復興初級中學教科書

幾ㄐㄧ何ㄏㄜˊ

下　冊

余介石　徐子豪編著
段　育　華　校　訂

按照新課程
標準編輯

商務印書館發行

復興初級中學教科書

幾ㄐㄧ 何ㄏㄜˊ

下　册

余介石 徐子豪編著
段育華校訂

商務印書館發行

幾何學下册目次

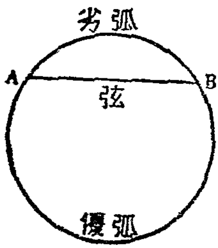
下　　册

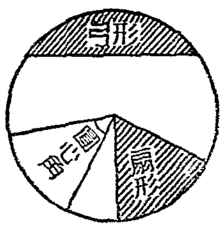
第六編　圓和軌跡

圓

127. 關於圓的要件. 複習§76.

圓周的一段叫做弧(Arc), 圓上二點, 把圓分爲長短二弧, 長的叫優弧(Major arc), 短的叫劣弧(Minor arc) 初等幾何學中所講二點間弧, 常指劣弧而言. 連接一弧二端的線段,叫做弦





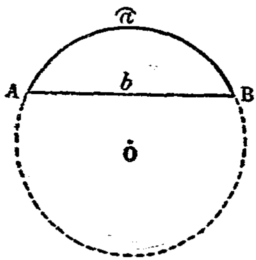
(Chord).弦和所張弧合成圖形叫弓形(Segment).

二半徑的夾角,叫圓心角 (Central angle).

二半徑同所抱弧合成的圖形,叫做扇形(Sector).

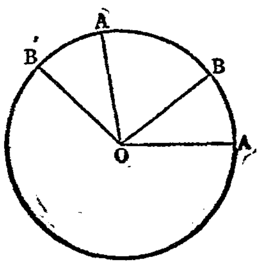
128. 圓和弧的記法. 圓的記號是⊙,其後

附記圓心,如右圖可記爲⨀O. 弧的記法,和線



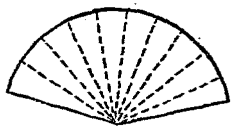
段相倣, 可用二個大寫字母, 或一小寫字母表示,但字母上須加一⌒號如右圖中$\overset{\frown}{AB}$或$\overset{\frown}{a}$.

129. 弧和角的度量. 將一扇形OAB,不變O點位置而旋轉, 到扇形OA′B′的位置. 則OB與OB′疊合,OA與OA′疊合,$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{A'B'}$在同圓上,所以也完全疊合. 故



在同圓(或等圓)內,如二圓心角相等,則所抱的弧也等; 逆言之,如二弧相等,則所對的二

圓心角也相等.



將一弧分爲若干等分,連接自各等分點到圓心的半徑,則圓心角也被分成同數的等分. 反過來說,等分一圓心角的諸半徑,也必等分弧. 在特例分周角爲360等分,每分稱爲1度,這時圓也被分爲360等分,每分也稱爲1度,記號都是°,如30°,40°. 但須注意每度弧的長短,和半徑的長短有關,不比角的大小,與邊無涉.

如一角和一弧有相同度數,我們稱這角被那弧所度. 由上面所說的理,又可見

圓心角被對弧所度.

這條定理,是角與弧各種關係的基礎.

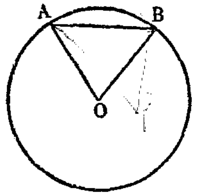
習 題 三 四

1. 用量角器作已知度數的角,是根據什麽道理?

*2. 一直徑所成的圓心角是幾度? 所對的弧是全圓的幾分之幾? 這弧叫做什麽(參看習題四第7題)?

*3. 證明互相垂直的二直徑,分圓爲四等弧.

註　這弧叫做四分弧(Quadrant).



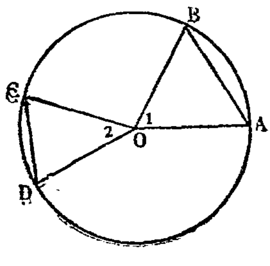
*4. 如AB弧等於半徑,證明$\widehat{AB}$為全圓六分之一.

*5. 在⊙O中,已知∠AOB=m°, 求∠OAB的度數.

6. 如∠APB的度數等於$\widehat{AB}$度數,P點是不是即為圓心? 在什麼時候,才必為圓心?

130. 圓心角,弧,弦三要件的關係. 由圓心角被弧所度的理,立知

(一)在同圓或等圓裏,圓心角大的所對弧也大,小的所對的弧也小;逆言之,大弧所對的圓心角大,小弧所對的圓心角小.



在上圖中

(1) 如∠1>∠2,

則 $\widehat{AB}>\widehat{CD}$.

(2) 如 $\widehat{AB}>\widehat{CD}$,

則 $\angle 1>\angle 2$.

註. 等圓的情形也是一樣,學生試自將圖補出.

在 $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ 中有二組對應等邊,按全等與非全等三角形各定理,再加(一)的關係,即得

(二)在同圓或等圓裏,等弧所對的弦也等,大弧所對的弦也大;逆言之,等弦所對弧也等,大弦所對的弧也大.

在上圖中

(1) 如 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$, 則 $AB=CD$,

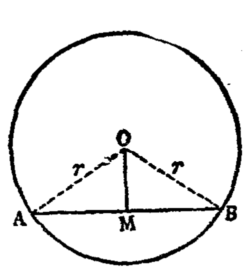
如 $\widehat{AB}>\widehat{CD}$, 則 $AB>CD$,

(2) 如 $AB=CD$, 則 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$,

如 $AB>CD$, 則 $\widehat{AB}>\widehat{CD}$.

以上各理的證明, 學生宜自己補出.

131. 垂徑分弦定理. 從圓心到弦上的垂線,必平分這弦.



[假設]　在⊙O 中 $OM \perp AB$.

[求證]　　　　$AM = MB$.

[解析]　$\triangle OMA$, $\triangle OMB$ 是何種 $\triangle$? 其中有什麼對應相等的元素? 是不是全等形?

[證明]　連結 OA,OB 二半徑,因原設 $OM \perp AB$,故得二個直角三角形 rt. $\triangle OMA$, rt. $\triangle OMB$. 且

OM 是公共邊, $OA = OB = r$　　　(等邊半徑定理)

$\therefore$　rt. $\triangle OMA \equiv$ rt. $\triangle OMB$　　　(全等 rt. $\triangle$ 定理二)

即　　　　$AM = MB$.

系一.　圓心與一弦中點聯線,必與這弦垂直.

系二.　一弦的平分垂直線,必過圓心.

這二系均可由垂線公理一二來證.

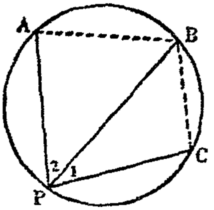
系三.　從圓心到弦上的垂線,平分對這弦線的圓心角.

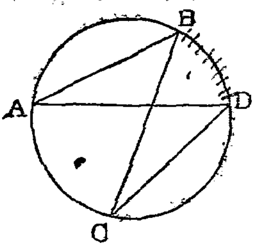
習 題 三 五

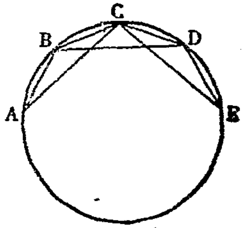
1. 下左圖裏, $PA = PC$, $\angle 1 \not< \angle 2$, 試證 $\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

2. 下中圖裏, $AB = CD$, 試證 $AD = BC$.

3. 下右圖裏, $AB = BC = CD = DE$, 試證 $AC = BD = CE$.





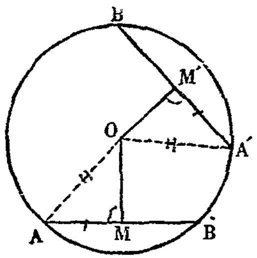


*4. 證明: 平分一弦的半徑,也平分這弦所對的弧.

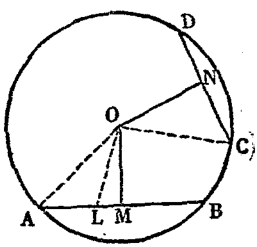
*5. 證明: 連結一弦中點和其所對弧中點的直線,必經過圓心.

6. 證明圖中一直徑如平分一弦,必平分與這弦平行的一切諸弦.

132. 弦心距定理. 同圓或等圓裏,等弦距圓心等遠,大弦距圓心較近.



(1)



(2)

[假設] (1) AB=A'B' (左圖) (2) AB>CD (右圖)

[求證] (1) OM=OM' (左圖) (2) OM<ON (右圖)

[解析] (1) 證明 rt.△OMA≅rt.△OM'A' (看§130解析)

(2) 按假設 AB>CD,則 AM 與 CN 的長短如何? 因此可在 AM 中取 L,使 AL=CN. 又 $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ 二弧大小如何?

因此可否推斷,次列各組角的大小: (一)∠AOB, ∠COD (二)∠AOM,∠CON (三) ∠OAM,∠OCN? 再就 △OAL, △OCN 來比較 OL 與 ON,并注意 OL>OM.

[證明] (1) $AM=\frac{1}{2}AB$, $A'M'=\frac{1}{2}A'B'$ (垂徑分弦)

而假設 AB=A'B' ∴ AM=A'M' (普通公理)

連接 OA,OA' 二半徑,成 rt. △OMA, rt. △OM'A', 其中又有 OA=OA'.

∴ rt. △OMA≡rt. △OM'A' 而 OM=OM' (rt.△定理二)

(2) 因 $\frac{1}{2}AB>\frac{1}{2}CD$. 卽 AM>CN,故可取 L,使 AL=CN.

連接 OA=OC 二半徑,則 △OAL, △OCN 中,已有二組對應等邊,今試比較 ∠OAL, ∠OCN 二夾角.

因 AB>CD,故 ∠AOB>∠COD (圓的要件關係一)

但 $\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle CON=\frac{1}{2}\angle OCD$

(垂徑分弦系三)

且 ∠OAM+∠AOM=∠CON+∠OCN=rt.∠

(△內角和系四)

∴ ∠OAM<∠OCN, 卽 ∠OAL<∠OCN

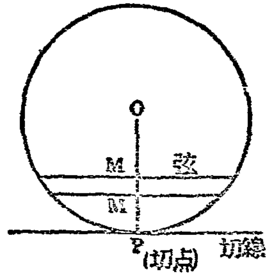
∴	OL<ON	(非全等△定理一)
但	OL>OM	(同上系)
∴	OM<ON	(不等量公理)

133. 弦心距定理的逆定理. 試用轉換法, 即可證得上理的.

逆定理. 同圓或等圓裏,距圓心等遠的弦必等,距圓心較近的弦大.

凡是一條定理裏, 如同時包括等於, 大於, 小於三種情形, 則用轉換法都能證明其逆理必定成立. 像§130內的(一) (二)兩條中, 同時包括正逆二定理, 其所以都能成立的原因, 即如上述.

134. 切線. 在⊙O的半徑OP內取一點



M,而作過 M 與 OP 垂直的弦. 由上二節的理,可見OM的長漸加時,這弦的長漸減. OM的長最多能等於 OP,那時弦的長必縮爲烏有. 換句話說,過P點而與OP垂直的線,與這圓只有一交點. 這條直線,叫做⊙O的切線 (Tangent), P 點稱爲切點(Point of contact).

135. 切線定理. 由上節所述,卽可得

切線定理. 一圓半徑在圓上端點的垂線,卽那圓的切線.

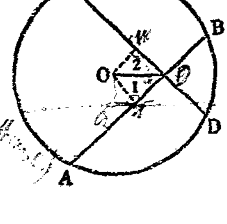
再按垂線公理,卽知

系一. 過切點的半徑,必垂直於切線.

系二. 過切點而與切線垂直的線,必經過圓心.

習　題　三

1.在右圖中,試證如∠1=∠2,則AB=CD;如∠1>∠2,則AB<CD.



2.證明過圓內一點P的弦,以過P點半徑垂直的爲最短.

3.證明直徑二端的切線必平

行,其餘的必相交.

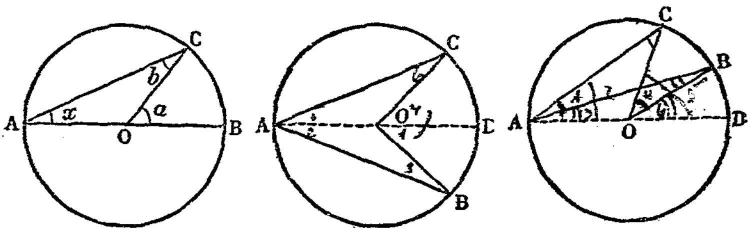
*4. 證明過圓上一點,只有一切線 過圓外一點,有幾切線呢?

5 證明過弧中點,而與所對弦平行的線,必爲切線.

*6. 如一點在圓內,則到圓心的距離必小於半徑,如在圓外,則距離大於半徑. 試由這理及垂線最短(非全等三角形定理一的系)的理,來證明切線定理.

136. 圓周角. 過圓上一點二弦的夾角,叫做圓周角(Inscribed angle).

137. 圓周角定理. 圓周角被所截弧的一半所度.



[假設] 在⊙O中,圓周角∠BAC與圓心角∠BOC同對$\widehat{BC}$(隨便看那一圖).

[求證] ∠BAC被$\frac{1}{2}\widehat{BC}$所度.

[解析] 就過圓周角頂點直徑.

(一)與這角一邊相合(左圖),

(二)在這角內(中圖),

(三)在這角外(右圖),三種情形分論.

(一)注意圓心角是一等腰△的外角.　(二)分爲二角和,卽合(一)的情形.　(三)分爲二角差,使合於(一)的情形.

[證明]　(一)連半徑 $OC=OA$　(同圓半徑)

則在等腰$\triangle OAC$中,　$\angle x=\angle b$　(等腰△定理一)

又　$\angle a=\angle x+\angle b$　(△內角和系一)

$=2\angle x$　(普通公理)

卽　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$

但　$\angle BOC$被$\overset{\frown}{BC}$所度　(對弧度圓心角)

$\therefore$　$\angle BAC$,被$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$所度.

