教育部審定

漢譯

郝克氏

高級代數學

譯者 高佩玉

漢　譯

郝　克　氏

高級代數學

ADVANCED ALGEBRA

BY

HAWKES.

譯者　高佩玉

北平科學社印行

社址　北平地安門內油漆作胡同十二號

電話　東局 2993

1934

漢譯 郝克氏高級代數學

實價	洋宣精裝	一元四角
	洋宣精裝附無限級數	一元五角
	報紙平裝	九角
	報紙平裝附無限級數	一元

原著者 Hawkes.

原書名 Advanced algebra.

譯者 高佩玉

發行
印刷 者 北平科學社

社址 北平地安門內油
漆作胡同十二號

電話 東局 2993.

分銷處 各埠書局

簡名電碼 日

民國二十三年六月初版

序

本書原名 Advanced Algebra 於民國九年譯出，當時各大學尚有預科，高中 尚未成立，普通採用皆爲英文原本 ，故將譯稿擱起 ，現時高級中學後期師範漸多，而本書恰合高中後師新課程標準，故就原書1928年之修改本，詳加整理刊行向世，名曰漢譯郝氏高級代數學。

本書之譯本與原本之章數頁數處處相同，以便互相參考。

本書共分三部第一部自第1頁至124頁係復習初等代數 至二次方程式止，以使啣接而無隔陔，第二部自第125頁至 174 頁爲二次式及其推廣．係聯初等代數及高等代數之關節。第三部自第175頁至297頁，係講高等代數之本身。次序井然，講解明晰。方法簡要，堪稱現在高級中學及後期師範之良善教本。

惟教材時時改良 ， 方法漸漸改善 ， 教本方能完 備，教育方能進步。而改進之原則，爲由粗而精，去瑕存瑜，化無用爲有用，進小用爲大用，以易代難，以簡馭繁，增加興趣是也，以此眼光觀之，本書尚有不通者，茲逐一述後。

(1) 本書第27頁，第一段末句云「the binomial a^n+b^n is prime When n is even」譯成漢文云「n爲偶數時則二項式a^n+b^n爲素式」此句實在不能成立，因n非2而爲他偶數如 6 時 ， 此式均可分解爲因式也．

(2) 本書第287頁(1)式以下之p與g互換，應改正。

除上兩條外，尚有未盡善者數點，因非不通之處，故畧而不述。

據多數教此書者之經驗俱云可將無限級數附於後，一則時間足够分配。二則亦適合課程標準，三則縱時間不足 ， 再爲畧而不，講敝社一方維持原著，一方便於教學 ， 故備有二種：一種係原著之譯本，一種附無限級數，此無限級數係採自 Hawkes 之 Higher algebra內者。

宏達之士，對於原書及譯本有所指敎 ， 本書之譯者及出版者均甚歡迎，除贈薄酬外，下版時並將台銜列爲校者．

北平科學社識　一九三四．六．十．

目　　錄

高級代數

二次式部

第一章

基本演算

1. 整數　代數學之初步演算及尋常符號，假定業已熟悉，茲不贅述．

由數法得來之數，謂之正整數．下列數節，仍以正整數爲出發點，以引出代數學中常用之他種數，以便解簡易方程式．

本章所包之代數上定律，其證明大半略去．

2. 加法　兩正整數a與b相加；即求出一數x，使

$$a+b=x.$$

因任意兩正整數相加，其所生之和仍爲一正整數．

例如，欲求3與4之和，即求出x, 使$3+4=x$.

3. 減法　由正整數a, 減去正整數b, 即求出一數x, 使

$$b+x=a. \quad\cdots\cdots(1)$$

此數x謂之a與b之差，可表之如

$$a-b=x.$$

a謂之被減數，b謂之減數．

例如，由8內減去3，即求x使$3+x=8$．其差等於$8-3$，或5．

若a大於b，且俱爲正整數，則其差a爲正整數，而能適合方程式(1)之條件．

若a小於b，則x不爲一正整數

例如，若$a=6$，$b=9$，則$9+x=6$，絕不能得出x之値，爲一正整數．

於此種情形中，而欲減法適用，必須引出負整數，如$(-a)$，$(-b)$等，此處a，b均爲正整數，當求$a-b$之差時，若a小於b可表之爲$a-b=[-(b-a)]$．是以加法減法，包含負數時，可說明之如次：

$$(-(-a))=a^*.$$
$$(-a)+(-b)=(-(a+b)).$$
$$(-a)+b=(-(a-b)).$$
$$a+(-b)=a-b.$$
$$(-a)-(-b)=(-(a-b)).$$
$$(-a)-b=(-(a+b)).$$
$$a-(-b)=a+b.$$

由此觀之，正整數之加法，其結果仍爲正整數，故此法仍適用，而無需乎擴大數系．但減法則不然，論及用負整數作加法，常常不得不

---

* 正整數之符號可寫爲$(+a)$，$(+b)$等等方與負數之記法相同，以後正數前常省去+號，而無雙關之意，因與下節括號之展去及正負數之組合律無關於次序之不同也．

擴大數系，而生出負整數．是故假定負整數可以存在，則方程式(1)可常有解答，卽與先行之定義，正整數彼此亦無相反之理．

口　述　題

下列口述題，先求出其和，再以第二數爲被減數，求出其差：

1.	$-1,3.$	5.	$1,2.$	9	$8,5.$
2.	$2,-4.$	6.	$-2,3.$	10.	$10,-15.$
3.	$3,1.$	7.	$4,-1.$	11.	$12,25.$
4.	$5,-7.$	8.	$-6,7.$	12.	$-17,21.$

4. 零　若在第3節方程式(1)中，$a=b$，則無正負整數，可適合於此方程式．欲有一數足以適合於此種情形，則須引出零，表之以0.茲用方程式詳示之：

$$a+0=a,$$

或
$$a-a=0.$$

加法減法之於零，可詳示之如下，而k爲正數或爲負數：

$$0+k=k\pm 0=k.$$

$$0-k=-k.$$

$$0\pm 0=0.$$

5. 乘法 以b乘a之法卽尋一數x適合於方程式

$$a\cdot b=x.$$

例如，求6與3之積，卽求x之値，使$6\cdot 3=x$.

若a與b爲正整數，x亦爲正整數，可用a自身相加至b次以求之。若所欲乘之數爲負整數，則有下之定律：

$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$$

$$(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b).$$

$$0\cdot k=k\cdot 0=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

此處之k爲正數或負數或零。

上列諸式可申述之如次：

原理 諸數相乘之積爲零；則其中有一因子或數因子爲零。

此爲常用之一重要原理，設有若干因數相乘，如

$$a\cdot b\cdot c\cdot d=e,$$

第一，若e爲零，則a,b,c,d中必有一數或幾數個數爲零，第二，若a,b,c,d中有一數或數數爲零，則e亦必爲零。

減法演算時，可生出負整數與零，然以此種正負整數作乘法，確不至另生新數。

6. 除法 以l除k之法，卽求一數x適合於方程式

$$x\cdot l=k, \quad\cdots\cdots(1)$$

k與l可爲正整數或負整數，k亦可爲零。若l爲零，則於第7節中論之。

例如，求21與7之商，卽求x之値使$7\cdot x=21$.

若k由

$$\ldots, -3l, -2l, -l, 0, l, 2l, 3l, \ldots\ldots$$

數組中得之，則x之值必爲整數或零；換言之，其值如前所論，而k爲l之倍數，若k不能由此數組中得之，而介於兩數之間，欲行此法可須引入分數，表之以$k \div l$或$\frac{k}{l}$，說明之文以方程式

$$\frac{k}{l} \cdot l = k.$$

分數之加減乘除詳示之如次：

$$\frac{k}{l} \pm \frac{m}{n} = \frac{kn + lm}{ln} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{ln} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\frac{k}{l} \div \frac{m}{n} = \frac{kn}{lm} \quad \cdots\cdots(4)$$

分數更有以下之性質：

$$1 = \frac{k}{k} = \frac{1}{1}.$$

$\frac{k}{l} = \frac{km}{lm}$，此處m爲任何數……………………(5)

$$\frac{-k}{l} = \frac{k}{-l} = -\frac{k}{l} \quad \cdots\cdots(6)$$

將最後所述兩方程式，以文字說明如下：

分數之子母，同以任何數乘之，其值不變．

只變分子或分母之符號，則分數之符號亦變．

前述第5節中乘法符號律，可適用於分數，與整數無異．

例如，$\left(-\left(\frac{a}{d}\right)\right)\cdot\left(-\left(\frac{c}{b}\right)\right)=\frac{ac}{bd}$．

正數或負數k，可表爲分數式；如

$$\frac{k}{l}.$$

口　述　題

下列習題，以第二數除第一數而求其商：

1.	5,20.	4.	5,−4.	7.	−1,−3.	10.	−21,6.
2.	−3,15.	5.	−3,−6.	8.	−4,−9.	11.	17,−2.
3.	2,−7.	6.	2,5.	9.	15,−10.	12.	−12,5.

7. 零爲除數　設第6節方程式(1)中，l=0，則無正整數或負整數或分數之x足以適合此方程式，因由第5節(1)式，x無論爲何值，與零之積必爲零．

如除數爲零，越乎代數規律之外；是以欲除法可通，必其除數不至爲零．在方程式

$$4\cdot 0=2\cdot 0,$$

若兩邊以零除之，則得不合理結果4=2矣．

8. 基本演算　加減乘除謂之四基法，用此法，以1爲出發點，可引出任何數，此種數謂之有理數．此種數包括正整數負整數，以及子母爲整數或可化爲整數之分數．又正整數負整數總謂之整數

9. 負數與分數之實用　以上所論之負數與分數乃由數學上

演算之需要而生，亦可應用於日常事務．例如，某日之溫度爲＋20°，次日寒暖計之水銀下降25°，欲表明第二日之溫度，必須由20中減25；又如，欲表明3等分7枚蘋果之結果，須用分數，假若不立負數及分數之名，則此種實例均不能通，而於日常生活上之應用，間有窮焉．

代數上之他種演算，即方根與乘方．方根足以添增數系，常能於異日見之，唯數之乘方，確與數類無所增補．

10. 演算法則　代數上所用之數均服從以下所述之法則，且可假定其成立而不重加討論．

I　加法之互換律　兩數相加，其和與相加之次序無關，以符號表之，

$$a+b=b+a.$$

此處a及b爲前所述之任何數，或此後重新添入之數．

II　加法結合律　三數相加，其和與數爲群而加之，無關．以符號表之，

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$$

III. 乘法之互換律　兩數相乘，其積與相乘之次序無關，以符號表之，

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

IV. 乘法之結合律　三數相乘，其積與可分為羣而乘之，無關，以符號表之，

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c.$$

V. 乘法之分配律　一數與兩數之和之積，等於此數與兩數各積之和，以符號表之，

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

上列諸法則，可推廣至三數以上。

11. 整式與有理式　一多項式之各項，無一項之分母含有文字者，謂之整式

例如，$4x^5-x^3-2x^2-\frac{3}{4}x+1$為整式，

二整式之商，謂之有理式。

例如，$\dfrac{x^2-2x+3}{x-7}$為有理式。

12. 多項式之演算　由第2節至第6節所述四基法及第10節所述諸定律，其文字代替數字或多項式俱能適合。

文字算式其重要本不亞於數字算式，因文字實乃代表數字，如將文字算式之文字，以數字換之，即為數字算式，是故前所述諸定律，俱昭焉若顯。

13. **多項式加法** 多項式加法演算，可按照下列

法則 將同類項排列成同行，求其各行代數和，並以其適宜符號連之。

若多項式可化爲獨項式，此法則亦適用。

14. **多項式減法** 多項式減法演算，可按照下列

法則 將減式書於被減式下，使同類項列成同行，變減式各項之符號，而與被減式相加。

若練習純熟者，實際可不明變減式之符號而暗中幻變其符號以演之。

習 題

1. 加$2a^2b^2+a^2b-15ab+3b$, $a^2b^2+2ab^2-5b$, $3b+10a^2b^2+4ab$, 及a^2b-3ab^2+4b.

解.

$$\begin{array}{rrrrr}
2a^2b^2 & +\ a^2b & -15ab & & +3b \\
a^2b^2 & & & +2ab^2 & -5b \\
10a^2b^2 & & +\ 4ab & & +3b \\
 & +\ a^2b & & -3ab^2 & +4b \\
\hline
13a^2b^2 & +2a^2b & -11ab & -\ ab^2 & +5b
\end{array}$$

2. 自$2a^2b^3+3a^2b+15ab-4a$減去$a^2b^3-4a^2b+25ab-3b+5a$.

解.

$$\begin{array}{l}
2a^2b^3+3a^2b+15ab-4a \\
a^2b^3-4a^2b+25ab+\ 5a\ -3b \\
\hline
a^2b^3+7a^2b-10ab-\ 9a\ +3b
\end{array}$$

3. 加$2x^3+3x^2y+15y^3$, $3x^2y+4xy^2-8y^3$, $3y^3-14x^3-10x^2y$, 及$25xy^2+15x^2y-4y^3$.

4. 加$m^2+3mn+xn$, $2n^2+15mn-25m^2$, $13xn-2m+5m^2$, 及$4mn-2xn+3m^2$.

5. 自$2x+5s-15rs$減去$2rs-8r+3s$.

6. 自$3x^2+5xy+2y^2-21x^2y$減去$2x^2+15y^2-3xy$.

7. 加$3a^3+5a^2b+15ab^2-10b^3$, $2a^2b-3ab^2+3b^3$, $19ab^2+3a^3-2b^3$, 及$3a^2b+ab^2-a^3$.

8. 自$21y^3+15y-30x^2$減去$3x^2+15x+2y^3$.

9. 加$21a^2+5a-3b+21ab+2b^2-3$, $a^2-b^2+2-a^2b+5ab$, $19a-ab+a^2-5b^2+3a^2b$, $a+b-a^2+3b^2$, 及$2-10a^2-15a^2b-12b^2$.

10. 自$m^2+mn-3ml$, $mn-15ml21ml+2m^2+3$, 及$2ml-m^2+15$之和減去$25m^2-14ml+21-5mn$.

11. 試自$a^2+25ab+b^2$及$15ab-a^2$之和,減去$15a^2+10b^2+8ab-10$.

12. 試自$25x^2+19xy-9y^2+13$減去$2x^2-15xy$, $2xy-y^2-2x^2+10$, and x^2+y^2+xy-5之和。

13. 自$a+b+c$減去$2a+3c-10b$, $5a-13b+2c$, $8a-c$及$2a-3c+25b$之和。

14. 試自$2r-5s+2q$, $25s+15q-2r$, $25s-15r+2q$及$r+s+10q$之和減去$25q-5s+9r$.

15. 將$5a+2b-10c^2+3$, $a+c^2-15b$, $21c^2+5ab-2ac$及$2ac+5c^2-3ab+a-10$之和自$108c^2+15ab-2ac+13a+21b-36$中減去。

16. 自$\frac{2}{3}a+\frac{9}{5}b+\frac{10}{4}c$, $2a+\frac{1}{2}c-5b$及$\frac{4}{5}a-\frac{9}{2}b$之和減去$\frac{5}{8}a-\frac{2}{3}b+8c$.

17. 自$\frac{15}{7}x^2+\frac{25}{3}xy+\frac{15}{2}y^2+\frac{21}{4}$及$\frac{2}{5}y^2-\frac{10}{3}x^2+\frac{4}{5}xy$之和減去$\frac{25}{24}x^2+\frac{15}{6}xy-\frac{11}{7}y^2$.

15. 括號　包含諸數之數式或代替諸數之文字式，可置於括號中視爲一數在演算時此種括號，除非內邊演算尚未完結或不爲最簡時，可以一數而論。

法則　如括號前爲＋號，脫去括號時，可不變其內邊各項之符號．

如括號之前爲－號，脫去括號時，須盡變其內邊各項之符號．

若一代數式有多種括號，則有下列

法則　先解去其最內層括號．如其前爲－號，則盡變其在內邊各項之符號．

如新最內層可化簡，則簡之．

循次將括號去完爲止．

爲速成計有時可將數步合併作之．唯如是易生錯誤，以致得不償失．

習　題

脫去下列習題中括號：

1. $x-(2y+x)-[3x+5y-(7y+5x)-3y]$.

解．
$$\begin{aligned} & x-(2y+x)-[3x+5y-(7y+5x)-3y] \\ &= x-2y-x-[3x+5y-7y-5x-3y] \\ &= -2y-3x-5y+7y+5x+3y \\ &= 3y+2x. \end{aligned}$$

2. $a-\{-b-[-(-a)]\}$.

3. $-2m+n-[n+5m+(2m+3n)]$.

4. $x^2-2xy+[-5y^2+10xy+(2x^2-3xy+3y^2)-x^2]$.

5. $\frac{1}{2}-\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)\right]$.

6. $5x\{3y-2x[5xy+10x-2(3x+y)]\}+10x^2$.

7. 設 $a=2$，$b=3$，及 $c=1$；求 $a-10b+2a+[5a-3c(21b-2c)+10a]$ 之值．

8. 設 $m=1$．及 $n=5$；求 $m^2+2mn\{3n-7m[4m-10n(2m-n)]\}$ 之值．

9. 設$p=\frac{1}{2}, r=2$及$t=\frac{7}{2}$;求 $-p\left\{r+5t-\left[2p+5t\left(21r-15t\right)+\frac{1}{2}t\right]\right\}$之值。

10. 設 $x=2, m=5, b=1$; 求 $x^2\{-5m+2x[5x-2(3m+b)]\}$之值。

16. 乘法 習慣書$a\cdot a=a^2$, $a\cdot a\cdot a=a^3$; $\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n項}=a^n$ 由第10節乘法結合律

$$a^2\cdot a^3=(a\cdot a)(a\cdot a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^5.$$

普通，
$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad (1)$$
此處m,n爲正整數。

進而言之，
$$(a^n)^m=\underbrace{a^n\cdot a^n\cdots a^n}_{至m項}=a^{n\cdot m}. \qquad (II)$$

結果，
$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n. \qquad (III)$$

應注意 $(a^n)^m$ 與 a^{n^m}之區別，例如$(2^3)^2=8^2=64$. $2^{3^2}=2^9=512$. 還言之，在a^{n^m}內,m爲n之指數，而非a^n之指數。

方程式(1)決定兩方程式之積之指數，如因指數之和，是故獨項式乘法，如下

法則 先寫出數字係數之積，附乘式被乘式所有之文字於其積後而每文字之指數爲乘式與被乘式中該文字指數之和。

例 題

$$-3m^5n^7p^2r^3.(2mn^7p^4)=-6m^6n^{14}p^6r^3.$$

考問： 第10節何種定律應用於前例？

多項式乘獨項式，其演算如下列

法則 用獨項式乘多項式各項而逐次寫出結果各項。

例　題

$$
\begin{array}{r}
4xy^2+3x^2+15xy-10y^2+3 \\
2x^2y \\
\hline
8x^3y^3+6x^2y+30x^3y^2-20x^2y^3+6x^2y
\end{array}
$$

考問：　第10節何種定律應用於前例？

17. 多項式乘法

在分配律中，

$$a(c+d)=ac+ad,$$

以a代替x+y,則

$$(x+y)(c+d)=xc+yc+xd+yd.$$

由是得，

法則　以乘式各項，逐次偏乘被乘式各項，用適宜符號，書其各部分之積．

欲驗其有無錯誤，可取適宜之數代入各文字，求出乘式與被乘式及相乘積之數值，則相乘積之值必須等於他兩值之相乘．

習　題

試乘下列兩式並核算其結果：

1.　$3x^2y+2xy-2xy^2+y^3$ 及 $x+y-xy$.

解．　　　　　　　　　　　　　　　　核算：設 $x=y=1$.

$$
\begin{array}{lr}
3x^2y+2xy-2xy^2+y^3 & =4. \\
\quad x+y-xy & =1. \\
\hline
3x^3y+2x^2y-2x^2y^2+xy^3 & \\
\quad +3x^2y^2-2xy^3+2xy^2+y^4 & \\
\quad -2x^2y^2 \qquad -3x^3y^2+2x^2y^3-xy^4 & \\
\hline
3x^3y+2x^2y-x^2y^2-xy^3+2xy^2+y^4-3x^3y^2+2x^2y^3-xy^4 & =4.
\end{array}
$$

2.　$3a^2by$ 及 $2ab^3y^2$.

3.　$7x^2y^3z$ 及 $-5x^2yz^5$.

4.　$-3m^2np$ 及 $\dfrac{2mn}{3}$.

5.　$-8a^2b^3c$ 及 $-7ab^4c^6$.

6.　$\dfrac{15ax^2z}{2}$ 及 $20a^3xz$

7.　$\dfrac{12ar^2t^5}{5}$ 及 $-\frac{1}{2}a^2rt^3$.

8. $2m^2n+3mp^2$及$3n^2pm^4$.

9. $\dfrac{2ab^3c^5x^2}{3}-4a^2bx^4$及$6a^2bc^3x^5$.

10. $\frac{1}{2}x^2yz^3p^5-\frac{2}{3}xy^3z^2$及$-2x^2yz^4p^2$.

11. $2x^ab^{2b}+3x^{2a}b^b$及$4x^ab^b$.

12. $3a^2b+2ab-4b^2$及$2a^2-5b^2+3ab$.

13. $3m^xn^{2y}-2m^{2y}+5m^2$及$2m^y-5mn^x$.

14. $2a^{m-n}+3a^mb^{m+2}-a^2b^{2n-5}$及$2ab^{n-3}+4b^{m-2}$.

15. $8p^{2-a}r^{b+c}s^a-\frac{1}{2}r^{2+c}p^{b-a}+3s^{a+b-c}p^{2ab}$及$3rs^{2bc-a}$.

展開且化簡：

16. $(2a+b)^3$.

17. $(m+n-p)^2+(n+p)(p-m)-(p+2n)(3m+n)+m(3p+2n)$.

18. 乘法標準式 下列乘法標準式應用最廣，學者宜練習純熟，使用時只考查其因式，卽能知結果．

法則 兩項和與差之積，等於兩項平方之差．其符號與兩項差式相似．

例 題

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

$$(3m+2n^2)(3m-2n^2)=9m^2-4n^4.$$

19. 二項式之平方 其演算如下

法則 二項式之平方，等於兩項之平方和加其積之二倍．

例 題

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy.$$

$$(4a-2b)^2=16a^2+4b^2-16ab$$

習　題

由觀察逕作下列演算：

1. $(x^2+y)^2$.
2. $(a^2+b^3)^2$.
3. $(3a^r+1)^2$
4. $(3m^2-4b^2)^2$.
5. $(2a^{r-1}-1^2)$.
6. $(3+2mp^2)^2$.
7. $(2m^2+4m+1)^2$.
8. $(1-3x^2y^3)^2$.
9. $(m^2+2mn+n^2)^2$
10. $(x^3+3x-4)^2$.
11. $(x^2-1)(x^2+5\quad-2)$.
12. $(4pr^2-5p^2r+2pr)^2$.
13. $(2x^a+3y^b)^2$.
14. $(2m^{x-2}-3n^{x-1})^2$.
15. $(2x^m+y^n)(x^{m-1}-y^{n+2})$.
16. $(3x^2y+2xy^2+3)^2$.
17. $(2mn-5n^2)(3m^2+2mn)$.
18. $(-3x^2y+\frac{1}{2}xy-\frac{2}{3}y^2)(2xy-\frac{1}{2}y)^2$
19. $\left(\frac{2a}{3}+b\right)^2$.
20. $\left(x+\frac{3}{y}\right)^2$.
21. $(2xy+3y-\frac{3}{4}y^2)(3y-5x^2)$.

20. 除法

由第6節之除法定義，得

$$a=\frac{a^2}{a}，a^3=\frac{a^5}{a^2}，a^4=\frac{a^9}{a^5}；$$

普通，

$$a^{n-m}=\frac{a^n}{a^m}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處n,m爲正整數，且n>m.

若n＝m，此原則仍可保留，而書爲

$$a^{n-n}=a^0=\frac{a^n}{a^n}=1.$$

若n<m將於第7章詳論之.

獨項式除法，如下

法則　以除式之係數除被除式之係數作爲商之係數，其符號由除法之符號定則規定之.

用分式，將被除式文字部份書爲分子，除式文字部份書爲分母，然後應用上述方程式(1)之方法演算之．

例　題

試以$-6a^9bc^2d^8$除$12a^4b^{11}c^2d$.

解．$\dfrac{12a^4b^{11}c^2d}{-6a^9bc^2b^8}=-\dfrac{2b^{10}}{a^5d^7}$.

獨項式除多項式，如下

法則　以獨項式徧除多項式各項，而逐一寫出其各商．

例　題

試以$2a^3b$除$8a^2b^6-12a^6b^2$.

解．$\dfrac{8a^2b^6}{2a^3b^3}-\dfrac{12a^6b^2}{2a^3b^3}=\dfrac{4b^3}{a}-\dfrac{6a^3}{b}$.

多項式除多項式，如下

法則　將被除式及除式依某公有文字之降冪排列．

以除式之第一項除被除式之第一項作爲商之第一項．

次將商之第一項徧乘除式，其積由被除式減去，仍依某公有文字之降冪排列，作爲新被除式．

再以除式之第一項除此新被除式之第一項，作爲商之第二項，循序如斯作之，直至餘式不見或其中某公有文字之次數，低於除式中該文字之次數而止．

若餘式不爲零，此結果可表之如

$$\frac{\text{被除式}}{\text{除式}}=\text{商}+\frac{\text{餘式}}{\text{除式}}.$$

若餘式爲零，則被除式可爲除式除盡，此結果可表之如

$$\frac{\text{被除式}}{\text{除　式}}=\text{商}.$$

若除式及被除式之係數爲有理數，則商之係數亦必爲有理數。

習　題

下列習題，以第二式除第一式並核算其結果：

1. $6x^4+19x^3y+11x^2y^2-12xy^3+6y^4;\ 2x+3y.$

解。

$$
\begin{array}{r|l}
2x+3y & 6x^4+19x^3y+11x^2y^2-12xy^3+6y^4 \quad \underline{3x^3+5x^2y-3xy^2-3y^3} \\
& \underline{6x^4+9x^3y} \\
& 10x^3y+11x^2y^2 \\
& \underline{10x^3y+15x^2y^2} \\
& -4x^2y^2-12xy^3 \\
& \underline{-4x^2y^2-6xy^3} \\
& -6xy^3+6y^4 \\
& \underline{-6xy^3-9y^4} \\
& +15y^4
\end{array}
$$

結果： $3x^3+5x^2y-2xy^2-3y^3+\dfrac{15y^4}{2x+3y}.$

核算：若$x=y=1$,被除式$=30$,除式$=5$,商$=6$;$30\div5=6$.

2. $6a^2-5ab+3ab^2;\ 3a.$

3. $12x^2-5xy+2y^2;\ -2y.$

4. $-125a^2b^6c^5;\ 13ab^2c^4.$

5. $13x^2y^{10}z^{15};\ -6xy^9z^{10}.$

6. $m^2-2mn+2;\ m-n,$

7. $3a^2b+2b-5b^2;\ -b+2.$

8. $x^5-y^5;\ x^3-y^3.$

9. $x^{10}-y^{10};\ x^4-y^4$

10. $a^4-b^4;\ a^2-2ab+b^2.$

11. $m^2n-3(m^2-2)n^2+3m-2;\ 2m^2.$

12. $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{2}xy^2+2y^3;\ \frac{9}{10}x-\frac{5}{4}y.$

13. $2x^n y - 5x^{n-3}y^m + 3y^n$; x^2.

14. $3m^x - 15mn^{x-1} + 3n^{2x+3}$; $m^{x-2} + 1$.

15. $a^2 + 5bc + 2b^2 - 3ac + 2ab - c^2$; $3a - b + 2c$.

16. $21x^a y^b + 12x^{a+2}y^{5b-1} + 3x^b - y^{a+2b}$; $4x^a y^b$.

17. $x^3 + (a + b + 2c)x^2 + (ab + 2bc + 2ac)x + 2abc$; $x + a$.

18. $a^5 - a^4b + 3a^3b^2 - 4a^2b^3 - 13ab^4 + 2b^5$; $a - 2b$.

19. $x^3 + 2x^2y - x^2 + xy^2 - 2xy - y + y^2 - 2$; $x + y - 1$.

20. $4x^5 - 9x^4y + 2x^3y^2 - 18y^5 + 2xy^4 - 5x^2y^3$; $x + 10y$.

第　二　章

因　式　分　解

21.問題之說明　除法演算，由除式除被除式以求商式也．商式與除式之積，即爲被除式．且除式與商式均爲被除式之因式．由是除法演算，實由一已知式中，知一因式以求他一因式者也．

因式分解者，在已知式中，任一因式均爲不知，而求所有因式，實際乃乘法之逆算法．通常所求因式，只限於含有理係數．

22.素因式　一整式中，除共自身及1外，絕不含任何整因式．則稱此整式爲素因式（Prime Factors）．

故凡分解因式，即解之爲素因式．

本章方法，足以分解含一文字非質因式之代數式．以及進而分解含兩文字之簡單式者．

分解爲質因式之式，自不待試而弗爲無理式或非整式．

求一已知式之質因式，因無定法，可使得以演算．不過在相當事實之下，就吾人之觀察及經驗以運用之．

核算法常應用於分解因式，卽取所得之因式，實行乘之，若其結果與原式相同，則因式得矣．但所得之因式，爲質因式否，則非此法所能論及也．

23.獨項因式 由第10節分配律，則

$$ab+ac=a(b+c).$$

同理， $ab+ac-ad=a(b+c-d).$

申述之如下

法則 寫出各項公有之獨項式於括號外，其餘各項以代數和留存於括號中．

口 述 題

分解以下之因式：

1. $ab-ac.$
2. $3xy+2yz.$
3. $2ab^2+b^2.$
4. $5mn+2n^2.$
5. $8p^2r-3pr^2.$
6. $2ab^2+12a^2b.$
7. $3m-5m^2+2mn.$
8. $2x^2-3xy+4xy^2.$
9. $4gh+2h-3h^2.$
10. $2ab-4a^2b.$
11. $15m+5m^2.$
12. $2xy+5y^2-10y^3.$
13. $8x^2z^4+4xz.$
14. $5y^2-25xy^3.$
15. $21x^2yz^3-15x^3y^2z.$
16. $a^3b+ab^2+b^3,$

習 題

分解因式：

1. $12x^2y-15xy+21xy^2.$

解． $12x^2y-15xy+21xy^2=3xy(4x-5+7y).$

2. $3x^2yz^5+21xy^4z^8-13x^2yz^2.$
3. $3a^5b^7c^{13}d^4-12a^4b^5c^2d^8.$
4. $36a^3+24a^2b-12a^4b^2.$
5. $2m^2np^3-12mn^2p^5+21m^4n^2p-25m^2n.$
6. $25a^2x^5y^9z^3-5a^4x^2y^{10}z^2+10a^2x^9y^8z^4.$

7. $18a^2b^5-21a^5b^2+15a^{10}b^4-3a^9b^6$.

8. $21m^2n^3q^5+63m^5n^4q^2+7m^2n^2q^2+14m^4n^5q^6$.

9. $2a^2bc-5ab^2c^3-23a^2b^4c^5+9a^5b^2c$.

10. $18x^2y^5z^{10}+36x^4y^8z^6-72x^2y^5z^8+9x^2y^2z^4$.

24.集項以分解因式 在分配律,$ac+bc=(a+b)c$.

若以$x+y$代c,則

$$a(x+y)+b(x+y)=ax+ay+bx+by.$$

而右邊之式可分解如下：

$$ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y).$$

因得下

法則 將多項式各項之公有獨項因式分出.

次將多項式之各項集爲兩組或三組，令含一獨項因式可使之分解於括號外，而每組遺留於括號內之式，恰又相同.

末將各括號外之獨項式用代數和書爲一因式，括號內之式書爲另一因式.

習題

分解以下之因式：

1. $3xy-3x^2+6ay-6ax$.

解.
$$\begin{aligned}3xy-3x^2+6ay-6ax&=3(xy-x^2+2ay-2ax)\\&=3[x(y-x)+2a(y-x)]\\&=3(x+2a)(y-x).\end{aligned}$$

2. $24a^2x-ay(32a-18x+24y)$.

解.
$$\begin{aligned}&24a^2x-ay(32a-18x+24y)\\&=24a^2x-32a^2y+18axy-24ay^2\\&=2a(12ax-16ay+9xy-12y^2)\\&=2a[4a(3x-4y)+3y(3x-4y)]\\&=2a(4a+3y)(3x-4y).\end{aligned}$$

3. $xy+3y+x+3.$

4. $3am+3bm-3an-3bn.$

5. $2p^2+3pr+4p+6r.$

6. $8x^2+12xy-4x-6y.$

7. $4a^2+2ac+4ab+2bc.$

8. $ax+bx+cx-ay-by-cy.$

9. $a^nx^2-b^qy^3-b^qx^2+a^ny^3.$

10. $2x(x-b)-6ax+6ab.$

11. $x^2+5x-3ax-15a.$

12. $5m^2x+10abnx+3m^2a+6a^2bn.$

13. $5x^3+2x^2+5x+2.$

14. $m^3a+2m+6a+3m^2a^2.$

15. $24x^7+12x^5y^3-30y^5-60x^2y^2.$

16. $-2m+10n-35nx+7mx.$

17. $45a^3b^2+50b^3c^2+75a^2bc+30ab^4c.$

18. $4x^2y^3z^2-10x^3y^4z-5x^4y^8z^2+2x^3y^7z^3.$

19. $8m^2n^5p^4+12mn^{10}p^4+6m^2p^5+9mn^5p^5.$

20. $4a^3b+6ab^2-8a^4-15b^3-3b^3+20a^3b.$

21. $15x^3y+21x^3-6x^2y-10xy^3-14xy^2+4y^3.$

22. $6ax^2y+9bxy^2+9cxy-10a^2bx-15ab^2y-15abc.$

23. $2ax^3y+6ax^2+4ax^2y+3x^2y^3+9xy^2+6xy^3.$

24. $4x^3y^2z^2+6x^4y^2z+10x^4y^2z^6-2x^2y^3z^4-3x^3y^3z^3-5x^3y^3z^8.$

25. $9a^2b^2cxy^2+6a^3bc^7xy^2+15a^2bcxy^2+6ab^3cy+4a^2b^2c^5y+10ab^2cy.$

25. 分解兩平方差之因式 由第18節，知$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，由是二項和・差之積為

$$a^2-b^2$$

故分解兩平方差之因式，有下列

法則 求出各項之平方根・

兩根之和為一因式，及兩根之差為一因式・

例 題

分解 $9a^2x^6y^4-16b^8c^2$為因式：

解・ $9a^2x^6y^4-16b^8c^2=(3ax^3y^2+4b^4c)(3ax^3y^2-4b^4c).$

口　述　題

分解因式：

1. a^2b^2.
2. x^2-9b^2.
3. $25x^4-16y^2$.
4. $36n^6-81n^4$.
5. p^2-64r^2.
6. x^2-z^6.
7. $25-16$.
8. $4x^2y^4-9z^2$,
9. x^4-16.

題式：分爲三個因式．

10. a^8-b^4.
11. $x^{2a}-y^{6a}$.
12. $4a^{2n}-b^{2m}$.
13. $m^{2n}-1$.
14. $4x^6-y^2$

26. 三項之完全平方式

其普通式爲

$$a^2\pm 2ab+b^2.$$

分解因式，　$a^2\pm 2ab+b2=(a\pm b)^2$

口　述　題

分解爲二項式之因式：

1. $a^2+2ax+x^2$.
2. $x^2-2xy+y^2$.
3. m^2+2m+1.
4. $4r^2-4r+1$.
5. $x^2+4xy+4y^2$.
6. a^2-4a+4.
7. $9x^2+6x+1$.
8. $a^{2n}+2a^n+1$.
9. $100a^2-20ab+b^2$.
10. $25x^2-10x+1$.
11. $4+4ab+a^2b^2$.
12. $1-2xy^2+x^2y^4$.
13. $x^{2a}+2x^ay^b+y^{2b}$
14. $25a^{2x}+10a^xb^y+b^{2y}$.
15. $(a+b)^2+2(a+b)+1$.
16. $(x+y)^2-2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$.

27. 可化爲兩平方差之式

上節方法，有時先加某式之平方，而使原式化爲完全平方，而後用之．

習　題

化爲兩平方差，以分解下列因式：

1. $4x^4+y^4$.

解．
$$\begin{aligned}4x^4+y^4&=4x^4+4x^2y^2+y^4-4x^2y^2\\&=(2x^2+y^2)^2-(2xy)^2\\&=[(2x^2+y^2)-2xy][(2x^2+y^2)+2xy].\end{aligned}$$

2. $a^4+a^2b^2+y^4$.

3. $x^2+4xy+3y^2$.

4. $4x^8+y^4$.

5. x^4-13x^2+36.

6. a^4+4.

7. $m^4+81+9m^2$

8. $4x^{4a}+y^{4b}$.

9. $4m^4+1$.

10. x^4+5x^2+9.

11. $25a^4+9-19a^2$.

12. $4m^8+34m^4n^4+9n^8$.

13. x^4+4x^4+16.

14. $64x^4y^2+y^2$.

28. 二次三項式 三項式爲

$$x^2+bx+c.$$

因 $(x+h)(x+k)=x^2+(h+k)x+hk$,

若x^2+bx+c可分解爲二項因式如$(x+h)(x+k)$, 則h,k二數可以其和爲b,其積爲c作條件求得・

口 述 題

分解以下之因式：

1. x^2+3x+2.

解・因1與2之積爲2,其和爲3,故此式之因式爲$x+1,x+2$.

2. x^2+2x+1.

3. x^2-5x-6.

4. a^2-a-6.

5. m^2+2m-8.

6. x^2+2x-3.

7. r^2-5r+6.

8. x^2+x-2.

9. $x^2-8x+12$.

10. $m^2-3m-10$.

11. x^2+6x+8.

12. x^2-x-30.

13. $a^2+2a-24$.

29 二次三項式之分解 多項式之項數在四以下，用集項分解因式法不甚適宜，考究兩二項式之乘積

$$(mx+n)(px+q)=mpx^2+(mq+np)x+nq,$$

含x項之係數爲mq與np之和，其乘積適等於含 x^2 項之係數與常數項之乘積；換言之

$$mq \cdot np = mp \cdot nq.$$

是故欲分解此等二次三項式，可將含x項之括號解去，然後用集項法分解之．例如

$$\begin{aligned} mpx^2+(mq+np)x+nq &= mpx^2+mqx+npx+nq \\ &= mx(px+q)+n(px+q) \\ &= (mx+n)(px+q). \end{aligned}$$

由是得下列

法則 將三項式書爲x之降冪（或依某文字之二次三項式）．以不含x之常數項乘 x^2 之係數，由其積內求出兩因數使其代數和適等x之係數．

用其和（勿實行相加）代換x之係數，然後用集項法分解之．

完全平方式之因式分解，實爲此法之特例．例如

分解 x^2+6x+9.

解． $1\cdot 9=9$. $3+3=6$.

$$\begin{aligned} x^2+(3+3)x+9 &= x^2+3x+3x+9 \\ &= x(x+3)+3(x+3) \\ &= (x+3)(x+3) \\ &= (x+3)^2. \end{aligned}$$

三項式之爲完全平方者，其因式可由觀察得之．

習題

分解因式：

1. $2x^2+7x+3$.

解． $2\cdot 3=6$, $6+1=7$.

$$\begin{aligned} 2x^2+7x+3 &= 2x^2+(6+1)x+3 \\ &= 2x^2+6x+x+3 \\ &= 2x(x+3)+(x+3) \\ &= (2x+1)(x+3). \end{aligned}$$

2. $10x^2+14ax-12a^2$.

解． $10(-12a^2)=-120a^2$. $20a-6a=14a$.

$$\begin{aligned}10x^2+14ax-12a^2&=10x^2+(20a-6a)x-12a^2\\&=10x^2+20ax-6ax-12a^2\\&=10x(x+2a)-6a(x+2a)\\&=2(5x-3a)(x+2a).\end{aligned}$$

3. $8r^4x^2-2abr^2x-21a^2b^2$.

解． $8r^4(-21a^2b^2)=-168a^2b^2r^4$.

$$-14abr^2+12abr^2=-2abr^2$$

$$\begin{aligned}8r^4x^2-2abr^2x-21a^2b^2&=8r^4x^2-(14abr^2-12abr^2)x-21a^2b^2\\&=8r^4x^2-14abr^2x+12abr^2x-21a^2b^3\\&=2r^2x(4r^2x-7ab)+3ab(4r^2x-7ab)\\&=(2r^2x+3ab)(4r^2x-7ab).\end{aligned}$$

4. x^2+x-6.
5. $x^2+3ax-10a^2$.
6. $6a^2-17ab+5b^2$.
7. $6x^2+19xy+15y^2$.
8. $15a^2+19abx-56b^2x^2$.
9. $195m^2+17mp-154p^2$
10. $36x^2-5xy-50y^2$.
11. $3x^2-12xy-15y^2$.
12. $42x^2+25xy-23y^2$.
13. $84a^2-271ab+195b^2$.
14. $x^2+xy-12y^2$.
15. $10m^2-7mn-12n^2$.
16. $3x^2+2xy-y^2$.
17. $18x^2-3xy-10y^2$.
18. $14a^2-18ab+4b^2$.
19. $50x^2+25xy+6y^2$.
20. $24m^2-34mn-65n^2$.
21. $14x^4+33x^2y+18y^2$.
22. $10x^4+bx^2y-21b^2y^2$.
23. $24a^4-26a^2b-15b^2$.
24. $8x^{2a}+22x^{a}y+15y^2$.
25. $15x^{2a}+44x^{a}y^{b}-3y^{2b}$.
26. $12a^2+25ab+12b^2$.
27. $6a^2x^4-5abx^2y-50b^2y^2$.
28. $50x^{2m}+13x^{m}y^{n}-6y^{2n}$.
29. $30a^2+259ab+75b^2$.
30. $15a^4b^2c^2+23a^2bcde^2-90d^2e^4$

30. 二項式 a^n+b^n 之因式分解 由第 20 節，可證

$$a^n-b^n=(a-b)\ (a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})\cdots\cdots(1)$$

$$a^n+b^n=(a+b)\ (a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+b^{n-1})\cdots\cdots(2)$$

方程式(1) n 之值無論爲偶整數奇整數均合，而方程式(2)使可合於任何奇整數，又若n爲偶整數時，則a^n+b^n爲素式．

按照上列二式，可由視察法分解此種二項因式．

習　題

分解下列因式：

1. $x^{10}-y^{10}$.

解：　$x^{10}-y^{10}=(x^5-y^5)(x^5+y^5)$

$=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$

2. x^4-16.
3. x^5-1.
4. x^5+1.
5. x^9+y^9.
6. $a^{13}-b^{13}$.
7. $a^{15}+b^{15}$.
8. $a^2b^3+a^5$.
9. $-x^2+a^4b^6$.
10. $25m^{12}-9m^6$.
11. ay^6-125a.
12. $4x^5-500x^2y^3$.
13. $27x^6y^9+64y^3$.
14. $8a^3b^5-b^2$.
15. $64x^8y^2-a^6b^4$.
16. $1600x^2y^4-25x^4y^6$.

31. 最高公因式　若一代數式，同時爲兩多項式之因式者，則此代數式稱爲公因式

兩多項式所有公共質因式之連乘積，謂之最高公因式．

在兩多項式中，同一公共質因式，可發見多次．例如$(x-1)^2(x+1)$與$(x-1)^2(x-2)^2$中，$(x-1)^2$爲共最高公因式．

32. 兩多項式之最高公因式　兩多項式最高公因式之求法如下

法則　分解多項式之因式，共公有質因式之乘積爲最高公因式．

習　題

求下列最高公因式：

1. $4a^3x-2a^2bx-2ab^2x$及$2a^3+a^2b-2ab^2-b^3$.

解．$$4a^3x-2a^2bx-2ab^2x=2ax(2a^2-ab-b^2).$$
$$=2ax(a-b)(2a+b).$$
$$2a^3+a^2b-2ab^2-b^3=a^2(2a+b)-b^2(2a+b).$$
$$=(a+b)(a-b)(2a+b).$$

故最高公因式為　$(a-b)(2a+b)$.

2. $2a^3-2ax^2$及$2a^3+4a^2x+2ax^2$.
3. $3x^2+2xy-y^2$及$4x^2+7xy+3y^2$.
4. $2a^2x^2+2a^2xy-xy-y^2$及$x^3-xy^2+x^2y-y^3$.
5. $8x^2+2xy-3y^2$及$20x^2+23xy+6y^2$.
6. $8a^3-4a^2b-4ab^2$及$6a^2+11ab+4b^2$.
7. $2m^3n+6mn+2m^2n^2+6n^2$及$6m^3+18m-3n-m^2n$.
8. $6ab+3ay+xy+2bx$及$6a^2+11ax+3x^2$.
9. $a^2x^3+abx^2+acx+ax^2+bx+c$及$a^2x^4+2acx^2-b^2x^2+c^2$.
10. $16ax^2+8bx^2-12axy-6bxy-10ay^2-5by^2$及$12x^2+8x-15xy-10y$.

習　題

分解因式：

1. $2y^2+xy-x^2$.
2. $6a^2b^2c+15ab^3c-30ab^2c^2+9ab^2c$.
3. $156x^2+113xy-119y^2$.
4. $15m^2-14mn-16n^2$.
5. $10x^2+13x-3$.
6. $8x^2+10x+3$.
7. x^7+y^7
8. $2ax-bx+cx+4ay-2by+2cy-2az+bz-cz$.
9. $12a^4b^2-37a^2bmn-30m^2n^2$.
10. $3a^2+7ab-6b^2$.
11. $6x^3-10xy^3-15y^4+9x^2y$.
12. $9a^4+8a^2b^2+4b^4$.
13. $30a^2b+14a^2b^2+45ab^2+21ab^3$.

14. $x^3+3x^2+3x+1-8y^3$.

15. $m^3+6m^2n+5mn^2$.

16. $6mx+10my+14mc-3ax-5ay-7ac-24xz-40yz-56cz$.

17. $150x^4y^8z^5+26x^3y^4z^5-750x^4y^6z^5-130x^3y^2z^5$

18. $8x^3yz^3-10x^2y^2z^5+6x^4yz^4+10x^2yz^3$.

19. $10x^4-5x^3-5x^2$.

20. $50x^2-27xy-153y^2$.

21. $26x^2-129xy-77y^2$.

22. $2x^2+5xy+10xz-6x-15y-30z$.

23. $30x^3y^4z^6-225x^4yz^5+75x^2y^3z^6-45x^2yz^5$.

24. x^3+y^3.

25. $26a^3b+65a^2b-130a^2b^2+65a^4b$.

26. $x^2-y^2+xz+yz$.

27. $20a^2x^2-44abx-15b^2$

28. $15a^2+13a+2$.

29. $15x^2-91xy+132y^2$.

30. $63x^2+222xy+40y^2$.

31. $216m^3-n^6$.

32. $a^{12}-b^{12}$.

33. $6a^3b^3c+10a^2b^4c^2-6a^2b^3c^2+2a^2b^3c$.

34. $2a^2+5ab+2b^2$:

35. $a^{10}-b^{10}$

36. $8a^3+27b^6$.

37. $156x^2+125xy+25y^2$.

38. $25x^4+x^2+1$.

39. $2a^2-ab^2-3b^4$:

40. $x^{15}+y^{15}$.

41. $x^{25}+y^{25}$.

42. $75a^2+50a+4b+2c+3ac+6ab$.

43. $6a^3b-27a^2b^2-15ab^3$.

44. $25a^4-60a^2b+36b^2$.

45. $24a^3+66a^2b+45ab^2-75b^2-40a^2-110ab$.

46. $18x^2+450xy-5000y^2$.

47. $4x^4+16x^2+15$.

48. $10ab^2xy^3-4a^3x^3y+3a^2bx^2y^2$.

49. $8a^2+22a+15$.

50. $15a^2+35ab+10b^2+2a+4b$.

51. $2a^2-3ab-5b^2$.

52. x^4+4x^2+16.

53. $3a^2-11ab-20b^2$.

54. $3x^2-xy-10y^2$.

55. x^5-y^5.

56. $x^2+2ax+a^2-4x^2-4ax-a^2$.

57. $25x^2y^6-36x^4y^8$.

58. $x^2+5x-14$.

59. a^4-b^4.

60. $x^2+6xy+8y^2$.

61. $4x^2y+10xy^2+8x^5y^3+6xy$.

62. $2x^2-3xy-5y^2$.

63. $6x^2+15x+20y+8xy$.

64. $6x^3+17x^2+12x-6x^2y-17xy-12y$.

65. $x^{14}-y^{14}$

66. $3m^2-mn-2n^2$.

67. $315x^4-171x^2y-44y^2$.

68. $6ax^4+14ax^3y-12ax^2y^2$.

69. x^5+y^5.

70. $6x^2+3xy-30y^2$.

71. $6ax^2+10bx-3abxy-5b^2y$.

72. $24ax^2+234axy-100ay^2$

73. $45x^3+75x^2y+6xy+10y^2$.

74. $6m^3n^3q+9mn^3q^2-15mn^6q-3mn^3q$.

75. $50x^3+35ax^2+100x^2+6a^2x+70ax+12a^2$.

76. $16abx^2+8abx-24ab$.

完成下列演算：

77. $95\cdot105$.

解． $95=100-5$.

$105=100+5$.

$$95\times105=10{,}000-25$$
$$=9975.$$

78. $32\cdot28$.

79. $121\cdot119$.

80. $37\cdot39+52\cdot74$.

提示：先除以獨項式．

81. $12\cdot3+72\cdot4-21\cdot6$.

82. $25\cdot25+25\cdot7-25\cdot4$.

33.最低公倍 二或二以上多項式之最低公倍即能完全含各式為因式之最低次之多項式也．諸多項式之最低公倍之求法，如

下列

法則　分解各多項式爲質因式，然後求出諸相異質因式之連乘積，但所取各質因式之指數，須取其存於多項式中之次數之最高者．

習　題

分解下列各項式爲因式後，而求其最低公倍：

1.　$(x^2-ax-2a^2)$，(x^2-a^2)，及$(x^2+2ax+a^2)$.

解．
$$x^2-ax-2a^2=(x-2a)(x+a).$$
$$x^2-a^2=(x-a)(x+a).$$
$$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2.$$

∴最低公倍爲$(x+a)^2(x-2a)(x-a)$

2.　$12a^2$，$9xy^2$及$4y^3$.

3.　$5ab$，$15b^2$，及$3ax$.

4.　$(x-a)$，$(x^2-2ax+a^2)$ 及(x^2-a^2).

5.　(x^3-y^3)，及(x^2-y^2).

6.　$(2x^2-2y^2+3xy)$及(x^2+2xy).

7.　$(9x^2+30xy+25y^2)$及$(9x^2-25y^2)$.

8.　$(x^2+3xy+2y^2)$，$(x^2+xy-2y^2)$，及$(x^2+xz-xy-yz)$.

9.　(x^2+2x-8)，(x^2-5x+6)，及(x^2+x-12).

10.　$(x^3-2ax^2-a^2x+2a^3)$，及$(x^3+ax^2-4a^2x-4a^3)$.

11.　$(2x^2-x-10)$，$(2x^3+3x^2-12x-18)$，及$(6x^2-15x-5y+2xy)$.

第　三　章

分　式

34. 普通原理　爲文字所表分式之四基法，正與第 6 節(2),(3),(4)數字分式相同．質言之，代數式乃數字之代替符號，若將文字換以數字，則代數分式卽化爲數字分式矣．

35. 原則 I　一分式之子母，可以同式乘之(或除之)，其值不變．

此乃根據第6節(5)式．

36. 原則 II　一分式之子母同變號，分式之號不因之而變蓋由原則I若分式之子母同以-1乘之卽得此原則II．

37. 原則 III　一分式之子母，若分子變號或分母變號(但不同時變者)，則分式之號因之而變．

此乃根據第6節(6)式．

38. 約分　分式之子母無公共因式時，則此分式謂之已約爲最低項，約分方法如下列

法則　以分式子母之最高公因式除其子母卽得．

習　　題

化下分式爲最低項：

1. $\frac{48ax^2+152axy+120ay^2}{8ax^2-12axy-36ay^2}$.

解：

$$\frac{48ax^2+152axy+120ay^2}{8ax^2-12axy-36ay^2}=\frac{8a(3x+5y)(2x+3y)}{4a(x-3y)(2x+3y)}=\frac{2(3x+5y)}{(x-3y)}.$$

2. $\frac{a^2-b^2}{2a+2b}$.

3. $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$.

4. $\frac{x^2-5x-24}{x^2-16x+64}$.

5. $\frac{2a^2+5ay+6ax}{2a^2+3ay+6ax-5y^2-6xy}$.

6. $\frac{6x^2-7xy-20y^2}{4x^2-25y^2}$.

7. $\frac{x^3-2x^2+5x-10}{2x^4+7x^2-15}$.

8. $\frac{6a^3-4ab^2-2a^2b}{20a^3-8a^2b-14a^2b+4a^2b^2-6ab^2+4ab^3}$.

9. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$.

10. $\frac{ax+a+2x+2}{x^2-1}$.

11. $\frac{2a^2b+2ab^2-2abc}{3bc^2-3b^2c-3abc}$.

12. $\frac{10x^2-23xy+9y^2}{15x^2-17xy-18y^2}$.

13. $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}$

14. $\frac{14a^2b+10ab^2+4a^3}{2a^3-2ab^2}$

15. $\frac{26x^2-3xy-5y^2}{16x^2-26xy-9y^3}$.

39. 同値分式　二分式稱爲同値分式若一分式之子母以同一式乘之或除之，即可得他一分式。

二異分母分式行加減時，可先使變爲同値分式，而能有同分母然後加減。

諸分式（最爲低項）能便於加減，可按下法則，變爲同値分式。

法則　求出諸分母之最低公倍。

各分式之子母，同以適宜式乘之，使所求諸分母之最低公倍爲新公分母．

若諸分母之最低公倍不易求得，可用其連乘積．惟所用若不爲最低公倍，其結果亦不爲最低項分式．

習 題

下列分式化爲同分母：

1. $\frac{3}{x-1}$, $\frac{4}{x^2-1}$, 及 $\frac{3x+2}{2x-2}$.

解： 因諸分母最低公倍爲

$$2(x-1)(x+1).$$

故諸分式爲 $\frac{6x+3}{2x^2-2}$, $\frac{8}{2x^2-2}$, 及 $\frac{3x^2+5x+2}{2x^2-2}$

2. $\frac{x^2}{4+y}$, $\frac{2z}{16-y^2}$, 及 $\frac{3y}{4-y}$.

3. $\frac{3}{a}$, $\frac{2a}{b+3}$, 及 $\frac{5+b}{2b^2+7b+3}$

4. $\frac{2x}{5y+z}$, $\frac{3}{5y^2-4yz-z^2}$, 及 $\frac{4}{y^2-z^2}$.

5. $\frac{2x+3}{4x^2-9}$, $\frac{5}{4x^2-6x}$, 及 $\frac{3x}{2x^2-2xy}$.

6. $\frac{5b}{2ab-10b^2}$, $\frac{3ab^3}{a^2-25b^2}$, 及 $\frac{21a}{2ab+10b^2}$.

7. $\frac{3xy}{2x+1}$, $\frac{2}{4x^2+4x+1}$, 及 $\frac{5x}{4x^2-1}$.

8. $\frac{m}{bm+an}$, $\frac{n}{acm^3-am^2n}$, 及 $\frac{p}{bcm^2+acmn-bmn-an^2}$.

40.分式加法　共演算可以下法完成之

法則　化相加各分式爲最低公分母．

分子相加爲和之分子，以最低公分母爲和之分母．

41.分式減法　共演算可以如下法完成之．

法則　化各分式爲最低公分母．

以被減式之分子減去減式之分子作新分子，以最低公分母作爲新分母．

42.分式乘法　共演算可以下法完成之．

法則　分子相乘爲積之分子，分母相爲乘積之分母．

43.分式除法　共演算可以下法完成之．

法則　顛倒除式之子母，而以被除式相乘乘之．

注意．　分式卽表除法意義，故$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$與$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{a}}$兩式相同

分式經過上四種演算法則後，其結果之分式，須化爲最低項．

欲核算結果、可將諸文字用數字代入以試之．

若單位1以一數除之，則分此式爲該數之倒數

例如，　$1\div2=\frac{1}{2}$，而$\frac{1}{2}$爲2之倒數，

同理，　$1\div\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$，而$\frac{3}{2}$爲$\frac{2}{3}$之倒數．

習題

完成下列演算，並化簡．且由敎師指導核算其結果：

1. $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$.

解：$\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}}$

$$=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}$$

$$=\frac{2a^2+2b^3}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

核算：　設 $a=2$, 及 $b=3$.

則　$\dfrac{\dfrac{2+3}{2-3}+\dfrac{2-3}{2+3}}{\dfrac{2+3}{2-3}-\dfrac{2-3}{2+3}}=\dfrac{13}{12}$,

及　$\dfrac{4+9}{2\cdot2\cdot3}=\dfrac{13}{12}$.

2. $\dfrac{\dfrac{12}{5}-1}{\dfrac{4}{5}+2}$.

3. $\dfrac{x}{ab}-\dfrac{y}{ac}-\dfrac{z}{bc}$.

4. $\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{m+n}$.

5. $\dfrac{4x-3}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x-3}$.

6. $\dfrac{x+1}{1-x}+\dfrac{3}{x+2}$.

7. $\dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}-\dfrac{2x-1}{4x^2+4x+1}$.

8. $\dfrac{3}{2x+4}+\dfrac{5}{10x-2}$.

9. $\dfrac{2x}{5x+15}-\dfrac{5x}{10x+30}$.

10. $\dfrac{m-n}{m+n}\cdot\dfrac{2m+5n}{m^2-n^2}$.

11. $\dfrac{2x}{5x+1}-\dfrac{21}{13}$.

12. $\dfrac{mn-p}{4m^2-4mn}\div\dfrac{mp+n}{5mn-5n^2}$.

13. $\dfrac{2}{16x^2+8x+1}+\dfrac{13}{4x^2+13x+3}$

14. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}+\frac{2x}{x^2-y^2}$.

15. $\frac{x^2+x(a+b)+ab}{x^2-x(a+b)+ab}\cdot\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$.

16. $\frac{4}{6a^2-7a-20}+\frac{5}{6a^2+7a-20}$.

17. $\frac{5}{6}\frac{z}{a}+\frac{13z}{14a}+\frac{18z}{35a}-\frac{2}{15}\frac{z}{a}$

18. $\frac{4x}{x^2-x-6}\div\frac{2x}{x^2-5x+6}$.

19. $\frac{a(a-x)}{a^2+2ax+x^2}\cdot\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$

20. $\frac{m-2n}{m+2n}\div\frac{m^2-4mn+4n^2}{m^2+4mn+4n^2}$.

21. $\frac{4}{2x+y}\div\frac{5}{3x-y}+\frac{3}{6x^2+xy-y^2}$.

22. $\frac{xy}{x^2y+4xy}\cdot\frac{x^2-16}{2xy^2+3xy}$.

23. $\frac{2x-1}{4x^2+2x}-\frac{2x+1}{6x^2-3x}$.

24. $\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}+1}$

25. $\frac{x^3-1}{x^2-1}+\frac{4}{x+1}$

26. $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^3-1}$

27. $\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{-x+1}-\frac{1}{1+x}}$

28. $\frac{2x+5y}{10x^2-13xy-3y^2}\div\frac{2x-5y}{10x^2+37xy+30y^2}$

29. $\frac{m+2}{m^2-4m+4}\cdot\frac{m-2}{m^2+4m+4}$.

30. $\left(\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}-\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\right)\div\left(\frac{a+c}{a-c}-\frac{a-c}{a+c}\right)$

31. $\frac{2x+5y+3}{8}-\frac{4x-5y+2}{3}+\frac{x+2}{6}$

32. $\frac{4m+2n+1}{3m}+\frac{2m^2+2mn+4m}{3n}$.

33. $\dfrac{3xyz}{yz+xz+xy}-\dfrac{\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{y-1}{y}+\dfrac{z-1}{z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}$.

34. $\dfrac{1}{6a}+\dfrac{a-2b}{3ab}-\dfrac{3}{4b}-\dfrac{3a-4c^2}{8ac^2}+\dfrac{9}{8c^2}+\dfrac{5c^2-5b^2}{12bc^2}$

35. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{4}{x^2-1}-\dfrac{4}{(x^2+1)^2}$.

下列諸分式，試以他兩種方法書之.

36. $-\dfrac{x}{y}$.

37. $\dfrac{2a}{5c-1}$.

38. $-\dfrac{-z^2}{-3yx}$.

39. $\dfrac{3x+5y}{-9x^2-25y^2+30xy}$.

證明

40. $2x+5b+10a=3b-3x+3(2x+3a)$當$x=a+2b$.

41. $\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^x-e^{-x}}=5\dfrac{1}{4}$當$e^{2x}=4$.

42. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{16}{x^4+4x^2+16}$當$a=x+2$, $b=x^2+2x+4$, $c=x-2$.
及$d=x^2-2x+4$.

試化下列諸分式為最低公分母：

43. $\dfrac{2}{5}$, $-\dfrac{4}{3}$, 及$\dfrac{1}{2}$.

44. $\dfrac{11}{13}$, $\dfrac{12}{7}$, 及$\dfrac{5}{19}$.

45. $\dfrac{13}{16}$, $\dfrac{3}{10}$, 及$\dfrac{2}{3a}$.

46. $\dfrac{5}{ac}$, $\dfrac{2}{ab^2}$, 及$\dfrac{4}{a^2c}$.

47. $\dfrac{2x+y}{3x}$, $\dfrac{5x-2y}{xy}$, 及$\dfrac{x+y}{4}$.

48. $\dfrac{4}{x^2+4x}$及$\dfrac{5}{x^2-16}$.

49. $\dfrac{2x}{4x+2y}$, $\dfrac{3y}{9x^2+12xy+4y^2}$, 及$\dfrac{4}{9x^2-4y^2}$.

50. $\dfrac{x-1}{x^2-7x+6}$, $\dfrac{2x}{5x^2-30x}$, 及$\dfrac{4}{5x^2-5x}$.

第四章

比，比例，變式

44 比 第一數與第二數之比，即以第二數除第一數之商．

a與b之比，常記爲 a:b，或$\frac{a}{b}$，被除數或分子，謂之前項．除數或分母，謂之後項．

由是知此僅爲分式之異形，任何比均可直書爲分式，而適用第三章所述分式演算法．

45. 比例 比例者乃表二等比之方程式．

例如 $a:b=c:d$ 可書爲$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，其演算法可仿普通方程式 a及d常謂之外項，b與c常謂之內項．

比與比例常可書爲分式及方程式以便計算．

46. 比例定理 下例定理，爲代數上最有用之定理，常以上所述名詞表之．

定理 若諸比相等，其任何若干前項之和與任一前項之比，必等於相當若干後項之和與相當單一後項之比．

設 $a:b=c:b=e:f=g:h$,

或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$，

求證 $\frac{a+c+e}{g}=\frac{b+d+f}{h}$.

若　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=r$:

則　$a=br$,

$c=dr$,

$e=fr$,

及　$g=hr$,

以第四方程式之兩邊，各除前三方程式兩邊和，卽得

$$\frac{a+c+e}{g}=\frac{b+d+f}{h}$$

47. 比例中項　若b爲a與c之比例中項則

則　$a:b=b:c$.

卽　$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$,

或　$b^2=ac$,

及　$b=\sqrt{ac}$.

習　題

若$a:b=c:d$, 試證

1. $\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{c^2-d^2}{d^2}$.

解. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. ......(1)

(1)+1,　$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ......(2)

(1)−1　$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$,

$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ......(3)

(2)·(3),　$\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{c^2-d^2}{d^2}$.

2. $5a:b=5c:d$.

3. $a^2:b^2=c^2:d^2$.

4. $ma:mb=nc:nd$.

5. $b:a=d:c$.

6. $a:c=b:d.$　　8. $a-b:a=c-d:c.$

7. $a+b:a=c+d:c.$　　9. $a+b:a-b=c+d:c-d.$

10. $a+b:c+d=a:c.$

11. $(a^2-b^2):2ab=(c^2-d^2):2cd.$

12. $\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}=\dfrac{a}{b}$．

13. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{c^2+cd+d^2}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{c^2-cd+d^2}$．

14. $\dfrac{5a+b}{5a-b}=\dfrac{5c+d}{5c-d}$．

14. 求a^2,b^2之比例中項．

16. 求a^2-b^2,c^2-d^2之比例中項．

48. 正變式　若x及y爲變數，而x與y之比爲常數，則稱爲x因y而正變以符號表之，則

$$\frac{x}{y}=k, \text{或 } x=ky \text{．} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處k爲常數．

例如　一人以等速行走，其行程因時間而正變．即 $d=kt$，而此處k爲此人之速率．

若三角形之高度爲常數，則其面積因底而正變．即 $A=kb$，此處k等於高之半(常數)．

球之體積因球之半徑立方而正變．即$v=kr^3$，

此式 $k=\dfrac{4\pi}{3}$．

49. 反變式　若x因y之倒數而正變時，則謂x因y而反變

例如，x因y而反變，則

$$x=\frac{k}{y} \text{ 或 } xy=k\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

例如，若三角形之面積一定不變，其底b即因高度 a而變．即$ab=k$，而 k 等於二倍面積常數．換言之．若諸三角形面積相同，其底愈大者，其高愈小．

設一人之行程一定不變，其所需時間 t 則因速率而反變．即 $st=k$，k爲行程常數．換言之，若一人之行程一定，其速率愈大，其所需時間愈小．

在一定點，光度強弱因與光源距離之平方而反變．若以 L 表示光度，d表示與光源之距離，則 $L=\frac{k}{d^2}$，或 $Ld^2=k$。

50. 合變式　若x因y 與z 相乘積而正變，則稱爲x因y 與z 而合變例如，x因y與z而合變，則

$$\frac{x}{yz}=k,\text{或}\, x=kyz. \qquad\cdots\cdots(3)$$

例如，工程大小，可因工人多寡與工作日數而合變．即 $W=kMt$，此處 M表人數，t表時間，而 k 之意義，不甚顯著，可隨其景況而定之．又一人工作單位時間，k即可表示工程．因 $M=t=1$，則 $W=k$．又如工人工資，可因其工作日數及其每日所雇得工價而合變．

若x因y 而正變，又因 z而反變時，則x因$\frac{y}{z}$而正變，例如，在空間兩物體之引力，因其質量之乘積而正變，因其距離平方而反變．若以

m表示兩物體質量之乘積，d表示其距離，G 表示引力，則

$$G=\frac{km}{d^2},\text{或}\frac{Gd^2}{m}=k,\text{或}Gd^2=km.$$

習　題

試以文字說明下列諸變式之習題，並指出各屬何種變式，其中k爲常數，他文字爲變數．

1. $a=kb$.
2. $M=\frac{k}{n}$.
3. $L=kR^2$.
4. $xr=ky$.
5. $V=kl^2$
6. $S=kt^2$.
7. $C=kr$.
8. $V=kl$.
9. $W=kl^2$.
10. $V=\sqrt{kh}$,
11. $E=kMV^2$.
12. $A=P(1+r)^2$.

下列習題，以文字符號形狀表示之，

13. 角柱體體積V，因其高及底邊平方而合變．
14. a因b之平方而正變，又因與c及d之和而反變．
15. 一樹之年代A可因其直徑及高度而測知．

51. 應用題　上述習題，僅以公式述其梗概，內中均有常數k存在．如欲應用在某種事實之下，知其一組之變數値k即可定出，例如公式$A=kb$（第48節），若倘知一三角形之底爲6吋，其面積爲12平方吋，代入公式，則$12=6k$，或$k=2$，由是既知k之値則由b之値即可求得A之値．

問 題

應用第51節之方法，解下列問題：

1. 球之體積，因其半徑之立方而正變．若半徑爲 1之球，體積爲 4.19. 問半徑爲 2 之球，其體積幾何？又半徑爲4,其體積又幾何？

2. 圓之面積，因其直徑平方而正變．若直徑爲 2之圓，面積爲3.14. 問直徑爲10之圓，其面積幾何？

3. 物體重量；因其與地心距離平方而反變． 若一物體距地心爲4000 哩，其重量爲 100 磅．問距離地心更遠 200 哩時，其重量幾何？

4. 有某種建築物，其價值因其大小及其間數之多寡而合變．若一建築物，長 50呎，寬 30 呎．高 20 呎，內含8個房間，其價值爲20,000元．問一建築物長寬高分別爲 50,50,30 呎，內含12個房間，其價值應幾何？

5. 汽車價值，與年歲成反比例．若一汽車使用2年，值 1000 元，問使用6年時，價值幾何？

6. 物體自由落下，其速率因所經時間而正變．若一落下物體，其第一秒終，速率爲每秒 32 呎．問第三秒終，每秒速率若干？

7. 物體落下之距離，因其所經時間之平方而正變．若一物於二秒鐘，下墜64呎．問9 秒鐘，下墜幾呎？

8. 一物體由一懸崖落下，經十秒鐘始達於地．試求此懸崖之高度．

9. 某人以某速率於一日內可行200哩，問依此速率於 $2\frac{1}{2}$日可行若干？

10. 有一工程，八人作之，每日作8小時，可於4日成之．問5人作之，每日只作6小時，需幾日可成？

11. 電影屏幕距電影機有 100 呎，若欲其明亮程度較前大二倍，問須將電影機置於何處？

12. 某人讀書，燭光離書頁 3 呎，最爲適宜。若以三倍前燭光易之，問須置於何處，方有同樣適宜？

13. 通常人體重量，因高之立方而變。若一人身高 6 呎，重爲 170 磅，問身高 $5\frac{1}{2}$ 呎之人，重有幾何？

14. 通常人脚底之面積，約因其高之立方而變。若一人身高 6 呎，脚長爲 12 吋，問身高爲 5 呎之人，脚長幾何（脚底面積又因脚長之平方而正變）？

15. 在某種計劃中，帆船能適宜於航海，因船長之立方而正變，因船面積而反變，又船之面積因船長之平方而正變。若一船長爲 75 呎，適合於此種計劃，問長 25 呎之船，太過歟？抑不及歟？又 100 呎長之船若何？

第五章

方程式

52. 恒等式與定值方程式． 方程式者卽表二代數式相等之謂也，方程式可分兩種：

I. 完成方程式兩邊所示之演算，能化爲 $1=1$ 者，謂之恒等式

例如
$$4+2=3+3$$
及
$$a-b=(3a-2b)-(2a-b)$$
卽屬此類方程式，在恒等式中 $=$ 常以 $\equiv$ 表之． 由是知恒等式中之文字，無論用何種數値代入，均能保持其相等．

II. 方程式不能使化爲 $1=1$ 者，而其中文字僅限於某特別値代入可使之相等，此爲定値方程式又簡謂之方程式

例如 $x=2$ 不能更行化簡，且僅能以2代x然後相等．又如 $x=2a$，僅能以 $2a$ 代x 然後相等，或a 之値爲 $\frac{x}{2}$ ．若此方程式以 $2a$ 代入，卽化爲恒等式．

53. 方程式之解法 任何數或式，以之代入方程式中之某一文字，使此方程變爲恒等式，則此數或式謂之能適合於此方程式．例如5可以適合於方程式 $x^2-24=1$，3 可以適合於方程式 $(x-3)(x+4)=0$.

求出數値足以滿足一 方程式者謂之解方程式． 研究各種方程式之解法，爲代數學中最重要問題．

任何方程式中，若包有兩個或兩個以上文字，須先明瞭何文字之值爲所求實換言之，關於此文字而解方程式．此待求值之文字謂之未知數或變數．

某數値代入方程式中未知數，能適合於該方程式，則該數謂之方程式之根．

若一方程式中僅含一文字，其根必爲數値，若一方程式中，除未知數外，尙含有他等文字，其根常用此他等文字表示之．

實際解方程式時，多依據下列

公理　凡等式兩邊，若以等數加上，減去，乘之或除之；其結果仍相等．

應用此公理時，除數不得爲零．又若用含未知數式乘或除方程式，須注意結果．可以一次增加原方程式之根或減少原方程式之根．

54. 一未知數之一次方程式　含一未知數之方程式，若未知數最高之乘方爲一次者，一次方程式，解含一未知數之一次方程式，常應用下列

法則　應用第 58 節公理，將未知數化於單獨存在方程式之左邊，方程式之右邊，即爲所求之解答．

核算　將解答代入原方程式，視其能否化爲恒等式 $1=1$.

因二有限數之和仍爲有限數，即其他在求一次方程式根時，所用之演算，亦正如是，故任何含一未知數之一次方程式，可有一根且僅可有一根

若方程式兩邊全爲分式而分母相同，其分子必相等，因方程式兩邊同以公分母乘之，則與各分母對消．

習 題

解下列方程式並核算其結果：

1. $\dfrac{9-x}{3}-\dfrac{3x+2}{7}=\dfrac{5x}{2}-\dfrac{99}{14}$.

核： 方程式兩邊各乘以 42，

$$126-14x-18x=12-105x-297$$

集項，

$$-105x-14x-18x=12-126-297$$
$$-137x=-411,$$
$$x=3.$$

核算： $\dfrac{9-3}{3}-\dfrac{9+2}{7}=\dfrac{15}{2}-\dfrac{99}{14}=\dfrac{3}{7}$.

2. $\dfrac{ax-a^2+bx-ab+a-b}{a-b}=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a-b)^2+4ab}$.

解： 乘以$(a-b)$

$$ax-a^2+bx-ab+a-b=\frac{(a+b)^2(a-b)}{(a+b)}$$
$$ax-a^2+bx-ab+a-b=a-b.$$

集項，

$$(a+b)x=a^2+ab.$$
$$x=a.$$

核算： $\dfrac{a.a-a^2+b\cdot a-ab+a-b}{a-b}=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a-b)^2+4ab}=1.$

3. $3x-5+2x=8x+2-7x.$
4. $2(x+3)+5(2-x)=2+4x.$
5. $3x+2(x-1)=8+2x-5(x+2).$
6. $(x-3)(x+7)=(x+5)(x+1).$
7. $(a+b)x=a-bx.$
8. $m(x^2+x)=mx^2-5.$
9. $(x+b)(x-a)=(x+2)(x-1).$
10. $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{32}{21}=2x-\dfrac{5}{2}x.$
11. $(a+bx)(b+bx)=(bx-a)(bx+a).$
12. $ax-b+cx=2x-5+bx.$
13. $(2+ax)^2+(3+bx)^2-)b^7+a^2)(x^2+1).$

14. $10x+\frac{9}{7}(2x+3)-\frac{2}{3}(5x+2)=2(5x+1)-1.$

15. $a(x+b)(x+a)=(ax-2)(x-b).$

16. $\frac{7ax}{2}-\frac{5x}{3}+\frac{2x}{5a}=\frac{a}{2}[(3a-x)+8(a+x)].$

17. $a+2b-a(3-x)+5x=7+2ax-9(2+x).$

18. $(m+x)(m-n)=3(m+n)(m-x).$

19. $7x-3=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}x+\frac{1}{9}x.$

20. $a(3a-x)+2x(3+a)=\frac{5}{2}(2a+ax)-\frac{a}{3}(x+1).$

21. $(a+b)(a+c+x)+(a-b)(a+c-x)=2ab+2bc.$

22. $1.35x-9.3x+2.7+8.4x-.01x=1+99x-.25.$

23. $3.2\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)-8.3x=9.72+5\frac{2}{7}(.25+3x).$

24. $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}}.$

25. $a+\frac{1}{a}=\frac{1}{x+\frac{1}{a}}.$

26. $\frac{x+a}{x-c}=\frac{x-b}{x+b}.$

27. $\frac{\frac{5}{6}(x+2)}{\frac{7}{8}(2x-1}=\frac{1}{2}.$

28. $\frac{\frac{1}{2}(x+a)}{\frac{2}{3}(x-b)}=\frac{a}{b}.$

29. $\frac{7}{x}+\frac{1}{2}=\frac{15}{x}-\frac{7}{2}.$

30. $\frac{(3x+2)(2x-5)}{(6x-1)(5x+2)}=\frac{1}{5}.$

31. $\frac{x+2}{x-3}+\frac{2}{3}=\frac{x-3}{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.$

32. $\frac{mx+n}{m+n}=\frac{px-r}{p-r}.$

33. $\frac{9}{10}\cdot\frac{4x-3}{2x-1}2=\left(\frac{9x+2}{10x-3}\right).$

34. $\frac{ax}{d}+\frac{bx}{m}+\frac{cx}{n}=p.$

35. $\frac{x+a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}+\frac{b-x}{a}=0.$

36. $\frac{2x+a}{a}+m=x+a,$

37. $\frac{ax+b}{bx+a}+\frac{ax-1}{bx+2}=\frac{2a}{b}.$

38. $\frac{(2a+x)(3a-2x)}{(x+2a)(a-x}=2.$

39. $\frac{a+x}{b}+\frac{c-x}{d}-\frac{x-2}{3}=0.$

40. $\frac{2a(x+c)}{2d}-\frac{7a(bx-c)}{3d}=\frac{7}{d}.$

41. $\frac{x+p}{2x-m}+\frac{x+n}{x+r}=3-\frac{3x^2}{(x+r)(2x-m)}$

42. $\frac{ax}{c}+\frac{2bx}{a}+\frac{2ac}{a+b}=\frac{(a-b)^2x}{ab}$.

43. $7\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x-\frac{9}{10}-\frac{8}{7}x=0$.

44. $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$.

45. $3(x+1)+\frac{x+1}{x-1}=3x+\frac{5(x+3)}{2(x-1)}$.

46. $\frac{mn-x}{b}-\frac{ab+2x}{c}=\frac{3am-nx}{m}$

47. $\frac{ab^2-x}{p}+\frac{bc^2-x}{c}+\frac{a^2c-x}{a}=0$.

48. $\frac{x}{3x^2-4x}+\frac{x}{x-2}-\frac{x}{5x^2+3x}=\frac{x}{x-2}$,

49. $\frac{3x-a}{a}+\frac{2x+b}{b}-\frac{b}{a}(x+2)=\frac{7(x+a)}{a}$.

50. $\frac{2x+3}{3(x+1)}-\frac{8x+2}{5(x-1)}+\frac{14x^2+2x-5}{15x^2-15}=0$.

51. $\frac{2x+1}{x+2}+\frac{3x+1}{x-1}+\frac{2x-10}{x^2+x-2}=5$.

52. $\frac{7b(x+a)}{c}-\frac{3a(x-c)}{b}+\frac{2c(x-b)}{a}=$.

53. $\frac{2x-15}{3}+\frac{7x+2}{6}-\frac{3x-1}{2}=15$.

54. $\frac{x+a}{bx}-\frac{2x-3b}{ax}=\frac{2a}{x}+\frac{2}{a}-\frac{5}{b}$.

55. $\frac{2x-3a}{5}+\frac{3x-4a}{7}7x=2a$.

56. $\frac{4-2x}{3}-\frac{2}{3x-1.5}=\frac{3x}{2x-1}-\frac{2x^2}{3(x-.5)}$.

57. $a-\frac{3}{2(x+a)}=\frac{2}{3(x+a)}-\frac{5}{6(x+a)}$.

58. $\frac{abx-cd}{a}+\frac{bcx-df}{b}-\frac{dx-ax}{c}=0$.

59. $\frac{ax-bc}{ab}-\frac{bx-ac}{c^2}=\frac{cx-b^2}{bc}+\frac{a-x}{c}+\frac{a-x}{a}$.

60. $\frac{x+a}{a}+\frac{x-b}{-b}-\frac{x-a}{-a}=2x$.

61. $\dfrac{b^2-9a^2}{9a^2-x^2}+\dfrac{b+x}{x+3a}=\dfrac{b-x}{3a-x}.$

62. $\dfrac{b}{x-b}-\dfrac{a}{x-a}=\dfrac{b^2-a^2}{a(x-a)}.$

63. $\dfrac{7x-1}{3}-\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{x+2}{3}\right)+\dfrac{2x-9}{8}=\dfrac{17x}{24}.$

64. $\dfrac{a(x+1)}{b}+\dfrac{c(2x-3)}{d}=\dfrac{b(2x-1)}{c}.$

65. $\dfrac{b(x+2)}{a}+\dfrac{b^2(x-1)}{a^2}-\dfrac{a(x-1)}{b}=\dfrac{a^2(x+2)}{b^2}.$

66. $\dfrac{ac}{b(am-bm)}-\dfrac{x(m+n)^2}{mb}-\dfrac{n^2x}{bn}=\dfrac{c}{m(a-b)}-\dfrac{3nx+b}{b}-1.$

67. $\left(\dfrac{a^2}{b}+b\right)(x-a)+\dfrac{(a+b)(x-b)}{a}(a-b)=4a^2+\dfrac{2ab^2}{b}+2ax.$

68. $\dfrac{ax-b}{mx-p}-\dfrac{an-cm}{mn}-\dfrac{x(bn+dm)+(bp+dq)}{(mx-p)(nx-q)}=\dfrac{d+cx}{nx-q}.$

69. $\dfrac{2a+bx}{3c}+(2ax-1)\left(\dfrac{a^2-2a}{ab}+1\right)=\dfrac{x+1}{2a}-3.$

70. $\dfrac{2x-5}{3x}+\dfrac{2ax-6b}{ax}-\dfrac{3x+7b}{bx}=\dfrac{7a+b}{3ab}-\dfrac{2b-3a}{ab}.$

55. **問題之解法**　代數上解一問題，其最要者，即用代數記號以表出問題中之條件．質言之，即將文字之語言譯為代數中之語言是也．其譯法，須盡量近似，且常能使之句句對照．

例　　題

何數由其$3\frac{1}{2}$倍減之，其餘為20？

解："何數"譯為x."由其$3\frac{1}{2}$倍中減之"譯為$3\frac{1}{2}x-x$."餘為 0"譯為$=20$.是故全問題，以代數語言表之為

$$3\tfrac{1}{2}x-x=20.$$

此方程式之解法及核算．可仿前法作之．

問　題

1. 某數之半及其五分之一之和爲35,試求某數.

2. 何數以 7 倍之再加其半而等於15?

6. 某數之五分之一，四分一，與其三分之一之和比其半多51；試求某數.

4. 何數較其三分之一多12?

5. 某童15年後，爲其兄年$\frac{2}{3}$.今其兄年爲30問此兒童現年幾何?

6. 某人之年歲，較其子年之四倍少5.若此人現年35歲問其子現年若干?

7. 某人有汽油一瓶，以其汽油$\frac{1}{7}$及4咖啽注入汽車油箱，其瓶中尚餘一半.問原瓶有汽油若干?

8. 設某童比其現在之年歲之$\frac{3}{5}$多3月，則則爲$6\frac{1}{2}$歲.問現在幾歲

9. 某兒由家步行往一市,行其距離$\frac{2}{3}$後改騎車行其餘距離$\frac{3}{4}$.如尚餘$\frac{1}{10}$哩的路程.問其家距市之路程

10. 某人之高過其子50%少1吋.若此人高爲6呎2吋，問其子高若干?

11. 某人將其銀$\frac{1}{6}$作爲儲畜，$\frac{1}{2}$作爲與產，$\frac{1}{5}$存入銀行，如是尚有10,000元可以營商.問此人共有洋若干

12 某人作一徒步旅行，其連日所行路程爲全路之$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{7}$與$\frac{1}{8}$.若最後一日行10哩，問全路程若干?

13. 分190爲兩部份，令其一部份爲他部份之$\frac{8}{11}$.

14. 兩數之和爲56，其差爲18.求此兩數.

15. 某童比其弟年之2倍多1歲，與弟年齡之和比其妹年多10.歲.又妹年比其長兄少3歲，試求出各童之年歲.

16. 兩數之和為555.其一數之$\frac{1}{5}$與他一數之$\frac{5}{36}$之和為 100. 試求此兩數.

17. 兩數之和為S.差為d.試求此兩數.

18. 若A城中居民多加12,500,則為B城中居民之三倍.又有300,000居民之C城較A,B兩城中居民之和少37,500.試求A,B兩城之居民人數.

19. 兩汽車相距100哩,若相向而行其速率為每小時20哩與25哩,問經若干時後相遇?

20. 一貨車以平均每小時行25哩速率離開某站,開行3小時後,快車以每小時行45哩之速率追之,問再經幾小時,方可追及?

21. A,B兩人每日各以小機車運沙礫50噸與45噸.今有200噸沙礫,設A先運2日,問二人再共運,幾日始可運完

22. 一汽車65分鐘行32哩,又一汽車45分鐘行27哩.若兩汽車同時自同地同向而行,問經過若干時第二汽車方較第一汽車多行 15哩?

23. 兩數之和為25.其平方差為115.試求此兩數.

24. 若某校學生人數之3倍,較現有學生人數多 1000 人正如此校學生人數比此數所少,試求此校學生人數.

25. 某人年42歲,子年15歲,問幾年前子年為父年$\frac{1}{3}$?

26. 若12雞卵之價比洋81分之所少,正如15 雞卵價銀比洋81 分之所多,求每個雞卵之價.

27. 一分數之分母較其分子大2.若於分子母同減以6則等於$\frac{4}{5}$,試求此分數.

28. 四數之和為48,第二數較第一數大4,第三數較第二數大4 為較第四數少4.求此四數.

29. 某社有社員34人，其中男子人數當女子人數之$\frac{4}{5}$，而女子人數又較童子人數之二倍多1，問男女童子各幾人？

30. 一男童，其姐妹人數當其弟兄人數之$\frac{3}{5}$ 其姐妹之弟兄人數又當其姐妹人數之3倍，問此家庭內男兒女兒各若干？

31. 某汽車夫有8咖崙含5%酒精溶液，問用含80%酒精溶液多少與之混合，方可成爲含15%之酒精溶液。

32. 一泥瓦匠發現無量沙礫，內含20%細沙與粗石，問100立方呎內，需再加若干細沙，方成爲含30%細沙之沙礫。

33. 一火車，其二時所行距離，預計若平均速率每時增加8哩可於1時40分行之，求所行距離。

34. 問7時與8時之間，何時兩針成爲一直線

35. 問4時與5時之間，何時兩針成一直角？

36. 一油商購汽油若干每咖崙洋値8分又於不得已時每咖崙値17分售出，若此時汽油又蒸發有2%則共損失13,4元，問所購汽油若干？

37. 一水槽，有一入水管可於20分鐘注滿，有一出水管可於25分鐘流盡，問兩管齊開，幾時後可水滿

38. 一飛機順風行3小時，若逆風行行三小時則僅行前距離之$\frac{4}{5}$。若飛機在無風時之速率爲每小時90英哩，求此時風之速度。

39. 一游泳池，有三水道可分別於20分鐘，45分鐘及60分鐘放完池中之水。問三水道齊開，幾時可流盡？

40. 一件工程，A獨作之較B省2日即可完成，B獨作之僅爲C所需時間之半即可完成，若B與C共作之，則需$3\frac{1}{3}$日，問三人同作，幾日完成？

56. 兩未知數之一次方程式　一含未知數之線方程式，共解答唯一，已於第 45 節論之，至於含兩未知數之一次方程式，則有很多之解答．

例如
$$2x+3y=12$$
可有無數對數值，代x與y均能適合於此方程式．因移y項，則得

$$x=\frac{12-3y}{2},$$

由是可知有無限個數值可代 y 使之化為含x 之一次方程式而各得解答．如 $y=2$, 則 $x=3$. 此對數值即為一解答．仿此, $y=6, x=-3$ 亦適合於此方程式．

同時又有無限對x及 y之數值不能適合於已知方程式．

例如， $x=2, y=1$, 或 $x=-1$, $y=3$ 均不能之合於上方程式．

57. 兩未知數之一次方程式之圖解　作一含兩未知數一次方程 (或含二未知數一次方程組) 之圖解，須根據若干假定與定義．茲述於下：

I.　取兩正交線：X'OX, 稱為 X軸, Y'OY, 稱為 Y軸．

II.　取一長之單位分此兩線．

例如，2與兩倍單位長相當，$4\frac{1}{2}$與$4\frac{1}{2}$倍單位長相當，餘類推．

III.　在一紙上由Y軸至任何點之距離(平行於X軸量之，) 謂之一點之X距(或橫坐標)．由X軸至任何點之距離(平行Y軸量之)，謂之一點之Y一距 (或縱坐標)．

IX.　一点之 X距 離居Y軸之右者代正數　，而 居左者代負數，一點之Y距離在X軸之上者代正數，而在下者代負數．簡言之，

所量距離在軸之右或上者爲正，左或下者爲負。

V. 一平面內任一点，必與一對數值對應，其中一數或兩數可爲正數可爲負數，或爲整數或爲分數。

XI, 定一對數值所對應一點之位置，x—距離表第一數，y—距離表第二數。

例如，定點(2,3)之位置，x—距爲2,y—距爲3.

兩軸之交點，謂之原點。

X距離與Y距離之值，謂之一點之坐標。

一方程式與其圖解之關係，可述之如下：

在線上任意一點，其X距離及Y距離之值必適合於此線之方程式。

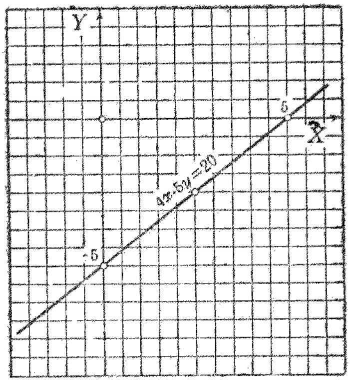
一方程式之點，必在其圖象上。

兩未知數之一次方程，其圖象爲一直線，然一直線可以兩點定之，故作一次方程式之圖象時，常可選適合於方程之兩點，畫一直線以通過之，爲便利計。所選之兩點，常爲直線與坐標軸之交點，唯當此兩點距離太近時，使線之方向，難以確定，則須取距離較大之兩點。

若討論兩變數之最簡方程式，如 $x+y=6$, 則知有無限對根，因有無限對數之和爲 6 故也。由此又可知有無限之點在 $x+y=6$ 圖象上，同時亦可知有無限對數，其和不等於 6，以故亦有

無數點不在 $x+y=6$ 之圖解上；如是若任取兩數，其和為6者甚少，故前節所述方程式之圖象，適合方程式之點，絕不集中圖象上之一部，亦不散蔓於圖象之外，只落於全直線上。

例　作 $4x-5y=20$ 之圖象。



解　以零代x，則 $y=-4$。

仿此， $y=0$，$x=5$；$y=-2$，$x=2\frac{1}{2}$。

將所求點之位置作出，則得圖象如右。

58. 一對方程式之解法　若一對x及y之值，非限於適合於一個一次方程式，但限於適合於兩個一次方程式，普通其解答數僅為一個，茲舉例如下：

例　題

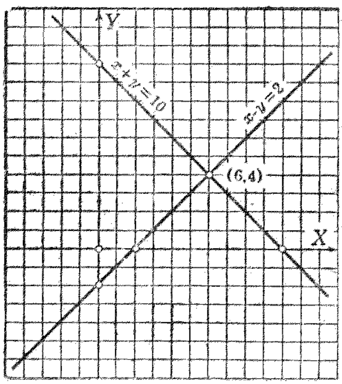
圖解 $\begin{cases} x+y=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解： 由方程式(1)

x	0	10
y	10	0

由方程式(2)

x	0	2
y	−2	2



自然兩數之和爲10者有無數之多，亦卽方程式 $x+y=10$ 之解答有無數之多若再有一種條件，兩數之差必爲2,卽 $x-y=2$, 則顯然只有6與4兩數．此種事實已見上圖解中．

59. 相因方程及方程組 若兩方程式可化爲同一形式者，謂之相因方程式；不能化爲同一形式者謂之自立方程式．

如 $6x-8y-4=0,$

及 $3x-4y=2$

爲相因方程式，因第一方程將(-4)移至右邊，以2除兩邊，卽化爲第二方程式．反之，兩方程式．

$$x-4y=2,$$

及 $3x-4y=2$

不能化爲同一形式爲自立方程式． 故相因方程式者，除其各項之排列不同及含有常數因式外，餘均值等，其解答必彼此相同．

相因方程之圖象爲同一直線，而自立方程式乃表相異之圖象．

茲將上述事實，總結於下：

兩方程式 $ax+by+c=0$

及 $a'x+b'y+c'=0$

爲相因方程式，須

$$\frac{a}{\alpha,}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

諸自立方程式含一以上之未知數而有一公共解答者，謂之聯立方式．兩組聯立方程式若同爲一對(或諸對) x及y之值所適合者，謂同值方程組

例　題

圖解

$$\begin{cases} 3x+7y=21, \\ x+y=-1; \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+3y=4. \end{cases}$$

解：此兩組方程式爲同値方程式，其公共解答爲$x=-7, y=6$. 圖解此種方程組(其他同値方程組亦然)，其共所得之直線，必通過一公共之點。

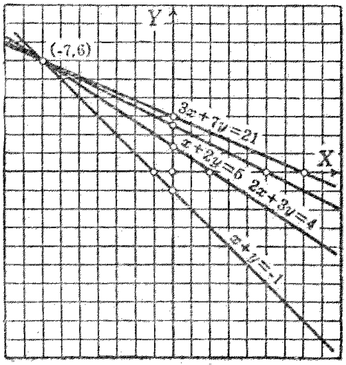
如

$3x+7y=21$

x	0	7
y	3	0

$x+y=-1$

x	0	-1
y	-1	0



$x+3y=5$

x	0	5
y	$2\frac{1}{2}$	0

$x2+3y=4$

x	0	2
y	$\frac{3}{4}$	0

60 聯立一次方程式之解法　解兩聯立線方程式，可用下則法　各以適宜之數乘兩方程式，使所得兩方程式某一公共未知數之係數相同。

將所得兩方程式相減，又得一含一未知數之一次方程以解之。

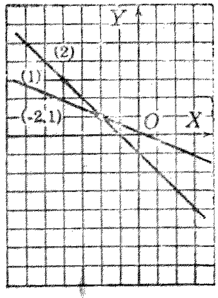
再將所求之値代入原有任一方程式，以求出他未知數之値。

用所求之兩値，代入另一方程式核算之。

例 題

解下列方程組，幷畫其圖象：

$$\begin{cases} 3x+7y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+y=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$



解： (2)×3 $\quad 3x+3y=-3 \cdots\cdots\cdots (3)$

(1)－(3) $\quad 4y=4$

$\therefore y=1.$

代入(2) $\quad x+1=-1$

$\therefore x=-2,$

核算：代入(1)

$$3.(-2)+7.1=-6+7=1.$$

61. **背理方程式** 諸方程式含一以上之未知數而無一公共解答者謂之背理方程式

定理 兩個自立方程式

$$\begin{cases} ax+b\,y=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ a'x+b'y=c' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

爲背理方程式，若$ab'-a'b=0$.

用第60節之法則，求此方程組之解答，則得

$$ab'x+ab'y=a'c$$

$$ab'x+ab'y=ac'$$

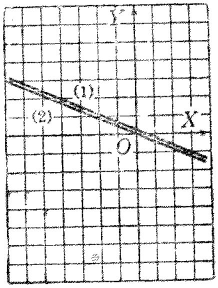
相減 $\quad (ab'-a'b)y=ac'-a'c$

在(5)式中，若$ab'-a'b\neq 0$, 可得出y之值，假若$ab'-a'b$, 由第 7 節除式不能爲零，故無y之值，即 (1) 式與 (2) 無解答．

$ab'-a'b=0$之條件，亦可寫爲$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$；換言之，(1) 與 (2)

無解答之條件，卽未知數項之係數成比例是也．若此比例再等於常數項之比，卽變爲相因方程，已於前述之．

例　　題



解下列方程組，並畫其圖象：

$$\begin{cases} 3x+\ \ 7y=1, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 6x+14y=1. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解：$(1)\cdot 2,\quad 6x+14y=2\cdots\cdots\cdots(3)$

$(3)-(2),\qquad 0=1$

此爲不合於理，故無解答．

此種圖象，如右圖所示．

62. 結論　若兩方程式之形狀爲

$$\begin{cases} a\,x-b\,y+c\ =0, \\ b'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

可得三種情形：

(a) 相因方程式，有無數個共公共解答．

則　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

含二未知數兩相因線方程之圖象，乃表兩重合直線．

(b)背理方程式，無解答，

則　$ab'-a'b\ =0$

但　$bc'-b'c\ \neq 0$(1)式便不眞確，

含二未知數之兩背理方程之圖象，乃表兩平行線．

(c)聯立方程式，有一組解答且僅有一組解答，

則　$ab'-a'b\neq 0.$

含兩未知數之兩聯立方程式之圖象，乃表兩相交線．

習　題

解下列方程組幷核算之，共圖象可由教師指導作之．

1. $3x+2y=8,$
   $5x+3y=13.$

2. $7x-5y=18,$
   $\frac{3}{2}x+2x=10.$

3. $4x-2y=2,$
   $3x-y=0.$

4. $3x-9y=3,$
   $2x-5y=2.$

5. $3x-\frac{5}{4}y=16,$
   $4x-\frac{5}{3}y2=24.$

6. $\frac{2}{3}x=\frac{1}{7}y+15,$
   $\frac{3}{7}x=\frac{5}{14}y+y-\frac{1}{2}$

7. $4x-9y=-10,$
   $1.5x+3.2y=9.4.$

8. $x=7y,$
   $\frac{1}{2}x-7y=-7.$

9. $4x+3y-6=0,$
   $3x-5y-19=0.$

10. $2x+ay=b,$
    $3x-by=c.$

11. $x+y=3a+b,$
    $x-y=a-3b.$

12. $4x-5y=9a,$
    $5x-4y=9b.$

13. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}(y+2)=5,$
    $\frac{1}{6}x-\frac{1}{8}(y+8)=-1.$

14. $2.75x-2.25y=-y+.25x,$
    $8.375y+1.25x=9y.$

15. $7x+5y=a^2+ab+b^2,$
    $7y+5x=a^2-ab+b^2$

16. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2,$
    $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0$

提示：無須去分母解之．

17. $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6},$
    $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{2}{15}$

18. $\frac{x-a}{y-b}=\frac{c}{d}$
    $x+y=a+b.$

19. $\frac{2x+3}{y-2}=7,$
    $\frac{3x+2}{2-y}=-8.$

20. $\frac{x+y-1}{2x-y+2}=\frac{1}{3}$
    $\frac{2x+y-2}{x+y}=\frac{1}{2}.$

21. $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=p.$
    $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=c.$

22. $\frac{2}{x+2y}=\frac{4}{4x+3y},$
    $\frac{4}{4x-y}=\frac{2}{7x+3y}.$

23. $\frac{x+1}{y+1}=\frac{a+b-c}{a-b-c},$
    $\frac{x-1}{y-1}=\frac{a-b+c}{a+b+c},$

24. $\dfrac{.8x+.2y+.5}{12x-13y-14}=-.1,$

$\dfrac{.7x+.1y+.4}{7x+2y-3}=.2$

25. $x+y=\dfrac{a^2+4ab}{2a}.$

$x-y=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}.$

26. $\dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a+b}=\dfrac{1}{a-b},$

$\dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a+b}=\dfrac{1}{b-a}.$

27. $\dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{a-c}=\dfrac{a-b}{a-c},$

$\dfrac{a-x}{b}+\dfrac{a-y}{c}=\dfrac{a-b+2c}{c}$

28. $\sqrt{x}=2+\sqrt{y},$

$\sqrt{y}=7-2\sqrt{x}.$

29. $3x-\sqrt{y}=2,$

$3\sqrt{y}+2x=5.$

30. $2\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,$

$\sqrt{x}-2\sqrt{y}=-1.$

31. $x\sqrt{a}-y\sqrt{b}=a+b,$

$x+y=2\sqrt{a}.$

32. $x\sqrt{3}+y\sqrt{5}=8,$

$x\sqrt{5}-y\sqrt{3}=0.$

33. $2\sqrt{x+2}-2\sqrt{y-2}=2,$

$7\sqrt{x+2}+3\sqrt{y-2}=27.$

34. $\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}}=6,$

$\dfrac{3}{\sqrt{-x}}-\dfrac{5}{\sqrt{y}}=-2.$

35. $\dfrac{27}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{6}{\sqrt{y-2}}=25.$

$\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{21}{\sqrt{y-2}}=10$

36. $(a-b)x+y=a^2,$

$(a-b)(x+ay+by)=(a^2-b^2)(b^2+1).$

37. $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{(x+y)}{-1},$

$3(x+2)+7(y-3)=3y+x+1.$

63. 含兩未知數之應用問題之解法　解含二未知數之應用問題與解含一未知數之應用問題(第55節)有同一原理，卽將問題中語言用代數中語言譯之．

問　　題

1. 兩數之差爲5,其和爲$12\frac{1}{2}$求各數．

2. 兩數之和爲s,其差爲－s求各數

3.　甲乙二人分銀5000元．若甲多得1000元乙少得則500元，則二人所得銀數相等．問二人各分銀若干？

4.　兩房相距45呎，一人立於其間．若3倍此人至第一房之距離，並15倍此人至第二房之距離；則此時至第二房之距離恰爲距第一房之距離之2倍．求此人至各房之距離．

5.　有兩羣兒童，站於街旁．若第一羣之一兒童加入第二羣，則兩羣人數相等．又若第二羣之一兒童入第一羣，則第一羣人數爲第二羣人數之3倍．求各羣原有人數？

6.　某人有股票40張，其中一種股票每張每年可得銀10.75元，又一種每張每年可得銀4.50元．若此人此種進款每年共爲242,50元，問兩種股票各若干張？

7.　某車之車價爲一輪價值之30倍，較四輪價多1800元．試求出車價及一輪之價值．

8.　一人欲買一特製自動車而以其價價之$\frac{1}{20}$作零件費，又欲以原定車價之半購買別種自動車，而以此種車價之$\frac{3}{10}$作零件費，若兩種自動車所用之零件費爲150元試求兩種自動車之價．

9.　某分數，分子母各減2，則等於$\frac{2}{3}$分子加1而分母減1,則成爲原分數之倒數．試求此分數．

10.　有兩種自動車，某人欲購之．小者年需零件費爲車價之$\frac{1}{2}$,開車費爲300元,大者年需零件費爲車價之$\frac{1}{8}$，開車費爲500元．若大者年需零件費多增100元則兩種消費卽相等，但大者車價爲小者車價之2.3倍試求各車之價．

11. 某人有金額若干，第一年生息200元，第二年因利率增加$\frac{2}{5}$%，其進款數量卽增加20元．問此人有金若干？

12. 某人投資生息，其一部份利率爲4%，其餘爲7%；則進欵爲154元．若利率各減$\frac{1}{2}$%，則進欵爲132·50元．問兩部本銀各若干？

13. 有兩位數，若加以27則數字次序互換，若減以14則數字之和爲20．試求此數．

14. 某人有銀分兩部生息，第一部利率爲4%，第二部利率爲$4\frac{1}{2}$%；則第一部所得利息爲第二部所得利息之半．若將兩部本銀交換，則進欵爲1046元．試求兩部銀數．

15. 博物館中，發見重25磅之僞金塊，乃以金包鉛製成之，因設法檢驗．若權於水中則重$22\frac{4}{5}$磅．設$19\frac{1}{3}$磅之金，與$11\frac{1}{3}$磅之鉛權於水中，各減少重量一磅，問此僞金塊含金鉛各若干？

16. 某種機械，乃鐵鉛合製而成，重爲6磅．又權於水中則爲$5\frac{1}{4}$磅．若$7\frac{7}{8}$磅之鐵與$11\frac{1}{3}$磅之鉛權於水中，各減少重量一磅，問此機械含鐵鉛各若干？

17. 30人共有銀100元，若男子每人有2元，女子每人有4元．求男女人數各若干．

18. 有兩位數，其數字相同而差爲9. 若大數字較小數字之半多3.求此兩數字．

19. 某化學家有濃度不同之溶液兩種，若第一種之一份與第二種之四份配合則所成溶液之濃度爲27%，又若由此二種溶液取出之量互易其數，則所成溶液之濃度爲37%．問二原溶液之濃度各若干？

20. A與B相隔24哩，相向而行；若A先B行1時，則相遇於B行3時後。若B先A行1時，則相遇於A行$2\frac{3}{7}$時後。試求兩人之速率。

64. 數未知數之一次方程式之解法

法則 由程諸方式中，於每兩方程內消去一未知數，則得一組方程式，其方程式數少1，未知數亦少1.

如是逐一消去未知數，可得出一未知數之值。

其餘未知數之值，可用代入法求之。

正如解含二未知數方程組時，可有多種特殊情形發生，即有無數解答或無一解答，若無一解答存在，則所得之方程，必爲一自身矛盾之方程式。

此種特殊情形，詳於第十九章。

習　題

解下列方程組，並核算之

$$\begin{cases} x+y+z=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x+2y-4z=-5 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ 7x+y-2z=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解 ∵(1)+(3),　　$8x-z=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(2)　2·(3),　　$17z-8z=-7 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

8·(4)−(5),　　$47x=47$

$=1.$

代入(4),　　$z=3.$

代入(1),　　$y=2.$

核算：代入(2),　　$3+4-12=-5.$

2. $x+y=4,$

$2x-z=2,$

$y+z=4.$

3. $x+2y=1,$

$3x+2y-z=1,$

$5z-2y=3.$

4. $2x-2y+z=3,$

$3x-5y-z=-2,$

$7x-4y+3z=15.$

5. $x+y+2z=a,$

$y+z+2x=b,$

$z+x+2y=c.$

6. $x+2y-z=14,$
$3x=y,$
$7x-3z.$

7. $x-y=3z-10,$
$7x+6y=19,$
$z+y=5x.$

8. $1\cdot 3x+2\cdot 1y=13.7,$
$2.7y-.5z=-.1,$
$.7x+.2z=7.4.$

9. $x+2y=0,$
$y+2z=3,$
$z+2u=7,$
$u+2x=7.$

10. $x+y=a,$
$y+z=b,$
$z+u=c,$
$u+x=d.$

11. $\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=-1,$
$\frac{3}{y}-\frac{2}{x}=-1,$
$\frac{2}{x}+\frac{3}{z}=19$

12. $\frac{xy}{x+y}=\frac{6}{5},$
$\frac{xz}{x+z}=\frac{12}{7},$
$\frac{yz}{y+z}=\frac{4}{3}.$

13. $\frac{xy}{4y-3x}=20,$
$\frac{xz}{2x-3z}=15,$
$\frac{yz}{4y-5z}=12,$

14. $\frac{x+1}{y+1}=\frac{5}{4},$
$\frac{y+3}{z+1}=-6,$
$\frac{z+2}{x+1}=0,$

15. $2\frac{1}{2}y=x+z-2,$
$3\frac{1}{3}z=y+x+4,$
$4\frac{1}{4}x=y+z+12,$

16. $x+y=2\frac{2}{3}z+3,$
$x+z\div 4\frac{4}{5}y-15,$
$y+z=5\frac{5}{6}x-27.$

17. $3x+7y+2z=31,$
$x-3y+z=-5,$
$2x+3y-2z=9.$

18. $x-7y+2z=4,$
$3x-2y-z=-4.$
$7x+2y+z=2.$

19. $7x+2y-13z=-13,$
$2x+3y-2z=-10,$
$8x-2y-5z=22.$

20. $2y+3z-4x=4,$
$7y+z-x=-5,$
$x+y+z=1.$

21. $(x-2)(3y-7)=(3x+2)(y+2),$
$(x+3)(3z+2)=(3x-1)(z+6),$
$(7y-9)(2x-3)=(7x+2)(2y+1).$

第六章

無理數及根式

65. **無理數之成立** 解含有理係數之一次方程或一次方程組時，只應用加減乘除四則演算已足，前已言之．惟當解二次方程式時，例如$x^2=2$則任何有理數皆不能適合．

假定 在一整恒等式中，其一邊之因式亦必爲他一邊之因式．

例如 設$2\cdot a=b$，若 a,b 均爲整數，因2爲左邊之因數，亦必爲b之因數．

定理 任何有理數不能適合於方程式$x^2=2$.

假設有理數$\frac{a}{b}$爲一最低項之分數能適合於此方程式．

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=2,$$

或 $$a^2=2b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由假設，2爲a^2之因數，亦卽爲a之因數．

又設 $$a=2a'.$$

代入(1) $$4a'^2=2b^2,$$

或 $$2a'^2=b^2;$$

卽2又爲b之因數，故與初假設$\frac{a}{b}$爲最低項分數相矛盾．

由是足以表明2之平方根絕不能爲一有理數。

方程式$x^2=2$,不能得有理解答，正如幾何中，等腰直角三角形之弦與其腰爲不可度。

66 無理數之實用 盡家測量員工程師爲實用目的而引用無理數實爲無用，因難得一種尺，足以度明以有理數所表之量與不能以有理數所表之量之間的差別，正如製圖員之不能得眞正數學三角形，而用木製或假象牙品所製之三角形代之也。所謂實用範圍內，無理數決不適用。故事實上無理數僅爲數學上所需要，而非試驗室中及製圖室中所需要如分數及負數也。非無理數，則不能解二次方程式之全部，而無理數之功用，亦僅於數學中開方時見之。

76. 多項式之開平方法 由此方法，可推出數之開平方法，其演算之法則如下。

法則 將多項式之各項依某文字之降冪排列。

求出首項之平方根，作爲平方根式之首項，由原式中減去此項之平方。

用以已求得根之二倍除餘式之首項，以此商加於所求出之根再加於試除式，以構成完全除式。

以所求根之第二項乘此完全除式，由餘式中減去其積。

若原多項式仍有餘項，再以2倍根之首項除新餘式之第一項以求根之新次項，構成完全除式，直至求足所要根之項數為止．

習　　題

試求下列各式之平方根．

1. $4a^2+4ax^2-4abx+x^4+b^2x^2-2bx^3$.

解：

$$
\begin{array}{l|l}
 & 2a-bx+x^2 \\
\hline
 & 4a^2-4abx+4ax^2+b^2x^2-2bx^3+x^4 \\
 & 4a^2 \\
\hline
4a & -4abx+4ax^2+b^2x^2 \\
4a-bx & -4abx\qquad\quad +b^2x^2 \\
\hline
4a-2bx & \qquad +4ax^2\qquad -2bx^3+x^4 \\
4a-2bx+x^2 & \qquad +4ax^2\qquad -2bx^3+x^4 \\
\hline
\end{array}
$$

2. $4x^4-4x^3-3x^2+2x+1$.
3. $x^4+4x^2+9-4x^3+6x^2-12x$.
4. $x^4+3x^2y^2+y^4+2x^3y+2xy^3$.
5. $4x^4+28ax^3+53a^2x^2+14a^3x+a^4$.
6. $9m^2+4n^2+9+12mn-18m-12n$.
7. $a^2-2ab+b^2+x^2+2ax-2bx$.
8. $1-a^2+25a^4-6a+30a^3$.
9. $x^4-2x^3+7x^2+9-6x$,
10. $1+b$，至第四項．
11. $1-b$，至第四項．
12. $4-3b$，至第四項．

68. 數之開平方法　由多項式開平方法，推出數之開平方法如下：

法則　由小數點起，左右分每兩數字為一段，求出左邊一段所含之最大平方數，作為根之第一數字．

由第一段中減去此數字之平方，將餘數歸併於寫下之第二段．

以2倍所求之根，除此餘式，其右邊各段可暫擱置．將此商與已求出之根併之，更與試除數併之構成完全除數．

以所求第二根數字乘此完全除數，其積由被除數中減之，再將除數歸併書下之第三段作爲新餘式．

以2倍所求全部根數，作爲新式除數．如此進行以直至所需要根之位數求完爲止．

用此法則，如遇根之末位與完全除數之積大於被除數，則將所求出根之最後數字減1以試之，直到乘積不大於被除數時爲止．

一數之平方根，除非爲完全平方數，再平方之恒較原數爲小．若將平方根末位數字增加1平方之，又必較原數爲大．

69. 主根 任何數必有兩平方根數．例如4之平方根爲+2及−2.方根之號，可書於根號之前以示之，若無書號，則常指正號(+)而言．

習題

求出下列之平方根，至小數三位：

1. 3.

解：

```
                1.  7 3  2 0 5
              ─────────────────
                3.  00'00'00'00'00
                1
         27  │ 2 00
             │ 1 89
        343  │  11 00
             │  10 29
       3462  │   71 00
             │   69 24
     345405  │   176 00 00
             │   173 20 25
                   2 79 75
```

答 1.732.

2. 7569	6. 3.14159.	10. 1928.01.	14. 10.	18. 13.
3. 1764.	7. 8.73210793.	11. 1500.	15. 1.414.	16. 2.
4. 30.25	8. .00032098214.	12. .7.	16. 7.56.	20. 549.
5. 201375.	9. 00001492.	13. 11.	17. 1,52,0876.	21. 23

70. 無理數之近似值 應用前述方法求得之平方根，絕難得出一數其平方數恰可爲2,蓋此種數不能以有理數表之，前已述之，惟以此法求之，可得與2較近似之數，

例如 $1^2=1$,較2小1.

$1.4^2=1.96$,較2小.04.

$1.41^2=1.9881$,較2小.0119.

$1.414^2=1.999396$,較2小.000604.

如是雖不能云1.414爲2之平方根，可云1.414爲2之平方根僅取有三位小數，意卽

$$(1.414)^2<2<(1.415)^2.$$

71. 數串 有許多數，如2,3,5等，不能求得其恰當平方根以小數表之，只有表以根號形狀，但以開方法行之，可求出所欲得之近似値，故實際用開方法所得一數之近似數串，可定此數平方根之意義，例如2之平方根可用其數串1,1.4,1.41,1.414,…………以定之，

72. 無理數之演算 正如(第2節——第10節)說明分數及負數之演算法則，以說明演算應用開方法所得數串之和差積商之

意義．欲完全闡明無理數之演算實爲超越本章範圍以外，只以數串中之各數屬有理數值爲立脚點，而作其演算．換言之數串中之各數均屬所欲得之數也．故無理數之乘法，可假定如次：用數串定2之平方根，(卽1,1·4,1·41,1·414,…………)，可得一數近於2,如以1.414乘其本身，推而廣之，以數串中各數乘其本身，則新得之數串中各數，實爲原數串中各數之平方，

例如 $(1,1\cdot4,1\cdot41,1\cdot414,\cdots\cdots)(1,1\cdot4,1\cdot41,1\cdot414,\cdots\cdots)$
$$=(1,1\cdot96,1\cdot9881,1\cdot999396,\cdots\cdots)$$

此數串中各數，以2爲極限，故2可用此數串表之．

73. 記法 a之平方根(a無論爲任何數或式)，可記以$\sqrt{a}$.質言之

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a,$$

擴而大之， $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b},$

同法， $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b}.$

習　　題

1. 構成含有五個數之數串以定$\sqrt{2}$.

2. 構成含有四個數之數串以定$\sqrt{6}$.

3. 構成含有五個數之數串以定$\sqrt{15}$.

4. 參照已習法則，由$\sqrt{3}$．$\sqrt{5}$構成含有四個數之數組，更將其結果與習題3比較之．

5. $\sqrt{2}$．$\sqrt{7}$構成一數組之前四個數．更與$\sqrt{14}$數組中前四個數比較之．

74. 各種無理數　數之立方根及高次方根，可用類似求平方根法求之．因實用不多，故缺而不論．惟須知者，其各種方根均可以其數串定之，正如前節所述用平方根之數串以定平方根也．

a之n次根方，記為 $\sqrt[n]{a}$，n稱為根指數．根數之乘除演算，如若根指數為整數，則適用下

假定　兩個n次根數相乘(或商)等於兩數乘積(或商)之n次根．

以符號表之，　$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$,

或　$\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\div b}$.

任與以根指數，如數之根僅一為實根，則稱為主根．若有兩實根，則正者稱為主根．

例如，9之平方根之主根為 $+3$，16之四次方根之主根為 $+2$，而非 -2．又 -4，-9之平方根無實根，故負數無主平方根．

8之立方根之主根為 $+2$；-27之立方根之主根為 -2；32之五次方根之主根為 $+2$；-32之五次方根之主根為 -2.

任何附有奇根指數之數，其根之個數不僅為一，如8之立方根，除主根2外，尚有兩立方根．其另外兩根果屬何種情形及求得方法，俟於論虛數章述之，並進而求研究負數之平方根．

75. 根式之化簡 一根式之最簡式，爲根號下之整式(第11節)且所含因式之方指數必小於根指數．質言之，根號中無因式可脫去使還留號下整式也．

例如 $\sqrt{10}$爲最簡形狀，因10不含有爲完全平方之因數．又$\sqrt{18}$不能爲最簡形狀，因完全平方數9爲18之因數，故$\sqrt{18}$可化爲$\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}$或$3\sqrt{2}$.

根式化簡法，依據下列恆等式，及前節之假定；

$$\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}.$$

由此可推出二次根式之化簡法，如下

法則． 若根號下之式爲分式，可取適宜之式全乘子母，使分母爲完全平方式．

分解根號下之式爲兩因式，使一因式爲最大完全平方因式．

求出此完全平方因式之平方根，而以其平方根與所遺帶根號因式以乘法表之．

若爲n次根式，其分母必須造成n次乘方．又由根號下所取出之任何因式，必須爲完全n次乘方．

習　題

化爲最簡式：

1. $\sqrt{\dfrac{18}{5}}$.

解：
$$\sqrt{\frac{18}{5}}=\sqrt{\frac{9\cdot5\cdot2}{25}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}.$$

2. $\sqrt{\frac{1}{2}}$.　4. $\sqrt{\dfrac{4}{27}}$　6. $\sqrt{\dfrac{3}{10}}$.　8. $\sqrt[3]{54}$.　12. $\sqrt{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}}$

3. $\sqrt{27}$.　5. $\sqrt{125}$.　7. $\sqrt{3125}$.　9. $\sqrt{\frac{1}{4}+2}$.　11. $3\sqrt{32}$.

12. $\frac{3}{4}\sqrt{18a^2}$.

13. $\frac{2}{3}\sqrt{162a^3b^4}$.

14. $\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{15}}$.

15. $\sqrt{\frac{9}{19}+\frac{16}{25}}$.

16. $\frac{12}{7}\sqrt{1+\frac{12}{12}}$

17. $\sqrt{\frac{1}{.375}}$

18. $\sqrt{\frac{3x}{2}}$.

19. $\sqrt{\frac{36a}{x^2}}$

20. $\sqrt{\frac{3a^3}{4b}}$.

21. $a\sqrt{\frac{y^2}{a}}$.

22. $\frac{x^2}{b}\sqrt[4]{\frac{b^2y}{x^7z}}$.

23. $\sqrt{\frac{6y^5}{75}}$

24. $7\sqrt{\frac{36x^3}{49a^2}}$

25. $7\sqrt{\frac{3a}{9x^4}}$.

26. $\sqrt{a^3+4a^3b+4ab^2}$.

27. $\sqrt{\frac{x^3+2ax^2+a^2x}{ax+bx}}$.

28. $\sqrt{3x^3+12x^2-12x}$.

29. $\sqrt{\frac{3a^3-12a^2+12a}{12b-12b^2+3b^3}}$

30. $\sqrt{\frac{2a^3+12a^2+18a}{3b^3-18b^2+27b}}$.

31. $\sqrt{\frac{x^3+x^2y-xy^2-y^3}{36x+36y}}$.

76　根式加減法　諸根式之根指數相同，根號下之式又相同，則稱爲相似根式．根式．加減法，僅將各相似根式集合之．其加法如下

法則　化所加根式爲最簡形狀．

加各相似根之係數，將其和附以相當根式．

根式減法法則，其情形亦如之．

習　題

完成下列所示根式加減：

1. $\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{18}$.

解：

$$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$$
$$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$$

和　$=3\sqrt{2}$.

2. $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

3. $12\sqrt{6}-3\sqrt{6}$.

4. $a\sqrt{b}+a\sqrt{b}$.

5. $a\sqrt{b}+b\sqrt{b}$.

6. $x-5\sqrt{x}+2\sqrt{\frac{x}{4}}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt{4x}$.

7. $2\sqrt{45}+3\sqrt{125}+6\sqrt{20}+3\sqrt{80}-2\sqrt{5}$.

8. $7\sqrt{x}+2\sqrt{y}-3\sqrt{y}+2\sqrt{x}-12\sqrt{x}+7\sqrt{y}$.

9. $3\sqrt{4a}-2\sqrt{9a}+18\sqrt{\frac{2a}{81}}+3\sqrt{8a}-7\sqrt{32a}$.

10. $3\sqrt{x+y}+2\sqrt{4x+4y}-5\sqrt{9(x+y)}+4\sqrt{a^2x+a^2y}$.

11. $2\sqrt{x^2a}-3\sqrt{am^2}+2\sqrt{a^*}-5\sqrt{(x+y)^2a}+7\sqrt{81a}$

12. $3\sqrt{x}+2\sqrt{3x}+7\sqrt{5x}+7\sqrt{4x}+2\sqrt{75x}-7\sqrt{152x}$,

77. 根式乘除法

此種演算可有下

法則 根據普通演算法(第72節)及參考第74節假定。化結果各項爲最簡式。

此節所述之演算，限於根指數相同之根式，若不相同，例如$\sqrt{3}$與$\sqrt[3]{2}$.須先化爲相同(參看第74節)。

習 題

1. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$乘以$\sqrt{3}+\sqrt{8}$.

解：

$$\begin{array}{l} \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ \underline{\sqrt{3}+\sqrt{8}} \\ 3+\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{16} \\ =3+\sqrt{6}+2\sqrt{6}+4 \\ =7+3\sqrt{6}. \end{array}$$

2. 以 $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$除$\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{xy}}$

解：

$$\frac{\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{xy}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{xy}}-\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{xy}}+\frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{xy}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{x}{y}}-1+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

完成且化簡下列所示演算：

3. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}$.

