上海知不足職業補習學校

算學補充教材

對初學代數學者第一次談話

張筱樓
丘立拳先生

1. 算術用數字或數碼表示數目，代數又用字母代替牠們，所以我們叫做代數· 但是一個數目，可以從許多數加減乘除開方而來，所以代數裏的一個字母，可以代表一個含許多數許多計算的式子，並且這樣式子也可做一個字母看·

2. 在一羣人中，可以泛指一人，如學生不離書本，是指學生界裏的任一人；在一羣數中，也可泛指一數，如偶數是2的倍數，是指偶數羣裏的任一數· 後例在代數裏，即可表以$2n$，即$2\times n$，n表整數，$2n$就成2的倍數· 算術裏計算公式，如

前項/後項＝比率，單利＝本錢×利率×期數，複利＝本錢×(1＋利率)^{期數}，

可省做

前/後＝率， 利＝本×率×期， 利＝本×(1＋率)^{期}，

再進一步，即成

$a/b=r$, $i=prt$, $i=p(1+r)^t$

即成爲代數式· 不過代數式中不能用我國字，外人較我更佔便宜，一見單利公式，即知單利等於本錢、利率、期數三者之積，因i、p、r、t即爲interest、principal、rate、time之縮寫也·

3. 不知姓名的人，可叫做甲，叫做乙；不知多少的數，也可以叫甲數，叫乙數，或就叫做甲、乙· 在代數裏，也可表以x,y——；所以x,y——就是不知多少的數的代名詞· 一個題目，先把未知的數代以x,y——，把所有數目的關係都用算式表出，題意即能完全顯露，由此再求解法，比較算術，十九都是化難爲易·

4. 數的關係，用代數式表示，可比算術清楚，理性用代數式說明，可比算術簡捷· 所以算術裏的應用難題，用代數式一步一步推求，很容易得解法，一步一步計算，計算也很容易；算術裏的乘方、開方理性，用代數式一步一步推求，很容易得證法，一步一步說明，說明也很容易· 學代數者，用於算術，處處都有捷徑；教算術者，不忘代數，免去許[illegible]

5. 代數裏的一個字母，可以表一個不名整數、一個不名小數、一個不名分數、或其他任何不名數，可以表甲式、乙式、以及任何式，和一個數字、一個數碼絕對不同，千萬不能忘記，忘記就不能學代數了！

6. 算術裏講整數、分數，代數裏也講整式、分式；但

(1) 整式如ab，不必定表整數，在$a=3,b=\frac{1}{5}$時，$ab=\frac{3}{5}$，

(2) 分式如$\frac{a}{b}$，不必定表分數，在$a=3,b=\frac{1}{5}$時，$\frac{a}{b}=15$．

所以和某種數表面相似的代數式，不必一定表某種數，千萬不能誤會，誤會也不能學代數了！

7. 數的位和式的項，在說明乘方、開方理性時，都拿牠們對照的講；但是位和項根本不同，也是我們要知道的．

如$x=10$時，　$123=x^2+2x+3,(x^2+2x+3)^2=x^4+4x^3+10x^2+12x+9$；但$123^2=15129$，代數式的各項係數(1、4、10、12、9、)，可以大於9，而這平方數任一位裏，沒有大於9的，又從$x^4+4x^3+10x^2+12x+9$開平方，可以復得x^2+2x+3，若從$x^4+5x^3+x^2+2x+9$去求，絕對不能得這個平方根了．