(二)作直徑 BD,分圓周角BAC爲$\angle BAD$,$\angle BAC$,圓心角$\angle BOC$爲$\angle BOD$,$\angle DOC$、按(一)所證

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,\quad \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC$$

相加　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$　(普通公理)

故　$\angle BAC$被$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$所度.

(三)作直徑BD,成另一圓周角$\angle DAB$,又一圓心角

$\angle DOB$. 則

$$\angle BAC=\angle DAC-\angle DAB,\quad \angle BOC=\angle DOC-\angle DOB.$$

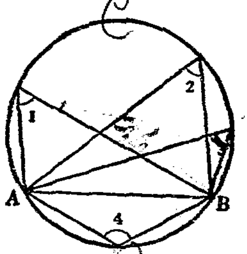
但 $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,\ \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC.$

$\therefore$ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle DOC-\frac{1}{2}\angle BOD$ (普通公理)

$$=\frac{1}{2}(\angle DOC-\angle BOD)=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

即 $\angle BAC$ 被 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 所度.

系一. 凡截取同弧,而在這弧所對弦同側的各角必相等.



如右圖中 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

又因A,B所定優劣二弧的和爲360°,所以

$\angle 1+\angle 4=180°$,故有

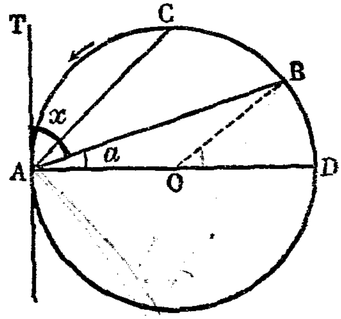
系二. 凡截取同弧,而在這弧所對弦異側的二角必相補.

如AB爲直徑,則優劣二弧相等,而爲半圓,故有

系三. 凡截取半圓的圓周角必爲直角.

138. 弦切角定理. 在$\odot O$內,有一圓周角

$\angle BAC$. 今移動C點,使漸趨於A,而終至相合.這時 $\widehat{BC}$ 變爲 $\widehat{AB}$,按圓周角定理,得



弦切角定理. 弦端切線與弦所成角被這弦所對弧的半所度.

這理也可直接證明如次: 作直徑AD,則 $AD\perp AT$. $\angle a$ 被 $\widehat{BD}$ 的半所度,同時又和 $\angle x$ 相餘. 且 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{BD}$ 的和爲180°. 故 $\angle x$ 被 $\frac{1}{2}\widehat{AB}$ 所度.

學生試自行寫出詳細證法,并註明各步的理由.

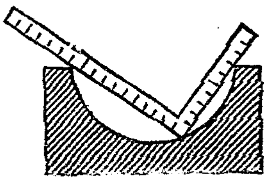
系. 弦端切線與弦所成的角,等於截這弦所對弧的任何圓周角.

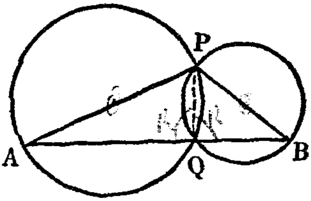
習題三七

1. 證明習題五第4題的作垂線法.

2. 證明§§28,29的作切線法.

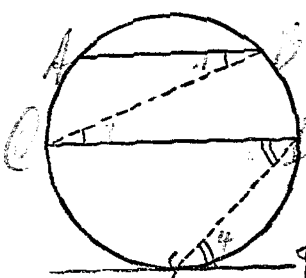
3. 木匠在木板上挖一半圓如下左圖,如欲割得準確,則用直角試驗時應當怎樣?

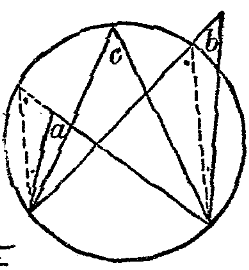


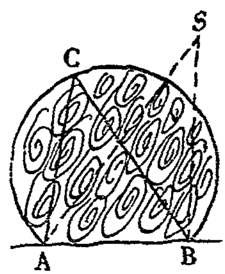


4. 如上右圖,AP,BP是二圓中直徑,試證A,Q,B三點在一直線上.

*5. 證明:平行二弦,或平行的一弦一切裏,所夾的二弧必相等(看下面左圖).





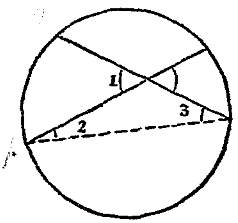


*6. 如上中圖,∠c是圓周角,∠b頂點在圓外∠a的在圓內,試證∠a>∠c>b.

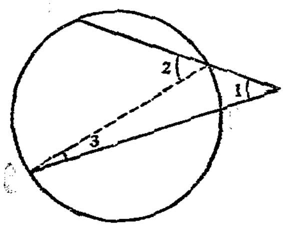
7. 如上右圖,測得AB旁暗礁,可以圍在一弓形內.若在A,B二處設燈塔,測定圓周角∠ACB. 則海船S行駛時,只要∠ASB<∠ACB,就不會觸礁,何故?

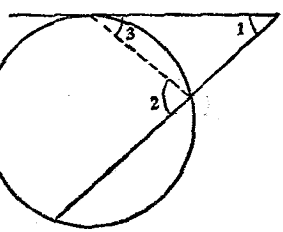
*8. 證明: 二弦在圓內相交,所成角被所截二弧的和的一半所度(看下右圖,注意 $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 的關係.下同).

*9. 證明: 二~~弦~~割線在圓外相交,所成角被所截二弧的較的一半所度(看次左圖).



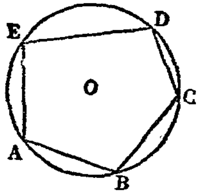
*10. 證明: 一~~弦~~割線和一切線相交,所成角被所截二弧的較的一半所度(看次右圖).

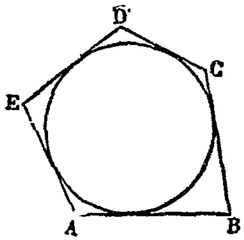




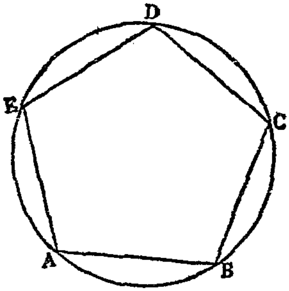
*11. 二切線所成角與截弧有什麼關係!

139. 多角形與圓. 一圓內各弦所成的多角形,叫做內接多角形 (Inscribed Polygon) 這圓叫做多角形的外接圓(Circumscribed circle). 一圓各切線所成的多角形,叫外切多角形(Circumscribed polygon), 這圓叫做多角形的內切圓(Inscribed circle).





140. 圓內接正多角形定理. 順次連接圓上等分點諸弦,成這圓內接正多角形.



[假設] $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$.

[求證] ABCDE 是正五角形.

[解析] 因諸弧等,故諸邊等. 又每角截取三倍等分弧,所以也各自相等.

[證明] 因 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$ (假設)

$\therefore$ AB=BC=CD=DE=EA (圓的要件關係二)

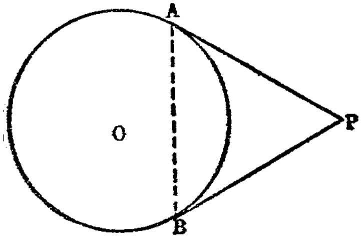
又 $\overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CDA}=\overset{\frown}{DEB}=\overset{\frown}{EAC}=\overset{\frown}{ABD}$ (普通公理)

∴　$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$ (圓周角定理)

所以ABCDE是正多角形.　(正多角形定義)

141. 切線長. 自一點作至一圓上切線,則這點到切點距離叫做這點的切線長.

142. 切線長定理. 自圓外一點至圓上二切線長相等.



[假設] PA,PB爲自P至⊙O上二切線長.

[求證] PA=PB.

[解析] 連接AB,則成一等腰△PAB.

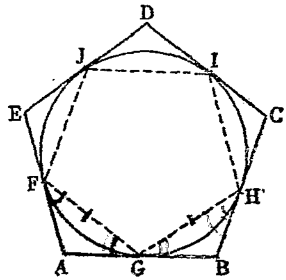
[證明] 連接AB,則∠PAB,∠PBA同爲$\frac{1}{2}$AB所度,所以相等.　(弦切角定理)

∴　PA=PB　(等腰△定理二)

系. 二切線與連二切點的弦成等角.

143. 圓外切正多角形定理. 順次作圓上

等分點切線,成這圓的外切正多角形.



[假設]　$\widehat{FG}=\widehat{GH}=\widehat{HI}=\widehat{IJ}=\widehat{JF}$,而 AB,BC 等皆切線.

[求證]　ABCDE 是正多角形.

[解析]　連接 FG,GH,則成二個全等等腰△.　由此可推知各角都等,各邊也都等,而爲頂點切線長二倍.

[證明]　連接 FG,GH,則 FG=GH(圓的要件關係二)

且　$\angle AFG$, $\angle AGF$, $\angle BGH$, $\angle BHG$ 同爲 $\widehat{FG}=\widehat{GH}$ 的半所度,故諸角相等.　依同理得　　(弦切角定理)

$\therefore$　　$\triangle FAG\equiv\triangle GBH\equiv\triangle HCI\equiv\cdots\equiv\triangle JEF$(a. s. a.)

故 $\begin{cases}\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E \\ AB=BC=CD=DE=EA\end{cases}$　　(普通公理)

$\therefore$　　ABCDE 爲正多角形.　　(正多角形定義)

習題三八

*1. 已知一圓外切三角形各邊長爲 a, b, c, 求自各

頂點到圓的各切線長.

*2. 在一圓二切線所截劣弧上取一點,再作一切線.與這二切線成一△,證明其周界的長為一定.

3. 證明圓外切四邊形二對邊長的和,必等於他二對邊長的和.

*4. 試證:二切線交角為自交點至圓心直線所平分.

*5. 試證:連接圓心與內接(或外切)正多角形頂點,則分這正多角形為若干全等等腰三角形.

*6. 證明:一圓的外切正多角形周界大於同邊數的內接正多角形周界.

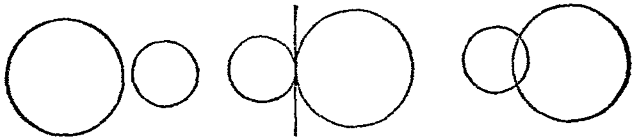
*7. 證明:一圓內接正 n 多角形,邊數加倍,則後者周界必大於原形周界. 但對於外切正多角形,則反減小.

144. 二圓關係. 二圓相對關係如下:

(一)相離. 一圓在他圓外,而不相交.

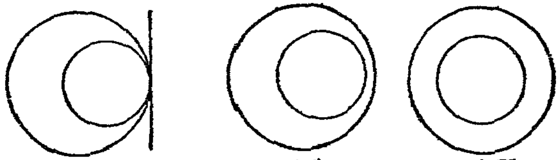
(二)外切 (Externally tangent). 一圓在他圓外,而有一交點;而過此交點與一圓相切的線,亦與他圓相切.

(三)相交. 二圓相交於二點.



(一) (二) (三)

(四)內切 (Internally tangent). 一圓含他圓,有一交點; 而過此交點與一圓相切的線,亦與他圓相切.



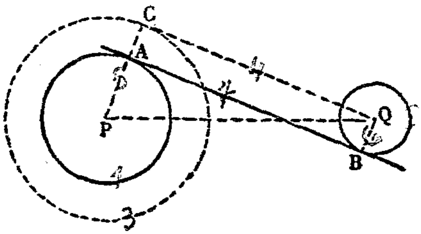
(四) (五) 同心圓

(五)相含. 一圓完全在他一圓內. 如二圓心更相合,就稱同心 (Concentric)圓.

145. 二圓的公共要件. 相交二圓二交點的聯線,叫做二圓的公弦(Common chord). 與不相含二圓同時相切的直線, 叫做二圓的公切線(Common tangent),但這時切點不限定爲一點. 相離二圓有四條公切線, 其中二條, 分開二圓,使各居一側的,叫內公切線 (Internally common

tangent); 又二條, 使二圓同在一側的, 叫外公切線 (Externally common tangent). 這些公切線作法看下圖.

146. 作公切線法. (一)作內公切線法.



[已知]　⊙P與⊙Q(并設二圓相離).

[求作]　這二圓的內公切線.

[作法]　假設⊙P, ⊙Q不是等圓, 而⊙P較大.

以P為心, 二圓半徑和為半徑, 作一輔助圓.

自Q點作到這輔助圓的切線QC.　(切線作法§29)

作 $PC \perp QC$, 設其與⊙P交於A.　(垂線作法)

作半徑 $QB // PC$, 聯AB即得一內公切線　(//作法)

依同法, 可作出另一內公切線.

[理由]　$QB // AC$, 且 $PC = PA + BQ$.　(假設)

故　$BQ = PC - PA = AC$　(普通公理)

∴　ABQC是▱.　(▱條件三)

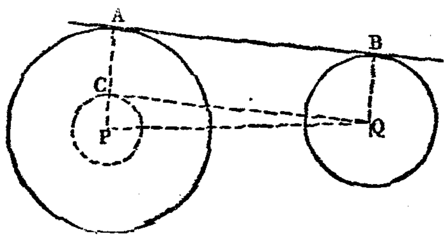
又因　　PC⊥QC,卽∠C=90°.　(切線定理系一)

∴　　$\angle A=\angle B=90°$　(□性質二三)

∴　　AB是公切線.　(切線定理)

註. 要這作法可能,幷且能作二條,必須Q點在輔助圓之外. 這就是二圓相離的條件,看下面的習題.

(二)作外公切線法.



這題作法,只須將(一)中第一步改做"以P爲心二圓半徑較爲半徑,作一輔助圓". 以後卽完全相同. 學生試自行補明"已知""求作""作法""理由"四項.

註. 要這作法可能,幷且能作二條,必須Q在輔助圓以外. 這就是二圓不相容的條件,看下面的習題.

習題三九

*1.證明: 二圓相交,聯圓心的直線,必和公弦垂直.