4. $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$.

5. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{12}$.

6. $\sqrt{\frac{3}{5}}\div\sqrt{\frac{5}{3}}$.

7. $(x-b\sqrt{y})^2$.

8. $\sqrt{\frac{42}{55}}\cdot\sqrt{\frac{30}{77}}$.

9. $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3}$

10. $(-2+\sqrt{5})^2$.

11. $(2\sqrt{3}+2)(3\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

12. $\sqrt{21a}\cdot\sqrt{42a}$.

13. $(a+b+\sqrt{ab})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

14. $(7+2\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$.

15. $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

16. $\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

17. $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$.

18. $(a^2+b^2)\div(a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a})$.

19. $\frac{x}{y}\div\sqrt{xy}$.

20. $(3\sqrt{x}+\sqrt{3y})(\sqrt{x}-\sqrt{3y})$.

21. $\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{2a}{9x}}$.

22. $x\div\sqrt{\frac{x}{y}}$.

23. $\frac{3}{\sqrt{5}}\div\sqrt{\frac{3}{5}}$.

24. $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$.

25. $\left(\sqrt{\frac{m+n}{m+p}}-\sqrt{\frac{m+p}{m+n}}\right)^2$.

26. $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\frac{2a-2b}{a^3+a^2b}}$.

27. $\frac{x^4-y^4}{\sqrt[3]{xy}}\div(x\sqrt[3]{x}-y\sqrt[3]{y})$.

28. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$.

29. $(2\sqrt{10}-\sqrt{20}-3\sqrt{40}+\sqrt{80})\sqrt{5}$.

30. $(2\sqrt{27}-3\sqrt{75}+2\sqrt{48}+\sqrt{3})\sqrt{2}$.

31. $(3\sqrt{63}+7\sqrt{56}+2\sqrt{7}-5\sqrt{126})\sqrt{7}$.

32. $(\sqrt{2x+3}+2\sqrt{x})(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x})$.

33. $[(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})]^2$.

34. $(3\sqrt{42}+2\sqrt{7}+3\sqrt{2})(\sqrt{27}+\sqrt{7}-\sqrt{14})$.

35. $(2\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{12})\left(\frac{1}{3}\sqrt{30}-\frac{2}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

33. $\left(\sqrt{\frac{x+y}{3}}+\sqrt{\frac{x-y}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{x+y}{3}}-\sqrt{\frac{x-y}{3}}\right)$

37. 求

$$\frac{1}{3}\sqrt{75}+2\sqrt{\frac{1}{3}}-7\sqrt{15}+2\sqrt{8-\sqrt{2}}\times\sqrt{8+\sqrt{2}}$$

之值至小數三位.

78. 消根法 化分式之無理分子(或分母)化爲有理分子(或分母),而不變分式之值,謂之分子之消根(或分母之消根)

此種演算,通常取所與分式子母之消根因式全成乘式之子母.選擇消根因式,依據下列

原則 I 因$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,故$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$之消根因式爲$\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

原則II 因$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3$,故$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$之消根因式爲$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$反之亦然.

因$(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$,故$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$之消根因式爲$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$,反之亦然

習 題

下列分式,將分母之根號消去:

1. $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$.

解:由原則 I,分母之消根因式爲$\sqrt{m}+\sqrt{n}$.

故 $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$

$$=\frac{m+2\sqrt{mn}+n}{m-n}.$$

2. $\dfrac{1}{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

解： 此習題須兩次消去分母之根號.

$$\frac{1}{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{3})+\sqrt{5}}{[(3+\sqrt{3})-\sqrt{5}][(3+\sqrt{3}+\sqrt{5}]}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(3+\sqrt{3})^2-5}=\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{9+6\sqrt{3}+3-5}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7+6\sqrt{3}}=\frac{(3+\sqrt{3}+\sqrt{5})(7-6\sqrt{3})}{(7+6\sqrt{3})(7-6\sqrt{3})}$$

$$=\frac{21+7\sqrt{3}+7\sqrt{5}-18-18\sqrt{3}-6\sqrt{15}}{49-36.3}$$

$$=\frac{3-11\sqrt{3}+7\sqrt{5}-6\sqrt{15}}{-59}$$

3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$.

解：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2}}{3-5}$$

$$=-\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2})$$

4. $\dfrac{1}{4-\sqrt{2}}$.　　6. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$.　　8. $\dfrac{7}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$.

5. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$.　　7. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}}$.　　9. $\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}-4\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

10. $\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}}$.

14. $\dfrac{3\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

11. $\sqrt{\dfrac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}}$.

15. $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$.

12. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

16. $\dfrac{2}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}}$.

13. $\dfrac{2-\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

17. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

18 $\dfrac{\sqrt{(a+b)(a+2)}+\sqrt{(a-b)(a-2)}}{\sqrt{(a+b)(a+2)}-\sqrt{(a-b)(a-2)}}$

19. 試證 $\dfrac{2\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=30.29+$.

20. 試證 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=9.898+$.

21. 試證 $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{6}}-\sqrt{7-\sqrt{6}}}{\sqrt{2+\sqrt{6}}+\sqrt{7-\sqrt{6}}}=.005+$.

79. 根式方程式之解法 茲先証明下列重要

定理 若含 x 之方程式以含 x 之式乘之，則其所得方程式一般之解答，非盡為原方程式之解答.

設

$$A=0,$$

為含x之方程式，能以 $x=a,b,\cdots\cdots n$ 等數適合之．又設B為一式，以 $x=a_1,b_1,\cdots\cdots n$ 等數代入則為零．則方程式

$$A\cdot B=0$$

不僅為 $x=a,b,\cdots\cdots n$ 等數所適合，且為 $x=a_1,b_1,\cdots\cdots n_1$ 等數所適合．

例如 方程式 $x-2=0$ 唯 $x=2$ 為其唯一之解答，但如方程式 $(x-2)(x-3)=0$ 則增加 $x=3$ 之解答．

若解問題必須將方程式乘以含變數之式，其所得方程式之解答，可代入原方程式中驗之，如有不合，可捨棄之．解方程式時，如若引出之解答不能適合於原方程式，此解答稱為方程式之假根．

由此可證明含x之方程式

$$A=B,$$

若兩邊作同次乘方，亦可引出假根．

又有某種例證，其所有狀似之解答均爲假根，蓋原方程式並非眞一方程式，因其未知數之任何值代入，方程式之兩邊均不能相等(參看第52節)．

例如$\sqrt{x}+1=-1$，移項得$\sqrt{x}=-2$，故得$x=4$．但以4代入x，則得$\sqrt{4}+1=3=-1$．

習　題

1. 解$\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$．

解
$$\sqrt{x+20}=3+\sqrt{x-1}.$$
$$x+20=9+6\sqrt{x-1}+x-1.$$
$$12=6\sqrt{x-1}.$$
$$\sqrt{x-1}=2.$$
$$x-1=4.$$
$$\therefore \quad x=5.$$

核算 $\sqrt{25}-\sqrt{4}=3$．

2. 解 $\sqrt{x-2}-\sqrt{x}=2$．

解：
$$\sqrt{x-2}=2+\sqrt{x}.$$
$$x-2=4+4\sqrt{x}+x.$$
$$-6=4\sqrt{x}.$$
$$2\sqrt{x}=-3.$$
$$4x=9.$$
$$\therefore \quad x=\tfrac{9}{4}.$$

核算： $\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\neq 2$． (根$\frac{9}{4}$可捨之)．

3. $\sqrt{2x-1}=1$.
4. $\sqrt{\frac{1}{3}x+2}=5$.
5. $\sqrt{5x+11}=6$.
6. $\sqrt{3x+7}=10$.
7. $\sqrt{x-3}=\sqrt{4x-5}$.
8. $\sqrt{x}+\sqrt{3x}=2$.
9. $\sqrt[3]{7x+13}=\sqrt[3]{12x+3}$.
10. $3\sqrt{x}-2=2\sqrt{x}$.
11. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=2$.
12. $\sqrt{12+4\sqrt{x-2}}=4$.
13. $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$.
14. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2$.
15. $\sqrt{9-2\sqrt{3x+4}}=1$.
16. $\sqrt[4]{x^2+3x-4}=\sqrt{x+1}$.

17. $x-\sqrt{ax(1+x)+1-x}=1$.

18. $\sqrt{2(x+1)}+\sqrt{4x-4}=2$.

19. $8+\sqrt{(x+2)(x-4)}=x+6$.

20. $\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{3x+25}=19$.

21. $\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x^4-6x+1}$.

22. $1+3\sqrt{2x}=\sqrt{6}+3\sqrt{\frac{1}{3}x}$.

23. $\dfrac{5}{5+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{7-\sqrt{x}}$.

24. $\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}=5$.

25. $\sqrt{3x-3}=\dfrac{-3(x-3)}{\sqrt{3x-5}}$.

26. $\sqrt{5x+6}=\dfrac{5x+2}{\sqrt{5x-1}}$.

27. $\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$.

28. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$.

29. $\dfrac{x-ax}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

30. $3\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+3}=12x-1$.

31. $\dfrac{1+2\sqrt{7x+4}}{1+4\sqrt{7x+4}}=\dfrac{11}{21}$.

32. $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{0x+7}$.

33. $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-5}$.

34. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-\sqrt{x+6}=0$.

35. $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)$.

36. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+2}$.

37. $\sqrt{a\sqrt{b}}-\sqrt{b\sqrt{a}}=\dfrac{a\sqrt{b\sqrt{x}b}-\sqrt{a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

38. $\dfrac{\sqrt{x}(a+\sqrt{x})}{(b-\sqrt{x})\sqrt{x}}=\dfrac{a+1}{b-1}$.

39. $\dfrac{4\sqrt{x}-2}{5\sqrt{x}-5}=\dfrac{2\sqrt{x}+4}{3\sqrt{x}+1}$.

40. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

41. $\sqrt{x-2}=\sqrt{x}+2$.

42. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$.

43. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}=1$.

44. $\sqrt{x+12}+\sqrt{x-12}=12$.

45. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x+5}=5$.

46. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$.

47. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x+5}=7$.

48. $\sqrt{5x+4}+\sqrt{5x-1}-\sqrt{5x+20}=0$.

49. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{-x}$.

50. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=0$.

51. $\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}=\dfrac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{2}}$.

第七章

指數之理論

80. **負指數** 由第16節，則知

$$a^m.a^n=a^{m+n}$$

此時m及n 限於正整數．而現時要假定其中一數或全數爲負數或分數均能成立．

若設 $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$，

則 $\frac{a^n}{a^m}=a^n\left(\frac{1}{a^m}\right)=a^n\cdot a^{-m}=a^{n-m}$,

蓋因 m與n 爲任何整數時，法則 (1)均可成立，此種記法，可以文字述之如下

原則 分式之分子或分母中之因式，可變其指數之符號而移作分母或分子中之因式；反之亦然．

81. **分指數** 由第75節 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$，如是可設法爲 $\sqrt{a}$ 作記法使適用則(1).

若設 $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$,

則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}.a.^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a.$

更設 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$，

可適用法則(1)寫 $(a^{\frac{1}{n}})^2=a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}=a^{\frac{2}{n}}$,

總而言之，如 $(\sqrt[n]{a})^m=(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}$.

採用此種記法，即知任何實數，可以任何有理數爲其指數．此記法可亦可以文字述之如下

原則 分指數之分子爲乘方指數而分母爲方根指數．

82. 根式公式及指數公式提要

I. 定義

1. $(\sqrt[n]{a})^n=a.$ 例如 $(\sqrt[3]{2})^3=2.$

2. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$ 例如 $2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}.$

3. $a^{\frac{1}{n}}=a^{-n}.$ 例如 $\frac{1}{2^3}=2^{-3}$

II. 指數之總則

1. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ 例如 $2^3\cdot 2^5=2^8.$
2. $a^n\cdot b^n=(ab)^n.$ 例如 $2^3\cdot 5^3=(10)^3.$
3. $(a^n)^m=a^{nm}.$ 例如 $(2^3)^2=2^6.$
4. $(a^n)^m=(a^m)^n.$ 例如 $(2^3)^2=(2^2)^3=2^6.$
5. $(a^n)^{mp}=(a^{nm})^p.$ 例如 $(2^2)^{3\cdot 4}=(2^{2\cdot 3})^4=2^{24}.$

III. 根式與分指數記數之總則

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}.$ 例如 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{6}}.$
2. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$ 例如 $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10}.$
3. $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}.$ 例如 $\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=2\sqrt[3]{5}.$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$ 例如 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[12]{2}.$
5. $(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}.$ 例如 $(\sqrt[3]{2})^2=\sqrt[3]{2^2}.$

83. 主根 由第69節及第74節之觀念，一數之主根，乃在根式記法中說明之，若在分指數記法中，亦有同樣應用．

例如 $4^{\frac{1}{2}}=2$; 而 $-4^{\frac{1}{2}}=-2.$

又 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$; 而 $8^{\frac{1}{3}}=2.$

由此種記法推之，若將方程式兩邊開方，必須取用兩邊之主根方可使方程式保持平衡狀況，此種情形，無論方程式用根式記法或分指數記法均同．

口述題

求出下列數值：

I. $\sqrt{4}$.	7. $-\sqrt[4]{625}$.	I3. $9^{\frac{1}{2}}$.	I9. $81^{\frac{3}{4}}$.
2. $-\sqrt{9}$.	8. $\sqrt[3]{-8}$.	I4. $27^{\frac{1}{3}}$.	20. $(\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}$.
3. $\sqrt{16}$.	9. $\sqrt[4]{16}$.	I5. $64^{\frac{1}{2}}$.	2I. $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$.
4. $\sqrt[3]{27}$.	I0. $-\sqrt[5]{-32}$.	I6. $8^{\frac{2}{3}}$.	22. $(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}$.
5. $\sqrt[3]{-27}$.	II. $-\sqrt{64}$.	I7. $-64^{\frac{1}{3}}$.	23. $(-\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}}$
6. $\sqrt[4]{81}$.	I2. $-\sqrt[3]{-125}$	I8. $25^{\frac{3}{2}}$.	34. $(\frac{1}{25})^{\frac{3}{2}}$

以根式形狀視之，讀下列各式：

25. $A^{\frac{1}{2}}$.	29. $2x^{\frac{1}{2}}$.	33. $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$.	37. $x^{\frac{1}{y}}$
26. $x^{\frac{2}{3}}$	30. $(3p)^{\frac{1}{3}}$	34. $5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$	38. $3^{\frac{1}{a}}B^{\frac{1}{a}}$
27. $k^{\frac{7}{2}}$.	3I. $7xy^{\frac{2}{3}}$.	35. $m(m-n)^{\frac{1}{3}}$.	39. $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{a}}$.
28. $(ab)^{\frac{2}{3}}$.	32. $8ab^{\frac{3}{4}}$.	36. $2A(x+y)^{\frac{2}{3}}$.	40. $11x^{\frac{m}{n}}y^{\frac{n}{m}}$.

以分指數形狀視之，讀下列各式：

4I. $\sqrt{x^3}$.	43. $\sqrt{ab^3}$.	45. $2\sqrt{a}$.	47. $\sqrt[4]{(x+y)^6}$
42. $\sqrt[3]{x^2}$.	44. $\sqrt[4]{m^3x^5}$.	46. $3\sqrt[3]{7x^2}$.	48. $\sqrt[4]{(x+y)^2}$

49. $\sqrt[3]{a^2+2a^3b}$.　　50. $m\sqrt[3]{a^4(m^2-n^2)}$.

習題

化爲最簡形狀，且使含有正指數：

I. $\dfrac{a5a^{-2}b^2c^{\frac{5}{2}}}{5ab^3c^{-\frac{1}{2}}}$.

解：由第80節，

$$\frac{25a^{-2}b^2c^{\frac{5}{2}}}{5ab^3c^{-\frac{1}{2}}}=\frac{5\cdot c^{\frac{5}{2}}.c^{\frac{1}{2}}}{a\cdot a^2\cdot b^3.b^{-2}}$$
$$=\frac{5c^3}{a^3b}$$

2. $\frac{x^2}{x^{-3}}$.　4. $\frac{x^{-1}y^{-3}}{x^{-2}y^{-1}}$.　6. $\frac{\sqrt[5]{(a^{15}b^{10})^2}}{(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}}$.

3. $\frac{y^{-1}}{y^{-2}}$.　5. $\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{xy^3}\cdot\sqrt[4]{z^3}}$.　7. $\frac{15x^{-2}y^{-3}z^{-1}}{25x^2y^{-4}z^{-2}}$.

8. $\frac{2a^{-1}b^{-3}}{3a^2b^{-4}}\cdot\frac{6ab^{-2}}{5a^{-2}b}$.　10. $m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{5}{2}}p^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{m^2p^4q^{-1}}$.

9. $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}c\sqrt{ab}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{bc}\cdot a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^2}$.　11. $\frac{3a^{-b}\cdot x^{4c}}{3y^{-1}\cdot b^2}\cdot\frac{5y^{-2}\cdot b^{-3}}{3a^b\cdot x^{2c}}$.

下列題中各數，順其大小次序排列之：

12. $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{\frac{7}{2}}$.

解：

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt[12]{\frac{3^6}{2^6}}=\sqrt[12]{\frac{729}{64}}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[12]{\frac{2^4}{3^4}}=\sqrt[12]{\frac{16}{81}}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{7}{2}}=\sqrt[12]{\frac{7^3}{2^3}}=\sqrt[12]{\frac{343}{8}}.$$

大小之次序為 $\sqrt[4]{\frac{7}{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

13. $\sqrt[3]{.3}$, $\sqrt{.1}$.　16. $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[12]{15}$, $\sqrt[3]{5}$.

14. $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$,　17. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$

15. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$.　18. $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[6]{18}$, $\sqrt[12]{100}$.

完成下例所示演算：

19. $\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{5}$.

解：

$$\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[6]{5}=2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{6}}.$$
$$=2^{\frac{3}{6}}.3^{\frac{2}{6}}.5^{\frac{1}{6}}$$
$$=\sqrt[6]{8.9.5}$$
$$=\sqrt[6]{360}.$$

20. $\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}$.　22. $\frac{\sqrt{2}.\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{3}.\sqrt{5}}$.　24. $\frac{\sqrt[6]{3}.\sqrt{8}}{\sqrt[12]{4.\sqrt[3]{7}}}$.

21. $\frac{\sqrt{3}\sqrt[6]{.5}}{\sqrt[3]{4}}$.　23. $\frac{\sqrt[3]{5}\sqrt{6}}{\sqrt{2}.\sqrt[3]{7}}$.　25. $\frac{\sqrt{3}.\sqrt[4]{90}}{\sqrt{45}.\sqrt[3]{625}}$.

84. 根式多項式之演算　此種演算，仍跟隨前所示根式演算法則，其假定及原則均以第81－82節中所示為準。

習　題

下列各題，以題中第二式除第一式：

1. $x^{\frac{2}{5}}-y^{\frac{2}{5}};x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}}$.

2. $x^{\frac{3}{7}};+y^{\frac{3}{7}};x^{\frac{1}{7}}+y^{\frac{1}{7}}$.

3. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}};\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$.

4. $\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{x^3}}-\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt{x^3}};\ \sqrt[3]{x^3}$

下列各題以題中第二式乘第一式：

5. $2x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}};x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}$.

6. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2};\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}$.

7. $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x^3}+\frac{2}{3}\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x};\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$.

8. $3x^{-\frac{1}{2}}y^{-1}+2x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+3;x^{-\frac{1}{2}}+3y^{-\frac{1}{2}}$

9. $3x^3-2x^2y^{\frac{1}{2}}+3xy+2y^{\frac{3}{2}};x^{-3}+3y^{-\frac{1}{2}}$.

求下列各式之平方根：

10. $9x+6x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$.

11. $4x+49y-28\sqrt{xy}$.

12. $x^3+4\sqrt{x^3y^5}+4y^5$.

13. $x^2+2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3xy+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^2$.

14. $x^4+y^{-2}-x^2y^{-1}+2xy^{-\frac{3}{2}}-2x^3y^{-\frac{1}{2}}$.

15. $4x^4+28x^3y^{\frac{1}{2}}+37x^2y-42xy^{\frac{3}{2}}+9y^2$.

16. $4x^2+12x^{\frac{5}{3}}-19x^{\frac{4}{3}}-34x+61x^{\frac{2}{3}}-28x^{\frac{1}{3}}+4$.

17. $\frac{4}{49}x^2y^{-2}-\frac{15}{2}yx^{-1}+\frac{9}{16}y^2x^{-2}-\frac{20}{7}xy^{-1}+25\frac{3}{7}$.

化簡下列各式

18. $\dfrac{6x+3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}-2}{3x^{\frac{1}{2}}-2y^{-\frac{1}{2}}}$.

19. $\dfrac{6a^{\frac{3}{2}}+9a^{\frac{1}{2}}b-4ab^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{2a+3b}$.

20. $\dfrac{3x+3x^{-1}-6}{x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}}$.

第八章

對數

85. 導言　前章所論之指數，實爲對數而設，而對數爲近世數學上簡捷算法中之重要問題．除却採用亞拉伯及小數記法外，對數之發明與應用，對于數之計算在方法及效用上可謂兩全其美

86. 乘冪　若b與c爲整數時，計算b^c甚易。

例如　　　$6^4=1296$　及　$3^5=243$.

若c不爲整數而爲分數，則b^c亦可計算到所欲得之精度．

例如設$b=2$及$c=\frac{3}{2}$,則$2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$,由此可求出所欲得之精度，

唯指數爲一無理數時，例如$\sqrt{2}$,其計算法便不易，蓋因$\sqrt{2}$爲下列數串之極限值(第71節),

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

由此則$5^{\sqrt{2}}$，又爲下列數串之極限值。

$$5^1, 5^{1.4},\ 5^{1.41},\ 5^{1.414},\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

此等數$5^{1.41}$之計算雖可作之，然亦弗易必也,因$5^{1.41}=5^{\frac{141}{100}}=\sqrt[100]{5^{141}}$,

若設$x=5^{1.41}$,即x爲方程式$x^{100}=5^{141}$之一根，其解法可俟於第十七章論之．

在此特別情形中,$5^{\sqrt{2}}$爲一數串之極限值,此數串之指數漸漸近似$\sqrt{2}$,可用開平方法求出之,同理當b爲一正整數,c爲任何無理數時,常能將b^c意義表明之。

假定 茲假設在有理指數中所採用演算法則,可適合於無理指數之演算·

例如$b^c \cdot b^d = b^{c+d}$,$\frac{b^c}{b^d} = b^{c-d}$,$(b^d)^c = (b^c)^d = b^{cd}$,此處c與d爲有理數或無理數均可·

87. **對數** 若b與c爲已知數,有一數a存在可適合於$b^c = a$,已如上述,現在更討論求c之問題,設若a與b爲已知,例如設$a=8, b=2$,即$2^c=8$,則$c=3$立可求得,又設$a=16, b=2$,即$2^c=16$亦可求出$c=4$.唯設$a=10$ $b=2$,則方程式$2^c=10$極有討論之必要·若$c=3$,則得$2^3=8$;若$c=4$,則得$2^4=16$.由是知c能得存在以適合$2^c=10$,其值必介乎3與4之間,然欲証明此種數存在之定理,實超乎本章範圍,只有作下列

假定 一實數x可常存在,以適合於方程式

$$b^x = a \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處a,b爲正數,但$b \neq 1$.

因任何實數,可以小數表之,故x亦可以小數表之也。

定義 一已知數,其某乘冪等於又一數,則方指數爲第二數爲底(Base)之對數·

在方程式(1)中，x為a以b為底之對數簡記為　$x=\log_b a$……(2)

因$2^3=8$，$10^2=100$，$3^{-2}=\frac{1}{9}$，及$1^0=1$；故得$\log_2 8=3$，$\log_{10}100=2$，$\log_3\frac{1}{9}=-2$及$\log_4 1=0$。

又在a(1)或(2)方程式中，謂之x以b為底之真數

習　　題

下列各題，指出底，對數，眞數，並書為(2)之形狀：

1　$10^6=1,000,000$。

解：底$=10$，對數$=6$，眞數$=1,000,000$，

$$\log_{10}1,000,000=6$$

2.　$3^2=9$.

3.　$2^5=32$.

4.　$4^4=256$.

5.　$5^3=125$.

6.　$7^6=117,649$.

7.　$6^5=7776$.

如以2為底，求出下列各數之對數：

8.　16.

解：　$\because 16=2^4$,

$\therefore \log_2 16=4$.

9.　64

10.　8.

11.　1.

12.　$\frac{1}{2}$.

13.　$\frac{1}{32}$.

14.　$\frac{1}{128}$.

如以3作底，求出下列各數之對數：

15.　27.

解：　$\because 27=3^3$.

$\log_3 27=3$.

16.　243.

17.　729.

18.　1.

19.　$\frac{1}{9}$.

20　$\frac{1}{81}$

21.　$\frac{1}{3}$.

22.　$\frac{1}{27}$.

下述各式中，其底為何？

23.　$\log 9=2$.

解：　$\because 9=b^2$,

$b=3$,

$\therefore \log_3 9=2$.

24.　$\log 8=3$.

25.　$\log 121=2$.

26.　$\log 36=2$.

27.　$\log 27=3$.

28.　$\log 2=1$.

下列各題，書為方程式(1)之形狀：

29. $\log_2 4=2$.

30. $\log_3 9=2$.

31. $\log_5 125=3$.

32. $\log_9 81=2$

33. $\log_2 32=5$

34. $\log_7 343=3$.

35. $\log_{10} 1000=3$.

36. $\log_3 3=1$.

88. **對數演算法** 利用第87節公設所示法則，可證明對數上極有用之定理，於數學中計算有莫大之輔助．

定理 I 兩數乘積之對數，等於兩數各對數之和．

設 $\log_b a=x$,

及 $\log_b c=y$,

由第87節(1)及(2)， $b^x=a$,

及 $b^y=c$,

相乘(由第86節公設)，

$$b^{x+y}=a\cdot c,$$

又由(1)及(2)， $\log_b a\cdot c=x+y=\log_b a+\log_b c$

定理 II 某數n次乘方之對數，等於n倍該數之對數，

設 $\log_b a=x$,

或 $b=a$.

兩邊各作n次乘方， $(b^x)^n=b^{nx}=a^n$,

或 $\log_b a^n=nx^n=\log_b a$.

例如， $\log_{10} 100=2$ 因 $10^2=100$,

及 $\log_{10} 1000=3$ 因 $10^3=1000$,

由定理I. $\log_{10} 100,000=5$.

此實明顯事，因 $10^5=100,000$.

定理 III　二數之商之對數，等於二該數之對數差．

設　$\log_b a = x,$

及　$\log_b c = y,$

則　$b^x = a,$

及　$b^y = c.$

相除，　$b^{x-y} = \dfrac{a}{c},$

或　$\log_b \dfrac{a}{c} = x - y = \log_b a - \log_b c.$

定理 IV　一數之實數n次方根之對數，等於該數之對數以n除之．

設　$\log_b a = x,$

或　$b^x = a.$

開n次方，　$(b^x)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a}.$

或　$\log_b \sqrt[n]{a} = \dfrac{x}{n}$

習　　題

已知 $\log_{10}2 = \cdot 301, \log_{10}3 = \cdot 477, \log_{10}5 = \cdot 699$，求：

1.　$\log^* 15.$

解：　由定理I，

$$\log 15 = \log 3 + \log 5$$
$$= \cdot 477 + \cdot 699$$
$$= 1 \cdot 176.$$

2.　$\log 10.$

提示：$10 = 2 \cdot 5.$

3.　$\log 6.$

4.　$\log 30.$

5.　$\log 20.$

6.　$\log \frac{3}{2}.$

7.　$\log \sqrt{2}.$

8.　$\log \sqrt[3]{5}.$

9.　$\log 25$

10.　$\log(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{5^3}).$

11.　$\log(625\sqrt[4]{24}).$

12.　$\log(\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{6}).$

13.　$\log 1000.$

14.　$\log 1{,}000{,}000.$

15.　$\log 25{,}000.$

*對數中如以10爲底，如無特殊情形，常略而不書．

89　常對數或布里古斯對數　爲便於計算計，以10爲底之對數較善於以他數作底之對數，故通常所用對數，如無特殊情形，即以10爲底，而謂之常用對數　本書以下各章，均假定沿用常用對數．茲書若干較小之整數以10爲底之對數於下：

因　$10^5=100,000$則得$\log 100,000=5$.

$10^4=10,000$　　$\log 10,000=4$.

$10^3=1000$　　$\log 1000\ =3$.

$10^2=100$　　$\log 100\ =2$.

$10^1=10$　　$\log 10\ =1$.

$10^0=1$　　$\log\ 1=0$.

$10^{-1}=.1$　　$\log .1\ =-1$.

$10^{-2}=.01$　　$\log .01\ =-2$.

$10^{-3}=.001$　　$\log .001\ =-3$.

餘類推　　　　餘類推

由是假定x之愈大，logx之值亦愈大．且知一數居於10與100之間，其對數必居1與2之間，換言之，任意非恰巧爲10乘方之數，其對數必有一整數部分及一小數部分．

例如　　因　$10^3<3421<10^4$,

$\log 3421=3+$小數

因　$10^{-3}<.0023<10^{-2}$,

$\log .0023=-3+$小數.

定義　對數之整數部份謂之首數

對數之小數部份謂之尾數．

由第94頁上所載之表，可推知任何數之對數之首數如下

法則　大於1之數，其對數之首數爲正，而較原數小數點左之位數數目少1。

例如　235之對數首數爲2因235在100與1000之間；17.31之對數首數爲1，因17.31在10與100之間；1928.29之對數首數爲3，因1928.29在1000與10,000之間：

法則　小於1之數，其對數之首數爲負，而較原數小數點後與第一有效數字之前之零數數目多1.

例如　.03之對數首數爲－2；.0000765之對數首數爲－5；.372之對數首數爲－1.

學者須知小於1之數之對數，包含一負整數部份爲首數與一正小數部分爲尾數，欲避免混亂，當首數爲負時，可於其對數上加以10同時再減去10，例如對數爲－3.＋.4672，而書爲10－3.＋.4672－10，即7.4672－10如此書法。在開平方時，應用第88節定理IV須以2除一數之對數，方見其爲方便。蓋因對數－3.＋.4672中之尾數爲正，絕不能以2除－3.4672致使正負兩部混亂不淸，故以7.4672－10書之，此種混亂自然可以避免，而以2除7.4672－10結果爲3.7336－5，或寫爲8.7336－10．即實際此對數行除結果爲－2.＋.7336，其首數爲－2.

又對數爲－2.＋.7339時，亦常書爲$\bar{2}$.7336，此時僅表明首數爲負；餘仿此。

定理　數字相同其排列次序又相同之數，無論小數點如何，其對數中尾數恆相同。

例 題

求36.51與3651之對數.

解, 設 $10^x=36.51$ ……………(1)

則 $x=\log 36.51$

若方程式(1)兩邊以100乘之,則得

$$10^2 . 10^x=10^{2+x}=3651,$$

或 $$x+2=\log 3651$$

由此知兩數之對數,僅差別在指標上.

總而言之,倘有同樣有效數字,而其排列次序又同,僅此數較彼數大有10之倍數;其首數雖不同,而尾數常相同.

例如,若$\log 47120=4.6732$,則$\log 47.12=1.6732$,及 $\log .004712=7.6732-10$.

口 述 題

補出下列習題所缺之數:

1. $\log 3.76=.5752$; $\log 37.6=?$
2. $\log 12.5=1.0969$; $\log 1.25=?$
3. $\log 4.2=.6232$; $\log 42=?$
4. $\log .315=9.4983-10$; $\log 3.15=?$
5. $\log 172=2.2355$; $\log .172=?$
6. $\log 2250=3.3522$; $\log 2\frac{1}{4}=?$
7. $\log 15=1.1761$; $\log 1\frac{1}{2}=?$
8. $\log .00000723=4.8591-10$; $\log .723=?$
9. $\log .00181=7.2577-10$; $\log 18.1=?$
10. $\log 87.500.000=7.9420$; $\log 8750=?$
11. $\log 999=2.9996$; $\log .999=?$
12. $\log .101=9.0043-10$; $\log 1010=?$

習　題

設$\log 2=.3010$, $\log 3=.4771$, 及$\log 5=.6990$, 求：

1. $\log\sqrt{150}$.

解．$\log\sqrt{150}=\log\sqrt{3.5.10}=\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{2}\log 5+\frac{1}{2}\log 10$.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\log 3&=.2386\\ \tfrac{1}{2}\log 5&=.3495\\ \tfrac{1}{2}\log 10&=.5000\\ \hline \log\sqrt{150}&=1.0881\end{aligned}$$

2. $\log .6$.　　5. $\log(300)^5$,　　8. $\log(\frac{6}{5})^2$.

3. $\log 150$.　　6. $\log\frac{225}{4}$.　　9. $\log\frac{228}{38}$.

4. $\log(15)^3$.　　7. $\log\frac{3}{4}$.　　10. $\log\sqrt{144}$.

90. **對數表用法**　對數表中，僅載有某數之若干有效數字位數之尾數。本章對數表(98－99頁)載所有三位有效數字數之尾數。下節述一方法，可由此表以求四位有效數字數之尾數，故此表可稱四位數對數表，亦即用此表可將演算結果，眞確至第四位，但第五位數便不可靠，如有情形須至第五位，須另選對數表在此表中，每尾數前均有一小數點略而不書，應用時須先補出之。求三位數或三位以下之數之對數時，即可用下列

法則　應用第89節所述法則，先求出首數。

在N字下一行中，找出數之前兩位有效字，尾數即在此兩位數字列內。

在書頁上端，找出數之第三位有效數字，尾數即在此數字行中。如是行列相交處，即爲所求尾數。

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

對　數　表

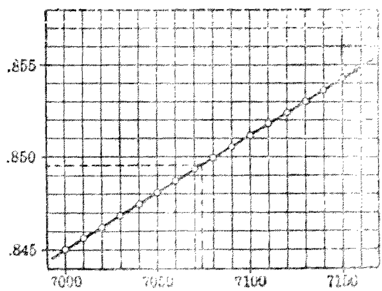
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

求下列各數之對數：

1. 2.	5. 21.3.	9. 3.14.	13. .000432.
2. 75.	6. 1.73.	10. .784.	14. .1.09
3. 133.	7. .245.	11. .0498.	15. .00000173.
4. 17.4.	8. .314.	12. .00991.	16. 73,400,000

91. **補插法** 三位數之對數可由 98－99 頁對數表直接檢出，前以述之。如求四位數之對數，須說明應用此表之求法。

試考究四位數7074,此數在7070與7080之間，由是知檢查表時，7074之尾數亦必居7070與7008之尾數之間。此問題亦即變爲試求7074之尾數較7070之尾數大若干。欲明白此項道理，可作由7000至7150間之數與其相當之尾數之圖象。此曲線可以右圖示之。



眞 數

由此圖象，知由此部份數所作之曲線近似一直綫。故可假定其上任何小段，例如居7070與7080之間，爲一直綫，絕無顯著之錯誤。

若作有此項假定，則可云居7070與7080中間之數，其尾數亦必居此兩數尾數之中間。仿此居由7070至7080之.4之數，卽7074,其尾數亦必居由7070之尾數至7080之尾數之.4.

由上研究結果，可推出補插法如下：

法則　在正當首數後併上前三位有效數字之尾數。

求出此三位數之尾數與較此三位數稍大之數之尾數之差（稱曰表差），以所求數內末尾所餘數字（數字前置一小數點）乘之。

將此乘積併於前三位數之對數右端，而捨去四位以下之數字。

補插法之原理，乃應用所假定對數之增加與數之增加成正比例。嚴格論之，此法非十分精確，唯第一數字大於1之數，由補插法所得之四位數，其錯誤不至發見於第四位數字，若第一數字小於2之數，錯誤當於第四位數字上可發生。

習　　題

求出下列各數之對數：

1.　45.283.

解：

$$\begin{array}{rl} \log 45.2 = & 1.6551 \\ & \underline{\quad\quad 8} \\ \log 45.283 = & 1.6559 \end{array} \qquad \text{表差，}\begin{array}{r} 10 \\ \underline{.83} \\ 8.3 \end{array}$$

2.　365.2.	8.　.5698.	14.　.004569.
3.　2.397.	9.　.2543.	15.　.0008637.
4.　32.58.	10.　8,888.	16.　3.1416.
5.　2084.	11.　75.647.	17.　241.86.
6.　53,768.	12.　.06738.	18.　34.385.
7.　30,060.	13.　3.7539.	19.　90.65.

20. 752.3×87.29.

解：
$$\log 752.3 = 2.8764$$
$$\log 87.29 = 1.9410.$$

應用第88節，定理I。
$$\log(752.3 \times 87.29) = 4.8174$$

21. 75.46×2.365.

22. 2.879×56.756.

23. 10.015×236.82.

24. $.0003795 \times 458.92$.

25. 5739×25.74.

26. 1.753×14.375.

27. $\dfrac{.02378}{25.378}$

解：
$$\log .02378 = 8.3762 - 10$$
$$\log 25.378 = 1.4044$$
$$6.9718 - 10$$

28. $\dfrac{245.37}{3.7859}$.

29. $\dfrac{365.78}{.67849}$.

30. $\dfrac{3.7859}{2.0463}$.

31. $\dfrac{.058947}{.038952}$.

32. $\dfrac{20894}{.5692}$.

33. $\dfrac{549.14}{415.76}$.

92. 真數　若能由一已知對數以求出相當眞數，則二數之積或商以及任何數之乘方或任何數之方根數不難求得。此種演算方法如下

法則　若尾數恰能於表中檢出，則所求眞數前兩位數字即與此尾數在同列內而同時居N字行中之數，其第三位數字則取書頁上端與此尾數同行之數字。

應用第89節法則，定小數點位置。

習　　題

求下各列眞數：

1. 2.7752.

解：　可尋得尾數.7752左對59列中，而上對6行內，故所求眞數之數字爲596. 又因首數爲2，故眞數有三位整數，即2.7752之相當數爲596.

2. 1.5502.　　6. 2.8751.*　　10. $\bar{3}$.9800.

3. 3.4082.　　7. $\bar{1}$.0414　　11. 1.1847.

4. .4698.　　8. 7.4843 − 10.　　12. 6.3424.

5. 9.6561 − 10.　　9. 3.5514 − 10.　　13. 5.3181.

93. 用補插法求真數　在對數表中，若一已知對數之尾數在他兩相隣尾數間，求眞數之法如下：

法則　視已知尾數所居某兩尾數之間，取此兩者中較小者，寫出，則得其三位數字。

從已知尾數內減去此較小者之尾數，而以表差除此差，要一位小數。

以所得之商併於前三位數字右端，然後應用第89節法則定小數點位置。

學者須知在對數演算時，當在對數上加一數同時更減去此數，其利益地方，當：

1. 由一較小對數中減去較大對數時。

2. 以一整數除一對數而首數不能恰巧除盡時。

習　題

求下列各眞數：

1. 2.7524.

解：　因尾數 .7524居尾數 .7520與尾數 .7528之間。又表差爲3.而尾數.7520所對之眞數爲565,又.7524 − .7520 = 4.由是$\frac{4}{8}$ = .5,故須將5併於 565 右端，即得5655.然首數爲2,故小數點左須有三位整數，即得2.7524之相當眞數爲565.5.

2. 2.6604,　　4. $\bar{1}$.7052.　　6: 5.8487.

3. 4.4864,　　5. $\bar{2}$.9318.　　7. 3173.

應用對數作下列演算：

8. $\dfrac{365\times 50.27}{7.394}$.

解：

$$\log 365 = 2.5623$$
$$\log 50.27 = 1.7013$$
$$4.2636$$
$$\log 7.394 = .8688$$
$$\log \text{結果} = 3.3948$$
$$\text{結果} = 2482.$$

9. $(3\frac{1}{2})^3$.

10. $(\frac{11}{52})^5$.

11. $(\frac{3869}{2795})^8$.

12. $(5\frac{7840}{58479})^{3.14}$.

13. $2387\div 5683$.

14. $8570\div 3487$.

15. $7369\div 0004672$.

16. $2479\div .003466$.

17. $\dfrac{6385\times 234.7}{538.3}$.

18. $\dfrac{784.5\times .03785}{35.78}$.

19. $\dfrac{2784\times .03278}{1.378}$.

20. $\sqrt[3]{\dfrac{28\times\sqrt{8753}}{1,275,000}}$.

解：

$$\log 28 = 1.4472$$
$$\tfrac{1}{2}\log 8753 = 1.9711$$
$$13.4183-10$$
$$\log 1,275,000 = 6.1055$$
$$3)\underline{27.3128-30}$$
$$\log\text{結果} = 9.1043-10$$
$$\text{減結果} = .1271.$$

在此問題作減法時，須由3內減去6,故將被減數(3.4183)加以10而減以10.又作除法時，因－10不能爲3整數除盡，故加以20而減以 0_2.使能整除之。

21. $\sqrt[4]{3}$.

22. $\sqrt{.05}$.

23. $\sqrt[5]{(.2784)^4}$.

24. $\sqrt[13]{26}$.

25. $(.37)^{\frac{3}{4}}$.

26. $(4.468)^{\frac{1}{4}}$.

27. $\frac{2573}{5639}\sqrt[4]{376}$.

2 . $\sqrt[3]{.0046}$.

29. 圓之面積公式爲$A=\pi r^2$, 此處以A 代面積， r 代半徑，π之值爲3.1416.若$r=4.763$寸，試應用對數演算以求面積。

30. 應用問題29中公式,若面積=734.9方尺。試求半徑。

31. 球之體積公式爲 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，此處V＝面積，r＝半徑，$\pi=3.14161$若r＝75.48尺，求其體積。

32. 用上題公式，若體積＝127.5立方寸，求球之半徑。

33. 落下物體，受重力支配，其經過距離公式爲$S=\frac{1}{2}gt^2$，此處S＝經過距離尺數，g＝重力等加速數(32每秒秒呎)，t＝經過時間秒數。試應用對數演算，求出自由落下100呎之石子之時間；又落下500呎之時間；又落下1哩之時間。

34. 自由落下物體，其速度公式爲V＝gt，此處V＝每秒呎數；＝32每秒每秒呎，t＝經過時間秒數。用此公式及問題33之公式，推出一物體速度，若此物體落下1000呎；又落下20尺；又落下1哩。

35. 汽車空氣阻力，約可表爲公式

$$R=.0043V^2A,$$

此處R＝汽車抵抗力磅數，V＝汽車每時速度哩數，A＝汽車大小常數，其普通值約爲25應用此公式，試計算汽車每時行30哩之抵抗力。又若空氣之阻力爲100磅，汽車速度若干？150磅時，汽車速度若干？

36. 抵抗空氣阻力，其曳汽車之工率，約可表爲公式

$$HP=.0000112V^3A,$$

此處HP＝工率之碼力數，V＝每時速度哩數，A＝常數在普通條件值約等於25.問需用若干工率每時可拉汽車行50哩？又行40哩時？又問以30馬力拉之，其速度若干？

37. 某水槽上一圓孔噴水速度，約表爲公式

$$V=\sqrt{2gh},$$

此處V表每秒速度呎數，g 爲重力加速數，h 爲漕中水面距噴水孔之高。若$h=10$呎，求V之値。又若$V=15$每秒呎數，求h之値。

49. **指數方程式** 若方程式之變數只含於指數內，稱曰指數方程式可利用對數解之，卽根據下式

$$\log a^x = x\log a.$$

習 題

解下列方程式及方程式組：

1. $10^{2x+3}=5.$

解： 取兩邊之對數則得

$$(2x+3)\log 10=\log 5,$$

因$\log 10=1$,故$x=\dfrac{\log 5-3}{2}=\dfrac{.6990-3}{2}=-1.1505.$

2. $5^x=3.$

3. $7^y=24.$

4. $2^{x-1}=13.$

5. $6^{2x-3}=9.$

6. $3^{x-1}=4^{x+1}.$

7. $12^{3x+1}=7^{x-1}.$

8. $3^x\cdot 4^y=7,$
   $x+y=8.$

9. $5^y\cdot 4^x=33,$
   $x-y=15.$

10. $12^{3x-2}\cdot 12^{2y-3}=12^9,$
    $3x+2y=10.$

11. $3^{x-1}\cdot 4^{y+1}=2,$
    $5^{x-1}\cdot 2^{y-1}=6.$

12. $\sqrt[3]{5^{7x-1}}\cdot\sqrt{5^{2y+3}}=25,$
    $\sqrt{7^{2x-3}}\cdot\sqrt[3]{7^{7y+1}}=13.$

95. **複利息** 若有本金2000元，以年利率4%生息，則一年可得利息2000元(.04)=30元，又一年之終，本利和爲2030元。

設P表本金圓數。

又設r表年利率。

則$P\cdot r$=每年P所生利息，又

$$P+Pr=P(1+r)$$

表一年終之本利和。

仿此，$P(1+r)r$為第二年所生利息，故

$$P(1+r)r+P(1+r)=P(1+r)^2$$

為二年終之本利和。

普通

$$A=P(1+r)^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

為n年終之本利和，應用(1)式，若 P,r,n 為已知數，A 之值卽可求出。又若取兩邊之對數，則

$$\log A=\log P+n\log(1+r),$$

或

$$n=\frac{\log A-\log P}{\log(1+r)}\cdots\cdots\cdots(2)$$

用(2)式，若 A,P,r 為已知數，卽可求 n 之值。

若為每半年作複利計算，則第一半年終之利息為$P.\frac{r}{2}$，第一全年終本利合為$P\left(\frac{r}{2}+1\right)$.由此推之，以半年作複利，則累積n年終之本利和為

$$A=P\left(\frac{r}{2}+1\right)^{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

仿此，

$$n=\frac{\log A+\log P}{2\log\left(\frac{r}{2}+1\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

若每年作k次複利計算，則n年終之本利和為

$$A=P\left(\frac{r}{k}+1\right)^{kn}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

與

$$n=\frac{\log A-\log P}{k\log\left(\frac{r}{k}+1\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

問題

下列四題，用四位對數表計算便不真確。普通乘方數愈大，愈不真確。

1. 本金1500元，利率爲 $4\frac{1}{4}\%$，每年以四次複利計，問10年終之本利和若干？

解：

$$A=P\left(\frac{r}{4}+1\right)^{4n}.$$

$$P=1500,\ r=.0425,\ n=10.$$

故

$$A=1500(1.010625)^{40}.$$

$$\log 1500=3.1761$$

$$40\log 1.010625=\underline{.1840}$$

$$\log A=3.3601$$

$$\therefore\ A=2292元,$$

2. 本金 1000元，利率 3%，每半年複利一次，問須經若干年，可獲本利和2500元。

解：

$$n=\frac{\log A-\log P}{2\log\left(\frac{r}{2}+1\right)}.$$

$$A=2500,\ P=1000,\ r=.03.$$

$$n=\frac{3.3979-3}{2(.0085)}=\frac{.3979}{.0130}=30.607\text{ 年},$$

$$.607年=7.284月$$

$$.284月=8.52日$$

$$\therefore\ n=30年7月8.52日。$$

3. 利率爲7%，每年複利一次，5年終本利和爲3000元，問本金幾何？

4. 1元本金，以4%利率每年複利一次，問100年終本利和若干？

5. 本金500元，利率爲 6%，求10年終之本利和，其複利算法分(a)每年一次；(b)每年兩次；(c)每年四次。

6. 問經若干年可倍本金 2000元，其利率爲 5%，複利算法分(a)年複利；(b)半年複利；(c)兩年複利。

7. 若干本金，以3%利率，年複利一次，經25年後，可獲本利和5000元。

8. 若干本金，年利率4%，每年爲一期，可當本金25,300元，年利率6%，每半年爲一期，二者之時期均爲32年。

9. 若以某項本金，年利率$4\frac{1}{2}$%，每年複利一次，較此項本金，年利率5%亦每年複利一次，少135元，設時期均爲12年，試求出本金。

10. 本金100元，年利率15%，每年複利一次，時期爲5年。或年利率5%，亦每年複利一次，而時期爲15年，問何種複利法本利和爲大，及相差幾何？

11. 兩宗銀，總數爲58,125元，均年利率$4\frac{3}{4}$%，每半年複利一次，待15年終，兩者本利和相差15,600元。試求各原銀數，

12. 以何種利率，可將本金增爲4倍，若每年複利四次，期限爲15年？

13. 以何種利率，可將本金增爲2倍，若每年複利一次，期限爲20年？

14. 本金50,000元，年利率$4\frac{1}{2}$%，每月複利一次，問須經若干時期，可變爲70,000元？

15. 在1626年，和蘭人(Dutch)以24元購得滿哈坦島，以蓄貨物。設將此款存儲蓄銀行，年利率4%，每年複利一次，問至1926年，本利和合計有若干？

16. 各以10元之款，年利率4%，生息一年，若一爲每週複利一次，一爲每月複利一次，問兩者年終本利和相差若干？

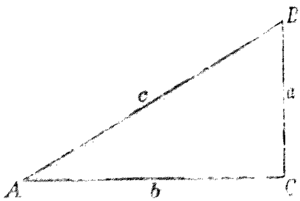
17. 問須經若干年，可使本金增爲十倍，若年利率爲5%複利算法，每年一次。

18. 同時有兩宗銀生息，一爲本金5000元，年利率4%，每年複利一次。又一爲本金6000元，年利率3%，亦每年複利一次，問須經若干年後，前者本利合計可等于後者本利合計。

19. 本銀4000元，年利率$5\frac{1}{2}$%，每年複利四次，待本利合計增爲原銀之2倍時，然後年利率$5\frac{3}{4}$%，而每年複利一次，問20年終之本利和若干？

20. 問須各經若干時間，可將本金數增加1倍，其利率均為4%其複利算法分(a)年複利；(b)半年複利；(c)季複利；(d)月複利；(e)週複利。又設複利算法如此推演，能否在15年內，

96. 三角法 在測量學，天文學及多數應用科學上，必需解明三角形問題，一三角形含有六部份，即三個角三個邊是也，在此六部份中，若有三部份，其中至少包有一邊，能為已知或可測知，則其餘部份即可應用三角法計算得之。欲闡明三角法理論，其最易事情，應自直角三角形研究始



如上所述，欲於三角法從事研究，可將直角三角形各邊所作之比定名如下：

設ABC為任意直角形，C為直角。

$\angle$A之正弦 (Sine) $=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{弦}}$.

$\angle$A之餘弦(Cosine)$=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\text{隣邊}}{\text{弦}}$.

$\angle$A之正切(Tangent)$=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{隣邊}}$.

$\angle$A之餘切(Cotangent)$=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\text{隣邊}}{\text{對邊}}$.

此定義可省寫如下：

$$\text{Sin}A=\frac{a}{c};\ \text{Cos}A=\frac{b}{c};\ \tan A=\frac{a}{b};\ \text{Cot}A=\frac{b}{a}.$$

解直角三角形，若其邊為數僅含有兩位時，普通即藉用三角函數表解之。若為較大之數，可用三角函數對數表解之，詳見於下節。

習　題

用98—99頁對數表，尋出下列函數之對數，並用112－113頁三角數對數表，證明其結果：

1. $\sin 34^\circ = .5592.$

解：　由對數表：$\log .5592 = 9.7476-10.$

由三角函數對數表，$\log \sin 34^\circ = 9.7476-10.$

2. $\cos 23^\circ = .9205.$
3. $\sin 15^\circ = .2588.$
4. $\tan 69^\circ = 3.6051.$
5. $\cos 46^\circ = .6947.$
6. $\cot 82^\circ = .1405.$
7. $\tan 53^\circ = 1.3270.$
8. $\tan 29^\circ = .5543.$
9. $\sin 75^\circ = .9659.$
10. $\cot 36^\circ = 1.3764.$
11. $\cos 62^\circ = .4695.$
12. $\cot 87^\circ = .0524.$
13. $\cos 58^\circ = .7380.$

9.　**三角函數之對數**　因解三角形及應用三角法時，常要除演算；故應用三角函數對數表，較爲省事。其補插法亦與應用角函數表時完全相同，其45°以上之角，角度與函數名稱載在表右及表下邊．

最當注意者，用112－113頁表時，由0°至90°中，各角之正弦及弦之值，除Cos0°及Sin90°外，均小於1；45°而以下之角其正切之，以及45°以上之角其餘切之值，亦均小於1.故此等函數之對數必負數，由是表上每數後須減以10，但爲省事計，此－10不載於表，者須知之．

三角函數對數表

°	SIN	COS	TAN	COT	′	°	SIN	COS	TAN	COT	′
0°	−∞	10.0000	−∞	∞	90°	11°	9.2806	9.9919	9.2887	0.7113	79°
15′	7.6398	.0000	7.6398	2.3602	45′	15′	.2902	.9916	.2987	.7013	45′
30′	.9408	.0000	.9409	.0591	30′	30′	.2997	.9912	.3085	.6915	30′
45′	8.1169	.0000	8.1170	1.8830	15′	45′	.3089	.9908	.3181	.6819	15′
1°	8.2419	9.9999	8.2419	1.7581	89°	12°	9.3179	9.9904	9.3275	0.6725	78°
15′	.3388	.9999	.3389	.6611	45′	15′	.3267	.9900	.3367	.6633	45′
30′	.4179	.9999	.4181	.5819	30′	30′	.3353	.9896	.3458	.6542	30′
45′	.4848	.9998	.4851	.5149	15′	45′	.3438	.9892	.3546	.6454	15′
2°	8.5428	9.9997	8.5431	1.4569	88°	13°	9.3521	9.9887	9.3634	0.6366	77°
15′	.5939	.9997	.5943	.4057	45′	15′	.3602	.9883	.3719	.6281	45′
30′	.6397	.9996	.6401	.3599	30′	30′	.3682	.9878	.3804	.6196	30′
45′	.6810	.9995	.6815	.3185	15′	45′	.3760	.9874	.3886	.6114	15′
3°	8.7188	9.9994	8.7194	1.2806	87°	14°	9.3837	9.9869	9.3968	0.6032	76°
15′	.7535	.9993	.7542	.2458	45′	15′	.3912	.9864	.4048	.5952	45′
30′	.7857	.9992	.7865	.2135	30′	30′	.3986	.9859	.4127	.5873	30′
45′	.8156	.9991	.8165	.1835	15′	45′	.4059	.9855	.4204	.5796	15′
4°	8.8436	9.9989	8.8446	1.1554	86°	15°	9.4130	9.9849	9.4281	0.5719	75°
15′	.8699	.9988	.8711	.1289	45′	15′	.4200	.9844	.4356	.5644	45′
30′	.8946	.9987	.8960	.1040	30′	30′	.4269	.9839	.4430	.5570	30′
45′	.9181	.9985	.9196	.0804	15′	45′	.4337	.9834	.4503	.5497	15′
5°	8.9403	9.9983	8.9420	1.0580	85°	16°	9.4403	9.9828	9.4575	0.5425	74°
15′	.9614	.9982	.9633	.0367	45′	15′	.4469	.9823	.4646	.5354	45′
30′	.9816	.9980	.9836	.0164	30′	30′	.4533	.9817	.4716	.5284	30′
45′	9.0008	.9978	9.0030	0.9970	15′	45′	.4597	.9812	.4785	.5215	15′
6°	9.0192	9.9976	9.0216	0.9784	84°	17°	9.4659	9.9806	9.4853	0.5147	73°
15′	.0369	.9974	.0395	.9605	45′	15′	.4721	.9800	.4921	.5079	45′
30′	.0539	.9972	.0567	.9433	30′	30′	.4781	.9794	.4987	.5013	30′
45′	.0702	.9970	.0732	.9268	15′	45′	.4841	.9788	.5053	.4947	15′
7°	9.0859	9.9968	9.0891	0.9109	83°	18°	9.4900	9.9782	9.5118	0.4882	72°
15′	.1011	.9965	.1045	.8955	45′	15′	.4958	.9776	.5182	.4818	45′
30′	.1157	.9963	.1194	.8806	30′	30′	.5015	.9770	.5245	.4755	30′
45′	.1299	.9960	.1338	.8662	15′	45′	.5071	.9763	.5308	.4692	15′
8°	9.1436	9.9958	9.1478	0.8522	82°	19°	9.5126	9.9757	9.5370	0.4630	71°
15′	.1568	.9955	.1614	.8387	45′	15′	.5181	.9750	.5431	.4569	45′
30′	.1697	.9952	.1745	.8255	30′	30′	.5235	.9743	.5491	.4509	30′
45′	.1822	.9949	.1873	.8127	15′	45′	.5288	.9737	.5551	.4449	15′
9°	9.1943	9.9946	9.1997	0.8003	81°	20°	9.5341	9.9730	9.5611	0.4389	70°
15′	.2061	.9943	.2118	.7882	45′	15′	.5392	.9723	.5669	.4331	45′
30′	.2176	.9940	.2236	.7764	30′	30′	.5443	.9716	.5727	.4273	30′
45′	.2288	.9937	.2351	.7649	15′	45′	.5494	.9709	.5785	.4215	15′
10°	9.2397	9.9934	9.2463	0.7537	80°	21°	9.5543	9.9702	9.5842	0.4158	69°
15′	.2503	.9930	.2573	.7427	45′	15′	.5592	.9694	.5898	.4102	45′
30′	.2605	.9927	.2680	.7320	30′	30′	.5641	.9687	.5954	.4046	30′
45′	.2707	.9923	.2784	.7216	15′	45′	.5689	.9679	.6009	.3991	15′
′	COS	SIN	COT	TAN	°		COS	SIN	COT	TAN	°

三角函數對數表

°	SIN	COS	TAN	COT		°	SIN	COS	TAN	COT	
22°	9.5736	9.9672	9.6064	0.3936	68°	34°	9.7476	9.9186	9.8290	0.1710	56°
15′	.5782	.9664	.6118	.3882	45′	15′	.7504	.9173	.8331	.1669	45′
30′	.5828	.9656	.6172	.3828	30′	30′	.7531	.9160	.8371	.1629	30′
45′	.5874	.9648	.6226	.3774	15′	45′	.7559	.9147	.8412	.1588	15′
23°	9.5919	9.9640	9.6279	0.3721	67°	35°	9.7586	9.9134	9.8452	0.1548	55°
15′	.5963	.9632	.6331	.3669	45′	15′	.7613	.9120	.8493	.1507	45′
30′	.6007	.9624	.6383	.3617	30′	30′	.7640	.9107	.8533	.1467	30′
45′	.6050	.9616	.6435	.3565	15′	45′	.7666	.9093	.8573	.1427	15′
24°	9.6093	9.9607	9.6486	0.3514	66°	36°	9.7692	9.9080	9.8613	0.1387	54°
15′	.6135	.9599	.6537	.3463	45′	15′	.7718	.9066	.8652	.1348	45′
30′	.6177	.9590	.6587	.3413	30′	30′	.7744	.9052	.8692	.1308	30′
45′	.6219	.9582	.6637	.3363	15′	45′	.7769	.9038	.8732	.1268	15′
25°	9.6259	9.9573	9.6687	0.3313	65°	37°	9.7795	9.9023	9.8771	0.1229	53°
15′	.6300	.9564	.6736	.3264	45′	15′	.7820	.9009	.8811	.1189	45′
30′	.6340	.9555	.6785	.3215	30′	30′	.7844	.8995	.8850	.1150	30′
45′	.6379	.9546	.6834	.3166	15′	45′	.7869	.8980	.8889	.1111	15′
26°	9.6418	9.9537	9.6882	0.3118	64°	38°	9.7893	9.8965	9.8928	0.1072	52°
15′	.6457	.9527	.6930	.3070	45′	15′	.7918	.8950	.8967	.1033	45′
30′	.6495	.9518	.6977	.3023	30′	30′	.7941	.8935	.9006	.0994	30′
45′	.6533	.9508	.7025	.2975	15′	45′	.7965	.8920	.9045	.0955	15′
27°	9.6570	9.9499	9.7072	0.2928	63°	39°	9.7989	9.8905	9.9084	0.0916	51°
15′	.6607	.9489	.7118	.2882	45′	15′	.8012	.8890	.9122	.0878	45′
30′	.6644	.9479	.7165	.2835	30′	30′	.8035	.8874	.9161	.0839	30′
45′	.6680	.9469	.7211	.2789	15′	45′	.8058	.8858	.9200	.0800	15′
28°	9.6716	9.9459	9.7257	0.2743	62°	40°	9.8081	9.8843	9.9238	0.0762	50°
15′	.6752	.9449	.7302	.2698	45′	15′	.8103	.8827	.9277	.0723	45′
30′	.6787	.9439	.7348	.2652	30′	30′	.8125	.8810	.9315	.0685	30′
45′	.6821	.9429	.7393	.2607	15′	45′	.8148	.8794	.9353	.0647	15′
29°	9.6856	9.9418	9.7438	0.2562	61°	41°	9.8169	9.8778	9.9392	0.0608	49°
15′	.6890	.9408	.7482	.2518	45′	15′	.8191	.8761	.9430	.0570	45′
30′	.6923	.9397	.7526	.2474	30′	30′	.8213	.8745	.9468	.0532	30′
45′	.6957	.9386	.7571	.2429	15′	45′	.8234	.8728	.9506	.0494	15′
30°	9.6990	9.9375	9.7614	0.2386	60°	42°	9.8255	9.8711	9.9544	0.0456	48°
15′	.7022	.9364	.7658	.2342	45′	15′	.8276	.8694	.9582	.0418	45′
30′	.7055	.9353	.7701	.2299	30′	30′	.8297	.8676	.9621	.0379	30′
45′	.7087	.9342	.7745	.2255	15′	45′	.8317	.8659	.9659	.0341	15′
31°	9.7118	9.9331	9.7788	0.2212	59°	43°	9.8338	9.8641	9.9697	0.0303	47°
15′	.7150	.9319	.7831	.2169	45′	15′	.8358	.8624	.9735	.0265	45′
30′	.7181	.9308	.7873	.2127	30′	30′	.8378	.8606	.9772	.0228	30′
45′	.7212	.9296	.7916	.2084	15′	45′	.8398	.8588	.9810	.0190	15′
32°	9.7242	9.9284	9.7958	0.2042	58°	44°	9.8418	9.8569	9.9848	0.0152	46°
15′	.7272	.9272	.8000	.2000	45′	15′	.8437	.8551	.9886	.0114	45′
30′	.7302	.9260	.8042	.1958	30′	30′	.8457	.8532	.9924	.0076	30′
45′	.7332	.9248	.8084	.1916	15′	45′	.8476	.8514	.9962	.0038	15′
33°	9.7361	9.9236	9.8125	0.1875	57°	45°	9.8495	9.8495	0.0000	0.0000	45°
15′	.7390	.9224	.8167	.1833	45′						
30′	.7419	.9211	.8208	.1792	30′						
45′	.7447	.9198	.8249	.1751	15′						
	COS	SIN	COT	TAN	°		COS	SIN	COT	TAN	°

又45°以上之角，其正切之値，以及45°以下之角，其餘切之値，均大於1.故對數爲正，在表內全截出之。

由是可將以上所述之結果如下：

三角函數對數表中，除表上端書有Cot之行以外，所有對數均應减以10爲不言而喻之事。

習　　題

計算出下列直角三角形所未知部份：

1. $a=15,\ B=35°.$

解：
$$\tan B=\frac{b}{a},\text{or } b=a\tan B.$$

$\log b=\log a+\log\tan B$

1. $=1.1761+9.8452-10$

$=11.0213-10.$

$=1.0213.$

$b=10.50.$

$\log c=\log a-\log\sin A$

$=1.176-9.9134+10$

$=1.2627.$

$c=18.31.$

$A=55°.$

2. $a=2, B=4°$
3. $A=40°, c=12.$
4. $B=46°, b=5,$
5. $A=18°, b=13.5.$
6. $B=79°, c=18.2.$
7. $B=54°, a=21.3.$
8. $a=103.6. A=84°.$
9. $A=34°15', b=45.$
10. $B=40°38', c=23.$
11. $A=39°52', a=9.32.$
12. $B=12°5', a=7.35.$
13. $B=2°1', c=108.73$

14. 距山四里之處，視此山頂，其至山頂之視線與地平線成3°17′之角，問此山較此視察點高若干？

15. 1呎長之竿，在1000呎之外所對之角有若干度，其結果試以度分制表之。

16. 有雲一朵，知距一觀察點5哩。若至雲上之視線與地平線成38°46′之角，試測此雲之高度？

17. 在某時刻，太陽仰角爲43°10′.問同時刻高525呎之建築物，其射14.影長若干？

第九章

二次方程式

98. 定義 一變値二次方程式之普通式爲

$$ax^2+bx+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處 a,b,c 表有理數，且 $a\neq 0$.x 之任意二次方程式，由移項及化簡均可化爲此式。

例如，若 $b=0$，則此方程式化爲 $ax^2+c=0$. 又稱爲純二次方程式。

99. 用分因法解二次方程式 求二次方程式之根名曰解二次方程式。卽求出一數(在原二次方程式之係數爲文字時，卽求出包含係數中文字之式)能適合此二次方程式。

若方程式左邊可分解因式，則用分因法，此爲一最簡之法，且可說明方程式根之性質及意義。

例題

解方程式 $x^2+5x-14=0$.