8. 算術裏的算號，都能用到代數裏面，但是也有小異之處，如

(1)$a\div bc=a\div(b\times c)$，不是表$a\div b\times c$的，

(2)$\sqrt{}ab=(\sqrt{}a)\times b$，不是表$\sqrt{ab}$的，

(3)$x\frac{1}{y}=x\times\frac{1}{y}$，不是表$x+\frac{1}{y}$的，

須時時去注意才好！

9. 無係數的字母，係數就是1，無指數的字母，指數也是1，

如$x=1x^1,ab=1a^1b^1,\frac{a}{b}=1\times\frac{a^1}{b^1}$，

和無分母的數或式分母是1一樣；但是係數、指數可以爲0，0非表示無限小時，分母不能爲0．如果忘記牠們，演算一定會錯，這也是代數和算術不同的地方．

10. 在代數裏，加一個數，未必是加，減一個數，未必是減，如：

(1)$a+b$，在$a=+3,b=+5$時是$3+5$，在$a=+3,b=-5$時是$3-5$；

(2)$a-b$，在$a=+3,b=+5$時是$3-5$，在$a=+3,b=-5$時是$3+5$．

所以許多數加減的式子，可以變爲諸數的和．　又拿一數乘，未必是乘，拿一數除，未必是除，如：

(1)ab，在$a=3,b=5$時是3×5，在$a=3,b=\frac{1}{5}$時是$\frac{3}{5}$；

(2)$\frac{a}{b}$，在$a=3$，$b=5$時是$\frac{3}{5}$，在$a=3$，$b=\frac{1}{5}$時是3×5．

所以許多數乘除的式子，也可變爲諸數的積．　代數式的含義廣而變化大，所以牠的用處非常之大，絕對不是算術所能及的．

上海知不足職業補習學校

算學補充教材

對初學平面幾何者第一次談話

張筱樓
高佐治 先生

1. 面和體，算術要求牠們的積；綫就是面的邊；體的棱也是熟客。點雖無圖不有，學算術者絕對不知注意；但是牠爲一切圖形之原，在幾何裏，非先注意不可。

2. 面不能離體獨立，但須假定和體離開，才能做精細的研究。 平面幾何，祇講一個平面，一切點、綫都在這個平面之內。 這個平面，就是用紙畫圖時的紙面，用黑板等畫圖時牠們的表面。

3. 綫不能離面獨立，點不能離綫獨立， 但是平面幾何 ， 可離開面講綫，綫不必是三角形等的邊，離開綫講點，點不必是綫的兩端，和算術裏講不名數一樣，雖與實際不符，殊覺簡明多多。

4. 在直綫的任何處，可取一點，直綫實含無窮個點；在平面的任何處，可取一條直綫，平面實含無窮直綫。 所以點動可以成綫，綫動可以成面；直綫有點，平面有綫，卽可分爲若干部份。

5. 二點間有綫，從此點量到他點，卽得這綫的長；二點間無綫，從此點量到他點，卽得這二點的距離。 所以長是指綫說，距離是指二點說的，二者雖可相等，但決不能混而爲一。

6. 角的大小，指二邊張開的大小說，和邊的長短無關；所以大門小門可以開成同大的角， 大書小書亦可開成同大的角。 平面的任一方 ， 都可以無限制，角也是牠的一部份，所以邊的長短沒有限制，和常見的牛角、羊角，非幾何裏的角，是完全不同的。

7. 矩形是四角都是直角的平行四邊形，最好叫做方形：包長方形、正方形在內，不是單指長方形的。

8. 圓界要叫圓周，若也叫圓，和指全圓無別，學者必定誤會而生種種錯誤。

9. 三角形的底，不必是在最下的一邊，高不必是從最高角頂到一邊的垂綫長。牠的各邊，都可做底；祇有兩等邊三角形且非等邊三角形的，須以和他邊不等的一邊做底。所以平行四邊形和梯形，可以有兩個底，因爲兩平行邊方向是一樣的。

10. 算術裏講直綫，都是有定長的綫段，就是三角形、四邊形等的邊，實則直綫的長可以無限，綫段兩端可以任意延長。無條件的直綫，位置也可隨便。

11. 平面用直綫來決定，和木匠石匠所用的方法一樣，不要把幾何裏所講，都去看做出乎常識之外。幾何理性，雖不以實際點、綫等爲根據，最初實從經驗得來，現在仍須用之於實際的。

12. 平面幾何講平面圖形，就是圖形裏的點、綫，原在一個平面之內。若原不在一平面內的點、綫，畫在一個平面之內，就非平面圖形。凡關於體的圖，都非平面圖形而爲空間圖形或立體圖形。

13. 直綫祇有一個向度，是容易知道的。面非方形，體非直方柱，不易知其有二向度或三向度，但是看算術裏求面積、體積的公式，三角形要用底長及高，梯形用二底長及高，菱形用兩對角綫長，方錐用底的長、闊和牠的高，圓錐用底的半徑^{2}和牠的高，球用半徑^3，便可恍然明白。

14. 從算術得來的圖形知識，完全以實驗爲根據，且均係斷片的，在幾何裏，須加以整理，使有系統，並一一推出理由而證明之。人常說無根據的話，幾何不能有無根據的理，無證卽不信其爲真。但是已經證明之理，可以直接引用，不必一證再證，反復累贅。

上海知不足職業補習學校

算學補充教材

對初學空間幾何者第一次談話

張筱樓 劉遂生 先生

1. 空間幾何學，以前都叫做立體幾何學，好像牠和算術所講的，範圍是一樣的狹隘，祇有正方體、長方體的體積，圓形或方形升斗等的容積，也可以看做體積，沒有分別，其實空間幾何，不僅研究體或一個體各面、各稜、各頂的關係，並且研究空間一切點、綫、面、體的關係，連不成體的點、綫、面都包在內，初學空間幾何者，對此特別注意，不要誤會。