*2.有⊙o_1和⊙o_2,半徑各爲r_1,r_2,而$r_1>r_2$,試證

條件	$r_1+r_2<o_1o_2$	$r_1+r_2=o_1o_2$	$r_1+r_2>o_1o_2>r_1-r_2$	$r_1-r_2=o_1o_2$	$r_1-r_2<o_1o_2$
關係	二圓相離	二圓外切	二圓相交	二圓內切	二圓相容

3. 如⊙P,⊙Q是相離二等圓,怎樣去作公切線!

*4. 就二圓種種關係,述公切線作法,并注意各種關係中,內外公切線的條數.

*5. 試證兩圓二內公切線交點,必在聯圓心的線上.

*6. 試證兩圓二外公切線交點,必在聯圓心的線上.

*7. 試證兩圓二內(或外)公切線上,二切點間等距.

軌 跡

147. 軌跡. 用圓規作圖時,我們使裝針尖一脚釘在紙上,并使裝鉛的脚與脚尖保持一定的距離而轉動,則鉛尖在紙上留下痕跡,構成一圓. 在幾何學裏,可以說

一動點與一定點距離爲一定時,其軌跡(Locus)爲圓.

所以軌跡就是集合一切所有遵守某幾何條件的點,所構成的線. 由這定義,可知欲證明一軌跡題,應當分做二層.

(一)凡在軌跡上的點,都合那幾何條件.

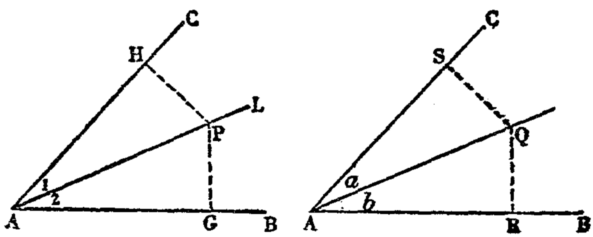
(二)凡合那幾何條件的點,都在軌跡上.

有時第二條,也可用下條來代替,即

(二)'不在軌跡上的點,必不合於條件.

這二條所以必需同時成立的必要,只須就上例,即可看出.譬如取圓上一段弧,其上的點,也都合於"距定點(即圓心)等遠"的條件;但這弧不能包括合這條件的一切點,故不能成軌跡的全部.

148. 分角線定理. 一角的分角線,即距這角二邊等遠點的軌跡.



[假設] AL是∠BAC的平分線.

[求證] AP是距AB,AC二邊等遠點的軌跡.

[解析] 按上節所說,應分二層來證.

(一) 如PG⊥AB, PH⊥AC, ∠1=∠2,則得二全等rt.Δ.

(二) 如QR⊥AB, QS⊥AC, QR=QS,亦得二全等Δ.

[證明]　(一)證 AL 上任一點 P,距 AB,AC 等遠(左圖)

作 $PG\perp AB$, $PH\perp AC$, 則在 rt.$\triangle AGP$, rt.$\triangle AHP$ 中,有公共邊 AP,且原設 $\angle 1=\angle 2$.

∴　　　rt.$\triangle AGP \equiv$ rt.$\triangle AHP$(全等 rt.△ 定理一)

即　　　$PG=PH$.

(二) 證明如 $QR\perp AB$, $QS\perp AC$, 而 $QR=QS$, 則 AQ 為 $\angle BAC$ 的分角線(右圖).

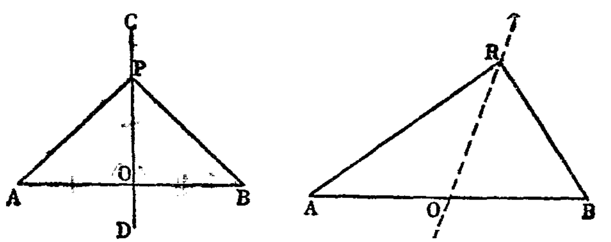
連 AQ, 得 rt.$\triangle ARQ$, rt. $\triangle ASQ$, 而原設 $QR=QS$.

∴　　　rt. $\triangle ARQ \equiv$ rt.$\triangle ASQ$(全等 rt.△ 定理二)

即　　　$\angle a=\angle b$

故　AQ 為 $\angle BAC$ 的分角線.

149.　平分垂直線定理. 一線段的平分垂直線,即距二端點等遠的軌跡.



[假設]　CD 是 AB 的平分垂直線, $CD\perp AB$, $OA=OB$.

[求證]　CD 是距 A,B 等遠點的軌跡.

[解析] (一)如 P 在 CD 上,則 rt.$\triangle AOP \equiv$ rt.$\triangle BOP$.

(二) 如 $AR \neq BR$,則 $\triangle AOR$, $\triangle BOR$ 必非全等.

[證明] (一)證 CD 上一點 P,距 A,B 等遠(左圖).

連接 PA,PB,則在 $\triangle AOP$, $\triangle BOP$ 中,有一公共邊 OP,且原設 $\angle AOP = \angle BOP =$ rt.$\angle$, $OA = OB$.

$\therefore$ rt.$\triangle AOP \equiv$ rt.$\triangle BOP$ (s. a. s.)

卽 $AP = BP$.

(二) 證明如 $AR \neq BR$,則 OR 非 AB 的垂直平分線.

連接 OR,則在 $\triangle AOR$, $\triangle BOR$ 中,有公共邊 OR,且原設 $OA = OB$. 但 $AR \neq BR$.

$\therefore$ $\angle AOR \neq \angle BOR$ (非全等 $\triangle$ 定理二)

但 $\angle AOR + \angle BOR = \angle AOB =$ St.$\angle$ (平角定義)

故如 $\angle AOR =$ rt.$\angle$,則必$\angle BOR =$ rt.$\angle$ (普通公理)

而生矛盾. 所以 OR 不是 AB 的垂線.

習 題 四 十

弦心距定理

1. 證明一圓內等弦中點的軌跡爲一同心圓.

2. 在一圓上,切線長爲一定的另一端點軌跡,爲一同心圓,試加證明.

*3. 證明分角線定理的(二).

*4. 證明垂直平分線定理的(二)

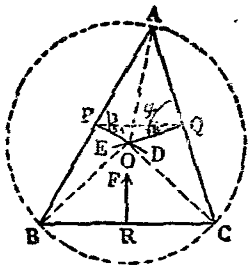
*5.證明相交二直線所成二組對頂角的二分角線,爲距這二交線等遠的點構成的軌跡.

*6.有常切一角二邊的諸圓,求圓心的軌跡.

*7.有過二定點的諸圓,求圓心的軌跡.

*8.求距二平行線等遠點的軌跡.

150. 三角形外接圓定理. 三角形三邊的垂直平分線,必共過一點.



[假設] PD, QE, RF 是 $\triangle ABC$ 三邊的垂直平分線.

[求證] 這三條垂直平分線,共過一點.

[解析] 先證 PD, QE 交於一點O. 再用平分垂直線定理,證明 RF 也一定要經過O點.

[證明] 聯接PQ, 則

$$\angle QPD+\angle PQE<\angle APD+\angle AQE=180^\circ$$

(全分公理不等量公理)

∴ PD, QE 交於△內一點 O (交線判別定理)

聯接 OA, OB, OC, 則 OA＝OB＝OC

(⊥平分線定理及普通公理)

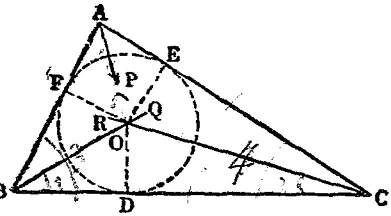
即 O 點也在 BC 的垂直平分線上，就是說 RF 必經過 O. (⊥平分線定理)

系一. 共過的點，是三角形外接圓心.

註. 這點叫外心 (Circum-center).

系二. 不在一直線上的三點，可定一圓.

151. 三角形內切圓定理. 三角形三內分角線，必共過一點.



[假設] AP, BQ, CR 是△ABC 三內分角線.

[求證] 這三條內分角線，共過一點.

[解析] 先證有二條相交，於一點 O. 再用分角線定理，證明第三條，也必經過 O 點.

[證明] ∠QBC＋∠RCB＜∠ABC＋∠ACB＜180°(何故!)

∴ BQ,CR交於△內一點O. (交線判別定理)

則O點距△ABC三邊等遠

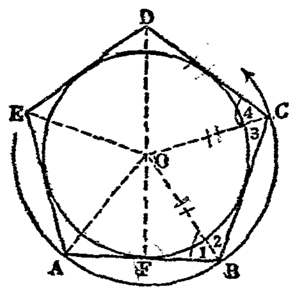
(分角線定理及普通公理)

∴ O點在分角線AP上 (分角線定理)

系. 共過的點,是三角形內切圓心.

註. 這點叫做內心(In-center).

152. 正多角形與圓關係定理. 凡是正多角形,都有一個外接圓和內切圓.



[假設] ABCDE是正多角形.

[求證] (一)各頂點在一圓上; (二)各邊是一個的切線.

[解析] (一)作三頂點的圓,證明這圓必過其他頂點.

(二)以(一)中所得圓心爲心,自心到一邊垂線爲半

徑作圓,證明這圓必切於他邊.

[證明] (一)作⊙O,過A,B,C. (過三點的圓作法)

連 OA,OB,OC,OD,OE,則

$OA=OB=OC$ (等圓半徑定理)

∴ $\angle 2=\angle 3$ (等腰△定理一)

但$AB=CD$,且$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$ (正多角形定義)

∴ $\angle 1=\angle 4$ (普通公理)

∴ $\triangle AOB\equiv\triangle COD$ (s. s. s.)

即$OA=OD$,故D在⊙O上. 同理可證他點也如此.

(二)因 $AB=BC=CD=DE=EA$ (正多角形定理)

故自O到各邊上距離相等. (弦心距定理)

所以用O爲心,高爲半徑作圓,和各邊都相切.

(切線定理)

153. 正多角形要件. 就上節的理,可知正多角形的外接內切二圓同心,這點,就叫做正多角形的心,如上節圖中的O. 又OA等叫頂心距,OF等叫邊心距,都已在§51中說過.

習 題 四 一

1. 已知一圓,求其圓心.

2. 已知一弧,求平分爲二.

3.證明rt.△夾直角二邊平分垂直線,交於斜邊上.

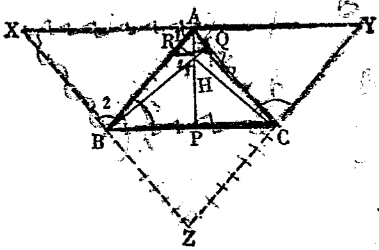
*4.證明§27的作圖題.

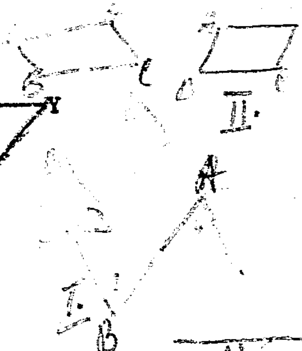
*5.證明三角形每一內分角線,與他二角外分角線,必相交於一點. 這點叫做旁心(Ex-center).

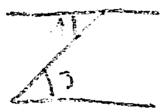
*6.求作一圓和一△一邊及他二邊的延長線相切,這圓叫旁切圓(Exscribed circle),一△有三旁切圓.

*7.已知三角形邊長爲a,b,c, 求三角形各邊上,內切圓與旁切圓各切點間距離.

154. 三角形垂心定理. 三角形三高(卽頂垂線)相交一點.







[假設] 在△ABC中AP⊥BC,BQ⊥CA,CR⊥AB.

[求證] AP,BQ,CR三高共過一點.

[解析] 過A,B,C各作對邊的平行線,成△XYZ. 再證這三高是△XYZ的三邊垂直平分線.

[證明] 過A作BC的平行線,過B作CA的平行線,

$\angle 1 = \angle 3$　　$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 < 180°$

$\angle 2 = \angle 4$

則　　　$\angle 1+\angle 2=\angle ABC+\angle BAC$　　　(//性質定理一)

$<180°$. (按 $\triangle$ 內角和定理卽明)

所以這二線交於一點X. 同理作過C而與AB平行的線,必和前二線相交,成功 $\triangle XYZ$.

因 AX//BC,BX//CA,故 ACBX 是▱　　　(▱定義)

同理 ABCY 也是▱,故 XA＝BC＝AY　　(▱性質二)

同理　　　　XB＝BZ,　ZC＝CY.

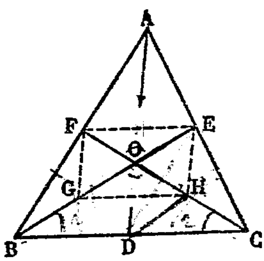
又因　　　$AP \perp BC$　$\therefore PA \perp XY$　　　(//性質一)

同理　　　$BQ \perp ZX$,　$CR \perp YZ$

就 $\triangle XYZ$,知 AP,BQ,CR 共過一點 ($\triangle$外接圓定理)

註. 這公共點叫做垂心(Orthocenter).

155. 三角形重心定理. 三角形三中線共過一點,且這點在各中線上,與頂點距離,爲該中線全長的三分之二.



[假設]　　　　AF＝FB,

$$BD=DC,\ CE=EA.$$

[求證]　AD,BE,CF 共過一點 O, 且

$$AO=\frac{2}{3}AD,\quad BO=\frac{2}{3}BE,\quad CO=\frac{2}{3}CF$$

[解析]　先證二中線交於一點 O. 再證 O 點合於題中第二層性質. 由此知三中線,在 O 點相交.

[證明]　$\angle EBC+\angle FCB<\angle ABC+\angle ACB<180°$(何故!)

所以 BE,CF 相交於一點 O.

平分 OB 於 G,OC 於 H. 聯成四邊形 EFGH.

就 $\triangle ABC$,$\triangle OBC$ 可見

$$EF//GH//BC,\ EF=GH=\frac{1}{2}BC\text{(習題二三第5,6題)}$$

$\therefore$　EFGH 是平行四邊形　　(▱條件三)

$\therefore$　$GO=OE,\quad HO=OF$　　(▱性質三)

但　$BG=GO,\quad CH=HO,\quad \therefore BO=\frac{2}{3}BE,\quad CO=\frac{2}{3}CF$

依同理,可知 AD 與 BE 的交點,也在 BE 上,與 B 相距為$\frac{2}{3}$BE 之處. 故這交點即 O.