解： 分解方程式左邊因式，

$$(x+7)(x-2)=0.$$

因解方程式之目的，卽求出數用以代方程式之變値，可使之適合。又零以任何數乘之，其積爲必零(第4頁)，故x之任何値如能使一因式爲零，則全式必爲零矣。例如，若 $x=2$，則方程式因式爲

$$(2+7)(2-2)=(2+7)0=0.$$

故2適合於方程式。又若 $x=-7$，他一因式亦變爲 0，則方程式化爲恒等式

$$(-7+7)(-7-2)=0(-7-2)=0.$$

由是2與−7均爲方程式之根。

由上所述方法，可得下之

法則 將方程式各項皆移至左邊．

分解左邊爲一次因式．

使各因式爲零之値，卽爲方程式之根．

習 題

解下列方程式，並核算其結果：

1. $x^2+5x+6=0.$
2. $x^2+x-6=0.$
3. $x^2+2x+1=0.$
4. $6x^2-x=12.$
5. $6x^2+17x=14.$
6. $6x^2+17x=3.$
7. $4x^2+68x=111.$
8. $7x^2-33x=10.$
9. $3x^2+4x+1=0$
10. $9x^2-17x-2=0.$
11. $x^2-ax=2a^2.$
12. $x^2-5ax+6a^2=0.$
13. $a^2x^2-4abx=5b^2.$
14. $(x+2)^2-(x-3)^2=0.$
15. $(x+5(^2-(x+2)^2=0.$
16. $(x+a)^2-(x+2a)^2=0.$
17. $(3x-2)(x+1)-(x-1)(2x-3)=2.$
18. $(x+1)(x-1)-(2x+3)(7x-25)=-236.$
19. $(x-a)(x+2a)-(x-2a)(x+a)=2a.$
20. $(x+2a)(x-2a)+(2x-a)(2x+a)=20-5a^2$

100. 應用完全平方法解二次方程式 此法之要点，卽將二次方程式含變値之邊，變爲完全平方形狀，換言之，卽變爲

$$x^2+2Ax+A^2.$$

例 題

試解方程式， $x^2+2x-15=0.$

解： 移項， $x^2+2x=15,$

若將方程式兩邊加1，則左邊卽變爲完全平方．

$$x^2+2x+1=16,$$

或 $$(x+1)^2=4^2.$$

兩邊開平方，

$$x+1=\pm 4.$$

即 $$x=3.\text{或}-5.$$

核算：

$$9+6-15=0.$$

$$25-10-15=0$$

由上所述方法，可總結如下

法則 寫方程式爲$ax^2+bx+c=0$.

移常數項於方程式之右邊。

以x^2之係數除方程式之兩邊。

加x之半係數之平方數於方程式兩邊，可使方程式左邊爲完全平方。

重寫方程式，使左邊表爲兩項平方式，右邊化爲最簡形。

兩邊開平方，在右邊須用±.號

移常數項，使x單獨存於左邊，如是取用右邊正號或負號，可求出方程式兩根。

習 題

解下列方程式，並核算其結果：

1. $x^2+5x-6=0.$
2. $x^2-4x-5=0.$
3. $x^2+x-1=0.$
4. $x^2-\frac{2}{3}x+3=0.$
5. $x^2-\frac{1}{2}x=2.$
6. $x^2-\frac{3}{2}x-1=0.$
7. $15x^2-17x+4=0.$
8. $6x+7x-5=0.$
9. $33x^2+25x=-2.$
10. $91x^2+120x-91=0.$
11. $3x^2-28x-55=0.$
12. $3x^2-2x=1.$
13. $4x(5x+1)+2(7x+2)=0.$
14. $7x^2+9x-610=0.$

15. $x^2+2x=4$.

16. $3x^2+4x-2=0$.

17. $9x^2+9x-4=0$.

18. $11x^2-9x+3=0$.

19. $x^2-5x+2=0$.

20. $23x^2+13x-7=0$.

21. $ax^2+bx+c=0$.

解： 移常數項c,則得

$$ax^2+bx=-c.$$

兩邊以a除之， $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

兩邊加以$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$， $$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

或 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

兩邊開平方， $$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

或 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

22. $x^2+mx-p=0$.

23. $3x^2+2ax-5a^2=0$.

24. $px^2+x-1=0$.

25. $ay^2+by-c=0$.

26. $my^2-ny+1=0$.

27. $bx^2+cx+3=0$.

28. $m^2y+my^2+mn+ny=0$.

29. $6m^2+bnx=2b^2x^2$.

30. $3x^2=-2k^2-3kx\sqrt{3}$.

31. $(2x+c)^2=2x-c$.

101. 用公式解二次方程式 在上之習題 21 內已知普通二次方程式，$ax^2+bx+c=0$,之根爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ldots\ldots\ldots(F)$$

此(F)式，可用以解一切二次方程式$ax^2+bx+c=0$.此處 a,b,c 可代表數，或非x之字母或二項式及任何代數式。

習　　題

解下列方程式，並核算其結果：

1. $3x^2-2x+1=0.$

解：$\because a=3, b=-2, c=1.$

故
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot3\cdot1}}{6}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{4-12}}{6}$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{-2}}{3}$$

核算。

$$3\left(\frac{1\pm2\sqrt{-2}-2}{9}\right)-2\left(\frac{1\pm\sqrt{-2}}{3}\right)+1=-\frac{1}{3}\pm\frac{2\sqrt{-2}}{3}-\frac{2}{3}\mp\frac{2\sqrt{-2}}{3}+1=0$$

2. $x^2-2x-17=0.$
3. $25x^2-10x-1=0.$
4. $6x^2+7x-3=0.$
5. $39x^2-83x=56.$
6. $2x^2+5x=3.$
7. $x^2-2x+2=0.$
8. $7x^2-13x-1=0.$
9. $2x^2+3x+4=0.$
10. $x^2-7x+2=0.$
11. $x^2-x-1=0.$
12. $2x^2+x-9=0.$
13. $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x-1=0.$

102. 似二次方程式　任何方程式，若可表爲三項式而一項爲常數，他二項含未知數(或爲視作未知數之式)，且二含未知數項中未知數之指數一項爲他一項之2倍；則爲似二次方程式。

例如$y-2\sqrt{y}+5=0, x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{4}}-12=0, x-1+\sqrt{x-1}+25=0$均爲似二次方程式，在最末方程式，以$(x-1)$當作未知數。

爲便利計，在似二次方程式內，其視作未知數之多項式可用單一文字代之。

習　　題

解下列方程式，並核算其結果：

1. $x-\sqrt{x}-12=0.$

解：設$\sqrt{x}=y.$

則　$y^2-y-12=0.$

故　$(y-4)(y+3)=0,$

即　$y=4$或$-3,$

$\therefore\sqrt{x}=4$或$-3.$

即　$x=16$或$9.$

核算：

$16-\sqrt{16}-12=0.$

$9-\sqrt{9}-12\neq 0.$

故根9可棄之。

2. $x-2-12\sqrt{x-2}=-35.$

解：設$\sqrt{x-2}=y.$

則　$y^2-12y+35=0.$

故　$(y-7)(y-5)=0,$

即　$y=7,$ 或$5.$

$\therefore\ \sqrt{x-2}=7$，或$5.$

$x-2=49$，或$25.$

即　$x=51$，或$27.$

核算：

$51-2-12\sqrt{51-2}=-35.$

$27-2-12\sqrt{27-2}=-35.$

3. $x+2x^{\frac{1}{2}}+1=0.$

4. $x-2x^{\frac{1}{2}}+1=0.$

5. $3y+\sqrt{y}=2.$

6. $x-6x^{-1}=1.$

7. $3x^{\frac{3}{2}}+8x+4x^{\frac{1}{2}}=0.$

提示：以$x^{\frac{1}{2}}$除之，惟此因式須與根$x=0$相當。

8. $3x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-3=0.$

9. $3x^4+10x^2+8=0.$

10. $2x+3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}-\ =0.$

11. $\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}-4=0.$

12. $ax^{2b}+bx^b+c=0.$

13. $2x^6-3x^3+1=0.$

14. $25x^{12}+20x^6-5=0.$

15. $x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{4}=0.$

16. $9x^{\frac{4}{3}}+6x^{\frac{2}{3}}+4=0.$

17. $3x^2-2x+2-5\sqrt{3x^2-2x+2}+6=0.$

18. $2x^4+x^2=15.$

19. $x^6+2x^3-35=0.$

20. $x^8-21x^4-310=0.$

21. $x+10\sqrt{x}+21=0.$

22. $2x^2-3x^{\frac{6}{5}}-9x^{\frac{2}{5}}=0.$

23. $3(\sqrt{x}+1)^2-12=5(\sqrt{x}+1).$

24. $(x^2-3)(x^2+1)=5.$

25. $(x^2-1)^2+(x^2+1)=74.$

26. $(x^{\frac{1}{3}}-1)^2+x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{3}}.$

27. $(x^{\frac{1}{2}}+2)^2+x=10x^{\frac{1}{2}}.$

28. $(x^{\frac{1}{3}}+2)(x^{\frac{1}{3}}-3)=-4.$

29. $(x+3)^3-(x+2)^3=1.$

30. $(3x^2-5)^2-(x^2-1)^2=4.$

31. $x^2+x-\sqrt{x^2+x+1}=5.$

32. $(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}.$

33. $8(8x-5)^3+5(5-8x)^6=85.$

34. $(7x+1)^2+7(7x+1)=-6.$

35. $x^4-4(a+b)x^2+16(a-b)^2=0.$

36. $6-5\sqrt{x-1}=6(x-1).$

37. $(2x^2+4x-3)^2+2x^2+4x=9.$

38. $(x^2-x+2)^2+(x-3)(x+2)=64.$

39. $2x^2=9x+3\sqrt{2x^2-9x+4}-4.$

40. $2(x-4)^{\frac{2}{3}}+4(x-4)^{-\frac{2}{3}}=9.$

41. $x^2+\dfrac{2}{x^2}=3.$

42. $\dfrac{x+2}{x-2}=x-1.$

43. $x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{4}{9}.$

44. $a=x^2+\left(\dfrac{b}{x}\right)^2+b.$

45. $\sqrt{x+3}=\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}.$

46. $2+x-\dfrac{2x^2}{\frac{1}{2}(2+2\sqrt{1+x})^2}=6$

47. $3-9x+\dfrac{(3-9x)^2}{36}=-5.$

48. $(x^2+2)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2+2}}=4(x^2+2).$

49. $x^2-3x+1+(x+2)(x-5)=47.$

50. $(2x+3)^2+3(2x+3)-10=0.$

103. 用二次方程式解問題

第55節之譯問題爲代數記號，此處仍適用之，須注意者，每種解答，均應加以審察，蓋因問題暗中常有限制故也。此種情形，須審常情，例如以未知數表人數，而得分數解答，顯然爲不合理，當捨去。如若此種問題按理解之，只有此種結果，即問題自身矛盾矣。又如求數目中數字，而得負數解答，亦不得謂爲合理。至於虛數或複虛數(第178頁)解答，均表問題中不能有之事。

問　題

1. 某數之$\frac{1}{3}$與其$\frac{1}{7}$之乘積爲2100.試求此數。

2. 兩數之乘積爲5000.若第一數較75所少適等於第二數較75所多，試求此兩數。

3. 兩數平方根之和爲$\sqrt{30}$若一數爲他數之4倍，試求此二數。

4. 某賣菓者，其每打香蕉賣若干分之數恰爲香蕉全數$\frac{1}{4}$.若共售洋12元，問每打香蕉之價若干？

5. 一矩形，長爲寬之2倍，面積爲300方尺，試求對角線之長

6. 某汽車販，汽車之賺率，適等於車價以400除之。若每一汽車可淨賺利2500元，求車之賣價。

7. 兩物同時在一直角兩邊上移動。一物距角頂100呎而以每秒鐘10呎速率向角頂移動，而他一物距角頂50呎而以每秒鐘15呎速率離開角頂移動。求兩物相距150呎之時刻。

8. 一數平方之2倍較其數多45求此數。

9. 二數之和爲30,其積爲221.求此二數。

10. 二數之差爲2,其平方數和爲130.求此二數。

11. 問15與12須同加以何數，其積方可增加280？

12. 二數之商爲3.其積爲1125.求此二數。

13. 二數之比爲2：1.若各加以3,則平方數和爲306.求此二數。

14. 若以某數除4,其結果等於由4中減去此數。求此數。

15. 試分500爲兩部份，令其倒數之和等於120之倒數。

16. 某數與其數之倒數30倍之差爲1.問求此數爲何？

17. 2倍某數之倒數再加3,則等於此變號之值。數求此數。

18. 有兩位數，數字之和爲9.若此數以其倒數乘之。其積爲2430求此數。

19: 二數之和爲200.其一數之平方根與他數之和爲68.求此兩數。

20. 二數之和爲5.其立方之和爲35.求此二數。

21. 有長6碼寬4碼花池，周圍以碎石徑，寬度一致面積正若花池，試求此徑之寬。

22. 兩汽車相距130哩，同時相向而行，一汽車速度爲每小時30哩，而他汽車之速度較相遇前時數多33.問各行若干哩始相遇？及經若干時始相遇？

23. 一載重車，上載白薯若干袋。其袋數較每袋中白薯平均數之$\frac{1}{20}$少1.若將袋數增加25%,則每袋中白薯必須減少20，然後方可保持前後所載白薯量相同。問每袋中有白薯若干？

24. 一商人以若干價銀購貨一宗，其後售銀2400元。若再將在原價上扣除額外費用銀6%,則淨得利較原價之$\frac{1}{100}$少6問原價若干？

25. 某人以銀1000元存儲蓄銀行以年複利法生利。此後並於每年終另加100元於本金上，藉以厚利。若第二年終則有1285.60元求利率。

26. 有一工程，A與B二人合作，12日可成。若B獨作可成日數較A獨作可成日數多10日，問A獨作幾日可成。

27. 一水槽在滿盛水時，若兩出水管完全開放，可於$1\frac{8}{7}$小時流盡。設一管獨開放流盡之時間較他管獨開放流盡之時間少3小時，求各管獨需之時間。

28. 一水槽有注入傾出水管各一，在滿盛水時若兩管全開，可於$1\frac{1}{2}$小時流盡。設傾出水管單獨傾盡之時間較注入水管單獨注滿之時間少需2小時求各管分別單獨需用時間。

29. 一團體費18元在一飯店聚餐，設若團體中多加6人，而所預定菜目價及量均不更動，則每人平均可省聚餐費5角。問此團體有若干人，並平均每人聚餐費若干？

30 一農夫有牛260頭，平均分為若干隊。若將隊數增加7，則每隊中須減少7頭，問分有幾隊？

31 一團體付旅館房金16元，若此團體人員減少1人，則每人須多負担8元求此團體中人數。

32. 一商販售鷄蛋得銀7.50元。若其鷄蛋數目少有5打，則每打價須增高25分，方可如前得有同數銀，求鷄蛋打數。

33. 一人購紙夾費銀1.5元。設若紙夾數目短少500枚，則每枚紙夾價較前多費$\frac{1}{20}$分。問此人購紙夾若干？

34. 一件工程，需用若干工人，於等於工人數之日數可以作成。若將工人增加3名，則4日可成。求此工程所需人數。

35. 一工人於5小時50分鐘作零星小工若干件。若以同此時間少作10件，則每件必多費4分鐘。求所作小工件數。

二次式及其推廣部

第　十　章

二次方程式之性質與其圖象

104. **根與因式之關係** 在本節及以下各節，須證明幾個與二次方程關係定理．此等定理．並可於以後推廣至高次方程式．

定理 若r為方程式

$$ax^2+bx+c=0.........(1)$$

之一根，則x－r必為方程式左邊一因式．

因r為方程式(1)之一根，故可代入此方程式，得

$$ar^2+br+c=0.$$

由第53節所述方程式根之定義，此式為一恒等式．

故

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=ax^2+bx+c-(ar^2+br+c)\\&=a(x^2-r^2)+b(x-r)\\&=(x-r)(ax+ar+b)...............(2)\end{aligned}$$

由是知(x－r)為ax^2+bx+c之一因式．又由(2)式所得他一因式，可用以求出方程式他一根．

上定理之逆定理，設(x－r)為二次方程式之一因式，顯然r必為一根．故於第99節用作為解二次方程式之一法．

習　　題

用下列所與根作方程式：

1. 7,3.

解：　因7及3爲方程式之根，故$(x-7)$及$(x-3)$爲其因式。由是方程式之左邊爲$(x-7)(x-3)=x^2-10x+21$.即所作方程式爲

$$x^2-10x+21=0.$$

2. 3,2.

3. 2,−1.

4. 5,−4.

5. $\sqrt{3},-\sqrt{3}$.

6. $2\sqrt{8},3\sqrt{2}$.

7. $2\sqrt{-1},-2\sqrt{-1}$.

8. $5\sqrt{32},2\sqrt{2}$.

9. $2+\sqrt{3},1-\sqrt{3}$.

10. $7-\sqrt{-2},7+\sqrt{-2}$.

11. $14-\sqrt{3},14+\sqrt{3}$.

12. $a-\sqrt{b},a+\sqrt{b}$.

13. $a+\sqrt{b-c},a-\sqrt{b-c}$.

105.　二次方程式之根數

定理　凡二次方程式，只有二根。

設r及s爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，可証此方程式必無他根如 t ，而t與 r 及 s 不同．

因r及s爲方程式之根，故 $(x-r)$及$(x-s)$ 爲其因式。由是可將方程式寫爲

$$a(x-r)(x-s)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

若t爲方程式之一根必適合於(1)，即

$$a(t-r)(t-s)=0.$$

唯欲使諸因式之積爲零，其中必須有一因式爲零。換言之，$a=0$,或$t-r=0$, 或 $t-s=0$.但$t\neq r,t\neq s$,如是則末二因式俱不能爲零矣．若 $a=0$, 則所云二次方程式又化爲一次方程式，亦與原設方程式爲二次方程不合．即所設t爲第三根乃不合理也。

註． 將此定理與前節所述定理合併論之，即二次方程式可能分解爲因式只有一法

例如，若

$$ax^2+bx+c=a(x-r)(x-s),$$

必不能求得 t 及 v 兩數各與 r 及 s 不相同，而可寫爲

$$ax^2+bx+c=a(x-t)(x-v),$$

因如是， 則二次方程式又有與 r 及s不同之根矣，此不合理也。

106. 二次方程式根之性質 由第101節，普通二次方程式爲

$$ax^2+bx+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其根爲

$$r=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

及

$$s=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由後二式，若 a,b 及 c 之値爲已知，且 $a\neq 0$; 則二次方程根之性質，可用以判定。以實論之，則在(2)與(3)內，視察 $b^2=4ac$ 之値，即可判定根之性質。

I. 若$b^2-4ac>0$, 則二根爲實數而不相等。

II. 若$b^2-4ao>0$. 且屬完全平方數，則二根爲有理而不相等。

III. 若$b^2-4ac=0$.則二根爲實數而相等，此時 $r=s=-\frac{b}{2a}$.

IV. 若$b^2-4ac<0$.則二根爲虛數。

上述四種性質，其逆定理亦眞．例如若(1)式之根爲虛數，則由(2)及(3)兩式，$b^2-4ac<0$乃極明顯事實。

故$D=b^2-4ac$又稱爲二次方程式$ax^2+bx+c=0$之判別式。

習題

應用判別式判定下列方程式根之性質：

1. $2x^2-3x-2=0$.

解： $D=(-3)^2-4(2)(-2)=9+16=25$，因$25>0$且爲完全平方數，故此方程式之根爲有理數而不相等。

2. $x^2-3x+4=0$.
3. $9x^2+2x+1=0$.
4. $3x^2+x-1=0$.
5. $x^2-x-1=0$.
6. $x^2+x+1=0$.
7. $3x^2+2x-1=0$.
8. $x^2-2x-3=0$.
9. $13x^2-5x+8=0$.
10. $2x^2+2x+4=0$.
11. $3x^2-7x+2=0$.

若下列方程式之根爲實數且相等，試求各式中k之實數值：

12. $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$.

解： 此處$k-1=a$，$-(k+2)=b$，及$4=c$.

故
$$D=(k^2+4k+4)-4\cdot4(k-1)$$
$$=k^2-12k+20.$$

因二次方程根爲實數且相等之條件，乃判別式爲零，又使$D=0$其k之值必爲方程

$$k^2-12k+20=0,$$

之根用分因式法解之

$$(k-10)(k-2)=0,$$

即
$$k=10或2.$$

核算： 將$k=10$代入原方程式，則得

$$9x^2-12x+4=(3x-2)^2,$$

再以$k=2$代入，則得$x^2-4x+4=(x-2)^2$.

13. $x^2+kx+4=0$.
14. $x^2+6x+k=0$.
15. $kx^2-24x+9=0$.
16. $4x^2+3kx+9=0$.
17. $x^2+(k-2)x+1=0$.
18. $(2k+5)x^2-kx+1=0$.
19. $(k-31)x^2+136x+289=0$.
20. $x^2-2kx+3=0$.
21. $kx^2+3kx+k+5=0$.
22. $(k+21)x^2-44x+4=0$.
23. $kx^2+7kx+49=0$.
24. $x^2+(96-k)x+2k=0$.
25. $(k-1)x^2+(16-k)x+1=0$
26. $x^2-2kx+2=0$,
27. $x^2-2k-1=0$.
28. $(k+6)x^2-(k-2)x+1=0$.
29. $x^2-kx+k=0$.
30. $4x^2-(k-6)x+2k+21=0$.
31. $x^2+(k-a)x+a^2=0$.
32. $a^2x^2+kax+2k+5=0$.

107　根之和與根之積　設 r 及 s 爲方程式

$$ax^2+bx+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之根，由第104節，$(x-r)$及$(x-s)$均爲其因式，其乘積$x^2-(r+s)x+rs$即方程式(1)之左邊，故

$$x^2+bx+c=x^2-(r+s)x+rs$$

爲恒等式可適合x任何值。由是

$$-(r+s)=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

及
$$rs=c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

上述事項，可歸結如下

定理　在方程式 $ax^2+bx+c=0$* 中，x 之係數等於二根之和變號；其常數項等於二根之乘積。

習　　題

1. 應用第101節二次方程係數所表根之公式，證明上述定理。用下列所示之根，作方程式：

3.　3, 2.　　4.　11, 13.　　6.　$\frac{1}{2},\frac{3}{4}$.　　8.　$7-\sqrt{3}, 7+\sqrt{3}$.

3.　7, −3.　　5.　−3, −4.　　7.　$\frac{1}{3},\frac{1}{7}$,　　9.　$-\sqrt{5},\sqrt{5}$,

下列各方程式中，由所限條件，求各文字係數之值：

10.　$x^2-5x+c=0$,式一根爲4

解：　設r爲他一根，由(2)式，則

$$-(r+4)=5,$$

即
$$r=1.$$

由(1)式
$$c=1\cdot4=4.$$

*若$b^2-4ac<0$,則得虛根，在此處可暫不論。因對於虛數和與積意義尚未說明故也，但此定理在後方仍然可以成立。

11. $x^2-bx-6=0$,若一根爲2.

12. $x^2+x=c=0$,若一根爲4.

13. $x^2+bx+3=0$,若一根爲3.

14. $x^2+\ 0x+c=0$,若一根爲11.

15. $x^2+10x+c=0$,若一根爲-3

16. $x^2+10x+c=0$,若一根爲5.

17. $x-{}^2bx+2=0$,若一根爲-1.

18. $x^2-bx+1=0$,若二根相等。

19. $x^2+bx-4=0$,若二根值相等而號相反。

20. $x^2+6x-c=0$.若一根爲他根之2倍。

21. $x^2-bx-4=0$,若一根較他根大4.

22. $x^2-x+c=0$,若一根較他根大17.

23. $x^2+5x+c=0$,若一根較他根大1.

24. $x^2+bx+15=0$,若兩根之差爲2.

25. $x^2-6x+c=0$,若兩根之差爲1.

26. $x^2+17x+c=0$,若兩根之差爲3.

108. 特例二次方程式 $ax^2+bx=0$. 普通二次方程式

$$ax^2+bx-c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

若$c=0$,則可分解因式爲

$$ax^2+bx=x(ax+b)=0,$$

或
$$x\left(x+\frac{b}{a}\right)=0.$$

由是其根爲 $r=0,\ s=-\frac{b}{a}$.

反言之，若 $r=0$ 爲一根。由第104節則$(x-0)$, 卽x爲一因式，故此方程式必無常數項。

玆述爲如下：

定理 二次方程式有一根爲零，其唯一條件是常數項等於零。仿此情形，若兩根全爲零，其唯一條件是 $b=c=0$.

習　　題

1. 應用二次方程之係數表根之公式(第101節)，証明前述定理。

在下列各方程式中，若一根爲零，試求k之值：

2. $x^2-3x+k-1=0.$　　　5. $3x^2+2\ +5k^2-3k=0.$

3. $x^2+5x-k^2+5=0.$　　　6. $2x^2+3kx+k^2+3k+2=0.$

4. $x^2+2x+k^2+4=0.$　　　7. $7x^2-kx+2k^2+9k-5=0.$

下列各方程式中，若二根俱爲零，試求k之值：

8. $x^2+2kx-3k^2=0.$　　　10. $x^2+(k-1)x+k=0.$

9. $\frac{x^2}{k^2}+7x-8=0.$　　　11. $x^2+(k^2+3)x-3k=0.$

12. $(k+2)x^2-3(k^2-4)x+2k^2+5k+2=0.$

13. $(k+1)x^2+2(k-1)x+k^2-1=0.$

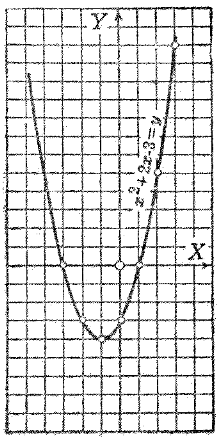
109. 二次方程式圖象 用第57節所述圖解方程式法：茲作

$$y=x^2+2x-3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之圖象。

作此方程式圖象時爲方便計，可與x以整數值，以求出y之相當值。如此則將表示方程之曲線上點之坐標定出。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	0	−3	−4	−3	0	5	12



取各點之坐標，定點之坐標，則得方程式之圖象如右。

方程式$x^2+2x-3=0$之根爲$+1$及-3，因以之代x可使左式爲零

故也·由上述方程式(1) 論之·其x之值 +1與 -3,即能令y之值爲零之值;換言之,在x軸上所當之點也·由此觀之,作方程式(1)之圖象時,即令不知其根,其曲線與x軸之交點中x之值,即爲方程式之根·

110 普通二次方程式之圖象 由此進而詳論方程式與其圖象關係。

設 $$y=ax^2+bx+c \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處a,b,c尋常表整數且a爲正數·

若與x以不同之值,其y之相當值可立即求出,可如第109節作其圖象·而方程式

$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之根,即代入x能適合於方程式之值,亦即在(1)式中,能令y=0如是則在(1)式圖象上此等之點,即(2)式中y=0其根所當之點·換言之,曲線與x軸之交點是也·其根之數值即沿x軸由原點至曲線與x軸之交點所度距離·但此等距離,當然爲實數,故用此種方法僅可表方程式之實根·

定理 若方程式(1)之圖不與x軸相交,則方程式(2)含有虛根,其逆定理亦眞·

任何二次方程式如(2),必有兩根,非爲實數即爲虛數(第105節),若(1)式圖形不與x軸相交,即x無實數值可使y=0,換言之,(2)式不能得實根,而只得虛根·

反而言之，若(2)只得虛根，則x必不能有實數值可適合於此方程式，換言之在(1)式中x之實數值不能令 $y=0$, 如是則方程式之曲線不與x軸相交。

綜上所述，可得下

原理 不與橫坐標軸相交之圖象，其相當解答為虛根或無限

111. 二次方程式之圖形

試研究方程式

$$y=3x^2+2x-5\ldots\ldots\ldots(1)$$

以較大之正數或負數代入x，例如 $x=\pm100$ 則y為一甚大之正數。由是可知 x 之值向右或左愈遠，曲線距x軸亦愈向上。另一方面論之，若與 y 以一值，亦可用解二次方程式法，求出x之相當值，例如在(1)式內，設 $y=-5$,

則 $$-5=3x^2+2x-5,$$

即 $$3x^2+2x=0,$$

其根為 $$r=-\tfrac{2}{3}, s=0.$$

由是則 $(-\frac{2}{3},-5)$ 及 $(0,-5)$ 兩点在曲線上(第57節)．換言之，沿y軸下行五單位距離，則曲線發現在其左側 $\frac{2}{3}$ 單位距離地方並在其上。又若在(1)式內，設 $y=3$, 則x之值為 $\frac{4}{3}$ 及 -2. 其意義即曲線與由x軸向上三單位距離之平行線相遇於此兩點。由此而有一問題，即此曲線之彎曲底端（或頂端）果在何處？考察之，此最低點（或最高点），其y之值，必與x之兩等值相對應。以故即在(1)式中，y 果有何值，則方程式

$$3x^2+2x+(-5-y)=0$$

可有兩等根，若與第106節方程式 $ax^2+bx+c=0$ 比較觀之，則

$$3=a,\ 2=b,\ -5-y=c.$$

其兩根相等條件爲$b^2-4ac=0$,在此處卽

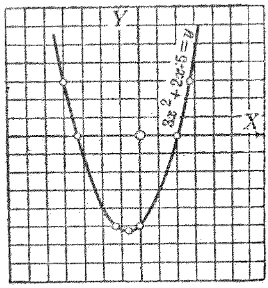
$$4-4\cdot 3(-5-y)=0,$$

卽
$$y=-\frac{4+60}{12}=-\frac{16}{3}=-5\frac{1}{3}.$$

將y之值代入(1)式，則得x之相當值爲$-\frac{1}{3}$.

如是y爲單一之值，而x得二相等之值，則(1)式之圖形恰如下圖所示，作一單一彎曲形狀。

x	1或$-\frac{2}{3}$	0或$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$或-2	$-\frac{1}{3}$	
y	0	-5	3	$-5\frac{1}{3}$	



仿此，若執一般二次方程式

$$ax^2+bx+c=y$$

論之，則彎曲處點縱距爲

$$y=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{D}{4a}.$$

由此可知若判別式爲負時，則方程式圖象完全居x軸之上，兩根全爲虛數(見第106節及第110節)，因圖象之最低點之縱距爲正故也。若判別式爲正，則圖象與x軸相交於兩點，兩根全爲實數。

由此節所得結果，可定圖象最低點先得y之值，用以表明方程式有無虛根。在二次方程式中，欲求出圖象之最高点或最低點之值，其方法不得謂難，但不適用於高次方程式，至於高次方程圖象之最大值(Maxima)或最小值(Minima)，本書缺而不論。有志學者，可在解析幾何中求之。

習　　題

作下列方程式之圖象，如有實根情形，再用度量法以定其根，並求出各圖象彎曲之點：

1. $x^2+2x+2=y$.
2. $x^2-5x+4=y$.
3. $x^2+3x+2=y$.
4. $x^2-5x+6=y$.
5. $x^2-5x-6=y$.
6. $2x^2-3x+4=y$.
7. $x^2+3x+1=y$.
8. $3x^2+3x-1=y$.
9. $2x^2+3x+3=y$.
10. $x^2+x+1=y$.
11. $x^2-x-1=y$.
12. $x^2-x+1=y$.
13. $x^2+x-1=y$.
14. $4x^2+3x-5=y$.
15. $6x^2+13x+6=y$.
16. $7x^2+3x-4=y$.
17. 如方程式有一根爲零，其圖象之特殊性質爲何？
18. 如方程式有相等之根，其圖象之特殊性質爲何？

112. 二次方程式之縮形　在二次方程式

$$ax^2+bx+c=0,$$

其二根爲

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

及

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

試設a漸爲變小以求其根x_1及x_2若a漸近於o,則x漸近爲$\frac{0}{0}$之式，此爲不定式，數學上所當避免者也。然若將分子化爲有理數，則得

$$x_1=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

$$x_2=\frac{4ac}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

如a漸近於o時，則b^2-4ac顯然漸近於b^2，如是x_1漸近於$-\frac{c}{b}$又x_2因其分母漸漸變小，其值必漸漸加大爲無限。如是當a漸近於o時，則二次方程式可漸近爲一次方程式，亦卽一根超過有限範圍而不可見，至此則二次曲線卽漸近直線爲極限。試由下列圖形觀之，令a之漸近值爲$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, 0$，更爲顯明．

圖形中曲線，表下列方程式：

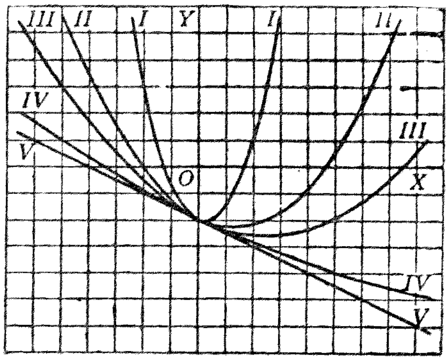
$$x^2-\frac{x}{2}-2=y. \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{x^2}{5}-\frac{x}{2}-2=y. \qquad (\mathrm{II})$$

$$\frac{x^2}{10}-\frac{x}{2}-2=y. \qquad (\mathrm{III})$$

$$\frac{x^2}{50}-\frac{x}{2}-2=y. \qquad (\mathrm{IV})$$

$$-\frac{x}{2}-2=y. \qquad (\mathrm{V})$$



仿此，若令漸近o爲極限，則方程式$bx+c=0$之根亦可證明漸漸加大爲無限，

習　題

下列方程式中，k之實數值以何爲漸近極限，然後方程式之一根可增加爲無限？

1. $kx^2+3x-2=0.$
2. $(k^2-4)x^2-x+3=0.$
3. $(kx+1)^2-(x+1)^2=(k-x)^2.$
4. $k^2+3k^2x^2-(x+1)^2+3=0.$

5. $\sqrt{6kx+2}+\sqrt{2k+3}=\sqrt{2kx-1}$.

6. $\sqrt{k-x}+\sqrt{k+x}=\sqrt{2k+x}$.

7. $\frac{x+1}{k+1}-\frac{k-1}{x-1}+\frac{k}{x}=0$.

8. $\sqrt{\frac{k+x}{k-x}}+\sqrt{\frac{k-x}{k+x}}=\sqrt{\frac{3x+1}{k^2}}$.

9. $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}+\frac{k-1}{k+1}+\frac{k}{8}=0$.

10. $(k^2-9)x^2+(k+3)x+k^2-2k-15=0$.

下列方程式中，k與m之實數值以何數爲漸近極限，然後方程式之二根可全增至無限？

11. $kx^2+mx-3=0$.

12. $(6k-m)x^2-mx+3=0$.

13. $7kx^2+(3k-m+2)x=2mx^2+7$

14. $(k+2)x^2-(3k+m-1)x+2=0$.

15. $(k^2+3k+2)x^2-7(k^2-8km-20)x+6=0$.

16. $(k+m)x^2-(k+m)-3=x^2+2x$.

17. $(k-m+3)x^2+2(k+m)x-4=0$.

18. $(7k+3m-1)x^2-2=(13k-5+m)x$.

第十一章

聯立二次方程式

113. 聯立二次方程之解法　含二變值之一方程式，如$x^2+y^2=7$,可有許多對數適合之，例如$(0,\sqrt{7})(1,\sqrt{6}),(2,\sqrt{3})$等等；但同時亦有無數數值不能適合，例如$(1,1),(2,2),(2,3)$等等。由是$(x,y)$可適合單一含二未知數二次方程式之條件，即作所取$x$與$y$之值有若何限制是也。若更限制所取$x$與$y$之值須合另一二次方程式，則所求解答範圍即可劃定。故所謂解聯立方程式者，即求出能同時適合兩方程式之對數值是也。

114. 代入解法　此種解法，在一方程式中，(x,y)所含限制條件，亦必含他一代入方程式內。

例題

解
$$\begin{cases} 2x^2+y^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解：　在(2)式，乃表$x=1+y$,如是所求解答即能適合(1)式之對數值，且能同時$x=1+y$.

若以$(1+y)$代x於(1)式內，即含有(1)式所俱限制條件，亦包含在(2)式之中。

故
$$2(1+y)^2+y^2=1,$$

或
$$3y^2+4y+1=0.$$

解之，其根爲
$$y=-1,\text{或}-\tfrac{1}{3}.$$

若$y=-1$，由(2)式則$x=0$.

若$y=-\frac{1}{3}$，由(2)式則$x=\frac{2}{3}$.

故其解答為$(0,-1)$及$(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$.

核算： 將$(0,-1)$代入(1)與(2)，則得

$$2\cdot 0+(-1)^2=1,$$
$$0-(-1)=1.$$

將$(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$代入(1)與(2)，則得

$$2\cdot\tfrac{4}{9}+\tfrac{1}{9}=\tfrac{9}{9}=1,$$
$$\tfrac{2}{3}-(-\tfrac{1}{3})=1.$$

習　　題

解下列聯立二次方程式，並核算其結果：

1. $x-y=4,$ $xy=5$
2. $x+y=4,$ $xy=4.$
3. $x+y=1,$ $x^2+y^2=3xy.$
4. $x+y=m,$ $x^2+y^2=nxy.$
5. $7x+y=15,$ $xy+x=4.$
6. $x+y=a,$ $x^2-y^2=b.$
7. $x^2+y^2=41,$ $3x+2y=23.$
8. $x^2-y^2=21,$ $3x-y=13.$
9. $7x+5y=12,$ $x^2+y^2=2.$
10. $xy=6,$ $3x+5y=21.$
11. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{9},$ $\dfrac{x}{3}=\dfrac{3}{y}$
12. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{c}{y},$ $bx=dy.$
13. $\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{a^2}{b^2},$ $a+x=y-b.$
14. $3x^2+y=4xy,$ $7x-3y=4.$
15. $x^2+xy-y^2=1,$ $x+3y=4.$
16. $(x+y)(2x+2y)=180,$ $x-2y=3.$
17. $3x^2-12y=2y^2-x,$ $2x-7y=-18.$
18. $x^2+y=y^2+x-10,$ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}.$
19. $ax-by=cy,$ $x^2+xy=y^2.$
20. $ax-by=cy,$ $a^2x^2+2acxy+c^2y^2=m^2.$
21. $x^2+2xy+y^2=3y+3x,$ $3x-y=5$

22. $ax^2+(a-b)xy-by^2=2b(a^2+2ab-b^2)$,

$\frac{x+y}{x-y}=\frac{b}{a}$.

23. $3x^2-7xy+2y^2-8y+3x=-30$,

$x+y=5$.

24. $2(x+1)^2-5(y-1)^2=52$,

$x-y=6$.

25. $\frac{3x+y-1}{2x+3y+6}=\frac{1}{2}$,

$2x^2-3xy+y^2=8$.

26. $x^2-y^2=a^2$,

$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

27. $x^2+y^2=4$.

$\frac{x+y}{x-y}=1$.

28. $\frac{x^2+2xy-y^2}{y^2+2xy-x^2}=7$,

$x+y=3$.

29. $\frac{1-x-x^2}{1-y-y^2}=\frac{19}{5}$,

$2x-3y=2$.

30. $xy+3=7(3x-y)$,

$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

31. $\frac{2x-y}{y}+\frac{x}{x+y}=-1$,

$x+y=-2$.

32. $\frac{7x-5y+2}{3x-2y-3}+\frac{x-2y}{2x-y}=\frac{43}{16}$,

$7x-3y=-27$.

33. $x(x+y)+2x=28$,

$\frac{y}{x+y}=-2\frac{1}{3}$.

34. $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{y-1}=4\frac{2}{3}$,

$\frac{7}{x-2}=-\frac{14}{y}$.

35. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5$,

$7(x+y)=2(y+6x)$.

115. **二變值二次方程之圖象**　若方程式中變值 x 或 y 不是單獨居於一邊，先解 y (或x) 使之單獨居於一邊，然後應用第57節及第109節作其圖象，須注意者，如求方根，則y之兩值與x之單一值相對應。

習　　題

作下列方程式之圖象：

1. $4x^2+9y^2=81$.

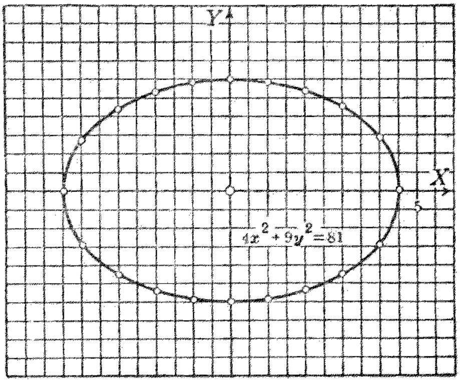
解：
$$y^2=9-\frac{4x^2}{9},$$

即
$$y=\pm\sqrt{9-\frac{4x^2}{9}}.$$

試與x不同之整數值，以求出y之相當值，則得下表及其圖象：

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±3	±2·9	±2·7	±2·2	±1·4	虛數

在此例題，若x大於5或小於−5，則y爲虛數。如是則在x=±5線之外，必無曲線存在。



欲求出曲線與x軸相交處，可解出x之值，而此種x值，適與y=0相當。

故 $x=\pm\sqrt{\dfrac{81-9y^2}{4}}$.

若y=0，則 $x=\pm\sqrt{\dfrac{81}{4}}$

$=\pm 4\frac{1}{2}$. 此點必然在圖形上。

任何如 $ax^2+by^2=c$ 之方程式形，其圖形形狀通常均如左圖，稱曰橢圓曲線(Ellipse)．而於圓，可稱爲橢圓中特殊形狀。卽在橢圓方程式中，若a=b=1，卽化爲圓方程式 $x^2+y^2=c$.

2. $xy=4$.

解： $y=\dfrac{4}{x}$.

試與x以整數值，則得下表：

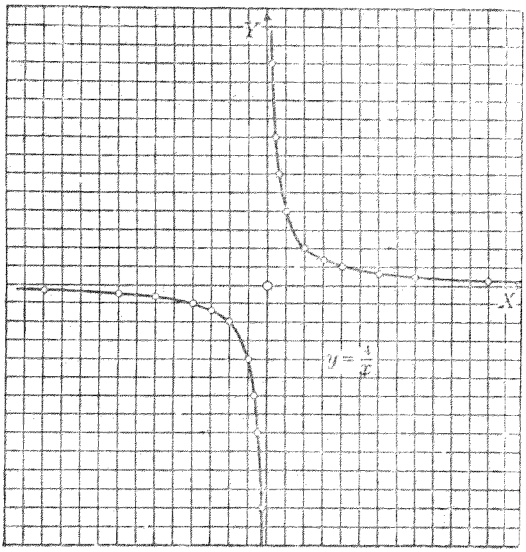
x	−12	−8	−6	−4	−3	−2	−1
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	−1	$-\frac{4}{3}$	−2	−4

x	12	8	6	4	3	2	1
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	2	4

因此表不足以將＋1與－1間曲線觀念表示清楚，故再與x以分數值，得補充表如下：

x	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
y	-12	-8	-6	6	8	12

任何如 $xy=a$ 之方程式形，其圖形形狀普通均如右圖，是名曰雙曲線．雙曲線之圖象分爲兩部份或兩枝，而不相連接，但須稱爲同一曲線之兩枝，不得謂爲兩曲線，蓋因由一方程式所生之圖象也，雙曲線以及其他二次曲線，統名曰圓錐曲線

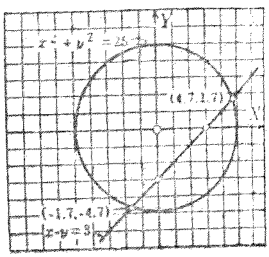


3. $y^2+y^2=25.$　　6. $x^2-y^2=16.$

4. $36x^2+4y^2=144.$　　7. $2x^2+3y^2=4.$

5. $xy=15.$　　8. $x^2+y^2=9.$

116. 聯立二次方程式之圖示



任一所論之方程式，均可以圖表之。

聯立方程式之公共値，即可以圖象之交點表之。

例如方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=3 \end{cases}$

其解答為 $\begin{cases} x=\dfrac{3\pm\sqrt{41}}{2}, \\ y=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{2}, \end{cases}$

或 $\begin{cases} x=4\cdot7, \quad -1\cdot7, \\ y=1\cdot7, \quad -4\cdot7. \end{cases}$

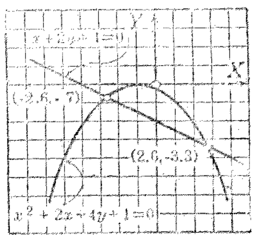
此等方程式之圖象如前圖。

由此觀之，圓與直線交點之坐標値，正以代數解法求得之根相同。故在得實根情形內，適合於兩方程式之x及y之値，必定在兩圖象上。

由是，若將方程式圖象作出，雖未確知其根，亦可知根之相當精度，是爲聯立方程圖解法。如當其粗略與確限度重要時，且方程式易於作圖，圖解法較諸代數解法甚爲方便，並可作代數解法之大概核算。

又如方程式

$$\begin{cases} x^2+2x+4y+1=0, \\ \qquad x+2y+4=0 \end{cases}$$



其解答爲

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{7}=\pm2\cdot6, \\ y=-2\mp\dfrac{\sqrt{7}}{2}=-3\cdot3, \text{或} -7. \end{cases}$$

由方程式之圖象視察之，亦可知代數解法，得十分正確之根；而圖解法，在第一位小數後，絕不敢斷定無錯誤也。

習　　題

圖解下列方程組，可求其根至小數一位：

1. $x^2+3xy+y^2=8$,
   $x+y=3$.
2. $x^2+y^2=5$,
   $x-y=-1$.
3. $xy=6$,
   $x+y=5$.
4. $2x^2+4y^2=22$,
   $2x-3y=3$.
5. $x^2+3xy-y^2=4$,
   $x-3y=7$.
6. $3x^2+9y^2=14$,
   $x+y=1$.
7. $x^2+y^2=625$,
   $x+y=25$.
8. $xy=12$,
   $x+3y=13$.
9. $x^2-y^2=7$,
   $x+3y=13$.
10. $x^2+3xy+y^2=5$,
    $x-y=0$.
11. $x^2+3x+y^2=19$,
    $2x+7y=-17$.
12. $3xy=-42$,
    $4x+12y=4$.

117. 解答之數　一二次方程與一次方程之方程組，普通有兩組根且僅有兩組根。蓋因由一次方程解出之變值，例如x,以之代入二次方程式，則得一含他變值，如 y 之二次方程其根爲數應爲二(參考第105節)，如是，則一 y 之值，只可對應一x之值故可生兩組根。

此種論定，初可由圖解說明之，因實際上一直線與一二次曲線只兩交點故也，不過由代數法解得之虛根，在圖解上不能得出交點。

習　　題

1. 在特殊情形中，何時一二次方程與一一次方程只有一解答？
2. 何時一二次方程與一一次方程之解答爲虛數？

下列方程組若只有一組解答，求出k之實數值：

3. $\begin{cases} x^2+y^2=16 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解： 由(2) $x=y+k.$

代入(1)式， $(y+k)^2+y^2=16,$

或 $2y^2+2ky+k^2-16=0 \cdots\cdots\cdots(3)$

由第106節， $a=2, b=2k, c=k^2-16.$

故 $D=b^2-4ac=4k^2-8k^2+128=-4k^2+128.$

由(3)式，如欲只得一組解答，D必須等於零。

由是 $-4k^2+128=0,$

或 $4k^2=128,$

即 $k=\pm 4\sqrt{2}.$

4. $xy=4,$ $x+y=k.$

5. $x^2=ky,$ $2x+y=8.$

6. $x+ky=2,$ $x^2+y^2=2.$

7. $y^2=3x,$ $3x-3y=k.$

8. $x-y=k,$ $2x^2-3y=5.$

9. $x^2-y=k,$ $2x+3y=7.$

10. $x^2-y^2=16,$ $x+y=k.$

11. $x^2+y^2=36,$ $2x-5y=k.$

12. $4x^2+y^2=9,$ $kx+y=3.$

取所與k之值，作下列方程式之圖解：

13. $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x-y=k. \end{cases}$ $(k=4, 4\sqrt{2}, 7.)$

解：由$k=4, y=x-4$

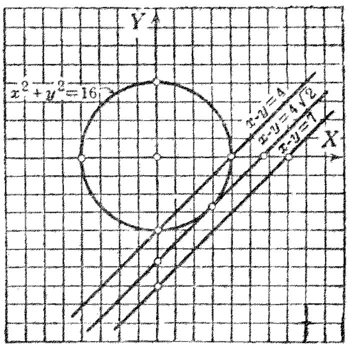
x	0	4	14
y	−4	0	10

由$k=4\sqrt{2}, y=x-4\sqrt{2}.$

x	5.66	0	3
y	0	−5.66	−2.66

由$k=7, y=x-7.$

x	0	7	3
y	−7	0	−4



$y=\pm\sqrt{16-x^2}.$

x	4	0	−4
y	0	±4	0

14. $xy=k$,
$x+y=9$. $(k=21, 20\frac{1}{4}, 18.)$

15. $3x^2+y^2=4$,
$x-y=k$. $(k=2\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3}.)$

16. $x^2+y^2=9$,
$2x-y=k$. $(k=4\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 2\sqrt{5}.)$

17. $x^2+y^2=k$,
$x+y=1$. $(k=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}.)$

118. **無一一次方程之聯立二次方程式之解法** 在上節所舉例題，一為一次方程，一為二次方程。若兩方程式無一為一次方程時，常可求得一對等值方程式(參看第59節)，內中有一方程或二方程能化為一次方程式。此等方程式即可應用代入法解之。

習　　題

解下列方程式：

1. $\begin{cases} 3x^2-2y^2=11 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5x^2+y^2=37 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解： 因此等方程式僅含x與y之平方項，故x^2與y^2各當變作值，後然應用前述解聯立一次方程式法行之，

$2\cdot(2)$　　$10x^2+2y^2=74 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(1)+(3)$　　$13x^2=85$,

$$x^2=\frac{85}{13} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{85}{13}}=\pm\frac{1}{13}\sqrt{1105}.$$

將(4)代入(1),

$$\frac{255}{13}-2y^2=11,$$

$$255-26y^2=143,$$

$$26y^2=112,$$

$$y^2=\frac{112}{26}=\frac{56}{13},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{56}{13}}$$

$$=\pm\frac{1}{13}\sqrt{728}.$$

2. $\begin{cases} x^3+y^3=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解： 因原二方程全非二次方程式，然可常用除法求出一對等值方程，其中有一為一次方程他一為二次方程，解之如下：

$(2)\div(1)$, $x^2-xy+y^2=6\cdots\cdots\cdots(3)$
$(2)^2$, $x^2+2xy+y^2=4\cdots\cdots\cdots(4)$
$(3)-(4)$, $-3xy=2$
$xy=-\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots(5)$

用代入法解(2)與(5).

2. $\begin{cases} x^2+y^2=17 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解： 因此二方程全非一次方程，然常能用兩式相加，開平方根，而得一一次方程以解之。

$2.(2)$ $2xy=8\cdots\cdots\cdots(3)$
$(1)+(3)$ $x^2+2xy+y^2=25$
開平方, $x+y=\pm5\cdots\cdots\cdots(4)$
$(1)-(3)$, $x^2-2xy+y^2=9$
開平方, $x-y=\pm5\cdots\cdots\cdots(5)$

解(4)與(5)聯立方程，得$x=4,1,-4,-1$.

$y=1,4,-1,-4$.

故得四組根為$(4,1),(1,4),(1,-4),(-4,-1)$.

注意：若各項中變值之指數和均同，稱為齊次方程式

例如，$x^2+xy=0$, $2x^2y-xy^2-4x^3-3y^3=0$均為齊次方程式。

4. $\begin{cases} x^2-xy+2y^2=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x^2-3xy-2y^2=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解： 若二方程式除常數項外均為齊次項，可解之如下：

消去常數項，

$3.(1)$, $3x^2-3xy+6y^2=12\cdots\cdots\cdots(3)$
$2.(2)$, $4x^2-6xy-4y^2=12\cdots\cdots\cdots(4)$
$(4)-(3)$, $x^2-3xy-10y^2=0\cdots\cdots\cdots(5)$

分解(5)為因式， $(x-5y)(x+2y)=0$
由是， $x=5y$,或$-2y\cdots\cdots\cdots(6)$
用代入法解(6)與(1)，

5. $\begin{cases} 6x^2-7xy+2y^2=0, \\ x^2-y=4. \end{cases}$

解： 若一方程爲齊次，他一方程爲一次方程或二次方程，可解之如下：

分解(1)爲因式， $(2x-y)(3x-2y)=0,$

由是， $x=\frac{1}{2}y$,或$\frac{2}{3}y$*

用代入法解(2)與(3).

6. $x^2-y^2=xy=x-y.$

7. $x^2-y^2=xy-4=x-y.$

8. $x^3+xy^2=5,$
$y^3+x^2y=9.$

9. $x^2y=m,$
$xy^2=n.$

10. $x(y+1)=-4,$
$y(x+1)=-9.$

11. $x(y-3)=0,$
$y(x-3)=-6.$

12. $x^2+y^2=m,$
$xy=p.$

13. $xy^2-x^2y=r,$
$xy^2+x^2y=s.$

14. $x-xy=-1.$
$y-xy=0.$

15. $x(x^3-y^3)=-38,$
$y(x^3-y_3)=-57.$

16. $4x^2-3y^2=-12,$
$3x^2-4y^2=-37.$

17. $2x^2+4y^2=34,$
$4x_2-2y^2=28.$

18. $x^2+2y^2=2,$

19. $x^2-xy+y^2=1,$
$x^2+xy+y^2=3,$

提示：用加法或減法消去x^2與y^2.

20. $x^2+5xy+y^2=-41,$
$x^2-3xy+y^2=79.$

21. $2x+3y-xy=-1,$
$xy+y=3x+3.$

22. $x^2+xy+y^2=3,$
$x^2+y^2=5.$

23. $(x-y)(3+x)=12,$
$(x-y)(8-y)=14.$

24. $(x^2+y^2)(x-y)=-25,$
$(y-x)(xy)=12.$

25. $(x+y)^2=3y^2+6,$
$(x-y)^2=3x^2-11.$

26. $x+\sqrt[3]{xy^2}=a,$
$y+\sqrt[3]{x^2y}=b.$

27. $x\sqrt[3]{x-y}=3,$
$y\sqrt{x-y}=2.$

28. $x-y=5,$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=5.$

29. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=-1.$
$x-y=-7.$

*由視察結果，$y\neq 0$，因若$y=0$,由(1)式則$x=0$,但$(0,0)$不能適合於(2),故$y=0$,不爲解答．

30. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=13$,
$x-y=-26$.

31. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$,
$(x+y)\sqrt{xy}=2$.

32. $x^2-4y^2=5$,
$x^2+y^2=\frac{10}{11}(x^2+2y^2)$.

33. $\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}=6$,
$x+y=17$.

34. $5xy-3(x-y)=7$,
$3xy-5(x-y)=1$.

35. $xy+xy^{-1}=x^2+y^2$,
$xy-xy^{-1}=2(x^2-y^2)$.

36. $x^2+y^2+x+y=12$,
$-x^2+y^2-x+y=0$.

37. $x^{-2}+2y^{-2}=\frac{11}{9}$,
$x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2}=\frac{13}{9}$.

38. $2x^2+3y^2=125$,
$xy=21$.

39. $x^2+y^2-2(x-y)=3$,
$x^2+y^2-3(x-y)=-2$.

40. $x^2-xy+y^2=x+y$,
$xy=4$.

41. $2x^2+3xy-15y^2-26=0$,
$(x+2)(y-3)=0$.

42. $\sqrt{x(1+y)}+\sqrt{y(1+x)}=1$,
$x+y=1$.

43. $\sqrt{2+3x-x^2}+\sqrt{2+3y-y^2}=4$,
$x+y=2$.

44. $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+xy=3$,
$x+y=4$.

45. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$,
$x+y=-1$.

46. $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{8}{3}$,
$2x^2+4y^2=22$.

47. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2$,
$x^2-y^2=0$.

48. $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\frac{9}{7}$,
$x^3+y^3=65$.

49. $\sqrt{\frac{3x}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{3x}}=2$,
$xy+(x-1)=1$.

50. $\sqrt{y}-\sqrt{a+x}=\sqrt{y+x}$,
$\frac{\sqrt{y+x}+\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}}=\frac{5}{3}$.

51. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2$,
$\frac{bx-ay}{bx+ay}=0$.

52. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$,
$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{13}{36}$.

提示：設$\frac{1}{x}=z$, $\frac{1}{y}=w$.

53. $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{x}=\frac{12}{3}$,
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3}$.

54. $x\left(1-\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{1}{2}$,

$y\left(1-\dfrac{y}{x}\right)=-2$.

55. $\dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{m+1}{n+1}$,

$\dfrac{x^3+1}{y^3+1}=\dfrac{m^3+1}{n^3+1}$.

