差數將為壹$(n-2)$次方程式，其三級相差數將為壹$(n-3)$次方程式，……依次類推，其n級相差數將為一零次方程式(卽變為一常數)

，而其(n+1)級以上諸相差數均將等於零。據此，即得其插補方法如次：

設有壹統計數列：

$$\begin{cases} x_1 \quad x_2 \cdots\cdots x_{i-1} \quad x_i \quad x_{i+1} \cdots\cdots x_k \\ y_1 \quad y_2 \quad y_{i-1} \quad \text{缺} \quad y_{i+1} \cdots\cdots y_k \end{cases}$$

各x成一算術級數(凡按期發表之統計，與組距相等的次數數列，均能符合此條件)，而y_i爲其所缺之數項。

假定$y=f(x)$爲壹n次方程式而求其某y_t項的$n+1$級相差數〔見上節相差數計算公式(1)〕

$$\triangle^{n+1}y_t = c_{t+n+1} - C^1_{n+1}c_{t+n} + C^2_{n+1}c_{t+n-1} - \cdots + (-1)^m$$
$$m_{n+1}y_{t+n+1-m} + \cdots + (-1)^{n+1}y_t$$
$$=0$$

乃祇須y_t在所缺項y_i之鄰近，即當

$$t+n+1=i=t$$

則上列$\triangle^{n+1}yt=0$之等式中必含y_i，而所缺項y_i即得由該等式計算之。

惟y_i既須由$\triangle^{n+1}y_t$之計算而求得，則其數值必將隨所取y_t之不同而有差別。倘使t等於i(或等於$i-n-1$)，則所得之y_i

，即將為外插補值，而其可靠度遂較為薄弱。故y_t項的選擇，實有相當關係，亦必須有一定標準，始不致法同而果異。見今一般所依遵之規則甚為簡單，祇使所缺項y_i應位於$\Delta^{n+1}y_t=0$等式的最中心。假使n為一單數(倘n為雙數，中心將有兩項，無分軒輊，故祇取單數)，

$$n=2p-1$$

則其n十1級相差數$\Delta^{n+1}y_t=\Delta^{2p}y_t$的計算，須取 2p+1 個相接連的y項，而欲使$y_i$位其正中，即當以$y_t=y_{i-p}$。

今且示例如下(錄自Bowley: Elements of Statistics)：

表二　英國輸入貿易統計

年份	x	輸入值 壹仟英鎊	Y
1810	x_1	39202	Y_1
1811	x_2	26510	Y_2
1812	x_3	26163	Y_3
1813	x_4	缺	Y_4
1814	x_5	33755	Y_5
1815	x_6	32987	Y_6
1816	x_7	27431	Y_7

玆所缺項爲y_4，假定y與x之關係爲壹一次方程式（卽最通用的直綫插補法），

$$\begin{cases} n=1 \\ p=1 \end{cases}$$

卽當取$\Delta^{n+1}y_{i-p}=\Delta^2 y_3$：

$$\Delta^2 y_3 = y_5 - 2y_4 + y_3 = 0$$

將表內各y值代入，卽得：

$$y_4 = 29959\text{仟英鎊}$$

倘假定y爲x的三次方程式，卽當取$\Delta^4 y_2$：

$$\Delta^4 y_2 = y_6 + 6y_4 - 4y_3 - 4y_5 + y_2 = 0$$

將表內各值代入，卽得：

$$y_4 = 30029\text{仟英鎊}$$

倘假定y爲x的五次方程式，卽當取$\Delta^6 y_1$：

$$\Delta^6 y_1 = y_7 - 6y_6 + 15y_5 - 20y_4 + 15y_3 - 6y_2 + y_1 = 0$$

將表內各值代入，卽得：

$$y_4 = 30421\text{仟英鎊}$$

今由各種不同的假定，所得各插補值固無相同，然均在30000 仟英鎊極近的左右，則插補值旣僅爲一近似值，是無妨卽以叁仟萬英鎊爲英國1813年輸入貿易之插補值。

上述方法亦可推廣以插補連缺若干項的統計數列。例如插補一二八暴日擾滬時期上海批發物價指數（錄自統計月報二十一年九十月號合刊）：

表三　　上海批發物價指數表

民國十五年＝100

年份	月份	x	總指數	Y
二十年	八月	x_1	130.3	Y_1
	九月	x_2	129.2	Y_2
	十月	x_3	126.9	Y_3
	十一月	x_4	124.8	Y_4
	十二月	x_5	12.18	Y_5
二十一年	正月	x_6	119.3	X_6
	二月	x_7	缺	Y_7
	三月	x_8	缺	Y_8
	四月	x_9	116.7	Y_9
	五月	x_{10}	115.7	Y_{10}
	六月	x_{11}	113.6	Y_{11}
	七月	x_{12}	111.8	Y_{12}
	八月	x_{13}	111.3	Y_{13}

茲所缺為y_7與y_8兩項。倘假定y與x的關係為一次方程式，即當取$\Delta^2 y_6$與$\Delta^2 y_7$：

$$\begin{cases} \Delta^2 y_7 = y_9 - 2y_8 + y_7 = 0 \\ \Delta^2 y_6 = y_8 - 2y_7 + y_6 = 0 \end{cases}$$

將表內已知各y值代入，卽得求其y_7與y_8：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} y_7 = 118.4 \\ y_8 = 117.6 \end{cases}$$

倘假定y該是x的三次方程式，即當取$\Delta^4 y_5$與$^4 y_6$：

$$\begin{cases} \Delta^4 y_5 = y_9 - 4y_8 + 6y_7 - 4y_6 + y_5 = 0 \\ \Delta^4 y_6 = y_{10} - 4y_9 + 6y_8 - 4y_7 + y_6 = 0 \end{cases}$$

將表內已知各y值代入，卽得兩聯立一次方程式如次：

$$\begin{cases} 6y_7 - 4y_8 = 238.7 \\ 4y_7 - 6y_8 = -231.8 \end{cases}$$

由該兩聯立一次方程式，卽得求其y_7與y_8：

$$(\mathrm{II})\begin{cases} y_7 = 117.97 \\ y_8 = 117.28 \end{cases}$$

倘假定y為x的五次方程式，卽當取$\Delta^6 y^4$與$\Delta^3 y_5$：

$$\begin{cases} \Delta^6 y_4 = y_{10} - 6y_9 + 15y_8 - 20y_7 + 15y_6 - 6y_5 + y_4 = 0 \\ \Delta^6 y_5 = y_{11} - 6y_{10} + 15y_9 - 20y_8 + 15y_7 - 6y_6 + y_5 = 0 \end{cases}$$

將表內已知各y值代入，卽得兩聯立一次方程式如次：

$$\begin{cases} 20y_7 - 15y_8 = 599.0 \\ 15y_7 - 20y_8 = -5.9 \end{cases}$$

由該兩聯立一次方程式，卽得求其y_7與y_8：

$$\text{(III)} \begin{cases} y_7 = 117.8 \\ y_8 = 117.2 \end{cases}$$

今用叁種不同假定，各得結果不同。孰是孰非？殊難斷言。蓋當時既因暴日之侵擾，而上海商業頓陷於停頓狀態，物價自無調查之可能；則當時上海批發物價指數既不能確知其眞實之數值，遂無以嚴格斷定插補數字之是非。然憑事實的觀察與理智的推論，則又未始不能將所得各個不同的插補值比較其"近情性"之大小而決其取捨。例如細察上海批發物價指數內所含各物品於該次戰亂時期應漲應跌及其漲跌之程度，衡其輕重，因以測定其總指數之傾向，乃不難評定各插補值的"近情性"之大小（惟欲實行此種方法，應根據上海批發物價指數所含各項物品的物價統計，奈吾人手頭既無是項

材料、不敢妄加臆斷，祇得轉請國定稅則委員會當局有以補充之）。

紐頓氏插補公式

當x或y有一變量成算術級數時，吾人亦可應用紐頓氏插補公式(Formule d'interpolation de Newton)：

$$f(x_t+k)=f(x_t)+\frac{k}{h}\Delta f(x_t)+\frac{k}{h}\cdot\frac{k-h}{2h}\Delta^2 f(x_t)$$

$$+\frac{k}{h}\frac{k-h}{2h}\frac{k-2h}{3h}\Delta^3 f(xt)+\cdots\cdots+\cdots$$

其中

$$x_{t+h}-x_t=h$$

$$k\angle h$$

持此紐頓氏公式以求插補值，亦須應用各級相差數。所用相差數的級次，可以漸漸提高，直至插補值臻相當近似程度爲止；而由n級提高至n+1級之計算，祇須添算其末一項，其他諸項之數值，已於應用n級相差數時求得矣，是於計算方面，紐頓氏插補公式確非常便利而頗具伸縮性者。現且先述該紐頓氏公式的由來，次再舉一實例以明其計算。

設使y為x的函數：

$$y=f(x)$$

則按載勞氏公式(Formule de Taylor)，應得：

$$f(x_t+1)=f(x_t+h)$$

$$=f(x_t)+hf'(x_t)+\frac{h^2}{2!}f''(x_t)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_t)+\cdots$$

$$+\frac{h^r}{r!}f^{(r)}_{(x_t)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中

$$r!=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(r-1)\times r$$

$f^{(r)}_{(x_t)}=f(x_t)$的從x的r級微分係數

今設以$D^r f(x_t)$表示其r級微分係數，則上式卽得更寫如次：

$$f(x_t+h)=f(x_t)+hDf(x_t)+\frac{h^2}{2!}D_2f(x_t)+\frac{h^3}{3!}D^3f(x_t)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{h^r}{r!}D^r f(x_t)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

乃視$D^r f$項宛若可以分離為D^r與f，則更得將上式寫如：

$$f(x_t+h)\simeq\left(1+hD+\frac{h_2D^2}{2!}+\frac{h^3D^3}{3!}+\cdots+\frac{hrD^r}{r!}+\cdots\right)f(x_t)$$

按上式內D字母原為微係數之記號，D與f一經分離，便失其

意義，即該式之左右項，自無數值相等之可能；茲為避免混淆起見，特創新符號≃以表示其僅爲一記號等式，而非通常左右項確能數值相等之等式。

又按

$$e^{hD}=1+hD+\frac{h^2D^2}{2!}+\frac{h^3D^3}{3!}+\cdots+\frac{h^rD^r}{r!}+\cdots$$

故上述記號等式亦可寫如下：

$$(5)\ f(x_t+h)\simeq e^{hD}f(x_t)$$

然 $\Delta y_t=f(x_t+1)-f(x_t)$

按公式(5)，即得：

$$\Delta f(x_t)\simeq e^{hD}f(x_t)-f(x_t)$$

或 $\Delta f(x_t)\simeq(e^{hD}-1)f(x_t)$

亦因得

$$\Delta\simeq e^{hD}-1$$

或 $(6)\ e^{hD}\simeq 1+\Delta$

同理，亦得應用Taylor氏公式以求$f(x_t+k)$：

$$f(x_t+k)=f(x_t)+kf'(x_t)+\frac{k^2}{2!}f''(x_t)+\frac{k^3}{3!}f'''(x_t)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{k^r}{r!}f^{(r)}_{(x_t)}+\cdots\cdots\cdots$$

而經過如上述$f(x_t+h)$所經過諸步驟，亦可得下列記號等式：

$$(7)\ f(x_t+k)\simeq e^{kD}f(x_t)$$

或 $$f(x_t+k)\simeq\left[e^{hD}\right]^{\frac{k}{h}}f(x_t)$$

乃按上述第(6)式，及得更寫如次：

$$f(x_t+k)\simeq(1+\triangle)^{\frac{k}{h}}f(x_t)$$

展開之，即得：

$$f(x_t+k)\simeq\left(1+\frac{k}{h}\triangle+\frac{1}{2}\frac{k}{h}\left(\frac{k}{h}-1\right)\triangle^2+\cdots\right)f(x_t)$$

而卒得：

$$(8)\ f(x_t+k)=f(x_t)+\frac{k}{h}\triangle f(x_t)+\frac{k}{h}\frac{k-h}{2h}\triangle^2 f(x_t)$$

$$+\frac{k}{h}\frac{k-h}{2h}\frac{k-2h}{3h}\triangle^3 f(x_t)+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}\frac{k}{h}\left(\frac{k}{h}-1\right)$$

$$\left(\frac{k}{h}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{k}{h}-r+1\right)\triangle^r f(x_t)+\cdots\cdots$$

此即紐頓氏插補公式。

茲且舉一實例，以明其運用。

表四　鄉村居民年齡分配表

年　齡	人　數	累積人數	累積萬分數
10歲以下	3401人	3401人	2267
11－20歲	2979	6380	4253
21－30	2178	8558	5705
31－40	2320	10878	7252
41－50	1878	12756	8504
51－60	1264	14020	9347
61－70	663	14683	9789
71－80	264	14647	6865
81歲以上	53	15000	10000
總　計	15000人		

該表乃由抽樣調查中國東部北部及東部北部間之鄉村人口統計(錄自馮和法編中國農村經濟資料第三頁)。是項統計，未敢信其真確，更不敢信其足以表徵吾國人口之年齡分配，惟

吾人之目的既僅在舉一實例以示應用紐頓氏插補公式之計算，固無妨假定其爲是而即持爲計算之根據。

由上表，假定其最大年齡爲玖拾歲，即得求其中級相差數而列表如次：

表五

x	年齡	累積萬分人數	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$
X_0	0	0	Y_0			
				2267		
X_1	10	2267	Y_1		−281	
				1986		−253
X_2	20	4253	Y_2		−534	
				1452		+629
X_3	30	5705	Y_3		+ 95	
				1547		−390
X_4	40	7252	Y_4		−295	
				1252		−114
X_5	50	8504	Y_5		−409	
				843		+ 8
X_6	60	9347	Y_6		−401	
				442		+135
X_7	70	9789	Y_7		−266	
				176		+125
X_8	80	9965	Y_8		−141	
				35		
X_9	90	10000	Y_9			

今若欲求上表所包括各地其學齡兒童所佔之百分數，當先分別計算其至十二歲之累積百分數及至五歲之累積百分數，取該兩累積百分數之相差，卽得自最小六歲至最大十二歲間人數之百分數〔關於學童定義，暫從內政部規定"學童指六歲至十二歲之男女兒童而言"。見民國十七年各省市戶口調查統計報告第350頁。惟由該規定之字面上觀，關於六歲及十二歲之兒童，便有模稜兩可之處分。茲爲更求確切起見，且改爲"學童指自最小六歲至最大十二歲間之男女兒童"。今以x表示學童年齡，卽$6 \leq x \leq 12$〕

註：倘使學齡兒童就學期限規定爲六年者，則學童定義應改爲自六歲至十一歲

今12在上表x_1與x_2之間，故$y(12)$當在y_1與y_2之間，按紐頓氏插補公式，卽得：

$$y(12)=y(x_1+2)$$
$$=y_1+\frac{2}{10}\Delta y_1-\frac{2}{10}\times\frac{8}{20}\Delta^2 y_1$$

將上表各值代入，卽得：

$$y(12)=2267+\frac{2}{10}\times 1986-\frac{2}{10}\times\frac{8}{20}\times 534$$

$=2706.92$萬分數

$=27.07$百分數

同法，欲求$y(5)$，亦祇須應用紐頓氏補插公式：

$$y(5)=y_{(x_0+5)}=y_0+\frac{5}{10}\Delta y_0-\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}\times\Delta^2 y_0$$

將上表各值代入，即得：

$$y_{(5)}=0+\frac{5}{10}\times2267+\frac{5}{10}\times\frac{5}{20}\times281$$

$=1168.625$萬分數$=11.69$百分數

既得其$y(12)$與$y(5)$，即不難求其學童所佔百分數A：

$$A=y_{(12)}-y_{(5)}$$

$=27.07-11.69$

$=15.38$百分數

第六節相差商：

以上所述代數函數插補法和紐頓氏插補公式，均假定 x 或 y 有一變量成算術級數而利用普通相差數以計算者。此種假定，以通常習見之統計資料論（如組距相等的分組次數表，或時距相等的時間數列）概能符合此條件，故上述各插補

公式之應用，已甚廣大。然遇x或y無一變量能成算術級數時，則上述插補法及普通相差數，卻不堪應用，而必須用相差商等計算法以補救之。

今設有n+1個變量x_0，x_1，x_2，………x_n及其相應對的y_0，y_1，y_2，………y_n，（x與y均不必成算術級數），假定y為x的函數如

$$y=f(x)$$

則$y_i=f(x_i)$的初級相差商〔la qremiere difference divisee de $y_i=f(x_i)$〕

$$(9)\quad Dy_i=Df(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$$

其二級相差商D^2y_i為

$$D^2y_i=\frac{Dy_{i+1}-Dy_i}{x_{i+2}-x_i}$$

而其k+1級相差商$D^{k+1}y_i$為

$$(10)\quad D^{k+1}y_i=\frac{D^k y_{i+1}-D^k y_i}{x_{i+k+1}-x_i}$$

由上公式，吾人亦得以各級相差商表示其函數$y_i=f(x_i)$

$$
(11)\begin{cases}
f(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)Df(x_0)\\
f(x_2)=f(x_0)+(x_2-x_0)Df(x_0)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)D^2f(x_0)\\
\vdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vdots\\
f(x_n)=f(x_0)+(x_n-x_0)Df(x_0)+(x_n-x_0)(x_n-x_1)D^2f(x_0)
\end{cases}
$$

$$
+\cdots+(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})D^nf(\varepsilon x)
$$

茲且舉一實例以明其計算。

試錄廿二年申報年鑑P部30 頁吾國廿六省市農戶耕種畝數統計爲例（惟數字略有修改，因原表各組百分數之總和不等於100，且各組戶數之總和算成4 1708602 ，又與各組數字不能相符，爰擅改如下表）。

表六 中國廿六省市農戶耕種畝數統計

耕種畝數	農戶數	百分比	累積百分比
0			0
	20352285	42.66	
10			42.66
	12611998	26.43	
30			69.09
	7651575	16.04	
56			85.13
	4625096	9.70	
100			94.83
	2467618	5.17	
最大數			100.00
總計	47708572	100.00	

相　差　商　計　算　表

序次	x	y	$y_{i+1}+y_i$	Dy_i	$Dy_{i+1}+Dy_i$	D^2y_i	$D^2y_{i+1}+D^2y_i$	D^3y_i	$D^3y_{i+1}+D^3y_i$	D^4y_i
0	0	0								
			462.6	4.2660						
1	10	42.66			−2.9445	−0.0981500				
			26.43	1.8215			0.0851625	0.001703250		
2	30	69.09			−0.5195	−0.0129875			−0.001695452	−0.00001695452
			16.04	0.8020			0.0043018	0.00047798		
3	50	85.13			−0.6080	−0.0086857				
			9.70	0.1940						
4	100	94.83								

插在二七六面後　　　　（表　七）

(x_i-x_k) 　　$(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})$

上述公式，亦得以Vandermonde行列式表示之：

註：廿六省市爲北平，河北，遼甯，吉林，黑龍江，山東，河南，山西，江蘇，安徽，江西，福建，浙江，湖北，湖南，陝西，甘肅，新疆，四川，廣東，廣西，雲南，貴州，熱河，綏遠，察哈爾。

今以x＝畝數，y＝f(x)＝累積百分比（即耕種畝數在x畝以下的農戶百分數），則按上述定義公式(10)，即得計算其各級相差商如下表：

苟知其各級相差商，則亦得按上述公式(11)計算其各y_0，例如欲求y_3則按公式(11)，即得：

$$y_3=y_0+(x_3-x_0)Dy_0+(x_3-x^3)(\quad x_1)D^2y_0$$
$$+(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)D^3y_0$$
$$=0+50\times4.266+50\times40\times(-0.09815)$$
$$+50\times40\times20\times0.00170325$$
$$=213.3-196.3+68.13$$
$$=85.13$$

該計算所得數值與原值完全一致。

反之，亦得由各y以求其各級相差商：

$$(12)\begin{cases}Dy_0=\dfrac{y_0}{x_0-x_1}+\dfrac{y_0}{x_1-x_0}\\ D^2y_0=\dfrac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\dfrac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)}+\dfrac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\ \vdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ D^ky_0=\dfrac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_k)}+\dfrac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_k)}+\cdots\cdots+\dfrac{y_k}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}\end{cases}$$

上述公式，亦得以Vandermonde行列式表示之：

$$(13)\quad D^k x_0 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \cdots\cdots & y_k \\ x_0^{k-1} & x_1^{k-1} & x_2^{k-1} \cdots\cdots & x_k^{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^2 & x_1^2 & x_3^2 \cdots\cdots & x_k^2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \cdots\cdots & x_k \\ 1 & 1 & 1 \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0^k & x_1^k & x_2^k \cdots\cdots & x_k^k \\ x_0^{k-1} & x_1^{k-1} & x_2^{k-1} \cdots\cdots & x_k^{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^2 & x & x_1^2 \cdots\cdots & x_k^2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \cdots\cdots & x_k \\ 1 & 1 & 1 \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

茲仍以上列統計(表六)為例，直接由各x，y求其相差商（例如欲求D^3y_0)如次：

按公式(12)

$$D^3y_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1}{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}$$

$$+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$=0+\frac{42.66}{10\times(-20)\times(-40)}+\frac{69.09}{30\times20\times(-20)}+\frac{85.13}{50\times40\times20}$$

$$=0.0053325-0.0057575+0.00212825=0.00170325$$

該數值(直接由各x，y求得)與逐步推求所得者(見表七)亦完全一致。

紐頓氏插補公式之推廣

於上述(11)式，將x，y替代x_n，y_n，即得一更具普遍性的紐頓氏插補公式如下：

$$(14)\ y=y_0+(x-x_0)Dy_0+(x-x_0)(x-x_1)D^2y_0+\cdots\cdots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{n-1})D^ny_0$$

然普通插補計算，僅取該式若干項，如取至D^my項為止，則其差誤R_m亦得以下式表之：

$$(15)\ R_m=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)D^{m+1}y(c)$$

c為(x_0，x_m)或(x_0，x)間之一值。

茲再以上列中國廿六省市農戶耕種畝數統計為例，試求耕種畝數在十五畝以下的農戶百分比y (15)則按(14)式，即得

如取至三次差爲止)：

$$
\begin{aligned}
y &= y_0 + (x-x_0)Dy_0 + (x-x_0)(x-x_1)D^2y_0 \\
&\quad + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)D^3y_0 \\
&= 0 + 15_x 4.266 + 15_x 5_x(-0.09815) \\
&\quad + 15_x 5_x(-15)_x 0.00170325 \\
&= 63.99 - 7.36125 - 1.91615625 \\
&= 54.7
\end{aligned}
$$

此卽吾人所欲求之插補值。

第七節　拉搿郞綺插補公式

(*Formule d'interpolation de Lagrange*)

如假定y爲一x的(n－1)次方程式，則 $D^n y$ 應等於零。按 $D^n y$ 之數值應爲：

$$
D^n y_0 = \frac{y}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})} + \sum_{t=0}^{n-1} \frac{y_t}{(x_t-x_0)(x_t-x_1)(x_t-x_2)\cdots(x_t-x_{n-1})(x_t-x)}
$$

則果使 $D^n y_0 = 0$，卽得

$$(16)\quad y=\sum_{t=0}^{n-1} y_t \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_t-x_0)(x_t-x_1)(x_t-x_2)\cdots(x_t-x_{n-1})}$$

此卽"拉裔郎鑄插補公式"是也。

又如以

$$g(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{n-1})$$

則上述拉氏插公式亦得寫如下式：

$$(17)\qquad y=\sum_{t=0}^{n-1} \frac{g(x_t)}{(x-x_t)Dg(x_t)}\; y_t\ .$$

$Dg(x)$表示$g(x)$的微係數。

然普通插補計算，概令其插補曲線祗經過其由(x_k, y_k)點起相接連之m點，則若假定其爲壹$(m-1)$次方程式，卽得將拉裔郎鑄插補公式寫如下式：

$$(18)\quad y=\sum_{t=k}^{k+m-1} y_t \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})\cdots(x-x_{k+m-1})}{(x_t-x_k)(x_t-x_{k+1})(x_t-x_{k+2})(x_t-x_{k+m-1})}$$

茲仍以上列統計表數字(表六)爲實例，並仍求其耕種畝數在十五畝以下的農戶百分比$y(15$，則按(18)式，卽得（如假定其插補函數爲三次方程式）：

$$y=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$y_{(15)}=(+)42.66\frac{15\times(-15)(-35)}{10\times(-20)(-40)}+69.09\frac{15\times5\times(-35)}{30\times20\times(-20)}$$

$$+55.15\frac{15\times5\times(-15)}{50\times40\times20}$$

$$=41.99+15.11-2.4$$

$$=54.7$$

此卽按拉氏插補式求得之插補值。

又吾人亦得假定x爲y的函數，則拉氏插補式卽得寫如下式：

$$(19)\quad x=\sum_{t=k}^{k+n-1}\frac{(y-y_k)(y-y_{k+1})(y-y_{k+2})\cdots\cdots(y-y_{k+n-1})}{(y_t-y_k)(y_t-y_{k+1})(y_t-y_{k+2})\cdots(y_t-y_{k+n-1})}x_t$$

茲仍以第六表統計數字爲實例，求其累積農戶百分比等於五十的耕種畝數(卽求x的中位數)，則按(19)，卽得(假定其插補函數爲三次方程式)：

$$x=x_0\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}+x_1\frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}$$

$$+x_2\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}+x_3\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}$$

$$x_{(50)}=0+10\frac{(50-0)(50-69.09)(50-85.13)}{(42.66-0)(42.66-69.09)(42.66-85.13)}$$

$$+30\frac{50(50-42.66)(50-85.13)}{69.09(69.09-42.66)(69.09-85.13)}$$

$$+50\frac{50(5.-42.66).(50-69.09)}{85013(85.13-42.66)(85.13-69.09)}$$

$$=\frac{10\times50\times(-19.09)(-35.13)}{42.66\times(-26.43)(-42.47)}+\frac{30\times50\times73.4\times(-5.13)}{69.09\times2.34(-16.04)}$$

$$+\frac{50\times50\times7.34\times(-19.09)}{85.13\times42\ 47\times16.04}$$

$$7=+13-6=14$$

此卽吾人所欲求之插補値(卽x的中位數，亦卽根據該項統計，可謂吾國有百分之五十農戶其耕種畝數在十四畝以下）。

普通初等統計教本所述中位數計算公式，卽就拉蔣郎鋪插補公式而假定其插補函數爲壹一次方程耳。然此類假定，使用於組距並不甚大或其累積次數曲線極接近於一直線時，尙稱適用；否則，恐卽不能認爲精確。

茲再就第六表統計數字用普通統計教本所述中位數公式，以

求其$x_{(50)}$之數值($x_{(50)}$應處於x_1與x_2之間，即得：

$$(20)\qquad x_{(50)}=x_1\frac{y-y_2}{y_1-y_2}+x_2\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

