復興初級中學教科書

代ㄉㄞˋ 數ㄕㄨˋ

下冊

虞明禮編著
段育華校訂

商務印書館發行

復興初級中學教科書

代ㄉㄞˋ 數ㄕㄨˋ

下冊

虞明禮編著
段育華校訂

商務印書館發行

本書於二十六年七月經
國民政府教育部審定
領到中字第二十二號執照

中華民國二十六年七月審定本第一版
中華民國三十五年十月審定本第一一七版
(57[illegible]B)

初級中學用

復興教科書 代數 二冊

下冊定價國幣叁角陸分
印刷地點外另加運費

編著者 虞明禮
校訂者 段育華
主編者 王雲五
發行人 朱經農 上海河南路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

目次

下册

復興初級中學教科書

代　　數

下　册

第十一章　分式方程式

§ 103.　引論

(1)　何謂分式方程式？　凡分母含有未知數的方程式，都叫做分式方程式。例如$\frac{1}{x}+5=x$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=2$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=12$等都是分式方程式。而$\frac{3}{2}x+x^2=\frac{1}{5}$，$\frac{x^2}{3}+\frac{x}{4}=5$都不是分式方程式。

(2)　何以需要分式方程式？　請看下題.

[問題]　“二數的差是1，其倒數的和是$\frac{21}{10}$求這二數”。本問題若用一個未知數來解，例如，設 $x=$一數，$x+1=$他數，從題意應得分式方程式：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{21}{10}。$$

又若用兩個未知數來解，例如，設 x＝大數，y＝小數，那麼，從題意也應得分式方程式：

$$\begin{cases} x-y=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{21}{10}。\end{cases}$$

不但如此，任用其他方法，終得分式方程式。所以，若不利用分式方程式，這問題便無法求解。然則分式方程式還可以不要嗎？

§ **104. 怎樣解分式方程式？** 分式方程式的解法，最通用的有二種，就是"化整法"與"加減法"。現在依次來講。

A. **化整法** ［例］ 解上節問題所得方程式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{21}{10}。$$

［解法］ 以諸分母的 L. C. M. $=10x(x+1)$ 乘原方程式的兩邊，便得整式方程式：

$$10(x+1)+10x=21x(x+1)$$

解之，得 $x_1=-\frac{5}{7}$，$x_2=\frac{2}{3}$。

把 x_1 和 x_2 分別代入原方程式驗其是否相合：

$$\frac{1}{-\frac{5}{7}}+\frac{1}{-\frac{5}{7}+1}=\frac{21}{10}$$

$$\frac{21}{10}=\frac{21}{10};$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\frac{2}{3}+1}=\frac{21}{10}$$

$$\frac{21}{10}=\frac{21}{10}。$$

由上例看來,可得分式方程式的解法,如下:

第一步。　先以原方程式中所有諸分母的 L. C. M. 遍乘方程式的兩邊。(使原方程式變爲整式方程式)。

第二步。　由這整式方程式求出未知數的值。

第三步。　欲知求得的值果否適合原方程式，可把這所得的值代入原方程式的兩邊,驗其是否相合。若不相合,且非解方程有錯誤,則必有其他原因。(參看下兩節)

B.　**加減法**　仍取第一法之例來說明。

[例]　解方程式　$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{21}{10}$。

[解法]　移項,得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{21}{10}=0$$

加減,得
$$\frac{-21x^2-x+10}{10x(x+1)}=0$$

乃令分子爲零,得

$$-21x^2-x+10=0$$

解之,得二根

$$x_1=-\frac{5}{7},\quad x_2=\frac{2}{3}。$$

(驗算一步和本節 A 的例相同)。

由上例看來,又得分式方程式的解法如下:

第一步。 先把原方程式中的各項,完全移至方程式的一邊,而使他邊爲零。

第二步。 用分式加減法化簡第一步所得方程式,使成 $\frac{N}{D}=0$ 之形。

第三步。 如 $\frac{N}{D}$ 不是最簡分式,約成最簡分式。(理由參看下兩節)

第四步。 乃令第三步所得最簡分式的分子爲 0 而解之。

第五步。 把第四步所得的值代入原方程式的兩邊,驗其是否相合。

習題九十一

用二法解下列各題並驗算所得的結果:

1. $x+\frac{12}{x-2}=-5$。

2. $x-1=4-\frac{12}{x+2}$。

3. $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+2)(x-1)}$。

4. $\frac{1}{x-2}=\frac{8}{x+5}\times\frac{1}{x-2}$。

5. $2+\frac{44}{x^2-1}=\frac{4}{x-1}+\frac{11}{x+1}$。

6. $1+\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-x}$。

7. $1+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}=\frac{2}{(x-2)(1-x)}$。

8. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}=0$。

§ 105. 用化整法往往得僞根　取上節第 7,8 兩題論之。

[例一]　解方程式

$$1+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}=\frac{2}{(x-2)(1-x)}。\tag{1}$$

[解法]　用化整法去分母，得

$$(x-2)(x-1)+x-1+2(x-2)=-2\tag{2}$$

解之，得　$x=\pm1$

[驗算]　以 $x=-1$ 代入原方程式，得

$$1-\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}，左右相合。$$

以 $x=1$ 代入原方程式，則得

$$1-1+\frac{2}{0}=\frac{2}{0},$$

分數的分母不可爲 0，故 1 不合原方程式。

∴　$x=-1$ 爲原方程式的根；而 $x=1$ 則非其根。我們叫牠做僞根，這種僞根應當除去。

［例二］　試解方程式 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}=0$。　　(1)

［解法］　用化整法去分母，得　$x+1=0$。　　(2)

解之，得　　$x=-1$。

［驗算］　以 $x=-1$ 代入原方程式，則得

$$\frac{1}{0}+\frac{2}{-0}=0。$$

這等式無意義，故 -1 是原方程式的僞根。

§ 106.　**僞根何自而來？**　欲知僞根的來源，先要明白下面幾條原理：

(1)　方程式的兩邊，可各加（或減）以任何數或任何代數式而不變其根。

(2)　方程式的兩邊，可各乘（或除）以任何永不爲零的代數式而不變其根。

(3)　方程式的兩邊，若各乘以可以爲零的代數式，那麼，所得新方程式，往往增入僞根。

(4)　方程式的兩邊，若各除以可以爲零的代數式，則所得新方程式，往往失去眞根。

［例一］　有方程式　$$x-2=5。\tag{1}$$

兩邊若各以 $x+3$ 乘之，則得新方程式：

$$(x+3)(x-2)=5(x+3)。\tag{2}$$

即　$$x^2+x-6=5x+15$$

解之，得　$$x_1=7,\ x_2=-3。$$

這所得二值中，7 是方程式(1)的根，-3 就不是方程式(1)的根。可見 -3 是方程式(1)的僞根。這僞根 -3 何自而來。就是因為以 $x+3$ 乘(1)式兩邊的緣故。因爲，-3 雖不能使 $x-2=5$，但是牠能使 $x+3=0$，故能使 $(x+3)(x-2)=5(x+3)$。換句話說，-3 雖非(1)式的根，卻是(2)式的根。

［例二］　有方程式 $$(x+3)(x-2)=5(x+3)。\tag{1}$$

兩邊若各除以 $x+3$，則得新方程式：

$$x-2=5。\tag{2}$$

這方程式中只有一根 7，而原方程式(1)則有 7 與 -3 兩根。可見"拿可以爲零的代數式 $x+3$ 除(1)式的兩邊，其作用能使原方程式(1)失去一根(-3)"。

明白了上面的原理，那麼，對於解分式方程式何以會得僞根，不難洞明其故了。例如，在上節例一中，由(1)式化得(2)式，乃是把(1)式兩邊各乘以 $(x-2)(x-1)$。這乘式 $(x-1)(x-2)$ 的值在 $x=1$ 時爲零。故所得(2)式中 1 這個根是(1)式的僞根。

又如，在上節例二中，由(1)式化得(2)式，乃是把(1)式兩邊各乘以 $x(x+1)$。這乘式 $x(x+1)$ 的值在 $x=-1$ 時爲零，故(2)式中 -1 這個根是(1)式的僞根。

§ 107. 不用驗算，怎樣決定根的眞僞？ 把上節總括起來，分式方程式解得的值，有時所以不合原方程式，其唯一原因，就在該值能使乘式(卽諸分母的 L. C. M.)之值爲零。由此得根之眞僞判定的標準如下：

用化簡法求解的。 如方程式的根，能使原方程式中一個(或多個)分母爲零的，那麼，必是僞根；反之，能使諸分母皆不爲零的，必是眞根。

用加減法求解的。 在 § 104，(*B*)第二步所得方程式 $\frac{N}{D}=0$ 內，如依第三步把 $\frac{N}{D}$ 約成最簡分式，再依第四步令第三步所得最簡分式的分子爲 0 而解之，那麼，所得的值全爲眞根。因爲這樣所得的值，皆能使所得最簡分式的分子爲零，而不使分母爲零。

[例一] 在 § 105 例一中，$x=-1$ 能使諸分母 $x-2$，$x-1$，$(x-2)(1-x)$ 皆不爲零。故 $x=-1$ 必爲眞根。

[例二] 又如，在 § 105 例二中，$x=-1$ 能使分母 $x+1$ 及 $x(x+1)$ 爲零，所以必爲僞根。

[例三]　在 §105 例一中，若用加減法化成$\dfrac{N}{D}=0$ 之形，並把$\dfrac{N}{D}$約成最簡分式而解之，那麽所得的值必非僞根。

原題：
$$1+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}=\frac{2}{(x-2)(1-x)}。\tag{1}$$

解法：
$$1+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-2)(x-1)}=0$$

加減，得
$$\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}=0\tag{2}$$

約分，得
$$\frac{x+1}{x-2}=0\tag{3}$$

令
$$x+1=0$$

解得
$$x=-1$$

[驗算]　以 $x=-1$ 代入(1)式，左右相合。故 $x=-1$ 是眞根而非僞根。

[注意]　由(2)式若不先約成(3)式，直接令左邊分式的分子爲零，得 $x^2-1=0$。由此求解，就有僞根 $x=1$ 參入其間了。

習題九十二

解下列各方程式(并察其僞根)：

1. $\dfrac{12+x}{2x}=\dfrac{12+x}{5x}$

2. $\dfrac{8x^2-3x+4}{12x^2+6x-5}=\dfrac{2}{3}$。

3. $\frac{2x-11}{x-11}-\frac{3x-2}{x+1}=3$。

4. $\frac{7}{x+4}-\frac{3}{x-5}=\frac{26x-25}{x^2-x-20}$。

5. $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x+3}=0$。

6. $\frac{x-2}{x-3}+\frac{3x-11}{x-4}=\frac{4x+13}{x+1}$。

7. $x+\frac{2x}{x-2}-\frac{4}{x+2}=\frac{8}{(x-2)(x+2)}$。

8. $\frac{9}{x^2+5x}+1=\frac{3}{x+1}+\frac{3}{x}$。

9. $x+\frac{1}{x}=2$。

10. $x-2+\frac{1}{x-2}=1$。

11. $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{10}{3}$。

12. $x^2+\frac{9}{x^2}=10$。

13. $x^2-5x+\frac{1}{x^2-5x}=5\frac{1}{2}$。

14. $x^4+\frac{1296}{x^4}=97$。

[註] 第 12,13,14 三題不必化爲四次或八次方程式。

15. $\frac{x-8}{x-10}+\frac{x-4}{x-6}=\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-9}$。

[解法] 先把原方程式變爲

$$1+\frac{2}{x-10}+1+\frac{2}{x-6}=1+\frac{2}{x-7}+1+\frac{2}{x-9}$$

即 $$\frac{1}{x-10}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-9}$$

移項,得 $$\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-6}$$

兩邊各自加減,得 $$\frac{1}{(x-10)(x-9)}=\frac{1}{(x-7)(x-6)}$$

由此得 $$(x-7)(x-6)=(x-10)(x-9)$$

解之,得 $$x=8$$

[注意] 學者試用§104所述二法解上面方程式,看能比本解法孰繁孰簡。

16. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-9}{x-7}=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-8}{x-6}$。

17. $\dfrac{2x-3}{2x-4}+\dfrac{2x-8}{2x-9}=\dfrac{2x-4}{2x-5}+\dfrac{2x-7}{2x-8}$。

18. $x-\dfrac{4x+5}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{x^2-10}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+4}$。

19. $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-7}{x-5}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x-6}{x-4}$。

20. $\dfrac{x+3}{x+6}+\dfrac{x+6}{x+9}=\dfrac{x+7}{x+10}+\dfrac{x+5}{x+8}$。

習題九十三

解下列各聯立分式方程式(如有僞根應舍棄之):

1. $$\begin{cases}1+\dfrac{2y^2}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{2y}{x+y}+\dfrac{y}{x-y} & (1)\\ x+y=9 & (2)\end{cases}$$

[提示] 第一法: 把(1)式移項加減化簡

$$\frac{(x-2y)(x-y)}{(x-y)(x+y)}=0$$

約為最簡分式，得 $$\frac{x-2y}{x+y}=0$$

乃令分子 $x-2y$ 為零，由聯立方程式

$$\begin{cases} x-2y=0 & (1) \\ x+y=9 & (2) \end{cases}$$

求解，就得所求的眞根。

第二法： 把(1)式用化整法變為 $x^2-3xy+2y^2=0$。乃由聯立方程式：

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & (1) \\ x+y=9 & (2) \end{cases}$$

求解，得兩組根。其中一組値使(1)式的分母，不為非零，是為僞根應捨棄之；他組値使(1)式的分母皆不為零，故為眞根。

2. $\begin{cases} 1+\dfrac{y}{x}-\dfrac{2y}{x+y}=\dfrac{2y^2}{x^2+xy} \\ 5x+4y=27 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x^2-xy}{xy-y^2}=0 \\ \dfrac{y}{x-y}+\dfrac{5}{x+y}-\dfrac{4y}{x^2-y^2}=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\dfrac{25}{63} \\ xy=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{y-1}{y+1}=2\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{y+1}{y-1}=3\dfrac{1}{3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{25}{144} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{17}{12} \end{cases}$

〔註〕 本題可以不用分式方程式解法。就是先求 $\frac{1}{x}=?$，$\frac{1}{y}=?$ 由此再求 x,y 的值。

8. $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{1}{144}\\[2mm]\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{49}{144}\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3\\[2mm]\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{4}{z}=3\\[2mm]\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{7}{z}=1\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=1\dfrac{1}{3}\\[2mm]\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{4}{(x-y)^2}=4\dfrac{1}{9}\end{cases}$

〔註〕 先以 $\frac{1}{x+y}=u$，$\frac{1}{x-y}=v$ 代入原式，求出 u,v 的值，然後再求 x,y 的值。

11. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=3\\[2mm]\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=1\\[2mm]\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{3}{y+z}+\dfrac{5}{x+z}=4\end{cases}$

習題九十四

1. 二數的和是 15，其各自倒數的和是 $\frac{3}{10}$。求這二數。

2. 會員若干人，平均分擔 132 元的用費。若會員增加 1 人，那麼每人就可少出 1 元。求原有會員若干人。

3. 一車從甲地開往乙地。行至中途，加快速度，每小時比開車時多行

10 里。於是共經 22 小時而達乙地，倘若該車行至全程$\frac{1}{4}$時便以新速度進行，則可早到1 小時。求甲乙兩地的距離。

4. 一數平方與其倒數平方的和是$\frac{97}{36}$。求這數。

5. 相隣三正數，各自倒數的和是$\frac{13}{24}$。求這三數。

6. 有一工程，甲乙合做需時 $1\frac{1}{3}$ 日而成；乙丙合做，需時 $1\frac{5}{7}$ 日而成；甲丙合做需時 $1\frac{1}{4}$ 日而成。問各人獨做各需幾日而成？

7. 水流每時進行里數與某船在靜水中每時所行里數相差得 10。甲乙兩地相距 120 里，該船往返一次共經 5 小時。求該船每時所行里數。

8. 甲從 A 向 B 進行，乙同時從 B 向 A 進行，相會時甲比乙多行 48 里，相會後甲再行 8 時而達 B，乙再行 18 時而達 A。求各人的速度及 AB 的距離。

第十二章 乘方及開方

I. 乘方

§ 108. 單項式乘 N 次方 把一數或一式自乘以求其二次，三次或任何次冪，叫做乘方。根據這定義實行乘方，那麼，

$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2}=a^6$。

$(-x^3)^2=(-x^3)(-x^3)=x^{3+3}=x^6$。

$(-a^5)^3=(-a^5)(-a^5)(-a^5)=-a^{5+5+5}=-a^{15}$。

$(-3a^3)^4=(-3)^4(a^3)^4=81a^{12}$。

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots\cdots 到\ n\ 次$$

$$= a^{m+m+m} \cdots\cdots 到\ n\ 次$$

$$= a^{mn}。$$

由此可知要把單項式乘 n 次方，就是把這項的係數（依算術方法）乘 n 次方，把文字的指數乘以 n，設 n 是偶數，答數所冠的符號是正，假使是奇數，所冠的符號和與式前面原附的符號相同。這樣，就得所求的 n 次方。