56. $x=4\cdot\dfrac{y-1}{y+1}$,

$y=9\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$.

57. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}$,

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{7}{12}$.

58. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=-1$,

$\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{3}{y+2}=0$.

59. $\left(5-\dfrac{2x}{x+y}\right)^2+\left(5+\dfrac{2x}{x+y}\right)^2=\dfrac{458}{6}$

$xy=2$.

問　　題

1. 二數之比爲2:3.其積爲96.求二數。

2. 二數之和爲85,其平方之和爲4625.求二數。

3. 二數平方之和復加第一數則爲174.又二數平方之和復加第二數則爲181.求二數。

4. 一矩形之對角綫爲13尺，若矩形之長寬各加5尺，其面積較原面積增加110方尺.求矩形之原寬長。

5. 一矩形之對角線爲90尺，若各邊之長減少4尺，其對角綫之長爲$2\sqrt{1781}$.求矩形之原寬長。

6. 二數之和爲50.若第一數與2相差之倒數加6與第二數相差之倒數爲$\frac{1}{12}$.求二數。

7. 二數平方之和爲250.若第一數加1，第二數加2，其兩平方之和爲325.求二數。

8. 一長橋需建築費5000元，若橋長增加5尺，則需建築費6000元。試求橋之長及每尺長所需之建築費。

9. 鐵橋每尺之建築費與橋之全長成正比例。若有100尺長之橋，共建築費需100,000元,一橋之建築費共需50,000元求橋之長及每尺長之需費。

10. 某人有田一塊，長爲300尺。寬爲200尺。今欲於此田中央築房一所令房所佔面積爲此田面積三分之一，且令房之四週所餘空地寬度均相同。求此房長寬及空地之寬。

11. 一馬車行一里之路，其前輪較後輪多轉198次，若其前後輪大小不同，且兩輪之圓周之和等於原兩輪之圓周之和，則行一里之路各轉$406\frac{2}{13}$次問原兩輪之圓周各長若干？

12. 某商販以洋12·50元買雞蛋若干枚。迨售出時，因損壞兩打，其所餘者以每打賣價高於買價20分,而此次營業尚獲利3·60元。求原買雞蛋數。

13. 一成衣匠購布兩種。第一種布較第二種布每碼價多25分，以故將第一種布少買2碼。然後各付洋15元。試求各種布每碼之價及各種布之長。

14. 某人以其財產85,000元分給其子女。其所有女孩共分得財產總數之$\frac{9}{17}$.若每女孩較每男孩多得5000元，問此人有子女若干？並子女每人各得若干？

15. 兩農人A,B購置田地。B購90畝較A購100畝多費150元。而A可以60元較B多購得一畝。問兩人所購每畝之價若干？

16. 有洋若干，依某種利率以單利法計算，可於兩年終共得銀1620元，若以同數之款依同種利率按年複利法計算，可於兩年終共得銀1622·40元。求此款之數及其利率。

17. 某二位數，以數字之和除之則得 3. 若以數字之積除其倒數字之數則爲$5\frac{1}{7}$.求原數。

18. 某二位數，比其數字平方之和多 1，而比其數與其倒數字數之和少18.求原數。

19. 某分數，若分子母同加以 1，則等於$\frac{3}{4}$.又若於分子上加以 3，分母減以3，則變爲1.求原分數，

119. 齊次方程式之圖象之意義　例如討論齊次方程式

$$3x^2-10xy-8y^2=0\dots\dots(1)$$

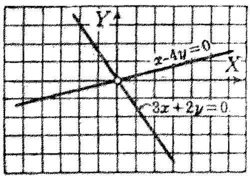
若分解(1)式之左邊之因式，則得

$$(3x+2y)(x-4y)=0.$$

故(1)式之根爲

$$3x+2y=0,\text{及}x-4y=0.$$

此等方程式乃通過原點之二直綫，均爲(1)式所包之圖象，此例可推廣如下：



任何齊次方程式，如 $ax^2+bxy+cy^2=0$,若其判別式爲正數，其圖象即爲通過原點之二直綫。此等方程式，實際與兩綫方程式爲等值。

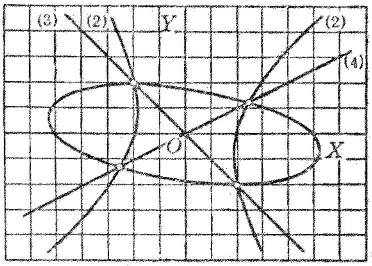
如第147頁，習題4所舉一對方程式，可另得出一雙等值方程式，其中一方程爲齊次他一方程可分解因式，然後以代數法解之。若益以圖解表明之，可閱下列方程式：

$$x^2+2xy+7y^2=24\dots\dots(1)$$

$$2x^2-xy-y^2=8\dots\dots(2)$$

由消去常數項結果，得二次方程式$x+y=0$,及$x-2y=0$之乘積，由是初為解(1)與(2)之問題乃變為解下列兩對方程式之問題。

$$x^2+2xy+7y^2=24,$$
$$x+y=0\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$x^2+2xy+7y^2=24,$$
$$x-2y=0\ldots\ldots\ldots(4)$$



用圖解說明解(1)與(2)意義，即求出(1)與(2)之圖象交點，今一變而為求(1)式之圖象與(3)及(4)兩直線之交點。圖中所示之直線與曲線，均記出與某方程式相對照。即橢圓為(1)之圖象，雙曲線為(2)之圖象，兩直線為(3)與(4)之圖象。初本欲求橢圓與雙曲線之交點，顯然一變無異於求橢圓與兩直線之交點。

第十二章

數學歸納法

120. 總論　有許多公式，其特例之證明甚易，而普通直接證明甚難。

問(x^n-1)是否為$(x-1)$除盡，在n為特殊值時，例如$n=2$或$n=3$，可用實在除法證明其能除盡甚易，但雖證明$(x-1)$可除盡，(x^3-1)，絕未涉及(x^4-1)亦可被$(x-1)$除盡。然若$n=k$証明可以除盡，$n=(k+1)$亦隨之而能証明又可以除盡時，則k為任何之值均可不問也。又因(x^2-1)與(x^3-1)能被$(x-1)$除盡，業經証明，即可確知$n=4$及$n=5$以及n等於任何大之值均可除盡也。

假定(x^k-1)能以$(x-1)$除盡。而k為數值，已證明除盡無誤，例如$k=2$或3是也。亦即$(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+1)$.

現$x^{k+1}-1\equiv x^{k+1}-x^k+x^{k-1}\equiv x^k(x-1)+(x^k-1)$，但$(x-1)$顯為右式之一因式，故亦為$(x^{k+1}-1)$之一因式。由是可知凡n之整數值大於2及3時，$(x^{k-1})$能以$(x-1)$除盡。亦可成立矣。

用數學歸納法作一完全證法，必須分為兩段，茲述之如下：

I. 證明關於特例，定理可以成立如取$n=1$及$n=2$。

II. 設$n=k$，此定理爲眞時，試證明$n=(k+1)$此定理亦能成立。

例　題

試證由1至n之整數和爲

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

證： 以代數記號表之，即

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

I. 若$n=1$，此定理成立，

因 $$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

若$n=2$，此定理亦成立，

因 $$1+2=\frac{2(2+1)}{2}=3.$$

II. 假定$n=k$，此定理仍可成立*，

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊各加以$(k+1)$，則得

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1).$$

$$=\frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

此爲所求之式，即在(1)式中，以$(k+1)$代k是也。

習　題

應用數學歸納法，證明下列各式：

1. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$
2. $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2(2^n-1)$
3. $3+6+9+\cdots+3n=\frac{3}{2}(n+1)n.$

*此種說法，其k之値僅在特例時可以證之，即$k=1$及2是也。

4. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

5. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

6. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\{\frac{1}{2}[n(n+1)]\}^2$.

7. $4^2+7^2+10^2+\ldots+(3n+1)^2=\frac{1}{2}n(6n^2+15n+11)$.

8. 設n爲整數值，x^n-y^n可用$x-y$除盡。

9. 設n爲整數值，$x^{2n}-y^{2n}$可用$x-y$除盡。

10. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

11. $1\cdot1+2\cdot3^2+3\cdot5^2+\ldots+n(2n+1)^2$
$=\frac{1}{6}n(n+1)(6n^2-2n-1)$.

12. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)$
$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

13. $(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+3(1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5)$
$=4(1+2+3+\ldots+n)^3$.

14. $1\cdot3+3\cdot3^2+5\cdot3^3+\ldots+(2n-1)3^n=3^{n+1}(n-1)+3$.

15. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.

16. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

17. $2\cdot5+3\cdot6+4\cdot7+\cdots+(n+1)(n+4)=\dfrac{n}{3}(n+4)(n+5)$.

18. $2\cdot4+4\cdot6+6\cdot8+\ldots+2n(2n+2)$
$=\dfrac{n}{3}(2n+1)(2n+4)$.

19. 有彈丸疊於三角形底上，成爲堆垜。若底面三角形每邊有粒彈丸，問堆垜內彈丸總數若干？

20. 一彈丸堆垜疊於正方形底上。若底面正方形每邊有k粒彈丸，求此堆垜內彈丸總數。

第十三章

二項式定理

121. 二項定理之說明　前所論問題，二項式$(a+b)$之任何乘方，可直接用乘法求得之。且可推出一普通法則，名曰二項式定理．由此可得$(a+b)^n$之展開式，此處n爲正整數a與b爲任何之代數式或算術式。其法則如下：

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots+b^n.$$

由此式觀之，則得下列

$(a+b)^n$之展開式之法則：

1. 第一項爲a^n.
2. 第二項爲$na^{n-1}b$.
3. 各項中a與b之指數和爲n.
4. 各項中a之指數較其前項中a之指數遞次減1.
5. 各項中b之指數較其前項中b之指數遞次加1.
6. 任何項之係數，若以該項中a之指數乘之，其乘積又以該項中b之指數加1之和除之，則得次項之係數。

習題

1. 設$n=2,3,$或4,求$(a+b)^n$展開式之第一項。
2. 設$n=2,3,$或4求$(a+b)^n$展開式之第二項。

3. 用上述法則，求出 $(a+b)^n$ 展開式之第三項，設 $n=2;n=3;n=4$，

4. 用上述法則，求出$(a+b)^n$展開式之第四項，設$n=2;n=3;n=4$

註： 在實用上為便利計，可用適當之指數先將各項完全寫出，然後順次寫出各項之係數。

122. 普通項 詳考第121節之法則，則展開式第三項為

$$\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2,$$

第四項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}a^{n-3}b^3.$$

由此推之，則第r項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{2\cdot 3.4\ldots\ldots(r-1)}a^{n-r+1}b^{r-1}.$$

是為普通項，然有時亦有取第$(r+1)$項作為普通項，因較為簡單故也。其第$(r+1)$項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\ldots(n-r+1)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots r}a^{n-r}b^r.$$

題 習

1. 求$(a+b)^3$之展開式第三項。
2. 求$(a+b)^{12}$之展開式第七項。
3. 求$(a+b)^4$之展開式第五項
4. $(a+b)^8$之展開式中第十項為何？又第十一項？
5. 設$n=1$，二項式定理對於$(a+b)^n$之展開式仍可成立否？
6. $(a+b)^{15}$之展開式中第十五項為何？
7. $(a+b)^6$之展開式中第四項第何？
8. $(a-b)^6$之展開式中第五項為何？
9. 求出$(a+b)^7$之展開式由末端逆數第三項。
10. 求出$(a-b)^8$之展開式由末端逆數第四項。

123.　**二項式定理之証明**　由第121節及第124節及第122節可得二項式展開式如次，當$n=2$與$n=3$時，其證明業經述之，至於普通証法，須用數學歸納法。

$$(a+b)^k=a^k+ka^{k-1}b+\frac{k(k-1)}{2}a^{k-2}b^2+\ldots\ldots$$

$$+\frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{1\cdot2\ldots(r-1)}a^{k-r+1}b^{r-1}$$

$$+\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{1\cdot2\ldots r}a^{k-r}b^r+\ldots+kab^{k-1}+b^k.$$

以$(a+b)$乘方程式兩邊，記出第一二兩項及末項與第$(r+1)$項。則得

$$(a+b)^{k+1}=$$

$$a^{k+1}+\qquad ka^kb+\ldots\ldots+\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{1\cdot2\ldots(r-1)}a^{k-r+1}b^r+\ldots$$

$$a^kb+\ldots+\frac{k(k-1)\ldots(k-r+2)}{1\cdot2\ldots r}a^{k-r+1}b^r+\ldots+b^{k+1}$$

$$a^{k+1}+(k+1)a^kb+\ldots+\frac{(k+1)k\ldots(k-r+2)}{1\cdot2\ldots(r-1)}a^{k-r+1}b^r+\ldots+b^{k+1}$$

在推演式中項，卽$(r+1)$項，其中演算手續略見簡略，茲重述之如下：

設　$$\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{1\cdot2\ldots\ldots r}+\frac{k(k-1)\ldots\ldots(k-r+2)}{1\cdot2\ldots(r-1)}.$$

集項，則得$$\frac{[k(k-1)\ldots(k-r+1)]+r[k(k-1)\ldots(k-r+2)]}{1\cdot2\ldots r}.$$

分解因式，則變爲$$\frac{[k(k-1)\ldots(k-r+2)][(k-r+1)+r]}{1\cdot2\ldots r}.$$

再化簡之，則爲$$\frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-r+2)}{1\cdot2\ldots r}.$$

此爲第$(r+1)$項之係數。

此與用第121節之法則，設$n=(k+1)$，所證得之初兩項及末項完全相同。並且在前公式內，n以$(k+1)$代之，其得出之第$(r+1)$項亦與上述第$(r+1)$項相同。即以$(k+1)$代k代入

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{1\cdot2\cdots r}a^{k-r}b^{r},$$

則得

$$\frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-r+2)}{1\cdot2\cdots r}a^{k-r+1}b^{r}.$$

由是第121節之法則，可證實當n為甚小值時，且可證實當n為任何正整數時。亦可成立。

習　　題

應用二項式定理，展開下列各式：

1. $\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)^8.$

解：
$$\frac{x^4}{y^{16}}+8\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)^7\left(-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)+\frac{8\cdot7}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)^6\left(-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)^2$$
$$+\frac{8\cdot7\cdot6}{2\cdot3}\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)^5\left(-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)^3+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)^4\left(-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)^4$$
$$+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)^3\left(-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)^5+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)^2\left(-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)^6$$
$$+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)\left(-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)^7+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\left(-\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)^8$$
$$=\frac{x^4}{y^{16}}-8\frac{x^3}{y^{11}}+28\frac{x^2}{y^6}-56\frac{x}{y}+70y^4-56\frac{y^9}{x}+28\frac{y^{14}}{x^2}-8\frac{y^{19}}{x^3}+\frac{y^{24}}{x^4}.$$

2. $(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a)^5.$

3. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^4.$

4. $\left(\frac{1}{y}+y\right)^7.$

5. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^5.$

6. $\left(\frac{3a}{2b}+\frac{2a}{3b}\right)^6.$

7. $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3}{x}\right)^6.$

8. $\left(\frac{\sqrt{m}}{5}-\frac{2\sqrt{p}}{3}\right)^4.$

9. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^5.$

10. $(1-\sqrt{a})^4-(1+\sqrt{a})^4.$

11. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^5+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^5.$

12. 求$(3a-2b)^7$展開式之第五項。

13. 求$(a+\frac{1}{a})^{10}$展開式之第八項。

14. 求$(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a})^2$展開式之第四項。

15. 求$(\frac{\sqrt{a}}{x}-\frac{\sqrt{x}}{a})^{20}$展開式之第十三項。

16. 求$(3x\sqrt{y}+\frac{1}{3y\sqrt{x}})^{15}$展開式之第十項。

17. 求$(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}})^{11}$展開式之第九項。

18. 求$(.8)^5$之值要小數三位。

解： $(.8)^5=(1-.2)^5$

$$=1^5-5(1)^4(.2)+\frac{5\cdot4}{2}(1)^3(.2)^2-\frac{5\cdot4\cdot3}{2\cdot3}(1)^2(.2)^3$$

$$+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot4}(1)(.2)^4-\ldots$$

$$=1-1+10(.04)-10(.008)+5(.0016)-\ldots$$

$$=1-1+.4-.08+.008-\ldots$$

$$=.328.$$

此展開式以後各項，與第三位小數無關，故略之。

求下列各式之值，要三位正確有效數：

19. $(1.1)^7$. 21. $(.99)^{10}$. 23. $(\frac{24}{25})^8$. 25. $(1.03)^{16}$.

20. $(.9)^9$. 22. $(1.02)^6$. 24. $(\frac{51}{56})^{12}$. 26. $(9.9)^7$.

27. 問$(a+b)^{18}$展開式中，何項爲a^{10}？

28. 在$(a+b)^n$之展開式中，n須俱何性質其居同一項內a與b之指數方可相等？

29. n須俱何值，其$(a+b)^n$之展開式之項數方爲偶數？

30. 求$(\sqrt[4]{x^2y^3}-\frac{3}{x^3y^{-\frac{3}{4}}})^{13}$展開式之初三項及末二項，

31. 若按年複利計算，試求300元以年利率4%求5年之本利和。

提示：第95節所述公式，可知此習題爲一二項式，其展開式中各項用對數較簡。

32. 若按半年複利計算，試求1元以6%之利率6年終之本利和。

33. 若按季複利計算，試求1250元以$3\frac{1}{2}$%利率3年終之本利和。

34. 若按月複利計算，試求50元以3%利率1年終之本利和。

第十四章

算術級數

124. **定義**　一組數，其中各數可由其前一數加以一定數而得之謂之算術級數

加於一項而得次項之定數，謂之公差

有當注意者，公差可為正數亦可為負數，故此等級數可為昇級數亦可為降級數。

例如2，4，6，8，………為一算術級數，其公差為2。又如12，6，0，−6，−12，……亦為一算術級數，其公差為−6。

習　　題

判定下列級數，是否為算術級數。如為算術級數，試求出其公差：

1. $7, 6\frac{1}{3}, 5\frac{3}{3}, \ldots\ldots$
2. $6, 5\frac{1}{2}, 4, \ldots\ldots$
3. $12, 10\frac{5}{6}, 9\frac{2}{3}, \ldots\ldots$
4. $3, 1, -1, \ldots\ldots$
5. $\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{3}, \ldots$
6. $-10, -7\frac{1}{3}, -4\frac{2}{3}, \ldots$
7. $\frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{8}{\sqrt{3}}, \ldots\ldots$
8. $\frac{\sqrt{3}+1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}+1}, \ldots$
9. $4, 1\frac{1}{2}, -1, \ldots$
10. $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1), \frac{13}{4(\sqrt{2}+1)} \ldots$

125. **第n項**　算術級數中，如a為初項，d為公差，其各項為

$$a, a+d, a+2d, a+3d \ldots\ldots\ldots$$

第二項d之係數爲1,第三項d之數係爲2,由此推之則知d之係數常較項數少1.故若l表n項，則得

$$l=a+(n-1)d.$$

如設l爲第n項，故算術級數又可寫爲

$$a,a+d,a+2d,\ldots\ldots,l-2d,l-d,l.$$

126. **n項之和**　求算術級數n項和之公式，可由下定理得來

定理　若命算術級數$a,a+d,a+2d,\ldots\ldots l-d$之n項和爲s則

$$s=\frac{n}{2}(a+l).$$

由定義，

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+(l-2d)+(l-d)+l\ldots\ldots(1)$$

將(1)右邊各項顛倒之，則得

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots\ldots+(a+2d)+(a+d)+a\ldots\ldots(2)$$

(1)與(2)項對項加之，則得

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots+(a+l)+(a+l)+(a+l)$$
$$=n(a+l).$$

即　　　$$s=\frac{n}{2}(a+l).$$

127. **算術中項**　介乎算術級數中兩項間之諸項，稱爲此兩項之算術中項，求兩數之算術中項，即以此兩數爲第一項及第三項而求其第二項是也。例如a與b之算術中項爲$\frac{a+b}{2}$因$a,\frac{a+b}{2},b$爲一算術級數，其公差爲$\frac{b-a}{2}$.

兩公式 $l=a+(n-1)d$……………………(I)

$$s=\frac{n}{2}(a+l)\text{……………………(II)}$$

其中共含四元a,l,s,n,d,若知其中任意三元，其餘兩元可由(I)與(II)兩兩聯立方程式求得之。

習　題

1. 求8,6,4,………之第十項及十項之和。

解： $n=10,\ a=8,\ d=-2.$

$l=a+(n-1)d=8+(9)(-2)=-10.$

$s=\frac{1}{2}n(a+l)=5(8-10)=-10.$

2. $l=5,\quad n=2,\quad d=-1.$求a及s.

3. $d=5,\quad s=30,\quad a=0.$求$l$及n.

4. $d=-4, a=7,\quad n=12$求l及s.

5. $d=\frac{1}{4},\quad l=\frac{1}{2},\quad s=\frac{1}{2}.$求a及n.

6. $a=0,\quad s=-6, l=-3.$求n及d.

7. $s=120,\quad l=19,\quad n=10.$求a及d.

8. $l=99,\quad n=99, a=1.$求s及d.

9. $s=435, n=15,\quad a=1.$求l及d.

10. $s=1\frac{1}{2},\quad n=5,\quad d=1.$求a及l.

11. $d=\frac{1}{6},\quad l=1,\quad a=\frac{1}{3}.$求n及s.

12. 求以d,l,s表a與n之公式。

13. 求以a,n,l表d與s之公式。

14. 求以a,d,s表l與n之公式。

15. 求以d,l,n表a與s之公式。

16. 求以a,l,s表d與n之公式。

17. 試於2與12之間，插入4個算術中項。

提示： $a=2,\quad l=12,\quad n=6.$求d.

18. 試於3與45之間，插入5個算術中項。

10. 試於12與−8之間，插入3個算術中項。

20. 試於$\frac{\sqrt{3}}{2}$與$\frac{\sqrt{3}+1}{3}$之間，插入2個算術中項。

21. 試於$\frac{\sqrt{2}-1}{3}$與$\frac{\sqrt{2}+1}{3}$之間，插入3個算術中項。

22. 試於a與l之間，插入$(n-2)$個算術中項。

註：　習題中，若需要三項，假設級數形爲$x-y, x, x+y$, 若需要五項,假設級數形爲$x-2y, x-y, x, x+y, x+2y$,均較假設級數形爲$x, x+y, x+2y, \ldots\ldots$ 容易化簡。餘類推

23. 求$3, 0, -3, \ldots\ldots$之第五項及共五項之和。

24. 求$4, 7, 10, \ldots\ldots$之第十項及共十項之和。

25. 求$5\frac{1}{3}, 4\frac{1}{6}, 3$,之…第六項及共六項之和。

26. 求$1, -5, -11, \ldots\ldots$之第六項及共六項之和。

27. 求$101, 98, 95, \ldots\ldots$之第十二項及共十二項之和。

28. 求$13, 15\frac{1}{2}, 18, \ldots\ldots$之第二十項及共二十項之和。

29. 求$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{6}, \ldots\ldots$之第五項及共五項之和。

30. 求$\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{16}{5\sqrt{2}}, \frac{17\sqrt{2}}{10}, \ldots$之第八項及共八項之和。

31. 求$\frac{\sqrt{3}+1}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5}, \frac{3\sqrt{3}-1}{5}, \ldots$之第十二項及共十二項之和。

32. 求$2x, 5x, 8x, \cdots$之第七項及共七項之和。

33. 求$a-2b, a-b, a, \cdots$之第十一項及共十一項之和。

34. 一算術級數，其首3項之和爲6,其首 10 項之和爲55. 求此級數。

35. 一算術級數，其首7項之和爲7,其首項12項之和爲 72, 試求初3項之和。

36. 一算術級數，其首4項之和爲16,其首4項平方之和爲84. 求此級數。

37. 落下物體，每秒終速度，猶如算術級數之一項。如第五秒終速度每秒160呎，且物體爲自由落下，求每秒適增加速度數。(此增加速度數稱爲加速度)。

提示：第一秒終速度爲級數之第二項，加速度即公差。

38. 落下物體，若第三秒終速度爲每秒89呎，第六秒終速度爲每秒185呎。試求其初速度及加速度。

39. 物體上昇第五秒終速度爲每秒100呎；下降第八秒終速度爲每秒20呎，試求其初速度及加速度。

40. 物體上昇第四秒終速度爲每秒213呎；下降第二秒終速度爲每秒63呎。試求其加速度及初速度。

41. 一運動物體，其初速度爲每秒35呎，在同一方向運動時，其第3秒終速度爲每秒50呎。若加速度爲常數，試求第15秒終速度，及其加速度。

42. 兩算術級數其初項相同，兩公差之比爲2:3.若第一級數之第三項爲13,第二級數之第五項爲29.試求出其各公差及公同之初項。

43. 一四位數，其數字爲算術級數。其數字之和爲24,其四位數字爲第一數字之3倍。試求此數。

第十五章

幾何級數

128. **定義** 一組數之各數可由其前一數以一常數乘而得之，此組數謂之幾何級數．

乘級數中各數而得次數之常數，謂之公比．

當注意者，幾何級數之公比亦如算術級數之公差，可爲正數亦可爲負數，且可爲整數亦可爲分數。

例如，幾何級數$1,2,4,8,\ldots\ldots$其公比爲2. 又如幾何級數$\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,\ldots\ldots$其公比爲$\sqrt{3}$.

習題

判定下列級數是否爲幾何級數，如爲幾何級數，求其公比：

1. $6,2,\frac{2}{3},\ldots\ldots$
2. $7,14,28,\ldots\ldots$
3. $12,-2,\frac{1}{3},\ldots\ldots$
4. $4,-2,-1,\ldots\ldots$
5. $\frac{1}{2}\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{8},\ldots\ldots$
6. $\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9},\ldots\ldots$
7. $-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{2},-\frac{3}{2\sqrt{2}},\ldots\ldots$
8. $\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{10\sqrt{5}},\ldots\ldots$
9. $\sqrt{\frac{7}{8}},\frac{1}{4}\sqrt{7},\frac{7}{8}\sqrt{14},\ldots\ldots$
10. $\frac{\sqrt{5}}{7},\sqrt{\frac{5}{7}},\sqrt{5}\ldots\ldots$
11. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}},-\frac{1}{3}(\sqrt{2}-\sqrt{5}),-\frac{7}{3}+2\sqrt{\frac{7}{9}},\ldots\ldots$
12. $\sqrt{3}+1,\ 2,\ 2\sqrt{3}-2\ldots\ldots$

129. **第n項**　何幾級數，設a爲首項，r爲公比，其各項爲

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots.$$

第二項r之指數爲1,第三項r之指數爲2,由是知r之指數常較項數少1.如以l表第n項，則得求n項爲

$$l=ar^{n-1}.$$

130. **n項之和**　幾何級數，其求首n項和之公式，可由下得來.

定理　設幾何級數$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$之首n項和爲s,則

$$s=\frac{a-rl}{1-r}.$$

由定義，$s=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots(1)$

兩邊各以r乘之，則得

$$rs=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)減(2),　$s-rs=a-ar^n$.

分解左邊因式，$s(1-r)=a-ar^n$.

以$(1-r)$除兩邊則得

$$s=\frac{a-ar^n}{1-r}.$$

131. **幾何中項**　n項之幾何級數，其首項與第n項間$(n-2)$項，謂之首項與第n項之幾何中項，

若在兩數間插入一個幾何中項，謂之二數之幾何中項，例如，a與b之幾何中項爲$\sqrt{ab}$.

兩基本公式

$$l=ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

及
$$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a-rl}{1-r}\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

共含有五個元a,l,r,n,s.若任知其三元，其餘卽可由(I)及(II)兩式求出之。

習題

1. 求2,6,18,……之第十項及其十項之和。

解： $a=2,\ r=3,\ n=10.$

由(I)， $l=2\cdot 3^9=39,366.$

由(II) $s=\dfrac{2-3\cdot 93366}{1-3}=59,048.$

2. 求$3,1,\frac{1}{3}$,…之第五項及其五項之和。

3. 求3,9,27,…之第八項及其八項之和。

4. 求1,2,4,之第七項及第七項之和。

5. 求8.4,2,…之第十二項及其十二項之和。

6. 求$\sqrt{2},2,\sqrt{2}$,…之第九項及其九項之和。

7. 求$\sqrt[3]{9},3\sqrt[3]{3},9$,…之第十一項及其十一項之和。

8. 求$\frac{1}{98},\frac{1}{14},\frac{1}{2}$,…之第六項及其六項之和。

9. 求$\sqrt{2}+1,1,\sqrt{2}-1$,…之第十項及其十項之和。

10. 求$\frac{1}{7},\dfrac{3+\sqrt{2}}{7},\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}$…之第四級及其四項之和。

11. 求$\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{2},1$…之第六項及其六項之和。

12. 求$\sqrt{\frac{1}{3}},1,\sqrt{3}$,…之第五項及其五項之和。

13. 求$\sqrt{5},1,\frac{1}{5}\sqrt{5}$,…之第七項及其七項之和。

14. 求$\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$,…之第八項及其八項之和。

15. 求$\frac{\sqrt{5}}{3}$,$\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\sqrt{5}$,… 之第五項及其五項之和。

16. 在3與81之間，插入2個幾何中項。

17. 在1與16之間，插入3個幾何中項。

18. 在$\frac{1}{2}$與-64之間，插入6個幾何中項。

19. 在1與$\frac{1}{32}$之間，插入4個幾何中項。

20. 在1與2之間，插入5個幾何中項。

21. 在3與4間，插入1個幾何中項。

22 在7與13之間，插入3個幾何中項。

23. 在9與$\frac{1}{81}$之間，插入5個幾何中項。

24 在$\sqrt{2}$與$\sqrt{5}$之間，插2入個幾何中項。

25. 求13與18之幾何項。

26. 在2與$\frac{1}{2}$之間，插入2個幾何中項。

27. 求7與35之幾何中項。

28. 求$\sqrt{x}$與$\sqrt{y}$之幾何中項。

29. 在$\frac{1}{\sqrt{2}}$與2之間，插入2個幾何中項。

30. 求$\frac{a+b}{a}$與$\frac{a+b}{b}$之幾何中項。

31. 一幾何級數，其首項爲4,其第三項爲64.求此級數。

32. 一幾何級數，其第三項爲25,其第七項爲$\frac{1}{25}$.試求此級數。

33. 二數之差爲6,其幾何中項爲4.試求此二數

34. 。一幾何級數，其第二項爲18,其第六項爲 144 試求其首項及公比。

35, 幾何級數各項同加一常數，是否仍爲一幾何級數？

36° 幾何級數各項同乘一常數，是否仍爲一幾何級數？ 其公比如何？

37. 三數成一幾何級數， 其和爲14,其第一數與第二數之積爲32求此三數。

38. 有四數成一幾何級數，其和爲 240，第一數與第四數之和爲 168. 求此四數。

39. 某人工作，第一日得銀1分第二日得銀2分第三日得銀4分，如所得銀數按日數如此增加，問第十三日應得銀幾分？又問在此十三日內，共得銀若干？

40. 有一皮球從高4呎之處落下，其每次反躍之高爲前次落至地面之距離之$\frac{1}{3}$，如是任其旋起旋落，問當第十次落地時共經若干距離？又問當第一次落地後可反躍高幾何？

41. 聲過山谷，每次回聲爲前次聲高之$\frac{2}{3}$，問第五次回聲之強度較原聲若何？

42. 二數之差爲48，若其幾何中項較其算術中項少 3. 試求此二數。

43. 按複利生息，每13年終之銀數較本金加增1倍。求銀1元，在65年終之本利和。

44. 一人有銀30元，若每週付出一半，問當其所餘銀少於1元，時，須經若干時間？

45. 有四數成一幾何級數，第一數與第四數之和爲 630，其第二數與第三數之和爲150. 求此四數。

132. 無限級數　幾何級數之項數爲無限時，謂之無限幾何級數。

設$r>1$，則級數 $a, ar, ar^2\cdots$ 之各項均大於其前項，此種級數謂之昇級數，又設$r<1$，其各項均小於其前項，此種級數，謂之降級數，然無論何種級數，$s=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}-\dfrac{ar^n}{1-r}$.

若$n>1$，n之值愈大，r^n之值亦愈大，故在此種情形，n項之和可隨之增大（此處只論絕對值）。實際上，項數儘量增加，則s可大於

任何限度。又若$r<1$,n之值愈大,r^n之值反愈小。如盡量使n加大，r^n可爲任何小，卽漸近於o爲極限。但因可使r^n漸近於o,則ar^n亦隨之而漸近於o,卽$\frac{ar^n}{1-r}$亦必隨之而漸近於o.又因$\frac{a}{1-r}$不隨n之值而變，由是若設$r<1$,使n盡量大時，n項之和卽漸近$\frac{a}{1-r}$爲極限。以符號表之，若$r<1$,無限級數之和

$$a+ar+ar^2+\dots$$

爲
$$s_\infty=\frac{a}{1-r}.$$

習　題

求下列無限級數之和：

1. $8+4+2+\cdots$.

解：　$a=8, r=\frac{1}{2}$.

$$s_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16.$$

2. $3+1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\dots$.
3. $18+6+2+\dots$.
4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots$.
5. $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots$.
6. $\frac{7}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\dots$.
7. $3+1+\frac{1}{3}+\dots$.
8. $7+3.5+1.75+\dots$.
9. $\sqrt{5}+1+\frac{\sqrt{5}}{5}+\dots$.
10. $(\sqrt{3}+1)+2+2(\sqrt{3}-1)+\dots$.

若n項之和較s_∞之差小於.001,求n.

11. $12+4+1\frac{1}{3}+\dots$.

解：　$a=12, r=\frac{1}{3}$.

$$s_n=\frac{a}{1+r}-\frac{ar^n}{1-r}=s_\infty-\frac{ar^n}{1-r}.$$

$$s_\infty-s_n=\frac{ar^n}{1-r}.$$

即求n之值使$\frac{ar^n}{1-r}$必須小於.001,

$$\frac{12.(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{12\cdot 3}{2\cdot 3^n}=\frac{18}{3^n}=\frac{2}{3^{n-2}}.$$

由試驗可知$n-2=7$,即$n=9$,$\frac{2}{3^{n-2}}$必小於.001.亦即$\frac{2}{3^{9-2}}=\frac{2}{2187}$.

12.　$81+9+1+\ldots$.

13.　$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots$.

14.　$90+9+.9+\ldots$.

15.　$21+7+2\frac{1}{3}+\ldots$.

16.　$16+2+\frac{1}{4}+\ldots$.

17.　$25+5+1+\ldots$.

求下列循環小數之值：

18.　.333….

解：　因此式可寫爲

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots.$$

由是，$a=\frac{3}{10}$，$r=\frac{1}{10}$.

$$即\ s_\infty=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{3}$$

19.　.222….

20.　.123123123….

21.　.656565….

22.　.919191….

23.　.1111….

24.　.999….

25.　.415415415….

26.　3.78223223223….

27.　15.2555….

高級代數

第十六章

虛數

133, 虛數單位 若只用有理數解二次方程式，則二次方程式有時爲不能解（閱65節）。例如解$x^2=2$，任何有理數之平方均不能爲2，故不得不引出新數（如$\sqrt{2}$）以濟其窮。然此時所引出之數，無需度量眞確——因有理數可完全適用於度量——不過爲推廣解上方程式之一數學符號而已。

相仿尤須引入他種數，若進而求解方程式

$$x^2=-1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

詳研究之，有理數之平方數絕不能等於-1只可以符號$\sqrt{-1}$記之，其意義與$\sqrt{2}$顯然有別，因$\sqrt{2}$尚可用開方法求得一數，其平方與2相差甚小，而$\sqrt{-1}$絕對不能。實際上，此種數其與1以及一切實數不僅在於方次不同，而數類亦異。吾人絕不能云$\sqrt{-1}$大於或小於一任何實數，更不能與一斗或一寸比較其大小。

$\sqrt{-1}$尋常以i表之，謂之虛數單位。以虛數名詞補數學之中斷，似乎過爲肯定。須知其實數無異於負數及無理數也，如前所論適合於方程式(1)所求之數。此後亦必說明其運算及歸結其性質，且證明可爲一種新數。

以$\sqrt{-1}=i$爲虛數單位，以造成虛數系正如以1作單位，以造成實數系。實際上不能用一尺去量出$\sqrt{-1}$亦正如無能力用一尺量出$\sqrt{2}$之精確，又正如說明無理數對於四則演算意義後，能演算無理數如整數；故將於說明虛數對於四則演算數義後，而亦用虛數作爲一種演算數，方能應用也。

134. 虛數之加減法 說明用虛數之演算，可依整數及一切實數之相當演算，故可書

$$0=0i,$$

$$i+i=2i,$$

$$i+i+i=3i,$$

以及
$$\underbrace{i+i+i+\cdots+i}_{n\text{項}}=ni\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(I)$$

普通，$a\sqrt{-1}=ai$，a爲任何之實數，因此由第75節，則得

$$\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{a^2(-1)}=\pm\sqrt{a^2}\sqrt{-1}=\pm ai\cdots\cdots(II)$$

所謂正負虛數者，卽因根號之前有正負號而定

玆說明虛數之加減法於次：

$$ai \pm bi = (a \pm b)i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

此處a與b表任何實數．

135．虛數之乘除法　已於公式(I)中說明以實數乘虛數法．因此由第73節，可說明

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = ii = i^2 = -1.$$

卽

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,ii = (-1)\sqrt{ab} = -\sqrt{ab} \ldots\ldots\ldots (1)$$

虛數乘法號，述之如次：

原則　兩虛數之根號前同號時，其積爲一負實數：異號時其積爲一正實數．

例如

$$-\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = -2\cdot 3\cdot i^2 = 6.$$

尤須知者，　$i^2 = -1$,　$i^3 = -i$,　$i^4 = 1$,　$i^5 = i, \ldots\ldots$

普通　$i^{4n+k} = i^k$,　此處$k = 0, 1, 2, 3$.

玆說明虛數除法如次：

$$\sqrt{-a} \div \sqrt{-b} = \frac{\sqrt{a}\cdot i}{\sqrt{b}\cdot i} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

演算虛數時，如爲$\sqrt{-a}$式，當先化爲$\sqrt{a}i$式，因如是可避免下列錯誤，卽不根據上(1)式之說明，而由第74節得

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{ab}.$$

習題

化簡下列各式：

1. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-27}$.

解： $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-27}=\sqrt{3}\cdot i\cdot\sqrt{27}\cdot i=\sqrt{81}\cdot i^2=9(-1)=-9$.

2. $\frac{1}{i^7}$.

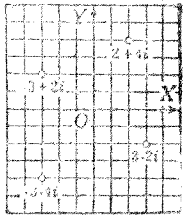
解： $\frac{1}{i^7}=\frac{i}{i^8}=\frac{i}{(i^4)^2}=\frac{i}{1}=i$.

3. i^{25}.
4. i^{12}.
5. i^9.
6. $\sqrt{-4}$.
7. $\sqrt{-16}$.
8. $3i\cdot 5i$.
9. $\sqrt{-x^{64}}$.
10. $\sqrt{-8x^2y^4}$.
11. $\sqrt{-m^8}$.
12. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-243}$.
13. $\sqrt{-10}\cdot\sqrt{-15}$.
14. $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-32}$.
15. $\frac{1}{i^5}$.
16. $\frac{1}{i^3}$.
17. $\frac{1}{i}$.
18. $\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}$.
19. $\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x^2}}$
20. $\sqrt{-i^2}$.
21. $\sqrt{-i^4}$.

196. **複數** 二次方程式之解答中，如附以負判別式(第106節)，則此式實包含兩種數，即一實數部與一虛數部兩部以一正號或負號連之，此種式即稱爲複數(Complex Number)。例如$6+4i$意即 $6\ 1's+4\ i's$. 由是顯然可知有一雙實數(x,y)可對應一複數，反之有一複數$x+iy$，亦可對應一雙實數。

137. **複數之圖示** 所有實數，均可以一直線表之，前已述及；欲表一對數(第57節)，可取一平面，假定面上之點與此對數一一對應，以故可表出一對數，而一複數$x+iy$實因獨立之實數值x與y而定，亦可於一平面取一點表之。

以x軸表實數，以y軸表虛數，則複數$x+iy$即可表以平面上點$(x，y)$。例如$-3+2i,2+4i,3-2i,-3-4i$均可表之如圖。



138. 複數之相等　兩複數$a+bi$與$c+di$若相等，必須$a=c,b=d$.

以符號表之，$a+bi=c+di$,若$a=c,b=d$

此定義可視爲合理，因1與i本不同類，固不能期望其一之某實數倍量，可與他一之某實數倍量相抵消也。

仿此，可拋棄抽象式1與i作單位，而換以實物房子與街道，可云

a個房子$+b$條街道$=c$個房子$+d$條街道，

若$a=c,b=d$.

原則　二數値式中若含有虛數而相等；其實數部必彼此相等，虛數部必彼此相等。

此定義以圖示之，卽相等二虛數乃平面上同一之點。

由此定義，　若$a+bi=o$,必$a=b=o$.

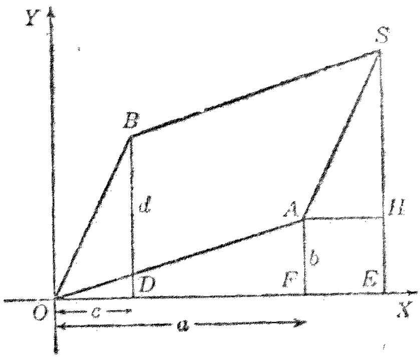
139. 複數之加減法　應用上述假定而複數$a+bi$,與$c+di$之加減法，可表爲

$$a+bi\pm(c+di)=a\pm c+i(b\pm d).$$

法則　複數相加(或相減)，即實數部與實數部相加(或相減)，虛數部與虛數部相加(或相減。)

140. **加法之圖示**　進而論圖表複數加法意義，則有下：

定理　二數$A=a+bi$及$B=c+di$之和，可以OA與OB爲邊所成之平行四邊形之第四項點表之。



設OASB爲一平行四邊形。

作　　$ES \perp OE$,

$AH \perp ES$,

$BD(=d) \perp OE$.

則$\triangle AHS = \triangle ODB$,

因各邊平行，且$OB=AS$.

故　$DB=HS=d$,　　$OD=AH=c$,

$$ES=EH+HS=b+d,$$

及
$$OE=OF+FE=a+c.$$

故S之坐標爲$(a+c, b+d)$可用以表A與B兩數之和(第139節)。

習　題

1. 證明二數$A=a+bi$及$B=c+di$之差$A-B$可以OD線之端點D表之，而OD線乃由原點所作之線與由OA與OB爲邊所成之平行四邊形之對角線BA平行。

圖表下列各式：

2. $1+i$　　4. $i-3$.　　6. $2+3i$.

3. $3-2i$.　　5. $-7+4i$,　　7. $(i-1)+(3+i)$.

8. $(3-i)-(4-2i)$

9. $(1+i)+(2-3i)$

10. $(12-3i)-(10-5i)$.

11. $(2-3i)-2(1-i)$.

12. $4(7-5i)+(6+8i)$.

13. $3(i+2)-4(2i-1)$.

14. $(-i-4)-(-2i-5)$.

15. $(16-15i)-(15-16i)$.

應用第138節，解下列式中x及y之值：

16. $3x+2iy=15-12i$.

27. $x+3iy+2i=i+7x-14i$.

18. $3ix-y=16-9$

19. $4x+3iy=12+18i$.

20. $2x-i=7x+2-(2y+4)i$.

21. $11x+3iy-2=20-9i$.

141. 複數之乘法　複數乘法如下：

法則　以複數c+di乘複數 a+bi, 儼如實數二項式相乘，唯須留意虛數乘法之正負號法則。

例如

$$\begin{array}{r} a+bi \\ c+di \\ \hline ac+bci+adi+bdi^2=ac-bd+(bc+ad)i. \end{array}$$

142. 共軛複數　二複數之差別僅在虛數部之號，謂之共軛數，或稱共軛虛數。

定理　二共軛複數之和及其積，均爲實數。

例如

$$a+bi+a-bi=2a,$$
$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

143. 複數之除法　二複數之商，可表單一複數。

法則　表$\frac{a+bi}{c+di}$之商爲x+yi之式，可用分母之共軛複數化爲有理分母。

例如 $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}$$
$$=\frac{ac+bd-i(ad-bc)}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-i\,\frac{ad-bc}{c^2+d^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

複數之加減乘除四則演算，已如上述，如複數之虛數部消失，即變爲實數，即由虛數之演算復化入實數之演算，且仍能與實數演算先後吻合。

題　　習

完成以下所示演算：

1　$(3+2\sqrt{-3})(5-3\sqrt{-2})$.

解：
$$3+2\sqrt{-3}=3+\ 2i\sqrt{3}$$
$$5-3\sqrt{-2}=5-\ 3i\sqrt{2}$$
$$\overline{15+10i\sqrt{3}-9i\sqrt{2}+6\sqrt{6}}$$

2.　$7\div(\sqrt{2}-i\sqrt{5})$.

解：
$$\frac{7}{\sqrt{2}-i\sqrt{5}}=\frac{7(\sqrt{2}+i\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-i\sqrt{5})(\sqrt{2}+i\sqrt{5})}$$
$$=\frac{7(\sqrt{2}+i\sqrt{5})}{2+5}$$
$$=\sqrt{2}+i\sqrt{5}.$$

3.　$(2+i)^2$.

4.　$(1+i)^4$.

提示：應用二項式定理展開

5.　$(a+ib)^3$.

6.　$(3-7i)^5$.

7.　$(a-bi)^6$.

8.　$(\sqrt{2}+\sqrt{-3})^2$.

9.　$(\sqrt{3}+5\sqrt{-4})^5$

10.　$(ix-y)^3$.

11.　$(\sqrt{x}-i)(\sqrt{x}+i)$.

12.　$(\sqrt{3}+i\sqrt{5})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})$

13.　$(\sqrt{x}+i\sqrt{y})(\sqrt{x}-i\sqrt{y})$

14.　$(2\sqrt{8}-5i\sqrt{3})(\sqrt{2}+2i\sqrt{3})$

15. $\frac{2}{3i}$.

16. $\frac{1}{1+i}$.

17. $\frac{1+i}{1-i}$.

18. $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{-2}}$.

19. $\frac{(a+i)^2}{(a-i)^2}$.

20. $\left(\frac{1-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^2$.

21. $\frac{2}{2+i\sqrt{2}}$.

22. $\frac{5}{7-5i\sqrt{3}}$.

23. $\frac{8}{\sqrt{8}-i\sqrt{2}}$.

24. $\frac{m-i\sqrt{-3}}{m+i\sqrt{-3}}$.

25. $\left(\frac{13}{5+8i}\right)^2$.

25. $\frac{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}-\sqrt{-y}}$.

27. $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$.

28. $\left(\frac{2+i\sqrt{2}}{3}\right)^3$.

29. $\frac{c+di}{a-bi}+\frac{c-di}{a+bi}$.

30. $\frac{2}{9+i\sqrt{-2}}$.

31. $\frac{25}{1+2\sqrt{-3}}$.

32. $\frac{1}{(a+i)^2}-\frac{1}{(a-i)^2}$.

33. $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.

34. 求方程式$x^3-8=0$之三根，並在平面上以點表其三根。

25. 求方程式$x^4-16=0$之四根，並在平面上以點表其四根。

36. 求方程式$x^6-64=0$之六根，並在平面上以點表其六根，更用圖證明六根之和為零。

37. 求方程式$x^3-27=0$之三根，並在平面上以點表其三根，更用圖證明三根之和為零。

第十七章

方程式論

144. n次方程式　含一變值之任何有理整方程式，其係數均爲有理數，可寫爲下式：

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

此處a_0爲正數；$a_0,a_1,\cdots a_n=0$均爲整數。

$f(x)$之記號，僅爲方程式右邊之代表；如方程式中以常數$b,-2$,或0代入時，亦可省記爲$f(b),f(-2)$,或$f(0)$。

例如 $f(b)=a_0b^n+a_1b^{n-1}+\cdots+a_n$.

仿此，亦可以他種形式代之；如$F(x),Q(x)$,等。

所謂含一變值之方程式，如式(1),亦可記爲下式

$$x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

此處　$b_1=\dfrac{a_1}{a_0},b_2=\dfrac{a_2}{a_0},\cdots$ 及 $b_n=\dfrac{a_n}{a_0}$

若$a_1,a_2,\cdots,a_n$均爲a_0之倍數，則$b_1,b_2\cdots b_n$爲整數。

在初等代數學中，無一總法可求高於二次以上方程式之根，不過僅由分解因式法，去解少數特殊高次方程式，例如方程式$x^4-1=0$及$x^3-1=0$可用分解因式法解之。本章要闡明任何次方程式之解法，其根或精確，或至所需之精度，要以發揮方程式之較簡而適用之性質爲主也。

145. 餘式定理 茲證明以下主要事實：

定理 若$f(x)$以$(x-c)$除之，其餘式等於在$f(x)$中，以c代變值x所得之式。

茲先將此定理以數值例題表之。

設$f(x)=x^3-3x^2+x+1$，又設$c=2$。可證明此三次式以$(x-2)$除之，其餘式為

$$f(2)=2^3-3(2)^2+2+1=-1.$$

實行除之，

$$\begin{array}{r|l|l}
x-2 & x^3-3x^2+x+1 & x^2-x-1 \\
 & x^3-2x^2 & \\
 & \quad -x^2+x & \\
 & \quad -x^2+2x & \\
 & \qquad -x+1 & \\
 & \qquad -x+2 & \\
 & \qquad\quad -1 &
\end{array}$$

其餘式果然為-1.

證明此定理之一般性，可以$(x-c)$除(1)式。設其餘式為R，其x之次數(第20節)必定較除式中為低；但在此例中，因除式$(x-c)$為一次式，故R必定為常數而不含x.又若以$Q(x)$表商式，商式當為x之$(n-1)$次式，則得

$$f(x)\equiv Q(x)(x-c)+R\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因此式為恆等式，給x之任何值均適合之(第52節)。

設$x=c$，則得

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_n=Q(c)(c-c)+R.$$

但因$c-c=0$, $Q(c)(c-c)=0$,

故 $$f(c)=R.$$

推論 若c為$f(x)=0$之一根，則$x-c$必為(1)式左邊之一因式。

因c若為為方程式一根，以之代x則左邊為零。即 $f(c)=0$.由是應用上述定理，則得

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_n=R=0.$$

故由(1)式，　　　$f(x)=Q(x)(x-c)$.

146. 簡便除法 用第57節所述之法，以圖表方程式

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

當 $a_0,a_1,\ldots a_n$ 以整數代入後，再次第以整數值代入x,而求y之相當值，此法太繁。若n之值愈大，繁重愈甚，但由前述餘式定理，可以減少繁難．此問題之目的，即在作圖時，知 x 之值求y之相當值之簡便法也。按餘式定理，即在 $f(x)$ 內以 c 代x,$f(x)$ 之值即為以$(x-c)$除$f(x)$之餘式。以故如代入以不同之 c 值，可應用求餘式之簡便法。茲舉例如下，設

$$f(x)=2x^4-3x^3+x^2-x-9, \text{及} c=2.$$

用普通除法，則得

$$\begin{array}{r|l|l}
x-2 & 2x^4-3x^3+x^2-x-9 & 2x^3+x^2+3x+5 \\
 & 2x^4-4x^3 & \\
 & \quad 1x^3+x^2 & \\
 & \quad 1x^3-2x^2 & \\
 & \qquad 3x^2-x & \\
 & \qquad 3x^2-6x & \\
 & \qquad\quad 5x-9 & \\
 & \qquad\quad 5x-10 & \\
 & \qquad\qquad +1 &
\end{array}$$

故除式 $+1=f(2)$。

此餘式之求法，固可如上所述，然亦可省簡作之如下。蓋因x僅為搬運係數者，而x可省略不書。又因商之各項與除數第一項之各部

份積，僅爲表示相減之抵消，亦無重寫之必要。故可歸結此法如次：

$$
\begin{array}{l|lllll|l}
\underline{1-2} & 2 & -3 & +1 & -1 & -9 & \underline{2+1+3+5} \\
 & & \underline{-4} & & & & \\
 & & +1 & & & & \\
 & & & \underline{-2} & & & \\
 & & & +3 & & & \\
 & & & & \underline{-6} & & \\
 & & & & +5 & & \\
 & & & & & \underline{-10} & \\
 & & & & & +1 & \\
\end{array}
$$

由上因負號2在每次部份積必變號，若以$+2$代-2，可加其部份積於被除式內之數以避免相減。此亦當然事也，因代入時卽以$+2$代x，非以-2代x. 由是更縮簡所有數字於一線上，而令代入x之數書於右方，則得

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -3 & +1 & -1 & -9 & \underline{2} \\
 & +4 & +2 & +6 & +10 & \\
\hline
2 & +1 & +3 & +5 & +1 & \\
\end{array}
$$

試考察最下層線上數字2,1,3,5，以至餘式，乃屬商之係數，卽

$$2x^3+x^2+3x+5.$$

簡便除法之法則　以次書出被除多項式之係數，缺者以0補之。

以所當代入x之數乘第一係數，而加（代數和）其積於次係數。

以所當代入x之數乘其和，而再加其積於又次係數。如此進行至所有係數值盡爲止，而最終之和卽爲餘式，亦卽以此數代入而得多項式之值。

習 題

用簡便除法完成下列除法：

1. $7x^3-26x^2+17x-6$以$x-3$除之。
2. $5x^3-3x^2-x-1$以$x-1$除之。
3. $15x^3-63x^2+17x-20$以$x-4$除之。
4. $2x^3+3x^2-5x+12$以$x+3$除之
5. x^3+x^2-1以$x-1$除之。
6. $3x^4-8x^3-50x^2-57x-18$以x^2-5x-6除之。

提示：因$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$故先以$x-6$除之，再以$x+1$除其商。

7. x^6-1以x^2+2x+1除之。
8. x^3-2x^2-2x-4以x^2-x-2除之。
9. $x^5-2x^4-5x^3+10x^2+3x-6$以$x-2$除之。
10. $7x^4-17x^3-17x^2+19x-12$以$x-3$除之。
11. $2x^4+13x^3+31x^2+38x+24$以x^2+5x+6除之。
12. $2x^4-25x^2+25x-12$以x^2+x-12除之。

147. 圖解方程式 由前述方法，作數值表以備圖解方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=y.$$

例 題

描方程式$x^3-3x^2+x-4=y$之圖。

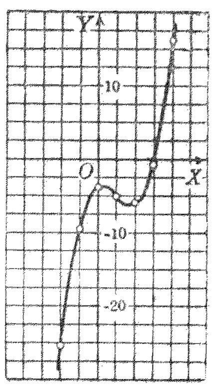
解：

x	4	3	2	1	0	−1	−2
y	16	−1	−6	−5	−4	−9	−26

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & +1 & -4 & 4 \\ & +4 & +4 & +20 & \\ \hline 1 & +1 & +5 & +16 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & +1 & -4 & 1 \\ & +1 & -2 & -1 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & -5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & +1 & -4 & 3 \\ & +3 & +0 & +3 & \\ \hline 1 & +0 & +1 & -1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & +1 & -4 & -1 \\ & -1 & +4 & -5 & \\ \hline 1 & -4 & +5 & -9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & +1 & -4 & 2 \\ & +2 & -2 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & -1 & -6 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & +1 & -4 & -2 \\ & -2 & +10 & -22 & \\ \hline 1 & -5 & +11 & -26 & \end{array}$$



曲線與x軸相交處，其x之值與$y=0$之值相當。故此等x之值方程式$y=f(x)=0$之根。

考察圖象，其與x軸相交衹有一處。在此種情形，表示方程式只有一實根，可令$y=0$其值約為 .1.由以後所論，若將方程式之常數項變動，可使圖象與x軸相交於三處，而令方程式得三個實根

148. 數值表之範圍 作方程式圖形之目的，為探察根之所在，即圖象與x－軸之交接部份外，不得含有實根。由是所求之數值表使所作之圖象可包含所有實根而止然若超過x大於某定值，能使圖形完全居x－軸上側，必無實根可大於此x值。

觀察前例題可見代入x數，可令其各部份餘式之符號均為正，即可生正y之值，其比此x值再較大之值，更應生正餘式，即y之值必為正。

由是若各部份餘式均為正時，無需乎以較大之正x值再代入。

仿此。各部份餘式由x最高乘方之係數起，正負相間，其x之較大負值亦無代入之必要。

作圖時，以一方格之邊作單位，若表中之值過大或分配欠宜於表明圖象，可以比例尺伸縮其單位長，使現出完善之圖象。即介乎極端根之圖像部份以能現出為妙，而美麗曲線亦得以漸漸披露全形。如第147節圖例，可稱為盡善又盡美矣。

習題

作下列方程式之圖形。並度量出各實根至兩位有效數字：

1. $x^3+3x-4=y$.
2. $7x^3+9x^2-5=y$.
3. $x^3+3x+14=y$.
4. $2x^3-17x-3=y$.
5. $x^3+2x-12=y$.
6. $7x^3-10x-3=y$.
7. $x^3+13x+14=y$.
8. $x^3-x+6=y$.
9. $x^4+x^3+x-51=y$.
10. $2x^3+3x^2-x+2=y$.
11. $x^4-2x^2+x-2=y$.
12. $2x^4-8x^3+x^2-2x+3=y$.
13. $12x^3-15x^2+10x+3=y$.
14. $x^4+2x^3-x^2+3x-6=y$.
15. $2x^4+x^3-3x^2+x-12=y$.
16. $-x^4+x3-x+3=y$.
17. $13x^4+21x^3-6x^2-7x-10=y$.
18. $6x^4+7x^3+8x^2-10=y$.

146. **方程式之根** 在線方程式與二次方程式之例，可求出其根以係數表得之式，然此種作法在多數高次方程式中不可能也。實際上，證明任何方程式俱有一根，實超越本書之範圍，茲僅可作下列：

假定 任一方程式至少必有一根。

此假定亦於必有一數，或爲有理數或爲無理數或爲虛數，可適合於已知方程式。

150. **根數** 欲確定一方程式之根數，可由下

定理 任何n次方程式，必有n個根。

設方程式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$,其數均爲實數。

設r_1(關假定)爲此方程式之一根，則(第145節)$x-r_1$爲其左邊一因式，其$f(x)$之商式爲$(n-1)$次之多項式。

假設$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

$$=a_0(x-r_1)(x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}).$$

由假定之商式，

$$x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots b_{n-1}=r,$$

至少俱有一根，例如為r_2.則相當一因式$x-r_2$.由是

$$f(x)=a_0(x-r_1)(x-r_2)(x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\cdots+c_{n-2}).$$

如法推之，漸次可求出諸根以及相當諸一次因式如下；

$$f(x)=a_0(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n)=0,$$

其根即$r_1, r_2, r_3\cdots r_n$等是也。

注意：若干實根或虛根，因係數不同而亦異，此定理未表明也。

推論　一含x之n次多項式，可以a_0乘n個一次因式表之，其因式如$(x-c)$，r為一實根或一複根。

須注意者，其根不必不同。或許有數個根及其因式均相同．

若$f(x)$為$(x-r_1)^2$整除之，即$r_1=r_2$,可云方程式有倍根。仿此，若$f(x)$為$(x-r_1)^p$整除之，r_1為p次倍根。以故云方程式有n個根者，其倍根之次數有幾，亦應表幾個根也。

定理　一個n次方程式，其不同之根不能多於n個。

設$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$,其根為$r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$

寫方程式為

$$a_0(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)=0.$$

若t亦爲一根，且與$r_1, r_2, \dots r_n$不相同。因能適合於方程式，則

$$a_0(t-r_1)(t-r_2)\dots(t-r_n)=0.$$

因其乘積爲零，必至少有一因式爲零(第99節)。但$t \neq r_1$,以故 $t-r_1 \neq 0$.仿此，無一二項之因式可爲零。由是(第99節)$a_0=0$,但由原設方程式爲n次，a_0亦不得爲零。

此定理亦可述之如次：

推論 I 若n次方程式$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$可爲$n$個以上之不同$x$値適合之，其係數必皆爲零.