$\therefore$　AD, BE, CF 三中線共交於一點 O,且

$$AO=\frac{2}{3}AD,\quad BO=\frac{2}{3}BE,\quad CO=\frac{2}{3}CF.$$

註. 這點叫做三角形的重心(Center of gravity). 這名詞的意義,和物理上所說的一致.

習題四二

*1. △的垂心是否一定在△內?

2. 如H是△ABC的垂心,說明A是△BCH的垂心;B是△ACH的垂心;C是ABH的垂心(看§15的圖).

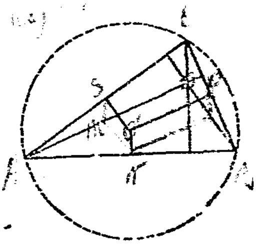
3. 證明等邊△中,內心,外心,垂心,重心四點相合.

4. 證明如一△中內心,外心,垂心,重心四點有二相合,則必盡相合,而成一等邊△.

5. 證明△裏三中線的和,必小於這△周界的二分之三,而大於周界的四分之三.

6. 聯△三邊中點,成功一新三角形. 原形的重心,是新三角形的什麼?

*7. 試證從△垂心到各角頂的距離,等於從△外接圓心,到各對邊距離的2倍(看右圖).

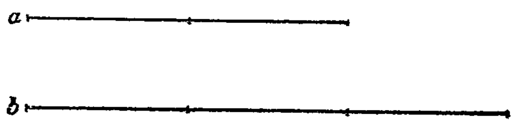


*8. 證明△裏外心,垂心,重心三點在一直線上. 這直線叫尤拉(Euler)線.

第七編　比例論

比例線段

156. 線段比(Ratio of segment). 用一單位線段去量兩線段,把量得的數,寫成比式或分數式,便是兩線段的比. 例如量 a, b 兩線段,得2尺和3尺,a,b 兩線段的比,便是2:3或$\frac{2}{3}$.

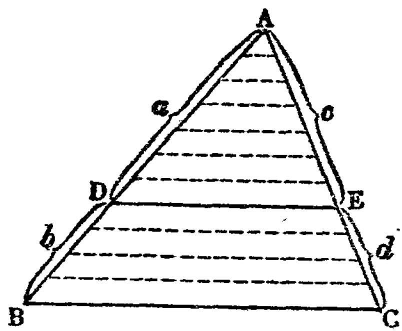


兩線段之比,和單位線段的長短,沒有關係. 例如剛才用尺做公共單位,量得$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$. 如用寸做公共單位,量a便得20寸,量b得30寸, a,b的比是$\frac{20}{30}$,約簡後仍得$\frac{2}{3}$.

註. 一個單位線段,恰好能量盡兩線段的,叫做兩線段的公共單位. 就理論言,未必定能找得一公共單位,使兩線段都是他的整倍數. 這種情形叫做不可通約(Incommeasurable). 其討論非初學所必要,故從略.

157. 比例線段(Proportional line segment). 兩線段的比,和另外兩線段的比相等時,這四線段成比例,稱爲比例線段. 例如$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 a, b,c,d是比例線段.

158. 三角形兩邊成比例線段定理. 和三角形底邊平行的直線,分其餘兩邊成比例線段.



[假設] △ABC中, DE//BC.

[求證] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

[解析] 用a和b的公共單位,把a,b各分成若干等分. 過各分點各引直線和BC平行,看c,d被分成的情形如何!

［證明］ 如a,b的公共單位分a為m分,b為n分,

則 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ (線段比定義)

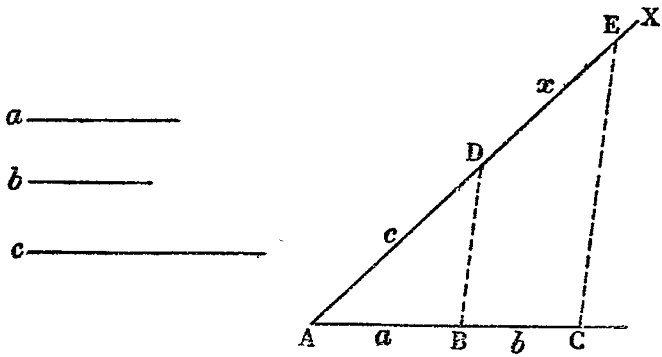
依作//法,過各等分點,引直線 //BC,則此等平行線,必截c成m等分,截d成n等分. (//內等線段定理)

即 $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$, $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (線段比定義,普通公理).

系一. 諸平行線截兩直線,其相當線段成比例.

系二. 分三角形兩邊成比例線段的直線,與第三邊平行.

159. 比例線段的作圖. 求作一線段和已知三線段成比例.



［已知］ a, b, c 三線段.

[求作] 第四線段x,使有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

[作法] 先作線段AC=a+b (作等線段法)

過A點任引直線AX,在其上取AD=c,連結BD.

從C引CE//BD并和AX交於E. (作//線法)

DE便等於x.

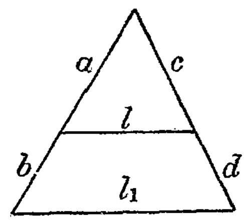
[理由] 因爲 BD//CE (作法)

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ (△比例線段定理)

習題四三

1. 設 $l//l_1$, $a=3$, $b=2$, $d=2.5$, 求c.

2. 設 $l//l_1$, $a=4$, $c=6$, $d=8$, 求b.

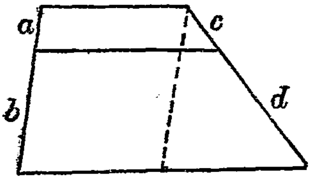


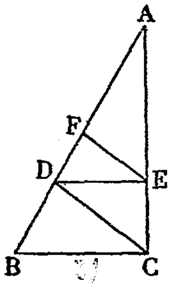
3. 如 $a=b$, c和d 的關係怎樣?

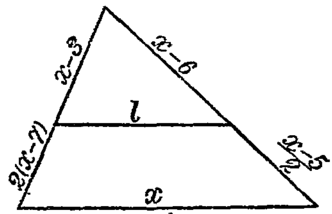
由此可證明以前那一條定理?

*4. 證明和梯形兩底平行的直線,分割兩腰成比例線段(次上圖).

5. 次下左圖 DE//BC, FE//DC 證明 $\frac{AF}{FD}=\frac{AD}{DB}$.







6. 如上右圖 $l//x$, 求三邊的長. $3x^2-44x+153=0$ $(x-9)(3x-17)=0$

7. 已知三線段 a,b,c, a=2.5, b=3.5, c=5. 求作x和y兩個第四比例線段. 使 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{y}$. 驗x,y兩線段的長,幷用代數方法證明其相等.

160. 比例定律

(一)加法定律(Addition law)　四量成比例,則兩比的二量相加也成比例.

(二)減法定律(Subtraction law)　四量成比例,則兩比的二量相減也成比例.

[假設] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

[求證] $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,

[證明] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ [假設]

$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$, 即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (普通公理)

同理 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

(三)加減定律. 四量成比例,則兩比的二量各相加減也成比例.

[假設] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

[求證] $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

[證明] $\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} & \text{(比例加法定律)}\\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} & \text{(比例減法定律)}\end{cases}$

兩式相除 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (普通公理)

161. 線段的內分(Internal division)和外分(External division). 在線段上任取一點,這點分線段成兩分. 例如AB上的一點P,將AB分成AP,PB兩線段,我們稱P點內分AB. 如在線段

的延長線上,取一點,這點也分線段成兩分. 例如AB延線上的Q點,將AB分做AQ, QB兩線段;我們稱Q點外分AB.

內分 

外分 

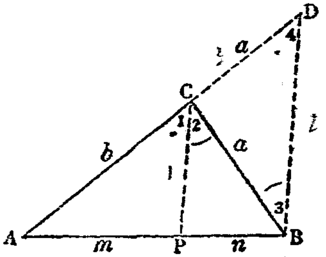
註. 無論內分或外分,兩線段的讀法,總是從線段的一端,讀到分點,再從分點讀到他一端 AP, PB.

如取AB的方向為正,則BA的方向便是負,不論內分外分,兩線段的和,必等於原來線段的長. 例如

內分　AP + PB = AB

外分　AQ + QB = AB.

162. 三角形內分比例線段定理. 三角形的內分角線,內分底邊成兩線段,與其餘兩邊成比例.



[假設] △ABC中∠C的平分線CP,內分AB於P.

[求證] $\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$.

[解析] 從B引直線//PC使和AC的延長線相交於D. 證明CD=a,再用△二邊成比例定理.

[證明] 引BD//PC,并和AC的延線交於D.

(作//線法)

則 ∠1=∠4, ∠2=∠3 (//性質定理一,二)

但 ∠1=∠2 (假設)

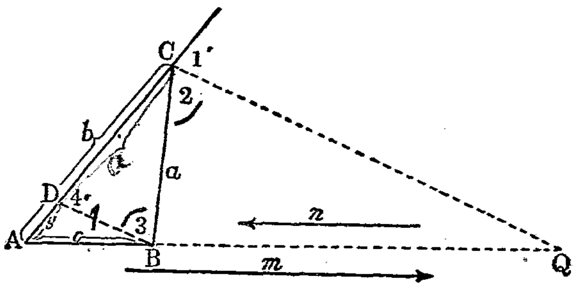
∴ ∠3=∠4 (普通公理)

∴ CD=CB=a (等腰△定理二)

但 $\frac{AP}{PB}=\frac{AC}{CD}$ (△比例線段定理)

即 $\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$

163. 三角形外分比例線段定理. 三角形的外分角線,外分底邊成兩線段,與其餘兩邊成比例.



［假設］　△ABC中，∠C外角的分角線CQ，外分AB於Q.

［求證］　$\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$.

［解析］　從B引直線//QC使和AC交於D．證明CD=a，再用△二邊成比例定理.

［證明］　引BD//QC和AC交於D.　　（作//線法）

則　$\angle 1=\angle 4,\quad \angle 2=\angle 3$　　（//性質定理一，二）

但　$\angle 1=\angle 2$　　（假設）

∴　$\angle 4=\angle 3$　　（普通公理）

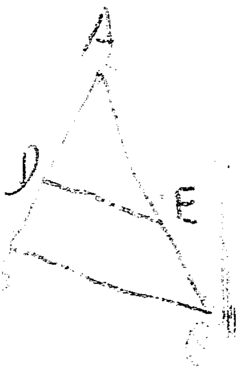
∴　$CD=CB=a$　　（等腰△定理二）

但　$\frac{AB}{BQ}=\frac{AD}{DC}$

即　$\frac{x}{n}=\frac{y}{a}$　　（△比例線段定理）

∴　$\frac{x+n}{n}=\frac{y+a}{a}$　即　$\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$　（比例加法定律）

習題四四



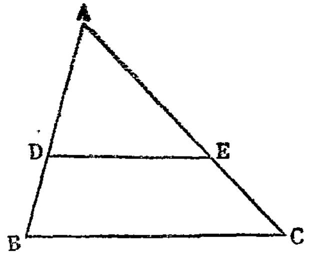
*1. △ABC中DE//BC證明.

（一）　$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$，　（二）$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$

（三）　$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$，　（四）$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{EC}$

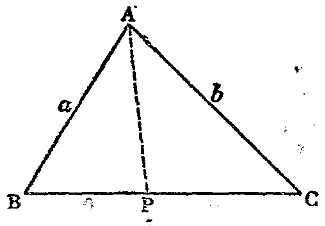
$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ∴ $\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$ (II!) [illegible] II DB:AE [illegible] (IV) [illegible] AD:AE [illegible] (III!)

[illegible]: $\frac{AD}{DB}=1:\frac{AE}{EC}$ & $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$ dann [illegible] II.



2. 試從比例加法定律推出第四比例線段的另一作法來.

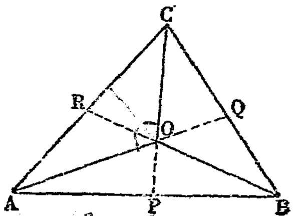
3. △ABC中,AP平分∠A, a=3, b=4, BP=2, 求PC.



4. 同圖 a=3寸, b=6寸, BC=7寸,求BP和PC.

5. 三角形的三邊,順頂爲7寸, 8寸, 9寸. 求各角的平分線,內分對邊所成的三對線段.

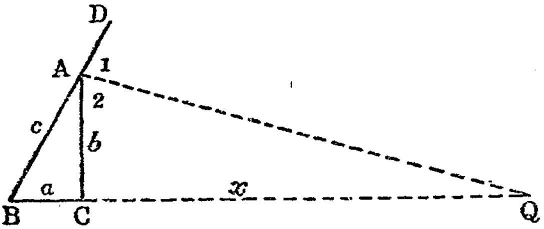
6. 從△ABC內任意點O,引OA, OB, OC三線,再作三



線所成三角的平分線OP, OQ,OR, 則

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1.$$

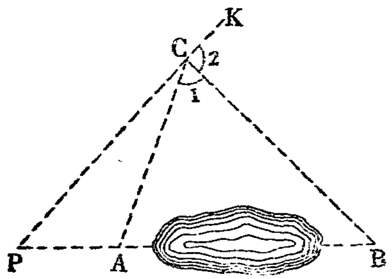
7. 如下圖AQ平分外角CAD, a=2,b=5,c=6. 求x



8. 同圖b=2, c=3, x=4. 求BQ

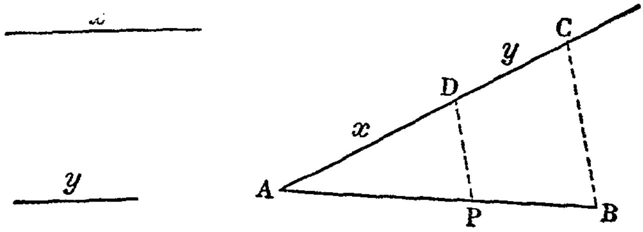
9. 三角形的三邊順頂爲8寸, 10寸, 12寸,求外角平分線外分三邊所成的三對線段.