或

$$x_{(50)}=x_1+(x_2-x_1)\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$=10+20\times\frac{50-42.66}{69.09-42.66}$$

$$=15.55$$

考此普通統計教本所述中位數公式，計算固甚簡單，然試將其結果與前節計算所得$y_{(15)}$之插補值相較，即有疑問。蓋依前節所得

$$y_{(15)}=54.7$$

則與$y=50$相應對之x自當小於15（因此間y表示累積次數自當爲一x的遞增函數）：

$$x_{(50)}<x_{(54.7)}=15$$

但若依此間就普通統計教本所述中位數公式計算所得

$$x_{(50)}=15.5$$

則與x=15相應對之y自當小於50：

$$y_{(15)}<y_{(15.5)}=50$$

是則此間計算所得$x_{(50)}=15.5$與前節計算所得$y_{(15)}=54.7$兩插補值，誠不知孰是孰非。顧吾人雖不能嚴格斷其是非，然就其前後各項之次數分配狀況觀察之，倘不難辨別其何者比較接近事實。如以本例題耕種土地分配言，其次數分配既前後疏密頗形懸殊，則其累積次數曲綫自難假定其為一直線，故吾人認為此間用普通統計教本所述中位數計算公式所得$x_{(50)}=15.5$，恐比較不可靠，似不若前節假定其插補函數爲三次方程式所得$x_{(50)}=14$，計算雖稍繁複，然較能取信。

附註一：吾人亦得利用插補值$y_{(15)}=54.7$，而後應用直綫插補公式計算之〔即得以x=15替x_2；y'=54.7替y_2代入(20)式〕

$$x'_{(50)}=x_1+(x'-x_1)\frac{y-y_1}{y'-y_1}$$

$$=10+(15-10)\frac{51-42.66}{54.7-42.66}$$

$=13$

此間所得結果，如認插補值$y_{(15)}=54.7$與事實相當接近，則或尚可用，因其x'與x_1之相差，不再似x_2與x_1相差之巨矣。

第八節　其他插補公式：

吾人前於"插補法之種類"一節中曾謂"用計算的插補法，須先決定x與y的關係，即應確定插補函數$y=f(x)$的形式，於是根據某種原則，由經驗值以求得其插補公式內含諸常數；既得該插補公式，然後用計算方法求其與插i相應對的y值($y=f$(插i))，即得吾人所欲求之插補值"據此，則插補方法自將隨插補函數形式之不同而各有其最適宜之插補公式。顧函數形式既無盡數，則插補公式之類別，自亦莫勝枚舉，而插補方法之研究，亦終無止境焉。但就性質言，插補值原非絕對準確之數值，而僅屬近似並或然的數值，是若不欲苛求精確，大致以上述紐頓氏插補公式與拉格郎錫公式已足供應用；惟就上述兩式之收斂性言，有時似嫌過於遲緩，因亦有將其稍加改變，而另得他種插補公式，若"高斯插補公式"(Formule d'interpolation de Gauss),"施碁霖插補公式".(Formule d'interpolation de Stirling)"斐賽爾插補公式"(Formule d'interpolation de Bessel)皆屬之，今且依次分述之：

茲爲便利説明起見，亦得將上述相差商之符號稍加變更，以

$$初級相差商=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\quad Dy_0=D_{[x_0,x_1]}$$

$$二級相差商=\frac{Dy_1-Dy_0}{x_2-x_0}\qquad [x_0,x_1,x_2]$$

....

$$(21)\quad k級相差商=\frac{D^{k-1}y1-D^{k-1}y0}{x_k-x_0}\,D^k y_0=D^k$$

$$[x_0,x_1,x_2,\cdots rk]$$

則上述紐頓氏插補公式亦得改寫如次：

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})D_k$$

$$[t_0,x_1;x_2\cdots x_k]$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_nD^{n+1}_{[x,x_1,x_2,\cdots\cdots x_n]}$$

再或寫如

$$(22)\quad f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots(x-x_{k-1})\,D^{k}_{[x_0,x_1,x_2\cdots x_k]}+R_{n+1}$$

$$(23)\quad R_{n+1}=(x+x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\,D^{n+1}_{[x,x_0,x_1,\cdots x_n]}$$

R_{n+1}名曰"餘項"(Reste),或名之曰"紐頓氏插補公式之餘項"(Reste re la formule d'interpolation de Newton),是即取其展開式其前列n+1項以後之餘數也，該餘數亦得以一行列式表之：

$$
(24)\qquad R_{nn}=\frac{\begin{vmatrix}
f(x_0) & f(x_1) & f(x_2)\cdots\cdots f(x_n) & f(x) \\
x_0^n & x_1^n & x_2^n\cdots\cdots\cdots x_n^n & x^n \\
x_0^{n-1} & x_1^{n+1} & x_2^{n-1}\qquad x_n^{n-1} & x^{n-1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
x_0^2 & x_1^2 & x_2^2\qquad x_n^2 & x^2 \\
x_0 & x_1 & x_2\qquad x_n & x \\
1 & 1 & 1\qquad 1 & 1
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
x_0^n & x_1^n & x_2^n\cdots\cdots\cdots x_n^n \\
x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1}\cdots\cdots x_n^{n-1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_0^2 & x_1^2 & x_2^2\qquad x_n^2 \\
x_0 & x_1 & x_2\qquad x_n \\
1 & 1 & 1\qquad 1
\end{vmatrix}}
$$

設使$f_n(x)$爲一n次方程式：

$$(25)\qquad f_n(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots\cdots+A_nx^n$$

A_k 爲x^k 項之係數$(k=0,1,2,\cdots\cdots n)$，，該各係數之確定，得由下列$n+1$個聯立一次方程式求得之：

$$(26)\quad\begin{cases} A_0+A_1x_0+A_2x^2{}_0+\cdots\cdots+A_nx^n{}_0=f(x_0)=y_0 \\ A_0+A_1x_1+A_2x^2{}_1+\cdots\cdots+A_nx^n{}_1=f(x_0)=y_1 \\ A_0+A_1x_2+A_2x^2{}_2+\cdots\cdots+A_nx^n{}_2=f(x\ )=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_0+A_1x_n+A_2x^2{}_n+\cdots\cdots+A_nx^n{}_2=f(x_n)=y_n \end{cases}$$

將所得各係數A_k之數值代入上式〔(25)式〕，即得其$f_n(x)$，但吾人亦得由上列(n+1)個聯立方程式(第26式)與前列公式(第25式)消除其各係數A，即得

$$
(27)\quad f_n(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & y_2\cdots\cdots & y_n & 0 \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n\cdots\cdots & x_n^n & x^n \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2\cdots\cdots & x_n^2 & x^2 \\ x_0 & x_1 & x_2\cdots\cdots & x_n & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0^n & x_1^n & x_2^n\cdots\cdots & x_n^n \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1}\cdots\cdots & x_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2\cdots\cdots & x_n^2 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}
$$

$f_n(x)$亦名插補方程式(Polynome d'interpolation)$x_0, x_1, x_2\cdots\cdots x_n$諸值爲該方程式之根，則於該各數值，其餘數

$$R_{n+1}=f(x)-f_n(x)$$

均等於零，乃據"陸爾定理"(Theoreme de Rolle)，其n級微係

數必能於$x_0, x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$ 間某一值ξ等於零，則據紐頓氏插補公式，其n級微係數$f^{(n)}$爲

$$f_n^{(n)}(x)=n!\,D^n_{[x_0, x_1, x_2 \cdots\cdots x_n]}$$

因必得

$$(28)\quad \begin{cases} D^n_{[x_0, x_1, x_2 \cdots\cdots x_n]} = \dfrac{f_n^{(n)}(\xi)}{n!} \\ a<\xi<b \end{cases}$$

而其餘項R_{n+1}卽得寫如下式：

$$(29)\quad R_{n+1}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)$$

玆若各x成算術級數，則卽得以其等差爲單位，而相差數與相差商之關係，卽得以下式表之：

$$(30)\quad D^n_{[x_0, x_1, x_2 \cdots\cdots x_n]}=\frac{1}{n!}\Delta^n f(x)$$

設以

$$x_k=x+K$$

則紐頓氏之插補公式：卽得寫如

$$(31)\quad \begin{cases} f(x)=\sum_{k=0}^{n} G_{x-a}^{k}\Delta^{k} f(a+R_{n+1} \\ G_{x-a}^{k}=\frac{(x-a(x-a-1)\cdots(x-a-k+1)}{1.2.3\cdots k} \end{cases}$$

茲若令

$$x_{,}=0$$

$$x_{2k}-1=-K$$

$$x_{2k}=K$$

則上式又得改寫如次：

$$(32)\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n} G_{x+0}^{\bar{2}k}\Delta^{2k} f(-k)+\sum_{k=0}^{n-1} G_{x+k}^{2k+1}\Delta^{2k+1}$$

$$f(-K-1)+R_{2n+1}$$

再若令

$$x_{2k}=-R$$

$$x_{2k}=K$$

則上述(31)式亦得更寫如次：

$$(33)\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n} C_{x+k-1}^{2}\Delta^{2k} f(-k)+\sum_{k+0}^{n-1} C_{x+k}^{2k+1}\Delta_{2k+1}$$

$$f(-K)+R_{2n+1}$$

該兩公式(32)(33)卽名爲"郭斯插補公式"(Formule d'inte - polation de Gauss).

今若將該兩郭斯插補公式相加，並以符號M表示其前後兩項之平均數如

$$Mf(r)=\frac{1}{2}[f(x+1)+f(x)]$$

則又得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^2(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots[x^2-(K-1)^2]}{(2K)!}\triangle^{2k}f(-\ )$$

(34)

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-K^2)}{(2K+1)!}M\triangle^{2k+1}$$

$$f(-K-1)+R_{2n+1}$$

該式卽名曰"施端霖插補公式"(Formnle d'interpolation de Stirling)再若就上第一郭斯插補公式(32)以$x-\frac{1}{2}$替代x, $f(x+\frac{1}{2})$替代f(x)並就其第二郭斯插補公式(32)以$x-\frac{1}{2}$替代x, $f(x+\frac{1}{2})$替代 f(x)，而後將如是所得兩式相加，則又可另得一式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2K)!}[x^2-(\tfrac{1}{2})^2][x^2-(\tfrac{3}{2})^2]\cdots[x^2-(-\tfrac{1}{2}K)^2]$$

$$M\Delta_{2k}f(K-\tfrac{1}{2})$$

(35)

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x}{(2\quad+1)!}[x^2-(\tfrac{1}{2})^2][x^2-(\tfrac{1}{2})^2]\cdots[x^2-(K-\tfrac{1}{2})^2]$$

$$\Delta^{2k+1}f(-K-\tfrac{1}{2})+R'_{2n+1}$$

該式卽"裴賽爾插補公式"(Formule d'interpolation de Bessel)是也

結　　論

以上依次將最通用之插補式，加以簡略之敍述，雖未將插補理論，盡量闡發，然就統計方面之普通應用言，則倘能將上述諸式融會貫通，已可游刃有餘。惟特種統計之插補，每各有其特殊方法，如編製生命表所用插補法，亦有爲上述各法所未及者，關於此類別種插補方法，自應留待專題研究，而本篇目的，僅顧申述統計學上最通用之插補法，故所論祗以"紐頓氏插補式" "拉搿郎鈞氏插補式" "郭斯氏插補式" "施端霖氏插式補" "裴賽爾氏插補式"爲限，而於茲暫告結束焉。

第八章　配合概論

第一節　配合之意義

統計分析方法之初步工作，端在化繁為簡，然欲將一繁複之統計數列使之簡單化，則最通用之方法凡二，其一乃以若干簡單數字以表示之，此即上述表徵數之方法（平均數，相差度，偏斜度，與峯度等均屬表徵數），另一乃以一簡單數學公式表示之，該公式即名曰"配合公式"，其圖形名"配合曲線，"今如何由一統計數列以推求其最適合之配合公式（或曲線），斯即配合論所欲研討之問題。故吾人應先說明實際統計數列求配合公式（或曲線）之關係，繼即敍述各種配合公式之推求方法。茲將實際統計數列與配合公式（或曲線）之關係分述如次：

實際待配合之統計數列，普通為k個不同數量x與另外k個不同數量y相對應，而得以下列形式表示之：

$$\begin{cases} x_1 & x_2 \cdots\cdots x_i \cdots\cdots x_k \\ y_1 & y_2 \cdots\cdots y_i \cdots\cdots y_k \end{cases}$$

該k個配對統計數字，得表示一次數數列，或表示兩互有函數關係之統計數列；設為一次數數列，以x表示數量，y表示其次數，即假定其次數與數量間得有一函數關係如次：

$$y=f(x)$$

故配合方法可用作次數數列之分析。設(x,y)為兩互有關係之統計數列，例如x表示時間，y表示數量，則y＝f(x)即表示數量與時間之關係，故配合方法可用作時間數列之分析，再如x表示甲現象之數量，y表示乙現象之數量，則y＝f(x)即表示甲乙兩現象之關係，故配合方法亦可用作相關之分析。茲若不論統計之性質如何，而僅就形式言之，則所謂配合問題者，即首先假定x與y間有一數學函數關係y＝f(x)，而後由各配對(x_i,y_i)之數值以確定該函數f(x)耳。既得該函數y＝f(x)即可用以推求各y之數值，名曰"配合值"亦名"理論值"，試以y'表示之

$$y'_i=f(x_i)$$

即取x之數值代入配合公式而計算所得之數值，故亦名"計算數值"，至原始與各x相配對之實際統計數字y，則名曰"經驗值"，倘以圖形表示之，則每一配對經驗值(x_i,y_i)得

以平面圖形上之一點表示之（名曰"經驗點"）由各該經驗點所求得之曲線名曰配合曲線，然則統計數列與配合公式（或曲線）之關係，無非經驗值與配合值（或經驗點與配合曲線）之關係耳，配合公式既由經驗值所求得，則理當使各經驗值皆適合於配合公式，然配合公式普通爲一簡單函數，勢必不能使每一配合值與其經驗值盡符符合，但爲互相適應起見，配合值與經驗值間之差別自亦不宜過鉅，換言之，即配合值與經驗值縱使不能相等，亦當"差不多相等"。今試以≃爲"差不多相等"之符號，則經驗值與配合公式之關係即得以下式表示之：

（1）　$y_i \simeq y'_i = f(x_i)$

就圖形言，即縱使各經驗點不必盡在配合曲線上，然配合曲線離各經驗點之距離自亦不宜過遠。

今既將統計數列與配合公式（或曲線）之關係說明之後，當進而討論如何由統計數列以推求配合公式（或曲線）之方法，（簡稱配合方法）。配合方法凡二：圖表法與計算法是也。圖表法即將各經驗點繪於圖上，然後用手描法接連各經驗點成一曲線（但此法不甚通用，因如是繪成之曲線，常呈

不規則之形態），或者在各經驗點之間通過一比較勻整之曲線(即祇須各經驗點接近曲線)，該類方法詳見統計製圖學茲不贅述，况手描法復隨繪者技術巧拙而各別，故所得配合曲線，遠不及由計算法所求得配合公式之精確；惟計算法所根據之理論須隨統計數列之性質而有不同，蓋因次數得與機率相比擬，故次數數列之分析得採用機遇數學之理論，至其他性質之統計數列，不能與機率相比擬，即不宜採用機遇數學之理論，故吾人不得不將次數數列與其他統計數列之配合方法分別敍述之

第二節　配合之功用

配合對於統計數列之主要功用凡三：乃(甲)簡單化(乙)連續化與(丙)勻整化是也。

(甲)表徵數對於統計數列因亦有化繁爲簡之功效，然表徵數所表示者，僅爲統計數列之若干特徵，並不能代表整個統計數列，今配合公式則不特能用以表示整個統計數列，且其形式亦比較簡單【一個數學公式自較若干個數目字（表徵數）更爲簡單】，故配合方法所能簡單化之程度實較表徵數

方法更勝一籌。

(乙)實際統計數列，祇能以"不連續之數值"表示之，然現象本身之度量，或係具有連續性之數值，例如夫妻年齡統計實際祇能以某年歲之男子與某年歲之女子相配偶之形式表示之(年歲係不連續數值)，然年齡乃人生所經歷之時間，時間實係一具有連續性之度量，故配偶之年齡關係，自當爲一連續函數關係。然則此類連續函數之推求，卽非利用配合方法不可，故配合方法有使統計數列連續化之功用。且由配合公式$y=f(x)$得推求其與任一x值相應對之y值，該y值亦有名曰插補值或估計值，故配合方法不特可使統計數列連續化，且有推求插補值或估計數字之功能，對未來之估計，卽有預測之功用。

(丙)接連各經驗點所成之折線，普通呈不規則之形態，然此種不規則之形態，每非現象本身所應有，容係實際調查之錯誤或由於局部調查之結果，例如人口年齡統計每於逢五逢十等年歲之人數特多，以致各該經驗點呈凸起之形態，此必非事實之眞相，乃由於查報之不確耳，再如抽查某地某業少數男工之工資統計，得爲一不規則之分配，然若能普查該

地該業全體男工之工資統計，或將形成一有規則之分配，即欲由局部調查之結果以推測其全體之狀況，或欲由容有錯誤而呈現不規則形態之統計數列以推測其眞實之狀况，皆非利用配合方法務使其經驗曲線勻整化不可，故配合方法誠有修正實際統計數字之功用。

第三節 重覆試驗之機率函數

因次數得與機率相比擬，故次數分配得以機率函數配合之。機率函數隨試驗方法而不同，最通用之試驗方法凡二：重覆試驗與總抽試驗是也。茲且先述重覆試驗之機率函數：

設有某種現象，其成功之機率為P，失敗之機率為q；若此現象重覆試驗n次，試考慮有r次成功，(n－r)次失敗之機率，假定r次成功均在首r次，(n－r)次失敗均在餘下之(n－r)次，則其機率為$P^r q^{n-r}$但r次成功之次序可有C_n^r種，故由總和機率定理得r次成功之機率為：

$$P = C_n^r p^r q^{n-r}$$

依次推廣試驗n次中，成功0,1,2,3……n次之機率爲下列展

開式中之各項：

$$1=(q+p)^n=q^n+n_1q^{n-1}p+\cdots+C_n^r\,q^{n-r}\,p^r+\cdots+nqp^{n-1}+p^n$$

試以 $y_r=C_n^r\,p^r\,q^{n+r}N$

$$y_0+y_1+\cdots\cdots+y_n=N(q+p)^n=N$$

因得 $\overline{X}=m'_1$ (第一希望數)

$$=(y_0x0+y_1x1+\cdots y_r\,xr+\cdots y_nxn)\div n$$

$$=Nq^{n-1}\,p+\frac{n(n-1)}{2}\,q^{n-2}\,p^2\,x2+\cdots+$$

$$C_n^r\,q^{n-r}\,p^r xr+\cdots\cdots+p^nxn$$

$$=np(q+p)^{n-1}=np$$

$$m'_2=(g_0xo^2+y_1x_1^2+\cdots g_r\,xr^2+\cdots y_nxn^2)$$

$$=\sum_{r=o}^{n}r^2C_n^r\,q^{n-r}\,p^r=\sum\left\{r(r+1)+r\right\}$$

$$\frac{(n)r}{r]}rq^{n-r}\,p^r$$

$$=n(n-1)p^2\sum\frac{(-2)}{(r-2):}{}^{n-r}\,q^{n-r}\,p^{r-2}$$

$$+np\sum\frac{(-1)}{(r+1)!}r-1\ q^{n-r}\ p^{r-1}$$

$$=n(n-1)p^2(q+p)^{n-2}+np(q+p)^{n-1}=n(n-1)p^2+np$$

$$=n^2p^2+np(1-p)=\overline{X}^2+npq$$

m^2(第二希望差)$=m_1'^2=rpq=np(1-p)$

同樣得 $m'_3=\sum r^3 C^n_r\ g^{n-r}\ p^r=n(n-1)(n-2)p^3+3n(n-1)^2+np$

$$m_3=m'_3-3m'_1m'_2+2m_1'^3=npq(q-p)$$

$$m'_4=\sum r^4C^n_r\ q^{n-r}\ pr$$

$$m_4=3(npq)^2+npq(1-6pq)$$

於是由諸表徵數之公式得 $\sigma=\sqrt{npq}$，$\beta_1=\frac{(q-p)}{npq}$

$$K_2=\beta_2=3+\frac{1-6pq}{npq}$$

某種現象重複試驗n次中成功0,1,2……n 次之機率分配本爲一不連續數列，但當 n 趨於無窮大時，每一間隔均趨於極小，此時機率分配可視爲連續數列，故當極大時，可以假定：

(1)機率分配可形成一連續曲線；

(2) $P_{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(P_k+P_{k+1})$；

(3)於$(k+\frac{1}{2}, P_{k+\frac{1}{2}})$點其切線與直線$[(k, P_k)$

$(k+1, P_{k+1})]$相併合；

直線$[(k, P_k)(k+1, P_{k+1})]$之斜度為

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{P_{k+1}-R_k}{k+1-k}=P_{k+1}-P_k$$

$$=C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}-C_n^k p^k g^{n-k}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)!}p^k q^{n-k-1}\left[(n-k)p-(k+1)q\right]$$

$$P_{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(P_k+P_{k+1})$$

$$=\frac{1}{2}(C_n^k p^k g^{n-k}+C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1})$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k q^{n-k}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}p^k q^{n-k-1}\right]$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{2(k+1)!}p^{k}q^{n-k-1}\left[(k+1)g+(n-k)p\right]$$

$$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{P_{k+\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{P_{k+1}-P_{k}}{k+1-k}}{\frac{1}{2}(P_{k+1}+P_{k})}=2\cdot\frac{(n-k)q-(k+1)q}{(n-k)p+(k+1)q}$$

$$=2\,\frac{p-k-g}{np+q(g-p)+q}$$

亦即 $\frac{y'}{y}=2\cdot\frac{np-k-g}{np+k(q-p)+q}$

取 $x=k-np-g$，則得

$$y\,\frac{dy}{dx}=2\,\frac{-x}{np+k(q-p)+q}$$

$$=\frac{\frac{2}{-q-p}x}{k+\frac{np+q}{-p}}=\frac{-\frac{2}{q-p}x}{x+\frac{2pq(n+1)}{q-p}}$$

通常以 $\gamma=\frac{2}{q-p}$，$\alpha=\frac{2pq(n+1)}{q-p}$ 而而上式寫爲：

$$\frac{dy}{y}=\frac{-\gamma x}{x+\alpha}dx\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)若 $p=q$，則

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{\frac{n+1}{4}}dx$$

而 $\frac{n+1}{4} = pq(n+1) \to \sigma^2$

故 $\frac{dy}{y} = -\frac{x}{\sigma^2}dx$

積分得 $\log y = -\frac{x^2}{2\sigma^2} + C$

即 $y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ ……………………………………(2)

(2)若p≠q且均非無窮小則(1)式積分得

$$\log y = -\int \frac{\gamma x}{x+\alpha}dx$$

$$= -\int \gamma \frac{x+\alpha}{x+\alpha}dx + \gamma\alpha \int \frac{dx}{x+\alpha}$$

$$= -\gamma x + \gamma\alpha \log(x+\alpha) + C$$

即 $y = y_0\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma\alpha} e^{-\gamma x}$ ……………………………(3)

而 $\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma\alpha} e^{-\gamma x} = \Big[1+\gamma\alpha\frac{x}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha(\gamma\alpha-1)}{\alpha}$

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\frac{\gamma\alpha(\gamma\alpha-1)(\gamma\alpha-\alpha)}{3}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3+\cdots\Big]$$

$$\times\left[1-\gamma\alpha+\frac{(\gamma x)^2}{\alpha 2!}-\frac{(\gamma x)^3}{3!}+\cdots\right]$$

$$=1+\left(-\frac{\gamma}{2\alpha}x^2+\frac{\gamma}{3\alpha^2}x^3+\frac{3\gamma^2\alpha-6\gamma}{\alpha 4\alpha^3}x^4+\cdots\right.$$

$$e^{-\frac{\gamma}{2\alpha}x^2}=1-\frac{\gamma}{\alpha 2\alpha}x^2+\frac{(\gamma x^2)^2}{\alpha!2^2\alpha^2}+\frac{(\gamma x^2)^3}{3!\alpha^3 2^3}+\cdots$$

$$\therefore\frac{\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{r\alpha}e^{-rx}}{e^{-\frac{r}{2\alpha}x^2}}=1+\frac{r}{3\alpha^2}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{3\sqrt{\alpha r}}\frac{x^3}{\sigma^3}+\cdots$$

而(3)式可寫作 $y=y_0e^{-\frac{\gamma}{\alpha 2\alpha}x^2}\dfrac{\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma\alpha}e^{-rx}}{e^{-\frac{\gamma}{2\alpha}x^2}}$

$$=y_0e^{-\frac{\gamma}{2\alpha}x^2}\left(1+\frac{1}{3\sqrt{\alpha r}}\frac{x^3}{\sigma^3}+\cdots\right)$$

式中 $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\alpha}{q-p},\ \dfrac{g-p}{\alpha pq(n+1)}=\dfrac{1}{pq(n+1)}=\dfrac{1}{\sigma^2}$

$$\sqrt{\alpha\gamma}=\sqrt{\frac{\alpha pq(n+1)}{q-p}\cdot\frac{\alpha}{q-p}}=\frac{\alpha\sqrt{pq(n+1)}}{q-p}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}}=\frac{q-p}{\alpha\sqrt{pq(n+1)}}\to\frac{K}{\alpha}\left(\because K=\sqrt{\beta_1}=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$y=y_0e^{-\frac{x^2}{\alpha\sigma^2}}\left(1+\frac{K}{6}\cdot\frac{x^3}{\sigma^3}+\cdots\right)$$

若略去 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 以下各項，得

$$y=y_0e^{-\frac{x^2}{\alpha\sigma^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

略去 $\frac{1}{n}$ 以下各項得

$$y=y_0e^{-\frac{x^2}{\alpha\sigma^2}}\left(1+\frac{K}{6}\cdot\frac{x^3}{\sigma^3}\right)\cdots\cdots(5)$$

（4）式稱初次近似公式，亦稱常態曲線公式，其所示之曲線爲差誤常態曲線；（5）式稱二次近似公式亦稱稍偏斜公式。

第四節　總抽試驗之機率函數

設有T個偶然現象，其具有某種特徵者計有A個，不具

有某種特徵者爲B個。某種特徵出現者爲成功，其機率爲p反之爲失敗，其機率爲q；所謂總抽試驗，即任意一次抽取n個現象之謂。

設一次總抽n個，欲使其有k個成功之機率爲P_k，則

$$P_k=\frac{C_A^k\,C_B^{n-k}}{C_T^n}=\frac{A!}{k!(A-k)!}\cdot\frac{B!}{(n-k)!(B-n+k)!}\cdot\frac{n!(T-n)!}{T!}$$