§ 109.　**二項式乘 N 次方**　求二項式 $(a \pm b)$ 的二次冪，三次冪，四次冪，五次冪，實行乘算，得

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$。

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$。

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$。

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$。

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$。

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$。

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$。

上列各式，等號右邊的式子叫做左邊的式子的展式。我們觀察其乘算結果，可得二項式 $(a \pm b)$ 乘 n 次方的規則如下：

(1)展式的項數是 $n+1$。

(2) a 的指數，在第一項就是 n，以後逐項少 1，至第 n 項爲 1 而止。

(3) b 的指數，在第二項是 1，以後逐項加 1，至末項爲 n 而止。

(4) 第一項的係數是 1，第二項的係數是 n，以後各項的係數是前一項的係數乘前一項 a 的指數再用前一項的項數除得的商。

(5) 各項前面所冠符號，在二項的和的 n 次方，都是正號；但在二項的差的 n 次方，則正負相間。

[例一]　求 $(a-2b)^4=?$

[解法]　$(a-2b)^4=a^4-4a^3(2b)+6a^2(2b)^2-4a(2b)^3+(2b)^4$

$=a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4$。

[例二]　求 $(3x+y)^5=?$

[解法]　$(3x+y)^5=(3x)^5+5(3x)^4y+10(3x)^3y^2$

$+10(3x)^2y^3+5(3x)y^4+y^5$

$=243x^5+405x^4y+270x^3y^2+90x^2y^3$

$+15xy^4+y^5$。

[例三]　計算 $103^3=?$

[解法]　$103^3=(100+3)^3=(100)^3+3\cdot(100)^2\cdot(3)$

$+3(100)\cdot(3)^2+(3)^3$

$=1000000+90000+2700+27$

$=1092727$。

習題九十五

1. 求下列各單項式的乘方：

(a) $(4a^4b^3x^2)^2$。　(b) $(2ab^2)^3$。

(c) $(3a^2b^3)^4$。　(d) $(5x^2y^3)^2$。

(e) $(-5ab^2)^3$。　(f) $\left(\dfrac{1}{3y^2}\right)^4$。

(g) $\left(\dfrac{5ab^4}{2xy}\right)^2$。　(h) $\left(-\dfrac{x^3}{3}\right)^3$。

2. 求下列各式的展式：

(a) $(x+y)^2$　(b) $(x+y)^3$

(c) $(x+y)^4$　(d) $(x+y)^5$

(e) $(x+y)^6$　(f) $(x+y)^7$

3. 求下列各式的展式：

(a) $(x-y)^8$。　(b) $(2x-3y)^5$。

(c) $\left(\dfrac{x}{2}-2y\right)^5$。　(d) $(x-2)^{10}$。

(e) $(3x+1)^7$。　(f) $(xy+1)^{10}$。

4. 計算 $99^3=?$　$98^5=?$

II. 開方

§ 110. **關於開方的幾個名詞**　求任何數M的二次冪，可照乘方中所講，寫成 $M^2=?$；求M的三次冪，或n次冪，可寫成 $M^3=?$，或 $M^n=?$ 反過來說，我們也可求何數的二次冪，三次

冪，或 n 次冪等於 M，用算式表示，可寫成$\sqrt{M}=?$，$\sqrt[3]{M}=?$，或 $\sqrt[n]{M}=?$，$\sqrt{M}$ 爲 M 之二次方根或平方根，$\sqrt[3]{M}$ 爲 M 之三次方根或立方根，$\sqrt[n]{M}$ 爲 M 之 n 次方根。求$\sqrt[n]{M}=?$〔其實就是 $M=(?)^n$〕的運算叫做開方，開方就是乘方的逆運算。

在算式$\sqrt[n]{M}$中，M叫做被開式，n 叫做根指數，所得結果"?"叫做 M的 n 次方根，全式$\sqrt[n]{M}$叫做根式。

例如在$\sqrt[5]{32}=2$ 中，$\sqrt[5]{32}$ 是根式，32 是被開方數，5 是根指數，2 是 32 的 5 次方根。

§ 111. **單項式開 n 次方** 由乘法得$(ax^p)^n=a^nx^{pn}$。反之，就得$\sqrt[n]{a^nx^{pn}}=ax^p=ax^{\frac{pn}{n}}$。可見"要把單項式開 n 次方，就是把這項的係數（依算術方法）開 n 次方，把文字的指數除以 n；這樣，就得所求的方根。"舉例如下：

〔例一〕 $\sqrt{36a^4}=6a^2$。

〔例二〕 $\sqrt[4]{81a^4b^8c^{12}d^{24}}=3a^{\frac{4}{4}}b^{\frac{8}{4}}c^{\frac{12}{4}}d^{\frac{24}{4}}=3ab^2c^3d^6$。

§ 112. **多項式開 n 次方（因子法）** 在被開方式容易分解因子時，欲求方根，可以先把被開方式分成因子，再依 § 110 去求方根，舉例如下：——

〔例一〕 $\sqrt{x^2+6xy+9y^2}=?$

〔解法〕 依因子分解法，得

$$x^2+6xy+9y^2=(x+3y)^2$$

$$\sqrt{x^2+6xy+9y^2}=\sqrt{(x+3y)^2}=x+3y。$$

[例二]　求 $\sqrt[3]{8x^3-12x^2+6x-1}=?$

[解法]　依因子分解法，得

$$8x^3-12x^2+6x-1=(2x-1)^3$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{8x^3-12x^2+6x-1}=2x-1。$$

§ 113.　多項式開平方（通法）　依 § 110，可見開平方是乘方（二次）的逆算，故開平方的方法，完全可從乘方公式推出來。譬如在 $(a+b)$ 的乘方既有 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；故在開平方就應有

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b。$$

一切開平方的手續，完全依這公式爲根據。在實際運算上，把上式改成 $\sqrt{a^2+b(2a+b)}=a+b$，於是乃有如下的算式：

$$
\begin{array}{r|l}
\text{（被開方式）}\quad a^2+2ab+b^2 & \;a+b\quad\text{（平方根）}\\
a^2 & \\
\hline
2a \qquad\qquad \quad 2ab+b^2 & \\
+b \qquad\qquad\qquad\quad & \\
\hline
b(2a+b) \qquad\quad 2ab+b^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

多項式開平方的通法，步驟如下：

I.　把被開方式依某文字的昇羃（或降羃）排列起來。

II.　求根的第一項。　把被開方式的第一項開平方，即得根的第一項。

從被開方式減去根的第一項的平方，得第一餘式。

III. 求根的第二項。 以根的第一項的2倍，除第一餘式，所得的商，就是根的第二項。

乃以根的第一項的二倍與這第二項相加，再以根的第二項乘這所得的和。

最後自第一餘式減去這乘得的積，得第二餘式。

IV. 求根的第三項。 把已得的第一，第二兩項的和當做一項，而把要求的第三項當做第二項；仿 III 繼續去做。

[註] 這種方法只在開方可以開盡時適用。不能開盡的只能倣此法求其近似根。

[例一] 求 $16x^4+40x^2+25$ 的平方根。

[解法]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 16x^4+40x^2+25 \;\big|\; 4x^2+5 \\
 & 16x^4 \\
\hline
2(4x^2)=8x^2 & 40x^2+25 \\
+5 & \\
\hline
5(8x^2+5) & 40x^2+25 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

[例二] 求 $\sqrt{x^4+4x^3-2x^2-12x+9}=?$

[解法]

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4+4x^3-2x^2-12x+9 \;\big|\; x^2+2x-3 \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2 & 4x^3-2x^2-12x+9 \\
+2x & \\
\hline
2x(2x^2+2x) & 4x^3+4x^2 \\
\hline
2x^2+4x & -6x^2-12x+9 \\
-3 & \\
\hline
-3(2x^2+4x-3) & -6x^2-12x+9 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

習題九十六

I. 下列各式是否相等，並說明其理由：

(a) $\sqrt{c^2+d^2+e^2}=c+d+e$。

(b) $\sqrt{x^2-y^2}=x-y$。

(c) $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$。

(d) $\sqrt[3]{x^3-y^3}=x-y$。

(e) $\sqrt[3]{x^3+y^3}=x+y$。

(f) $\sqrt[3]{67}=4+\sqrt[3]{3}$。

II. 求下列各式的平方根及立方根：

(a) $64a^6$。　(b) $64x^6y^{18}z^{24}$。

(c) $x^6y^{12}z^{18}w^{24}$。　(d) $729x^6y^6z^{12}$。

(e) $729a^{6m}b^{6n}c^{6p}$。　(f) $4096p^{6x}q^{6y}r^{12m}$。

III. 用因子分解法求下列各式的平方根：——

(a) $9x^2+6xy+y^2$。

(b) $9x^6+12x^3y^3+4y^6$。

(c) $25x^4-30x^2y^2+9y^4$。

(d) $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$。

(e) $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4xz$。

IV. 用因子分解法求下列各式的立方根：

(a) $m^3+6m^2n+12mn^2+8n^3$。

(b) $27a^3-27a^2+9a-1$。

(c) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$。

(d) $x^6+15x^4y+75x^2y^2+125y^3$。

V. 用 §113 做題 II.

VI. 用 §113 求下列各式的平方根：

(a) $x^4+6x^3+5x^2-12x+4$。

(b) $x^4+8x^3-64x+64$。

(c) $x^6+2x^5-3x^4+2x^3+10x^2-12x+9$。

§ 114. **多項式開立方(通法)。** 依 § 110,可見開立方是三次乘方的逆運算,故開立方的原理也以乘方公式爲根據。因爲,在$(a+b)$的乘方定有 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^2$

在開方自應有 $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b$。

一切開立方運算,完全仿此公式去推演。爲布式便利起見,又把這公式改寫爲 $\sqrt[3]{a^3+b(3a^2+3ab+b^2)}=a+b$。

而在實際運算乃有下面的算式:

$$
\begin{array}{r|l}
(\text{被開方式}) & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \;\big|\; \underline{a+b}\ (\text{立方根。}) \\
 & a^3 \\
\begin{array}{r} 3a^2 \\ +3ab \\ +b^2 \end{array} & \begin{array}{l} +3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \\ \end{array} \\
\hline
b(3a^2+3ab+b^2) & +3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

多項式開立方的通法,步驟如下:

I. 先把被開方式依 a 的降冪排列起來。

II. 求根的第一項。 把被開方式的第一項 a^3 開立方,即得根的第一項,a。

從被開方式減去根的第一項的立方,得第一餘式

$$3a^2b+3ab^2+b^3。$$

III.　求根的第二項。　以根的第一項平方的3倍 $3a^2$ 除第一餘式的首項得 b，這就是根的第二項。

乃把 $3a^2$，第一，第二兩項之積的三倍 $3ab$，與第二項平方，三者相加；而以 b 乘這所得的和。

最後，從第一餘式減去這所得的積，得第二餘式。(結果是 0，故 $a+b$ 即是所求的立方根；如所餘非零，則依下法求其第三項。)

IV.　求根的第三項。　把已得的第一，第二兩項的和當做第一項，要求的第三項當做第二項，仿 II 繼續去做。

[註]　同 §113 的註。

[例一]　求 $\sqrt[3]{27x^3+27x^2+9x+1}=?$

[解法]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 27x^3+27x^2+9x+1 \;\big|\; 3x+1=\text{所求之立方根} \\
 & 27x^3 \\
\hline
3(3x)^2=27x^2 & 27x^2+9x+1 \\
3(3x)\cdot 1=9x & \\
1^2=1 & \\
\hline
1\times(27x^2+9x+1) & 27x^2+9x+1 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

[註]　本例中 $a=3x$，$b=1$。把本例解法與上式比較，當見他們逐步相同，並沒有什麼困難。

[例二]　求 $\sqrt[3]{x^6+6x^4+7x^3+3x^5+3x+6x^2+1}=?$

[解法]

$$
\begin{array}{l}
x^2+x+1 \\
\hline
x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6 \\
\hline
3x^4 & 3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1 \\
3x^3 & \\
x^2 & \\
\hline
x(3x^4+3x^3+x^2) & 3x^5+3x^4+x^3 \\
\hline
3(x^2+x)^2 = 3x^4+6x^3+3x^2 & 3x^4+6x^3+6x^2+3x+1 \\
3(x^2+x)\cdot 1 = \qquad +3x^2+3x & \\
1^2 = \qquad\qquad +1 & \\
\hline
1\cdot(3x^4+6x^3+6x^2+3x+1) & 3x^4+6x^3+6x^2+3x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

［註］既得根的第二項 x 之後，把 x^2+x 當做第一項，所求第三項當做第二項，依照求第二項的方法去求這第三項。

習題九十七

I. 用 § 114 解習題九十六題 III。

II. 用 § 114 求下列各式的立方根：

（a） $27a^9-54a^7+36a^5-8a^3$。

（b） $1-9a+33a^2-63a^3+66a^4-36a^5+8a^6$。

（c） $27x^6-27x^5y-18x^4y^2+17x^3y^3+6x^2y^4-3xy^5-y^6$。

（d） $\frac{27x^3}{64y^3}-\frac{27x^2}{8y^2}+\frac{9x}{y}-8$。

第十三章 簡易不等式

§ 115. 不等式。

我們知道正數比 0 大，負數比 0 小。又從代數的減法，知一數 A 比他數 B 大，則 $A-B$ 常是正；若 A 比 B 小，則 $A-B$ 常

是負。於是可知

$A-B>0$ 與 $A>B$ 相同，$A-B<0$ 與 $A<B$ 相同。

關於不等數有公理如下：

I. 不等數加等數，其和仍不等，原來大的和仍大。

［例如］ $5>4$，則 $5+2>4+2$，即 $7>6$。

［注意］ $>$，開口一邊向左，讀做大於；$<$，開口一邊向右，讀做小於，此在習題十三第5題注意中已經知道了。此不等號開口一邊的向左向右，叫做不等號的向。若 $>$ 改做 $<$，叫做改變不等號的向。

II. 等數加不等數，其和亦不等，所加的大和亦大。

III. 從不等數減等數，其差仍不等，原來大的差仍大。

［例如］ $5>4$，則 $5-2>4-2$，即 $3>2$。

IV. 從等數減不等數，其差亦不等，所減的大，則其差小。

［例如］ $5>4$，則 $7-5<7-4$，即 $2<3$。

此(IV)換一句話來說，可如下：

從等數減不等數，改變不等號的向。

V. 不等數的等倍數仍不等，原來大的倍數仍大。但此倍數指算術的倍數。(就是正數的倍數)。

［例如］ $5>4$，則 $(5\times2)>(4\times2)$，即 $10>8$。

VI. 不等數的等分數仍不等，原來大的分數仍大。但此分數指算術的分數。(就是正數的分數)。

［例如］ $10>8$，則$\frac{10}{2}>\frac{8}{2}$，卽 $5>4$。

§ 116. 不等式。

表示二個代數式間有大小關係的式叫做不等式。

［例如］ $(a-b)^2>0$， $x+5>8$。

都是不等式。

在不等式中，亦有與前款公理相類的基本性質如下：

I. $a>b$，及 $b>c$，則 $a>c$。

因爲 $a-b\equiv(a-b)+(b-c)$，

從前款，知 $a>b$，則 $a-b>0$，

$b>c$，則 $b-c>0$，

於是 $a-c>0$，

卽 $a>c$。

II. 若 $a>b$，則 $a\pm c>b\pm c$。

因爲 $(a\pm c)-(b\pm c)\equiv a-b$，

今 $a>b$，卽 $a-b>0$，

故 $(a\pm c)-(b\pm c)>0$，

故 $a\pm c>b\pm c$。

此(II)換一句話來說，便是：

在不等式 $a>b$ 的兩端加同數，或從此減同數 c，此不等號的向不變。

於是，如有 $d-e>f-g$;