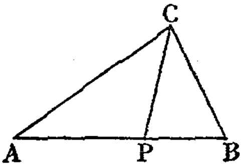
10. 要測不便直接去量的AB兩點間的距離,先揀一點C,作CK, 使∠2=∠1, 再延長KC到P,使P, A, B三點



在同一直線上. 量那幾條線段,便可算出AB!

164. 內分線段法. 求內分一線段,使等於已知兩線段的比.





[已知] 線段x,y和AB.

[求作] AB內分點P,使$\frac{AP}{PB}=\frac{x}{y}$.

[作法一] 如上右圖,過A點任引直線l,截取AD=x,DC=y,連接CB. (作直線公法)

過D引DP//CB與AB交於P. (作//線法)

P便是所求的內分點.

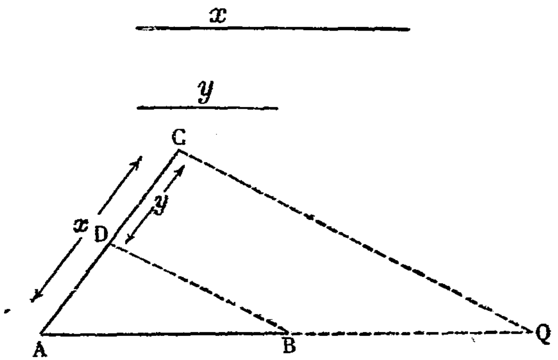
[作法二] 如上次圖,用A,B做心,x,y各為半徑,交換作弧,命兩弧交點為C. 連接AC,BC.

次作∠C的平分線和AB交於P. (作分角線法)

P也是所求的內分點.

[理由]　學生試各自補出,并討論"作法二"中不可能的情形.

165. 外分線段法. 求外分一線段,使等於已知兩線段之比.



[已知]　線段x,y和AB.

[求作]　AB外分點Q,使$\frac{AQ}{QB}=\frac{x}{y}$.

[作法]　過A點任引AC=x.　截取CD=y.　連接DB.　(作直線公法)

次從C作CQ//DB,和AB的延線交於Q.　(//線作法)

Q便是所求外分點.

[理由]　因爲　DB//CQ　(作法)

$$\therefore \quad \frac{AB}{BQ}=\frac{AD}{DC}$$　(△比例線段定理)

$$\frac{AB+BQ}{BQ}=\frac{AD+DC}{DC}\quad(\text{比例加法定律})$$

即 $$\frac{AQ}{QB}=\frac{x}{y}.$$

註. 學生試述第二種作法并說出理由來.

166. 調和分割. 一線段內分外分兩比相等,便叫調和分割(Harmonic Division).

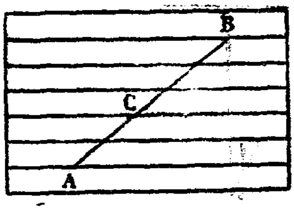
如圖倘有$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$即稱AB被P,Q調和分割.

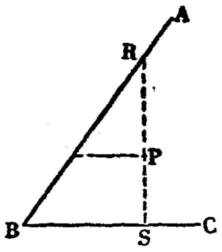
習 題 四 五

1. 內分一線段成3:5.

2. 外分一線段成7:4.

3. 一線段可放在橫格紙上,把他分成2:3如下左圖(或任何比),試說明其理由.





4. 過$\angle ABC$內一點P,求作一直線遇AB於R,BC於S,使$\frac{RP}{PS}=\frac{3}{2}$.

*5. 已知二線段的比及其和,求作二線段.

*6. 已知二線段的比及其差,求作二線段.

7. 長方形兩邊和爲5寸,長與闊的比等於7:4,求作這長方形.

8. 長方形兩邊差爲1寸,長與闊的比等於5:2,求作這長方形.

9. 已知三角形的二邊a,b和b:c=2:3,求作這三角形.

*10. 試證△任一角的內外分角線,調和分割對邊.

相似形

167. 相似多角形. 兩多角形合於下列條件的,叫做相似.

(一)各角對應相等,(二)各邊對應成比例.

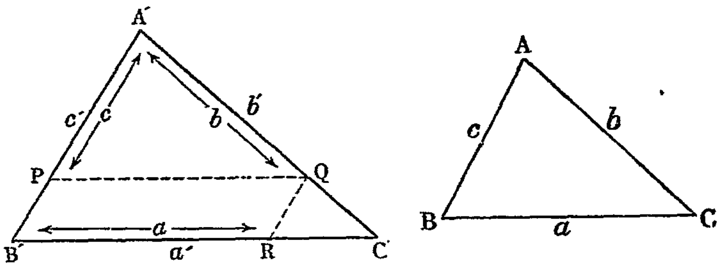
三角形原是多角形的一種,所以兩三角形相似的條件,也應有同上述(§36)一樣.

但就三角形論,對於以上廣義的條件,往往因一部分適合後,其餘也就連帶適合,故相

似條件,可以減少. 看以下定理自明.

註. 相似的記號爲$\backsim$.

168. 相似三角形判別定理一. 兩三角形若各角彼此相等,便相似.



[假設] $\triangle$ABC,A′B′C′中, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$.

[求證] $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[解析] 各角彼此相等,已適合廣義條件(一),從此再證明合於條件(二)(卽$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$)便可.

[證明] 截取$A'P=c$, $A'Q=b$.

則 $\triangle A'PQ \equiv \triangle ABC$ (s. a. s.)

$\therefore$ $\angle 1=\angle B=\angle B'$ (全等形定義,假設)

由是知 $PQ/\!/B'C'$ (//性質定理一)

$\therefore$ $\frac{c}{c'-c}=\frac{b}{b'-b}$ ($\triangle$比例線段定理)

即 $$\frac{c'-c}{c}=\frac{b'-b}{b}$$

∴ $$\frac{c'}{c}=\frac{b'}{b}$$ （比例加法定律）

同理取 B'R=a　可證 $\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$

即得 $$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$ （普通公理）

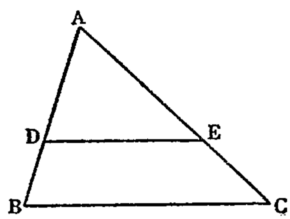
∴ $$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$ （相似△定義）

系一．兩三角形有兩角彼此相等，便相似．

系二．兩直角三角形有一銳角相等便相似．

系三．兩三角形，各和另一三角形相似，則此兩三角形相似．

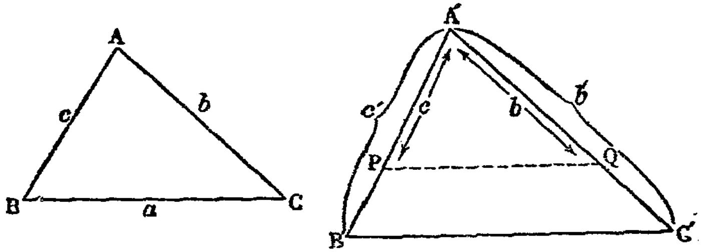
系四．三角形底的平行線及兩邊所成三



角形，和原形相似．

如圖. $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

169. 相似三角形判別定理二. 兩三角形若有兩邊對應成比例,且夾角相等,便相似.



[假設] $\triangle$ ABC, A′B′C′ 中 $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$, $\angle A=\angle A'$

[求證] $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[解析] 作 B′C′ 的平行線,所成的 $\triangle$ 和 $\triangle A'B'C'$ 有什麽關係?

[證明] 截取 $A'P=c$, $A'Q=b$ 連接 PQ.

$\because \quad \frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ (假設)

$\therefore \quad \frac{b'-b}{b}=\frac{c'-c}{c}$ (比例減法定律)

即 $\frac{PB'}{A'P}=\frac{QC'}{A'Q}$ (線段減法)

由是得 $PQ /\!/ B'C'$ ($\triangle$ 比例線段定理系二)

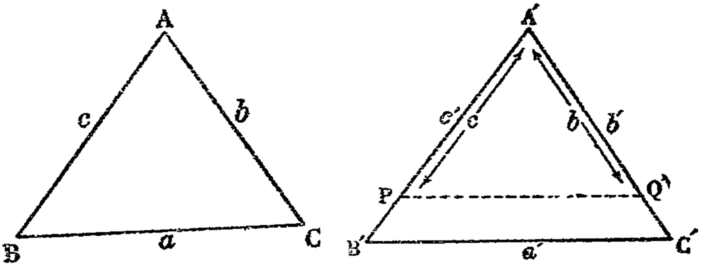
$\therefore \quad \triangle A'PQ \backsim \triangle A'B'C'$

(相似 $\triangle$ 判別定理一系四)

但　$\triangle ABC \equiv \triangle A'PQ$　(s. a. s.)

即　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

170. 相似三角形判別定理三. 兩三角形三邊對應成比例便相似.



[假設]　$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$.

[求證]　$\triangle A'BC \backsim \triangle A'B'C'$

[解析]　設法引 $B'C'$ 的平行線,使這線和 AB',$A'C'$ 兩邊所成的 $\triangle$ 和 $\triangle ABC$ 全等.

[證明]　截取 $A'P=c$, $A'Q=b$, 連接 PQ, 則有公共角 $\angle A$,且假設 $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$, $\therefore \triangle A'PQ \backsim \triangle A'B'C'$

(相似 $\triangle$ 判別定理二)

$$\frac{b'}{b}=\frac{a'}{PQ}$$　(相似 $\triangle$ 定義)

但　$$\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$$　(假設)

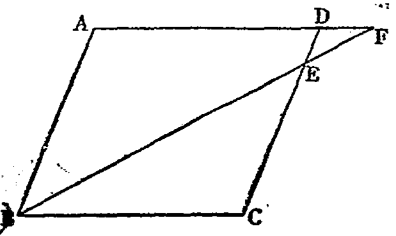
$\therefore$　$$\frac{a'}{PQ}=\frac{a'}{a},$$　$PQ=a$　(普通公理)

所以　　　　$\triangle A'PQ \equiv \triangle ABC$　　　　(s. s. s.)

即　　　　　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

習題四六

1. ABCD 是平行四邊形,延長 AD 至 F,連接 BF. 把圖中所有成比例的線段,用比例式表出.



[提示] 先找出相似三角形來.

*2. 兩相似三角形對應高的比,等於對應邊的比.

*3. 兩相似 $\triangle$ 對應角平分線的比,等於對應邊的比.

4. 梯形的二對角線,互分爲比例線段. 又若下底是上底的二倍,則對角線的交點,在三分之一處.

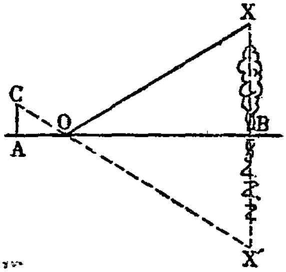
*5. 連接三角形三邊中點的線段,所成三角形和原三角形相似.

6. 用相似 $\triangle$ 定理,證明連接三角形兩邊中點的直線等於第三邊的一半.

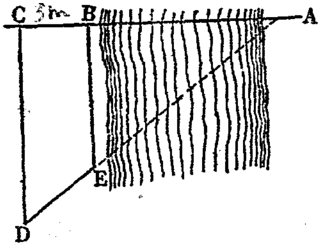
*7. 兩三角形的各邊對應平行或對應垂直,便相似.

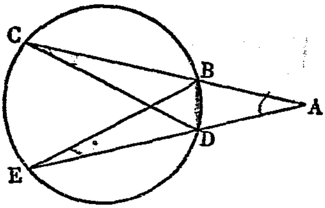
8. 測量家從 C 點看樹在池中的影子,望得 C, O, X'

三點共線,若測得CA,XB都與地面垂直.　又量得CA=5尺,AO=6.2尺,BO=30尺.　試推算樹高.



9.要量河闊AB,先找一點C和A,B共線,次作CD,BE二平行線,使D,E,A共線,問量那幾條線段,可算出河闊AB?

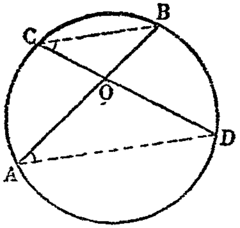


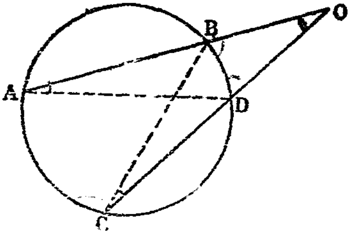


*10.圓的二弦AB,CD相交於E.　試證△AEC,和△BED相似.

*11.從圓外一點A引二線,遇圓於B,C和D,E.證明△ACD∽△ABE.

171.　交弦和交割線段定理.　一圓的二弦或其延線的交點,內分或外分此二弦,所成二線段的積相等。





[假設] AB,CD 為圓的二弦. AB,CD (或其延線)相交於O點.

[求證] AO·OB=CO·OD.

[解析] 連接AB,CD成△AOD和△BOC. 看出這二△中兩對對應等角,得相似△. 故其中對應邊成比例.

[證明] 因 $\angle A=\angle C$ (圓周角定理)

$\angle AOD=\angle COB$(對等角或公共角)

$\therefore$ $\triangle AOD\backsim\triangle COB$(相似△判別定理一系一)

$$\frac{AO}{OD}=\frac{CO}{OB}$$ (相似△定義)

$\therefore$ $AO\cdot OB=CO\cdot OD$ (普通公理)

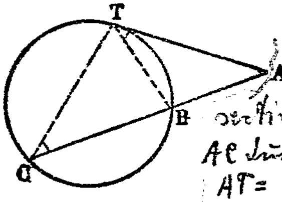
註. 與圓相交於二點的直線,叫割線(Secant),如上面右圖的OA,OC,都是割線.

172. 相交切割線段定理. 從圓外一點,引一切線及割線,則切線長平方,等於此點外分割線上弦所成兩線段的積.

［假設］ AC 爲圓的割線,AT 爲切線.

［求證］ $AT^2 = AC \cdot AB$.