證明此定理。可證明若方程式有$(n+1)$個根，則$a_0=0$. 由是又得一$(n-1)$次方程式亦爲$(n+1)$個之x値適合之．則x之最高乘方之係數又必爲零。仿此各係數均應爲零。

推論 II 若兩個含同一變値之多項式，其變值以任何値代入均彼此相等，則同次項之係數必相等．

設無論x之値以何數代入$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n$,

移項， $(a_0-b_0)x^n+\dots+(a_n-b_n)=0.$

由推論 I，
$$\begin{aligned} a_0-b_0&=0 \quad \text{或} \quad a_0=b_0,\\ a_1-b_1&=0 \quad \text{或} \quad a_1=b_1,\\ &\vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\ a_n-b_n&=0. \quad \text{或} \quad a_n=b_n. \end{aligned}$$

151. 圖象之意義 前節所述定理之圖象之意義，乃表明n次方程式之圖象不能與x軸相交在n次以上，因每一交點，必有一根，如若方程式有虛根，其交點且必少於n個也。

152. 虛根 由此進行證明方程式如有虛根，其虛根發生必爲成雙共軛根。茲證明如下

定理 若 $a+ib$ 爲具有實係數方程式之一根，則 $a-ib$ 亦必爲一根。

若 $a+ib$ 爲方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ 之一根，則 $x-(a+ib)$ 爲一因式(第145節)。至是要證 $x-(a-ib)$ 亦爲一因式，亦即等於要證明其乘積。

$$[x-(a+ib)][x-(a-ib)]=[(x-a)-ib][(x-a)+ib]$$
$$=(x-a)^2+b^2$$

爲 $f(x)$ 之一因式。以 $(x-a)+b$ 除 $f(x)$，則得

$$f(x)=Q(x)[(x-a)^2+bx^2]+kx+k'\ldots\ldots\ldots(1)$$

此地 k 與 k' 爲實數，因除式 $(x-a)^2+b^2$ 僅爲二次式。其餘式 $kx+k'$ 之 x 次數必不能高於一次(第20節)，但方程式(1)爲一恆等式，x 之值無論以何數代入均不失相等。例如以 $f(x)$ 之根，$a+ib$ 代入 x，則得 $f(a+ib)$ $=0=Q(a+ib)[(a+ib-a)^2+b^2]+k(a+ib)+k'$,

或(第53節與第5節)

$$0=0+ka+k'+ikb,$$

或(第138節) $$ka+k'=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

及 $$kb=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

因 $b\neq 0$, $$k=0.$$

又由(2) $$k'=0.$$

故 $$kx+k'=0.$$

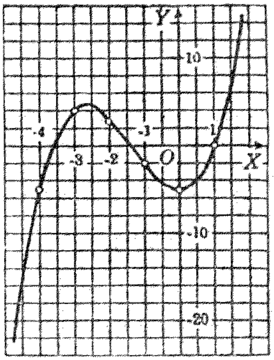
由是即證明以 $(x-a)^2+b^2$ 除 $f(x)$ 而無餘式，亦即若 $a+ib$ 爲 $f(x)$ 之一根，而 $a-ib$ 亦必爲一根。

推論 具有實係數之奇次方程式，至少必有一實根。

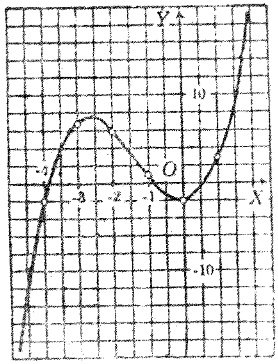
由前定理，其根不能盡為虛數，因不然方程式即為偶次矣。

153. 虛根之圖之意義　由圖表方程式

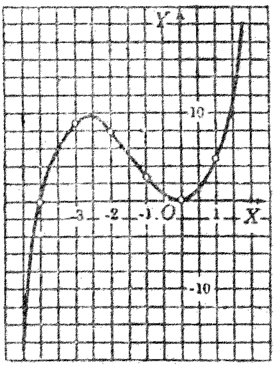
$y=x^3+4x^2-5\ldots(1)$



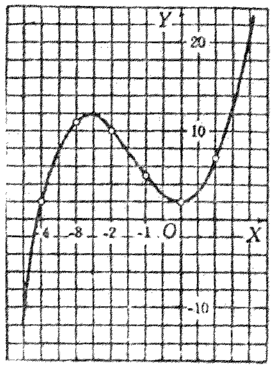
$y=x^3+4x^2-2\ldots(2)$



$y=x^3+4x^2\ldots(3)$



$y=x^3+4x^2+2\ldots(4)$



可知常數項增加，方程式圖象離 x 軸向上移動，實際上，其圖象完全相同，僅 y 之值增加也。在(1)與(2)，則有三個實根，在

(3)則兩根重合，在(4)則不含實根。在圖象之彎曲部離開 x 軸而不與相觸，其一雙根即刻不爲實數。但因三次方程式應有三根，故有一雙根變爲虛根。如是則得下

原則 方程式圖象之各彎曲部如離開x軸不與相觸，方程式即因之生一雙虛根。

其逆定理不常眞。因不能求出圖象之彎曲個數如方程式之虛根之對數也。

習　題

作下列方程式之圖象並由圖象判定其實根個數：

1. $x^3-1=y.$
2. $x^3+1=y.$
3. $x^7-3=y.$
4. $x^7-x+3=y.$
5. $x^3+x^2+1=y.$
6. $x^5+3x^3-7=y.$
7. $x^3+3x^2-7x+2=y.$
8. $x^3+3x^2+7x-2=y.$
9. $2x^3+5x^2-3x+1=y.$
10. $8x^3+3x-7=y.$

154. 根與係數之關係

若寫下式爲(第191頁推論)

$$x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n\equiv(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

且將各因式實行乘出，由x之同次方之係數相等，則得根與係數之關係。例如，設$n=3$.

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$

$$=x^3-(r_1+r_2+r^3)x^2+(r_1r_2+r_2r_8+r_1r_3)x-r_1r_2r_3=0.$$

故 $b_1=-(r_1+r_2+r_2),$

$b_2=r_1r_2+r_2r_8+r_1r_2,$

及 $b_8=-r_1r_2r_3,$

由此得下

定理　x^{n-1}之係數等於諸根之和而變號。

常數項等於諸根之積而變號。

一般論之，x^{n-k}之係數等於諸根每次取k個之可能乘積和，而符號變之。

注意：　須注意者，符號法則乃示各項作成後常變號。並非k為偶數時亦當變號，不過包含為一致起見常變號而已。

推論　方程式之每一根，均為常數項之因數。

155. **試解法**　由前推論方程式之每一根均為常數項之一因式，故用此定理及一簡便除法可試探方程式有無整根。且亦常能用此法以求出方程式之所有之根。

例如方程式

$$x^4+5x^3+8x^2+x-15=0\cdots\cdots(1)$$

之整根必為15之因式。

用簡便除法以-3試除之：

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +5 & +8 & +1 & -15 & \underline{-3} \\ & -3 & -6 & -6 & +15 & \\ \hline 1 & +2 & +2 & -5 & & \end{array}$$

故-3為方程式(1)之一根，以$x+3$除之其商式為

$$x^3+2x^2+2x-5=0\cdots\cdots(2)$$

前方程式俱有整根，必為5之因式。用簡便除法以$+5$試除之：

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +2 & +2 & -5 & \underline{5} \\ & +5 & +35 & +185 & \\ \hline 1 & +7 & +37 & +180 & \end{array}$$

故5不為一根，再以$+1$試之：

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +2 & +2 & -5 & \underline{1} \\ & +1 & +3 & +5 & \\ \hline 1 & +3 & +5 & & \end{array}$$

故$+1$爲一根，方程式(1)之其他根乃由解

$$x^2+3x+5=0$$

即得 $$\frac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}.$$

故方程式(1)之根爲$-3, +1$,及$\frac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}$.

習　題

用試解法解下列方程式：

1. $x^3-9x-10=0.$
2. $x^3+3x^2-4=0.$
2. $x^3-14x+8=0.$
4. $x^3-17x+26=0.$
5. $x^3-31x+30=0.$
6. $x^3-27=0.$
7. $x^3-x^2-10x-8=0.$
8. $x^3+5x^2+10x+8=0.$
9. $x^3-21x+20=0.$
10. $x^3+10x^2+17x-28=0.$
11. $x^3-3x^2-8x-10=0.$
12. $x^4+7x^3+9x^2-16x-28=0.$
13. $x^4-3x^3-19x^2+3x+18=0.$
14. $x^4-13x^3+21x^2+85x+50=0.$
15. $x^4+7x^3-7x^2-55x-42=0.$
16. $x^4-8x^2+9x-2=0.$
17. $x^4-2x_3-7x^2+8x+12=0.$
18. $x^4-17x^2+36x-20=0.$
19. $x^4-x^3-15x^2+40x-28=0$
20. $x^4-4x^3-9x^2+16x+20=0.$

156. **作程方式**　若知方程式之所有根，可由前兩法中(閱第104節及第154節)任一法以作方程式。

第一法　若$r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$爲已知之根，可乘起因$(x-r_1)\ldots\ldots(x-r_n)$即得方程式。

第二法　用第154節所述定理，由已知之根作各係數。

除去一根外，若其餘之根及方程式均爲已知，此根即可由解第二項之係數所成之一次方程式或末項所成之一次方程式得之。若除去兩根外，其餘之根及方程式均爲已知，二未知量可由解此兩聯立方程式得之。

下列習題之解法，多應用第154節所述之定理及根與係數之關係。

習 題

用第156節所述二法，由已知之根作方程式：

1. $2, -1, 3.$

解：

第一法： $(x-2)(x+1)(x-3)=x^3-4x^2+x+6=0.$

第二法： 設方程式形狀爲

$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0$

由第154節， $b_1=-(2-1+3)=-4,$

$b_2=-2+6-3=1,$

及 $b_3=(-2)(1)(-3)=6.$

故方程式爲 $x^3-4x^2+x+6=0.$

2. $3, 2, 4.$
3. $3, 3, 3, 3.$
4. $7, 6, 1, 0.$
5. $3, 0, 1, 0.$
6. $2, 0, 0, 0.$
7. $\pm\sqrt{3}, \pm 2i.$
8. $8, \pm\sqrt{2}, 3.$
9. $1\pm\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{3}.$
10. $5, 3, -2.$
11. $8, -8, 1.$
12. $2, 1\pm i.$
13. $-3, 2, 1\pm\sqrt{3}.$
14. $2\pm 3i, -2\pm 3i.$
15. $7, \pm\sqrt{-1}.$
16. $1, -2, 2, -3.$
17. $\frac{1}{2}, 2, 1\frac{1}{2}, -1.$
18. $\pm\sqrt{2}, \pm i\sqrt{2}.$
19. $-1, 1\pm i\pm\sqrt{2}.$
20. $\pm 3, \dfrac{\pm\sqrt{3}}{7}.$
21. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}.$
22. $5, -4, \dfrac{3\pm 2\sqrt{-1}}{4}.$
23. $1, -2, \dfrac{5\pm 2i}{2}.$

習題24－29.其結果求出，限制不得用因式分解方程法。

24. 方程式$x^4-5x^3-19x^2+29x+42=0$有二根，卽-3與$+2$.試求其餘之根。

解： 設未知根爲a及b.

由第154節， $-a-b+3-2=-5,$

及 $-6ab=42.$

解之，則得 $a=7$或$-1,$

$b=-1$或$7.$

25. 方程式$x^3-19x-30=0$之二根爲5與-3，試求其餘一根。

26. 方程式$x^3-7x-6=0$之一根爲3，其餘根爲何？

27. 方程式$x^3+7x^2+7x-15=0$之一根爲1，試求其餘之根。

28. 方程式$x^4-5x^3+3x^2+5x-6=0$之二根爲1與2，其他根爲何？

29. 方程式$x^3-12x^2+44x-48=0$之根成算術級數，其根爲何？

30. 若兩方程式$x^3-3x-2=0$與$x^4+3x^3-3x^2-12x-8=0$有公根，在同一坐標軸上作其圖象，然後由圖象判定其公根。

31. 求一方程式之中項，其根爲 $1, -2, 5,$ 及 -4；其他各項亦未決定。

32. 若知方程式之根爲$3, \pm 2,$ 及$1\pm\sqrt{2}$；其末項爲何？

33. 方程式 $x^4-4x^3+3x^2+2x-6=0$ 之一根爲 $1+i$，求其餘之根。

34. 方程式 $x^4-4x^3+2x^2+20x+13=0$之一根爲$3-2i$求其他之根。

作下列方程式之圖象，由圖象定其所有整根，並解出其餘之根。

35. $x^4-8x^2-4x+3=0$.

解：

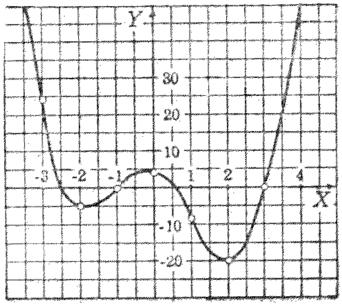
x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	115	0	-21	-8	31	0	-5	24

由圖象可視出此方程式之整根爲$+3$及-1，故與原方程之左邊因式$(x-3)$及$(x+1)$相對應，其他二根可以二因式$(x-3)$及$(x+1)$順次除原方程式之左邊，而解所得商式之方程式以求之。

$$\begin{array}{rrrrrl} 1 & +0 & -8 & -4 & +3 & \underline{|3} \\ & +3 & +9 & +3 & -3 & \\ \hline 1 & +3 & +1 & -1 & 0 & \underline{|-1} \\ & -1 & -2 & +1 & & \\ \hline 1 & +2 & -1 & 0 & & \end{array}$$

故得商式爲

$$x^2+2x-1=0$$



此方程式之根爲 $-1+\sqrt{2}$ 及 $-1-\sqrt{2}$. 此二根亦可應用習題24所示之法求出之。

36. $x^3-x^2-9x+9=0.$

37. $x^3-2x-4=0.$

38. $x^3+4x^2-9=0.$

39. $x^3-x^2-17x+20=0,$

40. $x^3+x^2-22x+8=0.$

41. $x^3+3x^2-2=0.$

42. $x^4+5x^3+6x^2+x-1=0.$

43. $x^4-2x^3-2x^2+3x+2=0.$

44. $x^4+x^3-10x^2-7x+15=0.$

45. 七次方程式可有若干虛根。

46. 若方程式 $x^3+ax^2-bx+c=0$ 有二等根，其第一根爲何？又兩等根爲何？

47. 若方程式 $x^3+x^2+x+c=0$ 有二根互爲倒數，求其各根。

48. 若方程式 $x^3+x^2-bx+c=0$ 有二根，其和爲零，求b與c。

49. 若方程式 $x^3+3x^2-x+c=0$ 有二等根，求c。

157. **以常數乘根** 在下方程式內，若 $n>2$ 用初等方法不能解之

$$f(x)=a_0x^n+a_0x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

但常能變更方程式之形狀，而得出能求根之方程式。以後卽可明瞭如方程式有有理根，卽可求之；唯須如下法以變更方程式。

此乃欲由(1)以作一方程式，使所作之方程式之根等於(1)之根以常數 k 乘之。卽所求之方程式，其根必爲 $kr_1, kr_2, kr_3 \ldots kr_n$. 玆証明三次方程式，亦可推及一般。

設　$f(x) \equiv a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$

其根爲 r_1, r_2, r_3. 因所求之方程式，根應爲 kr_1, kr_2, kr_3. 若以r表 $f(x)=0$ 之任意一根，則 $f(x)=0$ 必爲r適合之(第52節)；換言之，$f(r) \equiv 0$. 但顯然 $f\left(\frac{z}{k}\right)=0$ 亦必爲kr適合，卽

$$f\left(\frac{kr}{k}\right) \equiv f(r) \equiv 0.$$

由是所求之方程式如爲 kr_1, kr_2, kr_3 適合之，只須在 $f(x)$ 內，設 $x=\frac{z}{k}$.

卽所求之方程式形爲

$$f\left(\frac{z}{k}\right) = \frac{a_0z^3}{k^3} + \frac{a_1z^2}{k^2} + \frac{a_2z}{k} + a_3 = 0,$$

以k乘之，或爲　$a_0z^3 + ka_1z^2 + k^2a_2z + k^3a_3 = 0.$

玆作成下列一般

法則　以常數k乘一方程式之根，可由 x^{n-1} 之係數起，各係數逐一乘以 $k, k^2 k^3 \ldots k^n$.

作此演算時，如x之乘方數有所缺少，可先以零爲係數補充之。

例　題

試以3乘方程式 $4x^3 - 13x + 6 = 0$ 之根。

解：　根據上述法則，乘各係數：

$$4x^3 + 0\cdot 3x^2 - 13\cdot 9x + 6\cdot 27 = 0.$$

化簡之，　$4x^3 - 117x + 162 = 0.$

如第144節(2)式之形，一方程式俱有分數係數，若原方程式之根選擇適當數乘之，則可作一含整數係數之方程式。

推論 I　若k為一分數，此法卽變爲以已知數除方程式之根。

推論 II　若$k=-1$用法所作之方程式與原方程式之根相等而號相反。卽$f(-x)=0$之根與$f(x)=0$之根相等而號相反。

習　題

1. 作一方程式，其根如$x^4-5x^3+x-5=0$之根之三倍大。

解：　補充方程式之缺少項，則得

$$x^4-5x^3+0x^2+x-5=0.$$

因$k=3$,由法則，則得

$$x^4-3\cdot5x^3+9\cdot0x^2+27x-81\cdot5=0$$

或
$$x^4-15x^3+27x-405=0.$$

2. 作一方程式，其根如$x^3+x^2-3x+2=0$之二倍大。

3. 求一方程式，其根如$x^4+3x^3-5x^2+2x-6=0$之根之半。

4. 求一方程式，其根如$x^3+7x^2+3=0$之根之四分之三。

下列方程式，其根須乘以何數，使所得方程式中x最高程方項之係數爲1，而其餘各項係數均爲整數。

5. $2x^3-7x^2+5=0.$

解：　由觀察可知所求之方程式係數，須爲2所除盡，

設$k=2$.由法則，則

$$2x^3-2\cdot7x^2+4\cdot0x+8\cdot5=0$$

卽爲所求之方程式。

化簡，　$x^3-7x^2+20=0.$

6. $x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+1=0.$

7. $x^3-\frac{1}{27}=0$

8. $x^3+\frac{a}{b}x^2+\frac{a}{b^2}x+\frac{a}{b^3}=0.$

9. $x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{27}x+1=0.$

10. $3x^3-5x^2-2x+10=0.$

11. $5x^4+3x^2+x-3=0.$

12. $7x^3+2x^2-5x+1=0.$

13. $15x^4-3x^3+\frac{3}{5}x^2+3x-9=0.$

作方程式令其根適爲下列各方程式之根之負數。

14. $x^3-3x+2=0.$

解：　補充方程式之缺少項，則得

$$x^3+0x^2-3x+2=0.$$

由推論II，變符號，

$$x^3-0x^2-3x-2=0.$$

或

$$x^3-3x-2=0.$$

15. $x^3-3x^2+4x-1=0.$

16. $x^4+3x^2+2=0.$

17. $x^4+3x^3-x^2+x-1=0.$

18. $x^3+7x^2-5x+2=0.$

19. $x^4+3x^3+9x^2+27x-1=0.$

20. 變更奇次方程式各項之號，於其圖象有何影響？

21. 變更方程式根之符號，其圖表圖象變化意如何；卽方程式未變更以前之圖象與方程式既變更以後之圖象有若何關係，當(a)爲一偶次方程時？(b)爲一奇次方程時？

22. 若$x^4+4x^3-3x^2-10x+8=0$之二根爲-2與1，求$x^4-4x^3-3x^2+10x+8=0$之所有根。

23. 若$x^3+3x^2-16x+12=0$之一根爲2，求$x^3-3x^2-16x-12=0$之根。

24. 若$x^4+2x^3-17x^2-18x+72=0$之二根爲2與3，求$x^4-2x^3-17x^2-18x+72=0$之根。

158. 戴咯眥之符號法則 (Descartes's Rule of Signs) 方程式中相隣兩項俱有同號者，謂之連號，異號者謂之變號 (Change of Sign)。

例如，$2x^4-3x^3+2x^2+2x-3=0$有一個連號而有三個變號。如只書其號，$+-++-$，更覺明瞭。

若一方程式乘以一因式，如$(x-c)$，而c爲正數，即方程式增加一個正根；則試問對於原方程式中之變號數目有何影響。例如方程式$2x^4-3x^3+2x^2+2x-3=0$以$(x-2)$乘之則得，

$$2x^4-3x^3+2x^2+2x-3\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ \hline 2x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x \\ -4x^4+6x^3-4x^2-4x+6 \\ \hline 2x^5-7x^4+8x^3-2x^2-7x+6 \end{array}$$

在最後所得式，其號之序爲$+-+--+$，其變號數目爲四，卽較在(1)式中多一。若以若干正根引入一方程式內，則常能至少增加以相等之若干數目變號於原方程式內。以故一方程式內其變號之數目之多至少等於正根之數目之多，或者超過正根之數目，然絕不能較正根之數目爲少也。此一至理，是所當證。

戴咯眥之符號法則 一方程式 $f(x)$ 之正實根，不能多於 $f(x)$ 中變號之數目。

例如，一次方程式$x-2=0$，變號數目爲一而正根數目亦爲一，但一次方程式之變號數目無多於一之可能性，卽僅有$+-$或$-+$是也。

二次方程式 $x^2+2x+1=0$，無變號故亦無正根，蓋x之值爲正則x^2+2x+1亦必爲正，必永不爲零。又二次方根式$x^2+2x-3=0$有一號有一正根。但二次方程式中隣號之序，僅有$+++$，$++-$，$+--$，$+-+$四種。又因常數項爲兩根之積，如末項爲負，且假定根爲實

數，必須是一正根同一負根，以故有下結論：如爲＋＋＋，必無正根。；如爲＋＋－或＋－－，正根之數不能多於 1；如爲＋－＋，可有兩個正根。至於在＋＋＋與＋－＋兩種情形，常能發見虛根。

戴略賞法則之證明　戴氏法則已証明適合於一次方程式及二次方程式，玆証明可及於一切方程式。

假定戴氏法則適合於 m 次方程式，必須証明能適合於 (m＋1) 次方程式。詳言之，卽證明若一 m 次方程式乘以 (x－c) 後，此處 c 爲一正數，其所得新方程式內變號之數目必超過原方程式內變號之數目至少爲一個。換言之，若作以此種乘法，變號數目之增加最少限度亦如正根數目之增加。

設 f(x)＝0 表一任何特別 n 次方程式。f(x)之第一號常能爲正。其餘號可爲隣接之正號羣或負號羣，每羣中至少含該號爲一。若方程式內缺少任何項，該項之號可取之如其一鄰之號。由是則 f(x)內號之排列情形可如下表，而表中之點卽表示羣內之號爲無定數。玆僅記出號以表以(x－c)乘(x)

	正號羣	負號羣	正號羣	負號羣	以下各羣	負號羣
f(x)	＋……＋	－……－	＋……＋	－……－	＋……＋	－…－
x－c						＋－
x·f(x)	＋　＋…＋	－　－…－	＋　＋…＋	－　－…－	＋　＋…＋	－　－…－
－c·f(x)	－…－	－＋…＋	＋－…－	－＋…＋	＋－…－	－＋…＋＋
(x－c)f(x)	＋±…±	－±…±	＋±…±	－±…±	＋±…±	－±…±＋

變號±乃表示可發生+號亦可發生−號，須因方程式之係數與 c 之值而定。上下線乃表示變號在 f(x)中發生處。現在假定所有變號取可能變號之最低數目，在 (x−c)f(x) 內，其兩上下線中間必定生一變號，而又多添上右上下線處一變號。由是知方程式之正根數目增加一個，變號之數目必隨而增加，且絕不少於一個。實際上，若方程式內變號數目多於正根數目；如將正根數目增加一個，其變號數目常不只一個。

在 f(x)內每羣號，可有任何變動，卽最末羣之號爲正羣號，亦無不可。

上之證明，以下例表之、

例 題

設 $f(x)=x^5+3x^4-7x^3-6x^2-2x-1$ 及 $c=3$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{設} & x^5+3x^4-7x^3-6x^2+2x-1 \quad \text{(三個變號)} \\
 & x-3 \\
\hline
 & x^6+3x^5-7x^4-6x^3+2x^2-x \\
 & -3x^5-9x^4+21x^3+18x^2-6x+3 \\
\hline
 & x^6+0x^5-16x^4+15x^3+20x^2-7x+3 \quad \text{(四個變號)}
\end{array}
$$

159. **負根** 因 f(−x)之根與 f(x)之根符號相反(第157節)，茲說明

戴咯貲法則之於負根 一方程式 f(x) 之負實根，不能多於 f(−x)中變號之數目。

用戴氏法則，在 n 次方程式中，如其正根數目不能過乎 a，負根數目不能過乎b,若$a+b<n$,則方程式之虛根數目至少爲$n-(a+b)$個。

習　題

求下列方程式之正負根之最大數目，並作虛根數目之可推測數：

1. $x^3-3x+2=0$

解：　補足缺少項，

$$x^3+0x^2-3x+2=0.$$

只寫出號，＋＋－＋，則知正根之數不能多於二。

寫出 f(－x) 之號，－＋＋＋，則知負根之數不能多於一，但斯方程式僅有三根，故可無虛根。

2. $x^3-1=0.$
3. $x^6+2=0.$
4. $x^4+x^3-3x-2=0.$
5. $x^4+x-1=0.$
6. $x^7+8x^5+2x^3-1=0.$
7. $x^3-5x^2+2x+3=0.$
8. $x^5-x^3+x^2-x-1=0.$
9. $x^4+3x^3-5x^2+7x-8=0.$
10. $x^7+3x^5-2x^4+3x^2-x+2=0.$
11. $x^6+x^5-2x^4+3x^3-7x^2+x-1=0.$

160.　**整根**　欲求方程式之有理根，須應用以下

定理　若方程式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

(其係數$a_1,a_2,\ldots,a_n$均為整數)俱有任何有理根，其根必為整數。

設$\frac{p}{q}$為化為最低項之分數，使適合於此方程式。

故$\frac{p^n}{q^n}+\frac{a_1p^{n-1}}{q^{n-1}}+\ldots a_n=0.$

為一恆等式。

消去分數，並移項，

$$p^n=-q(a_1p^{n-1}+\ldots+a_nq^{n-1}).$$

由是q必爲q^n之一因式，亦卽q爲p之一因式(第65節)，此與假設$\frac{p}{q}$爲一最低項分數相矛盾。

故此方程式之有理根必爲有理整根，且知(第54節)均爲a_n之因式。

161. 有理根 若欲求一般方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

之有理根，而$a_0\neq 1$，可選取適宜之數(第157節)乘其根而得出第160節定理所與之方程式形，其整根可用簡便除法求得之。

例　　題

方程式$9x^3-6x^2-19x-10=0$ ……………………(1)

如有有理根，當爲何數？

解：　以3乘其根

$$9x^3-18x^2-171x-270=0$$

以9除之，

$$x^3-2x^2-19x-30=0 \text{……………………(2)}$$

由戴咯貲法則，方程式(1)僅有一個正根而可有兩個負根，茲試求三根之存在，用簡便除法，於(2)作數值表，由第154節可僅試驗30之因式。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	5	6
y	−18	−8	−14	−30	−50	−68	−78	−50	0

故(2)有一根爲6,則原方程式(1)有一根爲$6\div 3=2$.

法則 欲求任一方程式之有理根時，可先變更成一方程式令其第一係數爲+1.

用戴咯貲法則求正負根數目之最大限度。

用試驗法求此方程式之整根，以乘原方程式之根之常數除此整根，即爲原方程式之根。

用第160節之定理，可確定所有有理根均可按此法求之。

習　題

試求下列方程式之所有有理根：

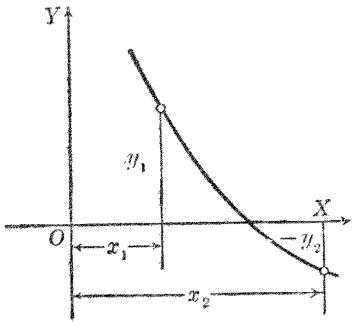
1. $3x^3=8(x+1)$.
2. $x^3+5x^2+5x-2=0$.
3. $x^3+x^2+2x-4=0$.
4. $6x^3+13x^2+4x-3=0$.
5. $6x^3+x^2-15x+4=0$.
6. $3x^4+4x^3-6x^2-3x+2=0$.
7. $4x^3+12x^2+13x+6=0$.
8. $7x^3+17x^2+11x+10=0$.
9. $4x^3-4x^2-25x+25=0$.
10. $2x^3-7x^2+12x-7=0$.
11. $6x^3+5x^2-16x-15=0$.
12. $12x^3+20x^2-69x+18=0$.
13. $2x^3+3x^2-11x-6=0$.
14. $4x^3+16x^2+11x-3=0$.
15. $27x^3+18x^2-6x-4=0$.
16. $2x^4+3x^3-24x^2-14x+12=0$.
17. $3x^4+11x^3-8x^2-13x+8=0$.
18. $4x^4+8x^3-17x^2-16x+21=0$.
19. $18x^4+33x^3+17x^2+8x+6=0$.
20. $8x^4-4x^3-6x^2+x+1=0$.
21. $15x^4+22x^3-20x^2-7x+2=0$.
22. $36x^4-13x^2+1=0$.
23. $3x^4+17x^3+33x^2+37x+30=0$.

162.　**方程式之無理根**　關於求方程式之有理根，前節已完全解決，茲討論求無理根近似值之問題。

能計算方程式之無理根有兩三位數字眞確，已足敷尋常之要求，如無需用絕對眞確之必要時，其近似值即可由次節之圖解法求之。此法實用於計算數目方程式之無理根，其眞確限度可隨所欲。

乃英人候納(W. G. Horner 1786－1837)所發明，其應用最為普通，詳第166節。

163. 位置原理 作方程式 f(x)之圖象時，如令 $x=x_1$，則得 y 之相當値爲一正數 y_1 又令 $x=x_2$,則得 y 之相當値爲一負數 $-y_2$. 由是知曲線上 $x=x_1$, $y=y_1$ 之點乃居x軸上方，而曲線上 $x=x_2$, $y=-y_2$ 之點乃居 x 軸下方，若曲線此部不至中斷，則在 $x=x_1$ 與 $x=x_2$ 之間必至少與x軸相交一次，以故此方程式至少亦有一實根介乎此等x値之間。如是若將 x_1 至 x_2 之値愈爲逼近，則根之較確値卽可求出矣。茲先假定方程式



$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

之圖象爲連續的(Continuity),並假定下列

位置原理 若與x以不相等之兩實値，例如 $x=x_1$ 與 $x=x_2$, 而 $y=f(x)$ 之値符號相反，則介乎 x_1 與 x_2 之間。方程式 $f(x)=0$ 必有一實根。

例如，方程式 $f(x)=x^3+3x-5=0$ 有一根介乎 1 與 2 之間，蓋因 $f(1)=-1$ 及 $f(2)=9$.

若將方程式中欲求之根之鄰近部份圖象作出，則根之近似値

即可由圖象上說出矣。如此所得之值間或有不甚真確，因甚難作出，絕對真確之圖象也。但所求値之精度尚不需要，尚可放大比例尺用同一方法以求較精之近似値。正如簡便除法探根之在小數點一位數之中間，以探根之在小數點後兩位數之中間，如此放大比例尺度可求根之値至小數點後數位。

在未探求方程式之一根以前，玆先作方程式之全形，便可明瞭圖象與x軸之逼近交接處之觀念。

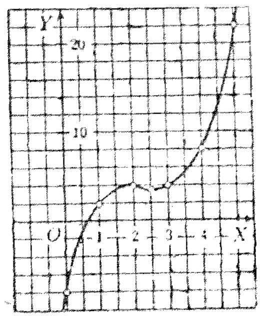
例　題

用作圖法求方程式$x^3-7x^2+16x-8=0$之最小正根，要兩位小數。

解：由笛咯賃法則，知此方程式必無負根。

由方程式$y=x^3-7x^2+16x-8$之圖形，

x	0	1	2	3	4	5	$2\frac{1}{2}$
y	−8	2	4	4	8	22	3·9



可知其根近於x＝0.8.

欲判定某根居某兩個一位小數之中間，可演算如下：

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -7 & +16 & -8 & \underline{.8} \\ & +0.8 & -4.96 & +3.832 & \\ \hline 1 & -6.2 & +14.04 & +0.832 & \end{array}$$

此足以表明根必小於0.8，因取此值爲x而y尙等於0.832.

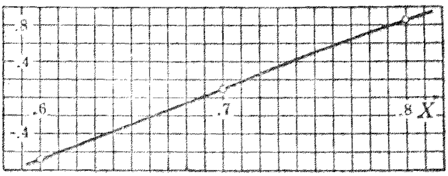
$$\begin{array}{rrrr|l} 1-7 & +16 & -8 & & .8 \\ & +0.7- & 4.41+ & 8.113 & \\ \hline 1-6.3+ & 11.59+ & 0.113 & & \end{array}$$

此足以表明根必小於0.7，因取此值爲x而y尙等於0.113.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1-7 & +16 & -8 & & .6 \\ & +0.6- & 3.84+ & 7.296 & \\ \hline 1-6.4+ & 12.16- & 0.704 & & \end{array}$$

此足以表明根必大於0.6，因取此值爲x而y卽等於－0.704. 若在以放大比例尺作此結果之圖象，由圖象卽可審出x＝0.69.

x	.6	.7	8.
y	－.704	.113	.832



習 題

用作圖法，求下列方程式之實根而兩位小數：

1. $x^3-2x^2-4x+6=0$
2. $x^2-2x-12=0.$
3. $x^2-2x-6=0.$
4. $x^2-30=2x.$
5. $x^2+6x-104=0.$
6. $x^2+10x+30=0.$
7. $x^3+2x^2-10x-18=0.$
8. $x^3-4x^2+2x+6=0.$
9. $x^4-33x^2+29x+60=0.$
10. $2x^4-8x^3+3x^2-2x+1=0.$

164 減小方程式之根 爲便於用侯納法求方程式之根，必須能由一方程式作一新方程式，使新方程之根等於原方程式之根同減一常數.

設$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$....................(1)

其根爲 $r_1, r_2, \dots, r_n$. 設 c 爲任一常數，則所求之方程式其根應爲 $r_1-c, r_2-c, \dots, r_n-c$. 若以 r 代表(1)之任何根，因$f(r)=0$(第145節)，又$f(z+c)=0$顯然爲$r-c$所適合，即

$$f(r-c+c)=f(r)=0.$$

由是所作之方程式，即以$z+c$代換x，故得

$$f(x)=f(z+c)=a_0(z+c)^n+a_1(z+c)^{n-1}+\dots+a_n=0.$$

用二項定理展開各項並合併z之同羃項，則所欲得之方程式爲

$$f(x)=F(Z)=A_0Z^n+A_1Z^{n-1}+\dots+A_n=0\text{..............}(2)$$

此處$A_0, A_1, \dots, A_n$含有$a_0, a_1, \dots, a_n$與c.

由是若 $a_0, a_1, \dots a_n$ 與 c 爲已知之數值，極須有一簡便方法以求 $A_0, A_1, \dots, A_n$ 等係數之值。但 A_n 爲以 z 除$F(z)$之除式，而 $F(z)=f(z)$ 及 $z=x-c$，如是以z除$F(z)$之餘式與以$(x-c)$除 $f(x)$之餘式完全相同。故 A_n 即爲以 $(x-c)$ 除 $f(x)$之餘式。由此推之，A_{n-1} 爲以 Z 除 $\frac{F(z)-A_n}{z}$ 之餘式，而能以$(x-c)$除 $\frac{f(x)-A_n}{x-c}$ 之餘式代之。此法可繼續求出其他係數A_{n-2}, A_1, A_0故得減小方程式之根用常數 c 之法如下

法則　新方程式之常數項 A_n 等於以$(x-c)$除 $f(x)$之餘式。

新方程式之係數 A_{n-1} 等於以 $(x-c)$ 除上所得商式之餘式。

$A_{n-2}, A_{n-3}, \dots, A_2, A_1, A_0$ 等係數，等於以$(x-c)$除順次各商之餘式。

例　　題

作一方程式其根等於方程式 $x^4-3x^3+5x^2+7x-12=0$ 之根減 3.

解：　用簡便除法完成演算如下：

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -3 & +5 & +7 & -12 & \underline{3} \\
 & +3 & +0 & +15 & +66 & \\
\hline
1 & +0 & +5 & +22 & +54 & \\
 & +3 & +9 & +42 & & \\
\hline
1 & +3 & +14 & +64 & & \\
 & +3 & +18 & & & \\
\hline
1 & +6 & +32 & & & \\
 & +3 & & & & \\
\hline
1 & +9 & & & &
\end{array}
$$

故所求之方程式爲

$$x^4+9x^3+32x^2+64x+54=0.$$

165. **減小根之圖象之意義**　若一方程式之根等於他一方程式之根減去c 個單位，又若c爲一正數；其與 x 軸以及與平行x軸之線相交點適爲他一方程式之相當交點向左側移動 c 個單位，實際上，其圖形完全相同，猶如y軸向右側移動 c 個單位。又若 c 爲一負數，則等於y軸向左側移動c個單位。

習　　題

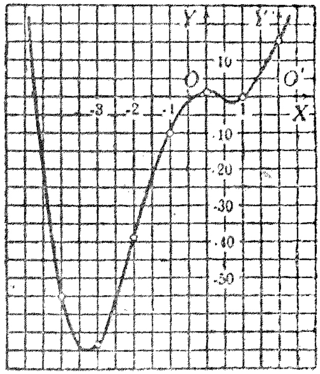
將方程式之根減去c 個單位，作新方程式之圖象並指定其新坐標軸。

1. $x^4+3x^3-7x^2+2x+1=0,\quad c=2.$

解：

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	.9	1	2
y	66	−55	−68	−39	−10	1	−.03	0	17

1	+3	−7	+2	+1	2
	+2	+10	+6	+16	
1	+5	+3	+8	+17	
	+2	+14	+34		
1	+7	+17	+42		
	+2	+18			
1	+9	+35			
	+2				
1	+11				



故所求之方程式為

$x^4+11x^3+35x^2+42x+17=0.$

此方程式之坐標軸指定如左圖。

2. $x^4-81=0, c=3.$

3. $x^3-27=0, c=1.5.$

4. $x^4+3x^2-1=0, c=2.$

5. $x^3+x^2-1=0, c=1,$

6. $x^3-9x+3=0, c=3.$

7. $6x^3+11x^2-9x+1=0, c=\frac{1}{2}.$

8. $3x^3+29x^2+60x+28=0, c=-2.$

9. $x^3+3x^2-4x-12=0, c=2.$

10. $x^3-6x^2-7x+60=0, c=4.5.$

11. $x^4+5x^3-7x^2-41x-30=0, c=10.$

12. $x^3+2x^2-5x-6=0, c=-3.$

13. $2x^3+x^2-24x+9=0, c=5$

14. $3x^4+7x^3+3x^2-3x-2=0, c=1.$

15. $x^3-6x^2-36x+5=0, c=-2.$

16. $x^4+2x^3-12x^2+3x-4=0, c=1.$

17. $x^3-3x^2+3x+1=0, c=1.$

18. $x^4-12x^3+3x^2+7x-5=0, c=3.$

19. 由觀察習題15－18之結果，判定方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a=0$ 之根須增加何數，使新方程式 x^{n-1} 之係數為零。

20. 不實際解出方程式，指明方程式 $x^n+a_n=0$ 之根是否能增加或減去一數，使新方程式之常數項消失。

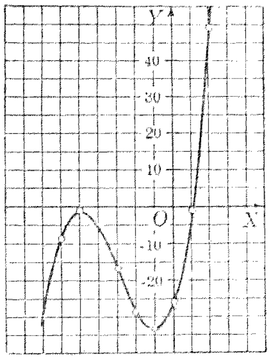
166 用候納法計算根之近似值 欲求方程式之實根至所需之精度，可就下方程式研究之：

$$x^3+9x^2+15x-26=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

製數值表以作方程式之圖

$$x^3+9x^2+15x-26=y.$$

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
y	−8	−1	−6	−17	−28	−33	−26	−1	48



由位置定理，知其根必居 +1 與 +2 之間，欲知根之確切地位，可由圖象估定根之值，例如，以1．1或1．2等數代入之，直到能探出根居兩何數之間，且可得同樣結果，而計算能大加簡便，若先將方程式之根減小使原點居在根所介之兩個整數之小者地位，以故 (1) 之根須減以1.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +9 & +15 & -26 & 1 \\
 & +1 & +10 & +25 & \\
\hline
1 & +10 & +25 & -1 & \\
 & +1 & +11 & & \\
\hline
1 & +11 & +36 & & \\
 & +1 & & & \\
\hline
1 & +12 & & &
\end{array}$$

其根減以1之方程式爲

$$x^3+12x^2+36x-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

因方程式(1)之根在1與2之間，故知(2)之根在0與1之間，由圖象可估定根之地位。根之值如經估定，例如0·1須證實所估計值並由簡便除法判定在兩小數點後一位小數之確切地位，例如，再以0.1試之，則得

$$\begin{array}{rrrr|l} 1+12 & +36 & -1 & & .1 \\ \hline +0.1+ & 1.21 & +3.721 & & \\ \hline 1+12.1+ & 37.21 & +2.721 & & \end{array}$$

此足以表明x＝0·1之點，曲線居x軸上方，又因取x＝0而y之值爲−1，則知x＝0之點曲線居x軸下方，因之卽知(2)之根在0與0·1之間，換言之，方程式(1)之根在1·0與1·1之間，但以0除(2)之餘式爲−1,而以0·1除(2)之餘式爲+2·721,故可假定(1)之根距1·0較逼近距1·1較略遠：

欲求根有兩位小數眞確，自然須再移動原點，此時可移動到(2)之根所在兩個整數之小者地位，但因此兩數之小者爲零，故在此種情形無須有移動之必要。

因(2)之根在0與0·1之間，其x^3與x^2必甚小，在計算次位小數之近似值時，雖刪之亦無妨礙，故此層卽求下列一次方程之根以作(2)之近似根

$$36x-1=0$$

故 $$x=0.03.$$

此結果必須用簡便除法證實並判定(2)之根在何兩第二位小數之間。

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +12 & +36 & -1 & .03 \\ \hline & +0.03 & +0.3609 & +1.090827 & \\ \hline 1 & +12.03 & +36.3609 & +0.090827 & \end{array}$$

因餘式爲 $+0.090827$，故知在此處曲線居x軸上方，則根必小於0.03. 取0.02試之，則得

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & +12 & +36 & -1 & \underline{|.02} \\ & +0.02+ & 0.2404 & +0.724808 & \\ \hline 1 & +12.02+ & 36.2404 & -.275192 & \end{array}$$

此足以表明在 $x=0.02$ 之點，曲線又居x軸下方，由此除法比較兩餘式，則相距0.03較逼近距0.02較略遠，故知方程式（1）之根介1.02與1.03之間而又較近於1.03. 若所需精度較大，可編續如法作之，可得任意之正確小數。

上述方法，綜合如下

法則. 作方程式之圖象，用位置原理判定根在兩連續正整數之間。

以根之所在兩個整數之小者減小方程式之根。

由圖象估定新方程式之根所在最接近的一位小數數，用簡便除法判定兩個連續一位小數數爲根之所在。

以根之所在兩個一位小數數之小者減小方程式之根，由最末兩項作一次方程式解之以估定根至小數點後二位數之最接近似數。

由簡便除法以判定根所在小數點後第二位數之確切値。

仿此法作之，可得正確根之任意所需位數。

整數，第一位小數數，第二位小數數及以下各層中所求根之小數値之總和卽爲原方程式之近似根。

求方程式$f(x)=0$之負根時，可求$f(-x)=0$之正根而變其號。

若方程式之根均為實數，可將所得根加之，其和能否與原方程式第二項之係數近於相等以作核算。

習　　題

試求下列方程式之實根，其精度要三位小數：

1. $x^3+8x^2+21x+25=0$ ……………………(1)

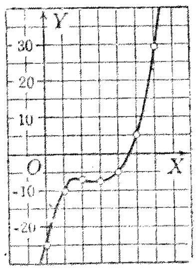
解：由戴咯賞法知此方程式必無正根。作$f(-x)=0$而求其正根。

故得　$x^3-8x^2+21x-25=0$ ……………………(2)

令(2)等於y以作其圖，由圖象可審出一根約為4·6.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	−25	−11	−7	−7	−5	5	29

將(2)之根減去4：



$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -8 & +21 & -25 & 4 \\
 & +4 & -16 & +20 & \\
\hline
1 & -4 & +5 & -5 & \\
 & +4 & +0 & & \\
\hline
1 & +0 & +5 & & \\
 & +4 & & & \\
\hline
1 & +4 & & &
\end{array}$$

得方程式$x^3+4x^2+5x-5=0$ ……………(3)

證實0·6與0·7約當(3)之根：

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +4 & +5 & -5 & .6 \\
 & +0.6 & +2.76 & -4.656 & \\
\hline
1 & +4.6 & +7.76 & -.344 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +4 & +5 & -5 & .7 \\
 & +0.7 & +3.29 & +5.803 & \\
\hline
1 & +4.7 & +8.29 & +.803 &
\end{array}$$

故判定其根在0·6與0·7之間。

將(3)之根減去0·6：

1	+	4	+	5	−	5	.6
	+	0.6	+	2.76	+	4.656	
1	+	4.6	+	7.76	−	.344	
	+	.6	+	3.12			
1	+	5.2	+	10.88			
	+	.6					
1	+	5.8					

得方程式$x^3+5\cdot8x^2+10\cdot83x-0\cdot544=0$…………(4)

估定(4)之根，$x=\frac{.344}{10.88}=0\cdot03$，並証實之：

1	+	5.80	+	10.8800	−	.344000	.03
	+	.03	+	.1749	+	.331647	
1	+	5.83	+	11.0549	−	.012353	

1	+	5.80	+	10.8800	−	.314000	.04
	+	.04	+	.2336	+	.444544	
1	+	5.84	+	11.1136	+	100544	

將(4)之根減去0·03：

1	+	5.80	+	10.8800	−	.344000	.03
	+	.03	+	.1749	+	.331647	
1	+	5.83	+	11.0549	−	.012353	
	+	.03	+	.1758			
1	+	5.86	+	11.2307			
	+	.03					
1	+	5.89					

得方程式$x^3+5\cdot89x^2+11\cdot2307x-0\cdot012353=0$………(5)

估定(5)之根，$x=\frac{.012353}{11.2307}=.001$，並証實之：

1	+	5.890	+	11.230700	−	.012353000	.001
	+	.001	+	.005891	+	.011236591	
1	+	5.891	+	11.235591	−	.001116409	

1	+	5.890	+	11.230700	−	.012353000	.002
	+	.002	+	.011784	+	.022484968	
1	+	5.892	+	11.242484	+	.010131968	

由是得方程式(1)之根，其精度要三位小數，為$-4\cdot631$.

2. $x^4-27=0.$
3. $x^3-x=17.$
4. $x^3-18=0.$
5. $7x^4+3x^3+3=0.$
6. $x^3+x^2=150.$
7. $x^2-x-10=0.$
8. $x^4+x-19=0.$
9. $x^3-7x+13=0.$
10. $x^4+5x^3+7x^2+x-2=0.$
11. $x^4+x^3+x=135.$
12. $x^3-x^2+3=0.$
13. $x^3+3x-5=0.$
14. $x^3+2x^2-3x-2=0.$
15. $x^3+x^2+x-99=0.$
16. $x^3-5x^2-3x+1=0.$
17. $x^4-x^3+x^2-x+66=0.$
18. $x^4+12x^3+6x^2-3x+2=0.$
19. $x^3+5x^2+6x-11=0.$
20. $x^3+4x^2+x-2=0.$
21. $3x^4+2x^3+x^2-x+3=0.$
22. $2x^4-17x^3+16x^2-10x+5=0.$
23. $9x^3+3x^2+x-5=0.$
24. $x^4+3x^3-7x^2+2x-1=0.$
25. $10x^3+30^2-10x+1=0.$
26. $x^3-7x+7=0.$
27. $2x^5+3x^4+3x^3-5x^2-5x+2=0.$
28. $24x^3-2x^2-17x-5=0.$
29. $36x^3+9x^2-22x+5=0.$
30. $x^4-3x^3+x+1=0.$

第十八章

排列，組合，適遇法

167. **導言** 在未討論本章主旨以前，先解答兩種連續動作之不同方法問題，即第一種動作可有p種方法，而第二種動作可有q種方法，如欲併起來完成此兩種連續動作，究須方法若干？例如，某人可由第一屋之四個門任一走出而由第二屋之五個門任一進入，其不同之穿過方法究有幾種？試想此人若由第一屋之門走出後，彼可從第二屋之五個門中任選擇一個進入第二屋，由第一屋走出方法共有四種，而任擇一種作後即可用五種方法進入第二屋，故此人出第一屋而入第二屋之方法共$4\times5=20$種由此種事理得下

定理 有連續不同兩種動作，若第一種動作可以p種方法完成，當第一種動作任擇一種完成之後，而可用q種方法以完成第二種動作；其合併完成此兩種連續動作不同方法之總數必為$p\cdot q$種。

因由完成第一種動作之p種方法中任擇一種，可相應以q種方法完成第二種動作，如是由定成第一種動作之所有p種方法，均能相應以q種方法完成第二種動作，即完成兩種動作方法總數為$p\cdot q$種。

如無特別聲明，本處所論之動作彼此均假定獨立，此意義即取第一種動作方法任作其一種，可有絕對自由權以選擇第二種動作方法之一作之，如上述之例，某人如由第一屋之一門走出，絕無限

制對於選擇第二屋之門進入是也。

下列習題以及本章所有習題，學者不應只希圖代入於公式而應細審題中情形，在各種實例均宜直接追尋題意，所謂公式者不過爲証實所得結果或足書爲整齊形狀而已，常有不適用之處。

問　題

1. 一人入飯店，如有3種肉食與4種菓食，此人可有若干種方法各選一種食之。

解：因任一種肉食可由四種菓食中擇一種以配之，如是彼可由所選之一種肉食以配成4種不同之食品，故配食品種類爲12.

2. 某人在支加哥與鈕約之間有4條鐵路供其選擇，在鈕約與利物普之間有6道航輪供其選擇，問此人由支加哥旅行利物普，其選擇路線方法有幾？

3. 2個旅客有3個客店可供投宿，若兩人不許同住一客店內，其投宿方法有幾？

4. 2個旅客有4個客店，可供投宿，若兩人不許同住一客店內，其投宿方法有幾？

5. 4個人停留4個客店內，如不許兩個人同住一客店內，其停留方法有幾？

6. 一人有4件禮服3頂禮帽，其配用方法有幾？

7. 由波斯頓至鈕約共有6種不同交通機關可供行旅，一人由波斯頓旅行至鈕約復返至波斯頓，如往返不許藉助同一交通機關其旅行方法有幾？

8. 一演劇者，有衣10套，帽6頂，臉樣4種，問可裝出若干不同狀態？

9. 一西餐有湯汁2種，肉食5種，生菜3種及菓食4種，若一顧客各選一種配而食之，其選擇方法可有若干？

168. 排列 若干不同之物，取其全數或一部份具排列不同之次序，是謂之排列.

例如， 1與2兩個數字，若取其全數，可有兩種排列，即12與21是也。

又如1 2,3,三個數字，每次取兩個之排列數有六種，即 12,13,21,23,31,32是也。蓋因取佔第一位置，可選擇2或3以佔第二位置，則得12與13.又取2佔第一位置時，則得21與23.相仿可得31與32.此法須注意者，即在兩位置中佔第一位置時可由三個數字內任意選取一個；而佔第二位置時僅能由所餘兩個數字內選取一個，故由第167節之定理，三個不同之物每次取兩個之排列數爲$3\cdot2=6$種，並由乘積$3\cdot2$審察之，其第一因式3適當所論物之總數，而因式之數又如每次取物之數，換言之爲2,此足以助成以下

定理 n個不同之物每次取r之排列數爲

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式以記號${}_nP_r$表之。

此式記憶甚便，第一因式爲n，等於所論物之總數；其因式之數爲r，等於每次取物之數，例如，${}_7P_3=7\cdot6\cdot5$.

証此定理可先設$r=1$,顯然n個不同之物每次取一個之排列數爲n種，蓋因每次取單一物只有一種排列。

再每次取兩個物，即$r=2$.因共有n個物，故共有n種方法可佔兩位置之第一位，若第一位被一物即佔之後，其第二位置可由所餘$(n-1)$個物選擇佔之，故應用第167節之定理，設$r=2$，排列數爲$n(n-1)$.即証明公式(1)在$r=2$時能成立。

設$r=m$,且$m>3$,假定公式(1)能成立，再證明 $r=m+1$ 時此公式(1)亦能成立

$${}_nP_m=n(n-1)\ldots(n-m+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

前m個位置佔據方法共有${}_nP_m$種，因P_m爲n個之物每次取m個之排列數，此可視爲第一種動作(第167節)， 其第二種動作卽考究第$(m+1)$位置之佔據方法，而可由所餘$(n-m)$個物意選一以佔之，可共得$(n-m)$種，如是先後合併完成之數共有${}_nP_m(n-m)$種，故得n個之物每次$(m+1)$個之排列數爲

$$\begin{aligned}{}_nP_{m+1}&={}_nP_m(n-m)\\&=n(n-1)(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m),\end{aligned}$$

此乃與所假定公式(1)同形，卽$(m+1)$代換m是也。

推論　n個之物，每次全取之排列數爲

$${}_nP_n={}_n(n-1)\ldots2\cdot1=!\text{*或記爲}\underline{|n}\qquad(II)$$

卽在(1)內設$r=n$,卽得(II)。

問　　題

1. 書架上放書20冊， 如每次取出3冊排列之，共有方法若干種？

解： 第一位置可有20種法，第二位置可有19種法，第三位置可有18種法，故由第167節定理，其總排列數爲$20\cdot19\cdot18=6840$,

2. 將六册排列一書架上，可有若干不同方法？

3. 由英文二十六個字母每次取5個字母作一字， 可得字若干？

4. 若僅由英文二十四個字母每次取3個字母作一字，可得字若干？

5. 求 Publisher一英文字之排列數。

*此記號$n!$或$\underline{|n}$表$1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n-1)n$.讀爲n之階乘。

6. 由1,2,3,4,5五個數字，作兩位數字之數，如每數字不許重複用之，可得若干不同之數？

7. 由15個不同樣之旗，每次取7個掛成一行，其不同之記號有幾？

8. 有20樣不同之輪，如每次取4個配置一汽車上，其不同方法有幾種？

9. 某人藏科學書十冊，文學書五冊，如置於二書架上，使科學書佔一書架文學書佔一書架，其不同方法應有幾種？

提示：　閱第168節推論及第167節定理。

10. 某人有海上風景畫片六張，陸地風景畫片八張，如此人欲於兩室內，各掛成一行，且使一室全爲海上風景畫而他室全爲陸地風景畫，其掛法應有若干種？

169. 組合　任何物羣，如不論羣中物之次序，其組謂之組合。

例如，約翰.斯密司.加克遜三人成一團體，與加客遜，斯密司.約翰三人成一團體完全相同。尋常，由不同之物所造之羣數，不關於各物之次序，是謂之組合問題。

例如，由六人中選三人爲一組，若以 A,B,C,D,E,F 表其六人，由第168節所述，其每次取三人之不同排列數必爲6·5·4=120種，但 A,B,C;A,C,B;B,A,C,等羣在排列則有別，在組合則相同，根據第225頁推論，取三個物之排列數有3！=6種，故A,B,C,三人之6種排列，只能得一種組合，由此可推及其他所選不同三人之組；故任何三人之六種排列，只得出一種組合，故其組合數適爲其排列數之六分

之一，或

$$\frac{{}_6P_3}{3\,!}$$

由此得下之普通

定理　由n個不同之物，每次取r個之組合數(${}_nC_r$)爲

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r\,!} \qquad (I)$$

因(I)之分子爲${}_nP_r$，故書爲

$${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r\,!}$$

以故排列數適爲組合數之r！倍。

此公式分子中之因式數目與分母中之因式數目相同，故記憶甚便，例如，

$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}.$$

推論　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$.

(I)式之分子與分母同以(n－r)！乘之。

$$\begin{aligned}{}_nC_r&=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots2\cdot1}{r\,!\,(n-r)\,!}\\&=\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}\\&=\frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{(n-r)\,!}\\&=\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-r)+1]}{(n-r)\,!}\\&={}_nC_{n-r}.\end{aligned}$$

此推論有時使計算省事，例如，欲計算出${}_{19}C_{17}$，如計算${}_{19}C_2=\frac{19\cdot18}{2\cdot1}=171$，較計算${}_{19}C_{17}$方便多矣。

問　　題

1. 某人有馬十匹，欲選四匹爲一組，但因十者之中有三匹適宜於列在每組前兩位置而不宜在其他位置，問其選取方法若干？

解：此問題顯然須分兩層解之：即先由三匹特殊馬中取二匹爲一組，而得組合數爲3又由其餘七匹馬中取二匹爲一組，而得組合數爲二十一由第167節，共得六十三種。

2. 一隊划船人，內有艇長三名普通水手二十名，如選取八人一組划八槳之船，而每組外須有艇長一人指導之，問可得若干不同組數？

3. 某人有五個舊輪四個新輪以備裝製汽車用，若舊輪不用在後邊，新輪猶不用在前邊，問有若干方法去裝置四輪？

4. 一平面上有15點，如無三點在一直線上，求聯兩點所得之直線數。

5. 一平面上有23點，其中無三點在一直綫上，如取每三點聯一三角形，可得三角形若干？

6. 一鋼琴，其一音階有音符13個，若每次按動三個音符聯合發音，可共得若干不同之音？

7. 十人相遇彼此相互一握手，問共握手數有幾？

8. 一平面上有 k 個點，其中無三點在一直線上，如取每兩點聯1直綫，可得直線若干？

9. 一平面上有k 個点，其中無三点在一直線上，如取每三點聯一三角形，可得三角形若干？

10. 由乘積r.s.t.w.x.y.z中，分爲三個因式，其中有兩因式均含兩個文字，他一因式含三個文字，其方法有幾？

11. 水手八人，划八槳之船，若其中有二人只能搖槳船之右側，又有一人只能搖槳船之左側，問有若干方法以分配之？

12. 由十八人選九人一組作棒球戲，若其中有三人僅能作發球人而不能在其他位置任事，又有五人僅能作接球人，至其餘者均能担任任何位置事，問其分配方法有若干種？

13. 一學校有兩建築物隔一廣場而對，其一建築物有四戶可供出入，而他建築物有五戶可供出入，而兩者之戶彼此均有徑相連，問共有徑幾條？

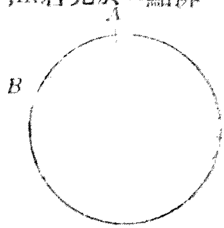
14. 若由英文二十個輔音字母與六個主音字母中每次只取四個字母作一字，而每字只許含一個主音，問共得字若干？

15' 撲克五十二張，如每五張作爲一組，可得若干不同組？

170. 圓排列 圓排列者，卽將物排列成一圓形，而研究其不同之次序也，

定理 n個物之圓排列，其所得不同之次序數爲$(n-1)$！

試假想由A點起始排列數字$1,2,3\cdots,n$.若先於A點排一數字a，則有



$(n-1)$位置可排其餘$(n-1)$數字，如是定數字a於A點，則有$(n-1)$！個排列，仿此若定數字a於他一點，例如B點，則有同數之排列數，但兩者完全相同，並無差別，故n個物之圓排列，如在A點定以數字a，其所得不同之次序數共爲$(n-1)$！

問 題

1. 5人圍坐於一圓棹，其坐法有幾？

解： 因$n=5, n-1=4$.