兩端都加 $e-f$，可得

$$d-f>e-g;$$

若兩端都加 $e+g-d-f$，可得

$$-f+g>-d+e,$$

即 $$-d+e<-f+g。$$

從此可知：

a. 變不等式一端的一項或數項的記號，可移到別一端。此是不等式的移項。

b. 若變不等式兩端各項的記號，同時當變不等式的向。

III. 若 $a_1>b_1$，$a_2>b_2$，則 $a_1+a_2>b_1+b_2$。

因爲 $(a_1+a_2)-(b_1+b_2)\equiv(a_1-b_1)+(a_2-b_2)$,

今從假設， $a_1>b_1$， 即 $a_1-b_1>0$,

$a_2>b_2$， 即 $a_2-b_2>0$,

故 $(a_1+a_2)-(b_1+b_2)>0$,

即 $$a_1+a_2>b_1+b_2。$$

此(III)換一句話來說，便是：

二個同向不等式，左右各自加起來，不等號的向不變。

［注意］ 二個同向不等式不能從一式減又一式。例如 $a_1>b_1$，$a_2>b_2$，不能得 $a_1-a_2>b_1-b_2$。

因爲 $(a_1-a_2)-(b_1-b_2)=(a_1-b_1)-(a_2-b_2)$，

但 a_1-b_1，a_2-b_2，雖都是正數，但其差或正或負或 0 都可以，不能定說是正。

IV. $a>b$，又若 $c>0$，則 $ac>bc$，及 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；若 $c<0$ 則 $ac<bc$，及 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

因爲 $$ac-bc=(a-b)c,$$

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}。$$

今從假設，$a>b$，即 $a-b>0$，

故 a. 若 $c>0$，則 $ac-bc>0$，即 $ac>bc$，

及 $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}>0$，即 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；

b. 若 $c<0$，則 $ac-bc<0$，即 $ac<bc$，

及 $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}<0$，即 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

V. 若 $a_1>b_1$，$a_2>b_2$，且 a_1，a_2，b_1，b_2 都是正數，則 $$a_1a_2>b_1b_2。$$

因爲 $$a_1a_2-b_1b_2=(a_1a_2-b_1a_2)+(b_1a_2-b_1b_2)$$
$$=a_2(a_1-b_1)+b_1(a_2-b_2)。$$

今從假設，知 $a_2>0$，$a_1-b_1>0$，$b_1>0$，$a_2-b_2>0$，

故
$$a_1a_2-b_1b_2>0,$$
即
$$a_1a_2>b_1b_2。$$

§ 117. 不等式的分類。

不等式與等式相似，可分成二類：第一類，式中所含文字用任意數代替，不等式恆能成立，此類不等式叫做恆不等式；第二類，式中所含特別文字要用某種界限內的數值代替，不等式纔能成立，此類不等式叫做條件不等式。

［例如］ 若 a,b 不相等，$a^2+b^2>2ab$ 是恆不等式；$x+5>8$ 是條件不等式。

§ 118. 證恆不等式。

恆不等式的證法，已見於 § 116 證不等式的基本定理，可取不等號兩邊二式的差看他正負，決定他的大小。或者用代數學初步公式或恆等式，亦可得到很多的幫助。

［例］ b,a 都是正數，且不相等，證

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}。$$

［證］ 因為

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2。$$

今從假設，$a\neq b$，即 $\sqrt{a}\neq\sqrt{b}$ 即 $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq 0$，

於是 $$\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0,$$

故 $$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>0,$$

即 $$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}。$$

[別證] 用乘法公式。

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\equiv(\alpha-\beta)^2。$$

若 $\alpha\neq\beta$，則 $$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2>0,$$

即 $$\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta,$$

故 $$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}>\alpha\beta。$$

今用 $\alpha^2=a$, $\beta^2=b$ 代入此式，即得

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}。$$

習題九十八

證以下各個不等式：

1. a, b 同號且不相等，證 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$。

2. $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$，證 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$。

3. a, b, c 都是正數而不相等，證

$$(b+c)(c+a)(a+b)>8abc。$$

4. a, b, c 都不相等，證

$$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab。$$

§ 119. 解不等式。

條件不等式常省稱做不等式。不等式中代表未知數的文字亦叫做元。求不等式中元所能取數值的界限，使此不等式成立的，叫做解不等式。

[例一]　解不等式　$8x-2>2x+5$。

移項，得　$8x-2x>5+2$

$\therefore$　$x>7$　答。

[例二]　解不等式　$5x-\frac{1}{4}>7+\frac{17x}{3}$。

用正數 4×3 乘兩邊，得

$$60x-3>84+68x,$$

移項，　$60x-68x>84+3$,

即　$-8x>87$,

用負數 -8 除兩邊，得　$x<-10\frac{7}{8}$,

即凡比 $-10\frac{7}{8}$ 小的一切值都適合所設不等式。

習題九十九

解下諸不等式：

1. $\frac{1}{15}x<\frac{7}{3}$　　2. $-x>-7$。

3. $5x-3<3x+2$。　　4. $x-\frac{5}{7}>\frac{2}{9}x+2$。

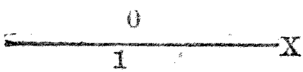
5. $\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{12}>\frac{3x+1}{6}-\frac{5}{4}$。

§ 120. 一元一次不等式的圖形。

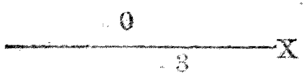
一元一次不等式化成最簡後的形式是

$$x<a，\text{或 } b<x。$$

此中 a、b 都表已知的代數數。此中只有一個變數 x，故表一個數尺中的界限。



[例一] $x<-1$，是表數尺上在一點 -1 左邊的全部份。

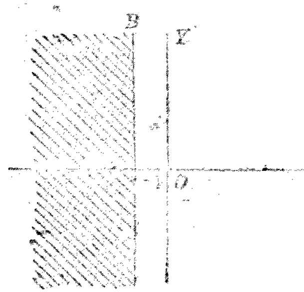


[例二] $3<x$，是表數尺上一點 $+3$ 右邊的全部份。

若將上二式當做二元一次不等式的特例，如

$$x<0y+a，\text{或 } x>0y+b，$$

則可表示一個平面中的界限。



[例三] $x<-1$ 當做，

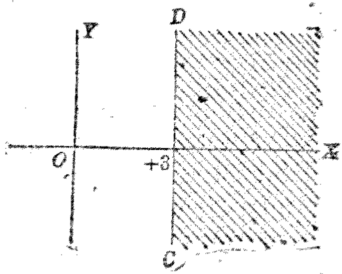
$$x<0y-1。$$

先令 $x_1=0y-1$，則 $x<x_1$。$x_1=0y-1$ 的圖形是在平面中直線 AB，$x<x_1$ 表示現在所求界

限中的各點是在 AB 直線的左邊，便是圖中有陰影的一部份。

［例四］ $x>3$ 當做 $x>0y+3$。

先令 $x_2=0y+3$，此式的圖形是右圖中的直線CD。$x>x_2$ 表示凡在所求界限中的各點是在 CD 直線的右邊。



習題一百

下諸一元不等式當做二元不等式用圖表其界限：

1. $\frac{1}{10}x<\frac{7}{8}$。　　2. $-x>-7$。

3. $x>0$。　　4. $-5<x<-3$。

5. $5x-3<3x+2$。　　6. $x-\frac{5}{7}>2x+3$。

第十四章　不盡根數　虛數　根式方程式

I. 不盡根數

§ 121. **不盡根數的需要**　［問題一］設有方程式 $x^2-2=0$，試求其根。依前面二次方程式解法解之，得

$$x=\pm\sqrt{2}.$$

[問題二] 設有方程式 $x^3-2=0$，試求其根。

先用移項法，得 $x^3=2$。

再把兩邊各開立方，得 $x=\sqrt[3]{2}$。

由上面例看來，可見解二次以上的方程式，所得的值，有時非含有根號，(如$\sqrt{2}$,$\sqrt[3]{2}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{10}$ 之類)不可。

但是$\sqrt{2}$的值究竟是多少？整數呢？小數呢？有限小數呢？還是循環小數呢？答曰$\sqrt{2}$非整數，非有限小數，亦非循環小數(理由詳見下節)。若用小數來表$\sqrt{2}$的值，其位數必多至無窮而不循環。所以若把$\sqrt{2}$依開方手續去開方，無論演至何年何月，終無盡止之時。所以$\sqrt{2}$叫做不盡根數。

同樣$\sqrt[3]{2}$,$\sqrt[3]{5}$,之類也都是不盡根數。(理由詳見下節)。

§ 122. **不盡根數何以為不盡？不盡根數的性質** 把任何整數開若干次方，如$\sqrt[m]{N}$之類，如不能得整數，則必為不盡根數。理由何在？述之於下：——

先看特例： $\sqrt{2}\neq\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\text{是既約分數}\right)$

[證] 假定 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$,

應有 $2=\frac{a^2}{b^2}$。

今$\frac{a}{b}$是既約分數，則 b 不能整除 a，自然也不能整除 a^2。b 既不

能整除 a^2，當然 b^2 更不能整除 a^2。b^2 既不能整除 a^2，怎樣能得整數 2？故

$$2 \neq \frac{a^2}{b^2}。$$

所以 $$\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}。$$

再證通例：$$\sqrt[m]{N} \neq \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\text{是既約分數}\right)。$$

［證］ 假定 $$\sqrt[m]{N} = \frac{a}{b},$$

應有 $$N = \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}。$$

因 b 不能整除 a，所以也不能整除 a^m。b 既不能整除 a^m，當然 b^m 更不能整除 a^m。故 $\frac{a^m}{b^m}$ 不等於任何整數，自然亦不等於 N。故

$$N \neq \frac{a^m}{b^m},$$

所以 $$\sqrt[m]{N} \neq \frac{a}{b}。$$

明白了 $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$，$\sqrt[m]{N} \neq \frac{a}{b}$，那麼對於 $\sqrt{2}$，$\sqrt[m]{N}$ 何以不盡之故，不難一想而知。因爲，假若 $\sqrt{2}$，$\sqrt[m]{N}$ 可化爲有限小數，或循環小數，依算術上"任何有限小數，任何循環小數，均可化成分

數"的道理，$\sqrt{2}$, $\sqrt[m]{N}$應可化爲分數，這樣，便和上面已證的結果矛盾了。

所以總而言之，$\sqrt[m]{N}$如不能開得整數，則其眞值也不能用小數來表示。但可用小數來表牠的近似值。例如 1.4; 1.41; 1.414;等等都是$\sqrt{2}$的近似值，而非眞值。$\sqrt{2}$的眞值就是一個"自乘可以得"2"的數。同理，$\sqrt[m]{N}$就是一個"乘m次方可以得N"的數。用算式來表，$\sqrt[m]{N}$的性質如下：

$$(\sqrt[m]{N})^m = N。$$

在不盡根數$\sqrt[m]{N}$中，符號暫便不計，我們把m叫做根的次數，N叫做被開方數。

§ 128. **不盡根式化簡的原理**　在沒有討論不盡根式各種原理之前，我們先要注意幾條條件：

(1)本章所用 $a, b, N, \cdots\cdots$等字母，皆取正值。

(2)$\sqrt[m]{N}$可得m個值，但是現在只論其正的一值，就是此正值的m冪是N。

如 $2^2=4$, $(-2)^2=4$，則 2 與 -2 皆爲 4 之方根。但根據上述條件，2 只認爲是 $\sqrt{4}$ 的方根，-2 是 $-\sqrt{4}$ 的方根。

(3)m爲奇數時，$\sqrt[m]{-N}$只論其$-\sqrt[m]{N}$一值。

如$\sqrt[3]{-27}$只論其$-\sqrt[3]{27}$一值。

照此規定，可得化簡根式原理如下：

(A)　$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$。

〔證〕
$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m$$
$$=ab=(\sqrt[m]{ab})^m$$

兩邊各開m次方，得 $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$。

(B)
$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}。$$

〔證〕
$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}=\frac{a}{b}=\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m$$

兩邊各開m次方，得
$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}。$$

(C)　$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}$。

〔證〕
$$(\sqrt[mp]{a^{np}})^{mp}=a^{np}\qquad(1)$$
$$(\sqrt[m]{a^n})^{mp}=[(\sqrt[m]{a^n})^m]^p=(a^n)^p=a^{np}\qquad(2)$$

故
$$(\sqrt[mp]{a^{np}})^{mp}=(\sqrt[m]{a^n})^{mp}。$$

兩邊各開mp次方，得 $\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}$。

§ 124. **不盡根數化簡後的形狀**　依據上節(A)，(B)，(C)三條，任何不盡根數，都可化成另一不盡根數使合下面的標準：

(1)　被開方數內任何質因子的指數，不高於根的次數。

[§ 123(A)]。

(2)　被開方數內各個質因子的指數與根的次數，不再有

相同因子。[§ 123(C)]。

(3)　被開方數不含分母。[§ 123(B)並參看 § 127 例一注意]。

[例一]　$\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 2}=\sqrt{2^2}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$。

[例二]　$\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{8\times 6}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{6}=2\sqrt[3]{6}$。

[例三]　$\sqrt[6]{64\times 27}=\sqrt[6]{64}\sqrt[6]{27}=2\sqrt[6]{27}$。

$$=2\sqrt[6]{3^3}=2\sqrt{3}。$$

[例四]　$\sqrt[4]{36}=\sqrt[4]{6^2}=\sqrt{6}$。

[例五]　$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

[例六]　$\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{a^3b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{ab}$。

習題一百零一

化簡下列各式:

1. $\sqrt{288}$。　　2. $\sqrt{20}$。　　3. $\sqrt[3]{128}$。

4. $\sqrt{250}$。　　5. $\sqrt[3]{250}$。　　6. $\sqrt[3]{5000}$。

7. $\sqrt[3]{-2187}$。　　8. $\sqrt[5]{245}$。　　9. $\sqrt[3]{256}$。

10. $\sqrt[4]{3125}$。　　11. $\sqrt[4]{800}$。　　12. $\sqrt[4]{125}$。

13. $\sqrt[6]{216}$。　　14. $\sqrt[6]{1125}$。　　15. $\sqrt{\frac{2}{7}}$。

16. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$。　　17. $\sqrt{\frac{2a}{b}}$。　　18. $\sqrt[3]{\frac{14}{27}}$。

19. $\sqrt[3]{-289a^4b^5c^5}$。　　20. $\sqrt[10]{(x+y)^5}$。

21. $\sqrt{1849(a+b)^2(a-b)^3}$。　　22. $\sqrt{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$。

23. $\sqrt{x^4y^6+x^6y^4}$。　　24. $\sqrt[3]{x^3y^6+x^6y^3}$。

25. $\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2}$。

26. $\sqrt[3]{8x^4y-24x^3y^2+24x^2y^3-8xy^4}$。

在下列各式內,把根號外的係數化入根號之內:

27. $11\sqrt{3}=\sqrt{11^2}\sqrt{3}=\sqrt{121}\sqrt{3}=\sqrt{363}$。

28. $6\sqrt[3]{4}$　　20. $\frac{ab}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}$。

30. $\frac{4}{11}\sqrt{\frac{77}{8}}$。

§ **125. 不盡根式的加減**　兩個不盡根式,除係數外,別無他處不同的,叫做同類根式。

幾個同類根式可以加減成一個根式;幾個不同類根式,不能加減成一個根式。(這與以前所述"同類項可以加減成一項;不同類項不能相加或相減成一項,"其理相同。學者可比較一下)。

[例一]　$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

$=(3+2-4)\sqrt{5}=\sqrt{5}$。

[例二]　$3\sqrt{5}+3\sqrt{3}=6\sqrt{5}$。對否? 何故?

$3\sqrt{5}+3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$。對否? 何故?

$3\sqrt{5}+3\sqrt{3}=6\sqrt{8}$。對否? 何故?

[例三]　$3\sqrt{5}+2\sqrt[3]{5}=3\sqrt{5}+2\sqrt[3]{5}$。何故?