當n極大時，此機率分配亦可視爲連續數列，故亦可假定

$$(1)\ P_{k+\frac{1}{2}}=\frac{P_k+P_{k+1}}{2}$$

(2)於($k+\frac{1}{2}$=，P_{k+1})點之切線與直線[(k,P_k 1)：

($k+1$),P_{k+1})]相平行根據該兩假定即得一微分方程式如次：

$$\frac{y'}{y}=\frac{P_{k+1}-P_k}{\frac{1}{2}(P_k+P_{k+1})}$$

$$=2.\frac{\left[\dfrac{1}{(k+1)!(A-k+1)!(n-k-1)!(B-n+k+1)!}\right]}{\left[\dfrac{1}{(k+1)!(A-k+1)!(n-k-1)!(B-n+k+1)!}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{k!(A-k)!(n-k)!(\beta-n+k)!}\right]}{\left[\frac{1}{k!(k)!(n-k-)!(\beta-n+k)!}\right]}$$

$$=2.\frac{k!(A-k)!(n-k)!(\beta-n+k)!-(k+1)!}{k!(A-k)!(n-k)!(\beta-n+k)!+(k+1)!}$$

$$\frac{(A-k-1)!(n-k-1)!(\beta-n+k+1)!}{(A-k-1)!(n-k-1)!(\beta-n+k+1)!}$$

$$=2.\frac{(A-k)(n-k)-(k+1)(\beta-n+k+1)}{(A-k)(n-k)+(k+1)(\beta-n+k+1)}$$

$$=2.\frac{(Tp-k)(n-k)-(k+1)(Tq-n+k+1)}{(Tp-k)(n-k)+(k+1)(Tq-n+k+1)}$$

上式右方分子式中之k^2項可以約去，實爲之一次式，而分母之k^2不能約去爲k之二次式，用線性變更變數法可得

$$\frac{y'}{y}=\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2} \cdots\cdots (6)$$

該式亦有稱爲"Korl Pearson 的四常數式"

但 $b_2x^2+b_1x+b_0=b_2\left[(x+\frac{b_1}{2b_2})^2+(\frac{b_1^2-4b_0b^2}{4b_2^2})\right]$

$$=b_2\left[(x+\frac{b_1}{2b_2})^2-\frac{4b^2_0}{b^2_1}\frac{b^2_1}{4b_0b_2}(\frac{b^2_1}{4b_0b_2}-1)\right]$$

設以 $K=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$，得

$$b_2x^2+b_1x+b_0=b_2\left[(x+\frac{b_1}{2b_2})^2-\frac{4b_0^2}{b_1^2}K(K-1)\right]$$

$b_2x^2+b_1x+b_0$之有無實根，視K而定；故(6)式之積分式，可依k而分類，今試分爲七種：分述如次：（亦可用其他分類法分成更多種類）

（1）$K=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}<0$，卽$b_0$，$b_2$異號，則$b_2x^2+b_1x+b_0=0$有兩異號實根，故(6)式之積分式爲：

$$y=y_0(1+\frac{x}{\alpha})^{v\alpha}(1-\frac{x}{\beta})^{v\beta}\text{......}(7)$$

稱K.P.第一式，式中 $V=\frac{1}{b_2(\alpha+\beta)}$，

（2）$K=0$，卽$b_1=0$而b_0，b_2異號，則$b_2x^2+b_1x+b_0=0$有異號之兩等根，故(6)式之積分式爲

$$y=y_0\ (1+\frac{x^2}{\alpha^2})^{v\alpha}\text{......}(8)$$

稱K.P.第二式，式中 $V=\frac{1}{2\alpha b_2}$

(3)$K=\infty$,卽$b_2=0$而$b_0\neq 0$,則$b_2x^2+b_1x+b_0=0$有一根趨於∞,故(6)式之積分式爲

$$y=y_0\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{v\alpha}e^{-vx}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

稱K.P.第三式

(4)$0<K<1$,卽$4b_0b_2>b_1^2$,則$b_2x^2+b_1x+b_0=0$有兩虛根,故(6)式之積分式爲

$$y=y_0\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-m}e^{-v\tan^{-1}\frac{x}{\alpha}}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

稱K.P.第四式,式中之$\alpha=\frac{2b_0\lambda}{b_1}$,$m=-\frac{1}{2b_2}$,$V=-\frac{1}{\alpha b_2}\left(a-\frac{b_1}{2b_2}\right)$

(5)$K=1$,卽$4b_0b_2=b_1^2$,則$b_2x^2+b_1x+b_0=0$有兩等根,故(6)式之積分式爲

$$y=y_0x^{-s}e^{-\gamma/x}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

稱K.P.第五式,式中$S=-\frac{1}{b_2}$,$\gamma=\left(a-\frac{b_1}{2b_2}\right)$

(6)$K>1$,卽b_0,b_2同號,則$b_2x^2+b_1x+b_0=0$有兩同號實根,故(6)式之積分式爲

$$y=y_0(x-\alpha)^{q_2}x^{-q_1}\text{.............................}(12)$$

稱K.P.第六式，式中$\alpha=\beta-\alpha$，$g_2=\dfrac{a-\alpha}{b_2(\beta-\alpha)}$，$g_1=$

$\dfrac{a-\beta}{b_2(\beta-\alpha)}$：而$\alpha$，$\beta$為

$b_2x^2+b_1x+b_0=0$之兩根

(7) $K=0, b_1=0, b_2=0$；則$b_2x^2+b_1x+b_0=0$之兩根均趨∞，故(6)式之積分式為

$$y=y_0e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\text{......................................}(13)$$

稱K.P.第七式，亦即統計學上所習用之常態機率函數。

第五節　次數數列之配合

次數數列爲某一現象之變量與其相應對之次數所成之數列。倘將各次數除以總次數 N，即得其經驗的機率分配。其次數曲線自亦可以機率曲線表示之。故次數數列之配合，即如何求得一適合之機率函數，務使其曲線最足以代表此次數分配。該機率函數即得用作該次數數列之配合公式。機率函數得有各種不同之形式，故配合之步驟，首應（甲）確定其配合公式之形式，次當（乙）確定其配合公式所含之常數，而最後尚須（丙）較量各經驗機率與其由配合公式計算所得各理論機率間之適合程度。（此即研究其配合公式之適合度 Goodness of fit）

（甲）確定配合公式之形式，　茲欲確定次數數列之配合公式之形式，則按上述理論即須先行推求K之數值。　由公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x+a)}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

歸之，得

$$\int(b_0+b_1x+b_2x^2)dy=\int y(x+a)dx$$

左右各乘以 x^t，得

$$\int (b_0x^t+b_1x^{t+1}+b_2x^{t+2})dy=\int (yx^{t+1}+ayx^t)dx$$

若左面施以部分積分法，則得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^{t+1}y+ax^ty)\,dx=\Big[y(b_0x^t+b_1x^{t+1}+b_2x^{t+2})\Big]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[b_0tx^{t-1}y+b_1(t+1)x^ty$$

$$+b_2(t+2)x^{t+1}y\Big]dx$$

假定曲線之兩端 y 趨於零，則右端前項方括號內之定積分之數值亦等於零，故上式得改寫如次：

$$(14)\Big[1+b_2(t+2)\Big]\int_{-\infty}^{+\infty}yx^{t+1}dx+\Big[a+b_1(t+1)\Big]\int_{-\infty}^{+\infty}yx^tdx+$$

$$b_0t\int_{-\infty}^{+\infty}yx^{t-1}dx=0$$

$$\text{或}\Big[1+b_2(t+2)\Big]u_{t+1}+\Big[a+b_1(t+1)\Big]u_t+$$

$$btu_{t-1}=0$$

設 t 級希望差 u_t 之公式：

$$Nu_1=\int_{-\infty}^{+\infty}yxdx=0$$

$$Nu_t=\int_{-\infty}^{+\infty}yx^t dx$$

設使上述(14)式之 t 等於0,1,2,3,卽得

$$(a+b_1)=0$$

$$(1+3b_2)u+b_0=0$$

$$(1+4b_2)u_3+(a+3b_1)u_2=0$$

$$(1+5b_2)u_4+(a+4b_1)u_3+3b_0u_2=0$$

由該聯立一次方程式,卽得推求 b_0, b_1, b_2, a 諸數值(寫成動差 u_2, u_3, u_4 之函數)

(14) $$b_0=\frac{-u_3(4u_2u_4-3u^2_3)}{10u_2u_4-18u^3_2-12u^2_3}$$

(15) $$b_1=\frac{-u_3(4u_4+3u^2_2)}{10u_2u_4-18u^3_2-12u^2_3}$$

(16) $$b_2=\frac{-(u_2u_4-3u^2_3-6u^3_2)}{10u_2u_4-18u^3_2-12u^2_3}$$

(17) $$a=-b_1$$

上式亦得寫成標準差 σ 偏斜度 β_1,及峯度 β_2 之函數,緣

$$\beta_1=\frac{u^2_3}{u^3_2}$$

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

代入上式，卽得

$$(18)\quad b_0=\frac{-\sigma(4\beta_2-3\beta_1)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

$$(19)\quad b_1=\frac{-\sigma\sqrt{\beta_1(\beta_2+3)}}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

$$(20)\quad b=\frac{-(2\beta_2-3\beta_1-6)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

$$(21)\quad a=-b_1$$

因此k亦得寫成β_1，β_2之函數

$$k=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$$

$$(22)\quad k=\frac{\beta_1(\beta+3)^2}{4(4\beta_2-3\beta_1)(2\beta_2-3\beta_1-6)}$$

由該 k 之數值，卽得判定配合公式之形式。故配合法之實施步驟，應首先由實際統計數列推求其β_1及β_2之數值；由該兩β_1，β_2之數值，卽得推求其 k 之數值；由該k之數值，卽可判定其配合公式之形式；既經確定其配合公式之形式，乃可進而確定其配合公式所含之常數。

（乙）配合公式常數之確定：

配合公式所含常數之確定方法自將隨公式之形式而不同。且據以確定常數之原則，亦有最小二乘原則最小差數原則及動數相等原則等多種，惟以動數相等原則為最適用。茲即憑該動數相等原則以確定上述 Karl Pearson氏第一式所含各常數（餘可類推）

K.P.氏第一式為

$$(23)\quad y=y_0\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{v\alpha}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{v\beta}$$

則按動數相等原則　即得

$$m_t=\frac{1}{N}\int_{-\alpha}^{\beta}x^t y\,dx$$

該式即表示經驗動數m_t應與理論動數（即由配合公式計算者）相等。設使t=0　而將y之數值代入上式即得

$$1=\frac{1}{N}\int_{-\alpha}^{\beta}y_0\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{v\alpha}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{v\beta}dx$$

$$=\frac{y_0}{N}\alpha^{-v\alpha}\beta^{+v\beta}\int_{-\alpha}^{\beta}(\alpha+x)^{v\alpha}(\beta-x)^{v\beta}dx$$

茲為便利書寫並得利用尤勒積分起見，得改以z為變數

$$z=\frac{\alpha+x}{\alpha+\beta}$$

而上列積分卽可改寫如次

$$I=\frac{y_0}{N}\frac{(\alpha+\beta)^{v\alpha+v\beta+1}}{\alpha^{v\alpha}\beta^{v\beta}}\int_0^1 z^{v\alpha}(1-z)^{v\beta}dz$$

該有定積分卽形成一甲種尤勒積分B上式亦得寫成：

$$I=\frac{y_0}{N}\frac{(\alpha+\beta)^{v\alpha+\beta+1}}{\alpha^{v\alpha}\beta^{v\beta}}B(v\alpha+1,v\beta+1)$$

由該式亦可化爲乙種尤勒積分之函數：

茲爲便利書寫起見，　設使

$$v\alpha=m_1$$

$$v\beta=m_2$$

$$\alpha+\beta=b$$

則按動數相等原則，　卽得

$$m_t=\frac{1}{N}\int_{-\alpha}^{\beta}x^t y\,dx$$

該式卽表示經驗動數m_t應與理論動數（卽由配合公式計算之動數）相等　設使$t=0$而將y之數値代入上式　卽得

$$1=\int_{-\alpha}^{\beta} y_0\left(1-+\frac{x}{\alpha}\right)^{m_1}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{m_2}$$

$$1=\frac{y_0}{N}\frac{(\alpha+\beta)^{v\alpha+v\beta+1}}{\alpha^{v\alpha}\beta^{v\beta}}\cdot\frac{\Gamma(v\alpha+1)\,\Gamma(v\beta+1)}{\Gamma(v\alpha+v\beta+2)}$$

由此卽得確定其配合公式之常數y_0

$$(24)\qquad y_0=\frac{N}{\alpha+\beta}\,\frac{\alpha^{v\alpha}\beta^{v\beta}}{(\alpha+\beta)^{v\alpha+v\beta}}\,\frac{\Gamma(v\beta+v\beta+2)}{\Gamma(v\alpha+1)\,\Gamma(v\beta+1)}$$

至確定其他常數之公式可仍按動數相等之原則 惟爲便利計算起見 可取其從（$-\alpha$）點之動數 卽須令

$$m_t=\frac{1}{N}\int_{-\alpha}^{\beta} y(x+\alpha)^t dx$$

並仍改以 z 爲變數且將y之數值代入 卽得

$$m_t=\frac{y_0}{N}\,\frac{(\alpha+\beta)^{v\alpha+v\beta+t+1}}{\alpha^{v\alpha}\beta^{v\beta}}\int_0^1 z^{v\alpha+t}(1-z)^{v\beta}dz$$

$$=\frac{y_0}{N}\,\frac{(\alpha+\beta)^{v\alpha+v\beta+t+1}}{\alpha^{v\alpha}\beta^{v\beta}}\,\frac{\Gamma(\gamma+t+1)\,\Gamma(v\beta+1)}{\Gamma(v+v\beta+t+2)}$$

倘將y_0之數值代入，亦得改寫如次

$$(25)\qquad m_t=(\alpha+\beta)^t\,\frac{\Gamma(v\alpha+t+1)}{\Gamma(v\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(\alpha+v\beta+2)}{\Gamma(v\alpha+v\beta+t+2)}$$

於是再按乙種尤勒積分之遞推公式：

$$\Gamma_{(n+1)}=n\Gamma_{(n)}$$

則上式亦可簡化如次：

設以 $b=\alpha+\beta$ 並使 $t=1,2,3,4$

$$m_1=b\frac{(v\alpha+1)}{(v\alpha+v\beta+2)}$$

$$m_2=\frac{b^2(v\alpha+2)(v\alpha+1)}{(v\alpha+v\beta+3)(v\alpha+v\beta+2)}$$

$$m_3=\frac{b^3(v\beta+3)(v\alpha+2)(v\alpha+1)}{(v\alpha+v\beta+4)(v\alpha+v\beta+3)(v\alpha+v\beta+2)}$$

$$m_4=\frac{b^4(v\alpha+4)(v\alpha+3)(v\alpha+2)(v\alpha+1)}{(v\alpha+v\beta+5)(v\alpha+v\beta+4)(v\alpha+v\beta+3)(v\alpha+v\beta+2)}$$

再利用動數與動差之關係：

$$u_1=0$$

$$u_2=m_2-m_1^2$$

$$u_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3$$

$$u_4=m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4$$

並設以

$$u\alpha+1=k$$

$$u\beta+1=l$$

$$k+l=r$$

將各m之數值代入各u之公式 卽得

$$(26)\qquad u_2=\left(\frac{b}{r}\right)^2\frac{kl}{r+1}$$

$$(27)\qquad u_3=\left(\frac{b}{r}\right)^3\frac{2kl(l-k)}{(r+1)(r+2)}$$

$$(28)\qquad u_4=\left(\frac{b}{r}\right)^4\frac{3kl[kl(r-6)+2r^2]}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

由各次動差亦可推求其偏斜度β_1峯度β_1與配合公式各常數之關係 又設以kl=p並按u與β_1,β_2之關係

$$\beta_1=\frac{u_3^2}{u_2^3}$$

$$\beta_2=\frac{u_4}{u_2^2}$$

因得

$$(29)\qquad \beta_1=\frac{4(r^2-4p)(r+1)}{p(r+2)^2}$$

(30) $$\beta_2 = \frac{3(r+1)[2r^2+p(r-6)]}{p(r+2)(r+3)}$$

或

(31) $$r = \frac{6[\beta_2-\beta_1-1]}{3\beta_1-2\beta_2+6}$$

(32) $$p = \frac{r^2}{4+\frac{1}{4}\beta_1\frac{(r+2)^2}{(r+1)}}$$

既得r,p　即不難推求k,l　緣k,l實即下列二次方程式之兩根：

$$X^2-rX+p=0$$

既得k,l,　即可藉以確定$v\alpha$,$v\beta$

$$v\alpha=k-1$$

$$v\beta=l-1$$

另由

$$b=\alpha+\beta$$

$$=\sqrt{\frac{u_2(r+1)r^2}{p}}$$

以推求b之數值。既知 b,$v\alpha$,$v\beta$ 於是即可推求其α,β,而後將α,β,v諸值代入(24)公式，即得確定其y。

（丙）配合公式之適合度：旣將配合公式所含各常數確定後，則卽可由配合公式計算各 y 之數值。但由計算所得諸數值，未必能與各實際次數盡相符合，換言之，卽配合值（亦名理論值）與經驗值之間不免有所差異，其差異愈微，卽配合公式之適合程度較高，其差異愈大，卽配合公式之適合程度較弱，是則，配合值與經驗值間之相差度，亦可用以表示配合公式不適合之程度。然吾人亦得另據機遇數學之理論，以實際數字視若抽樣之結果，而進以推求實際數字與理論數值差誤之性質及其可能性。蓋差誤之性質，有屬於偶然性之差誤，亦有屬於實質上之差誤，此兩種差誤之判別固甚困難，然吾人得憑機遇數學之理論，假定在某種抽樣方法條件之下，推求其屬於偶然性差誤之機率。倘使該機率之數值頗接近於一，則理論值與經驗值間愈有相互比擬之價值，斯卽配合公式之適合程度頗高；反之，倘使該機率之數值極接近於零，則理論值與經驗值間愈無相互比擬之價值，斯卽配合公式之適合程度極低；是則配合公式適合度之大小亦得以一機率表示之。今統計學上最通用之「克」方測驗法(Chi quare test) 卽以一機率之大小以表示適合度者。（假定在

隨機抽樣條件之下該測驗方法殊甚簡單。

即由配合公式以推求各理論值 z

$$z = f(x)$$

由各該理論值與其相應對之經驗值 y 之比較以推其「克」方（X^2）

$$X^2 = \sum \frac{(z-y)^2}{z} \qquad (33)$$

據此「克」方之數值即可利用「克」方測驗機率表（見附錄）以測定其配合公式之適合度。

第六節： 普通統計數列之配合

次數得與機率相比擬　故次數數列之配合　可根據機率計算之推論以確定其配合曲線之型式　次數數列以外統計數列之配合　則除有科學上專門理論之依據外　在統計上實全憑經驗　其配合公式之形式　可由各經驗點之分佈情形以確定之　而由是所得之配合公式（或曲線）亦名"經驗公式"（或曲線）　今經驗公式之形式之確定　既無一定型式與理論依據　則自惟力求簡單與適合可也　至經驗公式所含常數之確定　乃隨其形式之不同而各異　然則數學公式（或曲線

）之種類無涯　自難一一列舉　惟最適用者當推直線拋物線及波浪式曲線　直線與拋物線之配合法　已於相關函數及時間數列之分析兩章中述及　茲不再贅　本節擬專述波浪式曲線之配合法　至普通統計數列配合公式其適合度之測定　則與次數數列相同　亦得以其配合值與經驗值間之相差度以表示其不適合之程度　或借用克方測驗法亦以一機率表示其適合度

波浪式曲線之配合

波浪式曲線乃一時上時下的曲線，升而復降，降而復升，似受循環性之作用，故欲配合此類有循環性的曲線，自當以具有環循性的數學函數爲最適宜。

設有一函數 $F_{(t)}$ 倘使不論 t 之數值如何，而得有

$$F_{(t+T)}=F_{(t)}$$

則F(t)即爲一『循環函數，』而T爲此循環函數的『週期。』三角函數sin x, cos x, tg x 乃循環函數最簡單的例子，故吾人亦擬先用此類函數以配合波浪式曲線，而本篇所討論，亦祇以三角函數爲限。

配合波浪式曲線之第一步驟，當先決定其週期。決定的

方法。可根據理論，如以一年爲季節變化的週期；亦可根據經驗，如以若干經濟循環的平均週期爲其循環變化的週期。既已決定週期，進一步卽可選擇配合公式。選擇標準，一方以公式愈簡單愈便利爲最善，但另一方面亦須配合曲線與實際的統計曲線相離不宜太遠。此兩條件常係相互矛盾，但應兼顧，蓋若祇顧其一，則不失於『配而不合，』卽失於『合而難用，』此乃不可不特別加以注意。

最簡單的三角函數乃 ces x, sin x, tg x 等函數，故可首先試以此類函數配合之；但試驗的結果，每鮮能使人滿意，故遂有用較複雜的三角函數，例如 Hermite 所擬者

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}(x-x_2)\mathrm{Sin}(x-x_3)\cdots\cdots\mathrm{Sin}(x-x_n)}{\mathrm{Sin}(x_1-x_2)\mathrm{Sin}(x_1-x_3)\cdots\cdots\mathrm{Sin}(x_1-x_n)}f(x_1)$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}(x-x_1)\mathrm{Sin}(x-x_3)\cdots\cdots\mathrm{Sin}(x-x_n)}{\mathrm{Sin}(x_2-x_1)\mathrm{Sin}(x_2-x_3)\cdots\cdots\mathrm{Sin}(x_2-x_n)}f(x_2)$$

$$+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}(x_n-x_1)\mathrm{Sin}(x-x_2)\cdots\cdots\mathrm{Sin}(x_n-x_{n-1})}{\mathrm{Sin}(x_n-x_1)\mathrm{Sin}(x_n-x_2)\cdots\cdots\mathrm{Sin}(x_n-x_{n-1})}f(x_n)$$

Cauchy 所擬者:

$$f(x)=\frac{\sin\left(\frac{x-x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_3}{2}\right)\cdots\cdots\sin\left(\frac{x-x_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1-x_3}{2}\right)\cdots\cdots\sin\left(\frac{x_1-x_n}{2}\right)}f(x_1)$$

$$+\frac{\sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_3}{2}\right)\cdots\cdots\sin\left(\frac{x-x_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2-x_3}{2}\right)\cdots\cdots\sin\left(\frac{x_2-x_n}{2}\right)}f(x_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_2}{2}\right)\cdots\cdots\sin\left(\frac{x-x_{n-1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x_n-x_2}{2}\right)\cdots\cdots\sin\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right)}f(x_n)$$

Gauss 與 Lachlass，亦曾擬有下列兩式：

$$f(x)=\frac{(\cos x-\cos x_2)(\cos x-\cos x_3)\cdots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x-\cos x_2)(\cos x_1-\cos x_3)\cdots(\cos x-\cos x_n)}f(x_2)$$

$$+\frac{(\cos x-\cos x_1)(\cos x-\cos x_3)\cdots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_2-\cos x_1)(\cos x_2-\cos x_3)\cdots(\cos x_2-\cos x_n)}f(x_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(\cos x-\cos x_1)(\cos x-\cos x_2)\cdots(\cos x-\cos x_{n-1})}{(\cos x_n-\cos x_1)(\cos x_n-\cos x_2)\cdots(\cos x-\cos x_{n-1})}f(x_n)$$

$$f(x)=\frac{\sin x\,(\cos x-\cos x_2)(\cos x-\cos x_3)\cdots}{\sin x_1(\cos x-\cos x_2)(\cos x_1-\cos x_3)\cdots}$$

$$\frac{(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}x_n)}{(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}x_n)}f(x_2)$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}x\,(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}x_1)(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}x_3)\cdots(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}x_n)}{\mathrm{Sin}x_2(\mathrm{Cos}x_2-\mathrm{Cos}x_1)(\mathrm{Cos}x_2-\mathrm{Cos}x_3)\cdots(\mathrm{Cos}x_2-\mathrm{Cos}x_n)}f(x_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}x\,(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}x_1)(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}x_2)\cdots}{\mathrm{Sin}x_n(\mathrm{Cos}x_n-\mathrm{Cos}x_1)(\mathrm{Cos}x_n-\mathrm{Cos}x_3)\cdots}$$

$$\frac{(\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}x_{n-1})}{(\mathrm{Cos}x_n-\mathrm{Cos}x_{n-1})}f(x_n)$$

諸如此類的函數頗多，難以一一列舉，况在普通統計研究中，罕有用到此類繁複的公式，而普通應用『次級較高的三角和數』已堪稱精細之研究。

三角和數最普通的形式為

$$f(x)=m+(a_1\mathrm{Cos}x+b_1\mathrm{Sin}x)(a_2\mathrm{Cos}2x+b_2\mathrm{Sin}\,2x)+\cdots$$
$$\cdots+(a_p\,\mathrm{Cos}px+b_p\,\mathrm{Sin}px)$$

p 愈大，三角和數即愈形繁複，因此，三角和數有級次的分別。上述公式，乃一『p 級三角和數。』級次愈低，三角和數的公式愈形簡單，所以假使決定用三角和數以配合波浪式曲線，可首先試以一級三角和數：

$$y=m+a_1\mathrm{Cos}x+b_1\mathrm{Sin}x$$

旣得其配合公式，卽可比較其由配合公式計算所得之數字與實際統計數字相差幾何，倘使相差很小，配合問題卽告解決；否則，當改以較高次級的三角和數如二級三角和數：

$$y=m+a_1\mathrm{Cos}x+b\mathrm{Sin}x+a_1\mathrm{Cos}2x+b\mathrm{Sin}2x$$

三級三角和數：

$$y=m+a_1\mathrm{Cos}x+b\mathrm{Sin}S+a_2\mathrm{Cos}2x+b_2\mathrm{Sin}2x$$
$$+a_3\mathrm{Cos}3x+b_3\mathrm{Sin}3x$$

漸次將級次提高，直至其配合曲線離實際統計曲線極近爲止。又當漸次提高三角和數級次時，例若由 p 級提高至 p+1 級，祇須計算其末兩項之係數 a_{p+1} 與 b_{p+1} 而其他 p 級三角和數各項的係數仍可繼續應用，無須重算，此在計算方面，非常便利。

三角和數乃有循環性的函數，自可用以配合波浪式曲線，但三角和數之週期爲 2π 而波浪式曲線之週期爲 T，今欲使實際的統計曲線與表示三角和數的曲線兩相配合倘須彼此週期相互一致。欲使其週期相互一致，倘須經過一變更變數之

手續。

假使統計數字原以t爲變數，T爲週期，欲使其週期變爲2π，祇須將t改爲新變數x，令

$$x=\frac{2\pi}{T}t$$

則x之週期卽與三角和數相互一致。

總括以上論述，吾人認爲配合波浪式曲線，應利用三角函數，而在經濟統計一類之研究中，倘使不求過分精細，且欲避免繁複計算，則以三角和數爲最適宜。但配合公式與實際統計數字應當週期相同，故在實行配合之前，須經過一變更變數的手續。

既經確定配合公式之形式（三角和數），卽可進以決定配合公式所含各項的係數與實際的統計數字應發生何種關係。

設使實際統計數列爲

$$\begin{cases} y_1 \ y_2 \cdots\cdots\cdots\cdots y_n \\ t_1 \ t_2 \cdots\cdots\cdots\cdots t_n \end{cases}$$