［解析］ 證明 $\triangle ABT \backsim \triangle ACT$,再找對應邊.



黃金分割
sectio aurea
AC durch O
AT = CB = 2r
$BC^2 = AC \cdot AB$
$(2r)^2 = (2r + AB)AB$
8:13 = 13:21

［證明］ 在 $\triangle ATB$,$\triangle ACT$ 內,有公共角 $\angle A$.

且 $\angle BTA = \angle C$ （弦切角定理系）

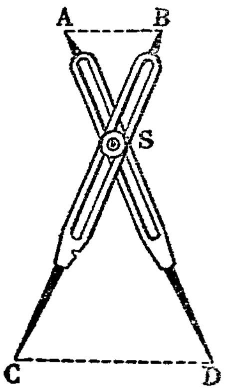
$\therefore$ $\triangle ATB \backsim \triangle ACT$ （相似△判別定理一系一）

由是得 $\dfrac{AT}{AB} = \dfrac{AC}{AT}$ （相似△定義）

$\therefore$ $AT^2 = AB \cdot AC$ （普通公理）

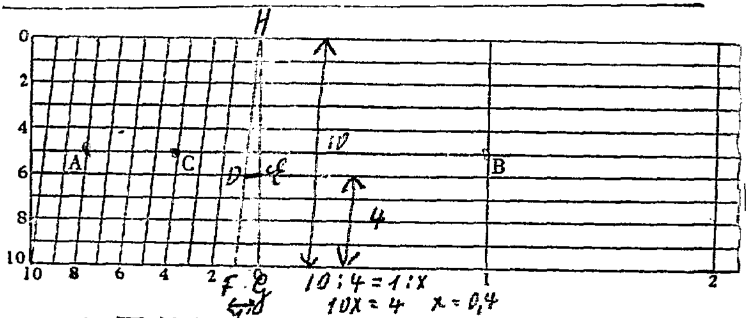
173. 利用相似三角形理,做成的儀器.

(一)比例分線規 (Proportional dividers). 如圖 AD,BC 是銅做的兩桿,上刻度數,中有空槽螺旋輪 S 可自由升降,決定AB,CD的比,使有



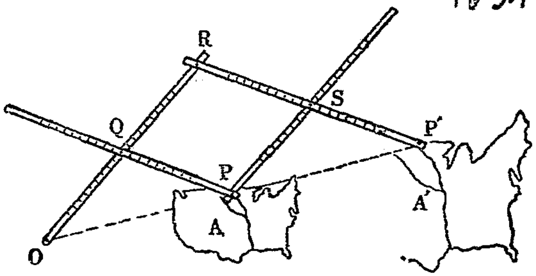
$$\frac{AB}{CD} = \frac{AS}{SD} = \frac{BS}{SC}$$

(二)對角線尺(Diagonal scale)



如圖是對角線尺的一段(共長三寸). 同時把圓規或比例規套準要量線段的兩端點. 再將原距離套在尺上一個適當的地方, 一讀便得.例如AC是0.4寸,CB是1.35寸. 這種儀器,常可量出一條不很長的線段,準確到1寸的百分之幾.

(三)圖形縮放器(Pantograph). P. Scheiner S.J 1631



如圖O點固定不動, Q,S可依桿上小眼任

意選比例,使$\frac{OQ}{OR}=\frac{SP'}{RP'}$. 於是 O, P, P′ 三點,常在一直線上. 使 P 沿 A 形各線移動, P′ 處鉛筆同時畫相似形 A′. 對換 P, P′ 便縮小.

習題四七

1. 應用 §172 定理,證明交割線段定理(§171 右圖).

2. 在 §171 右圖中,如 OB=OD,則 ABDC 爲梯形,試加證明.

*3. 試由交弦交割定理,推出已知三線段的第四比例線段的又一作法.

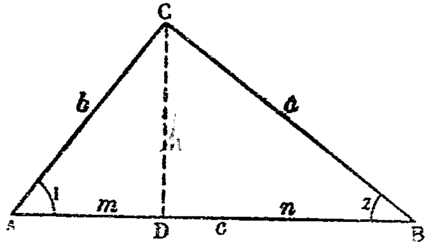
*4. 如二圓相交,則聯其交點的延線,平分其公切線在二切點間的一段長.

5. 對角線尺,是根據何條定理造成!

6. 圖形縮放器中 O, P, P′ 三點,何以總在一條直線上!

*7. 試證交弦和交割線段定理的逆定理,即如 AB, CD 二線段,或他們的延長線,交於 O 點,而有 AO·OB=CO·OD 的關係,則 A,B,C,D 四點必定在一圓上.

174. 直角三角形母子相似定理. 直角三角形斜邊上的高,分原形爲兩個直角三角形,各與原形相似,且彼此相似.



[假設] $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=$rt.$\angle$, $CD \perp AB$.

[求證] $\triangle ACB \backsim \triangle ADC \backsim \triangle CDB$.

[證明] rt. $\triangle ACB$, rt. $\triangle ADC$ 有公共角 $\angle 1$.

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$ (相似 $\triangle$ 判別定理一系二)

又 rt. $\triangle ACB$, rt. $\triangle CDB$ 有公共角 $\angle 2$.

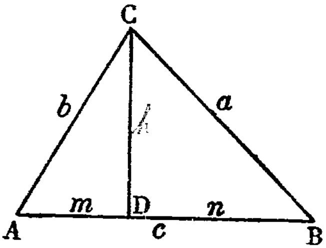
$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$(相似 $\triangle$ 判別定理一系二)

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle CBD$

(相似 $\triangle$ 判別定理一系三)

175. 比例中項. 設有a,b,c三線段,如$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$,則b稱爲a與c的比例中項 (Mean proportional).

在上節的定理內,因爲 rt. $\triangle ADC$ 和 rt. $\triangle CDB$ 相似,取二對夾直角的二邊,使成比例,即得 $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$所以得



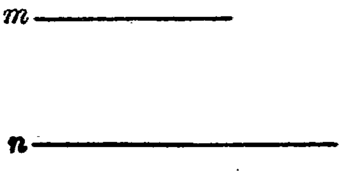
比例中項定理一. 直角三角形斜邊上的高, 爲分斜線所成二線段的比例中項.

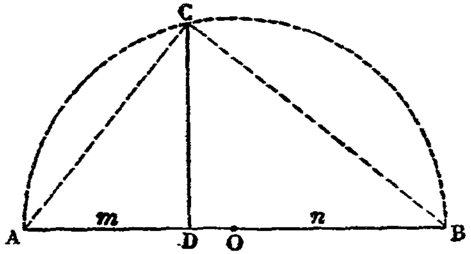
再就 rt. $\triangle ACB \backsim$ rt. $\triangle CDB$, rt. $\triangle ACB \backsim$ rt. $\triangle ADC$ 看得.

比例中項定理二. 直角三角形中夾直角任一邊, 爲斜邊上被高所分而對這一邊的一段與斜邊的比例中項.

如上圖中 $\frac{n}{a}=\frac{a}{c}$, $\frac{m}{b}=\frac{b}{c}$.

比例中項作圖. 由上述的定理,立得比例中項作法如下:





[已知] m和n兩線段.

[求作] m和n的比例中項.

[作法] 作線段AB=m+n,并取D點,使

AD=m,則DB=n (等線段作法)

平分AB於O,以O爲心,OA爲半徑,作一半圓.再作

DC⊥AB (垂線作法)

則CD爲所求的比例中項.

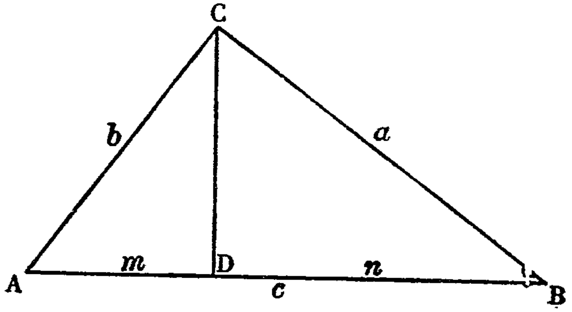
[證明] ∠ADB=rt.∠ (圓周角定理系三)

而 AD=m, DB=n, CD⊥AB (作法)

∴ CD爲m,n的比例中項 (比例中項定理一)

176. 畢達哥拉斯(Pythagoras)定理. 下面的定理,是高等幾何中距離講法的出發點.在初等幾何和數値三角裏,也有廣大的應用,値得特別注意.

畢氏定理. 直角三角形中斜邊的平方,等於夾直角二邊的平方和.



[假設]　c 是 rt.△ACB 的斜邊; a,b 為他二邊.

[求證]　$c^2=a^2+b^2$.

[解析]　引斜邊的高,分斜邊為二段,利用上面所說直角三角形母子相似定理去證明.

[證明]　作 $CD\perp AB$, 則

$$a^2=nc,\ b^2=mc \quad (\text{比例中項定理二})$$

相加得　$a^2+b^2=c(m+n)=c^2$　(因 $c=m+n$)

習　題　四　八

*1. 證明上面圖中 $a^2:b^2=n:m$

2. 證 rt.△ 斜邊與他一邊平方差,等於第三邊平方.

*3. 求一等腰直角三角形中三邊的比.

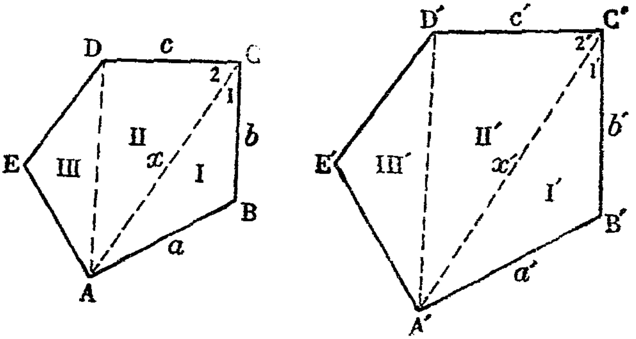
*4. 一 rt.△ 中,斜邊為最短邊二倍,求三邊的比.

5. 如 AD 爲 $\triangle ABC$ 的高,求證 $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$.

*6. 如 $\triangle ABC$ 中,一邊平方等於他二邊的平方和,試證必爲一 rt. $\triangle$. 如一邊平方大於他二邊的平方和,則必有一鈍角.

7. 有 rt. $\triangle ABC$, CD 爲弦上的高,與 $\angle A$ 的分角線 AE 相交於 F,求證 DF : FC＝CE : EB.

177. 相似多角形定理. 從相似多角形一對應頂點,引各對角線必分兩形爲同個數同位置的許多相似三角形.



[假設]　ABCDE∽A′B′C′D′E′,

[求證]　I∽I′, II∽II′, III∽III′.

[證明]　因　$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$　$\angle B=\angle B'$　(相似形定義)

∴　I∽I′　(相似△判別定理二)

於是　$\angle 1=\angle 1'$　(相似定義)

但　$\angle C=\angle C'$　(相似定義)

$\therefore$　$\angle 2=\angle 2'$　(普通公理)

又因　$\frac{x}{x'}=\frac{b}{b'}$,　$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$　(相似定義)

故有　$\frac{c}{c'}=\frac{x}{x'}$　(普通公理)

卽得　$\mathrm{II}\backsim\mathrm{II}'$　(相似△判別定理二)

同理可證　$\mathrm{III}\backsim\mathrm{III}'$

178. 連比例定律. 如a,b,c……a′,b′,c′等成連比例,卽$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$則 $\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

[已知] [求證]如上述.

[證明] 命$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots\cdots=K$.

則　$a=a'K,\ b=b'K,\ c=c'K\cdots\cdots$　(普通公理)

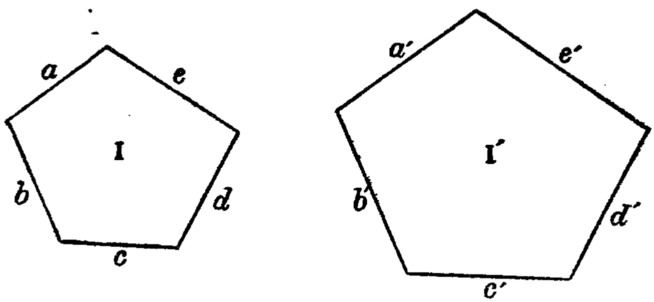
相加得　$a+b+c+\cdots\cdots=(a'+b'+c'+\cdots\cdots)K$

(普通公理)

卽　$\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}=K=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$

179. 相似多角形周界比定理. 兩相似多

角形周界的比,等於任兩對應邊的比.



[假設]　$I \backsim I'$, $p=a+b+c+d+e$, $p'=a'+b'+c'+d'+e'$,

[求證]　$$\frac{p}{p'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\cdots\cdots$$

[解析]　用連比例定律卽得.

[證明]　因　$I \backsim I'$　(假設)

$\therefore$　$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\frac{e}{e'}$$　(相似定義)

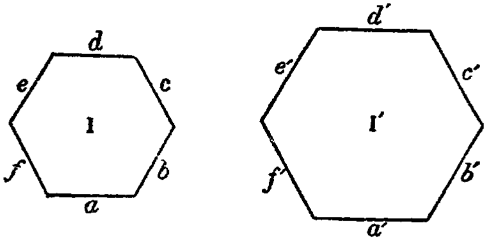
立得　$$\frac{p}{p'}=\frac{a+b+c+d+e}{a'+b'+c'+d'+e'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\cdots\cdots$$

(連比例定律)

180.　相似正多角形定理.　邊數相同的正多角形相似.

[假設]　I, I'各爲n邊的正多角形(下圖$n=6$).

[求證]　$I \backsim I'$.



[解析]　n邊的正多角形各角是幾度!