[例四]　$\sqrt{20}+\sqrt{45}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$

$$=(2+3)\sqrt{5}=5\sqrt{5}。$$

［例五］ $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}+\sqrt{75}$

$$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}+5\sqrt{3}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{2}+6\sqrt{3}。$$

由上列諸例看來，可得不盡根式的加減規則如下：

第一步。 化各個不盡根式成最簡的形狀。

第二步。 把同類根式的係數，依其原冠的符號加減之，以這所得結果置於公共根式之前，作為根式的係數。

第三步。 把不同類諸根式，依其原冠的符號，分別用加減號聯結起來（以示相加或相減之意）。

習題一百零二

試化簡下列各式：

1. $5\sqrt{45}-2\sqrt{20}+8\sqrt{5}$。

2. $5\sqrt{63}+6\sqrt{7}-8\sqrt{28}$。

3. $\sqrt{44}+5\sqrt{176}-2\sqrt{99}$。

4. $6\sqrt{363}-2\sqrt{243}+3\sqrt{192}$。

5. $6\sqrt[3]{81}-7\sqrt[3]{192}+4\sqrt[3]{648}$。

6. $\sqrt{2}+5\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{50}$。

7. $\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{4}$。

8. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$。

9. $3\sqrt{147}-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{27}}$。

10. $\sqrt[3]{-54}-4\sqrt[3]{-16}+5\sqrt{250}$。

11. $3\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{[illegible]0}-\sqrt{80}$。

12. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{75}}$。

13. $\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{3}$。

14. $\sqrt[3]{6}+\sqrt{6}+\sqrt[4]{6}$。

15. $3\sqrt{x}+4\sqrt{y}-6\sqrt{x}+7\sqrt{y}$。

16. $\sqrt{(a+b)^2c}+\sqrt{(a-b)^2c}-2a\sqrt{c}$。

17. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}+2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}-2}+\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$。

18. $\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{1}{xy}}+\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{1521}{x^3y+2x^2y^2+xy^3}}$。

§ 126. **不盡根式的乘法**　依前 § 123 (*A*)可見兩個同次根可以相乘。不同次根，如欲相乘，須先求各根式根指數的 L. C. M.，根據 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$，各以同數乘各根式的根指數，和被開方式的指數，使各根式均得以所求出的 L. C. M. 爲根指數；這樣把不同次根化爲同次根，然後相乘。

[例一]　$\sqrt{2}\sqrt{84}\sqrt{6}=\sqrt{2\times84\times6}$

$$=\sqrt{2\times2^2\times3\times7\times2\times3}$$

$$=\sqrt{2\times2\times3}\sqrt{7}=12\sqrt{7}.$$

［例二］　$\sqrt[3]{2}\sqrt{3}=\sqrt[6]{2^2}\sqrt[6]{3^3}$

$$=\sqrt[6]{2^2\times3^3}=\sqrt[6]{108}。$$

［例三］　$\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{24})=\sqrt{2}\sqrt{3}$

$$+\sqrt{2}\sqrt{24}=\sqrt{2\times3}+\sqrt{2\times24}$$

$$=\sqrt{6}+4\sqrt{3}。$$

［例四］　$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

$$=\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{5}$$

$$+\sqrt{2}\sqrt{7}+\sqrt{3}\sqrt{7}$$

$$=\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}。$$

［例五］　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$$=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b。$$

［註］　根式$\sqrt{a}+\sqrt{b}$與根式$\sqrt{a}-\sqrt{b}$二者叫做共軛根式。共軛根式的積，恆不含根式。這個結果很為重要。學者務宜注意。

習題一百零三

求下列各積：

1.　$\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}$。　　　　2.　$\sqrt{3}\times\sqrt{24}\times\sqrt{5}$。

3.　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{324}$。　　　　4.　$\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{\frac{1}{200}}$。

5.　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt{5}$。　　　　6.　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{3}$。

7.　$2\sqrt{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$。

8.　$3\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$。

9. $(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})$。

10. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$。

11. $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$。

12. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$。

13. $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})(-\sqrt{2}-\sqrt{3})$。

14. $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{20}-\sqrt{12})$。

15. $(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})$。

16. $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(-\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})$。

§ 127. **不盡根式的除法**　不盡根式的除法，就是把被除式與除數同乘以同一適當的根式，使除數（不是被除數）不含根式。

[例一]　$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

[注意]　在$\frac{1}{\sqrt{3}}$與$\frac{\sqrt{3}}{3}$之中，二者同有$\sqrt{3}$；而前式的分子是1，後式的分母是3。似乎$\frac{1}{\sqrt{3}}$比$\frac{\sqrt{3}}{3}$較簡，那麼我們何必把$\frac{1}{\sqrt{3}}$化成$\frac{\sqrt{3}}{3}$呢？原因如下？設$\sqrt{3}$的近似值爲 1.73205。由$\frac{1}{\sqrt{3}}$直接求牠的近似值，須演$\frac{1}{1.73205}$除算。但若由$\frac{\sqrt{3}}{3}$求牠的近似值，只須演算$\frac{1.73205}{3}$。這種求近似值的方法非但比較便利，並且亦比較精確。

[例二]　$$\frac{3}{\sqrt{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}。$$

[例三]　$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}}=\frac{5\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}}=\frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}。$$

[例四] $$\frac{a^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{a^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$$

$$=\frac{a^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}。$$

[例五] $$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+3+2\sqrt{6}-5}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30})}{2\sqrt{36}}$$

$$=\frac{2\times(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30})}{12}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}。$$

[例六] $$\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}=\frac{b^2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{(\sqrt{a^2+b^2}+a)(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$$

$$=\frac{b^2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{(a^2+b^2)-a^2}$$

$$=\frac{b^2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{b^2}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}-a。$$

習題一百零四

求下列各式的結果：

1. $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$。　　2. $\sqrt{2}\div\sqrt{3}$。

3. $3\div\sqrt{2}$。　　4. $2\div\sqrt{3}$。

5. $3\div\sqrt[3]{2}$。　　6. $2\div\sqrt[3]{3}$。

7. $\sqrt[4]{3}\div\sqrt[3]{2}$。　　8. $\sqrt[3]{2}\div\sqrt[4]{3}$。

9. $1\div(\sqrt{3}+\sqrt{5})$。　　10. $(2-\sqrt{3})\div(1+\sqrt{3})$。

11. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\div(\sqrt{2}-\sqrt{3})$。

12. $(\sqrt{7}-\sqrt{19})\div(\sqrt{7}+\sqrt{19})$。

13. $1\div(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$。

14. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\div(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$。

15. $\sqrt{3}\div\sqrt{250}$。

16. $(3+\sqrt{6})(\sqrt{5}-2)\div(5-\sqrt{6})$。

17. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\div\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$。

18. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\div(5+2\sqrt{6})$。

19. $\dfrac{y^2}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$。　　20. $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$。

設$\sqrt{3}=1.73205$，$\sqrt{5}=2.23607$，求下列各商到小數四位：

21. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$。　　22. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2-2\sqrt{15}}$。

II. 虛數

§ 128. 虛數的需要及其性質

［問題一］　設有方程式 $x^2+1=0$，試求其根。依二次方程

式解法解之，得 $x=\pm\sqrt{-1}$。

［問題二］　設有方程式 $x^2+x+1=0$，試求其根。

依公式求解，得　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{-3}}{2}$。

由上二例看來，可見解二次方程式所得的值，有時非負數的平方根不可。

但是，負數的平方根，如 $\sqrt{-1}$ 之類，果爲何值？$+1$ 呢？抑 -1 呢？假定 $\sqrt{-1}=+1$，那麼把兩邊各自平方，應得 $-1=+1$，於理不通。可見 $\sqrt{-1}\neq+1$。假定 $\sqrt{-1}=-1$，把兩邊各自平方，應得 $-1=+1$，於理不通。可見 $\sqrt{-1}$ 也非 -1。然則 $\sqrt{-1}$ 究爲何值？應之曰"$\sqrt{-1}$ 就是平方能得 -1 的一個數。不但如此，在通例，$\sqrt{-a}$ 就是平方能得 $-a$ 的一個數"。用算式來表，$\sqrt{-a}$ 的性質如下：

$$(\sqrt{-a})^2=-a。$$

在以前，任何正負整數，分數或不盡根數，其平方恆爲正數，而今 $\sqrt{-a}$ 的平方，如 a 取正值時卻爲負數。這 $\sqrt{-a}$ 的性質和以前所述的正負整數分數或不盡根數等等，不是大不相同嗎？的確！迥然不同。因其性質不同，故各予以不同的專名。依習慣，把 $\sqrt{-a}$ 叫做虛數。對於虛數而言，$\sqrt{+a}$ 叫做實數。

［註一］　虛實二數非同類之數，猶之男女非同性之人。開 $\sqrt{-4}$，$\sqrt{-3}$，

$\sqrt{-1}$ 等名為那個實數，猶之問阿哥，阿弟各為父親的第幾女，這話自然不通。

〔註二〕　因求解二次方程式 $x^2+a^2=0$ 必然產生一種新數 $\sqrt{-a^2}$。這種事例並沒有什麼可怪的地方。在算學上每解一種新的問題，往往有一種新數的產生。例如（1）求解 $5x-5=0$ 及其同類方程式，乃有分數的產生；（2）求解 $x+a^2=0$，乃有負數的產生，（3）求解 $x^2-3=0$，及其同類方程式，乃有不盡根數的產生。此類事例，幾已數見不鮮，絕不希奇。何以到了虛數，就要另眼看待呢！所要注意的，新數總非舊數，不能以舊數來表示，例如分數不能以整數來表示；負數不能以正數來表示；不盡根數不能以整數或分數來表示；當然，虛數也不能以實數來表示。

§ 129.　虛數的化簡　為便利計 $\sqrt{-1}$ 常省寫為 i（即 $\sqrt{-1}=i$）。由是，任何虛數均可以 i 的倍數表之。例如，

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i。$$

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i。$$

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i。$$

$$\sqrt{-k^2}=\sqrt{k^2}\sqrt{-1}=ki。$$

$$\sqrt{-m}=\sqrt{m}\sqrt{-1}=\sqrt{m}\,i。$$

$$\sqrt{-12}=\sqrt{12}\sqrt{-1}=\sqrt{12}\,i=2\sqrt{3}\,i。$$

§ 130.　虛數的加減　例如 $ai+bi=?$ 欲答這個問題，先要明白 ai 與 bi 的意義。

由上節知　$ai=i$ 的 a 倍，

$bi=i$ 的 b 倍，

故　　$ai+bi=i$ 的 $(a+b)$ 倍。

∴　　$ai+bi=(a+b)i$。

同理　　$ai-bi=(a-b)i$。

［例一］　$3i+4i=(3+4)i=7i$。

［例二］　$3i+4i-8i=(3+4-8)i=-i$。

［例三］　$2i+\sqrt{3}\,i=(2+\sqrt{3})i$。

［例四］　$2+2i+5-\sqrt{-36}=2+2i+5-6i$

$$=(2+5)+(2-6)i$$

$$=7-4i$$。

［例五］　$\sqrt{-a^2}+\sqrt{-b^2}+\sqrt{-c}$

$$=ai+bi+\sqrt{c}\,i$$

$$=(a+b+\sqrt{c})i$$。

習題一百零五

求下列各式的結果：

1. $5i+4i-6i+i$。　　2. $-i-2i-3i$。

3. $xi+yi-zi$。　　4. $\sqrt{-36}+\sqrt{-144}-\sqrt{81}i$。

5. $\sqrt{-36}-\sqrt{144}$。　　6. $\sqrt{-2}-\sqrt{-4}-\sqrt{9}$。

7. $\sqrt{-a^2c^3+a^3c^2}+\sqrt{-(a-c)^3}$。

8. $\sqrt{-\frac{1}{5}}+\sqrt{-\frac{1}{16}}$。　　9. $\sqrt{-\frac{2}{3}}+\sqrt{-54}$。

10. $\sqrt{-a^2-2ab-b^2}+\sqrt{-a^2+2ab-b^2}$。

11. $\sqrt{-7}-\sqrt{-8}$。　　12. $\sqrt{-3}+\sqrt{-243}+\sqrt{-363}$。

13. $\sqrt[3]{-8}=2i$,　對不對?　何故?

14. $\sqrt[5]{-32}=2i$,　對不對?　何故?

15. $\sqrt[4]{-16}=2i$,　對不對?　何故?

[提示]　$\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\sqrt[4]{-1}=2\sqrt[4]{-1}$。但 $\sqrt[4]{-1}$ 等於 $\sqrt{-1}$ 否?

131. 虛數乘法　由 §128 知 $i^2=-1$,故

$$i=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,$$

$$i^5=i,\quad i^6=-1,\quad i^7=-i,\quad i^8=1。$$

推之,　$i^{4n+1}=i$,　$i^{4n+2}=-1$,　$i^{4n+3}=-i$,　$i^{4n+4}=1$。

由此得虛數的乘法如下:

$$ai\times bi=abi^2=-ab,$$

$$ai\times bi\times ci=abci^3=-abci$$

$$ai\times bi\times ci\times di=abcdi^4=abcd。$$

$$ai\times bi\times ci\times di\times ei=abcdei$$

[例一]　$-3i\times 4i=-12i^2=-12(-1)=12$。

[例二]　$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\times\sqrt{-49}$

$$=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{3}\,i\times 7i$$

$$=7\sqrt{2}\sqrt{3}\,i^3=-7\sqrt{6}\,i。$$

[例三]　$2i(3-4i)=2i\times 3-2i\times 4i$

$$=6i-8i^2=8+6i。$$

[註]　一個實數和一個虛數用加減號相連,叫做複數,例如 $(3+2i)$,

$(3-4i)$，$(a+bi)$，$(a-bi)$都是複數。

［例四］　$(3+2i)(4-3i)$

$$=3\times4-3\times3i+4\times2i-3i\times2i$$

$$=12-9i+8i-6i^2$$

$$=18-i。$$

［例五］　$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2。$

［註］　$a+bi$ 和 $a-bi$ 二者叫做共軛複數。兩個共軛複數的積爲實數。這結果也很重要。學者宜熟記之。

習題一百零六

1．求證 $-1=1$。

［證］　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{5}\,i=\sqrt{3\times5}\,i^2=-\sqrt{15}$。　　（1）

依 §123(4)，　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}=\sqrt{(-3)\times(-5)}=\sqrt{15}$。　　（2）

比較(1)，(2)得　　　　$-\sqrt{15}=\sqrt{15}$。

兩邊各除以$\sqrt{15}$，得　　　　$-1=1$。

［注意］　上面證法，錯在何處？公式$\sqrt{M}\times\sqrt{N}=\sqrt{MN}$，在 M，N 都是負數時，是否仍能適用？然則$\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}$可否化成$\sqrt{(-3)\times(-5)}$？$\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}$應該怎樣乘法？

求下列各式的結果：

2．$2i\times3i\times4i\times5i$。

3．$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}\times\sqrt{-16}\times\sqrt{-25}$。

4．$\sqrt{7}\times\sqrt{-6}\times\sqrt{-7}\times\sqrt{6}$。

5．$\sqrt{-8}\times\sqrt{-2}\times\sqrt{-75}\times\sqrt{3}$。

6．$(3+4i)(3-4i)$。

7. $(7+3i)(8-7i)$。

8. $(1+2i)(1-2i)(1-4i)$。

9. $(3+5i)(3-5i)(3^2+5^2i)$。

10. $(1+2i)(3+4i)(1-2i)(3-4i)$。

11. $(7-\sqrt{-64})(7+\sqrt{-64})(1-i)^2$。

12. $(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)^2(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2$。

13. $(7+\sqrt{-24})(7+\sqrt{24})$。

§ 132. **虛數除法**　以虛數（或複數）除實數或虛數（或複數），就是以適當的虛數（或複數）同乘被除數與除數，使除數（不是被除數）化爲實數。

［例一］　$$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i。$$

［例二］　$$\frac{1}{32i^3}=\frac{i}{32i^4}=\frac{i}{32}。$$

［例三］　$$\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-2i}{1+4}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i。$$

［例四］　$$\frac{\sqrt{2}-3i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}=\frac{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}$$

$$=\frac{2-3\sqrt{3}-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{2+3}$$

$$=\frac{2-3\sqrt{3}-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{5}$$

習題一百零七

求下列各式的結果：

1. $1 \div 5i^5 \div 3i^3$。
2. $(3+2i) \div i^3 \div i^{15}$。
3. $(7+8i) \div (7-8i)$。
4. $(7-8i) \div (7+8i)$。
5. $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) \div (1+4i)$。
6. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i) \div (\sqrt{2}-\sqrt{3}i)$。
7. $1 \div (2+\sqrt{3}i) \div (2-\sqrt{3}i)$。
8. $8 \div \sqrt{3}-\sqrt{5}i) \div (\sqrt{3}+\sqrt{5}i)$。
9. $(3+\sqrt{2}i)^2 \div (3-\sqrt{2}i)$。
10. $1 \div (\sqrt{3}+\sqrt{-315})^2 \div (\sqrt{3}-\sqrt{-315})^2$。
11. $\sqrt{-a+b} \div \sqrt{-a^2+2ab-b^2}$。
12. $(a^2+b^2) \div (a+bi)$。
13. $(a^2+2ab+b^2) \div (\sqrt{a}+\sqrt{b}i)$。
14. $(c+di) \div (a+bi)$。

III. 根式方程式

§ 133. **根式方程式的解法及應用** 根號內含有未知數的方程式叫做根式方程式。例如$\sqrt{x+1}=5$，$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=10$等都是根式方程式，而$\sqrt[3]{3}+x=5$，$\sqrt{3}x+\sqrt{3}=\sqrt{6}$等則非根式方程式。

求解應用問題，有時可得根式方程式。舉例於下：

［例一］ 把某數與 36 的和開平方，從這平方根減去某數，其結果等於 6，求某數。

［解法］ 設 $x=$ 某數，從題意應得方程式

$$\sqrt{x+36}-x=6 \tag{1}$$

由此方程式怎樣去求 x 的值，非設法棄去根號不可。怎樣可去根

號，非把兩邊各自平方不可。但若由(1)式直接平方，那麼牠的左邊將成 $x+36+x^2-2x\sqrt{x+36}$。去了一個方根，又來一個方根了。故必先移項，使其一邊不含方根如下式：

$$\sqrt{x+36}=x+6 \tag{2}$$

然後平方，得

$$x+36=(x+6)^2 \tag{3}$$

$$x+36=x^2+12x+36。$$

解之，得

$$x_1=0,\ x_2=-11。$$

[驗算]　(1)以 $x=0$ 代入(1)式，則得等式 $\sqrt{0+36}-0=6$。左右相合。故 $x=0$ 確爲(1)式的眞根。又以 0 代入原題，也合題意，故 0 是所求的數。