假定其週期爲T。第一步手續須先變更變數，卽須將上述統

計數列改成下式：

$$\begin{cases} y_1\ y_2\cdots\cdots\cdots\cdots y_n \\ x_1\ x_2\cdots\cdots\cdots\cdots x_n \end{cases}$$

$$x=\frac{2\pi}{T}t$$

變數變更以後，即得以一『p級三角和數』與之配合。欲達到配合之目的，應使各y與各配合公式右項之數值『差不多相等，』即應得下列n個『差不多相等』的公式：

$$\begin{cases} y_1 \doteq m + a_1 \mathrm{Cos}x_1 + b_1 \mathrm{Sin}x_1 + a_2 \mathrm{Cos}2x_1 + b_2 \mathrm{Sin}2x_1 + \cdots\cdots \\ \qquad + \cdots\cdots + a_p\ \mathrm{Cos}px_1 + b_p\ \mathrm{Sin}px_1 \\ y_2 \doteq m + a_1 \mathrm{Cos}x_2 + b_1 \mathrm{Sin}x_2 + a_2 \mathrm{Cos}2x_2 + b_2 \mathrm{Sin}2x_2 + \cdots\cdots \\ \qquad + \cdots\cdots + a_p\ \mathrm{Cos}px_2 + b_p\ \mathrm{Sin}px_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n \doteq m + a_1 \mathrm{Cos}x_n + b_1 \mathrm{Sin}x_n + a_2 \mathrm{Cos}2x_n + b_2 \mathrm{Sin}2x_n + \cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots + a_p\ \mathrm{Cos}px_n + b_p\ \mathrm{Sin}px_n \end{cases}$$

$\doteq$為『差不多相等』的符號。

由該n個公式，應確定其2p+1個係數，[2p+1) 當然不得超過於n]。又配合公式以愈簡愈妙，則三角和數之級次 p

，自亦以愈低愈好，故2p＋1當不及n。然則今由n個公式以求2p+1個未知數，公式多於未知數，則又將如何決定其2p＋1個係數？茲就此n個公式中選取其2p＋1個，由該選得的2p＋1個一次聯立方程式以求其2p＋1個未知數（係數）；亦可根據某種原則而利用其全體材料。後一方法較為精確。但根據何種原則以利用其全體材料？則在統計上最通用的確定係數方法乃根據最小二乘原則，茲即根據該原則以確定此配合公式（p級三角和數）的2p＋1個係數$m, a_1, b_1, a_2, \cdots\cdots ap, bp$。

根據最小二乘原則，應使

$$\sum_{k=1}^{n}[y_k-(m+a_1\mathrm{Cos}x_k+b_1\mathrm{Sin}x_k+a_2\mathrm{Cos}2x_k+b_2\mathrm{Sin}2x_k+\cdots\cdots+ap\mathrm{Cos}px_k+bp\mathrm{Sin}px_k)]^2=\text{最小}$$

欲符合此條件，應使『從各項係數的微分係數』均等於零，即須令：

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}2[y_k-(m+a_1\mathrm{Cos}x_k+b_1\mathrm{Sin}x_k+\cdots ap\mathrm{Cos}px_k+bp\mathrm{Sin}px_k)]=0\\ \sum_{k=1}^{n}2\mathrm{Cos}x_k[y_k-(m+a_1\mathrm{Cos}x_k+b_1\mathrm{Sin}x_k+\cdots+ap\mathrm{Cos}px_k+bp\mathrm{Sin}px_k)]=0\end{cases}$$

$$
(34)\begin{cases}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Sin}x_k\,[y_k-(m+a_1\operatorname{Cos}x_k+b_1\operatorname{Sin}x_k+\cdots+a_p\operatorname{Cos}px_k+b_p\operatorname{Sin}px_k)]=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Cos}px_k\,[y_k-(m+a_1\operatorname{Cos}x_k+b_1\operatorname{Sin}x_k+\cdots+a_p\operatorname{Cos}px_k+b_p\operatorname{Sin}px_k)]=0\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Sin}px_k\,[y_k-(m+a_1\operatorname{Cos}x_k+b_1\operatorname{Sin}x_k+\cdots+a_p\operatorname{Cos}px_k+b_p\operatorname{Sin}px_k)]=0
\end{cases}
$$

或化成下列 $2p+1$ 個等式：

$$
(35)\begin{cases}
\sum y_k = nm+a_1\sum\operatorname{Cos}x_k+b_1\sum\operatorname{Sin}x_k+\cdots+a_p\sum\operatorname{Cos}px_k+b_p\sum\operatorname{Sin}px_k\\
\sum y_k\operatorname{Cos}x_k = m\sum\operatorname{Cos}x_k+a_1\sum\operatorname{Cos}^2x_k+b_1\sum\operatorname{Cos}x_k\operatorname{Sin}x_k+\cdots+a_p\sum\operatorname{Cos}x_k\operatorname{Cos}px_k+b_p\sum\operatorname{Cos}x_k\operatorname{Sin}px_k\\
\sum y_k\operatorname{Sin}x_k = m\sum\operatorname{Sin}x_k+a_1\sum\operatorname{Sin}x_k\operatorname{Cos}x_k+b_1\sum\operatorname{Sin}^2x_k+\cdots+a_p\sum\operatorname{Sin}x_k\operatorname{Cos}px_k+b_p\sum\operatorname{Sin}x_k\operatorname{Sin}px_k\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sum y_k\operatorname{Cos}px_k = m\sum\operatorname{Cos}px_k+a_1\sum\operatorname{Cos}px_k\operatorname{Cos}x_k+
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\qquad +b\sum \mathrm{Cos}px_k\ \mathrm{Sin}x_k+\cdots+a_p\sum \mathrm{Cos}^2px_k \\
\qquad +b_p\sum \mathrm{Cos}px_k\ \mathrm{Sin}pS_k \\
\sum y_k\ \mathrm{Sin}px_k = m\sum \mathrm{Sin}px_k + a_1\sum \mathrm{Sin}px_k\ \mathrm{Cos}x_k \\
\qquad +b\sum \mathrm{Sin}px_k\ \mathrm{Sin}x_k+\cdots+a_p\sum \mathrm{Sin}px_k\ \mathrm{Cos}\ px_k + b_p\sum \mathrm{Sin}^2px_k
\end{cases}
$$

以上2p＋1個公式，均爲一次方程式，解此2p＋1個聯立一次方程式，卽得確定其配合式的2p＋1個係數。

依據上述第(35)諸式，卽不難推求其配合公式的各項係數，因而不難求得其配合公式。但其計算仍不免繁複，故在實際計算上，除不得已時，很少直接利用此類計算公式。

上述第(35)諸式，大部分爲兩個三角函數的乘積；此類乘積計算，非常繁複。然兩三角函數的乘積，可使之變爲一簡單三角函數，故爲便利計算起見，可利用下列諸三角公式(36)，首先將各三角函數乘積稍加變更：

$$
(36)\quad
\begin{cases}
2\mathrm{Cos}ax\mathrm{Cos}\beta x=\mathrm{Cos}(a-\beta)x+\mathrm{Ces}(a+\beta)x \\
2\mathrm{Sin}ax\mathrm{Sin}\beta x=\mathrm{Cos}(a-\beta)x-\mathrm{Cos}(a+\beta)x \\
2\mathrm{Sin}ax\mathrm{Cos}\beta x=\mathrm{Sin}(a-\beta)x+\mathrm{Sin}(a+3)x
\end{cases}
$$

據此卽可將上述第(35)諸式改爲下式：

$\sum y_k = nm + a_1\sum \mathrm{Cos}x_k + b\sum \mathrm{Sin}x_k + \cdots\cdots\cdots$

$\quad + a_p\sum \mathrm{Cos}px_k + b_p\sum \mathrm{Sin}px_k$

$2\sum y_k\,\mathrm{Cos}x_k = 2m\sum \mathrm{Cos}x_k + a_1[\sum \mathrm{Cos}(1+1)x_k + \sum$

$\quad \mathrm{Cos}(1+1)x_k]$

$\quad + b_1[\sum \mathrm{Sin}(1-1)x_k + \sum \mathrm{Sin}(1+1)x_k + \cdots\cdots$

$\quad + \cdots + a_p[\sum \mathrm{Cos}(p-1)x_k + \sum \mathrm{Oos}(p+1)x_k$

$\quad + b_p[\sum \mathrm{Sin}(p-1x_k + \sum \mathrm{Sin}(p-1)x_k]$

$2\sum y_k\,\mathrm{Sin}x_k = 2m\sum \mathrm{Sin}x_k + a_1[\sum \mathrm{Sin}(1+1)x + \cdots\cdots$

$\quad + \sum \mathrm{Sin}(1+1)x_k] + b[\sum \mathrm{Cos}(1-1)x_k - \sum \mathrm{Cos}$

$\quad (1+1)x_k]$

$\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\quad - a_p[\sum \mathrm{Sin}(1-p)x_k + \sum \mathrm{Sin}(1+p)x_k]$

$\quad b_p[\sum \mathrm{Oos}(1-p)x_k - \sum \mathrm{Cos}(1+p)x_k]$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$2\sum y_k\,\mathrm{Oos}px_k = 2m\sum \mathrm{Cos}px_k + a_1[\sum \mathrm{Cos}(p-1x_k +$

$\quad \sum \mathrm{Cos}(p+1)x_k] + d[\sum \mathrm{Sin}(1-p)x_k -$

$\quad \sum \mathrm{Sin}(1+p)x_k] + \cdots\cdots + \cdots\cdots$

$\quad + \cdots\cdots + a_p[\sum \mathrm{Cox}(p-p)x_k + \sum \mathrm{Cos}(p+px_k]$

$2\sum y_k\,\mathrm{Sin}px_k = 2m\sum \mathrm{Sin}px_k + a_1[\sum \mathrm{Sin}(p-1)x_k$

$\quad + \sum \mathrm{Sin}(p+1)x_k]$

$\quad + b_1[\sum \mathrm{Cos}(p-1)x_k - \sum \mathrm{Cos})p+1)x_k] + \cdots\cdots$

$\quad + \cdots\cdots + a_p[\sum \mathrm{Sin}(p-p)x_k + \sum \mathrm{Sin}(p-p)x_k]$

$\quad + b_p[\sum \mathrm{Cos}(p-p)x_k - \sum \mathrm{Co}\,(p+p)x_k]$

第(37)諸式已將第(35)諸式簡化不少，但實際計算仍嫌過繁；而於各x成一算術級數時 一般統計，大都能符合此一條件）得應用更簡單的計算公式（Bessel公式）

設各x成一算術級數而如下列之情形

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = x_1 + \frac{2\pi}{n}$$

$$x_3 = x_1 + \frac{4\pi}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k = x_1 + (k-1)\frac{2\pi}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

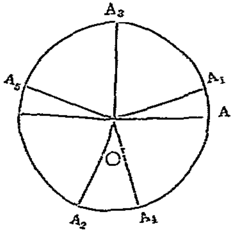
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = x_1 + (nr-1)\frac{2\pi}{n}$$

則上述第(37)諸公式，即能變成非常簡單，因在此情形之下，第(37)諸式中各聯立方程式除去一項外，(第h個公式除去其第h項）其餘右列各項皆等於零。證明方法，可用幾何理

論。設使OA=1,，爲右圓形的半徑。

在上述第(37)諸式中,須計算之右列各項，除nm一項外，其餘均可歸入下列二式



甲式：$\sum_{k=1}^{n} Cos(a\pm\beta)xk=S_1$

乙式：$\sum_{k=1}^{n} Sin(a\pm\beta)xk=S_2$

a,β可各取0,1,2,……p等整數，而n既必大於2p+1則(a±β)亦必小於n。S_1或S_2之數值，自當隨(a+β)之數值而不同。現且分兩格以各求其S_1與S_2之數值：

A格：$r=a\pm\beta\neq0$

B格：$r=a\pm\beta=0$

(A)　$r\neq0$

設以

$$\widehat{A\,A_1}=rx_1$$

由A_1將圓周分成n相等部分，玆為便於圖示與解釋起見，可暫令$r=3, n=5$，如是，則(見圖1)

$$rx_1=\widehat{A\,A_1}$$

$$rx_2=r\left(x_1+\frac{2\pi}{n}\right)=\widehat{A\,A_2}$$

$$rx_2=r\left(x_1+\frac{4\pi}{n}\right)=\widehat{A\,A_3}$$

$$rx_4=r\left(x_1+\frac{6\pi}{n}\right)=\widehat{A\,A_4}$$

$$rx_5=r\left(x_1+\frac{8\pi}{n}\right)=\widehat{A\,A_5}$$

因而 $\cos rx_1=\mathrm{proj}_{OA}\overline{OA_1}$

$$\cos rx_2=\mathrm{proj}_{OA}\overline{OA_2}$$

$$\cos rx_3=\mathrm{proj}_{OA}\overline{OA_3}$$

$$\cos rx_4=\mathrm{proj}_{OA}\,OA_4$$

$$\text{Cos}rx_5 = \text{proj}_{OA}\, O A_5$$

$$\sum_{k=1}^{5} \text{Cos}rx_k = \sum_{k=1}^{3} \text{proj}_{OA}\, O A_k \text{proj}_{OA} \left[\sum_{k=1}^{5} \overline{OA}_k \right]$$

然$A_1A_2A_3A_4A_5$爲一正五角形，則$\sum_{k=1}^{5} \overline{OA_K}$應等於零，故

$$\sum_{k=1}^{5} \text{Cos}rx_k = 0$$

同理，假使OB爲一垂直於OA的直徑，則

$$\sum_{k=}^{5} \text{Sin}rx_k = \text{proj}_{OB} \left[\sum_{k=1}^{5} OA_k \right]$$

$$= 0$$

同理，可不論 r 與 n 爲任何數值而證明其

$$(38) \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \text{Cos}rx_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} \text{Sin}rx_k = 0 \end{cases}$$

祇須 r 不等於零。

( ) $r=0$

在此一格，計算非常簡便，因

$$\sin 0=0$$

$$\cos 0=1$$

故

$$(39)\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos r x_k=n\\ \sum\limits_{k=1}^{n}\sin r x_k=n\end{cases}$$

故依(38)(39)此兩式，上述第(37)諸式可變成非常簡單

$$(40)\begin{cases}\sum y_k=nm\\ 2\sum y_k\cos x_k=fa_1\\ 2\sum y_k\sin x_k=nb_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\sum y_k\cos px_k=nap\\ 2\sum y_k\sin px_k=nbp\end{cases}$$

又或

$$\begin{cases}m=\frac{1}{n}[y_1+y_2+\cdots\cdots+y_k+\cdots\cdots+y_n]\\ a_1=\frac{1}{n}[y_1\cos x_1+y_2\cos x_1+\cdots\cdots+y_k\cos x_k\end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\qquad +\cdots\cdots+y_n \mathrm{Cos} x_n] \\
b_1=\frac{2}{n}[y_1 \mathrm{Sin}\ x_1+y_2 \mathrm{Sin}\ x_2+\cdots\cdots+y_k\ \mathrm{Sin} x_k \\
\qquad +\cdots\cdots+y_n \mathrm{Sin} x_n] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
ap=\frac{2}{n}[y_1 \mathrm{Cos}\ px_1+y_2 \mathrm{Cosp}\ x_2+\cdots\cdots+y_k\ \mathrm{Cos} px_k \\
\qquad +\cdots\cdots+x_n \mathrm{Cos} px_n] \\
bp=\frac{2}{u}[y_1 \mathrm{Sin} px_1+y_2 \mathrm{Sin} px_2+\cdots\cdots+y_k\ \mathrm{Sin} px_k \\
\qquad +\cdots\cdots+v_n \mathrm{Sin} px_n]
\end{array}
\right.
$$

根據該各配合公式，三角和數的各係數即不難計算矣。

第九章：常態曲線與常態曲面

第一節： 常態曲線之意義

設有一現象之度量A 今試以N次觀察(或測量)結果得N個數值：

$$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$$

或用次數數列表示之

$$\begin{cases} x_1, & x_2, \cdots\cdots x_k \\ f_1, & f_2, \cdots\cdots f_k \end{cases}$$

$$f_1+f_2+\cdots\cdots+f_k=N$$

該n個數值(名曰觀察值或經驗值)雖由於同一現象之度量A(名曰,,真值"或,,理論值")然未必盡能一致，而實際上各,,觀察值"與,,真值"間恆有差誤 按此類差誤之形成得由測量器具之不精確，由觀察者之技術欠熟或有所傾向，亦得由於偶然之差誤 惟由於測量器具或觀察者之差誤，恆有偏高或偏低之傾向而尙易於校正；獨偶然性差誤則不然，其差誤之方向與大小俱無定則，時高時低，忽大忽小，初無一定之規

律。顧此類差誤之方向與大小固無定則，然在觀察次數相當大量時，其次數分配却呈一定之法則。今常態曲線之研究，卽用以推求此類偶然性差誤之次數分配之狀態，其數學公式（名曰常態差誤公式或簡稱常態公式）爲

$$(1) \qquad y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

卽用以表示此類偶然性差誤之次數（或機）分配法則。

該公式，於機遇數學亦名"常態機率法則"（Normal probability law）。蓋謂在"通常狀態"之下，機率之數值，應受該公式所支配焉。

倘移諸統計學言之，則機率可與"相對次數"相比擬，故該公式亦得爲常態次數分配之法則，而常態曲線在統計學上之重要，蓋卽以此。至該公式所含各字母之意義，則

X ＝偶然變數

X_0 ＝偶然變數X之"希望數"〔卽X之算術平均數〕

σ ＝偶然變數X之標準差

π ＝圓周對直徑之比率＝3.1415926535……………

e ＝納氏對數之基數＝2.718281828459……………

Y ＝「欲使其偶然變數取X值」之"機率"

又設以

Y_0 ＝「欲使其偶然變數取其希望數值X_0」之機率，則常態機率法則，亦得寫如下式：

$$(2)\qquad Y=Y_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

常態機率法則之數學公式有四大特點，且分述之如次：

> 註一："通常狀態"一語，其意似頗模糊，由其字面觀之，每即意為一般事實之狀態。然此間所指"適合於偶然性之一般事實之狀態"也。

〔甲〕機率之數值，必在於零壹之間，故y之數值，亦應符合下列不等式：

$$0\leq Y\leq 1$$

或

$$(3)\qquad 0\leq Y_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}\leq 1$$

〔乙〕各機率之總和，當等於一，而偶然變數X旣未受任何限制，得爲$(-\infty, +\infty)$間任何一值。故其機率之總和，應等於一：

$$(4)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} YdX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}dX = 1$$

苟欲使其偶然變數X不出於$(X_1, -X_2)$之範圍，則其"總和機率"應等於

$$(5)\quad \int_{X_1}^{X_2} YdX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{X_1}^{X_2} e^{-\frac{(x-x)^2}{2\sigma^2}}dX < 1$$

〔丙〕若將$(X-X_0)$更以(X_0-X)，Y之數値不變。故常態機率法則應爲一"對稱函數"(Symmetrical function)，而常態曲線，自必爲一"對稱曲線"(Symmetrical curve)以縱線

$$X = X_0$$

爲"對稱軸"(Axe of symmetry)

若卽以此對稱軸爲"縱坐標軸，"卽令

$$X_0 = O$$

則常態機率法則又得變成下式：

$$(6)\qquad Y = Y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

倘再以σ爲單位，則更得簡單化之如次：

$$(7)\qquad Y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

此爲常態機率法則現時最通行之形式也。

但應注意此間所用字母X，Y之意義實與前不同 今

X＝離中差（即離其希望數之差數）

Y＝「欲使其離中差等於X之機率

〔丁〕由上第(7)式觀之，則X之數值愈大，Y之數值愈小換言之：即差數愈大，其得此差數之機率必愈微。當X之絕對數值而趨於無窮大時，Y漸趨於零，固不待言。即當X之絕對值等於四，五倍標準差時，Y之數值亦已甚小，而欲使差數X包含於$\pm4\sigma$間之機率，已幾及於一：

$$\int_{-4\sigma}^{+4\sigma}Y\,dX=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{4\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}dX$$

註二：亦有以$C=\sigma\sqrt{2}$爲單位 則常態機率法則將呈更簡單之形式如次：

$$Y=\frac{1}{C\sqrt{\pi}}e^{-\frac{X^2}{C^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-X^2}$$

$=2\times0.4999683$

$=0.9999366$

實際且竟可視同於一。是X之數值，按理雖能達諸無窮，而其實際"變距"（interval of variation），無妨有限。況於一般實際問題中，其變數之變距，概屬於有限，而罕爲無限者。故"無限變距之常態機率法則,"亦能應用於"有限變距之次數分配",卽賴其"機率積分"　H

$$(8)\qquad H_{(X)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-X}^{+X}e^{-\frac{x^2}{2}}dX$$

有非常迅速之收斂性（convergence）。

第二節：　常態機率法則之由來

欲說明常態機率法則之由來，肯須應用"二項展開式"（Binomial expansion）之方法，

茲且先將二項展開式略述如次：

設有一偶然事件 E （Evenement fortuit），其成功之機率P,其失敗之機率Q,，非成功卽失敗，　故

$Q+P=1$

今若重覆試驗之兩次（所謂重覆試驗者，應令其每次試驗不受以前試驗結果之任何影響，且每次成功與失敗之機率，各應永久不變。）則或能一再成功，或一再失敗，亦能成敗參半，而每格各有其機率焉：

Q^2＝兩次失敗之機率

$2PQ$ ＝一次失敗一次成功之機率

P^2＝兩次成功之機率

該三數適各爲$(Q+P)^2$之展開式$Q^2+2PQ+P^2$之各項。

若重覆試驗之三次，　則可得下列四格之一：

失敗三次

失敗兩次成功一次

失敗一次，成功兩次

成功三次

其每格之機率各爲

Q^3＝失敗三次之機率

$3PQ^2$＝失敗兩次成功一次之機率

$3P^2Q$ ＝失敗一次成力兩次之機率

P^3 ＝成功三次之機率

該四數又適為$(Q+P)^3$之展開式$Q^3+3PQ^2+3P^2Q+P^3$之各項。依此類推之。今若重覆試驗之n次，乃可得n+1種情形，

卽成功之次數可等於0.1,2,……(n−1),n　而每格之機率應各等於$Q^n, C^1_nPQ^{n-1}, C^2_nP^2Q^{n-2}, \cdots\cdots C_n^{n-1}P^{n-1}Q$, $C^n_nP.n$　該各數值又適為$(Q+P)^n$之展開式之各項：

$(Q+P)^n=Q^n+C^1_nPQ^{n-1}+C^2_nP^2Q^{n-2}+\cdots\cdots+C_n^{n-1}P^{n-1}Q+P^n$反之，於n次重覆試驗中，若欲求其成功k次之機率$\pi_k$卽祇須取$(Q+P)^n$之展開式之第k+1項，

$$(9)\quad \pi_k = C_n^k \cdot P^k \quad Q^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot P^k \quad Q^{n-k}$$

$$= \frac{n.(r-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{1.2.3.\cdots\cdots k} P^k Q^{n-k}$$

由是觀之，二項展開式，可直接應用於機率計算，可間接應用於統計學，殊甚重要焉。今旣明二項展開式之意義與應用，乃可使重覆試驗之次數n達無窮大，而求π_k之極限。

欲求π_k之數值，須計算下列諸累乘數：

$$n!=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-1)\times n$$

$$k! = 1_{\times}2_{\times}3_{\times}\cdots\cdots_{\times}(k-1)_{\times}k$$

$$(n-k)! = 1_{\times}2_{\times}3_{\times}\cdots\cdots_{\times}(n-k-1)_{\times}(n-k)$$

然當n之數值極大之際，該諸累乘數勢難用累乘法以求其準確之數值，而祇能按 Stirling 公式取其近似值：

$$(10) \qquad n! \longrightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}$$

藉此公式，即不難求得其π_k之極限。

茲設以

$$(11) \qquad \begin{cases} k = nP + d \\ n-k = nQ - d \end{cases}$$

經此變更以後，π_k之數值，即得寫如下式：

$$(12) \qquad \pi_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}P^{k}Q^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(nP+d)!(nQ-d)!}P^{nP+d}Q^{nQ-d}$$

當n趨於無窮大時，即可利用Stirling公式，因得

$$\pi_k = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\;P^{nP+d}Q^{nV-d}}{\left[(nP+d)^{nP+d+\frac{1}{2}}e^{-nP-d}\sqrt{2\pi}\right]\left[(nQ-d)^{nq-d+\frac{1}{2}}\right.}$$

$$e^{-nq+d}\sqrt{2\pi}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{N^{n+\frac{1}{2}}P^{nP+d}\ Q^{nQ-d}}{(nP+d)^{np+d+\frac{1}{2}}(nQ-d)^{nq-d+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi nPV}}\frac{(nP)^{np+d+\frac{1}{2}}(nQ)^{nq-d+\frac{1}{2}}}{(nP+D)^{np+d+\frac{1}{2}}(nQ-D)^{nq-d+\frac{1}{2}}}$$

或

$$(13)\ \pi_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi nPQ}}\left[1+\frac{D}{nP}\right]^{-(np+d+\frac{1}{2})}\left[1-\frac{D}{nQ}\right]^{-(nQ-d+\frac{1}{2})}$$

欲求該π_k之極限，亦得間接先求其對數（以e爲對數基數）之極限、

$$(14)\qquad \log\pi_k=-\tfrac{1}{2}\log(2\pi nPQ)$$
$$-(nP+d+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{d}{nP}\right)$$
$$-(nQ-d+\tfrac{1}{2})\log\left(1-\frac{d}{nQ}\right)$$

令n既趨極大，則苟非P（或Q）甚極小，則$\frac{d}{nP}$，$\frac{d}{nQ}$，自必小於一，因得利用對數函數之展開式：

$$\log\left(1+\frac{d}{nP}\right)=\frac{d}{nP}-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{nP}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{nP}\right)^3-\cdots\cdots$$

$$\log\left(1-\frac{d}{nQ}\right)=-\frac{d}{nQ}-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{nQ}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{d}{nQ}\right)^3-\cdots\cdots$$

設以

$$A=(nP+d+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{d}{nP}\right)$$

$$=(nP+d+\tfrac{1}{2})\left[\frac{d}{nP}-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{nP}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{nP}\right)^3-\cdots\right]$$

$$B=(nQ-d+\tfrac{1}{2})\log\left(1-\frac{d}{nQ}\right)$$

$$=(nQ-d+\tfrac{1}{2})\left[-\frac{d}{nQ}-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{nQ}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{d}{nQ}\right)-\cdots\right]$$

是則

$$\log\pi_k=-(A+B)-\tfrac{1}{2}\log(2\pi nPQ)$$

乃欲求$\log\pi_k$之極限，須先求出(A+B)之極限。

欲求(A+B)之極限，得n以爲基本無窮大"(infiniment prand principai)而求其"基本部份"(partie principale)，欲求該基本部分，應先確定d之"無窮之級次"(ordre infini-esimal)，於此，須又應用一極週數學定理，