[證明]　因I,I′是正多角形,故各角均等於

$$\frac{2(n-2)}{n}\text{rt.}\angle s$$　(習題三十第8題)

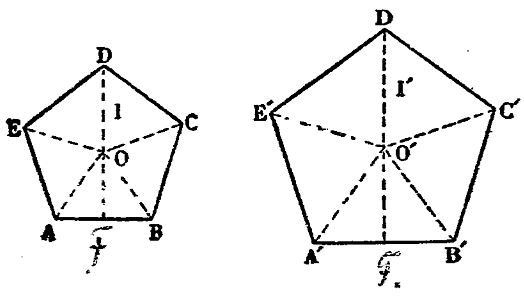
又因　$a=b=c=\cdots\cdots, a'=b'=c'=\cdots\cdots$

(正多角形定義)

故　$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$　(普通公理)

∴　$I \backsim I'$.

181. 正多角形周界比定理. 邊數相同的二正多角形,其周界的比,等於頂心距或邊心



距的比.

[假設] I和I′同爲n邊正多角形,O,O′爲心;OA,O′A′爲頂心距,OF,O′F′爲邊心距,p,p′爲周界

[求證] $\frac{p}{p'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{OF}{O'F'}$

[解析] 先證$\triangle OAB\backsim\triangle O'A'B'$.

[證明] $I\backsim I'$ (相似正多角形定理)

I 1) 在I中,$OA=OB=OC=OD=OE$ (等腰半徑定理)

$AB=BC=CD=DE=EA$ (正多角形定義)

$\therefore\ \triangle AOB\equiv\triangle BOC\equiv\triangle COD\equiv\triangle DOE\equiv\triangle EOA$

(s. s. s.)

即 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOA$

2) 但 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOA=4\text{rt.}\angle$

(§ 68).

$\therefore$ $\angle AOB=\frac{4}{n}\text{rt.}\angle$ (普通公理)

同理 $\angle A'O'B'=\frac{4}{n}\text{rt.}\angle=\angle AOB$

3) 又因 $AO=OB,\ A'O'=O'B'$ (等圓半徑定理)

$\therefore$ $OA:O'A'=OB:O'B'$ (ax)(普通公理)

是以 $\triangle AOB\backsim\triangle A'O'B'$

$OA:O'A'=AB:A'B'=\frac{p}{p'}$ 179

(相似△判別定理二)

II、且 $OF\perp AB,\ O'F'\perp A'B'$ (邊心距定義)

$$\frac{OF}{O'F'}=\frac{OA}{O'A'}$$　(習題四六第2題)

$$\therefore \quad \frac{p}{p'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{OF}{O'F'}$$

(相似多角形周界比定理)

習　題　四　九

*1. 證明相似三角形周界的比等於對應中線的比.

*2. 證明相似三角形周界的比,等於對應分角線的比.

3. 兩相似三角形的周界爲18寸和15寸,大三角形的一中線爲6.5寸,求小三角形裏的對應中線.

4. 兩相似多角形一對對應邊爲25寸和15寸,小多角形的周長72寸,求大多角形的周.

*5. 求一圓的內接和外切正三角形,邊與邊的比,和高與高的比.

6. 設兩圓的半徑爲5寸,10寸,求內接於兩圓的正六邊形周界的比.

7. 內接於半徑2寸的圓的正多角形,其周界爲a寸,問與其等邊數,內接於半徑3寸的圓的正多角形,周界若干?

8. 如正多角形的周界增加2倍則頂心距(即外接圓半徑)須增加若干?

第八編 幾何計算

面積

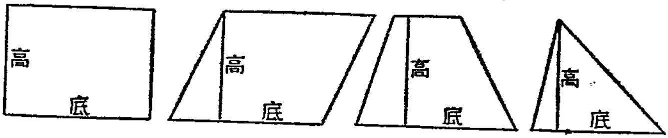
182. 面積. 在§43裏說過,面積單位,是每邊爲單位長的正方形. 換句話說,一個圖形的面積就是他所含這面積單位的個數, 照全等平行四邊形定理的系, 等邊的二正方形爲全等形. 所以用同一長度單位的正方形都全等,就同等長線段可以完全疊合的情形一樣. 這是我們用單位邊長正方形做面積單位的一個理由. 還有一個更重要的理由,可從第二編中各量法公式看出. 因爲用割補法很容易把各種直線形化成長方形後再求面積. 但是長方形面積, 用上述的單位時, 便與長濶發生極簡單的關係,使面積計算,大爲便利.

註. 本篇目的卽在證明第二編中一部份求積公式.

183. 等積形. 二個圖形面積相等的,叫做等積(Equivalent)形. 等積的符號卽爲普通的等號＝.

註. 等號原來單指大小關係而言. 但在線段,與角的情形,大小相等便能疊合,而爲全等,所以和面積情形不同,沒有要區別大小相等與全等的必要.

184. 底和高. 以長方形,平行四邊形,三角形的一邊或梯形中平行二邊之一做底(Base),則長方形中的隣邊,平行四邊形及梯形中底與對邊的公共垂線,以及三角形中這底上的頂垂線,各稱爲該圖形的高(Altitude).



185. 長方形面積. 照§44的擧的理由,便可說明.

長方形面積定理. 長方形面積等於高和底的乘積.

由此很易推得

系一. 二等高(或底)長方形面積的比,等於二底(或高)的比.

系二. 二長方形面積的比,等於其底與高乘積的比.

但是如果嚴格一些的講法,却應當先證這二系,才能推出定理(看下面的習題).

註. 定理所述,原是一種簡單說法,較詳細一點,應該說: 一長方形的面積(即所含面積單位個數)等於底與高中各含相當長度單位個數的乘積. 以後皆從簡便說法.

習題五十

*1. 設有二等高長方形,底長的比為$\frac{m}{n}$試做§158的方法,直接證明上面的系一.

*2. 有三個長方形I, II, III. I和II等高,而底的比為$\frac{b}{b'}$, II和III等底,而高的比為$\frac{h}{h'}$. 試求I與II,II與III面積的比,并證出I和III面積的比.

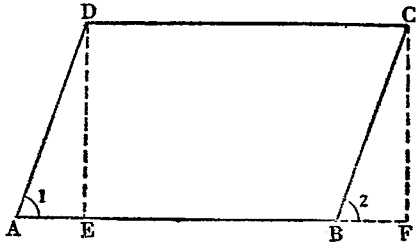
*3. 取III為面積單位,而就上題推證長方形面積定理.

4. 二等積長方形的底如相等,問高是不是也相等?

5. 二等積長方形中高的比與底的比有何關係?

*6. 求正方形面積與邊長關係,并用詳細一些的說法(§ 185 註.)

186. 平行四邊形面積定理. 平行四邊形面積等於底乘高.



[假設] ▱ABCD 的底爲 b,高爲 h.

[求證] ▱ABCD = hb.

[解析] 看 § 45.

[證明] 按垂線作法,作 DE, CF 二線和 AB 及延長線垂直. 在 rt. △AED, rt. △BFC 裏 ∠1 = ∠2

(//性質定理二)

AD = BC (▱性質二)

∴ rt. △AED ≡ rt. △BFC (全等 rt. △ 定理一)

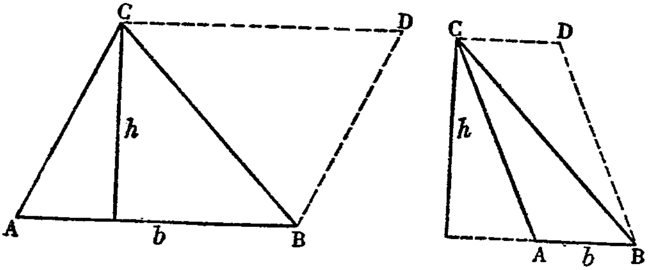
∴ ▱ABCD = △AED + 梯形 EBCD

= △BFC + 梯形 EBCD (普通公理)

$=$長方形EFCD$=hb$（長方形面積）

系. 同在二條平行線內,同底或等底的二平行四邊形必等積.

187. 三角形面積定理. 三角形面積等於高與底乘積的一半.



［假設］ $\triangle ABC$—底爲b,相當高爲h(左圖或右圖).

［求證］ $\triangle ABC=\frac{1}{2}hb.$

［解析］ 作▱ABCD,再用▱性質一.

［證明］ 作CD//AB, BD//AC.　　　　(//作法)

則 ABCD爲▱,而BC爲一對角線.　　　　(定義)

$\therefore$　　$\triangle ABC\equiv\triangle DCB$　　　　(▱性質一)

$\therefore$　　▱ABCD$=\triangle ABC+\triangle DCB=2\triangle ABC$

$\therefore$　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}$▱ABCD $=\frac{1}{2}hb.$　(▱面積定理)

系一．同在二線平行線內,同底或等底的二個三角形必等積.

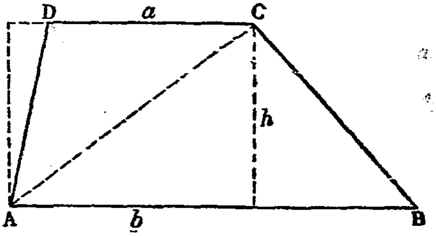
系二．二三角形面積的比,等於其底與高乘積的比.

又就習題四六第2題關係,得

系三．二相似三角形面積的比,等於其任一相當邊平方或相當高平方的比.

188．梯形面積定理．梯形面積等於兩底的半和與高的乘積.

AB : AE'' = CD : CD''



[假設]　梯形ABCD的二底爲a及b,高爲h.

[求證]　梯形 $ABCD=\frac{1}{2}(a+b)h$.

[解析]　引一對角線,分爲二個△,再用§187的理.

[證明]　引對角線AC,分這梯形爲△ABC,△ACD.

則這二△的高必相等,而爲h　(習題三二第2題)

又 $\triangle ABC=\frac{1}{2}hb,\ \triangle ACD=\frac{1}{2}ha$(△面積定理)

相加得,梯形 $ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}hb+\frac{1}{2}ha=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

習題五一

1. 證明連接▱對邊中點的二線段,分全形為四個等積▱.

2. 證明經過▱對角線交點的任何線,分全形為二個等積梯形或▱.

*3. 證明斜方形面積等於其二對角線乘積的一半.

4. 證明△三中線,分原形為六個等積△.

5. 證明連接△任二邊中點所成小△,面積為原形的四分之一.

*6. 已知等邊三角形邊長為a,求其面積(看習題四八第4題).

*7. 已知△底邊位置及長短,且面積大小有定,求其對頂點的軌跡.

*8. 試分一梯形為一△和一▱,而求其面積公式.

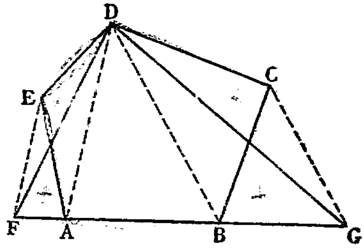
9. 已知一等腰梯形的二底為a, b, 他二等邊均為1,求其面積.

189. 作等積形法. 求作一三角形,與一已

1) △

2) ▱

(4)
知多角形等積.



[已知]　多角形ABCDE.

[求作]　一三角形與ABCDE等積.

[作法]　聯對角線DA, DB. 并引EF//DA, CG//DB.
(F,G是所引線與AB延線交點).　(作//法)

聯成△DFG即得所求的△.

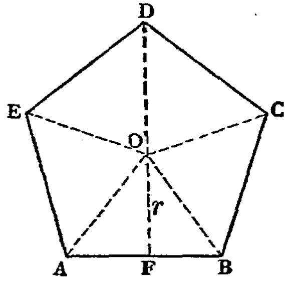
[理由]　△ADE=△ADF, △BDC=△BDG.

(△面積定理系一)

ABCDE=△ABD+△ADE+△BDC

=△ABD+△ADF+△BDG=△DFG.

190. 正多角形面積定理. 一正多角形面積等於邊心距與周界乘積的一半.



[假設] 正多角形ABCDE的心爲O,邊心距爲r,周界爲p.

[求證] $ABCDE=\frac{1}{2}pr.$

[解析] 從這正多角形心,作頂心距,分原形爲全等等邊△. 再用△面積公式求之.

[證明] 連接OA,OB,OC,OD,OE則

$$OA=OB=OC=OD=OE \text{(等圓半徑定理)}$$

$$AB=BC=CD=DE=EA \text{(正多角形定義)}$$

$\therefore$ $\triangle AOB\equiv\triangle BOC\equiv\triangle COD\equiv\triangle DOE\equiv\triangle EOA$ (s.s.s.)

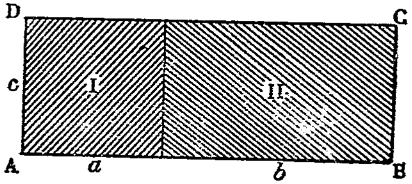
但 $\triangle AOB=\frac{1}{2}r\cdot AB$ (△面積定理)

$\therefore$ $ABCDE=n\cdot\triangle AOB=\frac{1}{2}r\cdot n\cdot AB=\frac{1}{2}rp.$

191. 代數恆等式的幾何證明. 凡代數裏二次的齊次恆等式,都可借面積的理證明.即

只須證明等式兩邊所表的面積相等便得．在此須注意初等幾何裏，只講正量，所以不能由這種方法，證明這些公式的普遍性．

例一．證明代數分配律：$(a+b)c=ac+bc$．



$(a+b)c=$面積ABCD，

$ac=$面積I

$bc=\cdots$積II

$ABCD=I+II \quad \therefore (a+b)c=ac+bc$

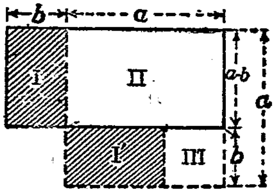
例二．證明平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(a+b)(a-b)=I+II$

$a^2=I'+II+III$

$b^2=III$

觀右圖，即明上式．



習題五二

1. 求作一等腰△與一已知△等積．

2. 求作一正方形與一已知△等積．

*3. 已知圓半徑爲 r, 求其內接正方形和外切正方形的面積.

*4. 已知圓半徑爲 r, 求其內接正六角形和外切正六角形的面積.

5. 用幾何方法證明下面的代數恆等式:

(一)　$a(b-c)=ab-ac$;

(二)　$a(b+c+d)=ab+ac+ad$;

(三)　$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$,

(四)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(五)　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$(a+b)^3$

圓的度量

192. 圓的相關量. 我們以前所量的方法, 以適宜線段爲單位, 量面積, 以適宜正方形爲單位, 而用疊合法, 看所求長或面積中能含這單位的倍數(或幾分之幾). 所以先決條件, 就是要單位能和所求件疊合. 但是我們怎能叫圓弧和直線段疊合? 又怎能補割一圓成爲長方形呢?