$\therefore 4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$種方法。

2. 10人圍坐於一圓棹，其作法有幾？

3. 某人有植物15株，問有若干方法可植於圓花池上？

4. 男女各5人圍坐於圓桌，男女相間而坐，問其坐法若干？

5. 有5對夫妻飲晏於一圓桌，男女相間而坐但不許夫坐妻之次位，問其坐法若干？

6. 如將英文字Portland之字母排列於一圓上，其方法有幾？

7. 有不同式樣之旗15其中5爲青色，5爲白色，5爲紅色，如排列爲圓形但不得使同色者相鄰，其方法若干？

8. 紅色之花有不同種類12株，白色之花又有不同種類4株，如將各花置爲圓形，令每3株紅色花相鄰但爲數不得多亦不得少，問其方法若干？

171. 含重複物之排列數　在此種情形，所論之物，有一部份完全相同，可利用下

定理　n個之物，其中有k個相同，其排列數爲 $\frac{n!}{k!}$

若所有之物各異，則應有n！個排列，但因有k！個同樣，k共！個同樣之物自身之排列數，對於總列數絕不生效，因n個之物之任一種排列，必有n個同樣物之k！個排列，故在n！個排列數中，有k！種相同，故n個之物，其中有k個相同時，其不同之排列數爲 $\frac{n!}{k!}$ 種。

推論　若n個之物內，有p個爲第一類相同者，q 個爲第二類相同者，r個爲第三類相相同者，以及有其他類相同者，其全數之不同排列總數爲。$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$

問　　題

1. 求英文字Minimum之不同排列數。

解：　$n=7, p=3, q=2$

故有$\dfrac{7!}{3!2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2}=420$種。

2. 求英文字之Permutations之不同排列數。

3. 某人有10張信旗，其中2為青色，3為白色，5為紅色，問全數排成一行可得不同信號若干？

4. 在習題3內，若兩端須為紅色，所得不同信號若干？

5. 取三點，二橫，二個短橫以作電報號碼，如以其各種不同排列以代表26個英文字母，10個數字，與6個標點符號，是否足用？

6. 某人有5種方法去到鄉間，而有10種不同事情可做，問有若干方法可到鄉間做一事而返。

7. 應用問題6所示條件，如此人欲於一次下鄉將幾件事情或全數事情做畢而返，共方法有幾？

8. 一公司設立15個旅館，如有20人可做旅館中經理，問此公司有若干方法分配之？

9. 某飯廳用夫役6人，如有夫役10名，其中有二人能當管理，問其分配方法若干？

10. 由1,2,3…7七個數字以作五位之數，如每數字可任意能分重複用之，問共得數若干？

11. 某人有不同書籍100册，如每取5册裝入一書架內，而不論在書架內之排列情形，其方法有若干？

12. 某人有不同書籍100册，如每取5册裝入一書架內，而在書架內書之排列亦有關係，其方法有若干？

13. 六人並坐，其不同排列方法有幾？

14. 六人團坐一圓桌，其不同排列方法有幾？

15. 有足球隊100人，其中有5人能作後衞，30人能在後衞區域任任何職務，又25人能任守門，餘者可作前鋒，如一組中，法定4個後衞，2個守門，5個前鋒，問由此百人中，可選出若干組？

172. 適遇法 適遇法之數理，應用甚廣，非本書所能完全討論也，如保險投資之事業，近世醫學動物學化學之發展，以及各種實業之進步，均常應用此法。

本章所論適遇法之應用，不特殊標明對於某事，僅具有簡單普遍性；例如，計算命運拋擲骰子及由一袋中隨手摸撲克牌等是也，如最後之例，撲克總數及其中變化類別爲唯一重要理由。

適遇法更大之應用，可由實業界觀之，譬如某處電話交換次數，在一日中平均每一小時爲5000次，最要者須知在十分之一秒內交換兩次之適遇果爲何數，解此問題，非此書所當專論之事，但由以下所述方法之推廣，亦不難完全解決也。

173. 例題 若一袋中有黑球3個，白球4個，如以手摸出一球，其爲白球之機會若何？

此問題可答之如下：袋中共有7球，各球均有同樣可能到手，即由七種不同狀態而取得一球是也，在此七種可能方法中，3種足以成白球，故爲白球之機會乃3比7，或$\frac{3}{7}$，而爲黑球之機會爲$\frac{4}{7}$，

174. 論總　上述例題可推廣如下：若一件事可有P種方法成功，而有q種方法失敗，其各次作法均同，則成功之機會或適遇爲

$$\frac{p}{p+q}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

失敗之適遇爲

$$\frac{q}{p+q}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

一件事其成功之適遇與其失敗之適遇之和爲1,可由(1)與(2)相加而得。

成功之傾向，即成功之適遇與失敗之適遇之比，即

$$\frac{p}{q}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

失敗之傾向爲

$$\frac{q}{p}$$

問　題

1. 袋中裝有撲克片52張，如任意取出一片，其爲么之適遇如何？

解：　因袋中共有52片，其任一片之適遇爲$\frac{1}{52}$。但在撲克片中有4張爲么，意即有4倍此適遇可爲么故爲么之適遇爲$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

2. 某人有禮帽三頂，便帽兩頂，若隨意取一帽，其爲禮帽之適遇如何？爲便帽之適遇如何？又取禮帽之成功之傾向如何？

3. 同時擲兩骰子其爲六點之機會如何？

提示：兩骰子擲下，可共得36種形狀，其中有若干可得六點？

4. 某人可由四種肉食及兩種菓食選得一件食之，如隨意取上一盤，其爲肉食之適遇如何？菓食之適遇如何？又取得肉食之成功之傾向如何？

5. 某人有不同衣服五套，每套中包有外套，長袴，背心，如於黑暗中穿之，其配合爲當之適遇如何？

提示：由五套須取若干之組合？

175. 連續選擇之適遇 (閱167節)若第一動作以p法完成，第二動作以q法完成；其完成兩動作之總方程數爲p·q，同理可應用在連續適遇法上，例如，有多種事件，其第一種之適遇爲$\frac{3}{4}$，第二種之適遇爲$\frac{1}{2}$，其共同之適遇必爲分適遇之積，卽，$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，此種事實，可將已應用在排列組合上之例題以推廣而及於適遇法中，玆將以上所述，推廣如下

定理 若在一羣事件中，其分適遇爲m，n，r，…，其共同之適遇必爲m.n.r….。

問題

1. 第一次擲三骰子，同時能得三個六點之適遇如何？

解：因一次擲一骰子而得一個六點之適遇爲$\frac{1}{6}$，故得三個六點之適遇爲$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{216}$，

2. 某人有不同衣服四套，內包有外套，長袴，背心，若隨意穿之，其穿得原套之適遇如何！又由兩套穿得原套之適遇如何？

3. 自一付撲克中，取出一張存於手內，復繼續取出一張，其成爲一副紙之適遇如何？

4. 袋中裝有紅球6個，紫球8個，綠球7個，白球10個．如連續各取出3球，且每球取出後並不仍行放入，其全爲白球之適遇如何？

5. 在問題4內，如每球取出後復令放入，其全爲白球之適遇若何？

6. 袋中裝有白球2個，黑球4個，紅球1個．如連續各取出一球，且第一球取出後並不仍行放入，其爲紅球1個，黑球1個，之適遇如何？如第一球取出後仍行放入，其爲紅球1黑球1之適遇又如何？

7. 一付撲克52張，如一次取五張，其能一爲捷克(Joker)，一爲么張，及同副紙之一王之適遇如何？

8. 某件事，必定能成功之適遇當如何？又必定不能成功之適遇當如何？

9. 如一次擲下兩個骰子，其能得6點，7點，12點及10點之適遇各如何？

10. 如一次擲下兩個骰子，何種點數之適遇最大？

11. 金幣一枚連投五次，其正面不能現出之適遇如何？

12. 一件事之成功適遇爲$\frac{5}{8}$，其成功之傾向如何？又失敗之傾向如何？

13. 一付撲克52張，如摸取四次，每次摸上一張後仍行投入，其能爲4張么之適遇如何？

14. 金幣一枚，連擲六次，其能得六個背面之適遇如何？

第十九章
行列式

176. 兩一次方程式之解答　前已述過兩含二變數値之一次方程式之解法（第64節），並示出如何解三（或三以上）含三變値(或三變數以上)之一次方程式，但後者演算頗爲繁重，可用本章所論方法較爲簡便，且有規則。

如例　解方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$(1)b_2$,　$a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(2)b_1$,　$a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)-(4)$, $(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$

若$(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$，則得

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

仿此，　$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(5) 與 (6)兩式之分母，完全相同，可用下列記法記爲一有規則形狀。

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

在右邊之記法，即稱爲行列式．因有兩行兩列，特稱爲二次行列式．而方程式之左邊乃爲此行列式之展開式其各文字 a_1,b_1,a_2,b_2 稱爲行列式之元，所屬 a_1 與 b_2 兩元稱爲主對角線

如是，(5)與(6)兩式之分子，亦可記爲二次行列式如下：

$$b_2c_1-b_1c_2=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

及

$$a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

法則　二次行列式之展開式，即由主對角線上兩元之乘積減其他對角線上兩元之乘積。

例如，$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$；$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=10-12=-2.$

展開式之各項顯然含有每行每列中之一元且僅含一元；例如 c 與下標 1 於各項中恰現一次也。

茲將(1)及(2)兩方程式之解答(5)及(6)兩式復書爲行列式形如下：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

須注意者，(8)式中兩式分母之行列式爲原方程式(1)及(2)中變值係數之自然行列式，而求x之式之分子行列式，即以常數行 c_1,c_2 兩元代換分母行列式中x之係數行 a_1,a_2 兩元，相仿求y之式之分子行列式，即以 c_1,c_2 兩元代換分母行列式中 b_1,b_2 兩元。

尤須知者，行列式僅爲一展開式之一種記法，爲有規則，及簡易起見，故引入二次行列式之新記法；亦正如開方數有引入分指數記法之理相同也，此後並要討論含兩行兩列以上之行列式可表直接甚繁重之演算式。

177. 三一次方程式之解答 設解三一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \quad\cdots\cdots(2)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \quad\cdots\cdots(3)$$

由(1)與(2),(1)與(3)消去y,則得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)z=d_1b_2-d_2b_1,$$

及 $$(a_3b_1-a_1b_3)x+(b_1c_3-b_3c_1)z=d_3b_1-d_1b_3.$$

更由上兩式消去z，

$$[(a_1b_2-a_2b_1)(c_3b_1-b_3c_1)-(a_3b_1-a_1b_3)(b_2c_1-b_1c_2)]x=(d_1b_2-d_2b_1)(c_3b_1-b_3c_1)-(d_3b_1-d_1b_3)(b_2c_1-b_1c_2).$$

展開各項，合併項，並以b_1除之，則得

$$x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3}\quad\cdots\cdots(4)$$

與上節同理，書(4)之分母爲

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\quad(5)$$

此式之右邊稱爲三次行列式，而左邊稱爲其展開式，亦如二次行列式，所屬 a_1, b_2, c_3 之元稱爲主對角線；其展開式之各項含

每行每列中之一元，且僅一元，所有有可能性之項盡在展開式內，至於三次行列式展開式之各項符號，可如下法求之：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a^1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \Big|.$$

由左上隅向右下隅之對角線上所成之項均爲正，而由左下隅向右上隅之對角線上所成之項均爲負。

(4)式之分子，亦可用行列式形記爲

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

仿此可求出y與z之值適合於(1)，(2)及(3)，而完全用行列式之解答如下

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}};\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

在237頁內求x及y兩式中分子與分母之行列式，此處可仿用之，其x，y及z各分母之行列式同爲原三方程變數之係數自然行列式，而各分子之行列式，即求該變值時，而以常數行各元代換分母行列式中該變值之係數行各元，例如求z之式之分子行列式，即其分母列

母行列式中z之係數行各元以常數行各元代之是也，即，分子之行列式與分母行列式相同，所別者在分子行列式內，即以d_1, d_2, d_3代換分母之行列式中之c_1, c_2, c_3.

習　題

求下列行列式之值：

1. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解： $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 + 0 + 2 - 0 - 6 - 30 = -14.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ c & a & 0 \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

用行列式解下列方程式，並核算其結果：

11. $x + 2y = 0,$

$3x - y = 7.$

解： 用第176節之(6)，則得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 14}{-1 - 6} = 2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7 - 0}{-1 - 6} = -1.$$

核算： $2 + 2(-1) = 0;\quad 6 - (-1) = 7.$

12. $3x-7y=-7,\ 2x+3y=3.$　　14. $5x-9y=-4,\ 2x+y=3.$　　16. $x-3y=-1,\ 3x+y=7.$

13. $x-y=\frac{1}{2},\ 3x+3y=\frac{5}{2}.$　　15. $3y+2x=-6,\ 8x+y=20.$　　17. $11x-7y=27,\ -3x+5y=5.$

18. $2x-3y+z=7,\ x+y=0,\ 3y-7z=-17.$

解： 寫爲含同一變值之各項居同行，並補充出零係數，則得

$$2x-3y+1z=7,$$
$$1x+1y+0z=0,$$
$$0x+3y-7z=-17.$$

應用第177節，(6)式，

$$x=\frac{\begin{vmatrix}7 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -17 & 3 & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -7\end{vmatrix}}=\frac{-49+0+0+17-0-0}{-14+3+0-0-21-0}=\frac{-32}{-32}=1,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 7 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -17 & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -7\end{vmatrix}}=\frac{0+0-17-0-0+49}{-32}=\frac{32}{-32}=-1,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -3 & 7\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -17\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -7\end{vmatrix}}=\frac{-34+21+0-0-0-51}{-32}=\frac{-64}{-32}=2.$$

核算： $2-3(-1)+2=7;1-1=0;-3-14=-17.$

19. $2x-3y=-1,\ 3x+2z=5,\ 2y+3z=5.$　　21. $x+y-z=-2,\ x+z-y=6,\ y-x+z=0.$

20. $\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}y=0,\ \frac{1}{5}x+\frac{1}{2}z=2,\ \frac{1}{4}z+\frac{1}{6}y=1.$　　22. $3x-2z=15,\ 7x+5y=74,\ 4y+z=23.$

23. $x+y-z=-1$,
$2x-3y+4z=-6$,
$x-2y+4z=0$.

24. $x+2y-z=0$,
$y+2z-x=\frac{1}{2}$,
$z+2x-y=-\frac{11}{2}$.

25. $x-2y-3z=3$,
$x+3y-6z=-2$,
$2y+4z=-2$.

26. $x+5y=-17$,
$x-7z=-51$,
$2y+3z=15$.

27. $.1x-.2y+.2z=-2$,
$.3x+.1y-.4z=-4$,
$.5y+.6z=8$.

28. $ax+by-cz=2ab$,
$by+cz-ax=2bc$,
$cz+ax-by=2ac$

178 顚倒　欲展開含三行三列以上之行列式，須知顚倒之意義，設在一正整數之級數內使大數移於小數之前，謂之一次顚倒．例如，在級數1,2,3,4內，未有顚倒；但在級數1243內，即有一次顚倒；因將4移於3之前．在1423內，共有兩次顚倒；因將4移於2及3之前．在1432內共有三次顚倒；因將4移於2及3之前；又將5移於2之前．

習　題

下列各級數中，求出各有若干次顚倒？

1. 4123.　　3. 13524.　　5. 14523.
2. 3214.　　4. 51423.　　6. 25413.

179. 行列式之展開式　已知三次行列式之展開式爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

若各項文字之次序如主對角線中文字之次序（上述展開式已如此法書之），須注意者其各項之下標俱有1,2,3，三數字之所有排列數，而各正項所發生之排列數爲123，231，及312，其顚倒次數又分別

爲0，2，2；又各負項所發生之排列數爲 321，213，及132，其顚倒次數又分別爲3，1，1.

由是知各正項內之下標其顚倒爲偶數，而各負項內之下標其顚倒爲奇數，用此方法判定一切展開式中各項之號．

行列式俱有n行n列者，謂之n次行列式．若將各項表出而列如(1)式，此種行列式之展開可說明如下

法則　一n次行列式之展開式等於各項之數和，至於各項文字之次序如按照主對角線上文字之次序排列之，其項數等於其下標之所有排列數；至於每項之號爲正或爲負，又因其下標之顚倒次數爲偶或奇而定。

上述法則，若行列式之元爲文字，且文字上附有下標，其展開時最爲有用，如行列式之元爲數字，其展開之求值，另有便捷之方法詳後，同時並證明如行列式之元爲文字而附有下標，尙有許多重要性質可利用之使展開時能得更捷之法。

4次及5式之行列式爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \text{及} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}.$$

學生或者懷疑爲何n次行列式可由如此規定展開法而合於理，但須知者，行列式之理法，無非建立於數學演算之上，如無理數虛數

等（$\sqrt{2}$及$\sqrt{-3}$）是也，彼僅爲一種簡便記法可用以代表某種代數式而使演算省事也，行列式之展開法則已爲多數數學家承認爲有用之法，並由其展開法而推出此種記法之許多性質，而益使行列式代數上有存在之價值。

上述法則，須先假定在主對角線之下標之顛倒爲零次，如其顛倒次數不爲零，則各項之號爲正或爲負，須因該項之下標之顛倒次數與主對角線之下標之顛倒次數之差爲偶或爲奇而定。

因每項含有各文字a，b，…，k，及各下標，1,2,…,n 故每行及每列中必有一元發見於各項內。

習　　題

若以a,b,c,d 表四次行列式之元，又1,2,3,4以表其下標；則下列在展開式中之項，其前應附以何種號？

1. $a_1b_3c_4d_2$,　　2. $a_1b_2c_4d_3$.　　3. $a_4b_2c_1d_3$.　　4. $a_3b_1c_2d_4$.

下列各項，能否發見於四次行列式之展開式中？

5. $a_1b_2c_3d_4$.　　7. $d_2c_3b_4d_1$　　9. $a_1c_3b_2c_4$.

6. $a_1c_2b_3d_4$.　　8. $d_2a_3b_2c_4$.　　10. $a_2c_3b_4a_3$.

用五文字 a,b,c,d,e爲元，及，下標1,2,3,4,5作出五次行列式，並求下列在展開式中之項之號。

11. $a_5b_4c_1d_3e_2$.　12. $a_4b_5c_2d_1e_3$,　13. $a_4b_2c_5d_3e_1$.　14. $a_3b_4c_1d_5e_2$.

180. 項數　用排列之定理，可証明下列

定理　一n次行列式之展開式其項數有n！

因展開式中之項數與下標之全數排列數相同，故此定理可由第168節中推論得之。

由此定理，則三次行列式之展開式應有六項，已於242頁表明之。

在239頁之方法，其求各項乃由不同排列之對角線，此法僅適用於三次行列式，如用斯法求四次行列式之展開，即仿239頁方法由不同排列之對角線以求各項，此法僅可求出八項；但由上述定理四次行列式之展開式應俱有二十四項，故知前述三次行列式之展開法，不足推廣應用於一般。

181. 以常數乘行列式　由此節以及以下數節，舉出行列式中幾個定理，此等定理在行列式展開上應用極大，且可証明可用以解任何一次方程式(其變值之數目與方程式之數目相等)。

定理　在行列式中，若一行或一列之各元以一常數m乘之，其行列式之值即以m乘之。

若行列式中第一列上各元均以m乘之，但因展開列之各項恰含有第一列之一元，故各項均以m乘之；即其行列式以m乘之。

例題，

$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ma_1b_2c_3 + ma_2b_3c_1 + ma_3b_1c_2 - ma_3b_2c_1 - ma_2b_1c_3 - ma_1b_3c_2$$

$$= m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

同樣，$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3\cdot 2 \\ 1 & 2 & 2\cdot 2 \\ 5 & 1 & 1\cdot 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

182. 行與列之交換 茲證明下列

定理 行列式之行與列互爲交換，其值不變，

例如 在四次行列式，卽證

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

因兩行列式之主對角線完全相同，故由 243頁所述法則兩行列式之展開式，除其各項之次序外，亦必完全相同，此理可推及任何次之行列式。

183. 行列式之行與行交換或列與列交換 茲證明下列

定理 行列式之兩行或兩列互爲交換，行列式之號改變。

例如 在四次行列式，如指定其第一列與第二列交換，卽證

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

在第一行列式之主對角線爲 $a_1b_2c_3d_4$ 而第二行列式之主對角線爲 $a_2b_1c_3d_4$，可由第一行列式之主對角線其下標之顚倒次數增1而得之，故由第二行列式所求之項，適爲由第一行列式所求之項之反號。

因第一行列式與第二行列式之差別，僅其下標 1 及 2 之交換，故第二行列式之任何項顯然可由第一行列式之一項增一次顚倒而得之。是以第一行列式之各項均增一次顚倒，則得第二行列式之各項。但因此法卽變更第一行列式各項之號（243頁），故第二行列式適等於第一行列式之反號。此理可用在任意交換兩連續行或兩連續列。

試論任何兩列，如中間爲 k 列所隔，其互爲交換之結果，如先將兩列中之在下一列向上移至在上一列之次位置，必須經過 k 次之兩相鄰列之交換方可。又如再將兩列中之在上一列向下移至在下一列之原位置，又必須經過 $(k+1)$ 次之兩相鄰列之交換方可。如是此兩列之交換，等於交換兩相鄰 $(2k+1)$ 次，故其結果仍變更行列式之號，因 $(2k+1)$ 常爲一奇數故也。

184. 等行及等列

玆引出下重要

定理 若一行列式有兩行或兩列相等，其值爲 0.

假設一行列式之第一列與第二列相等，又設此行列式之值爲 D，由第183節，若將其第一列與第二列交換之，則所得之行列式值必爲 $-D$。但第一列第二列相等，於其行列式之值必無變動，如是則得

$$D=-D,\ 2D=0,\ \text{卽}D=0.$$

推論 若任一列（或行）爲他一列（或行）之 m 倍，其行列式之值爲零。

由第181節，此行列式可化爲 m 與一含兩恒等列(或行)之行列式之乘積，故乘積爲零。

習 題

下列各對行列式有何關係？(不得展開)

1. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & -5 & -3 \\ 6 & 9 & 4 \\ -8 & -7 & -1 \end{vmatrix}.$

下列各行列式之值爲何值？

11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

12. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

14. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 2 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 12 & 3 \\ 6 & 7 & 18 & 1 \\ 8 & 4 & 24 & 10 \end{vmatrix}.$

185. **用子式展開行列式**　在238頁所述三次行列式之展開，可將各項分組如次：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

詳察a_1之係數，亦爲一行列式可由原行列式內將a_1所站之行與列抹去而得之，同樣觀察a_2與a_3之係數亦然。

將原行列式中之某一元所站之行與列抹去所得之行列式，謂之某元之子式例如

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\text{爲a之子式}$$

須注意者，在上述用子式展開行列式，其(1)之項爲正或爲負，乃因斯項之元所站之行數與列數之和爲偶數或爲奇數，而定，例如在第一項，因a_1在第一行與第一列，而$1+1=2$，故其項應爲正，仿此，因a_2在第一行與第二列，而$1+2=3$，爲一奇數，故第二項應爲負，又末項爲正，亦因a_3在第一行與第三列，及$1+3=4$爲一偶數故也。此符號法則之普通證明詳下節。

第一行或第一列之外任何一行或列之元與所對之子式均可用之以展開原行列式，例如取第二列之元與所對之子式以展開原行列式。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

其符號法則仍與上同，例如，末項爲負，乃因c_2在第三行與第二列，及$3+2=5$爲一奇數故也，如擴大以上所論，則用子式以展開行列式可得下

法則 順次寫出任一行或一列之元，各元乘以所對之子式。各項之號爲正或爲負，可因該元所站之行數與列數之和爲偶數或爲奇數而定。

同法，再展開各項之行列式，直到原行列式之值能直接用乘法求之而止。

例 題

應用子式展開下列方程式：

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 6 \\ 10 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

解： 用子式展開行列式時，如所選擇之行或列其中所含零及較多者，較爲省事，以故在此例以取第三行爲適宜。

茲取第三行之元，及其各元所對之子式以展開

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 6 \\ 10 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = +0\begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 6 \\ 10 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 9 & 1 & 6 \\ 10 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 7 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 7 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=0-\left(-4\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$+2\left(-4\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 2\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}\right)$$

$$-\left(-4\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + 0 - 1\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}\right)$$

$$=[4(-15)+75-126]+2(20+102)$$

$$-(-24+51)$$

$$=-60+75-126+40+204+24-51$$

$$=106.$$

186. 用子式展開行列式之證明　闗第185節之法則，可知欲證明能用子式展開行列式與由213頁定義所得之展開式相同，須證下列兩條之說明：

1. 一行列式之展開式內任一元之係數，乃該元之子式（不論號）。

2. 各元與其子式之積爲正或爲負，因該元所站之行數與列數之和爲偶數或爲奇數而定。

研究元a_1，

含a_1之項，除不再含a_1所站之行之餘元外必含有其他每一文字。此等文字之下標包有全取$2,3,\ldots n$之排列數，故由第179節，a_1之係數即其子式中之所有項。

因a_1爲在各項中均居第一位置，故其下標之顛倒次數盡發生在$2,3,\cdots,n$等數之中。以故在a_1之係數內各項之號爲正或爲負，乃因其下標添所成之顛倒次數而定。如是由第179節法則，在行列式之展開式內a_1之係數恰爲其子式，亦即上述定理在取a_1時可以成立。

更取任何元論之，例如d_5，而d_5居在第五列與第四行上，然可使相鄰之列互相交換及相鄰之行互相交換，而令d_5轉運到主對角線之首位。但若將d_5由第四行轉運到第一行須有三次交換，再由第五列轉運到第一列又須四次交換，故總交換次數爲七次。如是將一行列式之號變更七次，其結果適爲原行列式之負。由所論a_1之理推之d_5（現在居在所論已經成立a_1之位置）之係數在原行列式內爲其子式唯須變更號。故d_5與其子式之積爲負，即又証明上述定理成立於取d_5。

一般論之，欲轉運第 i 列與第k行上之元至主對角線之第一位，須交換相鄰之列及相鄰之行共 $i-1+k-1=i+k-2$次，但交換$(i+k-2)$次變號之結果，與交換$(i+k)$次變號之結果相同，故各元與其子式之積爲正或負，可因該元所站之行數與列數之和爲偶數或爲奇數而定。

習題

用子式，求下列行列式之值：(閱250頁例題)

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & b & c \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & d & 0 \\ 0 & e & f \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ m & 0 & p \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & x & y & 0 \\ x & y & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & -6 & -2 & -4 \\ 8 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & d & e & f \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & 7 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

187. 行列式之和　由此進而求証在某種條件之下，兩行列式之和可書爲一行列式之形。實際上，兩行列式之積常爲一行列式，且此定理在高等數學中極爲重要，唯其證明方法超越本章主旨之外，故略而不論。

定理　若一行列式之任何行或任何列之各元均含有二數之和，此行列式可以兩行列式和書之。

例如，求證

$$\begin{vmatrix} a_1+a'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

用第一行列式之第一行之元之子式，以展開第一行列式，並用A_1, A_2, A_3分別代$a_1+a'_1, a_2+a'_2, a_3+a'_3$之子式，則得

$$\begin{vmatrix} a_1+a'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+a'_1)A_1-(a_2+a'_2)A_2+(a_3+a'_3)A_3$$

$$=a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3+a'_1A_1-a'_2A_2+a'_3A_3$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

上述證明方法，可適用於n次行列式之任何行或任何列。

188. 行列式之消滅　爲求解一次方程式計，須用下列

定理　若在一行列式依某一行（或列）之子式展開式中，將該行（或列）之各元換爲另外一行（或列）之各元，則此結果展開式必等於零。

例如，已知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3 - a_4A_4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此處 A_1 表 a_1 之子式，求證若將 a_1, a_2, a_3, a_4 換爲 b_1, b_2, b_3, b_4，則結果必等於零，即

$$b_1A_1 - b_2A_2 + b_3A_3 - b_4A_4 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

然此(2)式如以行列式形狀書之，除其第一行之元亦爲 b_1, b_2, b_3, b_4 外，必與(1)式之左邊同形狀，如是一行列式中有兩行相等，必等於零（第184節），故(2)式之展開式消滅，此種證明方法，可推廣於一般。

推論 一行列式中任一列(或行)之元，以該列(或行)之元加以他一列(或行)之元之倍數代之，其行列式之值不變。

其証明法可根據第184,187兩節及下述定理。

例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+nb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+nb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+nb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nb_1 & b_1 & c_1 \\ nb_2 & b_2 & c_2 \\ nb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + n\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

189. **展開行列式之實用法** 求數目行列式之値時，其要點在先化原行列式或另一行列式而俱有某一行(或列)之元爲零之數最

多故展開一行列式之前，須慮及下列問題：

1. 是否有任一列(或行)之元等於他一列(或行)之元，如果有之，可用第184節。

2. 是否有任一列(或行)之元為他一列或(行)之元之倍數，如果有之，可用第184節。

3. 若將某一列(或行)之元加以(或減)他一列(或行)之元之倍數，該列之結果值是否是零？如為零？，可用第185節。

習　　題

展開下列行列式：

1. $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$

解：由第三行減去第一行，由第二行減去第四行，

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

2. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

解：由第一行減去第四行之二倍以展開，

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix},$$

由第二行減去第一行，

$$-\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

由第三列減去第一列之半再展開之，

$$-\begin{vmatrix}4&2&4\\1&0&3\\5&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&2&4\\1&0&3\\3&0&0\end{vmatrix}=-\left(-2\begin{vmatrix}1&3\\3&0\end{vmatrix}\right)=2(-9)=-18.$$

3. $\begin{vmatrix}2&3&7&5\\1&0&2&1\\3&3&8&6\\3&7&2&8\end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix}1&0&0&1\\3&0&4&2\\8&7&0&3\\2&5&3&0\end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix}1&0&0&1&1\\0&0&1&1&1\\0&1&1&1&0\\1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1\end{vmatrix}.$

6. $\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix}3&6&8&4&2\\8&9&6&3&1\\7&0&3&0&1\\2&9&3&1&5\\0&1&0&2&0\end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix}3&x&2&0&1\\7&5&4&x&1\\2&3&0&5&x\\3&1&x&2&0\\x&5&3&0&0\end{vmatrix}.$

9. $\begin{vmatrix}4&7&3&2&0\\0&1&1&0&1\\3&8&2&0&1\\8&14&6&4&0\\1&0&0&1&0\end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix}25&30&5&0\\15&18&3&0\\8&10&3&7\\4&0&1&2\end{vmatrix}.$

11. $\begin{vmatrix}3&2&1&8&5\\4&10&13&6&9\\0&1&3&2&0\\8&9&3&7&2\\0&1&0&3&0\end{vmatrix}.$

12. $\begin{vmatrix}2&4&6&8&10\\3&5&7&10&12\\0&0&1&0&3\\2&0&1&2&3\\2&4&6&9&13\end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix}a&b&a&c\\a&b&d&e\\a&b&c&b\\a&b&f&a\end{vmatrix}.$

14. $\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix}a&b&c&b\\a&c&d&b\\a&d&b&c\\a&c&b&d\end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix}a&3&b&4\\3&b&4&a\\b&4&a&3\\4&a&3&b\end{vmatrix}.$

190. 解一次方程式組 設有n個變值之n個一次方程式，而求其解答以行列式表之，茲舉n＝4之例以論之，設

$$a_1x+b_1y-c_1z+d_1w=f_1, \ldots\ldots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2w=f_2, \ldots\ldots(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3w=f_3, \ldots\ldots(3)$$

$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4w=f_4, \ldots\ldots(4)$$

其變值之係數按秩序寫之，成一列式D,之謂之組行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=D.$$

此時並假定$D\neq 0$

在此行列式內，以A_1, A_2,…表$a_1,a_2,\ldots$之子式，如以$A_1,-A_2,A_3,-A_4$分別乘(1),(2),(3),(4),四式，則得

$$A_1a_1x+A_1b_1y+A_1c_1z+A_1d_1w=A_1f_1,$$

$$-A_2a_2x-A_2b_2y-A_2c_2z-A_2d_2w=-A_2f_2,$$

$$A_3a_3x+A_3b_3y+A_3c_3z+A_3d_3w=A_3f_3,$$

$$-A_4a_4x-A_4b_4y-A_4c_4z-A_4d_4w=-A_4f_4.$$

若將上四式相加，x之係數即行列式D,而以y,z, w之係數爲零(第188節)，至於所得方程式之右式亦爲行列式D,第一行之元各以$f_1f_2f_3f_4$代之，故得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} f_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ f_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ f_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{D}.$$

仿此可得y,z,w之值如下：

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & f_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & f_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & f_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & f_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}}{D};z=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & f_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & f_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & f_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & f_4 & d_4\end{vmatrix}}{D};w=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & f_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & f_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & f_4\end{vmatrix}}{D}$$

尤須知者，以上所舉(1),(2),(3),(4)方程式實行列出後，無形中已假定有一組之值，適合之。但由上方法僅指明適合於方程式之任何組x,y,z,w之值，必可推出如上之形。如欲證明此等之值是否能適合方程式，須實出代入之，此等核算法亦與尋常解方程式時相同。卽將所推出之值，還原作之可也，茲不復贅。至於作習題時，愼爲核算是也。

一方程組如有一解答，謂之爲聯立方程組。

例　題

試解出x之值：

$$x+y-z+w=0,$$

$$2x+2z-w=6,$$

$$3y+z+2w=3,$$

$$3x-y+z+w=0,$$

解：　補充零係數。

$$1x+1y-1z+1w=0,$$

$$2x+0y+2z-1w=6,$$

$$0x+3y+1z+2w=3,$$

$$3x-1y+1z+w=0.$$

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\2&0&2&-1\\0&3&1&2\\3&-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&2&1&-3\\0&4&3&2\\3&0&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-3\\4&3&2\\0&2&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&1&-2\\4&3&5\\0&2&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2&-2\\4&5\end{vmatrix}=-36.$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&1&-1&1\\6&0&2&-1\\3&3&1&2\\0&-1&1&1\end{vmatrix}}{-36}=\frac{\begin{vmatrix}0&2&-2&1\\6&-1&3&-1\\3&5&-1&2\\0&0&0&1\end{vmatrix}}{-36}=\frac{\begin{vmatrix}0&2&-2\\6&-1&3\\3&5&-1\end{vmatrix}}{-36}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}0&2&0\\6&-1&2\\3&5&4\end{vmatrix}}{-36}=\frac{-2\begin{vmatrix}6&2\\3&4\end{vmatrix}}{}=\frac{-2(24-6)}{-36}=\frac{-36}{-36}=1.$$

上述方程式組，如D＝0,而各式之分子不爲零，則方程式無解。如各分子又均爲零，次節卽詳論之。

191. 行列式爲零之方程式組　若方程式組之行列式爲零，其方程式組無解，除非解答之分子亦爲零，（如257頁所示），卽解答爲$\frac{0}{0}$.

例如就下列方程組論之，

$$\left.\begin{aligned}x+3y&=2,\\2x+6y&=4.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處$D=\begin{vmatrix}1&3\\2&6\end{vmatrix}=0$,而x及y之解答之分子亦爲零。如是，$x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$。詳察方程式，不僅有一組値適合於此二方程式，實際上二方程只差別一常數因式2,爲同一方程式，故能適合一方程式之値，必又能適合足他一方程式。然若第二方程式之常數項爲3而非爲4必

無値能同時適合於二方程式矣，

如$D=0$，其情况詳為論之，未免太繁，玆就含三變數之三方程式與含四變數之四方程式論之，且其方程式組之行列式內至少有一小行列式不為零，

例如
$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1w=f_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2w=f_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3w=f_3,$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4w=f_4.$$

此處$D=0$, $A_1\neq 0$，而各解答之分子均為零。

因子式A_1為方程式組
$$b_2y+c_2z+d_2w=f_2-a_2x,$$
$$b_3y+c_3z+d_3w=f_3-a_3x,$$
$$b_4y+c_4z+d_4w=f_4-a_4x.$$

之行列式，由是若此方程組有任何解答，其y之值必為

$$y=\frac{\begin{vmatrix}(f_2-a_2x) & c_2 & d_2\\(f_3-a_3x) & c_3 & d_3\\(f_4-a_4x) & c_4 & d_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b_2 & c_2 & d_2\\b_3 & c_3 & d_3\\b_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}f_2 & c_2 & d_2\\f_3 & c_3 & d_3\\f_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}a_2 & c_2 & d_2\\a_3 & c_3 & d_3\\a_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}}{A_1}\quad(6)$$

此處x可予以任何値，又觀(6)，因y之解答含有變値x，如是y之値之多正如x之値之多，換言之，任取x以何値以代入y之解答內，即得一不同之y値，亦正如在方程式(1)所得之情況相同。

為方便計，如欲得一組之值適合方程式，可設 $x=0$. 即可得滿足(3)(4)(5)之y,z,w之值如下：

$$y=\frac{\begin{vmatrix} f_2 & c_2 & d_2 \\ f_3 & c_3 & d_3 \\ f_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{A_1};\ z=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & f_2 & d_2 \\ b_3 & f_3 & d_3 \\ b_4 & f_4 & d_4 \end{vmatrix}}{A_1};\ w=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & f_3 \\ c_4 & c_4 & f_4 \end{vmatrix}}{A_1}.$$

此等值亦適合(2)，因以此等值代 y,z,w 於(2)內，其結果為x值之分子第190節)。

然由假設，乃等於零。

實際上若方程組之行列式為零，而欲其解答，可取手續下如：

若不僅方程組之行列式為零，其各解答（第190節）之分子亦為零，方程式組可有解答。

若方程式組之行列行中之任何元之子式不為零，解此子式之含有(n－1)變值方程式組，而所餘一變值可與以任何適宜之值，在通常以取零為便。

若與所餘一變值以不同之值，則可得許多組之變值以適合原方程式組。

習　題

用行列式，求下列方程式組之一組解答：

1.　$3x+y-z-w=6,$

$x-2y+2z+3w=-7,$

$3x-2z+w=-3,$

$2x-y+z+2w=-1.$

解：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

因所餘方程式組之四次行列式全爲零，故必須如第191節解之：

$$\begin{aligned}-2y+2z+3w&=-7-x,\\+0y-2z+1w&=-3-3x,\\-1y+1z+2w&=-1-2x.\end{aligned}$$

$$x=0;\ y=\frac{\begin{vmatrix}-7&2&3\\-3&-2&1\\-1&1&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2&2&3\\0&-2&1\\-1&1&2\end{vmatrix}}=\frac{-\begin{vmatrix}-10&4\\-5&5\end{vmatrix}}{-2\begin{vmatrix}-2&3\\-1&2\end{vmatrix}}=15;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}-2&-7&3\\0&-3&1\\-1&-1&2\end{vmatrix}}{2}=\frac{-\begin{vmatrix}-5&-1\\-3&1\end{vmatrix}}{2}=4,$$

$$w=\frac{\begin{vmatrix}-2&2&-7\\0&-2&-3\\-1&1&-1\end{vmatrix}}{2}=\frac{-\begin{vmatrix}0&-5\\-2&-3\end{vmatrix}}{2}=5.$$

2. $2x+3y-z=-3$, $x-2y+z=6$, $3x+y=3$.

2. $5x+2y-z=8$, $3x+z=0$, $2x+2y-2z=8$.

4. $x+y+z=2$, $x-y-z=0$, $2y+2z=2$.

5. $11y+3z=8$, $2x-5y=-5$, $2x+6y+3z=3$.

6. $3x-5y+2z-6w=-7$, $x+3y+7w=14$, $3y+8w=21$, $x+5y+15w=35$.

192. 解齊次一次方程式 若$f_1=f_2=f_3=f_4=0$，則第190節所論之方程式變爲齊次方程式(147頁)，即

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z+d_1w&=0,\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2w&=0,\\a_3x+b_3y+c_3z+d_3w&=0,\\a_4x+b_4y+c_4z+d_4w&=0,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

此等方程式顯然有一解答爲

$$x=y=z=w=0,$$

此謂之爲零解答。若仍用第191節方法作之，因$f_1=f_2=f_3=f_4=0$，其分子之行列式均爲零，故各變值爲零。D不等於零，則上述方程式之惟一解答爲零解答，由此生出下

法則　含n個變值之n變齊次一次方程式組，只有組行列式爲零時方有一非零之解答。

按係數所滿足之條件，以求其他解答之存在，組行列式爲零，是否而能有非零之一解答常常存在，非本章所討論之範圍，但設若有非零之解答存在時，又必有無數不同之解答，此理可由下列定理推之。

定理　若x_1,y_1,z_1,w_1，爲方程式(1)之一解答，又設k爲任一數，卽kx_1,ky_1,kz_1,kw_1亦必爲一解答。

證明此定理顯然可取kx_1,ky_1,kz_1,kw_1之值代入(1)，而視出k爲各方程式之常數因式。由是若一組n個齊次一次方程式有一非零之解答，其解答又必爲無數。

又若此組方程式之行列式爲零，但其行列式中之任一子式非零，可由第191節之法解此子式之含有(n－1)變值方程式組，而與所餘一變值之任何適宜之值。

例 題

用行列式解：

$$x+3y-2z+4w=0,$$
$$2x+y+z-2w=0,$$
$$y+3z-w=0,$$
$$3x+4y-z+2w=0.$$

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

由第191節之法，

$$1y+1z-2w=-2x,$$
$$1y+3z-1w=0,$$
$$4y-1z+2w=-3x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -2x & 1 & -2 \\ -0 & 3 & -1 \\ -3x & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{x\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-5x\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=-x;$$

$$z=\frac{x\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-x\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{15x}{25}=\frac{3x}{5};$$

$$w=\frac{x\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{25}=\frac{20x}{25}=\frac{4x}{5}$$

以適宜之數 5 代 x，則得 $x=5$，$y=-5$，$z=3$，$w=4$.

習 題

用行列式，解下列一次方程式組：

1. $x+y+2z=0,$
   $2x+3y+3z=0,$
   $2x+4y+2z=0,$

2. $x+2y+3z=13,$
   $2x+y+z=7,$
   $3x+4y+3z=21.$

3. $2x+4y-3z=3,$
$3x-8y+6z=1,$
$5x-4y+3z=4.$

4. $3x+y+w=2,$
$6x+3z+w=4,$
$x+4y+3z=3,$
$8y+5z+3w=5.$

5. $3x-4y+2z=1,$
$5x-5y+4z=7,$
$2x-y+2z=6.$

6. $x+2y+z=1,$
$2x-y-2z=-9,$
$3x-y+4z=3.$

7. $2x-3y+4z=1,$
$3y+2z-3w=2,$
$-z-7w+2x=-1,$
$w-2x+3y=-4.$

8. $3x+2y=13,$
$3y-2z=7,$
$z+w=2,$
$w-3y=-17.$

9. $x-y+z=2,$
$y-z+w=3,$
$z-w+x=0,$
$w-x+y=5.$

10. $2v+3x+2y-z+w=8,$
$3v-3y+2w=-8,$
$v-w+x=2,$
$w+x-y=0,$
$3w+2v-7x=-10.$

第二十章

分項分式

193. **導言** 爲各種需要，常將一有理代數式$\frac{f(x)}{F(x)}$(第11節)，表爲諸分式之和，而以F(x)之因式爲分母，取常數爲分子，謂之分項分式，若書

$$F(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-n),$$

由x之各値求一決定常數A,B,...,N之方法，

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\dots+\frac{N}{x-n}\dots\dots\dots\dots(1)$$

若f(x)之次數等於或大於F(x).可先化爲

$$\frac{f(x)}{F(x)}=Q(x)+\frac{f_1(x)}{F(x)}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

此處Q(x)爲以F(x)除f(x)之商，而$f_1(x)$爲其餘式，所以$f_1(x)$之次數小於F(x)之次數，由是以下可先假定f(x)之次數小於F(x)之次數，如問題中，有不如是者，而學者可先用除法，然後再用本章所述之原理去展開(2)之末項.

194. **F(x)=0無倍根時之展開式** 研究下列特例

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

茲表爲如上節(1)式之展開式，

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\text{............}(1)$$

此處 A,B,C 爲所求之常數．此時有一問題生焉，即爲何允許作如是此假定？是否尙須證明應有此式？此問題可答覆如下，即寫作(1)式，原爲嘗試，亦不必加以證明，更不確定所以，但如能求出 A,B,C 之數值能適合（1）式，即可書之成一恒等式，絕無礙於理也。

另一方面言之，若不能求得適合(1)式之數值，A,B,C 即此展開之分項分式爲不可能。

消去(1)之分數，

$$x+1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

$$=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+6A+3B+2C.$$

欲求 A,B,C 之值，可由（1）式爲恒等式故x之一切値，均能適合之，其同次乘方之係數必相等(192頁推論II)，故得

$$A+B+C=0,\text{....................}(2)$$

$$-5A-4B-3C=0,\text{....................}(3)$$

$$6A+3B+2C=1,\text{....................}(4)$$

(3)與(4)相加，則得

$$A-B-C=2\text{....................}(5)$$

$$A+B+C=0\text{....................}(2)$$

(5)與(2)相加，則得　$2A=2$

$$A=1.$$

由(3)與(4)則得

$$B=-3,C=2.$$

$$\therefore\ \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}.$$

欲核算上所得結果，可消去分式而化簡之，又若(2),(3),(4)爲矛盾方程式，必不能展開如(1)式。

茲更假定一般

$$F(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-n),$$

其n個根a,b,...n彼此均不相同。

由此以論

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{N}{x-n},\quad(6)$$

其A,B,...C均爲常數，此時更假設$\frac{f(x)}{F(x)}$可能表爲分項分式，由此進而以求決定A,B,...N之值而可適合此恆等式。

若(6)式之兩邊，乘以

$$F(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-n),$$

則得

$$f(x)=A(x-b)\ldots(x-n)+B(x-a)\ldots(x-n)+\ldots$$
$$+N(x-a)(x-b)\ldots.$$

f(x)之次數不大於(n−1),以後寫爲(1)式時（134頁），其項數必不能多於n。若將右邊乘出並合併同類項，則得一次數爲(n−1)之式，由192頁推論II，此式爲一恆等式，若能決定A,B,...N之值而使x之係數在方程式之兩邊彼此相等，以使x之同次方之係數相等，則可得n個一次方程式，含有變值，A, B,..., N，此等方程式組，普通僅有一解答，且求之甚易，若A, B, ..., N之值由解此等方程式

求得後，可代入(6)式作爲分項分式之分子，又在代入之後，可實行消去(6)式右邊之分項式，而用以證明與左邊應當恒等以作核算。

用(6)式，使 x 之係數相等而得n個一次方程式是否有解，並無總則。故在討論中，須先假定(6)式可以成立，此等方程式有一解答。而在任何特例內，由解之試驗方能決定此等方程式有無解答。若 $A, B, \ldots, N$ 之值不能存在，自然可於解此一次方程式中見之。但在此節所論，均先假定有唯一之解答存在。

在(6)式內，若假設 $A, B, \ldots, N$ 乃代表含x之一次式，例如代表 $x+b$，則必有所欲決定之變值其數目多於方程式之數目情形發生。在此種情形，其方程式有無數解答，例如欲表 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 爲分項分式，而分子不爲常數而爲x之函數式，則能得任何數之展開分項分式。

玆得下列

法則　如分解F(x)爲一次因式。

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-n).$$

寫下式，

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{N}{x-n}.$$

以 F(x)乘此式之兩邊，令x之同次乘方項之係數相等，解所得含 $A, B, \ldots, N$ 之一次方程式。

以所求得之值代 $A, B, \ldots, N$；而以不同於 $a, b, \ldots, n$ 之值代x以作核算。

習 題

化下列各式為分項分式：

1. $\dfrac{x^2-2}{(x-1)(x-2)x}$.

解：

設 $$\frac{x^2-2}{(x-1)(x-2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x}.\dots\dots\dots\dots(1)$$

以 $(x-1)(x-2)x$ 乘之，

$$x^2-2=A(x-2)x+B(x-1)x+C(x-1)(x-2)$$
$$=(A+B+C)x^2-(2A+B+3C)x+2C.$$

含x之同次方項之係數相等，則得

$$A+B+C=1,$$
$$2A+B+3C=0.$$

及 $$2C=-2.$$

故 $$C=-1.$$

解 $$A+B=2$$

及 $$2A+C=3$$

則得 $$A=1$$

故 $$B=1.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2-2}{(x-1)(x-2)x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}.$$

核算： 設 $x=1$.

代入(1)內， $$\frac{-1}{-6}=\frac{1}{-2}+\frac{1}{-3}-\frac{1}{-1},$$

或 $$\tfrac{1}{6}=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+1=-\tfrac{5}{6}+1=\tfrac{1}{6}.$$

2. $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$.

3. $\dfrac{x+7}{2x^2-5x-3}$.

4. $\dfrac{1}{3x^2-2x-8}$.

5. $\dfrac{5x}{6x^2-5x-1}$.

6. $\dfrac{4x^2}{(x^2-4)(x-1)}$.

7. $\dfrac{2x^2-1}{(x^2+3x+2)(x-1)}$.

8. $\dfrac{x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

9. $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x+2)(x-1)}$.

195.　$F(x)=0$有虛根時之展開式　在前節未述及$a,b,\ldots,n$之値有實數與虛數之別，但所示之方法，實際可適合於任何兩種情形，至於所欲得之分項分式，自然僅以得出實數爲限。

設展開之分項分式爲

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots+\frac{M}{x-m}+\frac{N}{x-n}\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處假定m,n爲$F(x)$之唯一的一雙共軛虛根，M與N爲共軛複數。

設　$m=p+ir,\quad n=p-ir.$

加(1)之相當兩項，則得

$$\frac{M}{x-p-ir}+\frac{N}{x-p+ir}$$

$$=\frac{x(M+N)-p(M+N)}{(x-p)^2+r^2}+i\frac{r(M-N)}{(x-p)^2+r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因m,n爲$F(x)=0$之唯一的一雙虛根，故(2)之末項爲實數，以及其全右邊亦爲實數(第142節)，由此，設分子

$$x(M+N)-p(M+N)+ir(M-N)=Px+R,$$

則得展開式爲

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots+\frac{Px+R}{(x-p)^2+r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由歸納法可證明分子爲此式，適用於$F(x)=0$有任何對虛根。因已證明(3)式適用於一雙虛根，再假定此式適用於k雙虛根，遂即證明適合於有$(k+1)$雙虛根，故得下

定理　若$F(x)$分解爲不同之一次因式及二次因式，而二次因式不可再分解爲實*因式，則$\frac{f(x)}{F(x)}$可化爲分項分式如

*實因式者，即其係數均爲實數。

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\dots+\frac{Px+R}{x^2+mx+n},$$

此處x^2+mx+n爲$F(x)$之不可分解二次因式。

此定理之成立，自然必須在決定常數法中所得之一次方程式有解答。且證實在此節以及第 194 節所得之一次方程式，如若根均不同，必有唯一之解答。

習 題

化爲分項分式：

1. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

解，設 $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

乘以 $(x-1)(x^2+x+1)$,

$$x^2+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

集x之同次項

$$x^2+1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C.$$

使x之同次項之係數相等，
$$A+B=1\dots\dots\dots\dots(1)$$
$$A-B+C=0\dots\dots\dots\dots(2)$$
$$A-C=1\dots\dots\dots\dots(3)$$

(2)與(3)相加，與(1)解之，
$$2A-B=1$$
$$A+B=1$$
$$3A=2$$

卽 $A=\frac{2}{3}$

代入(1) $\frac{2}{3}+B=1,$

卽 $B=\frac{1}{3}$

代入(3), $\frac{2}{3}-c=1$,

即 $c=-\frac{1}{3}$

$$\therefore \quad \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{3(x-1)}+\frac{x-1}{3x^2+5x+3}$$

核算： 設 $x=-1$.

代入， $\frac{2}{-2\cdot 1}=\frac{2}{3\cdot -2}+\frac{-2}{3-3+3}$.

化簡， $-1=-\frac{3}{6}-\frac{2}{3}=-1$.

2. $\frac{x^2+x+1}{x^3+4x}$.

3. $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

4. $\frac{x^2+4}{x^3-2x^2+3x-2}$.

5. $\frac{5x^3-1}{x^4+6x^2+8}$.

6. $\frac{x}{(x+3)(2x^2-x-4)}$.

7. $\frac{1}{x^3+3x^2-2x-16}$.

提示：利用分離係數除法分解因式，

8. $\frac{x^2+1}{(x-1)(3x^2+x+6)}$.

196. $F(x)=(x-a)^n$ 時之展開式 在此種情形內，上節所述之法便不適用，因求分子之值之諸方程式相矛盾也．設

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1}}{(x-a)^n}\dots\dots\dots(1)$$

可化爲分項分式如下。

設 $x-a=y$, 則 $x=y+a$ 代入 (1) 式，由集y之同次項，則得

$$\frac{A_0y^{n-1}+A_1y^{n-2}+\dots+A_{n-1}}{y^n}=\frac{A_0}{y}+\frac{A_1}{y^2}+\dots+\frac{A_{n-1}}{y^n},$$

此處 $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ 均爲常數。再以 $x-a$ 代換y，則得下之展開式：

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{A_0}{x-a}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{A_2}{(x-a)^3}+\dots+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^n}.$$

習　　題

化下列各式為分項分式：

1. $\dfrac{x^2+2x-1}{(x-3)^3}$.

解：　設 $\dfrac{x^2+2x-1}{(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x-3)^2}+\dfrac{C}{(x-3)^3}$ ....(1)

以 $(x-3)^3$ 乘之，

$$x^2+2x-1=A(x^2-6x+9)+B(x-3)+C$$
$$=Ax^2+(B-6A)x+9A-3B+C.$$

令x之同次項之係數相等，

$$A=1,$$
$$B-6A=2,$$

及　$$6A-3B+C=-1.$$

解之，　　$B=8,\quad C=14$

$$\therefore\ \frac{x^2+2x-1}{(x-3)^3}=\frac{1}{x-3}+\frac{8}{(x-3)^2}+\frac{14}{(x-3)^3}.$$

核算：　設 $x=1$.

代入(1)，　$\dfrac{2}{-8}=\dfrac{1}{-2}+\dfrac{8}{4}-\dfrac{14}{8}=-\dfrac{1}{2}+2-\dfrac{14}{8}$,

即　$$-\tfrac{1}{4}=-\tfrac{1}{4}.$$

2. $\dfrac{x^2-4}{(x-2)^3}$.　　4. $\dfrac{x}{(x-4)^3}$.　　6. $\dfrac{x-a}{(ax+b)^2}$.

3. $\dfrac{x}{(2x+1)^2}$.　　5. $\dfrac{x^2+x+1}{(2x-1)^2}$.　　7. $\dfrac{2x^2+3x+1}{(3x-2)^3}$.

197．**一般之例**　若 $F(x)=0$ 有實根，虛根以及倍根時，前述各法可聯立用之．以故此時假定之式為

$$\frac{f(x)}{(x-a)\ldots(lx^2+mx+n)\ldots(x-t)^k}$$
$$=\frac{A}{x-a}+\ldots+\frac{Px+R}{lx^2+mx+n}+\ldots+\frac{T}{x-t}+\ldots+\frac{V}{(x-t)^k}.$$

習　　題

化下列各式爲分項分式：

1. $\dfrac{x^4+2x^2+18x-18}{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)^2}$.

解：

$$\frac{x^4+2x^2+18x-18}{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{(x-2)^2}.$$

消去分母，

$$\begin{aligned}x^4+2x^2+18x-18&=A(x^2+x+1)(x-2)^2+(Bx+C)(x-2)^2(x-1)\\&\quad+D(x-1)(x-2)(x^2+x+1)\\&\quad+E(x-1)(x^2+x+1)\\&=(A+B+D)x^4+(-3A-5B+C-2D+E)x^3\\&\quad+(A+8B-5C)x^2+(-4B+8C-D)x\\&\quad+(4A-4C+2D-E).\end{aligned}$$

令x之同次項之係數相等，

$$A+B+D=1 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$-3A-5B+C-2D+E=0 \quad\cdots\cdots(2)$$
$$A+8B-5C=2 \quad\cdots\cdots(3)$$
$$-4B+8C-D=18 \quad\cdots\cdots(4)$$
$$4A-4C+2D-E=-18 \quad\cdots\cdots(5)$$

(2)與(5)相加，(1)與(4)相加，並與(3)，則得

$$A-5B-3C=-18, \quad\cdots\cdots(6)$$
$$A-3B+3C=19, \quad\cdots\cdots(7)$$
$$A+8B-5C=2 \quad\cdots\cdots(3)$$

三式相加，則得

$$3A=3,\ 即\ A=1.$$

代入(3)與(7)而解之，則得$C=3, 2=B$. 再代入(1)，則得$D=-2$相仿，由(5)，則得$E=6$.

故

$$\frac{x^4+2x^2+18x-18}{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}.$$

核算：　設 $x=-1$.

代入　$$\frac{-33}{-2\cdot1\cdot9}=\frac{1}{-2}+\frac{1}{1}-\frac{2}{-3}+\frac{6}{9},$$

即　$$\frac{11}{6}=2\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{6}.$$

2. $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}$.　　5. $\dfrac{5x+12}{x(x^2+4)}$.　　8. $\dfrac{x-1}{(x+1)^2(x+2)}$.

3. $\dfrac{4x^2}{1-x^4}$.　　6. $\dfrac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}$.　　9. $\dfrac{x^3-x-1}{x^4-16}$.

4. $\dfrac{x^3+2x^2+1}{x(x-1)^3}$.　　7. $\dfrac{43x-11}{30(x^2-1)}$　　10. $\dfrac{11x+7}{(x^2-1)(x+2)}$.

11. $\dfrac{x^2+6x-8}{x^3-4x}$.　　15. $\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{(x+3)(x^2-4x+5)}$.

12. $\dfrac{x^2-6x+1}{(x-8)(x-9)}$.　　16. $\dfrac{30x-17}{(2x-3)(6x^2-5x+1)}$.

13. $\dfrac{2}{(x^2+x+3)(2x+1)}$.　　17. $\dfrac{13-5x}{(x^2-3x+2)(x-3)}$.

14. $\dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$　　18. $\dfrac{5+2x}{(x^2+2x+1)(x-1)}$.

第二十一章

連　分

198.　**定義**　如分式之形狀爲

$$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cfrac{f}{g+\cdots,}}}$$

此處a,b,...,g,...爲實數，謂之連分僅就連分之各分子 b,d,f,...等於1，而其他文字均表整數者論之，例如

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots,}}}\qquad\text{寫爲}\ a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots.$$

若商 $a_2,a_3,a_4,\ldots$ 之數目有限，謂之有限連分，反之謂之無限連分，此後可以明瞭用有限連分所表之數與用無限連分所表之數，大不相同，實際上，含一變値之一次方程之任何根，亦卽任何有理數，均可以一有限連分表之，其逆定理亦眞；更進而知一二次方程式之任何無理根，可以一無限連分表之，其逆定理亦眞。

199.　**有限連分**　若一有限連分之，$a_1,a_2,\ldots$ 爲整數，如化爲最簡式，顯然可得一有理數，其逆定理亦眞，玆證下列

定理 任何有理數，可以有限連分表之．

設$\frac{a}{b}$為一有理數，以 b 除 a. 設其商為 a_1 其餘數為 c(小於 b)；則得

$$\frac{a}{b}=a_1+\frac{c}{b}=a_1+\cfrac{1}{\frac{b}{c}}.$$

又以c除b,設其商為a_2,其餘數為d(必須小於c)，則得

$$\frac{a}{b}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{d}{c}}$$

繼續如法作之，以次相除，其餘數漸為變小其極限以至於為零。故此分數為一有限連分。須注意者，其諸次商數適為連分數中之各分母。

習　　題

化下列各分數為連分：

1. $\frac{77}{247}$.

解：

$$\begin{array}{rrrrrrr}
247 & 77 & 0 & & & & \\
77 & 247 & 3 & & & & \\
 & 231 & & & & & \\
 & 16 & 77 & 4 & & & \\
 & & 64 & & & & \\
 & & 13 & 16 & 1 & & \\
 & & & 13 & & & \\
 & & & 3 & 13 & 4 & \\
 & & & & 12 & & \\
 & & & & 1 & 3 & 3 \\
 & & & & & 3 & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

故所求連分爲

$$\frac{77}{247}=\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3}.$$

2. $\frac{13}{97}$.　　5. $\frac{115}{151}$.　　8. $\frac{1500}{2149}$.

3. $\frac{61}{437}$.　　6. $\frac{408}{985}$.　　9. $\frac{505}{192}$.

4. $\frac{204}{457}$.　　7. $\frac{613}{2363}$.　　10. $\frac{9697}{1557}$.

化下列各連分爲有理分數

11. $\frac{1}{2+}\frac{1}{3}$.　　13. $\frac{1}{a+}\frac{1}{b}$.　　15. $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3}$.

12. $\frac{1}{4+}\frac{1}{7}$.　　14. $\frac{1}{x+}\frac{1}{x}$.　　16. $\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5}$.

17. $\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}$.　　18. $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3}$.

200. **斂值**　在連分內，僅截取初 $(n-1)$ 個商以爲連分之值，謂之連分之 n 次斂值

例如，在此連分 $1+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{6}$ 內，

1 爲首次斂值，

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 爲二次斂值，

$1+\frac{1}{2+}\frac{1}{3}=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7}$ 爲三次斂值，餘類推。

若一連分之分數部之前無整數者，其首次斂值爲零，例如

$$\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5},$$

其 $\frac{1}{2}$ 爲二次斂值。

在下連分內

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\frac{1}{a_5+}\cdots.$$

設 $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_3}$, … 代表順次各斂值之有理分數。

則得連分之一次斂值爲

$$a_1=\frac{p_1}{q_1},\text{即}p_1=a_1,q_1=1.$$

二次斂值爲

$$a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_2a_1+1}{a_2}=\frac{p_2}{q_2}\text{即}p_2=a_2a_1+1=a_2p_1+1,$$

$$q_2=a_2=a_2q_1.$$

三次斂值爲

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}=a_1+\frac{a_3}{a_3a_2+1}=\frac{a_3(a_2a_1+1)+a_1}{a_3a_2+1}=\frac{p_3}{q_3},$$

即 $p_3=a_3(a_2a_1+1)+a_1=a_3p_2+p_1$,

$q_3=a_3a_2+1=a_3q_2+q_1$.

由是可得n次斂值爲

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

此結論,可用歸納法證明之.