2. 兩點都在一直綫內，三點就不一定；三點都在一平面內，四點也不一定。 所以在空間幾何裏，過不在一直綫內三點、或一直綫及其外一點、或相交二直綫、或平行二直綫，祇能作一平面。 這裏說過某點、某綫作平面，就是表示牠們在某平面內；其實任何圖形都可用一平面去畫。

3. 空間幾何用平行四邊形代表平面，和平面幾何用直綫段代表直綫一樣。 因爲直綫兩端無限，平面周圍亦無限，而過平行二直綫祇能作一平面，將平行綫兩端引伸到無限長，又決不能相交，所以平行四邊形最能把一個周圍無限的平面表示出來，梯形、三角形等，都不及牠顯明，祇在繁複圖內求簡便時用之。

4. 代表平面的平行四邊形，各邊的方向可以隨便；但須視全圖如何而定，總以能使全圖簡單明白並易知其爲空間圖形者爲佳。

5. 空間圖形，被他邊所掩看不見的綫，都宜作虛綫；近人目的綫宜粗而遠者宜細。 至於證明或作圖時添作的綫，要和假設或已知者有分別，可用不相同的顏色，不能都作虛綫以免混淆。

6. 畫點，旁邊都寫一個英文字母，直綫用二字母或一字母，平面用四字母或二字母或一字母。 用四字母，寫在平行四邊形的四個角頂；用

二字母，寫在不相隣的兩個角項或在牠的相對兩側，卽一左而一右或一上而一下；用一字母，寫在一個角內近角項處或在牠的任一側，卽左、右、上、下，任擇其一。 假如用二字母或一字母，都用在後半的大寫字母，說時卽不易和直綫或點相混。

7. 用文字表示畫出的空間圖形，也用記號，但和平面圖形不能相同。 平面圖形的記號，大抵縮圖在前，字母在後，空間則逕用名字，不用縮圖，如二面角A-BC-D，三角錐0-ABC等，因空間圖形繁複，縮圖不易畫也。(二面角卽二平面相交於一直綫所成之形， 三角錐卽四個三角形圍成之體，可與下節參看。)

8. 平面角用項和邊表示，如∠ABC，B爲項，BA、BC爲邊；所以二面角用面和稜表示，如二面角A-BC-D，BC爲稜，AC、BD爲面。 三角形用項和底表示，如△ABC，A爲項，BC爲底；所以三角錐亦用項、底表示，如三角錐O-ABC,O爲項，△ABC,爲底。 在空間圖形記號裏，所用字母和牠們的排列次序，可從有關的平面圖形比較而得，一則常用一，一則絕對不用，這是牠們大分別處。 若上面不用一，則ABCD和0ABC將誤認爲四邊形，不知爲二面角、三角錐了。

9. 平行綫須在一平面內，所以空間不能相交的二直綫，不必是平行綫；垂綫也要二綫相交或引長後相交，所以二綫祗取成直角的兩個方向，不必就是垂綫。 點和面的距離與綫和面的距離、面和面的距離，也和算術裏所講點和綫的距離、綫和綫的距離一樣，都是取其間最短直綫且有一定長者，就是垂綫或公垂綫，以這直綫的長做牠們的距離。

10. 平面幾何的公理，定理，自然可以用於空間幾何，但須特別注意其中有分別的地方；如平行於一直綫的二直綫平行，在平面幾何裏，祗要證其不能相交，在空間幾何裏，還要證牠們在一平面之內，又二邊兩兩平行且同向的二角相等，在平面幾何，都是證牠們等於第三角，在空間幾何，不能如此簡單。

上海知不足職業補習學校

算學補充教材

對初學微積分學者第一次談話

張筱樓
丘佩如先生

1. 代數學講對數，原數有極微變化時，牠的對數也因牠有極微的變化；三角法講三角函數，在一象限內的變角，牠的弧度有極微變化時，各三角函數也都有極微的變化；解析幾何學講位標，在一綫內的動點，牠的橫位標有極微變化時，縱位標也有極微的變化：所以對數是數的連續函數；角在一象限內變時，各三角函數都是弧度的連續函數；點在一綫之內動時，縱位標是橫位標的連續函數。 微積分學，就是研究變數有極微變化牠的函數變化也極微時的關係，用牠解決一切科學上實際上的種種問題。