要從嚴格方面, 講圓的度量, 須先立圓的

相關量——如圓周(卽全圓的長,§35),圓面積——的意義. 但這種講法,非藉極限(Limit)的理不能明白,在初學不易了解,故本書只用淺顯的直觀設法解釋.

193. 圓與正多角形. 先複習§§141,143以及習題三八第6第7兩題.

作一圓的內接外切同邊數正n角形,假設周界各爲p_n與P_n,則$p_n<P_n$,今將二者邊數倍增,則陸續可得

$$p_n<p_{2n}<p_{4n}\cdots\cdots<P_{4n}<P_{2n}<P_n.$$

這樣增加下去,p_{2kn}和P_{2kn}可以非常接近,但是總不相等,就是說二者不能相合. 所以我們意想中,必有一量,含於這二種的中間,把他們隔開. 就直觀看來,這中間的量豈不是圓周麽?

面積的講法,也和上面一樣,如以a,A表二種正多角形面積,顯見

$$a_n<a_{2n}<a_{4n}<\cdots\cdots<A_{4n}<A_{2n}<A_n.$$

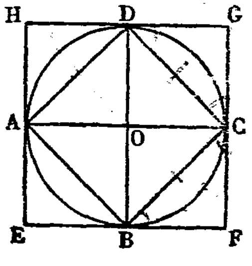
所以圓面積就是分隔這二種面積的量.

圓和正多角形,關係旣這樣密切,故未講圓的度量以先,說幾種簡單的作圖題.

註. 照理論講說,這種內接外切正多角形,原不限定正多角形.

194. 已知圓的內接外切正多角形作圖法. 照§§141, 143的定理,便知只須求出圓上等分點,卽可解決本問題. 表面看來,似乎應當和等分線段一樣的簡單. 眞是出人意外,問題還談不到簡單不簡單,在初等幾何範圍以內(卽只限定用無度尺和圓規),這題在根本上竟不能作(參看§50). 下文只述可作情形中,極簡單的二種.

195. 已知一圓要作內接外切正方形.



[已知]　⊙O.

[求作]　(一)外接正方形;(二)內切正方形.

[作法]　作二垂線直徑AC,BD.

連ABCD得內接正方形.

過A,B,C,D作切線,相交成外切正方形.

[理由]　$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOA=$rt.$\angle$

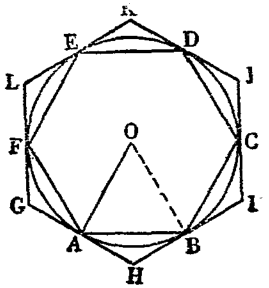
(直角公理)

$\therefore$　$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DA}$　(等圓心角對弧)

$\therefore$　ABCD是內接正方形(圓內接正多角形定理)

EFGH是外切正方形(圓外切正多角形定理)

196.　已知一圓要作內接外切正六角形.



[已知]　⊙O.

[求作]　(一)內接正六角形;(二)外切正六角形.

[作法]　任作一半徑OA.

以A爲心,OA爲半徑作弧,交⊙O於B,得第二等分點.

如此繼續得C,D,E,F.

連諸等分點,得內接正六角形.

過諸等分點,作諸切線,相交即成外切正六角形.

[理由] $OA=OB=AB$ (等圓半徑定理,作法)

$\therefore \angle AOB=\frac{2}{3}\text{rt.}\angle=\frac{1}{6}$周角 (習題三十第3題)

$\therefore \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=\angle FOA.$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$(等圓心角對弧)

$\therefore$ABCDEF是內接正六角形(圓內接正多角形定理)

GHIJKL是外切正六角形(圓外切正多角形定理)

系一. 圓內接正六角形的邊和圓半徑相等.

系二. 聯一圓內接正六角形相隔頂點,得這圓的內接等邊三角形.

習 題 五 三

1. 求作圓內接外切正八角形,正十六角形.

*2. 求已知圓內接等邊△每邊與半徑的比.

*3. 求作一正六角形,使邊長等於已知線段.

4. 證明圓內接等邊△的邊心距,等於圓半徑的一半.

*5. 求圓內接正方形邊心距與半徑的比.

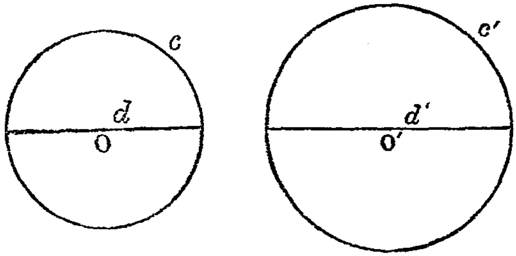
*6. 在圓上任取若干點,作內接外切多角形,再將邊數加多(不限於倍增),問§194所說情形,是否仍合!

197. 圓與正多角形同性公理. 凡正多角形特性,與邊數多寡無關的,也是圓的特性.

如正多角形周界比定理, 正多角形面積定理都是,圓周和面積計算法,卽本於此.

註. 這條公理,就嚴密的眼光看來,甚爲含混. 但對初學,則較極限的說法爲簡而易明.

198. 圓周率定理. 任何圓圓周與其直徑的比,爲一定數.



[假設] ⊙O的圓周爲c,直徑爲d.

[求證] $c \div d =$ 一常數.

[解析] 應用上節公理和正多角形周界比定理.

[證明] 另作一⊙O',其圓周爲c',直徑爲d'.

命二圓半徑,各爲 r, r'. 今在二圓內,作同邊數內接正多角形 I, I',其周界爲 p, p', 則

$I \backsim I'$ (相似正多角形定理)

$\therefore \quad \frac{p}{p'}=\frac{r}{r'}=\frac{d}{d'}$ (正多角形周界比定理)

$\therefore \quad \frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ (圓與正多角形同性公理)

即 $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$

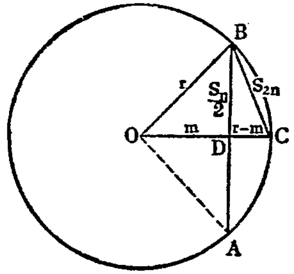
註. 這定比值叫圓周率,常用希臘字母 π 表示. 他的値是無盡不循環小數,普通以 $3\frac{1}{7}$, 3.1416 等代其近似值. 在平常計算,已儘足達適當準確度.

系一. $c=\pi d=2\pi r$.

系二. 在以 r 爲半徑的圓中, m° 的弧的長等於 $\frac{m}{360}\times 2\pi r$.

199. 圓周率求法. 實際上計算圓周率,本當用無盡連級數 (Infinite series) 或他種高等算學去推求. 下文用幾何方法講解,不過是想明其理而已:

如次圖,設 r 爲圓半徑, S_n 爲內接正 n 角形一邊, S_{2n} 爲內接正 $2n$ 角形一邊. 今往求 S_n 與 S_{2n} 關係.



但 OD⊥AB, 則 $AD=DB=\frac{S_n}{2}$,幷命 $OD=m$. 就 rt. △ODB, rt. △BDC 中,用畢氏定理,得

$$\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+m^2=r^2,$$

$$\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+(r-m)^2=S_{2n}^2$$

從這二個聯立方程式,消去 m. 則從前式解得

$$m=\sqrt{r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}\quad 代入後式.$$

$$S_{2n}^2=\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}\right]^2$$

$$=\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+r^2-2r\sqrt{r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}+r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2$$

$$=2r^2-2r\sqrt{r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}$$

$$=2r^2-2r\sqrt{\frac{4r^2-S_n^2}{4}}$$

$$=2r^2-r\sqrt{4r^2-S_n^2}$$

$$=r^2\left[2-\sqrt{4-\left(\frac{S_n}{r}\right)^2}\right]$$

$$\therefore\quad S_{2n}=r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{S_n}{r}\right)^2}}$$

今自正六角形起,這時 $S_6=r.$ 代入上式計算如下表

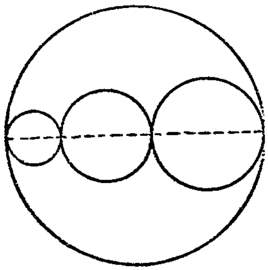
n	計　算　公　式	一邊長	周　界
12	$\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$	0.51764	6.21166
24	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51764)^2}}$	0.26105	6.26526
48	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.26105)^2}}$	0.13081	6.27870
96	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.13801)^2}}$	0.06534	6.28206
192	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.06534)^2}}$	0.03272	6.28291
384	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.03272)^2}}$	0.01632	6.28312
768	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.01632)^2}}$	0.00818	6.28317

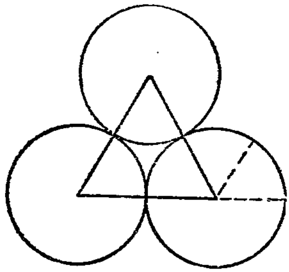
今用正768角形周界做圓周差近值,即得

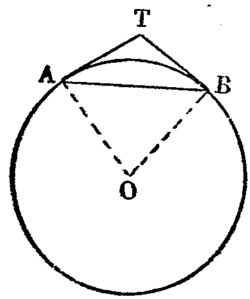
$$\pi=3.14159.$$

習 題 五 四

1. 將一圓直徑,分為任意幾段,用各段為直徑連作小圓,如下左圖. 證明小圓周總和等於大圓周.







2. 以一等邊三角形三頂點為心,每邊長的一半做半徑,作三等圓,兩兩外切. 求三角形內三弧的和.

*3. 上右圖中AT,BT為二切線,試證 $AT+TB>\widehat{AB}>AB$.

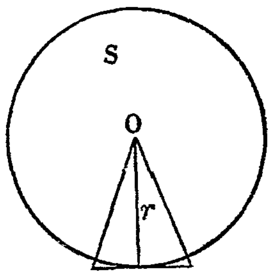
*4. 已知一弧和直徑等長,求其度數.

註.∵ 這弧所對的圓心角,在理論算學中,用做量角的單度,稱爲1弧度角(Radian).

*5. 求1°等於幾弧度角.

*6. 自圓內接正方形起,依§198的公式,求到內接正64角形,以定π的差近值(可用二位小數).

200. 圓面積定理. 圓面積等於半徑和圓周的乘積的一半.



[假設] ⊙O的半徑爲r,周爲c,面積爲S.

[求證] $S=\frac{1}{2}cr.$

[解析] 用正多角形面積定理和圓與正多角形同性公理便得.

[證明] 設這圓一外切正多角形,面積爲A,周界爲p,則

$$A=\frac{1}{2}pr.$$ (正多角形面積定理)

∴ $$S=\frac{1}{2}cr.$$ (圓與正多角形同性定理)

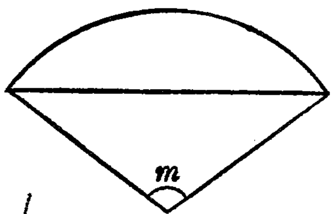
系一. 圓面積等於半徑平方和圓周率的乘積.

因 $$S=\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}2\pi r\cdot r=\pi r^2$$

系二. 二圓面積比,等於半徑平方比.

201. 扇形和弓形面積. 如扇形圓心角爲m°,半徑爲r,則由上理,顯見

扇形面積$=\frac{m}{360}\pi r^2$. 從扇形面積減去一等腰三角形,得弓形面積. 但除特例外,須用



數值三角法,方能求值.

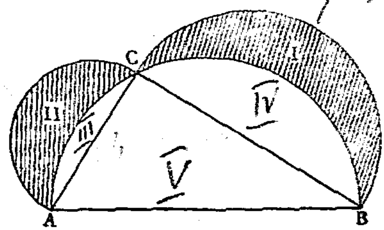
習題五五

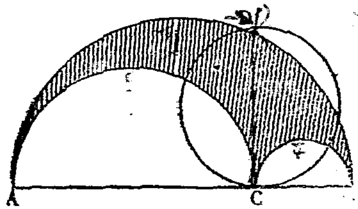
1. 求證圓面積 $S=\frac{1}{4}\pi d^2$.

$S=\pi r^2$
$=\pi\cdot$

2. 用rt. △三邊爲直徑作圓,試證斜邊上圓面積,等於他二邊上者的和.

3. 在rt. △三邊上作半圓,如次上圖. 證明I, II兩個初月形面積和,等於這rt. △的面積.





4. 在線段 AB 上取一點C,作三半圓,如上下圖. 證明黑暗部分,等於用CD爲直徑的圓面積.

5. 求作一圓使其面積爲二已知圓面積的差.

6. 已知一圓圓周與面積等值,求其半徑. $\pi r^2 = 2r\pi$ $r=2$

7. 有一弓形,已知弦長 2 寸,自劣弧中點到弦上距離(稱爲矢)爲$\sqrt{2}-1$寸. 求其弧長和面積.

$\overline{V}+\overline{III}+\overline{IV}=\overline{VII}+\overline{II}+\overline{VI}+\overline{I}$

Aufg 2.

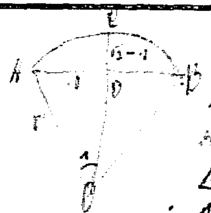
中華民國二十二年七月初版
中華民國二十二年八月廿五版
（一〇七〇三）

初級中學用
復興教科書 幾何 二冊
下冊定價大洋肆角
外埠酌加運費匯費

編著者 余介石 徐子豪
校訂者 段育華
主編 發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者王養吾）

六一一〇上自



$r^2 = 1^2+(r-\sqrt{2}+1)^2 = 1+r^2-2r(\sqrt{2}-1)+2-\sqrt{2}+1 = \dots$

$r=\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$, $\therefore \angle 1 = 45°$

$\widehat{AEB} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi r = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$

$ADBE = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}^2 = \frac{1}{2}\pi$

$\triangle ADB = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{2}\cdot OB\cdot AD = 1$

$\therefore ADBE = ADBE - ADB = \frac{1}{2}\pi - 1$ 方寸

復初中幾何下册　定價肆角