(即名"Bernoulli定理"。根據該定理，則當n趨於無窮大時，離中差d之無窮級次為0，且其離中差d之希望數等於零(即k之希望數等於nP)並及其標準差σ等於$\sqrt{nPQ}$：

$$(16)\begin{cases} d_0 = 0 \\ k_0 = nP \\ \sigma = \sqrt{nPQ} \end{cases}$$

據此 即不難求出(A+B)之基本部份。(算式從略)

$$(17)\begin{cases} n \longrightarrow \infty \\ A+B \longrightarrow \dfrac{d^2}{2nPQ} \end{cases}$$

今既求得A+B之基求部分$\left(\text{等於}\dfrac{d^2}{2nQP}\right)$，即可得log π_k之極限。

$$(18)\ \lim_{n\to\infty}\left(\log \pi_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left[-(A+B)-\tfrac{1}{2}\log(2\pi nPQ)\right]$$
$$=-\frac{d^2}{2nPQ}-\tfrac{1}{2}\log(2\pi nPQ)$$

乃即得其π_k之極限。

$$(19)\begin{cases} n \longrightarrow \infty \\ \pi_k \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2\pi nPQ}}e^{-\frac{d^2}{2nPQ}} \end{cases}$$

或按(11)(16)兩式又得寫如下式：

$$\pi_k \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi NPQ}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2nPQ}}$$

$$(20)\quad \pi_k \longrightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}}$$

今若再改以σ為單位　而令

$$X=\frac{d}{\sigma}$$

則機率π_k之極限值又得寫如下式：

$$(21)\quad \pi_k \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

該極限法則，即所謂"常態機率法則"者是也，」今將其曲線

（即常態曲線亦名"鐘形曲線"）圖示如下

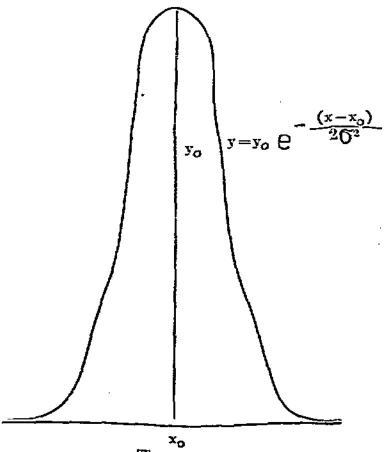


圖　一

第三節： 常態曲線之配合

設次數曲線之狀態類似鐘形，則即可試用常態曲線配合之。常態公式殊爲簡單，故其配合方法亦甚易易。蓋常態公式僅含兩個常數，且該兩常數卽係算術平均數x_0與標準差σ，故配合之步驟，祇須將算術平均數x_0與標準差σ先行算就，而後將各變量x變爲標準制（即以算術平均數爲原點，以標準差爲單位）下之度量z：

$$z=\frac{x-x_0}{\sigma}$$

乃欲使新變量z介於z_1, z_2間之理論機率$P_{(z_1,z_2)}$

[或其理論次數$F_{(z_1,z_2)}=NP_{(z_1,z_2)}$]即可依下式計算：

$$P_{(z_1,z_2)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2}e^{-\frac{z^2}{2}}d_z$$

該數值可由常態差誤公式積分表（見附錄常態曲線之面積及縱距表）查算之(三)因即得推求其理論次數而持與實際次數相比較，卒確定其配合公式是否適合。茲且舉例以明之：

註三：各組理論次數亦得以常態曲線之最高縱距爲單位而按比例法取其中值 z（仍用標準制）相應對之縱距

設由常態曲線之縱距表（以最高縱距爲單位）查得其 z 相應對之縱距爲 y 則其理論次數卽可按下式計算之

$$理論次數=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}y$$

$$=\frac{N}{\sigma(2.5066)}$$

試就下列身長統計（錄自Julin:Principes de Statistique第631頁）求其常態配合曲線，其配合步驟可：

（一）確定其算術平均數x_0與標準差σ（見表一）

（二）將各組組限換算爲標準制下之度量 z（見表二第二列）

$$z=\frac{x-x_0}{\sigma}$$

（三）由常態曲線之面積表查得由原點至各該組限間之總和機率 $P_{(z,0)}$ 或 $P_{(0,z)}$〔見表二第三第四兩列〕

（四）由總和機率 $P_{(z,0)}$ 或 $P_{(0,z)}$ 以推求其各組之理論機率 $P_{(z_i,z_i+1)}$〔見表二第五列〕

$$P_{(z_i,z_i+1)}=P_{(0,z_i+1)}-P_{(0,z_i)} \quad \text{當} z_i+1>z_i>0$$

$$P_{(z_i,z_i+1)}=P_{(z_i,0)}+P_{(0,z_i+1)} \quad \text{當} z_i+1>0>z_i$$

$$P_{(z_i,z_i+1)}=P_{(z_i,0)}-P_{(z_i+1,0)} \quad \text{當} 0>z_i+1>z_i$$

（五）由理論機率 $P_{(z_i,z_i+1)}$ 即可推求其各組之理論數次

$F_{(z_i,z_i+1)}$〔見表二第六列〕

$$F_{(z_i,z_i+1)}=NP_{(z_i,z_i+1)}$$

既求得其各組之理論次數，即可持與實際次數相比較而觀察其是否相適合，但亦得進而利用「克」方測驗法以確定其適合度，因亦得續作下列諸步驟：

（六）計算各組理論次數 $F_{(a_i,b_i)}$〔a_i，b_i爲第i組之組限〕與實際次數 f_i 之差數之平方而各除以理論次數〔見表三第四第五第六三列〕

$$\frac{[f_i-F_{(a_i,b_i)}]^2}{F_{(a_i,b_i)}}=\frac{(\text{實際次數}-\text{理論次數})^2}{\text{理論次數}}$$

（七）上得各值之總和即為「克」方(X^2)之數值〔見表三第六列總計欄〕

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{[f_i - F_{(a_i, b_i)}]^2}{F_{(a_i, b_i)}}$$

k ＝次數數列之組數

（八）取次數數列之組數k與配合公式所含常數之個數c之差數為自由度 S

$$S = k - c$$

（九）既知其自由度(degrees of freedom)及「克」方之數值，即可由「克」方測驗機率表（見附錄費雪氏克方測驗用表）以查得其配合公式之適合度。

在本節所舉之實例，次數數列之組數凡二十一組，常態公式含有兩個常數（但亦有視y_0為一常數而認為常態公式含有三個常數者），故其自由度為十九而由「克」方測驗機率表即可查得其與 $X^2 = 24.43$ 相應對之機率約為16%。按費雪氏標準凡機率在 5 %以上者配合公式即有適合之可能。惟就該機率數值0.16言之，則常態機率法則之適合度亦不甚高，換言之，即該次數數列所有各人身長之差異未必純屬於偶然性之差異。

表一： 英國成年男人身長統計

身長(英吋)	人數 f	x	f x	f x²
56.5—57.5	2	—10	— 20	200
57.5—58.5	4	— 9	— 36	324
58.5—59.5	14	— 8	— 112	896
59.5—60.5	41	— 7	— 287	2009
60.5—61.5	83	— 6	— 498	2988
61.5—62.5	169	— 5	— 845	4225
62.5—63.5	394	— 4	—1576	6304
63.5—64.5	669	— 3	—2007	6021
64.5—65.5	990	— 2	—1980	3960
65.5—66.5	1223	— 1	—1223	1223
66.5—67.5	1329	0	0	0
67.5—68.5	1230	1	1230	1230
68.5—69.5	1063	2	2126	4225
69.5—70.5	646	3	1938	5814
70.5—71.5	392	4	1568	2672
71.5—72.5	202	5	1010	5050
72..—73.5	79	6	474	2844
73.5—74.5	32	7	224	1568
74.5—76.5	16	8	128	1024
75.5—76.5	5	9	45	405
76,5—77.7	2	10	20	200
總計	8585		179	56809

$$x_o = 67 + \frac{179}{8586} = 67.02$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{56809}{8585} - \left(\frac{1792}{8585}\right)}$$

$$= 2.57$$

表二： 英國成年男人身長統計

組限	z	$P_{(z,0)}$	$P_{(0,z)}$	$P_{(z_i,z_i+1)}$	$F_{(z_i,z_i+1)}$	f	身長
56.5	−4.09	0.5000					
				0.0001	1	2	57
57.5	−3.71	0.4999					
				0.0004	2	4	58
58.5	−3.32	0.4995					
				0.0012	10	14	59
59.5	−2.93	0.4983					
				0.0038	33	41	60
60.5	−2.54	0.4945					
				0.0103	88	83	61
61.5	−2.15	0.4842					
				0.0234	201	169	62
62.5	−1.76	0.4608					
				0.0461	396	394	63
63.5	−1.37	0.4147					
				0.0782	671	669	64
64.5	−0.98	0.3365					
				0.1141	980	990	65
65.5	−0.59	0.2224					
				0.1431	1229	1223	66
66.5	−0.20	0.0793					
				0.1546	1327	1329	67
67.5	0.19		0.0753				
				0.1437	1234	1230	68
68.5	0.58		0.2190				
				0.1150	987	1063	69
69.5	0.97		0.3340				
				0.0775	665	646	70
70.5	1.35		0.4115				
				0.0476	409	392	71
71.5	1.74		0.4591				
				0.0243	209	202	72
72.5	2.13		0.4834				
				0.0107	92	79	73
73.5	2.52		0.4941				
				0.0041	35	32	74
74.5	2.91		0.4982				
				0.0013	11	16	75
75.5	3.30		0.4995				
				0.0004	3	5	76
76.5	3.69		0.4999				
				0.0001	1	2	77
77.5	4.08		0.5000				
總計				1.0000	8585	8585	
一	二	三	四	五	六	七	八

表三： 英國成年男子身長統計

身長（英寸）	人數 F	理論次數 f	f－F	(f－F)²	$\frac{(f-F)^2}{F}$
57	2	1	1	1	1.00
58	4	3	1	1	0.33
59	14	10	4	16	1.60
60	41	33	8	64	1.94
61	83	88	－5	25	0.28
62	169	201	－32	1024	5.09
63	394	396	－2	4	0.01
64	669	671	－2	4	0.01
65	990	980	10	100	0.10
66	1223	1229	－6	36	0.03
67	1329	1327	2	4	0.00
68	1230	1234	－4	16	0.01
69	1063	987	76	5776	5.86
70	646	664	19	361	0.54
71	392	409	－17	289	0.71
72	202	202	7	49	0.23
73	79	9,	－13	169	1.84
74	32	35	－3	9	0.26
75	16	11	5	25	2.27
76	5	3	2	4	1.33
77	2	1	1	1	1.00
總計	8585	8585			24.43
一	二	三	四	五	六

第四節： 兩個變數之常態曲面

當變量之個數不止一個，則其次數分配即形成一曲面。常態曲面之研究，即欲推求多個變數之偶然性差誤之次數分配狀態。茲爲便於說明起見，且先就兩個變數之常態曲面加以敍述。

設使x,y爲兩偶然變數〔各以其希望數爲原點〕，則其機率，（或次數）函數得以下式表示之：

$$z=P_{(x,y)}$$

乃亦得在純由偶然性差誤條件之下，以確定該機率函數之數學公式，即：„常態曲面公式'。

設u,V,w爲三個獨立偶然變數（亦各以其希望數爲原點），假定偶然變數x,y得受其公同因子u之影響如下式所示者：

$$(22)\begin{cases} x=u+V \\ y=u+w \end{cases}$$

設使u,V,w之機率分配係屬常態分配，則機率 $P_{(x,y)}$

之分配亦然。欲使$x=x_t, y=y_t$，即須使$u=u_t, V=V_t w=w_t$。就機率之關係言，u, V, w 既互爲獨立偶然變數，則欲使$x=x_t, y=y_t$（亦即使$u=u, V=V_t, w=w_t$）之機率應等於（按積合機率定理）

$$(23)\quad \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sigma_u\sigma_v\sigma_w}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2_t}{\sigma^2 u}+\frac{V^2_t}{\sigma^2 v}+\frac{W^2}{\sigma^2 w}\right)}$$

式中$\sigma u, \sigma v, \sigma w$各表示$u, V, w$之標準差

設由該式消去其公同因子u，即得其機率$P_{(x,y)}$。至消除其u之方法，則因u爲任何數值，則若取其由$(-\infty)$至$(+\infty)$間之總和機率即可將u消去而得機率$P_{(x,y)}$：

$$(24)\quad P_{(x,y)}=\frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sigma_u\sigma_v\sigma_w}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{\sigma^2 u}+\frac{v^2}{\sigma^2 v}+\frac{w^2}{\sigma^2 w}\right]}du$$

然按(22)式

$$V=x-u$$

$$w=y-u$$

茲因u, V, w互不相關，又得（按乘積之希望數定理）

$$E(uV)=0$$

$$E(uw)=0$$

$$E(Vw)=0$$

則

$$E(x^2)=E(u^2)+E(V^2)$$

$$E(y^2)=E(u^2)+E(w^2)$$

$$E(xy)=E(u^2)$$

即

$$(25)\begin{cases}\sigma_x^2=\sigma_u^2+\sigma_v^2\\ \sigma_y^2=\sigma_u^2+\sigma_w^2\\ r\sigma_x\sigma_y=\sigma_u^2\end{cases}$$

式中 r 表示 x 與 y 之相關係數。

藉該(25)諸等式，卽可將(24)式內之V，w，σu，σv，σw消去而改寫爲X，y，σ_x，σ_y，r 之函數。蓋得以

$$\frac{u^2}{\sigma_u^2}+\frac{(x-u)^2}{\sigma_v^2}+\frac{(y-u)^2}{\sigma_w^2}=A(u-Bx-cy)^2+Dx^2$$

$$-2Exy+Ey^2$$

卽令

$$
(26)\begin{cases}
A=\dfrac{1}{\sigma_u^2}+\dfrac{1}{\sigma_v^2}+\dfrac{1}{\sigma_w^2}\\[2ex]
A\,B=\dfrac{1}{\sigma_v^2}=AB^2+D\\[2ex]
A\,C=\dfrac{1}{\sigma_w^2}AC^2+F\\[2ex]
O=A\,BC-E
\end{cases}
$$

或

$$
(27)\begin{cases}
A=\dfrac{\sigma_u^2\sigma_v^2+\sigma_v^2\sigma_w^2+\sigma_w^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2\ \sigma_v^2\ \sigma_w^2}\\[3ex]
D=\dfrac{\sigma_u^2+\sigma_w^2}{\sigma_u^2\sigma_v^2+\sigma_v^2\sigma_w^2+\sigma_w^2\sigma_u^2}\\[3ex]
E=\dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2\sigma_v^2+\sigma_v^2\sigma_w^2+\sigma_w^2\sigma_u^2}\\[3ex]
F=\dfrac{\sigma_u^2+\sigma_v^2}{\sigma_u^2\sigma_v^2+\sigma_v^2\sigma_w^2+\sigma_w^2\sigma_u^2}
\end{cases}
$$

。

設將(25)式諸值代入，卽得

$$(28)\begin{cases} D=\dfrac{1}{\sigma_x^2(1-r^2)} \\ E=\dfrac{r}{\sigma_x\sigma_y(1-r^2)} \\ F=\dfrac{1}{\sigma_y^2(1-r^2)} \end{cases}$$

是則上述(24)式亦得改寫如次：

$$(29)\ P_{(x,y)}=\frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sigma_u\sigma_v\sigma_w}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{\sigma_u^2}+\frac{v^2}{\sigma_v^2}+\frac{w^2}{\sigma_w^2}\right]}du$$

$$=\frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sigma_u\sigma_v\sigma_w}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{A}{2}(u-Bx-Cy)^2}du$$

然按有定積分計算

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A}{2}\left[u-Bx-Cy\right]^2} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2A}}$$

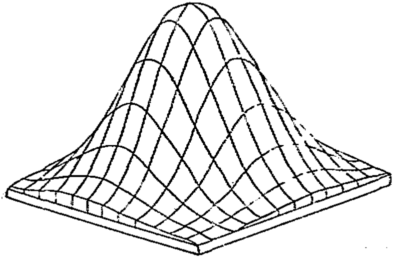
$$= \frac{\sigma_u \sigma_v \sigma_w}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}$$

代入上式，即得將(29)式簡化如次：

$$(30)\quad P_{(x,y)} = \frac{1}{(2\pi)\ \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}}$$

$$e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{x\ y}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

此即常態曲面之數學公式，其形狀概如下圖（略去其邊緣）



設使y等於一常數y_1，則卽得確定其從y_1的x之機率分配〔所得曲線卽一平行於xoz平面切常態曲面之剖面〕

該局部機率分配仍為一常態分配，蓋

$$P_{(x,y_1)}=\frac{1}{(2\pi)\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{xy_1}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y_1^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

$$=\frac{e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma_y^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_x^2}\left[x-r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y_1\right]^2}}{(2\pi)\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}$$

或

$$P_{(x,y_1)}=K_1e^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_x^2}\left[x-r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y_1\right]^2}$$

式中K_1為一常數，故$P_{(x,y_1)}$已顯然為一常態曲線之數學公式，且得藉以推求其從y_1的x之局部平均數$x_o^{(j)}$〔各以希望數原點〕

$$x_o^{(j)}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y_j$$

或 $$x_o^{(j)}-x_o=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y_j-y_o)$$

則x與y之關係實亦一直綫相關。

同理，其從x_i的y之機率分配亦爲一常態分配如下

$$P_{(x_i,y)}=K_i\rho^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_y^2}\left[y-\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x_i\right]^2}$$

K_i亦爲一常數

$$K_i=\frac{e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma_x^2}}}{(2\pi)\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}$$

而其局部平均數函數亦爲一次方程式(各以希望數爲原點)

$$y_o^{(i)}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x_i$$

或 $$y_o^{(i)}-y_o=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}r(x_i-x_o)$$

至若當z等於一常數z_k，則x與y之關係卽當適合下式：

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{x\ y}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^1} = C_k$$

C_k 自亦為一常數。此式乃一羣同心且相似之橢圓形，（名曰"等高線"），即係其機率相等點之軌跡。

第十章 抽樣概論

第一節 概論

研究統計學術或從事統計工作者，於分析某種現象時，每感由於理論或事實上之困難，無從就其所包括之每一個個體逐一加以測驗。如研究國民之身長，吾人常因人力、時間之限制，萬難就每一人民，一一加以測量。在此種情形下，吾人僅能設法測量其中之一部份，而以其結果代表全體。此種如何以一部份之結果為全體之代表，實為抽樣理論(Theory of Sampling)之起源。

一切個體（或樣本）之抽取，既先必有其所屬之全體，故吾人欲說明抽樣之理論及其意義，不能不先明瞭全體之特質。茲分別略述如下：

一、全體之特質——一切現象之全體，根據其所包括個體之數量，或其表現之徵性，可大別為二類：

（1）有限全體與無限全體(Finite aud infinite universe)：前者係指含有有限個體之全體，如城市之居民是；後者係指含有無限個體之全體，如大氣中不同地位之氣壓是。

在一般情形之下，吾人所欲研究之全體，即使爲有限，而其所含個體，其數量有時亦幾近於無限；且通常無限全體之討論常較有限全體爲輕易，故吾人爲研究之便利計，可將有限全體視爲無限，甚至在某種情形之下，吾人可以忽略全體之爲無限與否。如關於天空星球之研究，關於一噸小麥可能容量之測量，即其實例。

（2）實在全體與假設全體(Existent and hypothetical universe)：前者係指全體之觀念乃基於具體的事物；後者係指全體之觀念乃基於假設之想像。設有骰子一顆，可以擲至無限次數而不致耗損，如將其每次擲出之結果視爲一個個體，則此骰子所有各次可能結果即爲一種假設全體。蓋吾人既可將其擲至無限次數，永無止境，是吾人無論將其拋擲若干次數，終僅能取得其全體之一部份個體，而永不能取得全體之全部個體，故其全體僅基於想像，並非實際存在。

惟吾人有應注意者，任何全體均可視爲其他範圍更大全體之一個個體；如重慶人口可視爲全國人口之一個個體，前者稱爲擴大全體（universe of univdrses）後者稱爲部份全體(Subuniverse)基於此種理由，任何實在全體均可視爲假設擴

大全體之部份全體。

二、抽樣理論之基礎——全體之特質，約如上述。由全體中實施抽樣之主要問題，厥爲樣本(Ssmple)之選取。所謂樣本即就所欲研究之現象之全體中，選出一部份個體，此一部份個體均必須爲全體中之一份子。由經驗或直覺之啓示，抽樣所取樣本之足以代表全體徵性，幾已成爲一種共同之信念；例如糧食商人購買稻谷時，常任意取其一部份作爲判斷稻谷品質之標準，根據其歷來之經驗，糧食商人有絕對理由可以相信此一部份樣品必足以代表全體，而不致於發生錯誤之結果。再則，所取樣本之數量愈多，則其足以顯示原始全體之徵性者亦愈大，亦已成爲另一共同之信念。

基於此兩種信念，吾人可知抽樣理論實有其邏輯基礎，而且爲一種有系統之數量測量方法。

三、抽樣之意義——據上所述，可知抽樣之主要目的端在以最小之力量，獲得對於原始全體之認識，因此吾人必須考慮所需認識之問題爲何？

吾人所需認識者常爲全體之變性，舉例言之，當吾人選取一國人口之樣本時，吾人並非注意每一個人之體質，如身

長或體重，甚或身長與體重之相關等，而爲注意其由樣本所得之次數分配是否類同於原始全體。此項目的之最大理想在使次數分配適合於若干數學形式，惟吾人有應注意者，卽此種種數學形式不常適用以代表原始全體，或所得樣本亦不易於十分適合，在此種情形下，吾人必須試求原始全體之若干常數之估計數值，由常數之估計數值以認識全體之變性。此種常數可包括平均數、相差度、偏斜度以及各次動數；在多變性之全體並可包括各種完全相關與部份相關係數。

除上述抽樣之重要目的外，其另一功用則在應用機率以確定所得估計數值之可信程度；如機率無法推求，亦可依據直覺或前人所得經驗加以確定，藉以觀察吾人估計所得數值之準確性；換言之，亦卽試驗自樣本估計所得數字與全體估計所得數字兩者間可能差異之限度。

第二節　抽樣之種類及其徵性

欲由原始全體中抽取一部份個體，並以此一部份個體之測驗結果，以代表原始全體之情形，則對於抽取之方法，自不能不有相當之考慮。通常所採用之抽樣方法，約有下述三

種：

（1）隨機抽取所需數量之個體，亦稱爲隨機抽樣（Random Sampling）

（2）依照預定原則選取所需數量之個體，亦稱爲選擇抽樣（Purposive sampling）；或代表抽樣（Representative Sampling）；

（3）同時兼採以上兩種方法，一種爲混合抽樣（Mixed Sampling）或分類抽樣（Stratified Ssmpling）。

例如用抽樣方法以研究某地居民之所得：吾人可從該地居民收入普查中，隨機抽取所需數量之個體，加以研究，此爲隨機抽樣；如已知居民中各不同年齡組之平均所得，吾人亦可據此選取其所得與各組平均所得相近之個體，此爲選擇抽樣；吾人更可就不同年齡組中隨機抽取所需數量之個體，此爲混合抽樣。

上述三種抽樣要皆不能完全避免由於種種原因（如工具之不健全、研究者個性之偏強、技術之不妥善等）而發生之偏誤；此種偏誤，嚴格言之，固無法使其完全消除，但如吾人於進行抽樣時，能隨時加以適當之注意，則亦未始不可使

之減低至相當微小之程度。茲試簡述各種抽樣之徵性，俾實地抽樣時，知所取擇，以增加抽樣結果之可靠程度。

一、隨機抽樣——隨機抽樣之基本原則必須使全體中之每一個個體，均有同樣被抽取之機會。由此所引起之首應研討之問題，厥爲吾人如何可以獲得隨機樣本(Random Sample)！表面觀之，用任何純粹偶然方法所抽取之樣本似均爲隨機樣本，但實際上則並不一定。茲試舉例以明之：

例一：設吾人欲根據某地商業登記簿以取得該地商人之樣本。其抽取方法，可將登記簿機續任意翻閱，而錄其首先發見之姓名以爲樣本。此種方法初觀之固似完全合乎隨機抽樣之原則，但實際上則仍有發生錯誤之可能，因吾人所翻閱之商業登記簿，如經使用已久，則其中有若干頁可能爲日常所習用者，故實際上比較易於翻得，於是吾人所取得之樣本、可能多屬於載在此習用各頁內之商人，再則吾人之目力亦常易爲若干特殊姓名所吸引。基於此二原因，是登記簿內商人之被抽取機會並不相等，換言之，所得之樣本實際上並非隨機樣本：

例二：英國洛桑姆斯台德試驗所(Rothamsted Experime

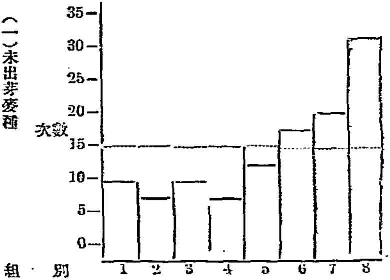
ntal Station）曾以八種小麥麥種，應用隨機抽樣，以測量其高度。其中有二種係由研究者運用其目力隨機抽取；此項試驗係將未出芽麥種及已出芽麥種個別分類研究。將此二種抽取結果加以混合，並按其高度之大小分為八組，列成分組次數表如下：

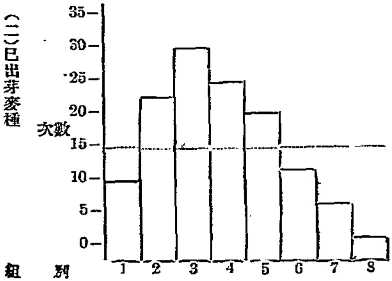
表一　麥種高度分組次數表

研究對象	按高度次序由小而大之組別與次數								總計	每組之希望次數
	1	2	3	4	5	6	7	8		
未出芽麥種	9	7	11	8	11	18	21	31	116	14.5
已出芽麥種	9	19	27	23	15	10	5	4	112	14.0

根據表一實驗抽取所得之資料，可繪成下圖：

圖一　麥種高度次數分配圖





如運用目力隨機抽取合乎眞正隨機抽樣，則各組次數應趨一致，當如圖一虛線所示。然根據實際次數分配，則實際結果與希望結果相差甚遠。由圖一可知研究者於抽取未出芽麥種時，有極度偏於較高種子之傾向；而抽取已出芽麥種時，則有極度偏於適中種子之傾向。

由上二例，可知一切人爲之事實，常易使隨機抽取之樣本發生偏誤，蓋人類之心理作用，與其不健全之工具，可使其抽取樣本時，脫離眞正隨機抽樣之傾向而不自覺。由此吾人可以斷言，如欲隨機抽樣之結果準確，必須消除所有人爲之因素。

二、選擇抽樣— 如抽取樣本時，參與研究者之主觀意見，則結果難免發生偏誤之危險，前已說明。選擇樣本(Purposive Sample)既係根據研究者主觀意見所取得，是此種抽樣實有其甚大之缺點。其所以仍不失其在抽樣方法中之地位者，則因在某種情形之下，亦自有其優點在。茲試以之與隨機抽樣作一比較之檢討。至於選擇抽樣之可恃與否？則大半賴於研究對象之條件，且亦基於研究者主觀意見之如何，吾人實難以簡單之方式加以說明。