(2)以 $x=-11$ 代入(1)式，則得方程式 $\sqrt{-11+36}-(-11)=6$，左右不合，故 $x=-11$ 不是(1)式的眞根，我們叫牠做僞根。(註)

[例二]　於某數與 5 之和的平方根加入某數本身的平方根，其結果等於某數 4 倍與 9 之和的平方根，求某數。

[解法]　設 $x=$ 某數，從題意得方程式：

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}。 \tag{1}$$

平方，得　$x+5+x+2\sqrt{x(x+5)}=4x+9$

移項，得　$2\sqrt{x(x+5)}=2x+4$

就是　$\sqrt{x(x+5)}=x+2$

平方，得 $$x(x+5)=x^2+4x+4$$

化簡，得 $$x=4。$$

[驗算] 以 $x=4$ 代入原方程式(1)，左右相合，故 4 是(1)式的眞根。又以 4 代入原題，也能適合，故 4 是所求的數。

[註] (1)僞根何自而來？這個問題可由(2)，(3)二式的關係去解決。

由(2)式移項，得 $$\sqrt{x+36}-(x+6)=0 \quad (2')$$

由(3)式移項，得 $$(x+36)-(x+6)^2=0 \quad (3')$$

或 $$[\sqrt{x+36}-(x+6)][\sqrt{x+36}+(x+6)]=0。 \quad (3'')$$

可見由(2)式變爲(3)式，是把(2')式的兩邊同乘以 $\sqrt{x+36}+(x+6)$。當 $x=-11$ 時，這乘式的值等於零，故由§106(3)，知 $x=-11$ 是(2')，(1)式的僞根。

(2)有時何以不增僞根？ 設有方程式

$$x+1-3\sqrt{x-1}=0。 \quad (1)$$

試求其根。依法移項平方，得 $$(x+1)^2=9(x-1)。 \quad (2)$$

解之，得 $x=2$ 或 5。二者俱是(1)式的眞根。這裏何以不增僞根呢？再就原方程式(1)，(2)的關係來研究：

由(2)移項，得 $$(x+1)^2-9(x-1)=0 \quad (2')$$

實即 $$(x+1+3\sqrt{x-1})(x+1-3\sqrt{x-1})=0。 \quad (2'')$$

可見由(1)式變爲(2)式，是把(1)式的兩邊同乘以 $x+1+3\sqrt{x-1}$。今當 $x=2$ 或 5 時，這乘式的值皆不爲零，故 $x=2$，或 5 皆是(1)式的眞根，而非僞根。

總之。 把方程式(A)兩邊各自平方，得方程式(B)，有時可增僞根有時不增僞根。增不增的判定，原可依本[註](1)，(2)去推求，但最簡易的方法，還是以解得的值代入原方程式(A)去驗算。

習題一百零八

解下列各方程式並分別其眞根或僞根：

1. $3x+2-\sqrt{x(x+24)}=0$。　　2. $3x+2-\sqrt{9x(x+3)}=0$。

3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$。　　4. $\sqrt{x+12}+\sqrt{x-12}=6$。

5. $x^2-5+\sqrt{3x^2-5}=0$。

6. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x+3}$。

7. $\sqrt{3x+3}+\sqrt{3x+10}=\sqrt{13+6x}$。

8. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}=\sqrt{2x-6}$。

9. $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=10$。

10. $x^2+5x+2-3\sqrt{x^2+5x}=0$。

[解法]　化原式成$(\sqrt{x^2+5x})^2-3\sqrt{x^2+5x}+2=0$，依二次方程式解法得$\sqrt{x^2+5x}=1$，$\sqrt{x^2+5x}=2$。由此再求$x$的值。

[注意]　假若依常法，把原方程式移項平方，則得四次方程式，求解的手續就很麻煩了。

11. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x}=-6$。

12. $x^2+x+3-2\sqrt{x^2+2x+3}=35-x$。

13. $\sqrt[3]{x+8}=3$。

14. $\sqrt[4]{x+9}+\sqrt{x+9}=6$。

15. $-\sqrt[3]{x-37}+\sqrt[3]{x}=1$。

16. 矩形的對角線比闊多1市尺，周圍是14市尺。求其面積。

17. 兩數的差是19，其各自平方根的差是1。求這兩數。

18. 以兩數的和除這兩數的差，得$\frac{3}{5}$。以這兩數平方根的和除這兩數的差，得$\frac{1}{8}$。求這兩數。

19. 解下列各方程式，是否需把兩邊各自平方？何故？

(a) $3x+\sqrt{2}=5x-\sqrt{3}$；

(b) $\sqrt{3}x+2\sqrt{2}=\sqrt{2}x+2\sqrt{3}$；

(c) $\sqrt{3}x+\sqrt{2}x+\sqrt{6}x=4-x$。

20. 解上題各方程式。

第十五章 比 比例 變數法

I. 比

§ 134. **關於比的重要名詞** 為便於說明起見，先述下列幾個重要名詞：

(1) 比及比值 同類二數量的大小關係，以一量含有他量的倍數表示，叫做這二數量的比。如欲表示 a 與 b 的比，普通寫成 $a:b$。比既是表示一量含有他量的倍數關係，則比的值，或比值，即為這二數量的商。所以 $a:b$，也可寫成 $a\div b$，或 $\frac{a}{b}$。

(2) 比的兩項。在 $a:b$ 中 a 叫做比的前項，b 叫做比的後項，a 與 b 統稱比的兩項。

把比和除法及分數比較來看，就得下面的關係：

$$\frac{a}{b}=\frac{\text{被除數}}{\text{除數}}=\frac{\text{分子}}{\text{分母}}=\frac{\text{前項}}{\text{後項}}。$$

(3) **優比，劣比。** 比值大於 1 的叫做優比，比值小於 1

的叫做劣比。

例如 4:5 是劣比，5:4 是優比。然則比中的優比，劣比，與分數中的假分數，眞分數有沒有關係？

(4)　正比，反比。　$a:b$ 是 a 和 b 正比。a 的倒數和 b 的倒數的比，如 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$，是 a 和 b 的反比。假使前項 $\frac{1}{a}$ 和後項 $\frac{1}{b}$ 同時用 ab 去乘，得　$b:a$；所以 a 和 b 的反比，就是 b 和 a 的正比。

§ **135.　比的重要定理**　關於比的定理最簡而最要的有下列三條：

(1)　比的兩項，若各以同數（或正或負但不爲零）去同乘或同除，那麼這比值不變。

[證]　$a:b=\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}=ma:mb$。

(2)　比的兩項，若各以同數（或正或負）去同加或同減，那麼這比值恆變（原來比值爲 1 的除外）。

[證]　以 $\frac{a}{b}$ 表原比的値，$\frac{a+n}{b+n}$ 表新比的值。則原比與新比的差爲

$$\frac{a+n}{b+n}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bn-ab-an}{b(b+n)}=\frac{(b-a)n}{b(b+n)}\neq 0\ (\because b\neq a)$$

$$\therefore \qquad \frac{a+n}{b+n} \neq \frac{a}{b}$$

習題一百零九

1　用最簡分數表下列各比的值：

(a)　$48:56$。　　(b)　$32:40$。

(c)　$3\frac{1}{2}:2\frac{1}{3}$。　　(d)　$x^2-y^2:x^2+2xy+y^2$。

(e)　$x-y:\sqrt{x}+\sqrt{y}$。　　(f)　$a-b^2:a^2-b^4$。

2.　化簡下列各比：

(a)　$\frac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}:\frac{1}{x^2-xy+y^2}$。

(b)　$\frac{1}{x-y}:\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$。

(c)　$\frac{1}{64+x^4}:\frac{1}{x^2+4x+8}$。

3.　求下列各式中 x 與 y 的比：

(a)　$8x+2y=7x+y$。　　(b)　$ax+by=cx+dy$。

(c)　$x^2+5xy=y^2-2xy$。　　(d)　$3x^2+4xy+y^2=0$。

II.　比例

§ 193.　比例的重要名詞。　為說明便利起見，先釋下列諸名詞：

(1)　比例、正比例、反比例。　在 a,b,c,d 四數中，假如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，我們就說 a,b,c,d 四數成比例，也可以說成正比例。

例如 $4:6=10:15$，我們說 $4,6,10,15$ 成比例。

又如 $4,10,15,4$ 不成比例，因爲 $4:10\neq15:4$。

在 a,b,c,d 四數中，假如 $\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\dfrac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{d}}$，我們說 a,b,c,d 四數成反比例。假使等號左邊的分子，分母各乘 ab，右邊的各乘 cd，得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$；所以 a,b,c,d 四數的反比例等於 b,a,d,c 四數的正比例。

(2)　外項，內項。　在比例 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$（卽 $a:b=c:d$）中，b,c 二數叫做內項；a,d 二數叫做外項。

(3)　比例第四項。　在 $a:b=c:d$ 中，d 叫做 a,b,c 的比例第四項。

例如 $4,6,10$ 的比例第四項是 15；但 $6,4,10$ 的比例第四項則是 $6\frac{2}{3}$，而非 15。何故？

(4)　比例中項　在 $a:b=b:c$ 中，b 叫做 a,c 的比例中項。

例如 $4:6=6:9$，故 6 是 4 與 9 的比例中項。

(5)　比例第三項。　在 $a:b=b:c$ 中，c 叫做 a,b 的比例第三項。

例如 $4:6=6:9$，故 9 是 4 與 6 的比例第三項。

又如 $2:3=10:15$，但 10 非 2 與 3 的比例第三項，因為 $2:3\neq 3:10$。

§ **137. 比例的重要定理。** 關於比例的定理，最簡要的如下：

(1)　四數兩兩的積相等，則此四數成比例。

即　若 $ad=bc$，則 $a:b=c:d$；

若四數成比例 $(a:b=c:d)$，則：

(2)　兩外項的積等於兩內項的積。

即　$ad=bc$。

(3)　內項和外項可以交換。

即　$b:a=d:c$。

(4)　內項可以交換。

即　$a:c=b:d$。

(5)　二比相等，其各前項與後項的和對於後項的比亦相等。

即　$a+b:b=c+d:d$。

(6)　二比相等，其各前項與後項的差對於後項的比亦相等。

即　$a-b:b=c-d:d$。

(7)　二比相等，各前項與後項的和對於與後項的差其比亦相等。

即　$a+b:a-b=c+d:c-d$。

(8)　諸比相等時，若把所有諸比前項的和，比所有諸比後項的和，那麼新比的值，亦與原有諸比相等，叫做連比定理。

即　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$，

則　$\frac{a+c+e+g+\cdots}{b+d+f+h+\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots$

[證]　(1)　原設　$ad=bc$，

兩邊各除以 bd，就得　$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$。

∴　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

[證]　(2)　原設　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

兩邊各乘以 bd，得　$bd\times\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\times bd$。

∴　$ad=bc$。

[證]　(3)　原設　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

由(2)，得　$ad=bc$

兩邊各除以 ac，　$\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac}$。

$\therefore \qquad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$。

［證］ (4)原設 $\qquad a:b=c:d,$

由(2),得 $\qquad ad=bc$。

兩邊各除以 cd，得 $\qquad \frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$。

$\therefore \qquad a:c=b:d$。

［證］ (5) 原設 $\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$

兩邊各加以 1，得 $\qquad \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$。

$\therefore \qquad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

［證］ (6) 原設 $\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$

兩邊各減以 1，得 $\qquad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$。

$\therefore \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$。

［證］ (7)原設 $\qquad \frac{a}{b} \quad \frac{c}{d},$

由(5)得 $\qquad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

由(6)得 $\qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$(A)\div(B)$，就得 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$。

［證］ (8) 原設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{g}{h}=\cdots\cdots$

如以 r 表原有諸比的值，則

$$a=br,\quad c=dr,\quad e=fr,\quad g=hr\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{br+dr+fr+hr+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=$$

$$\frac{(b+d+f+h+\cdots\cdots)r}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=r=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots$$

§ 138. 前節定理的應用。 前節諸定理，在幾何方面應用很廣，學者能於此時多加訓練，將來在幾何方面，定能事半功倍。反之，此時對於上述諸理，若不能應用自如，將來學習幾何，自然分外吃苦。這是就學習幾何一方面說。

而就代數本身說，前節諸理也很重要。倘能應用純熟，將見出化入神，對於很難的問題，略施妙計，便得其解。茲舉數例於下：

第一。 關於證明等式者：

［例一］ 若 $a:b=c:d$，求證

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$
$$=(a-b+c-d)(a+b-c-d).$$

［證法］ $\because\quad a:b=c:d$

$\therefore \quad (a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$。 [上節(7)]

$\therefore \quad (a+b):(c+d)=(a-b):(c-d)$。 [上節(4)]

$\therefore \quad (a+b+c+d):(a+b-c-d)$

$=(a-b+c-d):(a-b-c+d)$。 [上節(7)]

$\therefore \quad (a+b+c+d)(a-b-c+d)$

$=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$。 [上節(2)]

[例二] 若 $a:b=c:d$,

求證 $(ab+cd):(ab-cd)=(a^2+c^2):(a^2-c^2)$。

[證法] $\because \quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \qquad \therefore \quad \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ 何故?

$\therefore \quad \dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}\cdot\dfrac{a}{c}$ 何故?

$\therefore \quad a^2:c^2=ab:cd$ 何故?

$\therefore \quad (a^2+c^2):(a^2-c^2)=(ab+cd):(ab-cd)$。 何故?

[例三] 若 $a:b=b:c=c:d$,

求證 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\dfrac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$。

[證法] 原設各比$=\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ (A)

故用 135 定理(1), 得各比$=\dfrac{a\cdot a}{b\cdot a}=\dfrac{b\cdot b}{c\cdot b}=\dfrac{c\cdot c}{d\cdot c}$

再用 135 定理(3), 得各比$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}$ (B)

又由原設(A),用定理(1),得

$$各比=\frac{ab}{b\cdot b}=\frac{bc}{c\cdot c}=\frac{cd}{d\cdot d}$$

再用定理(3),得　$$各比=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2} \qquad (C)$$

比較(B),(C),就得　$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}。$$

第二。關於解方程式者:

[例四]　解方程式$\dfrac{2x^2+3x+\sqrt{x-1}}{2x^2+3x-\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}-2}$。

[解法]　由 §137(7),得

$$\frac{2x^2+3x+\sqrt{x-1}+2x^2+3x-\sqrt{x-1}}{2x^2+3x+\sqrt{x-1}-2x^2-3x+\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+2}$$

就是　$$\frac{2(2x^2+3x)}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\sqrt{x-1}}{2\cdot 2}$$

$\therefore$　$$2(2x^2+3x)=(\sqrt{x-1})^2$$

即　$$2(2x^2+3x)=x-1。$$

$\therefore$　$$4x^2+6x-x+1=0$$

解之,得　$$x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{4}。$$

[例五] 解聯立方程式
$$\begin{cases}\dfrac{x+y+xy}{x+y-xy}=5 & (A)\\[2ex] \dfrac{x-y+xy}{x-y-xy}=-\dfrac{1}{3} & (B)\end{cases}$$

[解法] 用 §137，(7)化(A)，(B)二式成

$$\begin{cases}\dfrac{2(x+y)}{2xy}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}\\[2ex] \dfrac{2(x-y)}{2xy}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

就是
$$\begin{cases}\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2} & (A')\\[2ex] \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2} & (B')\end{cases}$$

解之，得
$$\begin{cases}\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{x}=1\end{cases} \qquad \therefore \begin{cases}y=2\\ x=1\end{cases}$$

習題一百十

1. 求下列各組數的比例第四項：

(a) 3，9，5。 (b) 7，8，9。 (c) $a+b, a-b, a^2+2ab+b^2$。

2. 求下列各組數的比例中項：

(a) 4，9。 (b) 5，3。 (c) $x+y, x-y$。 (d) A, B。

3. 求下列各組數的比例第三項：

(a) 4，9。 (b) 5，3。 (c) $x+y, x-y$。 (d) A, B。

4. 求下列各比例式中的缺項；

(a) $3:6=7:?$　(b) $3:?=15:10$。(c) $9a:8b=?:7c$。

5. 下列各組比例式中,那幾個能成立?