2. 變數變化極微時前後的差，即變數的微分；函數因牠有極微變化時前後的差，即函數的微分；前微分除後微分的商，即為一次微分係數。

對數表內沒有的對數，三角函數表內沒有的三角函數，可以應用微分去求；曲綫各點切綫的方向，也可應用一次微分係數去求。

3. 以 d 表微分，與代數學以一字母代一個數不同，與三角法以三字母代一個三角函數也是兩樣；如：

設 $y=f(x)$，則

$dx=x$ 的微分 $\neq d\times x$，

$(dx)^2=x$ 的微分$^2\neq d^2x^2$，

$\dfrac{dy}{dx}=y$ 的一次微分係數 $\neq\dfrac{y}{x}$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=y$ 的二次微分係數 $\neq\dfrac{dy}{x^2}$ 或 $\dfrac{(dy)^2}{dx^2}$。

4. x^2 的微分 $d(x^2)$ 和 x 的微分平方 $(dx)^2$，都不宜去括號，和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的 dx^2 無別。 若將表微分的 d，稍變形狀為d，如變 r 為 $\surd$ 表開方，或橫寫為ᑯ，

如橫S為∽表相似，可使dx不與$d\times x$相混。　又$\frac{d^2y}{dx^2}$改作$\frac{d_x y}{d_x x}$或$\frac{\eth_x y}{\eth_x x}$，亦可免去許多誤會。

5. 在u為x的函數時，$\frac{df(u)}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$，但是$\frac{d^2f(u)}{dx^2}$有時等於$\frac{d^2f(u)}{du^2}\cdot\frac{(du)^2}{(dx)^2}$，有時並不相等，可令$f(u)=(2ax)^n$或$(2ax^2)^n$證明之。

$$\because \frac{df(u)}{dx}=\frac{d[(2ax)^n]}{dx}\text{或}\frac{d[(2ax^2)^n]}{dx}$$

$$=\frac{d(2^na^nx^n)}{dx}\text{或}\frac{d(2^na^nx^{2n})}{dx}$$

$$=\frac{2^na^nd(x^n)}{dx}\text{或}\frac{2^na^nd(x^{2n})}{dx}$$

$$=2^na^nnx^{n-1}\text{或}2^na^n2nx^{2n-1}$$

$$=2^na^nnx^{n-1}\text{或}2^{n+1}a^nnx^{2n-1},$$

$$\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d[(2ax)^n]}{d(2ax)}\cdot\frac{d(2ax)}{dx}\text{或}\frac{d[(2ax^2)^n]}{d(2ax^2)}\cdot\frac{d(2ax^2)}{dx}$$

$$=n(2ax)^{n-1}\cdot 2a\text{或}n(2ax^2)^{n-1}\cdot 2a2x$$

$$=2^na^nnx^{n-1}\text{或}2^{n+1}a^nnx^{2n-1},$$

$$\therefore \frac{df(u)}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

$$\because \frac{d^2f(u)}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{df(u)}{dx}\right)}{dx}$$

$$=\frac{d(2^na^nnx^{n-1})}{dx}\text{或}\frac{d(2^{n+1}a^nnx^{2n-1})}{dx}$$

$$=2^na^nn(n-1)x^{n-2}\text{或}2^{n+1}a^nn(2n-1)x^{2n-2};$$

$$\frac{d^2f(u)}{du^2}\cdot\frac{(du)^2}{(dx)^2}=\frac{d\left(\frac{df(u)}{du}\right)}{du}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

$$=\frac{d[n(2ax)^{n-1}]}{d(2ax)}\cdot(2a)^2\text{或}\frac{d[n(2ax^2)^{n-1}]}{d(2ax^2)}\cdot(2^2ax)^2$$

$$=n(n \qquad a^2\text{或}n(n-1)(2ax^2)^{n-2}\cdot 2^4a^2x^2$$

$$=2^na^nn(n-1)x^{n-2}\text{或}2^{n+2}a^nn(n-1)x^{2n-2},$$

$$\therefore \frac{d^2[(2ax)^n]}{dx^2}=\frac{d^2[(2ax)^n]}{d(2ax)^2}\cdot\frac{[d(2ax)]^2}{(dx)^2},$$

$$\frac{d^2[(2ax^2)^n]}{dx^2}\neq\frac{d^2[(2ax^2)^n]}{d(2ax^2)^2}\cdot\frac{[d(2ax^2)]^2}{(dx)^2}.$$

6. 凡算學內似同而異似異而同之處，均須特別留意，細心分別，不獨微積分學才要這樣。