（1）隨機樣本可能與全體之適中個體相差甚遠，而選擇樣本則反是。

（2）隨機抽取之樣本愈多，則此種樣本，根據偏誤原則，愈足以代表原始全體，而選擇樣本則不能。

（3）隨機樣本類能給予吾人關於整個全體之知識，而選擇樣本則僅能顯示全體之適中徵性。

例如吾人自一堆蘿蔔中抽取其二個或三個爲樣本，如爲隨機抽取，則結果可能取得極大或極小者，但如爲選擇抽取，則吾人於詳加觀察後，必能選擇其大小、輕重、形狀及其他所可考慮之條件，均合乎全體中之適中性者。惟此種適中個體，吾人僅能得知蘿蔔之平均重量，而對於重量之變度或離散度則不易得知。

在純粹的隨機抽樣與選擇抽樣兩者之中，吾人究應以採用何種爲妥？一般言之，自當衡量兩者之不定性，前者之不定性由於機會之流動，後者之不定性則由於偏誤之發生，故吾人有時常用混合抽樣以資矯正。

三、混合抽樣亦即同時兼採隨機抽樣與選擇抽樣二者之謂，其優點自爲得以取二者之長而捨其短。其抽樣之重要原

則在一方面將原始全體分爲若干類，另一方面再就每類中抽取隨機樣本，例如用抽樣方法研究一國之國民收入，吾人可先按國民收入之多寡分爲若干等級，如「500元以下」，「500元至 1000 元」等等，而後就每一等級中隨機抽取所需數量之樣本，如是所得者爲混合樣本。

三種方法雖有如上述，但實際應用上並非如是之簡單，且每一種科學或企業均有其特殊抽樣問題，吾人亦難對每一方面均作詳細之討論，惟爲更能明瞭抽樣方法之運用，願再舉一實例言之。

英國之製糖業者，在購買提取糖份之蘿蔔時，常視蘿蔔含糖之成份及其淨重量而給價，故必須求得：（1）蘿蔔洗淨後之淨重量若干？（2）含糖量若干？基於此二問題，製糖商人所用以抽樣之程序分爲四步：

第一步：應用隨機抽樣，任取一袋蘿蔔，先稱其粗重，然後去袋加以洗滌，並再加權衡，以得淨重，即以淨重與粗重之相差比率計算廢料所佔之成份，並據以估計全體中廢料所佔之成份。

第二步：應用選擇抽樣，先將根據第一步所得之樣本，

按其形體大小，順次排列，然後就其中抽取若干形體適中之蘿蔔為次一樣本。

第三步：應用混合抽樣，就次一樣本中之每一蘿蔔各取一薄片；惟此有應注意者，即蘿蔔中糖粉之分配雖非絕對均勻，但大致與其中心軸對稱，故切取蘿蔔，必須有適當之方法，其法係將蘿蔔自其粗之一端至其細之一端切成對稱之兩半，每半再各如法割切，或如此繼續為之以至若干次。蓋如上之切取乃基於已知糖粉之分配，而能使其各部份有同等被取之機會也。

第四步：應用隨機抽樣，將上一步驟切得之薄片搗碎混合後，分為四部份，然後任取其一部份，就其中取出 26 克(Gram)之重量送廠方試驗，再用同一方法，另取一部份送產方代表試驗，即以雙方試驗所得結果，決定蘿蔔之含糖成份。

在上述四次抽樣中，二次為隨機抽樣，一次選擇抽樣，一次為混合抽樣，共經此四次抽樣以取得所需之結果。由此可知在同一試驗內，吾人亦可應用各種不同種類之抽樣。

第三節　實地隨機抽樣之方法

選擇抽樣大半視乎研究對象之條件及研究者主觀意見而定，實難舉一例以概其餘，混合抽樣既至選擇抽樣與隨機抽樣之混合應用，故茲專以隨機抽樣為範圍，說明其實地進行抽樣之一般方法。

隨機樣本之實地取得，須視全體之性質及其範圍大小而定，因適合於較小全體之方法並不一定適合於較大之全體，而由假設全體中抽取樣本更有其特殊之微性與困難。茲分別說明如下：

一、雛形全體之應用——隨機抽樣之準則乃使全體中每一個個體被抽取之機會均為相等，因此吾人首應考慮者，即必須使抽取之方法與全體之性質無關，如此始有獲得足以包括全體中各種特質之隨機樣本之可能，否則全體中不具備某種特質之個體即無被抽取之機會。茲試舉例加以說明：

設吾人欲抽取某街居民，吾人可就本街選擇若干房屋，而以其中之居民為樣本。如本街房屋之排列並無一定規律，則吾人定可假定各種不同性質之家庭，如人口多寡，收入豐

舖等等，並非依照一定之間隔分配，因此吾人可每隔十屋抽取一屋爲樣本，此種方法既未考慮全體之性質，故其抽取之結果必可爲隨機樣本。然如有特殊情形，例如本街房屋乃分爲每十屋一段，分別爲其他支路所截開者，如此每隔十屋抽取一屋，則結果均爲沿邊之屋，而可能均爲店鋪，由此所得，顯然不合於隨機樣本之條件。

爲避免以上之偏誤，吾人可以借助於一種假設的雛形全體，所謂雛形全體，即以紙片代替吾人所須抽取之全體中之每一個個體，由於紙片與全體之性質毫無關係，故在一般情形之下，可有充分理由信任由此所得之樣本爲隨機樣本。上例房屋之抽取，如應用雛形全體，吾人可將本街之每一房屋各給予一號，並各分別書於同等大小、厚薄、形狀之紙片上，加以混淆，然後就其中抽取一部份。如此抽取結果，除非有極特殊情形——如所用墨水富有黏性，使較大號數不易抽出——自足以代表全體無疑。普通搖彩抽獎所用者，即係此法。

二、數字方法之應用——如原始全體所包括之個體過多，則構成雛形全體，與其將全部混淆，事實上決非輕易，爲

補救此種紙片方法之困難，吾人可另用一種數字之方法(Numerical method)。

設吾人以星球為全體，而研究其一種抽樣之方法：吾人可以經緯度為抽樣標準，抽取落在若干經緯度上之星球，如此吾人所需之樣本為若干經緯度之配合數字。最粗率之方法，可根據世界地圖內之地名索引，任意抽取若干地名之經緯數字。惟此種方法之非健全，則極顯然，蓋地圖內所列舉之地名，大多數係表示人烟稠密之區域，其所得結果可能集中若干地點，而對於人口稀少，地位並非重要之屬於兩極海洋各經緯度之星球，則少有被抽取之機會；故較精細之方法，可根據統計表冊，於其每頁內任意抽取若干字，以組成一組，即作為經緯度之代表數字。例如吾人規定於統計表冊之每頁內抽取其各行之第五數字為準，設定由此所得之首十數字為7,0,4,7,9,6,8,2,9,1，如此則吾人所得之星球，其緯度應屬於70,47,9，經度應屬於68°29·1°。

此外鐵貝德氏(L.H.C.Tippt)曾編製一種隨機抽樣數字表(Tableo ef Random Sam, Plingnumdse)，允為應用數字方法之重要工具。其表係由鐵貝德氏自某種普查報告中取出41

600,個數字，以其中4個數字為一組加以劃分，共得10，400組數字，組成一種數字表。茲將其開首40組之數字列下，以示一般。

2952	6641	3992	9792	7979	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2370	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7691
0560	5246	1112	6107	6098	8126	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

上列數字均屬偶然被取，其爲隨機所得，當屬毫無疑問。茲再列舉一例，藉以窺知其應用：試由下表所列8585人之全體中抽取十人爲樣本。

表二　成年男子體高次數分配表

體高(吋)	次數	累積次數	體高(吋)	次數	累積次數
57—58	2	2	68—69	1230	6148
58—59	4	6	99—70	1063	7211
59—60	14	20	70—71	646	7857
60—61	41	61	71—72	392	8249

61—62	83	144	72—73	202	8451
62—63	169	313	73—74	79	8530
63—64	394	707	74—75	32	8562
64—65	669	1376	75—76	16	8578
65—66	990	2366	76—77	5	8583
66—67	1223	3589	77—78	2	8558
67—68	1329	4918			

吾人首應將8585人依次給予一個號數計爲0001至8585。抽取十人卽就0001至8585各號數中取出其十數，抽取之法，可翻開隨機抽樣數字表之任何一頁，而取其開首之不大於8585者十組數字爲代表（當然亦可採其他方式如倒數不大於8585者之首十組數字），設吾人所翻得者卽爲載有上列四十組數字之一頁，則吾人所得之十組數字爲：

2052，6641，3992，7979，5911，3170，5624，4167，1515，1596。

復設吾人對於8585人之號數係按其身長之次序由矮而高依次排定，則由表二之累積次數可知第一樣本(2052)屬於「66——67」組，第二樣本(6641)屬於「69——70」組，依此

類推，而得十人之組別如下：

66——67，69——70，67——68，71——72，68——69，

66——67，68——69，67——68，65——66，65——66。

如以各組中點分別代表各組內每人之體高，則此十人之平均體高爲：

$$M=\frac{1}{10}(66.5+69.5\cdots\cdots+65.5)=67.7$$

試根據表二，以各組次數分別乘其組中點，再相加而以各組次數和除之，以求全體成年男子之平均體高，則此平均體高之確實數值爲：

$$M=67.52$$

是抽樣所得之97、7與確實數值97、52之差甚微，尚不及百分之0、3。

三、無限全體之抽樣方法——上所討論，均僅適用於有限全體，如全體包括無限個體，或所包括之個體數量極大時，則必須另採其他方法。設有麵粉一袋，如欲抽取其隨機樣本，吾人實或無從記取其所包括之數量，亦無從限定若干分子加以測驗。可能之方法有二：一爲將麵粉分成若干小袋，

例如每兩一袋，然後就其中抽取若干小袋爲樣本；二爲將麵粉充分攪和後分成二部份，並抽取其一；復將所抽取之一部份充分攪和後判分爲二，仍抽取其一；如此繼續爲之，直至達到吾人所需之樣本爲止。以上兩法，前者已屬混合抽樣，而後者則實爲取得隨機樣本之特殊方法。蓋判分爲二部份之前，麵粉既經充分攪和，則所得結果自爲隨機樣本無疑。

四、假設全體之抽樣方法——無論有限全體或無限全體，要皆屬於實在全體。至於假設全體之隨機抽樣方法，則又與以上所述實在全體有一基本不同之點。試以一簡單而足以代表之事實爲例：設吾人欲抽取擲骰所得結果之樣本，則以上所述對於實在全體之方法即完全不能應用。因吾人既不知原始全體之性質，無法構成其雛形全體，以爲抽取之依據；亦無法將所有可能擲出之結果加以集合，而用繼續分裂之方法。事實上，關於本例僅有之方法厥爲將骰子繼續拋擲至吾人所需之次數，而以其擲出之結果爲樣本。

然則此多次擲出之結果，何以可認爲隨機樣本？吾人可以作此假定之理由，一方面係基於理論，另一方面則賴於技術。賴於技術者吾人必須使拋擲之方法足以完全適合隨機抽

誤之條件；基於理論者，則因全體並不存在，其所能得知之知識，卽爲樣本之本身，故惟有自理論上假定全體之每一個可能結果，均有相等出現之機會。

綜上所述，吾人當可對於實地隨機抽樣之方法得一概念，惟吾人另有必須注意者，卽一切隨機抽樣，常因方法之錯誤，可能產生最不隨機(Most unrandom-lookiug)之結果，故吾人對於一切抽取所得結果，不能不加以測驗。此種測驗，可自二方面言之。第一，如吾人已知原始全體之徵性及其分配情形之概況，則祇須以抽樣所得結果與之比較，以視其各種徵性之分配是否與其原始全體相差不遠；如是，卽可信賴吾人所用抽樣方法之妥善。第二，如吾人無從得知原始全體之形式——如關於假設全體之抽樣者，則吾人祇能由樣本本身加以估計，同時更應用其他更直接密切之方法，以其所得結果與之比較，然後始能據以批判所用抽樣方法之當否。

第 四 節

樣本之動差與原始全體之動差之關係

設有一原始全體，共有N個個體x_1, x_2, x_3…………x_N，若

以M_x代表其算術平均數，則

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_N=\sum_{i=1}^{N}xi=NM_x$$

今由全體中隨機抽取n個個體作爲一個樣本，(n<N)則共可得C_n^N個樣本，而設各個樣本中所含個體之和數可寫如下：

$$S_1=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n}xi$$

$$S_2=x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{n+1}=\sum_{i=2}^{n+1}x_i$$

$$\vdots$$

$$S_{\binom{N}{n}}=x_{N-n+1}+x_{N-n+2}+\cdots\cdots+x_N=\sum_{i=N-n+1}^{N}xi$$

設M_s爲S之平均數，則按定義

$$M_s=\frac{\sum s}{C_n^N}$$

式中$\sum s$爲C_n^N個S之和數，每個S中有n個x，即$\sum S$中共有$n\cdot C_n^N$個x，但每個x在$\sum S$中所佔項數相等故每個x在$\sum S$中

又均佔$\frac{1}{N}\cdot n\cdot C_n^N$項

$$\therefore M_s=\frac{1}{C_n^N}\left[\frac{1}{N}\cdot n\cdot C_n^N(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_N)\right]$$

$$=\frac{n}{N}\sum x=\frac{n}{N}\cdot NM=nM\cdots\cdots\cdots(1)$$

復設$\mu_{k,s}$表示由全體中抽取n個之體之和數(S)之t級動差，則依定義

$$\mu_{k,s}=\frac{\sum(S_i-M_s)^t}{C_n^N}=\frac{\sum\overline{S}_i^t}{C_n^N}\qquad(以\overline{S}_i=S_i-M_s)$$

而
$$\overline{S}_1=S_1-M_s=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n-nM$$
$$=(x_1-M)+(x_2-M)+\cdots\cdots+(x_n-M)$$
$$=\overline{x}_1+\overline{x}_2+\cdots\cdots+\overline{x}_n=\sum\overline{x}$$

$$\overline{S}_1^2=(\sum\overline{x})^2=\sum_{i=1}\overline{x}_i^2+2\sum\overline{x}_i\overline{x}_j$$

同樣
$$\overline{S}_2^2=\sum_{i=2}\overline{x}_i^2+2\sum\overline{x}_i\overline{x}_j$$
$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$S^2_{\binom{N}{n}} = \sum_{i=N-n+1} x_i^2 + 2\sum x_i x_j$$

$$\therefore \mu_{2\cdot s} = \frac{\sum S^2}{C^N_n} = \frac{1}{C^N_n}\left\{\frac{n\cdot C^N_n}{N}\sum x_i^2 + 2\cdot\frac{C_2^n C_n^N}{C^N_2}\sum x_i x_j\right\}$$

為簡單計以 $C_i = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-i+1)}{N(N-1)(N-2)\cdots(N-i+1)}$ 則

$$\mu_{2.s} = 2!\left\{C_1\frac{\sum x^2}{2!} + C_2\frac{\sum x_i x_j}{(1!)^2}\right\}$$

用同樣方法可推得

$$\mu_{3s} = 3!\left\{C_1\frac{\sum x^3}{3!} + C_2\frac{\sum x_i x_j}{2!1!} + C_3\frac{\sum x_i x_j x_k}{(1!)^3}\right\}$$

$$\mu_{4.s} = 4!\left\{C_1\frac{\sum x^4}{4!} + C_2\frac{\sum x_i^3 x_j}{3!1!} + C_2\frac{\sum x_i^2 x_j^2}{(2!)^2} + \right.$$

$$\left. C_3\frac{\sum x_i^2 x_j x_k}{2!(1!)^2} + C_4\frac{\sum x_i x_j x_k x_l}{(1!)^4}\right\}$$

其餘依此類推。

但吾人應知各$\overline{x}$之和數與各x之動差有如次之關係：

$$\sum \overline{x} = N\mu_{1\cdot x} = 0$$

$$\sum \overline{x}^2 = N\mu_{2\cdot x}$$

$$\sum \overline{x}^3 = N\mu_{3\cdot x}$$

$$\sum \overline{x}^4 = N\mu_{4\cdot x}$$

$$\sum \overline{x}_i \overline{x}_j = -\frac{N}{2}\mu_{2\cdot x}$$

$$\sum \overline{x}_i^2 \overline{x}_j = -N\mu_{3\cdot x}$$

$$\sum \overline{x}_i \overline{x}_j \overline{x}_k = \frac{N}{3}\mu_{3\cdot x}$$

$$\sum \overline{x}_i^3 \overline{x}_j = -N\mu_{4\cdot x}$$

$$\sum \overline{x}_i^2 \overline{x}_i^2 = -\frac{N}{2}(\mu_{4\cdot x} - N\mu^2_{2\cdot x})$$

$$\sum \overline{x}_i^2 \overline{x}_j \overline{x}_k = \frac{N}{2}(2\mu_{4\cdot x} - N\mu^2_{2\cdot x})$$

$$\sum \overline{x}_i \overline{x}_j \overline{x}_k \overline{x}_L = -\frac{N}{8}(2\mu_{4\cdot x} - N\mu^2_{2\cdot x})$$

將上列各式代入S之各級動差公式即得

$$\mu_{2.s}=N\mu_{2.x}(C_1-C_2)$$

$$\mu_{3.s}=N\mu_{3.x}(C_1-3C_2+2C_3)$$

$$\mu_{4.s}=N\mu_{4.x}(C_1-7C_2+12C_3-6C_4)+$$

$$3N^2\mu^2_{2.x}(C_2-2C_3+C_4)$$

但吾人於討論全體之特質時，曾稱可將全體視爲無限，即可設全體所含之個體總數$N\to\infty$則上列諸式可變爲

$$\mu_{2.s}=n\mu_{2.x} \cdots\cdots (2)$$

$$\mu_{3.s}=n\mu_{3.x} \cdots\cdots (3)$$

$$\mu_{4.s}=n\mu_{4x}+3n^2\mu^2_{2.x} \cdots\cdots (4)$$

吾人又知個樣本之r級動差又可寫成如下之形式

$$\mu'_{r,1}=\frac{1}{n}(x_1^r+x_2^r+x_3^r+\cdots\cdots+x_n^r)$$

$$\mu'_{r,2}=\frac{1}{n}(x_2^r+x_3^r\cdots\cdots+x_{n+1}^r)$$

$$\vdots$$

$$\mu'_{r,\binom{N}{n}}=\frac{1}{n}(x^r_{N-n+1}+x^r_{N-n+2}+\cdots\cdots$$

$$+x^r_N)$$

若將每一$\frac{x_i^r}{n}$寫作y_i，則上式變成：

$$\text{从}'_{r,1}=y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n$$

$$\text{从}'_{r,2}=y_2+y_3+\cdots\cdots+y_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\text{从}'_{r,\binom{N}{n}}=y_{N-n+1}+y_{N-n+2}+\cdots\cdots+y_N$$

上列諸式適與上面所述樣本之和數公式相似，今若將y_1，y^2………y_n視作一原始全體中之諸個體，則各从$'_{r,i}$即爲每一樣本所含各個體之和數，故各从$'_{r,j}$之動差亦可依公式(1)——(4)求之，但須注意$m_{t,y}=\frac{\sum y_i^t}{N}=\frac{1}{N}\sum\frac{x_i^{tr}}{n^t}=\frac{1}{n^t}m_{tr,x}$而後可得从$'_{r,j}$之各級動差如次：

$$M_{\text{从}',r}=nM_y=m_{r,x}$$

$$\text{从}_{2,\text{从}'r}=N(C_1-C_2)\text{从}_{2,y}=N(C_1-C_2)$$

$$\left\{m_{2,y}-M_y^2\right\}$$

$$=N(C_1-C_2)\left\{\frac{m_{2v,x}}{n^2}-\left(\frac{m_{v,x}}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{N}{n^2}(C_1-C_2)\left\{m_{2r,x}-m_{r,x}^2\right\}$$

$$\mu_{3.\mu'r}=N(C_1-3C_2+2C_3)\mu_{3.y}=N(C_1-3C_2+2C_3)\left\{m_{3.y}-3M_y m_{2.y}+2M_y^3\right\}$$

$$=\frac{N}{n^3}(C_1-3C_2+2C_3)\left\{m_{3r.x}-3m_{2.rx}m_{r.x}+2(m_{r.x})^3\right\}$$

$$\mu_{4.\mu'}=\frac{N}{n^4}(C_1-7C_2+12C_3-6C_4)\left\{m_{4r.x}-4m_{3r.x}m_{r.x}+6m_{2r.x}(m_{2r.x})^2-3(m_{r.x})^4\right\}$$

$$+3\frac{N^2}{n^4}(C_2-2C_3+C_4)\left\{m_{2r.x}-6n_{r.x})^2\right\}$$

若全體為無限全體，則上列四式變為

$$M_{\mu'r}=m_{r.x} \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$\mu_{2.\mu'r}=\frac{1}{n}\left\{m_{2r.x}-(m_{r.x})^2\right\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

$$\mu_{3.\mu'r}=\frac{1}{n^2}\left\{m_{3r.x}-3m_{2r.x}m_{r.x}+2(m_{r.x})^3\right\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

$$\mu_{4.\mu'r}=\frac{1}{n^3}\left\{m_{4r.x}-4m_{3r.x}m_{r.x}+6m_{2r.x}(m_{r.x})^2-3(m_{r.x})^4\right\}+\frac{3n^2}{n^4}\left\{m_{2r.x}-(m_{r.x})^2\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

上列四式爲對樣本動差之各級動差公式，設使式中之r等於1，即得各樣本平均數之各級動差公式：

$$M_m=M_x \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\mu_{2.m}=\frac{1}{n}\mu_{2.x} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\mu_{3.m}=\frac{1}{n^2}\mu_{3.x} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\mu_{4.m}=\frac{1}{n^3}\mu_{4.x}+\frac{3(n-1)}{n^3}\mu^2_{2.x} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

由(7)式可知各樣本平均數之平均數即全體之平均數。若將(8)式開方並得樣本平均數之標準差

$$\sigma_m=\sqrt{\mu_{2m}}=\frac{\sqrt{\mu_{2x}}}{\sqrt{n}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

同理由(9)式與(10)式可依次求得樣本平均數之偏斜度與峯度。

第五節 抽樣可靠性之測定

由樣本平均數之標準差公式，固可知樣本平均數之標準差與原始全體之標準差有如公式所定之關係，而自另一角度觀之，更可由此式推論樣本平均數之可靠程度，蓋樣本平均數之標準差自另一角度視之實即樣本平均數之標準誤，吾人固知標準誤愈小則所求得之統計數值愈為可靠，故標準誤之逆數即可視為可靠性。

但習慣上常喜用機誤(P. E.)以代替標準誤，而標準誤與機誤有如次之關係

$$P.\ E. = 0.\ 6745\sigma$$

由公式(17)得樣本算術平均數之機誤為

$$P.E_{M} = 0.\ 6745\ \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

此就樣本算術平均數之可靠性而言，至樣本之標準差相關係數及其他各種統計係數之可靠性，亦可用同法推得，惟本書僅在予讀者以抽樣之概念，故不欲詳述，僅將各種統計係數之標準誤與機誤公式列舉如次：

	標準誤	機誤
算術平均數	$\sigma_M=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$	$P.E_M=0.6745\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$
標準差	$\sigma_\sigma=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$	$P.E_\sigma=0.6754\frac{\sigma_x}{\sqrt{2n}}$
相關係數	$\sigma_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$	$P.E_r=0.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$
相關率	$\sigma_n=\frac{1-n^2}{\sqrt{n}}$	$P.E_n=0.6745\frac{1-n^2}{\sqrt{n}}$

上表各公式之係數，為節省計算時間與勞力，已有現成製就之表可以應用，茲摘要列舉如次：

I. $\frac{0.6745}{\sqrt{N}}$ 及 $\frac{0.6745}{\sqrt{2N}}$ 表

N	$\frac{0.6745}{\sqrt{N}}$	$\frac{0.6745}{\sqrt{2N}}$	N	$\frac{0.6745}{\sqrt{N}}$	$\frac{0.6745}{\sqrt{2N}}$
10	0.2133	0.1508	300	0.0389	0.0275
20	0.1508	0.1067	350	0.0361	0.0255
30	0.1231	0.0871	400	0.0337	0.0239
40	0.1067	0.0754	450	0.0318	0.0225
50	0.0954	0.0675	500	0.0302	0.0213

60	0.0871	0.0616	559	0.0288	0.0203
70	0.0806	0.0570	600	0.0275	0.0195
80	0.0754	0.0533	650	0.0265	0.0187
90	0.0711	0.0503	700	0.0255	0.0180
100	0.0675	0.0477	750	0.0246	0.0174
125	0.0603	0.0427	800	0.0239	0.0169
150	0.0551	0.0389	850	0.0231	0.0164
175	0.0510	0.0361	900	0.0225	0.0159
200	0.0477	0.0337	950	0.0219	0.0155
250	0.0427	0.0302	1000	0.0213	0.0151

II. $0.6745\ \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ (或$0.6745\ \frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}}$)表

N	r (或u)						值			
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
20	.151	.149	.145	.137	.127	.113	.097	.077	.054	.029
30	.123	.122	.118	.112	.104	.092	.079	.068	.044	.023
40	.107	.106	.102	.097	.090	.080	.068	.054	.038	.020
50	.095	.094	.092	.087	.080	.072	.061	.049	.034	.018
60	.087	.086	.084	.079	.073	.065	.056	.044	.031	.017

70	.081	.080	.077	.073	.068	.061	.052	.041	.029	.015
80	.075	.075	.072	.069	.063	.057	.048	.039	.027	.014
90	.071	.070	.068	.065	.060	.053	.046	.036	.026	.014
100	.067	.067	.065	.061	.057	.051	.043	.034	.024	.013
150	.055	.055	.053	.050	.046	.041	.035	.02[illegible]	.020	.011
200	.048	.047	.046	.043	.040	.036	.031	.024	.017	.009
200	.048	.047	.046	.043	.040	.036	.031	.024	.017	.009
250	.048	.042	.041	.039	.036	.032	.027	.022	.015	.008
300	.039	.039	.037	.035	.033	.029	.02[illegible]	.020	.014	.007
400	.034	.033	.032	.031	.028	.025	.022	.017	.012	.006
500	.020	.030	.029	.027	.025	.023	.019	.015	.011	.006
600	.028	.027	.026	.025	.023	.021	.018	.014	.010	.005
700	.026	.025	.025	.023	.021	.019	.016	.013	.009	.005
800	.024	.024	.023	.022	.020	.018	.015	.012	.009	.005
900	.023	.022	.022	.021	.019	.017	.014	.011	.008	.004
1000	.021	.021	.021	.019	.018	.016	.014	.011	.008	.00[illegible]