(a) $36:39=72:79$。　(b) $126:168=99:133$。

(c) $347:199=1736:999$。　(d) $1:\sqrt{7}=\sqrt{7}:7$。

6. 仿 §135 (3)繁比定理的證法,能否證 §137 中(2)-(7)諸定理?試用此法證明該節中的(5),(6),(7)三條。

7. 仿前題證法,證明 §133 例一,例二。

[注意] 此法與 §138 所用證法,那一個比較簡而巧?那一個比較稍有法度可循?

8. 若 $a:b=c:d$, 試用 §137 所述諸定理,證明:

(a) $a+b:a+b+c+d=a:a+c$。

(b) $a^2+c^2:b^2+d^2=a^2:b^2$。

(c) $la^2+mc^2:pab+qcd=lab+mcd:pb^2+qd^2$。

9. 利用 §137 所述諸定理,證明下列二定理:

若(1) $a+b-2c-2d:a-b-3c+3d=2a+2b-c-d:2a-2b-c+d$,

或(2) $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$,

則各有下面的結果:

$$a:b=c:d。$$

10. (a)若 $a:b=c:d$, 證 $a^2+b^2+c^2+d^2:b^2+d^2=c^2+d^2:d^2$。

(b)若 $a^2+b^2+c^2+d^2:b^2+a^2=c^2+d^2:d^2$, 求證

$$a:b=c:d,\ \text{或}\ a:b=-c:d。$$

11. 解下列各方程式:

(a) $\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x^3-2x^2+3x-4}=\dfrac{x+2}{x-2}$。

(b) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}=\dfrac{\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+1}}$。

12. 解聯立方程式:

(a) $\begin{cases} \dfrac{x+y+xy}{x+y-xy}=-11 \\[2ex] \dfrac{2x-y-xy}{2x-y+xy}=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{x+y+xy}{x+y-xy}=-11 \\[2ex] \dfrac{y+z+yz}{y+z-yz}=-\dfrac{19}{5} \\[2ex] \dfrac{x+z+xz}{x+z-xz}=-\dfrac{17}{3} \end{cases}$

13. 分36爲3份使其比爲3:4:5。

[解法] 設 a,b,c 爲所求的三份，由題意得

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$$

用連比定理得 $$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{a+b+c}{3+4+5}=\frac{36}{12}=3$$

$$\therefore \quad \begin{cases} a=3\times 3=9 \\ b=4\times 3=12 \\ c=5\times 3=15 \end{cases}$$

14. 求分 105 爲四份，使這四份的比爲 2:3:4:5。

15. 解聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=18 \\[1ex] \dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{6} \end{cases}$

16. 仿連比定理的證法，證本節例三

[提示] 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=r$，則 $a=br$，$b=cr$，$c=dr$，代入求證之式的兩邊，各自化簡，察其結果是否相同。

[注意] 這個方法在比及比例問題中應用極廣，學者務宜留意。能把這個方法應用純熟，那麼關於比及比例的問題，可以十解八九了。

17. (a)設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，　　求證$\frac{3a^4b^2+2a^2e^2-5e^4f}{3b^6+2b^2f^2-5f^6}=\frac{a^6}{b^6}$。

(b)設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，　　求證

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\sqrt[5]{\frac{la^5+mc^5+ne^5}{lb^5+md^5+nf^5}}。$$

18. 設$\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$，　　求證

$$\frac{l^2+a^2}{l+a}+\frac{m^2+b^2}{m+b}+\frac{n^2+c^2}{n+c}=\frac{(l+m+n)^2+(a+b+c)^2}{(l+m+n)+(a+b+c)}。$$

III. 變數法

§ 139. **常數，變數。** [問題] 某人現有國幣 5 元。以後每日收入 3 元。問 x 日後，此人應有若干元？

設所求元數是 y，則由題意應得下面的等式：

$$y=3x+5。$$

在這等式中，x,y 的關係如下：

若 $x=$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	………
則 $y=$	8,	11,	14,	17,	19,	23,	26,	29,	………

可見 x,y 的值都是可變的數，所以 x,y 叫做變數。對於變數而言，不變之數如 3，5 等叫做常數。

在通例，凡在一個問題中，某量（或數）的值若可為種種不同的數，那麼，這個量（或數）就叫做變量（或變數）。反之，其值固定無可變易的量（或數），對於變量（或變數）而言，叫做常量

(或常數)。

[例一]　每人每日吃飯四碗，x 人於 y 日內共吃飯 $4xy$ 碗。在此問題中，人數(x)，日數(y)，碗數($4xy$)都是變數，而 4 則爲常數。

[例二]　在 $3x-2y=8$ 中，那個是變數，那個是常數？

[例三]　在 $3x+5=6x-7$ 中，3,5,6,7 等固然是常數，就是 x 也是常數而非變數，因爲 x 只能有一值，决不可變爲他值。

§ 140.　函數(應變數)，自變數。 在前節問題中，當 x 的值改變時，y 也隨之而變。這樣，我們把 y 叫做 x 的函數。(自然當 y 值改變時，x 的值也隨 y 而變，所以也可以把 x 叫做 y 的函數)。推之，

(A)　在任何甲乙兩個變量中，當乙量改變時，甲量若亦隨之而變，那麼，甲量就叫做乙量的函數，或乙量的應變數。而乙量，對於應變數而言，叫做自變數。

當甲量爲乙量的函數時，甲乙二量之間，必有固定關係。這關係究爲怎樣的形式，則有時已知，有時未知。

[例一]　據幾何定理"圓周 $=2\pi\times$ 半徑"。在圓周，半徑二量之中，當半徑改變時，圓周亦隨之而變，故圓周是半徑的函數而半徑是自變數。又當圓周改變時，半徑亦隨之而變，故半徑也是圓周的函數，而圓周是自變數。

〔例二〕 當每人食量一定時，若干人所需食品的總量，隨人數而改變，故人數是自變數，所需食品總量爲人數的函數。又人數多少可隨食品總量而改變，故人數也是所需食品總量的函數，而所需食品總量也可以是自變數。

〔例三〕 在$(a)\ 3x+5y-8=0$,

$$(b)\ x^2-y^2+9=0$$

中，x 是 y 的函數；y 也是 x 的函數。即 x, y 可互爲自變數。

〔例四〕 小兒體重和他的年齡有關，故體重是年齡的函數，而年齡是自變數。又年齡亦與體重有關，故年齡也是體重的函數而體重是自變數。(但是欲知道種函數關係，究爲怎樣的形式，那就不像前三例易於推求了)。

(*B*) 在甲，乙，丙三個（或甲，乙，丙，丁四個）變量中，當乙，丙（或乙，丙，丁），諸量改變時，甲量若亦隨之而變，那麼甲量就叫做乙，丙（或乙，丙，丁）諸量的函數，或乙，丙，（或乙，丙，丁）諸量的函數。而乙，丙，（或乙，丙，丁）諸量，對於甲量而言，叫做自變數。

當甲量爲乙，丙，丁諸量的函數時，甲，乙，丙，丁，諸量之間必有固定關係，這關係的實際情形或爲已知，或爲未知。

〔例五〕 據幾何定理"矩形的面積＝長×闊"在這等式中，長，闊二量或二量之一改變時，面積隨之而變，故面積是長闊二

量的函數，而長，闊二量是自變數。

［例六］　設 y 是每人每日的食量，則 x 人於 t 日內，所需食品的總量是 $S=xyt$。此處食品總量（S）是人數（x），日數（t），每人每日食量（y）三量的函數；而人數（x），日數（t），每人每日食量（y）是自變數。

［例七］　利息是本金，利率，期數三量的函數；而本金，利率，期數三量是自變數。

［註］　函數觀念乃近世科學上最要觀念之一。無數科學家終日所研究的：第一步，量與量之間有無關係？第二步，量與量之間究有若何關係，能不能用函數關係的算式來表示？

§ 141.　函數的種類。　函數的範圍既廣，函數的種類斯多。函數的形式，有已知的，有未知的（如上節例四）。僅就已知的說，有代數函數，有非代數函數（如 $y=\sin x, y=a^x$ 之類）。僅就代數函數說，有一元函數［就是含一個自變量的函數，如上節（A）所述］，有多元函數［就是含多個自變量的函數，如上節（B）所述］。僅就一元的說，有無理函數（如 $y=\sqrt{x^2+1}$ 之類），有有理函數（如 $C=2\pi r, U=\frac{1}{3}\pi hr^2$ 之類）。僅就有理的說，又有一次與高次之分。詳而論之，爲算學中的一枝喚做函數論的事，不在本書範圍以內。下面所要討論的，是函數的正變，倒變，聯變三類。

§ 142.　正變。有理函數之一。　假使一輛火車，用相同

的速率，在60分鐘內可走40公里；那麼30分鐘可走20公里，120分鐘可走80公里。所走距離和時間的比完全相同$\left(\frac{40}{60}=\frac{2}{3},\ \frac{20}{30}=\frac{2}{3},\ \frac{80}{120}=\frac{2}{3}\right)$。用 x 表時間，y 表距離，k 表速率，可列式如下：

$$\frac{y}{x}=k=\text{常數}$$

二變量 x, y 之間，如有"$\frac{y}{x}=k=$常數"的關係，我們就說"y 隨 x 而正變"，記以 $y \propto x$；其實，就是 $y=kx$。

［例一］　假定各人食量相同，若干人(x)所需食品的總量(y)，隨人數而正變，因爲 $y=kx$。

［例二］　速度一定時，所行里數(d)，隨所經時數(t)而正變，因爲 $d=kt$。

［例三］　若 $y=3x$，則 y 隨 x 而正變。

［例四］　若 $y=3x+1$，則不能直接說 y 隨 x 而正變。因爲$\frac{y}{x}\neq$常數。

關於正變 $y=kx$ 的問題通常有二類：

(A)　已知 k, x (或 y)，求 y (或 x)。求法甚易，茲不贅述。

(B)　已知 x, y 的一組對應值 x_1, y_1 及另一值 x_2(或y_2)，

欲求 x_2 的對應值 y_2,(或 y_2 的對應值 x_2)。

[解法] 先由 $y_1=kx_1$ 求出 k, 仿(A)解之。

例如,已知 $y\propto x$ 且當 $x_1=3$ 時, $y_1=5$, 問 $x_2=7$ 時, $y_2=$?

[解] 以 $x_1=3$, $y_1=5$ 代入 $y=kx$, 得

$$5=k\times 3,\text{ 就是 } k=\frac{5}{3}。$$

故本題的正變關係是 $y=\frac{5}{3}x$。

今 $x_2=7$, 故 $y_2=\frac{5}{3}\times 7=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$。

[註] 正變與比例的關係。設 x_1,y_1 爲 x,y 的相應數值; x_2,y_2 亦然。依次代入 $y=kx$ 中,應得

$$\begin{cases} y_1=kx_1 \\ y_2=kx_2 \end{cases}$$

相除,得

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

就是說"y 的各值與 x 的對應值應成正比例"。根據這種關係也能解上例。

習 題 一 百 十 一

1. 依 §141 所述函數的種類,作一簡表以示函數的類別。

2. 任舉一元函數的事例五條,二元函數的事例五條。

3. 學生學習成績,是不是教師教法的函數?這種函數關係能不能用關明算式來表示?

4. 自由落體下降的距離(s)是不是所經時間(t)的函數?這函數能不能

用簡明算式來表示（在物理學中，有公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$）?

5. 利息是不是本金的函數?是不是利率的函數?是不是期數的函數?照單利算,這函數關係是怎樣的式子?照複利算,這函數關係又是怎樣的式子?

6. 代數式 x^2+5x, $\sqrt{x+5}$, $\frac{x^2}{x+1}$, 都是 x 的函數嗎?

7. 代數式 x^2+xy, $3x+y$, $5x-7y+9$ 各是幾元函數?

8. 代數式 $3x+6$ 是不是 x 的函數?設 x 爲 $1,2,3,4,\cdots\cdots 50$ 何者能使 $3x+6$ 之值爲零?當 $x=-2$ 時,函數 $3x+6$ 的值是多少?

9. x^2+5x-6 是不是 x 的函數?設 $x=1$, 函數 x^2+5x-6 的值是多少? $x=-6$, 這函數的值又是多少?設 $x=$ 任何其他數值, 這函數的值是否爲零?

10. 由題8看, -2 是不是方程式 $3x+6=0$ 的根? 又由題9看, $1, -6$ 是不是 $x^2+5x-6=0$ 的根?然則解方程式 $AX+B=0$ (或 $AX^2+BX+C=0$) 的意義,就是求 X 的適當之值,能使函數 $AX+B$ (或 AX^2+BX+C) 之值爲零。此說對否?

11. 已知 $y\propto x$, 當 $x=5$ 時, $y=6$, 問 $x=7$ 時, $y=?$

12. 已知 $y^2\propto x^3$, 當 $x=4$ 時, $y=8$, 問 $y=729$ 時, $x=?$

13. 已知 $y\propto\sqrt{x}$, 當 $x=25$ 時, $y=10$, 問 $x=?$ 時, $y=6$。

14. 已知 $x\propto y$, 求證 $x+y\propto x-y$。

[證法] 原設 $x\propto y$ $\quad\therefore\quad \frac{x}{y}=k$

$$\therefore\qquad \frac{x+y}{x-y}=\frac{k+1}{k-1}=k' \qquad \text{(何故?)}$$

即 $\qquad x+y\propto x-y$。

15. 已知 $x\propto y$, 求證 $lx+my\propto lx-my$。

16. 已知 $x\propto y$, 求證 $x^2+xy+y^2\propto x^2-xy+y^2$。

17. 已知 $ax^2+bxy+cy^2=0$, 求證 $x\propto y$。

18. 已知 $x^2+xy+y^2 \propto x^2-xy+y^2$，求證(1)$x \propto y$,(2)$x+y \propto x-y$。

19. 當甲數增大時，若乙數隨甲數而增大，則甲數是否隨乙數而正變？試就下列三例驗明你的答案：

(a)$y=3x+5$。　(b)$y=x^2$。　(c)$y=\sqrt{x}$。

20. 若 $y \propto x$，依第五章作圖以明 x,y 相應變化的關係。

§ 143. 倒變。 有理函數之二。 假使一件工作 6 人去做，8 小時可以做完；那麼，12 人須 4 小時，2 人須 24 小時，這就是說：人數增加，時間可以比例減少；反之，人數減少，時間須比例增加；但所需的總時間（卽人數乘每人的工作時間）總是等於一人做完這件事所需的時間。用 x 表人數，y 表每人的工作時間，k 表做完這事所需的總時間，可列式如下：

$$xy=k=\text{常數}。$$

二變量 x,y 之間，如有"$xy=k=$ 常數"的關係，我們就說"y 隨 x 而倒變"，記以 $y \propto \frac{1}{x}$；其實，也就是 $y=\frac{k}{x}$。

[例一] 若干人分食定量食品 k。每人應得的分量(y)，隨人數(x)而倒變；人數(x)也隨每人所得的分量(y)而倒變。(因為 $xy=k=$常量)。

[例二] 欲行一定距離 d，所需時數 t 隨速度 s 而倒變，速度也隨所需時數而倒變，因為 $st=d=$ 定量。

[例三] 當 $x^2y^2=$ 常量時，則 y^2 隨 x^2 而倒變，x^2 也隨 y^2

而倒變。

［例四］　當甲量變大時，乙量減小；甲量減小時，乙量增大，如此則甲量與乙量間未必便有"甲量×乙量=常數"的關係。例如在 $y=\frac{1}{x+2}$ 中，x 增大，則 y 減小；x 減小，則 y 增大。但 xy 不為常數。故不能直接說 y 隨 x 而倒變。

關於倒變 $xy=k$ 的問題，通常亦有二類：

（A）　已知 k，x（或 y），求 y（或 x）。求法甚易，茲不贅述。

（B）　已知 x，y 的一組對應值 x_1，y_1 及另一值 x_2（或 y_2），求 x_2 的對應值 y_2（或 y_2 的對應值 x_2）。

［例］　已知 $y\propto\frac{1}{x}$，當 $x_1=3$ 時，$y_1=5$，問 $x_2=7$ 時，$y_2=?$

［解］　以 x_1，y_1 的值代入 $xy=k$，得

$$k=3\times5=15$$

故本題的倒變關係是　　　$xy=15$

今 $x_2=7$，故 $y_2=\frac{15}{x_2}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$。