以上已證明 $n=2$ 及 $n=3$ 時,(1)式可以成立,如假設(1)式成立於 $n=m$ 之時,因而再求證成立於 $n=m+1$ 之時,但 $(m+1)$ 次斂值與 m 次斂值之不同点,僅以 $a_m+\frac{1}{a_{m+1}}$ 代換 a_m 發現於連分內,故(1)式內,以 m 代換 n, 以 $a_m+\frac{1}{a_{m+1}}$ 代換 a_m 則得

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}=\frac{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)p_{m-1}+p_{m-2}}{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)q_{m-1}+q_{m-2}}$$

$$=\frac{(a_{m+1}a_m+1)p_{m-1}+a_{m+1}p_{m-2}}{(a_{m+1}a_m+1)q_{m-1}+a_{m+1}q_{m-2}}$$

$$=\frac{a_{m+1}(a_mp_{m-1}+p_{m-2})+p_{m-1}}{a_{m+1}(a_mq_{m-1}+q_{m-2})+q_{m-1}}$$

$$=\frac{a_{m+1}p_m+p_{m-1}}{a_{m+1}q_m+q_{m-1}}$$,此乃與(1)式同形。

習　題

化下列各分數爲連分：并求其歛值：

1. $\frac{30}{41}$.

解：　由上所述方法，則得

$$\frac{30}{41}=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1}\ \frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}.$$

此處$a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=1$ $a_5=1$, $a_6=1$ $a_7=2$.

一次歛值爲0，二次歛值爲1，三次歛值爲 $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

四次歛值爲 $\frac{p_4}{q_4}=\frac{a_4p_3+p_2}{a_4p_3+q_2}=\frac{1\cdot2+1}{1\cdot3+1}=\frac{3}{4}$.

五次歛值爲 $\frac{p_5}{q_5}=\frac{a_5p_4+p_3}{a_5q_4+q_3}=\frac{2\cdot3+2}{2\ 4+3}=\frac{8}{11}$.

六次歛值爲 $\frac{p_6}{q_6}=\frac{a_6p_5+p_4}{a_6q_5+q_4}=\frac{1\cdot8+3}{1\cdot11+4}=\frac{11}{15}$.

七次歛值爲 $\frac{p_7}{q_7}=\frac{a_2p_5+p_5}{a_7q_6+q_5}=\frac{2\cdot11+8}{2\cdot15+11}=\frac{30}{41}$

2. $\frac{65}{352}$.　4. $\frac{36}{121}$.　6. $\frac{100}{137}$.　8. $\frac{241}{1760}$.　10. $\frac{900}{3361}$

3. $\frac{55}{89}$.　5. $\frac{57}{161}$.　7. $\frac{75}{191}$.　9. $\frac{56}{117}$.　11. $\frac{212}{313}$.

由諸次求歛值以求下列各連分之值：

12. $\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$.

13. $\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3}$

14. $\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2}$

15. $\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{3}$.

16. $\frac{1}{5+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5}$.

17. $\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1}$

18. $\frac{1}{(x+1)+}\frac{1}{x+}\frac{1}{(x+1)}$.

19. $\frac{1}{x+}\frac{1}{x+}\frac{1}{x}$.

201.　循環連分　以上已說明各有限連分均表一有理數，

其逆定理亦眞，茲進而論一簡單無限連分所表之數之性質，循環連分者，由連分數之某點起，其一部份之分母以相同之次序繼續重複也．

例如，
$$\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2}\cdots,$$

及
$$\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3}$$

均爲循環連分，如所示其分母均無限相重複．

循環連分恰代表一數，詳第203節，若此結論未經證明之前，冒然引用便無意義．連分之逐次歛值無限增加，其値漫無定限．此爲亟所應知者也．所有之分數，可有所討論者，均爲表一數之分數，可於此後明之。

茲僅就連分中其各分母均爲正號論之，

定理　任一循環連分數爲一二次方程式之一根．

例如，設
$$x=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots$$

但顯然在第一分母c之後部分數可以x代之，故得一有限分數
$$x=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+x}.$$

其二次歛值爲 $\frac{1}{a}$.

三次歛值爲
$$\frac{b}{ab+1}=\frac{p_2}{q_2}.$$

四次歛値，卽x爲

$$x=\frac{p}{q}=\frac{a\,p_3+p_2}{a\,q_3+q_2}=\frac{(c+x)b+1}{(c+x)(ab+1)+a}.$$

化簡，則得

$$(ab+1)x^2+[c(ab+1)+a-b]x-bc-1=0,$$

此爲一二次方程式，共根爲x,亦卽連分之値。

因此方程式之常數項爲一負數，故必有一正根與一負根，而連分必須爲一正根，因 a,b,c 等文字均表正數故也．二次方程式之根爲一俱有正分母之連分，常有一正根及一負根，又分母之號無論爲正或爲負，其方程式必爲二次方程式。

此證明可擴大至於循環分母之數目爲任何數或循環分母部之前置有未循環分母之數目爲任何數，因二次方程式之一實無理根爲一不盡根數，故其結果等於云每一循環連分可表爲一不盡根數。

習　題

下列各連分爲何種二次方程式之根？並將各連分表爲不盡根數：

1. $\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\cdots.$

解：　設 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3+x}.$

則　$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3+x}=\frac{3+x}{6+2x+1},$

卽　$2x^2+6x-3=0.$

解之，則得

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{15}}{2},\quad x_2=\frac{-3-\sqrt{15}}{2}.$$

因x_2為一負數，x_1必須為表此連分之不盡根數。

$$\therefore\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\frac{-3+\sqrt{15}}{2}.$$

2. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots.$

3. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\cdots.$

4. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots.$

5. $\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\cdots.$

6. $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\cdots.$

提示：設$x=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\cdots,$

則 $x-2=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\cdots$

即 $x=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+(x-2).$

7. $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots.$

8. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots.$

9. $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots.$

10. $\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots.$

200. **化一不盡根數為循環連分** 此乃前節所討論之問題，乃證明循環連分與二次方程式之關係，正如有限分數與有理數(換言之方程式之根)之關係求化一無理數，例如$\sqrt{2}$為一連分，其作法如下：

因1為$\sqrt{2}$中之最大整數，故書

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{\sqrt{2}-1}{1}.$$

化分子為有理數。則得

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

因2爲$\sqrt{2}+1$中之最大整數，故可寫爲

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

化分子$\sqrt{2}-1$爲有理數，則得

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(\sqrt{2}-1).$$

如此繼續作之，則繼續得分母爲2故

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$$

此法包有順序之兩層演算，可歸結如下

法則　表不盡根數爲二數之和，令其第一數爲不盡根數內所含有之最大整數。

將分子爲此第二數之分數中分子化爲有理數。如此繼續作之，直至求出循環之母而止，

此方法可用於任何不盡根數，且常能得一循環之連分。此後並視爲定論，亦不加以證明。

如不盡根數之形爲 $a-\sqrt{b}$，可先由 $+\sqrt{b}$，化一連分數而變其號。因任何二次方程式 $x^2+a_1x+a_2=0$ 之實根爲不盡根數形$a\pm\sqrt{b}$，其a及b表整數，則如此方程式之根均可用一循環連分表之。且可證明一切二次方程式 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ 之實根亦可以一循環連分表之。

習　　題

化下列不盡根數爲循環連分：

1. $2+\sqrt{3}$

解：

$$2+\sqrt{3}=3+(\sqrt{3}-1)=3+\frac{\sqrt{3}-1}{1}\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$=3+\frac{3-1}{\sqrt{3}+1}=3+\frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

$$=3+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=3+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1}=3+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$=3+\frac{1}{1}+\frac{3-1}{2(\sqrt{3}+1)}=3+\frac{1}{1+}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{1}}=3+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+(\sqrt{3}-1).$$

但因 $\sqrt{3}-1$ 與 (1) 式所得之數相同，故此分數卽由此點起始循環，卽得

$$2+\sqrt{3}=3+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}+\dots.$$

2. $\sqrt{5}$.　　6. $\sqrt{14}$.　　10. $\sqrt{62}$.　　14. $\sqrt{22}$.

3. $\sqrt{17}$.　　7. $\sqrt{23}$.　　11. $\sqrt{79}$.　　15. $\sqrt{45}$.

4. $\sqrt{65}$.　　8. $\sqrt{34}$.　　12. $\sqrt{98}$.　　16. $\sqrt{59}$.

5. $\sqrt{47}$.　　9. $\sqrt{19}$.　　13. $\sqrt{88}$.　　17. $\sqrt{101}$.

18. $7+\sqrt{11}$.　　19. $8-\sqrt{3}$.　　20. $3-\sqrt{23}$.

以連分表下列方程式之根

21. $x^2-7x-3=0$.　　23. $x^2+3x-8=0$.

22. $x^2+2x-6=0$.　　24. $x^2-4x-4=0$.

293. 歛値之性質　第 200 節所示歛值法則，無論連分爲有限與無限均屬適合。而在無限連分之例，其逐次之歛値可漸次增加而近似於此分數之値。此乃一件定論，此後當可知之。

定理　連分之n次歛値與$(n+1)$次歛値之差爲$\dfrac{(-1)^{n+1}}{q_nq_{n+1}}$

茲用數學歸納法證此定理。

設連分爲

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots$$

其一次歛値與二次歛値爲

$$\frac{p_1}{q_1}=a_1,\qquad \frac{p_2}{q_2}=\frac{a_2a_1+1}{a_2}.$$

則 $\dfrac{p_2}{q_2}-\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{a_2a_1+1}{a_2}-a_1=\dfrac{1}{a_2}.$

因 $q_1=1,\qquad q_2=a_2,$

故得 $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{q_nq_{n+1}}$在$n=1$時可成立。

假定此定理成立於$n=m$時，換言之，

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}-\frac{p_m}{q_m}=\frac{p_nq_{m+1}-q_mp_{m+1}}{q_mq_{m+1}}=\frac{(-1)^{m+1}}{q_mq_{m+1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

必須再證明能成立於$n=m+1$時。

現因$\dfrac{p_{m+2}}{q_{m+2}}-\dfrac{p_{m+1}}{q_{m+1}}=\dfrac{p_{m+1}q_{m+2}-p_{m+2}q_{m+1}}{q_{m+1}q_{m+2}},$

此定理化爲求證分子$p_{m+1}q_{m+2}-p_{m+2}q_{m+1}=(-1)^{m+2}\cdots\cdots\cdots(2)$

在(2)之右邊使 $a_{m+2}q_{m+1}+q_m=q_{m+2},$

及 $a_{m+2}q_{m+1}+p_m=p_{m+2}.$

則得

$$p_{m+1}(a_{m+2}q_{m+1}+q_m)-(a_{m+2}p_{m+1}+p_+)q_{m+1}$$

$$=p_{m+1}q_m-p_mq_{m+1}=-(p_mq_{m+1}=-(p_mq_{m+1}-p_{m+1}q_m)$$

$$=-(-1)^{m+1}=(-1)^{m+2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{由}(1)$$

推論 I　正分母之連分，其兩連續歛值之差漸近於零爲極限．

因 $q_n=a_nq_{n-1}+p_{n-2}$，顯然當n增加時q_n因之無限增加，又因q_n爲加諸正數而成，其中無一爲零者．

如n之值極大時，則$\frac{1}{q_n}$因之以及$\frac{1}{q_nq_{n+1}}$必小於任何可名言之小數；同時$\frac{1}{q_nq_{n+1}}$漸近於零爲極限。

推論 II　當n增加時，其偶次歛值低降奇次歛值增加。

此必須證

$$\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}}=\frac{p_m}{q_m}$$

爲負或爲正乃因m爲偶數或爲奇數而定。加以$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$同時更減以此數，則得

$$\frac{p_{m+2}}{q_{m+1}}-\frac{p_m}{q_m}=\left(\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}}-\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right)+\left(\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}-\frac{p_m}{q_m}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{m+2}}{q_{m+2}q_{m+1}}+\frac{(-1)^{m+1}}{q_{m+1}q_m}.$$

由推論 I，第一分數之分母大於第二分數之分母。由是若 m 爲奇數，則此方程式之右邊爲正；又若m爲偶數，其右邊爲負。

由是知第201節所論任何循環連分均可表爲如第70節說明之數，又已知連分之逐次奇歛值爲連續增加數，而逐次偶歛值爲連續低降數，以至於其一雙歛值之差爲極小之數，如此種數組，已說明（第99節.）爲實數。

204　誤差之極限　此時論取連分之任一斂值以作連分之值，其差誤之最大極限。

定理　取一連分之第n斂值以作連分之值，其誤差之最大極限必小於$\frac{1}{q_nq_{n+1}}$.

因由上節定理，連分數之值介於任何兩連續近數之間，故其值與兩近數中任一值之差必小兩近數彼此之差，卽小於$\frac{1}{q_nq_{n+1}}$

習　　題

由下列各根數，求一斂值與其值之差小於.001：

1. $\sqrt{6}$.

解：

$$\sqrt{6}=2+(\sqrt{6}-2)=2+\frac{6-4}{\sqrt{6}+2}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}.$$

$$=2+\frac{1}{2+2\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}-2\right)}=2+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{6}-2}{2}}.$$

$$=2+\frac{1}{2+\frac{6-4}{2(\sqrt{6}+2)}}=2+\frac{1}{2+}\frac{1}{\sqrt{6}+2}=2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+(\sqrt{6}-2)}.$$

因在後者之不盡根數與第一式內相重複，故得

$$\sqrt{6}=2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4}\cdots.$$

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{2}{1},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{5}{2};\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{4\cdot5+2}{4\cdot2+1}=\frac{22}{9},$$

$$\frac{p_4}{q_4}=\frac{2\cdot22+5}{2\cdot9+2}=\frac{49}{20};\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{4\cdot49+22}{4\cdot20+9}=\frac{218}{89}.$$

因　$\frac{1}{q_4q_5}=\frac{1}{20\cdot89}=\frac{1}{1780}<.001,$

故由第204節，$\frac{49}{20}$適合此問題之條件。

2.	$\sqrt{7}$.	5.	$\sqrt{19}$.	8.	$\sqrt{61}$.	11.	$\sqrt{99}$.
3.	$\sqrt{46}$.	6.	$\sqrt{35}$.	9.	$\sqrt{55}$.	12.	$\sqrt{41}$.
4.	$\sqrt{5}$.	7.	$\sqrt{32}$.	10.	$3+\sqrt{2}$.	13.	$\sqrt{13}$.

第二十二章

記法數

205. **總論** 原來十進位之數乃用10之乘方所表之數。例如

$$264=2\cdot 10^2+6\cdot 10+3$$

此謂之常用記數法,其10謂之記數根 (Radix of Scale)。

通常記數，固以十進法為便，然亦不只限用十進，相仿一數可以10以外之任何記數根表之。例如，若以6為記數根，則

$$207=5\cdot 6^2+4\cdot 6+3=543,$$

同時如用10為記數根

$$207=2\cdot 10^2+0\cdot 10+7,$$

故用6為記數根，乃以零及五個數字表所有正整數。

十進法之採用，乃因民族進化而廣益，天然中人類卽俱十手指與十足指，實為歷史上產生數數之便法也。

以十進法所表之各數，如末位數字為零，則為其記數根內含之因式2及5所除盡，然如重新以12為記數根建立一組數，殊不為便。但以十二進法所表之各數，如末位數字為零，則又為因式 2,3,4,6 所除盡。至於分數記法，亦可化為各種不同之記數根。

一般論之，若以 r 爲記數根。則用此種記數根之正整數N可表之如下：

$$N=a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\dots+a^n$$

此處$a_0,a_1,a_2,\dots,$爲小於 r 之整數。

須注意者，10乃表記數之根，一般論之，如以 r 爲記數根，其表各數所需之數字爲用0,1,…,r－1.

206. 記數根之轉換 用任何記數根所表之數，可先書爲如第 205 節 (1)式之形，而完成所示演算，以化爲常用記數根所表之數。

例　　題

設r＝4之數爲3721,試轉換爲常用記數法。

解：
$$\begin{aligned}3721&=3\cdot4^3+7\cdot4^2+2\cdot4+1\\&=3\cdot64+7\cdot16+8+1\\&=313.\end{aligned}$$

一常用記數法之數，可化爲用記數根r如次：

設常用記數法之數爲 N，須由下式內判定 $a_0,a_1,a_2,\dots a_n$ 之值。

$$N=a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2},+\dots+a_n\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

因r除(1)式，則得

$$\frac{N}{r}=a_0r^{n-1}+a_1r^{n-2}+\dots+a_{n-1}+\frac{a_n}{r}=N'+\frac{a_n}{r};$$

即其餘數a_n乃爲所欲求表之數之末位數字。

再用 r 除 N′，則得

$$\frac{N'}{r}=a_0r^{n-2}+a_1r^{n-3}+\dots+\frac{a_{n-1}}{r};$$

即，又求得之餘數乃爲所欲求表之數之次末位數字。由此法作之，可得所有數字$a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0$.

例　　題

化常用記數法之數25,395爲記數根爲8之數．

解：

$$\begin{array}{r|ll}
8 & 25395 & \\
8 & 3174 & 餘3 \\
8 & 396 & 餘6 \\
8 & 49 & 餘4 \\
8 & 6 & 餘1 \\
 & 0 & 餘6
\end{array}$$

故所求記數根爲8之數爲61,463.

欲由記數根爲r_1之數轉換爲記數根爲r_2之數，可先由記數根爲r_1之數轉換爲常用記數法之數，然後再如上法由常用記數法之數轉換爲記數根爲r_2之數。

例　　題

化$r=4$之數59,043爲$r=6$之數。

解：　$$59{,}043=5\cdot4^4+9\cdot4^3+0\cdot4^4+4\cdot4+3$$

$$=1875 \text{ 記數根爲10之數。}$$

由記數根爲10之數轉換爲記數根爲6之數，

$$\begin{array}{r|ll}
6 & 1875 & \\
6 & 312 & 餘3 \\
6 & 52 & 餘0 \\
6 & 8 & 餘4 \\
6 & 1 & 餘2 \\
 & 0 & 餘1
\end{array}$$

故記數根爲4之數59.043變成記數根爲6之數爲12,403.

207．**基本演算**　常用記數法之四基法，須進上或借下10；然如作記數根爲6之四基法，則須進上或借下6，又若記數根爲r，則須進上或借下r.

例如，設$r=5$，則$8+3=2\cdot5+1=21$.相仿，$2\cdot6=2\cdot6+2=22$.此正與常用記數法中，例如$7+5=1\cdot10+2=12$，$3\cdot6=1\cdot10+8=18$.

習　題

完成下列演算：

1. 5443+2053+1452; r=6.

解：

```
  5543
  2053
  1452
 13432
```

在演算內，因3+3+2=8較記數根多2,故須進上1而餘 2. 在次行中， 4+5+5+1=2·6+3, 須進上2而餘3. 又次行中 ， 4+0+4+2=1·6+4，須進上1而餘4.又在末行中，5+2+1=1·6+3，則得13.

2. 6402－5421; r=7.

解：

```
 6402
 5421
  651
```

在第一行中，由12內減去1其餘爲1.在第二行中，由零內減去2而不足減,可由上位數字4內借下1而作7減之。如是7減去2則剩5.在第三行中，則由所剩3內減4,故必須從上位借下1,而由4+3內減去 4,餘6.

3. 7462·253;r=8.

解：

```
    7462
     253
   26626
   45772
   17144
 2423146
```

以3乘2無須進位，但以3乘5則得2.8+2,故進上2而書爲2. 至於各部份積相加與習題相同：

4. 224,332÷32. r=5.

解：

```
 32 | 224332 | 3401
      201
      233
      233
        32
        32
         0
```

求商之第一位數字，乃由以3除22,唯須留意者，$22=2\cdot5+2$ 又因12n恰爲之4倍,唯完全之除數爲32,故商之第一位數字爲3。至於乘法及減法，均與上之習題相同。

5. $7563+5621+4371; r=8.$　　9. $756,321-647,342; r=8.$

6. $64,523-35,426; r=7.$　　10. $64,531\cdot2054; r=7.$

7. $4132\cdot1342; r=5$　　11. $231,423\cdot1333; r=5.$

8. $2,471,606\div287; r=9.$　　12. $6,548,764\cdot23,548; r=9.$

13. $21,033+32,111+20,021+3,102,012; r=4.$

14. $34,052+1032+35,202+55,441; r=6.$

15. $40,043,432\div442; r=5.$

208. **分數** 在常用記數法中，可取小數點以後數字去表分數，此種記法亦可應用於任何記數根之數。

例如，常用記數法之小數 .3264 乃表

$$\frac{3}{10}=\frac{2}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{4}{10^4}$$

如爲記數根爲r之小數，乃表

$$\frac{3}{r}+\frac{2}{r^2}+\frac{6}{r^3}+\frac{4}{r^2}$$

轉換分數之記數根所用原理，與轉換整數之記數根所用之原理相同。以下例題表之。

例　　題

1. 將記數之根爲7之小數.3264化爲常用記數法之小數。

解：

$$.3264=\frac{3}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{4}{7^4}$$

$$=\frac{3\cdot7^3+2\cdot7^2+6\cdot7+4}{7^2}=\frac{1173}{2401}=.4885\ldots.$$

2. 化常用記數法之小數.549為記數根數7之小數。

解：
$$\cdot 549=\frac{a}{7}+\frac{b}{7^2}+\frac{c}{7^3}+\frac{d}{7^4}+\ldots.$$

以7乘之，
$$3\cdot 843=a+\frac{b}{7}+\frac{c}{7^2}+\frac{d}{7^3}+\ldots.$$

故$a=3$，　而
$$\cdot 843=\frac{b}{7}+\frac{c}{7^2}+\frac{d}{7^3}+\ldots.$$

以7乘之，
$$5\cdot 901=b+\frac{c}{7}+\frac{d}{7^2}+\ldots.$$

故$b=5$，　而
$$\cdot 901=\frac{c}{7}+\frac{d}{7^2}+\ldots.$$

以7乘之，
$$6\cdot 307=c+\frac{d}{7}+\ldots.$$

故$c=6$，　而
$$\cdot 307=\frac{d}{7}+\ldots.$$

以7乘之，　$2\cdot 149=d+\ldots$

故$d=2$.

由是所求記數根為7之小數為$\cdot 3562\ldots$

習　　題

化下列為常用記數法之小數：

1. $\cdot 437$;　$r=8$.
2. $\cdot 4463$; $r=7$.
3. $\cdot 2831$;　$r=5$.
4. $\cdot 3004$;　$r=6$.
5. 化常用記數法之小數・386為記數根$r=9$之小數。
6. 化常用記數法之小數・30214為記數根$r=5$之小數。
7. 化常用記數法之小數・33333為記數根$r=4$之小數。
8. 化常用記數法之小數・79054為記數根$r=7$之小數。
9. 用何種記數根則72可化為2200？

解：　即求出r，令　$2r^3+2r^2=72$

$$\begin{array}{rrrrl}
2 & +2 & +0 & -72 & \lfloor 2 \\
 & 4 & +12 & +24 & \\
\hline
2 & +6 & +12 & -48 & \\
2 & +2 & +0 & -72 & \lfloor 3 \\
 & +6 & +24 & +72 & \\
\hline
2 & +8 & +24 & &
\end{array}$$

故3乃所求之記數根。

核算：　$2\ 3^3+2\ 3^2=54+18=72$.

10.　用何種記數根，則125可化爲236？

11.　用何種記數根，則1225可化爲1,200,101？

12.　用何種記數根，則3247可化爲100,442？

13.　證明2197爲完全立方數。

提示：用何種記數根，此數可表爲1000？

207　十二進法　應用以上所述方法，可作英制之度量，如取一呎作單位，而以12作記數根，可表距離爲十二進位法，例如，2呎6吋以十二進法表之，則爲2 6,因記數根爲r,所需數字爲(r－1)個，故設t＝10及l＝11.如是21呎10吋若以十二進法表之，則爲19.t並可用此種進法直接以計算面積及體積而較尋常先轉換爲吋然後計之爲便.

例　題

以8呎4吋乘5呎7吋

解：卽以十二進法以8·4乘5·7.

$$\begin{array}{r} 5{\cdot}7 \\ 8{\cdot}4 \\ \hline 1t4 \\ 388 \\ \hline 3t{\cdot}64 \end{array}$$

轉換此結果爲平方呎及平方吋，須留意 $3t\cdot64=3\cdot12+10+\frac{6}{12}+\frac{4}{12^2}=46$平方呎76平方吋，蓋因144平方吋等於一平方呎。

由此例題可得距離之乘法如下

法則　以呎作單位，表距離爲十二進法。

按記數根r＝12乘之。

在乘積中，其小數點左邊部份由十二進法轉換爲常用記數法。

小數點後第一數字乘以 12, 合併小數點後第二數字卽在結果中又得平方吋數。

習　題

作下列乘法：

1. 12呎11吋乘以87呎10吋。

解：

```
    10·e
    73·t
    ----
    t92
   329
  765
  ---------
  716 62 = 1134平方呎平方吋。
```

2. 10呎4吋乘以13呎8吋。

3. 6呎3吋乘以15呎2吋。

4. 75呎11吋乘以32呎10吋。

5. 38呎7吋乘以24呎9吋。

6. 一房間，長22呎6吋，寬15呎8吋，其面積幾何？

7. 有呎5呎6吋及寬3呎4吋之窗，其面積幾何？

8. 一三角形園圃，其一邊長爲150呎6吋， 此邊上之高爲80 呎6吋，其面積幾何？

提示： 面積 $=\frac{1}{2}ab$.

第二十三章
無限級數

210　**變值** Variable. 在一定之限制內，一字母可以有許多不同之值，此字母謂之變值．即在此一定之限制內，任取許多之數值，亦不能表盡變值之數值，在方程式 $ax^2+bx+c=0$ 內，x 只有兩值適合於此方程式；x不得謂之變值．

須注意者，求函數 ax^2+bx+c之圖象時，取x為任何實數均可，則x為變值。

在方程式 $2x+3y=4$ 內，x 及 y均可取無窮之值，則x及y均為變值．普通方程式內之變值，常為方程式所限制．

在方程式 $2x+3y=4$ 內，x 及y 之變化，常限於適合於此方程式之值．例如x等於8,y只能等於-4.

211　**無限** Infinity. 若取變值之陸續整數值 1,2,3,...... 實在不能取得變值之最大值．但既然陸續取之，愈後之數愈大，必有最後之一值，此變值之最後值，謂之無限．簡言之，取一數M為任何大之數，無限必大於任何數 M. 無限非數目；故不能按尋常之計算法計算之，不過為大於任何數之一種記號而已．尋常以∞表之．

212　**極限** limits. 茲取數系

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{15}{16}\cdots.$$

從上所取已知項內，用同法可求得其餘各項，從左向右，各項之數漸漸增加．第n 項為$\frac{2^n-1}{2^n}$.此數系繼續進行，無論何項之數，不能大於1或等於1.但總有一項與1之差，小於任小之數．例如取一小數.01則$\frac{127}{128}$與 1 之差小於.01至於小數.001,.0751以及任何小之數，數系向右

繼續進行，必有一項與1之差小於此等之數．此數系可當作變值x之數值，則有下之定義．

定義 設按次序取變值x之值，致使x與一定數A之絕對差，小於任何小之數d.A謂之x之極限．

按上所述，先取d爲.01,已知$\frac{127}{128}$與定數1之絕對差小於.01，不但如此，而愈後之項與1之差亦愈小；實係此數系之各項漸近於1,卽1爲其極限．此可用$\frac{2^n-1}{2^n}$證明．使n爲充足之大數；則$\frac{2^n-1}{2^n}$與1之差可爲任意之數小．

上定義中，「兩項之絕對餘數小於任何小數d」一語，甚爲有用．萬不可缺，設以2代數系(1)之相間之各項，如$\frac{1}{2},2,\frac{7}{8},2,\frac{31}{32},2,\ldots\ldots$,雖然其中必有一項與1之絕對差小於任何小數，而其極限不得謂之1，因該項之下一項爲2，與1相差之絕對餘爲1．

一變值漸近於一個極限，可用幾何法表明．數系(1)之各項，可用直線之距離表之

已知取變值之若干數值後．此變值與A相差之距離小於任何小之距離d.此變值漸近於A,卽A爲其極限點．在幾何學上，以接近極限點之諸點之集合，表其漸近於極限之諸值．

若以數系代變值x，則上之定義可另述之，較爲方便．玆述於下：

若在數系 $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots,\ u_{n-1}\ u_n\ldots\ldots$內，必能求得第m項以後之$u_n(n>m)$與A相差之絕對値必小於任何小之數d(d爲正變數)．則u's系以A爲其極限．

茲以式表之如下：

設 $\left|u_n-A\right|<d,\ n>m$ 則 $\lim u_n=A$,

變值有兩種；一種是難達到極限者；一種是易達到極限者，例如一物落地，其距離之極限爲零，此甚易達到極限．上之定義，未曾說明何種爲易達到極限者，何種爲難達到極限者．

設a爲一常數，n爲變值，而漸向無限變更：則$\frac{a}{n}$之極限爲零；如分式$\frac{2}{n}$便是．茲用兩人之談話明白解釋如下；設亨利 Henry 以爲$\frac{2}{n}$不漸近於零；約翰 John 以爲$\frac{2}{n}$漸近於零．

亨利 「我看分式$\frac{2}{n}$以零爲其極限，毫無理由」

約翰 「你即如此說，你可以取一任何小之數，我取n以甚大之數．使$\frac{2}{n}$小於你取之數」

亨利 「你只知按定義說．」

約翰 「請你取一小數試之．」

亨利 「我不信你取n爲何數可以使$\frac{2}{n}$小於.0001,」

約翰 「若n爲100,000,則$\frac{2}{n}$小於.0001.」

亨利 「此我知之，但我再取小數.000001呢？」

約翰 「我設n爲10,000,000.」

亨利 「我知到了，我任取一很小之數k，你取n爲$\frac{10}{k}$,則$\frac{2}{n}$爲$\frac{k}{5}$,顯然小於我取之數k．」

由此談話，可知k爲無論任何小之數，使n等於或大於$\frac{2a}{k}$時，則

$\frac{k}{n}$，必小於 k；故 $\frac{a}{n}$ 以零爲其極限．

213　無限級數　Infinite Series. 有定項數之和，固能相加，如加 $a+b+c$；而無一定項數之和，亦能相加，如加 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n$；但n必爲有限値；n 旣爲有限値，故排列此類之函數及求其和，於有限之時間必能作訖．而無限級數有無限之項數；故不能將其項數完全寫出來．只是用顯明之若干項以求其定律．

無限級數之項數爲 u_1，u_2，u_3，…u_n，…，尋常以 Σu_n 表其和，讀「總和 u_n」或用 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 表其和，讀「總和 u_n, n自1至∞．」茲寫於下：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

此級數之第n項 u_n；卽下標與項數同．常以 s_n 表首n項之和．如

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$$

卽　$s_1=u_1$，　$s_2=u_1+u_2$，　$s_3=u_1+u_2+u_3$，……

無限級數亦有時寫爲下式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

在此級數內，第n項爲 u_{n-1}，下標比項數少1．u_n 爲第 $(n+1)$ 項．首n項之和爲

$$s_n=u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_{n-1}．$$

在此章內，n代替正整數或零．

例　題

1. 寫出級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 之首五項；問其第10項及第n項爲何？

解. $\sum_{u=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^u}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^5}$.

第10項爲 $\frac{2.10-1}{2^{10}}=\frac{19}{2^{10}}$. 第n項爲 $\frac{2n-1}{2^n}$.

2. 將級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}$ 之首五項寫出來．問其第8項，第n項，第(n+1)項爲何？

解. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}=1+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{4^2}+\frac{9}{5^2}$

第 8項爲 $\frac{2\cdot 7+1}{8^2}=\frac{15}{8^2}$.

第n 項爲 $\frac{2(n-1)+1}{[(n-1)+1^2]}=\frac{2n-1}{n^2}$

第(n+1) 項爲 $\frac{2n+1}{(n+1)^2}$.

習　題

將以下諸級數之首五項寫出來：

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$.

5. $\sum_{r=1}^{\infty}(2r)^2$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$.

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n+1}}{5^{2n+1}}$.

11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}x^{n-1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$　　8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$　　12. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{2k}$.

13. (a)在習題3之級數內，將第7項寫出來；(b)在習題6之級數內，將第8項寫出來；(c)在習題10之級數內．將第9項寫出來；(b)在習題12之級數內，將第10項寫出來．

14. (a)在習題2內，求級數之首五項之和．(d)在習題7內，求級數之首四項之和．(c)在習題5內，求級數之首六項之和．

15. 在習題2之級數內，欲使S_n與2之差小於.001；問須取若干項？

16. 在習題5之級數內，問須取若干項方能使S_n大於1000？在下之各級數內，求第n項；並以總和号表之：

17. $1+5+3+\cdots\cdots$.

18. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots$.

19. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots\cdots$.

20. $1\cdot2-2\cdot3+34-4\cdot5+\cdots\cdots$.

21. $1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots$.

22. $x+x^3+x^5+x^7+\cdots\cdots$.

23. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{16}}+\cdots\cdots$.

34. $\frac{3}{5^2}+\frac{3^2}{10^2}+\frac{3^3}{15^2}+\frac{3^4}{20^2}+\cdots\cdots$.

25. $\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\frac{x^6}{\sqrt{6}}+\frac{x^8}{\sqrt{8}}+\cdots\cdots$.

26. $1-\frac{x^2}{x!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$.

27. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 6}+\cdots\cdots.$

28. $1-\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}-\frac{4!}{4^2}+\cdots\cdots.$

29. 在習題23之級數內，設$x=2$，求S_3，

30. 在習題26之級數內，設$x=\frac{1}{2}$，求S_4。

214　歛級數與散級數

Convergence and divergence. 詳察下之兩級....，實係不同之兩種：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots. \qquad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n=1+2+4+8+\cdots\cdots.$$

在(1)內首兩項之和與2只相差二分之一。實則無論多少項相加，亦不能過於2或等於2。

無限級數既有無限之項數，所以永不能寫盡其項數，更不能求得其和。但如此去想，實非處理此等級數之法。在級數(1)內，任取多少項之和，均不是2。但所取之項無限增加；其值漸於2；卽2爲其極限。若不加詳察，似乎2非(1)之無限項之和，但n至無限，而S_n之極限，固不能大於2亦不能小於2；所以2卽是此級數之和。

定義　S_n既代表級數首n項之和，當n變至無限時，而S_n漸於一極限。此級數謂之歛級數。此極限謂之級數之和。

尋常證明級數是否收歛較易；求得歛級數真確之値較難。

在級數(2)內，每項均大於前一項，若以極多之項相加，所得之和，必大於所取之任何大之數。

定義　S_n既代表級數之首n項之和，當n變至無限時，而S_n不能漸於一個定極限。此級數謂之散級數。

例如　級數$1+2+3+\cdots\cdots+n+\cdots\cdots$，若使n極大，而$S_n$必大於所取之任何大之數．所以$S_n$不能漸近於一個定極限．一切散級數均可如是考究．設n為充足之大，則S_n必大於所取之任何大之數．

級數　$1-1+1-1+\cdots\cdots\cdots$　(1)

是另一種散級數．此級數謂之擺級數．Oscillating Series. 因S_n之值擺於兩值之間，而不能定其極限值．在級數(1)內，S_n為零為1，當視n為偶為奇而定．

定理．若無限級數之每項之絕對值大於任何小之定數，此級數為散級數．

既然每項之值大於一定小數，取其極多之項數相加之和，必大於任何大之數M．

知此定理，實有方便之處；若n變至無限，而級數之諸項不能漸近於零者，此級數必非斂級數；無須試驗．

215　斂級數之比較試驗法　證明級數是否收斂與求收斂級數之真確值，實為不同之兩問題．下所述者，為第一問題之主要法則．或兼論及求級數和之近似值．

假定．設S_n為變值，當n漸增時，S_n亦漸增而不能越過有限數D．則S_n必有一極限A，而A不大於D．

已知之斂級數只有幾何級數

$$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots\cdots=\frac{a}{1-r}\qquad(1)$$

r之絕對值小於1，a為任何實數．

茲論下之兩級數

$$S=1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

$$S^1=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots$$

詳察此兩級數之各項，自第二項以後，S之各項小於S'之各相當

項．進而言之，S之第n項$\frac{1}{n!}$，小於S'之第n項$\frac{1}{2^{n-1}}$；因n>2，則

$$2.3\ldots n>2.2\ldots 2.$$

兩端各有n－1個因數．

但S'爲幾何級數，其極限爲2．故S必爲斂級數，其極限不能大於2．此爲下定理之一例．

定理．設 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 爲一無限級數，各項皆正．又設 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots$ 爲一無限斂級數，各項亦爲正．若u級數之各項等於或小於v級數之各相當項；則u級數亦爲斂級數，其和等於或小於v級數之和．

設v級數之和爲A

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

$$S'_n=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n$$

式中之n爲任何正數．既第二級數收斂於A；則

$$\lim_{n=\infty} S'_n=A.$$

既然v級數所有之項皆爲正．故

$$S'_n<A.$$

但已知　$S_n\leqq S'_n;$

所以　$S_n<A.$

卽u級數無論多少項之和必小於一定數A按本節之假定，可知S_n必有一級限，其極限不大於A．卽u級數爲斂級數；其和不大於v級數之和．

有時欲用此定理，首幾項常先除去不計．因首之有限項數，其和必爲有限值．故除去首幾項外而能證明此級數爲斂收者；此級數之全體亦必爲斂級數．

欲知某級數確係收歛，須先寫出此級數之第n項，或除首幾項以後之第n項．此項謂之u_n項．然後以u_n項與已知之級數之v_n項比較之．若n為大於某數之各整數，而$u_n \leqq v_n$，則u級數確係收歛．是謂歛級數之**比較試驗法**．v級數謂之比較級數．若u_n不等於或小於v_n，則此級數是否收歛，無法證明．所用之v_n級數失去比較之效力．從(1)內以任何實數代a，以小於1之正數代r，則所得之級數必是收歛級數，可用之為比較級數．任何級數自證明是是收歛以後，均可為比較級數．

例 題

試驗下級數是否收歛：

$$S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots.$$

解． 先除去首兩項．則所餘級數之第n項為

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^n}$$

在(1)內設$a = 1$, $r = \frac{1}{2}$,以所得之級數，為比較級數，略去首項，則

$$S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots.$$

此級數為歛級數；第n項為$v_n = \frac{1}{2^n}$.

n為大歛之正數，故$u_n \leqq v_n$即

$$\frac{1}{(n+1)^n} \leqq \frac{1}{2^n}$$

或 $$(n+1)^n < 2^n$$

若$n = 1$,則(2)為$2 = 2$；若$n > 1$顯然$(n+1)^n < 2^n$ 所以S為歛級數．

習 題

試驗以下諸級數：

1. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots.$

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{1^{16}}+\cdots.$

3. $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots.$

4. $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{4\cdot 2^3}+\cdots.$

5. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}\cdots.$

6. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots.$

7. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots.$

8. $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2}{1+3^2}+\frac{1}{1+4^2}+\cdots$

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^n}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^n}.$

11. 對於漸減之變値之極限．此變値永大於一個定數，仿前節之假定；述出一假定來．

12. 設一歛級數之各項爲負，仿前節之定理．述一定理．並證明之．

216 調和級數 對於試驗散數之一主要級數爲調和級數，

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots.$

此級數之各項，漸漸變小；其極限爲零．所難信者，此級數之和，大於任何能名之數．茲證述於下：

定理． 調和級數爲散級數．

將此級數之諸項集之如下：

$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots;$

連續之括號內，含有1，2，4，8，………等項．在第二括號內，$\frac{1}{3}$大於$\frac{1}{4}$，其和大於$\frac{1}{4}$之2倍．卽大於$\frac{1}{2}$．仿此可知第三括號內之和大於$\frac{1}{8}$之4倍卽大於$\frac{1}{2}$．按此法排列可知各括號內之和，均大於$\frac{1}{2}$．卽此級數之和，必大於任何能名之數．故此級數爲散級數．

217 散級數之比較試驗 茲取一級數與調和級數比較之，可得試驗散級數之法數與§117之試驗歛級數之法相仿．例如取兩數數．

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

及 $$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

因第二級數各項之分母小於第一級數相當各項之分母．所以第二級數之各項，大於第一級數相當之各項．但第一級數爲散級數．故第二級數亦爲散級數．此卽下定理之一例．

定理． 設 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 爲所試驗之無限級數，其各項均爲正．又設 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots$ 爲已知之散級數．若 u 級數之各項等於或大於v級數之相當各項；則u級數爲散級數．

設有兩級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots$

及 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots$

v級數爲散級數．即可以求得n之値．使

$$v_1+v_2+v_3+\cdots v_n>M$$

式中之M爲任何大之數．

$$\text{但}u_k\geqq v_3+\cdots+u_n>M.$$

卽 u級數爲散級數．

由上之定理，可知某級數之第n項u_n等於或大於已知之散級數之第n項v_n；是謂之散級數之比較試驗法．

除調和級數外，亦有用幾何級數試驗者．卽用

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

$r>1$，a爲任何適宜之數．此級數爲散級數．

試驗歛級數時，減去幾項，與試驗法無關．試驗歛級數時，加

上幾項，亦與試驗法無關．

例　題

試驗級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$$

解．此級數之第n項為$u_n=\frac{n-1}{n}$.與調和級級數之第n項$v_n=\frac{1}{n}$比較之可知

$$\frac{n-1}{n}\geqq\frac{1}{n}$$

式中之$n>1$. 若$n=2$，(1)為$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.若$n>2$，顯然$n-1>1$.故此級數為散級數．

習　題

試驗以下諸級數：

1. $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\cdots$.

2. $1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}+\cdots, r<1$.

3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$.

4. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$.

5. $1+\frac{3}{1\cdot2}+\frac{5}{2\cdot3}+\frac{7}{3\cdot4}+\frac{9}{4\cdot5}\cdots$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$

218　**不定式**　此節所論者，為分式之分子及分母均變至無限時之極限．

例如．　分式$\frac{n-2}{2n+1}$.若n為正數，漸漸增大；必至大於任何定數1,000,1,000,000等等．即分子與分母均必至於無限．如此分式之極限，不可知其為若何之定値．但未使n變至無限以前，以n除分子及分

母；則得

$$\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

若方程式右端之分式，使 n 漸漸增大，以至 n 爲無限時．則分式$\frac{1}{n}$及$\frac{2}{n}$均以零爲其極限．所留下者，只有$\frac{1}{2}$．所以原分式之極限爲$\frac{1}{2}$.卽

$$\lim_{n=\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

有時用他法亦可得相同之結果．例如分式$\frac{2n+4}{n+2}$,若 n 變至無限，則分子及分母均爲無限．但$\frac{2n+4}{n+2}=\frac{2(n+2)}{n+2}$，在n未變至無限以前，因子$n+2$相消於分子及分母之內，可知此分式永等於2，不關於 n 之變化如何．故

$$\lim_{n=\infty}\frac{2n+4}{n+2}=2.$$

此等法之要點，在使n變爲易求分式之極限時，然後使 n 變至無限，則極限之値，就能求得．

例　　題

求 $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n^2-7n+2}{3n^2+1}$.

解．以n^2除分子及分母，則得

$$\frac{n^2-7n+2}{3n^2+1}=\frac{1-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}$$

設n變至無限，各分式$\frac{7}{n^2}$, $\frac{2}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}$極近零．原分式極近於$\frac{1}{3}$．

所以$\lim\limits_{n=\infty}\frac{n^2-7n+2}{3n^2+1}=\frac{1}{3}$.

2．　求$\lim\limits_{n=\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^3-3}$.

解．　以n^3除分子及分母，則得

$$\frac{n^2+2n+1}{n^3-3}=\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{3}{n^3}}.$$

設n變至無限時，分子極近於0分母極近於1．

所以$\lim\frac{n^2+2n+1}{n^3-3}=\frac{0}{1}=0$

3．　求$\lim\frac{(n+1)!}{n!}$.

解．　$\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$

所以　$\lim\limits_{n=\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$.

習　　題

求以下諸極限：

1．　$\lim\limits_{n=\infty}\frac{n+1}{2n}$.　　　3．　$\lim\limits_{n=\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n\sqrt{n}}$.

2．　$\lim\limits_{n=\infty}\frac{n}{n^2+1}$　　　4．　$\lim\limits_{n=\infty}\frac{n!}{(n+1)!}$.

5. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n^2-1}{(n+1)^2}$.

6. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{3n^2-6}{n^3-2n}$.

7. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}$.

8. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

9. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

10. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n^2(n+1)!}{(n+1)^2n!}$.

11. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{5(4n)^3}{4(n+1)^3}$.

12. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{a^2(n^6-a^6)}{n^2(n^4+n^2a^2+a^4)}$.

13. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n(1\cdot3\cdot5\ldots2n-1)}{1\cdot3\cdot5\ldots2n+1}$.

14. $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{2\cdot4\cdot6\ldots2n+2}{(n+1)(2\cdot4\cdot6\ldots2n)}$.

219 **比試驗** Ratis test. 此試驗法甚爲有用，而且簡便．茲述於下．

定理 設 $u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots$ 爲一無限級數，其各項皆爲正．

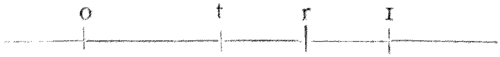
I. 若 $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{u_n+1}{u_n}<1$, 此級數爲斂級數．

II. 若 $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{u_n+1}{u_n}>1$, 此級數爲散級數，

III. 若 $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n_n+1}{n_n}=1$, 無法試斂．有時爲斂級數，有時爲散級數．

I. 設 $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{u_n+1}{u_n}=t$, 而 t 爲小於1之常數，其符號爲正．按變值之極限之定義（§108），可知若n之一切值等於或大於 m 時，此變值之比 $\dfrac{u_n+1}{u_n}$ 與其極限之差小於任何小之數．設r爲一數，大於 t 而小於1.則可求得一大數m使n等於或大於m 時．此變值之比．$\dfrac{u_n+1}{u_n}$ 與其極限之差永久小於 $r-t$. 卽下標大於m之各比均小於 r，茲以式表之；若

$\geqq m$, $\frac{u_n+1}{u_n}<r$. 取n之値爲m, m+1, m+2,……,則得



爲m, m+1, m+2,……,則得

$$\frac{u_m+1}{u_m}<r,\text{即}u_{m+1}<ru_m;$$

$$\frac{u_m+2}{u_m+1}<r,\text{即}u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m;$$

$$\frac{u_m+3}{u_m+2}<r,\text{即}u_{m+3}<ru_{m+2}<r^3u_m;$$

....

左端之不等式相加，則得

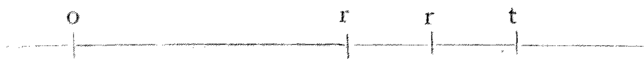
$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots<ru_m+r^2u_m+r_3u_m+\cdots$$
$$<u_m(r+r^2+r^3+\cdots\cdots).$$

括號內爲一幾何數；r 旣小於 1，故爲斂級數． 比如此級數收斂之極限爲L則得

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots\cdots<u_m.L$$

所以原級數爲斂級數．(§111)

II. 若 t.大於 1,可以取 r 小於t而大而 1.按變値極限之定義，可以求得一數 m 使 n 之一切值等於 m 或大於 m 時，各比與 t 之差小於 t－r.故各比大於r,即$\frac{u_{m+1}}{u_m}>r$,即$u_{m+1}>ru_m$



旣然$u_{m+1}>ru_m$;即是各項大於前一項，故此級數爲散級數(§110)

III. 若t=1,則此法便不適用．

例如調和級數則爲散級數，又如§215之習題5,則爲斂級數．

例題

試驗級數 $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\cdots\cdots$

解. $u_n=\frac{n^2}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$.

式中之u_{n+1}由u_n得來，卽以$n+1$代n而得．

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}=\frac{n+1}{n}.$$

因 $(n+1)!=(n+1).n!$

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n=\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0<1.$$

故此級數爲歛級數．

習題

在以下諸級數中，何者爲歛級數．何者爲散級數，試求之．

1. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$.
2. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$.
3. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{2^2}+\frac{4!}{4^2}+\cdots$.
4. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots$.
5. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots\cdots$.
6. $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\cdots\cdots$.
7. $\frac{2^{10}}{2}+\frac{3^{10}}{2^2}+\frac{4^{10}}{2^3}+\frac{5^{10}}{2^4}+\cdots\cdots$.
8. $\frac{1}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{3}{4.5}+\cdots\cdots$.
9. $\frac{3}{4^3}+\frac{3^2}{8^3}+\frac{3^3}{12^3}+\frac{3^4}{16^3}+\cdots\cdots$.
10. $1+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{5^3}{4^5}+\cdots\cdots$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{4n}}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{3.6.9\ldots\ldots 3n}$
13. $1+\frac{1}{10}+\frac{1.4}{10.20}+\frac{1.4.7}{10.20.30}+\cdots\cdots$.

14. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1.\ 3}{2!.2^4}+\frac{7\cdot3\cdot5}{3!.2^6}.+\cdots\cdots.$

220　間級數　Alternating Series　上所述之斂級數之試驗法，各項皆須爲正．間級數之各項符號正負相間．

定理　在一間級數內，設各項之絕對值小於前一項之絕對值．又設n變至無限而第n項之極限爲零：此間級數爲斂級數．

設有級數

$$S=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots\cdots$$

式中所有之a均爲正，$a_{n+1}<a$，且$\lim\limits_{n=\infty}a_n=0$

下之兩種加法，可得首n項及n＋1項之和

設n爲偶數，則

$$S_n=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+\cdots+(a_{n-1}-a_n) \tag{1}$$

及　$$S_{n+1}=a_4-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-(a_6-a_7)\cdots\cdots(a_n-a_{n+1}) \tag{2}$$

因n漸增，所有之a漸減，故(2)之各括號內皆爲正數．但此等之數，皆從a_1內減去，所以無論n爲任何大數，S之n＋1項之和，不能過a_1．

由(1)內可知S_n之和爲諸正數之和，與S_{n+1}相差a_{n+1}．但a_{n+1}可使之爲任何小之數，故S_n永遠小於一個正常數．按§111之假定此S_n應有一極限．

現在使n變至充分大之偶數Sn與其極限之差，小於任何能名之數．

但　$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$

顯然　$$\lim_{n=\infty}S_{n+1}=\lim_{n=\infty}S_n+\lim_{n=\infty}a_n+1$$

因n變至無限$\lim\limits_{n=\infty}a_{n+1}=0$，故此級數爲斂級數．

欲求間級數之和之近似値，須先加首幾項．由上之證明法，可知誤差不能越過停止項之値．例如加至a_k項，誤差不能越過a_{k+1}．再

由(2)內亦可知間歛級數之和，必小於一項．總此諸節，欲求間級數之和之近似值，尚不十分甚難．

221 兼有正負項之級數 設級數兼有正項及負項；而正負項非相間者；則有下之定理．

定理I. 在級數$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$內，有為正項者，有負項者；若各項之絕對值之和為歛級數，則原級數亦必為歛綴數．

設級數$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$為所求之級數，其中有為正項者；有為負項者；則各項之絕對值所作成之級數為$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots$；各項皆為正量．

例如級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots\cdots$. 其各項之絕對值所作成之級數為

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots.$$

證． 設絕對值之綴數為$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$，且收歛於A. 若其中若干項變為負項，此等負項之絕對和，必為定值．故此級數，亦必收歛於一數；而此數不大於A. 縱使所有之項，均變為負項；則所得之級數必收歛於－A. 但a級數變若干項為負項，卽得u級數．故u級數為歛級數．

由此證內，可知用歛級數之比較試驗法以試驗含有負項之級數，亦無不可。

定理II. 在兼有正負項之無限級數$u_1+u_2+\cdots\cdots$內，若

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$$

則此級數為歛級數．

因$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ 故$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1$；卽是$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1$；是卽表明$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots$為歛級數．按定理I，原級數為歛級數．

依同理可知，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$,則級數$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$爲散級數．

222. **指數級數** Power Series. 設有無限級數．

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots.$$

所有之a均不含x. 此級數謂之x之指數級數，若a爲已知之數值，則可按x之值以定此級數爲歛爲散．例如所有之a皆爲1．則此級數爲幾何級數．若$|x|<1$此級數必歛級數；若$|x|>1$，此級數必散級數．可用比試驗法以定x爲何值而級數方爲歛級數

例　　題

問x爲何值，級數$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots$爲歛級數？又問x爲何值，此級數爲散級數？

解． $u_n=(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;　$u_{n+1}=(-1)^n\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(x+1)-1}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}=-\frac{2n-1}{2n+1}x^2$$

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n=\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}x^2=x^2$$

所以若$x^2<1$, 卽$-1<x<1$, 則此級數爲歛級數．若$x^2>1$, 卽$x<-1$．或$x>1$,則此級數爲散級數．

若$x=1$或-1,則比試驗法不能用，必須看級數之情形．

若$x=1$此級數變爲

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots\cdots$$

此爲間級數，且

$$\lim_{n=\infty}|u_n|=\lim_{n=\infty}\frac{1}{2n-1}=0$$

所以按§116,此爲歛級數・

若$x=-1$此級數變爲

$$-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots\cdots).$$

此仍爲歛級數；不過與前一級數只差括號外之負號而已・所以$-1\leqq x\leqq 1$時，原級數爲歛級數，x爲其他一切值時，原級數爲散級數・

習　　題

問x爲何值，下之級數爲歛級數？x爲何值，下之級數爲散級數？

1. $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^6}{6}+\cdots\cdots.$

2. $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots.$

3. $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}\cdots\cdots\cdots$

4. $x-\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}-\dfrac{x^4}{\sqrt{4}}+\cdots.$

5. $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$

6. $1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots.$

7. $1+x+2!x^2+3!x^3!+,\cdots$

8. $1-\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{x^3}{3^3}+\cdots\cdots$

9. $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots.$

10. $-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-\cdots.$

11. $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}+\cdots\cdots.$

12. $x+\dfrac{1.x^3}{2.3}+\dfrac{1.3x^5}{2.4.5}+\dfrac{1.3.5x^7}{2.4.6.7}+\cdots\cdots.$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(3x)^n.$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^px^n}{n!}$

223. **特別主要級數** Important Special Series 在微積學內，常將原函數變爲級數．有理整式函數爲有限級數．有理分式函數及三角函數爲無限級數．茲將主要者寫於下：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots. \tag{1}$$

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots. \tag{2}$$

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots. \tag{3}$$

$$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\right\}. \tag{4}$$

$$\text{Sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots. \tag{5}$$

$$\text{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{5!} + \cdots\cdots. \tag{6}$$

$$\text{Sin}^{-1}x = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots\cdots. \tag{7}$$

$$\text{Tan}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots\cdots. \tag{8}$$

在上之方程式內，三角函數所用角之單位爲半徑角在前之習題內，x爲某值時，各級數均爲收斂

120 **求級數和之近似值法** 尋常之指數級數，無論x爲有理數或無理數時，其精確之和均不能求得．惟其小數點以下任求多少位均可；並且而求得差之極限．若計算斂級數，除去前之特別數項外；以後諸項之和爲甚微小時，尋常略去不計．

求自然對數，常用此法．即在級數(4)內，用e爲底數，以求諸數之對數．茲列於下：

$$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\right\}$$

因此級數之指數只有奇數；故其收斂甚速．常用之代(2)或(3)以求對數．

在此級數內，作下之代替法：

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$$

式中之n爲正整數．

由此可知， $n+nx=n-nx+1-x,$

$$2nx+x=1,$$

$$x=\frac{1}{2n+1},$$

所以 $\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log_e\left(\frac{n+1}{n}\right)=\log_e(n+1)-\log_e n$

此級數變爲

$$\log_e(n+1)=\log_e n+2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}\text{(L)}$$

若以e爲底數，已知n之對數；則用此級數可以求得任何整數 $n+1$ 之對數．

欲由e爲底數改換10爲底數以求一數之對數，可用§105之底數更換之定理．卽

$$\log x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}.$$

按$\log_e 10=2.303$；見第231頁之習題14．所以用10爲底數以求任何數之對數；須先用e爲底數，求得此數之對數，然後以2.303除之．因乘法較除法爲簡，尋常不用2.303除，而用 $\frac{1}{\log_e 10}=.4343$乘．.4343謂之對數率．

例 題

1. 設$x=\frac{1}{5}$求下級數之和；只要四位小數．

$$x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{(n-1)n}+\cdots\cdots,$$

解． 在前四項內，以$\frac{1}{5}$代x；則得

$$\frac{1}{5}=.2$$

$$\frac{1}{25\cdot 2}=.02$$

$$\frac{1}{125\cdot 6}=\cdot 001333\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{625\cdot 12}=\cdot 000133\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{\cdot 221466\ \cdots\cdots\cdots}$$

按此，前四項之和爲$\cdot 2215$.

前四項以後，仍爲一無限級數

$$\frac{x^5}{4\cdot 5}+\frac{x^6}{5\cdot 6}+\cdots\cdots.$$

其和或計或否，當看其與$\cdot 2215$之第四位有無影響．茲用分母減小，分數增加之理；求其和和之最大極限，如下：

$$\frac{x^5}{4\cdot 5}+\frac{x^6}{5\cdot 6}+\frac{x^7}{6\cdot 7}+\cdots\cdots=x^5\left(\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{x}{5\cdot 6}+\frac{x^2}{6\cdot 5}+\cdots\cdots\right)$$

$$<\frac{x^5}{4\cdot 5}(1+x+x^2+\cdots)$$

按§10，
$$<\frac{x^5}{4\cdot 5}\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\text{設}\ |x|<1\right)$$

以$\frac{1}{5}$代x，
$$<\frac{1}{3125\cdot 20}\cdot\frac{5}{4}=\cdot 00002.$$

所以與第四位小數無關；$\cdot 2215$卽所求之數．

2． 若與級數(2)以求$\log_e(n+1)$；在括號內只取首r項．求差之級限．

解． 括號內之級數爲

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots+\frac{1}{(2r-1)(2n+1)^{2r-1}}+\cdots.$$

所寫出之末一項爲第r項．

第r項以後所餘之級數爲

$$R=\frac{1}{(2r+1)(2n+1)^{2r+1}}+\frac{1}{(2r+3)(2n+1)^{2r+3}}+\frac{1}{(2r+5)(2n+1)^{2r+6}}+\cdots$$

$$<\frac{1}{(2r+1)(2n+1)^{2r+1}}\left\{1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\cdots\right\}$$

括號內爲一幾何級數．其比爲$\frac{1}{(2n+1)^2}<1$,n爲正整數，按§10,其和爲

$$S_\infty=\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}.$$

今$n\geqq 1$,故 $2n+1\geqq 3$,

$$\frac{1}{(2n+1)^2}\geqq\frac{1}{9},$$

$$1-\frac{1}{(2n+1)^2}\geqq\frac{8}{9},$$

$$S_\infty=\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}\geqq\frac{9}{8},$$

所以 $R_r<\frac{9}{8(2r+1)(2n+1)^{2r+1}}.$

今以2乘之，在(L)之括號內，可得極限差爲

$$E=\frac{9}{4(2r+1)(2n+1)^{2r+1}}.$$

欲用級數(L)求一數之對數；在括號內僅用r項，其差永小於E．

3. 求 $\log_e 2$ 之值，只要三位小數．並證明三項以後之餘級數不能影響於第三位小數．

解 在級數(L)內，以$n=1$,則得

$$\log_e 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\cdots\right\}.$$

今
$$\frac{1}{3}=\cdot 3333$$
$$\frac{1}{3^4}=\cdot 0123$$
$$\frac{1}{5\cdot 3^5}=\cdot 0008$$
$$\overline{\cdot 3464}$$
$$\overline{\qquad 2}$$
$$\log_e 2=\cdot 693$$

以$n=1$，$r=3$代入E式內；則得

$$E=\frac{9}{4\cdot 7\cdot 3^7}=\frac{9}{61236}=\cdot 00014.$$

所以前三項以後不計，其差不過$\cdot 0002$. 故不能影響於第三位小數．即$\log_e 2=\cdot 693$.

習　題

用§223內之級數，計算以下諸習題．並證明不計諸項，不能影響於所要之結果：

1. 求e之值，只要三位小數．
2. 求$e^{\cdot 05}$之值，只要四位小數．
3. 求$\log_e 2$之值，只要五位小數．
4. 求$\log_e 3$之值，只要四位小數．
5. 求$\cos 1^0$之值，只要四位小數．

注意．$1^0=\frac{\pi}{180}$弧度$=\frac{3\cdot 1416}{180}=.0175$或$\frac{7}{400}$弧度，第四位下之小數不計．在級數(6)內，設$x=\frac{7}{400}$.

6. 求$\sin 1^0$之值，只要四位小數．
7. 求$\sin 5^0$之值，只要四位小數．
9. 求$\cos 5^0$之值，只要四位小數．

9. 以習題7及8所得之結果，用除法求 $\tan 5^0$ 之數；只要三位小數．

10. 在級數(7)內, 設 $x=\frac{1}{2}$，求π之值；只要二位小數．

11. 求$\tan^{-1}(1)$之値，只要五位小數．

12. 由第316頁習題14之級數，可知$\sqrt{2}$之値。實驗其前三位小數．

13. 以e為底數，求正整數1至10之對數；只要三位小數．

14. 以10為底數，求正整數1至9之對數；只要三位小數．