附錄一

次數分配與表徵函數

(一)導言

關於次數分配問題的理論，近年來國內出版之統計書報已有多篇刊載：如羅志如：配合曲線（見立法院統計月報三卷二期）・蔣紹基：皮爾孫氏次數曲線之研究（統計學社統計論叢），袁丕濟：提勒氏之半定值（計政學院計政學報一卷四期），鄭堯拌：次數曲線之數理研究（計政學報二卷一期），足徵次數分配理論在統計學上的重要，早已引起吾國統計學家之注意，並上舉數文，對次數分配問題，各有多量的貢獻，惟關於次數分配與表徵函數(Charaeteristic function)的關係，雖有提及，（如趙希獻：正態律或差誤律的理論，統計季報第八號第三頁・(惟趙君譯爲特性函數)作者亦曾將表徵函數之意義與應用，簡略向本社前年年會論文會報告一二・但原題爲希望數(Mathematical expectation)與主要函數(Charaeteristic function)當時譯爲，主要函數，者，意謂利

用各級希望數，得確定其機率分配；而各級希望數，得全由其表徵函數計算之〔使表徵函數之變數等於零，則表徵函數之n級微分係數，即等於其n級希望數，（或稱n級動數）〕。故若既得其表徵函數，即不難推得其各級希望數，於是可確定其機率分配，緣此，遂取名爲主要函數。惟今統計數列之"Characteristics"一字，既經李成謨君譯作"表徵數"，故將原譯主要函數亦暫改爲表徵函數以謀一致，惟究應譯成何詞，且待本社統計譯名審查委員會決定）然有關於表徵函數與次數分配之理論，似在國內尙乏專著，因草此短稿，撮要介紹一二，以期引起吾國統計學界之注意耳。

（二）定義

茲且分(甲)不連續變數(乙)連續變數與(丙)普通格三格依次分述之

（甲）不連續變數

設使x之次數分配如次：

數量 x_1 $x_2 \cdots\cdots x_j \cdots\cdots x_k$

次數 f_1 $f_2 \cdots\cdots f_j \cdots\cdots f_k$

或取其相對次數(Relative frequency)亦稱機率(Probability)p

$$p_j=\frac{f_j}{f_1+f_2+\cdots\cdots+f_j+\cdots\cdots+f_k}=\frac{f_j}{N}$$

則即得寫其"機率分配" (Probability distribution) 亦名"機遇法則"(Probability law)如次：

數量 $x_1\ x_2\cdots\cdots x_j\cdots\cdots x_k$

機率 $p_1\ p_2\cdots\cdots p_j\cdots\cdots p_k$

以後論述概取機率分配以便書寫。

定義：偶然變數 x之"表徵函數"(Characteristic function)，將以下式ф(t)確定之：

(1) $$\phi(t)=\sum_{j=1}^{k}p_j e^{ix_j t}$$

$$i=\sqrt{-1}$$

$$j=1,2,\cdots\cdots k$$

註：該類數學函數早經歌西(Cauchy)氏引用計算，但表徵函數之名稱，似創自亨利普賚雷(Henri Poincare)，惟普氏公式$\varphi(t)$與上式(1)微有不同：

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{k}p_j e^{x_j t}$$

提勒氏半定值λ1，λ2.….λn與普氏式更有密切關係：

$$\varphi(t)=e^{\lambda_1 t+\lambda_2\frac{t^2}{2!}+\cdots\cdots+\lambda_n\frac{t^n}{n!}+\cdots\cdots}$$

或

$$\lambda_1 t+\lambda_2\frac{t^2}{2!}+\cdots\cdots+\lambda_n\frac{t_n}{n!}+\cdots\cdots=\log_e\varphi(t)$$

(乙)連續變數

設使偶然變數x之機率分配爲絕對連續 (Absolutelycontinuous)者，卽當x爲一連續變數而其總和機率函數F(x) (Total probability function) 得以一函數f(x)之有定積分表示者如

$$(2)\qquad F(z)=\int_{-\infty}^{z}f(x)dx$$

〔該函數f(x)名爲"初等機率函數(Elementary probability function)亦有譯作"機素函數"者〕

則其表徵函數φ(t)得以下式確定之：

$$(3)\ \varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{ixt}dx$$

$$i=\sqrt{-1}$$

倘x僅能取得(a,b)間之數值則其表徵函數$\phi(t)$亦得改寫如次：

$$\phi(t)=\int_a^b f(x)\,e^{ixt}$$

但亦得仍寫如(3)式，惟當x變動於(a,b)以外之際，則須令f(x)等於零，並須注意f(x)既表示機率，故必屬正數：

（丙）普通格

最普通之情形，乃機率分配得以一施氏積分（Stieltjes integral)確定其總和機率函數F(z)者：

$$(4)\qquad F(z)=\int_{-\infty}^{z} dF(x)$$

$$dF(x)=\lim_{\triangle x\to 0}[F(x+\triangle x)-F(x)]$$

則其表徵函數$\phi(t)$即得以下式確定之：

$$(5)\qquad \phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,dF(x)$$

（三）表徵函數之數學理論

本節敍述表徵函數之數學理論，即須證明其機率分配之數學關係；換言之，即須證明其機率分配得全由其表徵函數確定之。茲即就其最普通格討論之，以省手續。

設使已知某偶然變數之表徵函數$\phi(t)$：

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,dF(x)$$

試由此表徵函數$\varphi(t)$以確定其總和機率函數$F(z)$。其如何確定之道，得由下列積分I_c之計算：

$$(6)\qquad I_c=\int_{-c}^{+c}\varphi(t)dt\int_{0}^{z}e^{-itz}dz$$

將$\varphi(t)$值代入(6)式，即得

$$I_c=\int_{-c}^{+c}dt\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)\int_{0}^{z}e^{-itz}dz$$

變更其後兩積分之次序，則得

$$I_c=\int_{-}^{+}dt\int_{0}^{z}dz\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(x-z)}dF(x)$$

再變更變數將$x-z$變為x，則亦得改寫如次：

$$(7)\qquad I_c=\int_{-c}^{+c}dt\int_{0}^{z}dz\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d_xF(x+z)$$

乃按施氏積分(Stielties integral)之變更積分次序法：

$$\int_{0}^{z}dz\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d_xF(x+z)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d_x\int_{0}^{z}F(x+z)dz$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}[F(x+z)-F(x)]dx$$

代入上式(7)，即得

$$I_c = \int_{-c}^{+c} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}[F(x+z)-(x)]dx$$

或 (8) $$I_c = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin Cx}{x}[F(x+z)-F(x)]dx$$

設使C趨於無窮大，該積分式(8)即爲一"堤氏積分"(Dirichlet integral)，而其數值應等於$2\pi[F(z)-F(0)]$:

(9) $$\lim_{c\to\infty} I_c = \lim_{c\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin Cx}{x}[F(x+z)-E(x)]dx$$

$$=2\pi[F(z)-F(0)]$$

但另一方面，若將積分Ic還取其從z的積分，又應得:

(10) $$I_c = \int_{-c}^{+c} \phi(t)dt \int_0^z e^{-itz}dz$$

$$=\int_{-c}^{+c} \phi(t)\frac{1-e^{-itz}}{it}dt$$

合(9)(10)兩式相等而加以移項，即得

$$(11)\ F(z)-F(0)=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{+c}\phi(t)\frac{1-e^{-izt}}{it}dt$$

或寫如 $F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}vp\int_{-c}^{+c}\phi(t)\frac{1-e^{-izt}}{it}dt$

vp兩字母乃代表Cauchy氏所謂Valeur principale(基本數值)。亦有還寫如下式:

$$F(z)-F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\frac{1-e^{-izt}}{it}dt$$

藉此公式，即得由表徵函數$\phi(t)$以確定其總和機率函數$F(z)$；既知其總和機率函數，是則偶然變數x之機率分配於焉確定.C,Q.F.D,

註：上式亦得改以三角函數表示之

設使 $\phi_0(t)=\frac{1}{2}[\phi(t)+\phi(-t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\,dF(x)$

$$\phi_1(t)=\frac{1}{2i}[\phi(t)-\phi(-t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx\,dF(x)$$

則上述(11)式，亦得改寫如次：

$$(11)\quad F(z)-E(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\phi_0(t)\sin zt+\phi_1(t)(1-\cos zt)]\frac{dt}{t}$$

注意：F(z)既表示總和機率函數，則上列等式(11)右項之積分應爲一實數遞增正函數；且其數值不得大於一。又$\phi(t)$與$\phi(-t)$必爲兩共軛複變數函數，庶不致F(z)爲複數。再若機率分配爲對稱者，則其表徵函數亦必爲雙函數。表徵函數應爲有定連續函數，俾使總和機率函數F(z)爲一有限變化函數，且須$\phi(t)\leq\phi(0)$，俾使F (z) 爲正函數。倘遇有關於極限的研究，

則亦得應用表徵函數之極限定理；設有兩機遇法則 L與L′ 其表徵函數各爲φ(t)與φ′ (t)，如機遇法則L′趨於L,則其相應對之表徵函數φ′(t)亦一致趨於 φ(t)；反之，如表徵函數φ′(t)趨於φ(t)，則其相應對之機遇法則L′亦一致趨於L.(證解從略)

上述普通公式(11)自亦能應用於連續變數與不連續變數，且其理論算式於不連續變數及連續變數格中得更益簡單化．蓋當偶然變數x爲一絕對連續分配，則

$$dF(x)=f(x)dx$$

因得將其表徵函數寫如下式：

$$\varphi(t)=\int_{-}^{+} e^{itx}f(x)dx$$

乃祇須計算積分Ic：

$$(12)\qquad Jc=\int_{-c}^{+c}\varphi(t)e^{-izt}dt$$

$$=\int_{-}^{+} c^{-izt}dt\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx$$

$$Jc=\int_{-}^{+} f(x)dx\int_{-c}^{+c} e^{it(x-z)}dt$$

變更變數以x替x−z，則亦得

$$Jc = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+z)\,dx \int_{-c}^{+c} e^{itx}dt$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+z)\frac{\sin Cx}{x}dx$$

設使G趨於無窮大，則積分Jc即爲一狄氏積分(Dirichlet integral)，而其極限當等於$2\pi f(z)$：

$$\lim_{c\to\infty} Jc = 2\pi f(z)$$

因得 (13) $f(z) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{+c} \phi(t)e^{-izt}dt$

或寫如 $f(z) = \frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-izt}dt$

亦有逕寫如下式：

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-izt}dt$$

該式亦稱伏氏交公式式(Fourier'sreciprocal formula) 而初等機率函數f(x)與其表徵函數$\phi(t)$互相爲交互函數焉。

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-ixt}dt \\ \phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixt}dx \end{cases}$$

却利歐(Charlier)卽據此以擬其"f(x)的同軛函數"[Gonjugatefunction of (x)]$f^{-1}(t)$:

$$f^{-1}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixt}dx$$

則$f(t)$與$f^{-1}(t)$兩函數之關係，更呈較對稱之形式：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f^{-1}(t)e^{-ixt}dt$$

彼同軛函數之理論，當與上述表徵函數理論初無二致焉。

註：上式亦得用三角函數表示之：

仍使 $\phi_0(t)=\frac{1}{2}[\phi(t)+\phi(-t)]$

$$\phi_1(t)=\frac{1}{2i}[\phi_0(t)-\phi(-t)]$$

則上述(13)式，亦得改寫如次：

(13) $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\phi_0(t)\cos zt+\phi_1(t)\sin zt]dt$

至若偶然變數為x—不連續變數，則可求其於$(-c, +c)$間其$\phi(t)e^{-izt}$之平均值$\frac{Jc}{2G}$：

$$\frac{Jc}{2G}=\frac{1}{2G}\int_{-c}^{+c}\phi(t)e^{-izt}dt$$

該平均值之極限，即趨向於z點之機率。倘於z點該極限值為零，即偶然變數不能取得該數值z，亦即取得該數值之機率等

於零；倘於z_j點該極限之數值等於p_j，即偶然變數取得 z_j 值之機率等於 p_j，故不連續變數所能取得之數值並及其取得其各值之機率均得由其表徵函數確定之。

綜上所述，則不論偶然變數爲不連續變數，連續變數或祇能以其總和機率函數確定其機遇法則者，皆得以其表徵函數確定之，而函數$\varphi(t)$之所以名爲表徵函數者，意即在斯.

寫於民國二十六年南京

附錄二

堤犂噓雷積分與傅利歐交互公式

第一節 堤犂噓雷積分

堤犂噓雷積分(Integrle de Dirichlet)之最普通形式爲

$$J=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\frac{\sin nx}{\sin x}\varphi(x)dx$$

其計算可由

$$H=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx$$

及

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\frac{\varphi(x)}{x}\sin nx\,dx$$

以推論之，故吾人亦分三段依次推求H，I，J，之數值。

(一)設使a，b爲兩定數及$f(x)$爲一連續函數，則下列積分

$$H=\int_a^b f(x)\sin nx\,dx$$

將等於零當，n趨於無窮大。

蓋當n極大之際，則於(a,b)間sin nx之記號忽正忽負而其積分之總值即因其正負相抵而趨於零。茲再以算式證明之；

設以2m為 $\frac{n|b-a|}{\pi}$ 內之最大偶數，並將「變距」a,b區分為 $(a, a+\frac{\pi}{n}), (a+\frac{\pi}{n}, a+\frac{2\pi}{n}), \cdots \left[(a+\frac{(2m-1)}{n}\pi), (a+\frac{2m\pi}{n})\right]\left[(a+\frac{2m\pi}{n}), b\right]$

則積分H亦得改寫如次

$$H=\int_a^b f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\int_a^{a+\frac{\pi}{n}}+\int_{a+\frac{\pi}{n}}^{a+\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\int_{a+\frac{(m-1)\pi}{n}}^{a+\frac{2m\pi}{n}}+$$

$$\int_{a+\frac{2m\pi}{n}}^{b}$$

然按三角公式

$$\sin\left[n(t+\frac{\pi}{n})\right]=-\sin nt$$

則上式 H亦得化成

$$H=\int_{a}^{a+\frac{\pi}{n}}\left[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n}\sin ux)\right]dx$$

$$+\int_{a+\frac{2\pi}{n}}^{a+\frac{3\pi}{n}}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\sin nx\,dx$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\int_{a+\frac{2m-2}{n}}^{a+\frac{2m-1}{n}}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\sin nx\,dx$$

$$+\int_{a+\frac{2m\pi}{n}}^{b}f(x)\sin nx\,dx$$

乃當n趨於無窮大，$\frac{\pi}{n}$卽趨於零，而f(x)旣假定爲連

續函數，是得令n相當大,以使

$$\left|f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})\right|<\tau$$

η 爲一任何小之數值。更以 $|\sin nx|<1$，故亦得

$$\left|\sin nx\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\right|<\eta$$

又若以M爲 $|f(x)|$ 之『上限』(borne Superieura)，則亦得

$$\left|\int_{a+\frac{2m\pi}{n}}^{b} f(x)\sin nx\,dx\right|<\frac{2\pi}{n}M$$

綜上所述，即得

$$|H|<|b-a|\eta+\frac{2\pi}{n}M$$

當 n 趨於無窮大，η 趨於無窮小，故積分H之數值即得趨於零。

附註：A)倘 $f(x)$ 有一不連續點於C，但於(a,c)及(c,b)內，$f(x)$ 仍各爲連續函數者，則上述理論仍能適用。

B)倘 $f(x)$ 之微係數有一上限 M_1

$$|f'(x)|<M_1$$

則得以

$$\eta \leq \frac{\pi}{n} M_1$$

而幸使

$$|H| \leq \frac{\pi}{n}[2M + |b-a|M_1]$$

(二)茲且進而推求下列積分 I 之極限，當 n 趨於無窮大或

$$I = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x} \sin nx \, dx$$

為便利敍述起見，可假定 $b>a$ 與 $n \to \infty$

今且按a,b之記號而分甲乙丙三格以申述之

甲) $b>a>o$ 或 $a<b<o$

乙) $a=o$ 或 $b=o$

丙) $b>o>a$

甲)今a,b既為同號，則 $\frac{\varphi(x)}{x}$ 之連續性與 $\varphi(x)$ 相同。乃祇須 $\varphi(x)$ 為連續函數，即得據上述理論而斷定其積分I之極限亦趨於零，當n趨於無窮大。

乙)當 $a=o$，則上述理論卽不能適用，而其結果亦完全不同。

當$x=o$，普通$\frac{\varphi(x)}{x}$趨於無窮大，但其微係數爲存在者，則

$$\varphi'(o)=\lim_{n\to o}\frac{\varphi(x)-\varphi(+o)}{x-(+o)}$$

$\varphi(+0)$表示$\varphi(x)$之極限，當x由正數以趨於零，積分I即得寫如下式

$$I=\int_{o}^{b}\frac{\varphi(x)}{x}\sin nx\,dx$$

$$=\int_{o}^{b}\frac{\varphi(x)-\varphi(+o)}{x}\sin nx\,dx$$

$$+\varphi(+o)\int_{o}^{b}\frac{\sin nx}{x}dx$$

乃據上述理論應有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{o}^{b}\frac{\varphi(x)-\varphi(o)}{x}\sin nx\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{o}^{b}\varphi'(x)\sin nx\,dx=o$$

代入上式，卽得

$$I=\varphi(+o)\frac{\pi}{2}$$

丙)當$b>o>a$則可將(a,b)區分爲$(a,o)(ob)$卽得

$$I=\frac{\pi}{2}\left[\varphi(-o)+\varphi(+o)\right]$$

（三）今當進而推求其積分J之數值

$$J=\int_a^b\frac{\varphi(x)}{\sin x}\sin nx\,dx$$

玆且分甲乙丙丁四格以申述之

甲)$o<a<b<\pi$或$k\pi<a<b<(k+1)\pi$ k爲一整數

乙)$o=a<b<\pi$或$k\pi=a<b<(k+1)\pi$

丙)$-\pi<a<o<b<\pi$

或$(k-1)\pi<a<k\pi<b<(k+1)\pi$

丁)普通格

甲)今a,b旣在(o,π)之間，則$\sin x$不能等於零，乃$\frac{\varphi(x)}{\sin x}$之連續性惟取決於$\varphi(x)$，因祇須$\varphi(x)$爲連續函數而卽得據上述理論以斷定積分J之數值趨於零。（當n趨於無窮大）

乙)於$a=o$，則得以

$$\frac{\varphi(x)}{\sin x}=\frac{\varphi(x)}{x}\,\frac{x}{\sin x}$$

然按極限理論

$$\lim_{n\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

若是$\varphi(x)$爲一連續函數並於$x=0$其微係數爲存在者，則按上段乙格所得結果即可斷定積分J之數值等於$\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$

丙)將(a,b)區分爲(a,o)(o,b)即得

$$J=\frac{\pi}{2}[\varphi(-0)+\varphi(+0)]$$

丁)如由a至b經過若干次π的倍數，則但將整個變距(a, b)區分成若干局部變距，務使每一局部變距之距限至大爲π，乃依次按上述丙格所得結果以推求其整個積分J之數值。

例若$a=0$, $b=\pi$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b\frac{\sin Nx}{\sin x}\varphi(x)dx=\frac{\pi}{2}[\varphi(0)+\varphi(\varphi)]$$

餘此類推

補：上述積分J等於$\frac{\pi}{2}$且補述其計算如次：

茲應用積分J而以$\wp(x)=1, b=\frac{\pi}{2}, n=2p+1$

則

$$j=\lim_{p=\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}dx$$

然 $\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}=1+2(\cos 2x+\cos 4x+\cdots\cos+px)$

代入上式而求其積分卽得

$$j=\frac{\pi}{2}$$

第二節　傅利歐相互公式

應用提利嘘雷積分之結果，卽得用以推求傅利歐氏之交互公式。(Formule de Reciprocite' de Fourier) 該傅利歐氏之交互公式，於機遇數學及統計上之應用均甚重要。設使$\mathcal{f}(x)$表示偶然變數x的『機率函數』，〔亦名『機素函數』，或『初等機率函數』，Fonction des Pro babilites elementaires〕又以$\varphi(t)$表示偶然變數x的『表徵函數』，〔Fonction Caract'eristique〕乃按雷微(Levy)氏所擬表徵函數$\varphi(t)$之定義：

$$(1)\qquad \phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{f}(x)\,e^{itx}dx$$

$$i=\sqrt{-1}$$

則按傅利歐氏之交互公式，亦得由表徵函數$\phi(t)$求其機率函數$\mathcal{f}(x)$：

$$(2)\qquad \mathcal{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\,e^{-ixt}dt$$

茲且證明之如次：

設以

$$I=\int_{-c}^{+c}\phi(t)e^{-itx}dt$$

將(1)式$\phi(t)$之數值代入，(但以u替x以免混淆)

即得

$$I=\int_{-c}^{+c}e^{-itx}dt\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{f}(u)e^{itu}du$$

如變更其積分次序，得

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{f}(u)du\int_{-c}^{+c}e^{it(u-x)}dt\text{.}$$

先求其從變數 t 的積分 I 則

$$I = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{f}(u)\,\frac{\mathrm{sinc}(u-x)}{u-x}\,du$$

再以

$$z = u - x$$

代入上式，卽得

$$I = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{f}(z+x)\frac{\mathrm{siucz}}{z}\,dz$$

於此，使C趨於無窮大，該積分卽顯然爲一「坦窄嚨雷」積分，因得

$$I = 2\times\frac{\pi}{2}[\mathcal{f}(x-0)\div\mathcal{f}(x+0)]$$

然則$\mathcal{f}(x)$旣假定爲一連續函數，故卒得

$$I = 2\pi\mathcal{f}(x)$$

或$\mathcal{f}(x) = \frac{1}{2\pi}I$

卽

$$\mathcal{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)e^{-itx}\,dt$$

此卽傅利歐氏之交互公式是也。

例：設以

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

則按(1)式，卽得其表徵函數$\phi(t)$：

$$\phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{itx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{itx}dx$$

$$=\frac{e^{\frac{i^2t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx+i^2t^2)}dx$$

$$=\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}d(x-it)$$

然 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}d(x-it)=1$

因得

$$\phi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

反之，亦得按傅利歐公式由表徵函數$\phi(t)$而求其機率函數$f(x)$：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)e^{-itx}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itx}dt$$

$$=\frac{e^{\frac{i^2x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(t^2+2itx+i^2x^2)}dt$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}dt$$

然 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}d(t+ix)=1$

因得

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

附錄三

華里斯公式與施端霖公式

欲求累乘數n!之極限，可由其對數log n!之極限以推求之。設使(對數以e爲底數)

(1) $S_n = \log n!$

$= \log 2 + \log 3 + \log 4 + \cdots\cdots + \log n$

欲求該和數S_n之數值，得利用曲線$y=\log x$的面積I_n(見圖一)。

(2) $I_n = \int_1^n \log x \, dX$

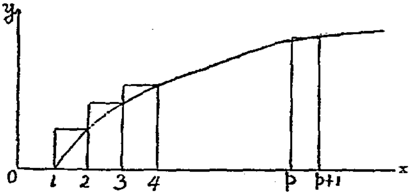


圖 一

上圖各長方形之面積之總和卽得表示S_n，而曲線與ox及

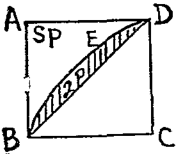


圖 二

x=1，x=n兩縱線所包圍之面積卽爲I_n。茲欲由I_n以推求S_n，卽應於每一長條增加其三角形ABD之面積Sp並減去其弧線BED與直線BD所包圍之面積Ep（圖二）：

$$(3)\qquad S_n=I_n+\sum_{p=1}^{n}Sp-\sum_{p=1}^{n}Sp$$

今各三角形之面積Sp之總和，顯然等於$\frac{1}{2}\log n$

$$(4)\qquad \sum_{p=1}^{n}Sp=\frac{1}{2}\log n$$

而各Ep之總和，得依次推求之如下：

$$(5)\,Ep=\int_{p}^{p+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}\{\log p+\log(p+1)\}$$

$$=(p+\tfrac{1}{2})\log\frac{p+1}{p}-1$$

但$\log\frac{p+1}{p}$之展開式爲

$$\log\frac{p+1}{p}=2\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{3(2p+1)^3}+\frac{1}{5(2p+1)^5}+\cdots\right)$$

則

$$\left(p+\tfrac{1}{2}\right)\log\frac{p+1}{p}=\tfrac{1}{2}(2p+1)\log\frac{p+1}{p}$$

$$=1+\frac{1}{3(2p+1)^2}+\frac{1}{5(2p+1)^4}+\cdots\cdots$$

代入(30)式，卽得

$$Sp=\frac{1}{3(2p+1)^2}+\frac{1}{5(2p+1)^4}+\frac{1}{7(2p+1)^6}+\cdots$$

因得

$$Sp<\frac{1}{3(2p+1)^2}\left[1+\left(\frac{1}{2p+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2p+1}\right)^4+\left(\frac{1}{2p+1}\right)^6+\cdots\cdots\cdots\right]$$

或

$$Sp<\frac{1}{12p(p+1)}=Vp$$

今Sp既小於Vp，而以Vp爲普通項之級數(Vp)爲一收斂級數，則級數(Sp)亦必爲一收斂級數，而得以

$$(6)\qquad \sum_{p=r}^{n} Sp+r_n=\alpha$$

α表示級數(Sp)之和數，r_n表示其餘數。

但

$$V_p=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)$$

則級數(Vp)之餘數小於$\frac{1}{12n}$，故級數(Sp)之餘數r_n亦必小於$\frac{1}{12n}$：

$$r_n<\frac{1}{12n}$$

或以 $$0<\theta<1$$

(7) $$r_n=\frac{\theta}{12n}$$

乃代入(3)式，即得

(8) $$S_n=I_n+\frac{1}{2}\log n-\alpha+\frac{\theta}{12n}$$

於是求積分I_n之數值：

$$I_n=\int_1^n \log x\,dx$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^n$$

$$=n\log n-n+1$$

再代入上式，即得

(9) $S_n=(n+\frac{1}{2})\log n-n+1-x+\frac{\theta}{12n}$

既得S_n之數值，即甚易求其累乘數n!