［註］　倒變與比例的關係。設 x，y 的對應值是 x_1，y_1 及 x_2，y_2 代入變公式 $xy=k$ 中，得下列二式

$$\begin{cases}x_1y_1=k\\x_2y_2=k\end{cases}$$

所以 $$x_1y_1=x_2y_2$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}。$$

就是說"x 的各值與 y 的對應值應成反比例"。根據這種關係也能解上例。

§ 144. 聯變。 當 y 隨 x,z 的積而正變時，我們就說"y 隨 x,z 而聯變"。聯變的定理如下：

當 x 爲常數時，y 若隨 z 而正變；且當 z 爲常數時，y 又隨 x 而正變；那麼，當 x,z 俱變時，y 必隨 x,z 而聯變。

［證］ 第一步。 x_1 不變，當 z 由 z_1 變爲 z_2 時，y 由 y_1 變爲 y'。依 § 142［註］應得

$$\frac{y_1}{y'}=\frac{z_1}{z_2} \tag{A}$$

第二步。 z_2 不變，當 x 由 x_1 變爲 x_2 時，y 由 y' 變爲 y_2。依 § 143［註］應得

$$\frac{y'}{y_2}=\frac{x_1}{x_2} \tag{B}$$

(A)，(B) 相乘得 $$\frac{y_1}{y'}\cdot\frac{y'}{y_2}=\frac{x_1z_1}{x_2z_2}$$

$$\therefore \quad \frac{y_1}{x_1z_1}=\frac{y_2}{x_2z_2}=\text{常數}。$$

$$\therefore \quad \frac{y}{xz}=k。$$

［例一］ 時數一定，所行距離隨速度而正變； 速度一定，所

行距離隨所經時數而正變。故時數，速度兩樣都變時，所行距離隨時數，速度而聯變。

［例二］ 當 s 不變時，$y \propto \frac{1}{t}$；當 t 不變時，$y \propto s$ 今當 $s_1=4$，$t_1=1$ 時，$y_1=8$。問 $s_2=3$，$t_2=6$ 時，$y_2=?$

［解法］ 由上述定理，知 $y \propto s \cdot \frac{1}{t}$ 即 $y=\frac{ks}{t}$。

以 s_1, t_1, y_1 的值代入上式，得 $8=\frac{k \cdot 4}{1}$，即 $k=2$。

故本題的聯變關係是 $y=\frac{2s}{t}$。

再以 s_2, t_2 的值代入上式，得 $y_2=\frac{2\times3}{6}=1$。

［又法］ 由 $y=\frac{ks}{t}$，得 $\frac{yt}{s}=k$。

故 $$\frac{y_1t_1}{s_1}=k=\frac{y_2t_2}{s_2}$$

即 $$\frac{8\times1}{4}=\frac{y_2\times6}{3}$$

$\therefore$ $$y_2=1$$

習題一百十二

1. 已知 $y \propto \frac{1}{x}$，當 $x=1$ 時，$y=2$，問 $x=3$，$y=?$

2. 已知 $y\propto\frac{1}{x^3}$，當 $x=2$ 時，$y=1$，問 $x=1$，$y=?$

3. 已知 $y^2\propto\frac{1}{t^3}$，當 $y=1$ 時，$t=1$，問 $y=64$，$t=?$

4. 已知 $x+y\propto\frac{1}{x-y}$，當 $x=5$ 時，$y=4$，問 $x=4$，$y=?$

5. 已知 $x\propto y$，$y\propto\frac{1}{z}$，$z\propto\frac{1}{t}$，那麼，x 隨 t 而正變，抑隨 $\frac{1}{t}$ 而正變？

6. 已知 y 隨 x,z 而聯變，又隨 $\frac{1}{t}$，$\frac{1}{u^2}$ 而聯變，試求 y 與 x,z,t,u 的關係。其中含不含未定的量？這量是常量還是變量？

7. 已知 V 隨 r^3 而正變，A 隨 r^2 而正變，問 (a) V^2 隨 A^3 而正變，抑倒變？A 隨 V 的何種函數而正變？

8. 當甲量隨乙量而倒變時，乙量是不是隨甲量而倒變？試用算式來證明？

9. 工廠對於工友每日發給工資，當做工人數不變時，所發工資隨每日工作時數而正變；當每日工作時數一定時，所發工資隨做工人數而正變。某日，工友 100 人，各做工 10 小時，共發工資 125 元。次日，工人 95 名，各做工 11 小時，問該發工資共幾元？

10. x 人於 y 日內所需食物的總量是 t。當 x 一定時，t 隨 y 而正變；當 y 一定時，t 隨 x 而正變。今當 $x=100$，$y=5$ 時，$t=1000$。問當 $x=150$，$y=15$ 時，$t=?$

11. 若 $y\propto\frac{1}{x}$，作圖以示 x,y 相應變化的關係。

第十六章 級數

§ 145. 級數的需要 [問題一]自 1 起幾個連續奇數的和

是400？

設x是所求的個數，則因第1個奇數是$2\times1-1$；第2個奇數是$2\times2-1$；第3個奇數是$2\times3-1$，……，故第x個奇數是$2x-1$，於是從題意得方程式

$$1+3+5+7+9+\cdots\cdots+(2x-1)=400。$$

怎樣由這方程式去求x，非先求出左邊的和不可；怎樣求出左邊的和，這就是級數的問題。

〔問題二〕　某國因國難當頭，力求緊縮。軍政費支出逐年減少$\frac{1}{10}$，十年後共計節省$10^{10}+9^{11}$元，問原來預算每年若干元？

設x＝原來預算的元數，從題意得方程式：

$$10x-\left(\frac{9}{10}x+\frac{9^2}{10^2}x+\frac{9^3}{10^3}x+\frac{9^4}{10^4}x+\cdots\cdots+\frac{9^{10}}{10^{10}}x\right)=10^{10}+9^{11}。$$

怎樣解這方程式，非先求出括號內的結果不可，這又是級數的問題。

§146.　**何謂級數？**　凡依一定規則構成諸數依某次序排列起來而得一數羣，這數羣就叫做級數。級數中的第幾數叫做級數的第幾項。

〔例一〕　1,3,5,7,9,……成一級數，（轄構成的規則是第n項$=2n-1$）。

〔例二〕　1,2,4,8,16,……成一級數，（轄構成的規則是第

n 項 $=2^{n-1}$)。

[例三] $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$, ……成一級數,(牠構成的規則是第 n 項 $=n^2$)。

[例四] $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$,……亦成一級數,(牠構成的規則是第 n 項 $=\frac{n}{n+1}$)。

[例五] $1\times2\times3$, $2\times3\times4$, $3\times4\times5$, $4\times5\times6$, ……亦成一級數,[牠構成的規則是第 n 項 $=n(n+1)(n+2)$]。

由上面諸例看來,可見級數的種類很多。全部理論,非初等代數所能盡述;本章所講的,不過是等差級數,等比級數兩種罷了。

I. 等差級數

§ 147. 等差級數。 如果級數相隣的後項減前項的差都相等,這種級數叫做等差級數。等差級數的通式是

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots\cdots,\ a+(n-1)d。$$

d 叫做公差:如取正值時,各項的值依次增加;如取負值時,各項的值依次減小。

例如,上節例一的級數就是等差級數,牠的公差是 2。

又如 10, 5, 0, -5, -10, -15,……亦成等差級數,牠的公差是 -5。

又如　$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5$，亦成等差級數，牠的公差是$\frac{1}{2}$。

§ 148.　**等差級數的公項。**　由上節定義，可見等差級數中任何一項必可化成 $a+(?)d$ 之形，d 的係數比該項所在的項數少1。所以第 k 項應爲 $a+(k-1)d$，用算式來表，就是

$$t_k=a+(k-1)d。\qquad (A)$$

t_k 叫做等差級數的公項。

已知等差級數的第1項 a 及其公差 d，那麼其他各項，都可由這公式(A)去求出。

[例一]　求 1,4,7,10,……的第20項。

[解法]　本題 $a=1$，$d=4-1=3$，$k=20$。故所求的一項是 $t_{20}=1+(20-1)\times3=1+19\times3=58$。

[例二]　等差級數第2項是3，第6項是 -5，求其第10項。

[解法]　倘能求出第一項 a 及公差 d，便易求得第十項。求 a 求 d 的方法，就是利用(A)式列出聯立方程式以求其根。今由題意，得聯立方程式

$$\begin{cases} 3=t_2=a+(2-1)d & (1) \\ -5=t_6=a+(6-1)d & (2) \end{cases}$$

就是
$$\begin{cases} a+\ d=3 & (1') \\ a+5d=-5 & (2') \end{cases}$$

解之，得　　$a=5, d=-2$。

$$\therefore \qquad t_{10}=5+(10-1)(-2)=5-18=-13。$$

§ 143. 怎樣插入等差中項？ 在等差級數 $a, x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m, b$ 中，$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m$ 諸數就叫做 a, b 的等差中項。

已知 a, b 二數，怎樣在 a, b 之間插入 m 個等差中項？這個問題也可由上節公式(A)去解決。

因爲
$$x_1=a+d$$
$$x_2=a+2d$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m=a+md。$$

如能求得 d，則這問題便能全部解決了。故先設法求 d：因 a 是等差級數的第 1 項，b 是第 $m+2$ 項。故用(A)得 $b=a+(m+1)d$。

由此求得 $d=\dfrac{b-a}{m+1}$。

[例]　試在 3 與 18 之間插入 4 個等差中項。

[解決]　因 3 是等差級數的第一項，18 是等差級數的第 6 項，故用(A)式，得　　$18=3+5d$

就是
$$d=\frac{18-3}{5}=3$$

∴　所求等差中項是 6, 9, 12, 15。

習題一百十三

求下列各級數的第 n 項：

1. 3, 6, 9, 12, ……。
2. 9, 1, −7, −15, ……。

寫出下列各級數的前 10 項：

3. $a=100$, $d=-15$。
4. $a=8$, $d=1\frac{1}{3}$。

補足下列二級數到第 8 項：

5. $5, 3\frac{1}{2}, 2$。
6. $a, a+2b, a+4b$。
7. 等差級數的第 5 項是 10，第 16 項是 32。求其第 10 項。
8. 等差級數的第 3 項是 50，第 11 項是 10。求其第 20 項。
9. 試在 8 與 30 之間插入 9 個等差中項。
10. 試在 $100a$ 與 $-100a$ 之間插入 20 個等差中項。

§ 150. 怎樣求等差級數 n 項的和？　設有 n 項等差級數如下形：

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \cdots\cdots\cdots\cdots,\ l-2d,\ l-d,\ l。$$

怎樣去求這 n 項的和？

［求法］　首項為 a，末項為 l，項數為 n，其和為 S，則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

相加得 $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)$

$$=n(a+l)。$$

$$\therefore\quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{S=\frac{n(a+l)}{2}}。\qquad (B)$$

又因　$l=a+(n-1)d$,

$$\therefore\quad S=\frac{n[a+a+(n-1)d]}{2}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}}。\qquad (C)$$

[例一]　求 $S=1+2+3+4+\cdots\cdots+100$。

[解法]　本題 $a=1$，$l=100$，$n=100$。用(B)。

$$\therefore\quad S=\frac{100}{2}(1+100)=5050。$$

[例二]　求 $3+1\frac{1}{2}+0+\cdots\cdots+$第 1000 項。

[解法]　本題 $a=3$，$d=1\frac{1}{2}-3=-1\frac{1}{2}$，$n=1000$ 用(C)。

$$\therefore\quad S=\frac{1000}{2}\left[2\times3+999\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right]=-746250。$$

習題一百十四

求下列各級數的和：（1－8）

1．$2+4+6+8+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$到第 100 項。

2. $1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots\cdots+231$。

3. $5+10+15+20+\cdots\cdots\cdots+2000$。

4. 求 100 與 2000 之間所有 6 的倍數的和。

5. 自 1 至 1000 間,所有 4 的倍數的和,比所有 3 的倍數的和大多少或小多少?

6. 等差級數的第 4 項是 12,第 30 項是 64,求其首 100 項的和。

7. 等差級數內首 100 項的和是 5000,公差是 2,求第 1 項,第 10 項,第 100 項。

8. 等差級數的第 1 項是 1,公差是 3,n 項的和是 590,求項數 n。

9. 等差級數的總和是 1000,項數是 50,第一項是 10,求最後 1 項及公差。

10. 等差級數內首 9 項的和是 123,最後 2 項的和是 42,求首 2 項的和。

11. 解 §145 問題一。

12. 自 -5 起,連續幾個 5 的倍數的和是 3700?

13. 解方程式 $x+4x+7x+10x+\cdots\cdots\cdots\cdots+34x=21630$。

14. 物體從空中自由下墮,第一秒內降下 16 呎;以後每秒內所降的距離亦比前秒內所降距離多 32 呎。今從飛機上投一炸彈,經 12 秒鐘而達地面,問飛機距地面幾呎?

15. 石子一塊,自由墮入井中,3 秒鐘後聽到石子墜水的聲音,問井的水面,距地面幾呎?(假定音的速度是每秒 1000 呎)。

II. 等比級數

§ 151. **等比級數** 如果級數相鄰的後項與前項的比都相等,叫做等比級數。這種級數的通式是,

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ ar^n.$$

r 叫做公比：如 r 為正數，則大於 1 時，各項的值依次增加；小於 1 時，各項的值依次減小。

［例一］ 1,2,4,8,16,……成等比級數。牠的公比是 2。

［例二］ $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$,…………成等比級數。牠的公比是 $-\frac{1}{3}$。

［例三］ $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}$, …………成等比級數。牠的公比是 $\frac{2}{3}$。

§ 152. 等比級數的公項 由上節定義，可見等比級數中任何一項必為 $ar^?$ 之形，r 的指數比該項所在的項數少 1。故第 k 項應為 ar^{k-1}。用算式來表就是：

$$t_k = ar^{k-1}。 \qquad (A)$$

t_k 叫做等比級數的公項。

已知等比級數的第一項 a 及其公比 r，那麼其他各項，都可由這公式 (A) 去求出。

［例一］ 求 1,2,4,8,……的第 20 項。

［解法］ 本題 $a=1$，$r=2$，$k=20$

$$\therefore \quad t_{20} = 1 \times 2^{20-1} = 2^{19}。$$

【註】 求等比級數的第 k 項所得的值 ar^{k-1}，往往是一個很大的數，

不必乘出。本題結果 2^{10} 也不必乘出。

［例二］ 等比級數內第2項是2，第6項是32，求其第10項。

［解法］ 本題 $t_2=2$，$t_6=32$，由題意，應用公式（A），得聯立方程式
$$\begin{cases} ar=2 & (1) \\ ar^5=32 & (2) \end{cases}$$

解之，得 $r=2$，$a=1$

$\therefore$ $t_{10}=1\times2^{10-1}=2^9=512$。

§ 153. 怎樣插入等比中項？ 在等比級數 $a, x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots x_m, b$ 中，$x_1, x_2, x_3\cdots\cdots, x_m$ 統叫做 a, b 的等比中項。

已知 a, b 二數，怎樣在 a, b 之間插入 m 個等比中項。這個問題也可用前節公式（A）去解決。

因為
$$x_1=ar$$
$$x_2=ar^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m=ar^m。$$

如能求得 r，則這問題便可全部解決了。故先求 r：因 a 是等比級數第1項，b 是第 $m+2$ 項，故用（A）式得 $b=ar^{m+1}$，由此求得
$$r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}。$$

[例] 在2與64之間插入4個等比中項。

[解法] 因 $a=2$, $b=64$, $m=4$。故64是等比級數的第6項,故用(A)式,得

$$2r^5=64$$

即 $$r=2。$$

$\therefore$ 所求等比中項是 2×2, 2×2^2, 2×2^3, 2×2^4。

習 題 一,百 十 五

求下列各級數的第 n 項:

1. $3, 6, 12, 24, \cdots\cdots$。

2. $-7,\ -2,\ -\frac{4}{7},\ -\frac{8}{49}, \cdots\cdots$。

3. $9, 1, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \cdots\cdots$。

寫出下列各級數的前5項:

4. $a=-10$, $r=-3$。

5. $a=100$, $r=\frac{1}{2}$。

6. $a=10$, $t_{10}=5120$。

補足下列各級數到第6項:

7. $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \cdots\cdots$。

8. $2, \sqrt{2}, 1$。

9. 等比級數的第5項是50,第8項是400,求其第3項,第11項。

10. 等比級數的第4項是4,第8項是16。求其第5項,第16項,第20項。

11. 在1與243之間插入4個等比中項。

12. 在5與320之間插入5個等比中項,插入11個等比中項。

§ 154. 求等比級數 n 項的和。 級數的種類既然很多(參看§146)求和的方法,自然各不相同。例如,若仿§150求等差級數 n 項之和的方法,以求等比級數 n 項之和,其法便全然無效。你們自己試試看,然後再看下面的解法。

[求法] 設首項爲 a,末項爲 ar^{n-1},項數爲 n,其和爲 S_n,

則 $$S_n=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}。$$

兩邊各乘以 r,得

$$rS_n=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n。$$

兩式相減,得 $$S_n-rS_n=a-ar^n。$$

$$\therefore \qquad S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}。 \qquad (B)$$