(10) $n!=Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$

C表示一常數〔$C=e^{1-\alpha}$〕。

當n趨至無窮大，即可略其餘數項r_n；而累乘數n!之極限公式卽得寫如：

(11) $n!=Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$

若欲確定其常數C：乃可利用華里斯公式（Formule de Wallis）

(12) $\frac{\pi}{2}=\lim_{p\to\infty}\frac{2^4p(p!)^4}{[(2p!)^2(2p+1)]}$

欲明該公式之由來，得以

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$$

用局部積分法，卽得

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$$

若m爲單數： $m=2p+1$

則積分J_m之數値爲

$$J_{2p+r} = \frac{2.4.6.\cdots\cdots(2p)}{1.3.5.\cdots\cdots(2p+1)}$$

如m爲雙數： $m=2p$

則積分J_m之數値爲

$$J_{2p} = \frac{1.3.5.\cdots\cdots(2p+1)}{1.3.5.\cdots\cdots(2p)} \frac{\pi}{2}$$

然當p趨於無窮大，J_{2p+1}與J_{2p}自將趨於一致，即

$$\lim_{p\to\infty} \frac{J_{2p+1}}{J_{2p}} = 1$$

亦即

$$\lim_{p\to\infty} \left[\frac{2.4.6.\cdots\cdots(2p)}{1.3.5.\cdots\cdots(2d-1)}\right]^2 \frac{1}{2p+1} \frac{2}{\pi} = 1$$

或

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{p\to\infty} \frac{[2.4.6.\cdots\cdots(2p)]^4}{[1.2.3.\cdots\cdots(2p-1)(2p)]^2} \frac{1}{2p+1}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{[(2p)!]^2(2p+1)}{2^{4p}(p!)^4}$$

又或

(13) $$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{p\to\infty}\frac{2^2p(p!)^2}{(2p)!\sqrt{2p+1}}$$

斯印華里斯公式是也。

今若以(11)式所得累乘數p！之極限公式代入(12)式即得

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{p\to\infty}\frac{2^{2p}[Cp^{p+\frac{1}{2}}e^{-p}]^2}{\sqrt{2p+1}\;C(2p)^{2p+\frac{1}{2}}e^{-2p}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{p\to\infty}\frac{Cp}{\sqrt{2p(2p+1)}}=\frac{C}{2}$$

因得

(14) $C=\sqrt{2\pi}$

將C值代入(11)式，即得

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

此卽施端霖公式是也。

附錄四

尤勒積分

尤勒積分有兩種：其一爲

(1) $$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-X)^{b-1}dx$$

名曰「甲種尤勒積分」(Integrale eulerienne be Premiere espece)乃一a與b的函數，亦名「培坦函數B (Fonction beta)，另一爲

(2) $$\Upsilon(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

名曰「乙種尤勒積分」(Integrale euleriennc be seconde espe ce) 乃一a的函數亦名「瑴瑪函數」(Fonction gamma)

設使a爲一正數且不等於零，則下列有定積分

$$\Upsilon(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$$

始具意義而得爲「a的連續函數」，即前述「瑴瑪函數」。倘使a=o，則瑴瑪函數之數值，卽將趨於無窮大。

該函數之特點頗多，其最要者有三：

(甲) $\Upsilon(a+1)=a\Upsilon(a)$

（乙） $\frac{\Upsilon(a)\Upsilon(b)}{\Upsilon(a+b)}=B(a,d)$

（丙）設使$0<a<1$，則

$$\Upsilon(a)\Upsilon(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

今且依次證解之。

（甲）按『局部積分法』，得以

$e^{-x}dx=-d(e^{-x})$，而將『蔣瑪函數』寫如下式：

$$(3)\qquad \Upsilon(a+1)=\int_0^{\infty}x^{a}e^{-x}dx$$

$$=-(x^{a}e^{-x})_0^{\infty}+a\int_0^{1}e^{-x}x^{a-1}dx$$

則a既大於零，故$(x^{a}e^{-x})_0^{\infty}$等於零，因得

$$(4)\qquad \Upsilon(a+1)=a\int_0^{1}e^{-x}x^{a-1}dx$$

$$=a\Upsilon(a)$$

據此，若n爲正整數，則：

$$\Upsilon(n+1)=n\Upsilon(n)$$

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$$

以上各等式相乘，卽得：

$$(5)\qquad \Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\times 2\times 1$$
$$=n!$$

藉明尤勒積分與累乘數之關係。

（乙）$\Gamma_{(a)}$與$\Gamma_{(b)}$之乘積，得以壹『二重積分』表之：

$$(6)\qquad \Gamma_{(a)}\Gamma_{(b)}=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx\int_0^y e^{-y}y^{b-1}dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}\,dx\,dy$$

玆若變更變數，以

$$\begin{cases}x=uV\\ y=(1-u)V\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=v \\ \dfrac{x}{x+y}=u \end{cases}$$

欲與$X\geqq 0$，$y\geqq 0$相符合，須令

$$0\leqq u\leqq 1$$
$$V\geqq 0$$

又按變更變數理論

$$dx\ dy=\frac{D(x,y)}{D(uv)}du\ dv$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\ dv$$

$$=\begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} du\ dv=v\ du\ dv$$

代入上式並簡化之，即得：

$$\Gamma_{(a)}\Gamma_{(b)}=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}dx\,dy$$

$$=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{(b-1)}du\int_0^\infty e^{-v}v^{a+b-1}dv$$

則按上述第一公式，亦得寫如

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\beta(a,b)$$

或

(7) $$\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

藉明『猗瑪函數』與『坦培函數』之關係

（丙）今若以b等於1－a則$\beta(a,b)$即等於$\Gamma(a)\Gamma(1-a)$

(8) $$\Gamma(a,1-a)=\frac{\beta(a,1-a)}{\Gamma(a+1-a)}=\beta(a,1-a)$$

$$=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a}du$$

茲若變更變數，以

$$t=\frac{x}{1-x}$$

$$x=\frac{t}{1+t}$$

$$bx=\frac{dt}{(1+t)^2}$$

則

$$B(a,b)=\int_0^\infty \frac{t^{a-1}dt}{(1+t)^{a+b}}$$

$$=\int_0^1 \frac{t^{a-1}dt}{(1+t)^{a+b}}+\int_1^\infty \frac{t^{a-1}dt}{(1+t)^{a+b}}$$

再以

$$z=\frac{1}{t}$$

則又得

$$B(a,b)=\int_0^1 \frac{t^{a-1}dt}{(1+t)^{a+b}}+\int_0^1 \frac{z^{b-1}dz}{(1+z)^{a+b}}$$

然有定積分並不隨變數爲t或z而有所變更，故亦得以u替代t及z而上式即可改寫如次：

$$(9)\qquad B(a,b)=\int_0^1 \frac{u^{a-1}+u^{b-1}}{(1+u)^{a+b}}du$$

該式較為對稱

代入(8)式，卽得

$$(10)\qquad B(a,1-a)=\int_0^1\frac{x^{a-1}+x^{-a}}{1+x}dx$$

但

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}$$

$$\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

代入上式，卽得

$$B(a,1-a)=\int_0^1(x^{a-1}+x^{-a})[1-x+x^2+x^3\cdots\cdots$$

$$(-1)^n x^n]\,dx+(1)^{n+1}\int_0^1(x^{a-1}+x^{-a})\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

當 n 趨於無窮大，積分 $\int_0^1(x^{a-1}+x^{-a})\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$ 趨於零（得用中値公式證明之），因得

$$(11)\qquad B(a,1-a)=\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1-a}\right)+\left(\frac{1}{2+a}-\frac{1}{2-a}\right)$$

$$\cdots\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+a}\right]+\cdots\cdots$$

然按三角公式

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\theta}-\left(\frac{1}{\theta-\pi}+\frac{1}{\theta-\pi}\right)+\left(\frac{1}{\theta+2\pi}+\frac{1}{\theta-2\pi}\right)-\cdots+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{\theta+n\pi}+\frac{1}{\theta-n\pi}\right]+\cdots$$

若以

$$\theta=a\pi$$

即得

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)-\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)+\cdots\cdots\right]$$

使與(11)式相較　即得

$$(12)\qquad B(a,1-a)=\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

（完）

附　錄　五

費雪氏 X^2 表（克方測驗機率表）

Table of X^2※

自由度	P=.99.	.98.	.95.	.90.	.80.	.70.	.50.	.30.	.20.	.10.	.05.	.02.	.01.
1	.00016	.00063	.004	.016	.064	.148	.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.089	2.532	3.325	4.168	5.380	6.333	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.630	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.051	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.337	33.530	36.250	40.256	43.773	47.926	50.892

※取自 "Statistical Metdods for Research Workers" by R. A. Fisher.

附錄六

常態曲線之面積及縱距表

Aroas and Ordinates of the Normal Curve

(1) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(2) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(3) 在X/Q距之縱坐標 (Z)	(4) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(5) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(6) 在X/Q距之縱坐標 (Z)
.00······	.0000	.3989	.35······	.1368	.3752
.01······	.0040	.3989	.36······	.1406	.3739
.02······	.0080	.3989	.37······	.1443	.3725
.03······	.0120	.3988	.38······	.1480	.3712
.04······	.0160	.3986	.39······	.1517	.3697
.05······	.0199	.3984	.40······	.1554	.3683
.06······	.0239	.3982	.41······	.1591	.3668
.07······	.0279	.3980	.42······	.1628	.3653
.08······	.0319	.3977	.43······	.1664	.3637
.09······	.0359	.3973	.44······	.1700	.3621
.10······	.0398	.3970	.45······	.1736	.3605
.11······	.0438	.3965	.46······	.1772	.3589
.12······	.0478	.3961	.47······	.1808	.3572
.13······	.0517	.3956	.48······	.1844	.3555
.14······	.0557	.3951	.49······	.1879	.3538
.15······	.0596	.3945	.50······	.1915	.3521
.16······	.0636	.3939	.51······	.1950	.3503
.17······	.0675	.3932	.52······	.1985	.3485
.18······	.0714	.3925	.53······	.2019	.3467
.19······	.0753	.3918	.54······	.2054	.3448
.20······	.0793	.3910	.55······	.2088	.3429
.21······	.0832	.3902	.56······	.2123	.3410
.22······	.0871	.3894	.57······	.2157	.3391
.23······	.0910	.3885	.58······	.2190	.3372
.24······	.0948	.3876	.59······	.2224	.3352
.25······	.0987	.3867	.60······	.2257	.3332
.26······	.1026	.3857	.61······	.2291	.3312
.27······	.1064	.3847	.62······	.2324	.3292
.28······	.1103	.3836	.63······	.2357	.3271
29······	.1141	.3825	.64······	.2389	.3251
.30······	.1179	.3814	.65······	.2422	.3230
.31······	.1217	.3802	.66······	.2454	.3209
.32······	.1255	.3790	.67······	.2486	.3187
.33······	.1293	.3778	.68······	.2517	.3166
.34······	.1331	.3765	.69······	.2549	.3144

常態曲線之面積及縱距表 (續)

Areas and Ordinates of the Normal Curve (Continued)

(1) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(2) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(3) 在X/Q距之縱坐標 (Z)	(4) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(5) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(6) 在X/Q距之縱坐標 (Z)
.70......	.2580	.3123	1.05......	.3531	.2299
.71......	.2611	.3101	1.06......	.3554	.2275
.72......	.2642	.3079	1.07......	.3577	.2251
.73......	.2673	.3056	1.08......	.3599	.2227
.74......	.2703	.3034	1.09......	.3621	.2203
.75......	.2734	.3011	1.10......	.3643	.2179
.76......	.2764	.2989	1.11......	.3665	.2155
.77......	.2794	.2966	1.12......	.3686	.2131
.78......	.2823	.2943	1.13......	.3708	.2107
.79......	.2852	.2920	1.14......	.3729	.2083
.80......	.2881	.2897	1.15......	.3749	.2059
.81......	.2910	.2874	1.16......	.3770	.2036
.82......	.2939	.2850	1.17......	.3790	.2012
.83......	.2967	.2827	1.18......	.3810	.1989
.84......	.2995	.2803	1.19......	.3830	.1965
.85......	.3023	.2780	1.20......	.3849	.1942
.86......	.3051	.2756	1.21......	.3869	.1919
.87	.3078	.2732	1.22......	.3888	.1895
.88......	.3106	.2709	1.23......	.3907	.1872
.89......	.3133	.2685	1.24......	.3925	.1849
.90......	.3159	.2661	1.25......	.3944	.1826
.91......	.3186	.2637	1.26......	.3962	.2804
.92......	.3212	.2613	1.27......	.3980	.1781
.93......	.3238	.2589	1.28......	.3997	.1758
.94......	.3264	.2565	1.29......	.4015	.1736
.95......	.3289	.2541	1.30......	.4032	.1714
.96......	.3315	.2516	1.31......	.4049	.1691
.97......	.3340	.2492	1.32......	.4066	.1669
.98......	.3365	.2468	1.33......	.4082	.1647
.99......	.3389	.2444	1.34......	.4099	.1626
1.00......	.3413	.2420	1.35......	.4115	.1604
1.01......	.3438	.2396	1.36......	.4131	.1582
1.02......	.3461	.2371	1.37......	.4147	.1561
1.03......	.3485	.2347	1.38......	.4162	.1539
1.04......	.3508	.2323	1.39......	.4177	.1518

常態曲線之面積及縱距表 (續)

Areas and Orpinates of the Normal Curve(Coutinued)

(1) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(2) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(3) 在X/Q距之縱坐標 (Z)	(4) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(5) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(6) 在X/Q距之縱坐標 (Z)
1.40......	.4192	.1497	1.75......	.4599	.0863
1.41......	.4207	.1476	1.76......	.4608	.0848
1.42......	.4222	.1456	1.77......	.4616	.0833
1.43......	.4236	.1435	1.78......	.4625	.0818
1.44......	.4251	.1415	1.79......	.4633	.0804
1.45......	.4265	.1394	1.80......	.4641	.0790
1.46......	.4279	.1374	1.81......	.4649	.0775
1.47......	.4292	.1354	1.82......	.4656	.0761
1.48......	.4306	.1334	1.83......	.4664	.0748
1.49......	.4319	.1315	1.84......	.4671	.0734
1.50......	.4332	.1295	1.85......	.4678	.0721
1.51......	.4345	.1276	1.86......	.4686	.0707
1.52......	.4357	.1257	1.87......	.4693	.0694
1.53......	.4370	.1238	1.88......	.4669	.0681
1.54......	.4382	.1219	1.89......	.4706	.0669
1.55......	.4394	.1200	1.90......	.4713	.0656
1.56......	.4406	.1182	1.91......	.4719	.0644
1.57......	.4418	.1163	1.92......	.4726	.0632
1.58......	.4429	.1145	1.93......	.2732	.0620
1.59......	.4441	.1127	1.94......	.4738	.0608
1.60......	.4452	.1109	1.95......	.4744	.0596
1.61......	.4463	.1092	1.96......	.4750	.0584
1.62......	.4474	.1074	1.97......	.4756	.0573
1.63......	.4424	.1057	1.98......	.4761	.0562
1.64......	.4495	.1040	1.99......	.4767	.0551
1.65......	.4505	.1023	2.00......	.4772	.0540
1.66......	.4515	.1006	2.01......	.4778	.0529
1.67......	.4525	.0989	2.02......	.4783	.0519
1.68......	.4525	.0973	2.03......	.4788	.0508
1.69......	.4545	.0957	2.04......	.4793	.0498
1.70......	.4554	.0940	2.05......	.4798	.0488
1.71......	.4564	.0925	2.06......	.4803	.0478
1.72......	.4573	.0909	2.07......	.4808	.0468
1.73......	.4582	.0803	2.08......	.4812	.0459
1.74......	.4591	.0878	2.09......	.4817	.0449

常態曲線之面積及縱距表 (續)

Areas and Ordinates of the Normal Curve (Continued)

(1) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(2) 自曲線之中點至X/σ間之曲線下之面積	(3) 在X/σ距之縱坐標 (Z)	(4) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(5) 自曲線之中點至X/σ間之曲線下之面積	(6) 在X/σ距之縱坐標 (Z)
2.10......	.4821	.0440	2.45......	.4929	.0198
2.11......	.4826	.0431	2.46......	.4931	.0194
2.12......	.4830	.0422	2.47......	.4932	.0189
2.13......	.4834	.0413	2.48......	.4934	.0184
2.14......	.4838	.0404	2.49......	.4936	.0180
2.15......	.4842	.0395	2.50......	.4938	.0175
2.16......	.4846	.0387	2.51......	.4940	.0171
2.17......	.4850	.0379	2.52......	.4941	.0167
2.18......	.4854	.0371	2.53......	.4943	.0163
2.19......	.4857	.0363	2.54......	.4945	.0158
2.20......	.4861	.0355	2.55......	.4946	.0154
2.21......	.4864	.0347	2.56......	.4948	.0151
2.22......	.4868	.0339	2.57......	.4949	.0157
2.23......	.4871	.0332	2.58......	.4951	.0143
2.24......	.4875	.0325	2.59......	.4952	.0139
2.25......	.4878	.0317	2.60......	.4953	.0136
2.26......	.4881	.0310	2.61......	.4955	.0132
2.27......	.4884	.0303	2.62......	.4956	.0129
2.28......	.4887	.0297	2.63......	.4957	.0126
2.29......	.4890	.0290	2.64......	.4959	.0122
2.30......	.4893	.0283	2.65......	.4960	.0119
2.31......	.4896	.0277	2.66......	.4961	.0116
2.32......	.4898	.0270	2.67......	.4962	.0113
2.33......	.4901	.0264	2.68......	.4963	.0110
2.34......	.4904	.0258	2.69......	.4964	.0107
2.35......	.4906	.0252	2.70......	.4965	.0104
2.36......	.4909	.0246	2.71......	.4966	.0101
2.37......	.4911	.0241	2.72......	.4967	.0099
2.38......	.4913	.0235	2.73......	.4968	.0096
2.39......	.4916	.0229	2.74......	.4969	.0093
2.40......	.4918	.0224	2.75......	.4970	.0091
2.41......	.4920	.0219	2.76......	.4971	.0088
2.42......	.4922	.0213	2.77......	.4972	.0086
2.43......	.4925	.0208	2.78......	.4973	.0084
2.44......	.4927	.0203	2.79......	.4974	.0081

常態曲線之面積及縱距表 (續)

Areas and Ordinates of the Normal Curve (Continued)

(1) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(2) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(3) 在X/Q距之縱坐標 (Z)	(5) 以標準差爲單位之橫坐標上之距離	(5) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(6) 在X/Q距之縱坐標 (Z)
2,80……	,4974	,0079	3,15……	.4992	.0028
2,81……	,4975	,0077	3.16……	.4992	.0027
2,82……	,4976	,0075	3,17……	.4992	.0026
2,83……	,4977	,0073	3,18……	.4993	.0025
2,84……	,4977	.0071	3,19……	.4993	.0025
2.85……	,4978	,0069	3,20……	.4993	.0024
2,86……	,4979	,0067	3,21……	.4993	.0023
2,87……	,4979	,0065	3,22……	.4994	.0022
2,88……	,4980	,0063	3,23……	.4994	.0022
2,89……	,4981	,0061	3,24……	.4994	.0021
2,90……	,4981	,0060	3,25……	.4994	.0020
2,91……	,4982	,0058	3.26……	.4994	.0020
2,92……	,4982	,0056	3,27……	.4995	.0019
2.93……	,4983	,0055	3,28……	.4995	.0018
2,94……	,4984	,0053	3,29……	.4995	.0018
2,95……	,4984	,0051	3,30……	.4995	.0017
2,96……	,4985	,0050	3,31……	.4995	0017
2,97……	,4985	,0048	3,32……	.4995	.0016
2,98……	,4986	,0047	3,33……	.4996	.0016
2,99……	,4986	,0046	3,34……	.4996	.0015
3,00……	,4987	,0044	3,35……	.4996	.0015
3,01……	,4987	,0043	3,36……	.4996	.0014
3,02……	,4987	,0042	3,37……	.4996	.0014
3,03……	,4988	,0040	3,38……	.4996	.0013
3,04……	,4988	,0039	3,39……	.4997	.0013
3,05……	,4989	,0038	3,40……	.4997	.0012
3,06……	,4989	,0037	3,41……	.4997	.0012
3.07……	,4989	,0036	3,42……	.4997	0012
3.08……	,4990	,0035	3,43……	.4997	.0011
3,09……	,4990	,0034	3,44……	.4997	.0011
3,10……	,4990	,0033	3,45……	.4997	.0010
3,11……	,4991	,0032	3,46……	.4997	.0010
3,12……	,2991	,0031	3,47……	.4997	.0010
3,13……	,4991	,0039	3,48……	,4997	.0009
3,14……	,4992	,0029	3,29……	,4998	,0009

常態曲線之面積之縱距表 （續）

Areas and Ordnates of the Normal Curve (Continued)

(1) 以標準差為單位之橫坐標上之距離	(2) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(3) 在X/Q距之縱坐標 (Z)	(4) 以標準差為單位之橫坐標上之距離	(5) 自曲線之中點至X/Q間之曲線下之面積	(6) 在X/Q距之縱坐標 (Z)
3.50......	.4998	.0009	3.90......	.5000	.0002
3.51......	.4998	.0008	3.91......	.5000	.0002
3.52......	.4998	.0008	3.92......	.5000	.0002
3.53......	.4998	.0008	3.93......	.5000	.0002
3.54......	.4998	.0008	3.94......	.5000	.0002
3.55......	.4998	.0007	3.95......	.5000	.0002
3.56......	.4998	.0007	3.96......	.5000	.0002
3.57......	.4998	.0007	3.97......	.5000	.0002
3.58......	.4998	.0007	3.98......	.5000	.0001
3.59......	.4998	.0006	3.99......	.5000	.0001
3.60......	.4998	.0006	4.00......	.5000	.0001
3.61......	.4998	.0006	4.01......	.5000	.0001
3.62......	.4999	.0006	4.02......	.5000	.0001
3.63......	.4999	.0005	4.03......	.5000	.0001
3.64......	.4999	.0005	4.04......	.5000	.0001
3.65......	.4999	.0005	4.05......	.5000	.0001
3.66......	.4999	.0005	4.06......	.5000	.0001
3.67......	.4999	.0005	4.07......	.5000	.0001
3.68......	.4999	.0005	4.08......	.5000	.0001
3.69......	.4999	.0004	4.09......	.5000	.0001
3.70......	.4999	.0004	4.10......	.5000	.0001
3.71......	.4999	.0004	4.11......	.5000	.0001
3.72......	.4999	.0004	4.12......	.5000	.0001
3.73......	.4999	.0004	4.13......	.5000	.0001
3.74......	.4999	.0004	4.14......	.5000	.0001
3.75......	.4999	.0004	4.15......	.5000	.0001
3.76......	.4999	.0003	4.16......	.5000	.0001
3.77......	.4999	.0003	4.17......	.5000	.0001
3.78......	.4999	.0003	4.18......	.5000	.0001
3.79......	.4999	.0003	4.19......	.5000	.0001
3.80......	.4999	.0003	4.20......	.5000	.0001
3.81......	.4999	.0003	4.21......	.5000	.0001
3.82......	.4999	.0003	4.22......	.5000	.0001
3.83......	.4999	.0003	4.23......	.5000	.0001
3.84......	.4999	.0003	4.24......	.5000	.0001
3.85......	.4999	.0002			
3.86......	.4999	.0002			
3.87......	.4999	.0002			
3.88......	.4999	.0002			
3.89......	.4999	.0002			

附 錄 七

常態曲線之縱坐標（以最高坐標爲單位）

X\Q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95304	94010	94702	94387	94055	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91399	95010	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88520	87805	91558	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	87353	82010	81481	80957	80429	79896	79359	78817
0.7	78270	77721	82514	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0.8	72615	72033	77167	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	66097	71448	64891	64287	63683	63077	62472	61860	61255
1.0	60653	60047	59440	58834	58834	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54607	54007	53409	52814	52814	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48675	48092	47511	46933	46933	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	41294	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35971	34950	34445	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	31023	30082	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26489	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22392	21627	21251	20879	20511	20147
1.8	19790	19436	19086	18741	18741	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15530	14939	14650	14354	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12740	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10347	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08320	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06624	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05222	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	04074	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03148	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	02408	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01823	01723	01674	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01367	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00432	00219	00153	00106	00073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00010	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

立信會計叢書目錄

★簿記類

簿記初階 李文杰編
商業簿記 甘允壽編
初級商業簿記教科書 陳文麟 施仁夫編
高級商業簿記教科書 潘序倫著
COLLEGE BOOKKEEPING AND ACCOUNTING By Shu-Lun Pan
高級商業簿記實習題附屬文件

★會計學類

會計學(一—四冊) 潘序倫著
會計學 錢素君 夏治濤編
初級會計學 王逢辛編著
會計學概要 李鴻壽編
會計學教科書 潘序倫 王澹如編著
會計問題(上下冊) 施仁夫 唐文瑞編著
ADVANCED ACCOUNTING By Roy B. Kester.

★銀行會計類

銀行會計 陳福安編著
銀行會計 顧詢 陳福安著
暫行銀行統一會計制度

★成本會計類

成本會計 陳文麟譯
陀氏成本會計(上下冊) 施仁夫譯
勞氏成本會計 潘序倫譯
勞氏成本會計習題 潘序倫譯
棉紡織廠成本會計 陳文麟著
成本會計設計方法 張文中編著
ELEMENTARY COST ACCOUNTING By Chas. F. Schlatter.

★政府會計類

政府會計 張蓮生 王成杰編
中國政府會計制度 潘序倫 顧準編著
公有營業會計 余肇池編著
政府會計人員手冊
政府會計制度一致規定 汪元鈞編

★審計學類

審計學 顧準 唐文瑞編
審計學 潘序倫 顧詢著
政府審計原理 蔣明祺著
政府審計實務 蔣朝祺著
銀行內部審計 陳應援著
審計問題 錢迺澂編
查帳報告書及工作底稿 顧詢 錢迺澂編
審計問題答解 錢迺澂編
中國現行審計制度 許祖烈著

★其他會計類

股份有限公司會計上下冊 潘序倫著
鐵道會計 張心澂著
電業會計 楊濤著
各業會計制度(一二三集) 潘序倫編
倉庫實務會計 卡宗濂著
會計名詞彙譯 潘序倫編譯
會計數學 李鴻壽 莫啓歐編譯
會計數學用表 李鴻壽 莫啓歐編
決算表之分析及解釋 潘讚甲譯
決算表之分析 黃組方著
決算表之編製及內容 黃組方編著
無形資產論 施仁夫譯

立信商業叢書目錄

★商業類

商業常識 陳文 張英閣編
商業概論(上下冊) 陳 文著
商業應用文作法 羅翔勛編著
財政學概論 王延超著
國家經濟學原理 林和成譯
貨幣學 陳紹武著
銀行學 金天錫 宋棨岩 陳顯光著
銀行實務概要 王澹如著
廣告學 丁馨伯著
投資學 任扁麗著
公司實務 鄭世賢編著
珠算匯宗 李鹹鏞著

★法規類

公司法
新公司法解釋 張肇元編
銀行法
活頁直接稅法規
活頁工商法規
鑛業法規
保險業法規
工商業獎勵法規
政府會計審計法規
工商業同業公會及人民團體組織法規

★統計類

統計學 褚一飛編著
統計學續編 褚一飛編著
統計學新論 王思立編著
調查統計 蕭承祿編著

立信會計師事務所設計：

立信帳簿表單

印製精良　格式完備

種類

中西式帳簿、傳票、憑單、表冊、會計用品

機關用各式帳簿表單、學生簿記練習紙

（備有詳細目錄及樣本索閱即寄）

立信會計圖書用品社股份有限公司

印製發行

中華經濟統計研究所
叢書之二
統計學續編
全一冊

每冊基價國幣二元
外埠酌加郵費運費

編著者 褚一飛

發行人 顧詢

發行所 立信會計圖書用品社
上海河南路三三九號
南京中山路二一三號
重慶小什字立信大樓

印刷者 中和印刷廠
上海(9)淮安路七二七弄三〇號

中華民國三十三年四 初版
中華民國三十七年一月再版 (滬)