又因 $t_n=ar^{n-1}$,

$$\therefore \qquad S_n=\frac{a-rt_n}{1-r}。 \qquad (C)$$

[例一] 求 1,2,4,8,16,……前10項的和。

[解法] 本題 $a=1$, $r=2$, $n=10$。用公式(B),得

$$S_{10}=\frac{1-2^{10}}{1-2}=2^{10}-1。$$

[例二] 求 $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots+\frac{32}{243}=?$

〔解法〕 本題 $a=1$，$r=+\frac{2}{3}$，$t_n=\frac{32}{243}$，故用(C)式，得

$$S=\frac{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{243}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{665}{243}=2\frac{179}{243}$$

習題一百十六

求下列各級數的和：(1～4)

1. $3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\cdots\cdots+$第10項。

2. $1+3+9+27+\cdots\cdots+$第20項。

3. $1-2+4-8+16-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots\cdots+$第20項。

4. $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots\cdots+$第50項。

5. 求1與1500間所有2的冪數(即 2^k)的和。

6. 求1與1500間所有3的冪數(即 3^k)的和。

7. 等比級數的第4項是24，第7項是192，求其首10項的和，首20項的和，首50項的和。

8. 等比級數的首98項和是 $2^{100}-4$，公比是2。求其第16項。

9. 等比級數首[illegible]項的和是512，第9項是4。求其首9項的和，首13項的和。

10. 求級數 $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots\cdots$中第10項至第20項的和。

11. 解§145 問題二。

12. 俗說"[illegible]，[illegible]"[illegible]一[illegible]，[illegible]二[illegible]

18. 皮球從 100 市尺高的地方下墜至地，每次返躍的高度，等於下墜距離的$\frac{1}{3}$。問當第十次落地時，該球已經過若干市尺？

§ 155. **無限遞減等比級數的和**　在等比級數中，公比 r 的絕對值若比 1 小，那麼各項的絕對值就依次減小，以至於無窮小。例如，在級數

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\cdots。$$

中，$r=\frac{1}{2}<1$，其各項的值依此減小：如第一千項的值是$\frac{1}{2^{999}}$，分母已有三百零一位；第一萬項的值是$\frac{1}{2^{9999}}$，分母就有三千零十位；其第十萬項，第一百萬項，或第一千萬項的值更是渺乎其小，簡直和零差不多了。所以，在求這無限遞減等比級數的和的時候，項數既然無限，上節（C）式中的 l 也不妨當作零。代入（C）式，則得

$$S=\frac{a}{1-r}-r\cdot\frac{l}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2。$$

這種結果不但本例如此。在任何等比級數中，假如它公比的絕對值小於 1，且它項數無限。那麼牠的求和公式，就由上節公式

$$S=\frac{a}{1-r}-r\cdot\frac{l}{1-r},\qquad (C)$$

變爲公式
$$S=\frac{a}{1-r}。\qquad (D)$$

(因爲在這情形下 r^n 與 0 極相近,可視牠爲 0。)

習題一百十七

1. 在等比級數中,(a) 若項數無限,但公比 r 的絕對值不小於 1,欲求這無限等比級數的和,可否應用(D)式?

(b) 若公比 r 的絕對值小於 1,但項數不爲無限,欲求這等比級數的和,可否應用(D)式?

2. 然則欲求等比級數的和,何時該用(B)式?何時該用(C)式? 何時該用(D)式?

3. 求 $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots\cdots+$無限項的和。

4. 求無限級數 $1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{64}{125}+\cdots\cdots$的和。

5. 求無限級數 $1-\frac{4}{5}+\frac{16}{25}-\frac{64}{125}+\cdots\cdots$的和。

6. 求等比級數 $1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\cdots\cdots$首 1000 項的和。

7. 某人由甲地至乙地。第一日行全路的一半,以後每日所行距離順次是上一日所行距離的一半。(a) 問此人行至 1000 日後行了全路的幾分之幾? (b) 設此人如此繼續進行,行至何時可行完全路?

8. 以 8 市尺,4 市尺,2 市尺,1 市尺,$\frac{1}{2}$ 市尺……爲半徑,作大批圓,求證這無數小圓圓周的和,不比大圓圓周長。(圓周之長 $=2\pi\times$ 半徑)。

9. 化 $.\dot{3}\dot{4}$ 爲分數。

[解法] $.\dot{3}\dot{4}=.34+.0034+.000034+.00000034+\cdots\cdots$

$$=.34+\frac{.34}{100}+\frac{.34}{100^2}+\frac{.34}{100^3}+\frac{.34}{100^4}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{.34}{1-\frac{1}{100}}=\frac{34}{99}。$$

10. 化(a) $.\dot{1}2\dot{3}$，(b) $.12\dot{2}\dot{5}$，(c) $.036\dot{7}$ 爲分數。

習題一百十八(雜題)

1. 在 4,12 之間插入二數，使前 3 數成等比級數，後 3 數成等差級數。

2. (a)在等差級數 a, A, b 中，$A=?$ (用 a, b 來表示)。

   (b)在等比級數 a, G, b 中，$G=?$ (用 a, b 來表示)。

3. 求 $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\cdots\cdots$ 到第 20 項的和。

4. 求 $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{64}{81}+\cdots\cdots$ 到第 20 項的和。

5. 求上題級數無限項的和。

6. 求第 3 題級數無限項的和，有定值沒有？何故？

7. 求 $1-2+4-8+16-32+\cdots\cdots$ 無限的和。

[解法]　$r=-2<1$，$n=$ 無限。

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}。$$ 對不對？何故？

8. 求 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 到 100000000 項的和。

[解法]　$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$。對不對？何故？

9. 因 1,3,5,7,9,……成等差級數，所以欲求 $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots+$ 第 20 項，能用等差級數求和公式嗎？

10. 因 1,2,3,4,……成等差級數；2,3,4,5,6,……也成等差級數，欲求 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots\cdots$ 首 20 項的和，能用等差級數求和公式呢？還是能用等比級數求和公式呢？何故？

第十七章 指數 對數

I. 指數

§ 156. 指數意義的推廣。 在指數是正整數時，指數的意義已在 § 83 講過了。這時易得下面幾條定律：

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。

2. $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

3. $(a^m)^n=a^{mn}$。

4. $(ab)^m=a^mb^m$。

根據這幾條定律乃能演算關於正整指數的一切問題。然而算學家猶嫌其範圍太狹，應用不宏。於是把指數的範圍推廣，使指數的意義不限於指數是正整數，就是分數，負數，零等等，也都有意義；並使上列四定律不但適用於正整指數，就是在指數非正整數時也無不可用。倘能如此，指數的功用不更宏大嗎？以下三節，略論指數意義推廣的方法。

§ 157. 分指數的意義。 例如 $a^{\frac{1}{2}}=?$ 欲答這個問題，先要明白推廣指數意義的目的何在？如上節所述，推廣指數意義，其

目的就是"使上列四條定律，不但在整指數時適用，即在分指數也能適用"。但是要想上舉第三律可以適用，必有下式：

$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}\times 2}=a。$$

然則
$$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}。$$

同樣，欲知 $a^{\frac{p}{q}}=?$，可以先把$(a^{\frac{p}{q}})^q$化簡，察其結果再定解答。因為要使第三律可以適用，故必有

$$(a^{\frac{p}{q}})^q=a^{\frac{p}{q}\times q}=a^p$$

然則兩邊各開q次方，不是應得 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ 嗎？由是得分指數的意義如下：

$$\underline{a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}。}$$

[例一]　$64^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{64}=4$。

[例二]　$64^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{64^2}=(\sqrt[3]{64})^2=16$。

[例三]　$64^{0.5}=64^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}=8$。

§ 158.　零指數的意義。　要使指數第一律適用於零指數，應有

$$a^m\cdot a^0=a^{m+0}=a^m,$$

兩邊各以 a^m除之，應得

$$\underline{a^0=1。}$$

〔例一〕 $1^0=1$, $2^0=1$, $3^0=1$, $4^0=1$, $n^0=1$。

〔例二〕 設 $x=100$, $y=90$, $z=50$,

求 $(x^3+x^2y-xy^2+x-y)^0\div(x+y+z)$ 的值。

因 $(x^3+x^2y-xy^2+x-y)^0$ 的值總是 1,故所求的值是

$$1\div(100+90+50)=\frac{1}{240}。$$

§ 159. **負指數的意義。** 要使指數第一律能適用於負指數,應有 $a^m a^{-m}=a^{m+(-m)}=a^0=1$。

兩邊各除以 a^m, 應得 $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$

〔例一〕 $4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$。

〔例二〕 $64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{16}$。

〔註〕 由上三節看來,可見要使指數定律在指數是分數,是零,或是負數全部能適用,則 $a^{\frac{p}{q}}$ 非等於 $\sqrt[q]{a^p}$ 不可, a^{-m} 非等於 $\frac{1}{a^m}$ 不可, a^0 非等於 1 不可。至於既令 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$, $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $a^0=1$ 之後, 指數諸定律是否個個全部適合?這又是另一問題。詳而論之,非篇幅所許;現在只能假定牠們是適合的,證法待學高中代數時再講。

習 題 一 百 十 九

1. 求下列各式的結果:

(a) $144^{\frac{1}{2}}$。　(b) $81^{\frac{3}{4}}$。　(c) $125^{\frac{4}{3}}$。　(d) $216^{\frac{5}{3}}$。

2. 求下列各式的結果(用分數來表示)：

(a) $144^{-\frac{1}{2}}$　(b) $81^{-\frac{3}{4}}$。　(c) $125^{-\frac{4}{3}}$。　(d) $-216^{-\frac{2}{3}}$。

3. 化簡下式：

(a) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}\right)^3=\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$。

〔注意〕 由§157公式 $a^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{a^q}$，可見分指數問題可以化爲根式問題；自然，根式問題也可化爲分指數問題，然後再從指數定律來化簡)。

(b) $\left(\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^2}}\right)^4$。　(c) $\sqrt[4]{(x\sqrt{x})^3}\cdot\sqrt[3]{(x\sqrt{x}}$。

(d) $\left(\sqrt[3]{x^3\sqrt{y}}\right)^2\left(\sqrt{y\sqrt{x^3}}\right)^3$。

4. 化下列諸式使其結果只含一個根號：

(a) $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$。　(b) $x\sqrt{x\sqrt{x}}\div\left(x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right.$。

5. 計算下列各式：

(a) $125^{\frac{2}{3}}\times625^{\frac{3}{4}}$。　(b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}$。

(c) $16^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$。

6. 化簡下式：

(a) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}}=\left(a^{\frac{3}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$。

(b) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a^3}}}$　(c) $\sqrt[27]{\left(\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[4]{a^3}\right)^{12}}$。

7. 演乘除法(舉例)：

(a) $\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-5\right)=x-2x^{\frac{1}{2}}-15$。

(b) $\left(x-1\right)\div\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)=\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)\div\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)$

$$=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1。$$

8. 演乘除法：

(a) $\left(3x^{\frac{1}{2}}+5\right)\left(5x^{\frac{1}{2}}-3\right)$。

(b) $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$。

(c) $\left(x+y\right)\div\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$。　　(d) $\left(x-y\right)\div\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)$。

9. 解方程式 $3x-4x^{\frac{1}{2}}+1=0$。

10. 解方程式 $2x^{\frac{2}{3}}-13x^{\frac{1}{3}}+15=0$。

11. 解方程式 $x+x^{-1}=3\frac{1}{3}$。

12. 解方程式 $x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}=4$。

II. 對數

§ 160. **對數的需要**　欲知對數的功用，先看下列兩題：

［問題一］　$\sqrt[5]{2}=?$ 求這數的首三位數字。試問解此問題，學者有下手之處嗎？

［問題二］　解方程式 $2^x=7$，求 x 的首三位數字。學者對此問題，又有下手之處嗎？

可見要解這兩問題，非另有新法不可。新法是什麼？就是利用對數。

§ 161. **對數是什麼？**　先就等式 $8^2=64$ 來看，這個等式

中共有三數 8,2,64。已知其二,可求其他,詳細說來,共有三類:

(1)　已知 8,2 求 $8^2=?$ 這是乘法問題,在乘法,2 叫做 8 的指數。

(2)　已知 64,2 求 $(?)^2=64$。這是開方問題,在開方,"?"叫做64的平方根。因 $(?)^2=64$ 是一種新運算,故另用新式 $\sqrt[2]{64}=?$ 來表示。

(3)　已知 8,64 求 $8^?=64$。這就是對數問題了。在這等式中,"?"叫做 64 的對數(底 8),"8"叫做底,也因 $8^?=64$ 是一種新運算,故另創新式來表示。新式是什麽?就是 $\log_8 64=?$ 所以下列二式:

$(a)\quad \log_8 64=?$　　　　$(b)\quad 8^?=64$。

所表 8,64,? 三數的關係,二者完全相同。

推之,在通例 $a^x=M$ 中,a 叫做底,x 叫做 M 的對數(底 a)。因 $a^?=M$ 是一種新運算,故另用新式 $\log_a M=x$ 來表示。所以下列二式:

(甲)　$\log_a M=x$。　　　　(乙)　$a^x=M$。

所表 a,x,M 三數的關係完全相同,

[例一]　$\log_8 64=?$

[解法]　$\because\ 8^2=64$　　$\therefore\ \log_8 64=2$。

[例二]　$\log_4 64=?$

［解法］　∵　$4^3=64$　　　∴　$\log_4 64=3$。

由上面例看來，又可見同樣一個數，因其所取的底不同，他的對數也就不同。

［注］　對數與指數是否相同？由上所述，學者或要說"對數就是指數"，其實不然！因爲在 $a^x=M$ 中，x 對於 a 叫做指數，對於 M 叫做對數。我們可以說"x 爲 a 的指數也就是 M 的對數(底 a)"但是不能說"指數就是對數"。

習題一百二十

1.　$\log_5 25=?$　　$\log_5 125=?$　　$\log_5\frac{1}{25}=?$　　$\log_5\frac{1}{125}=?$

2.　$\log_3 27=?$　　$\log_9 27=?$　　$\log_3 27^2=?$　　$\log_9\frac{1}{27}=?$

3.　$\log_{10}10=?$　　$\log_{10}100=?$　　$\log_{10}1000=?$　　$\log_{10}10000=?$

　　$\log_{10}1=?$　　$\log_{10}.1=?$　　$\log_{10}.01=?$　　$\log_{10}.001=?$

§ 162.　**對數的三大定律**　對數的變化全以下列三律爲根據：

$$(1)\qquad \log_a MN=\log_a M+\log_a N。$$

$$(2)\qquad \log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N。$$

$$(3)\qquad \log_a M^n=n\log_a M。$$

［證 1］　設 $\begin{cases} a^x=M & (\mathrm{I}) \\ a^y=N & (\mathrm{II}) \end{cases}$　　則 $\begin{cases} \log_a M=x \\ \log_a N=y \end{cases}$

(I)×(II)，得　$a^{x+y}=MN$。

$\therefore \quad \log_a MN = x + y = \log_a M + \log_a N$。

[證 2]　(I) ÷ (II)，得　$a^{x-y} = \frac{M}{N}$。

$\therefore \quad \log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$。

[證 3]　由 (I) 式的 n 次羃，得　$a^{nx} = M^n$。

$\therefore \quad \log_a M^n = nx = n \log_a M$。

[例]　已知 $\log_{10}2 = .3010$，　$\log_{10}3 = .4771$。

求　(a)　$\log_{10}6 = ?$　　(b)　$\log_{10}\frac{3}{2} = ?$

(c)　$\log_{10}3^{20} = ?$　　(d)　$\log_{10}\sqrt[20]{2} = ?$

[解法]　(a)　$\log_{10}6 = \log_{10}(2 \times 3)$

$= \log_{10}2 + \log_{10}3$

$= .3010 + .4771 = .7781$。

(b)　$\log_{10}\frac{3}{2} = \log_{10}3 - \log_{10}2 = .4771 - .3010$

$= .1761$。

(c)　$\log_{10}3^{20} = 20\log_{10}3 = 20 \times .4771 = 9.542$。

(d)　$\log_{10}\sqrt[20]{2} = \log_{10}2^{\frac{1}{20}} = \frac{1}{20}\log_{10}2 = \frac{1}{20} \times .3010$

$= .01505$

§ 163.　對數的定值部份，定位部份。　如上兩節所述，任何正數 a 都可用做對數的底。但在普通計算上，對數恆以 10 做

底。這種以 10 做底的對數叫做常用對數。(常用對數的底 10 便略而不寫。例如，$\log_{10}34$ 便省寫爲 $\log 34$；反之，$\log 56$ 就是 $\log_{10}56$)。

在常用對數中，任何一數 N，不能化爲 10 的整次冪的，牠的對數必非整數而爲整數與小數的和。這整數叫做對數的定位部，小數叫做對數的定值部。

§ 164. **怎樣求定位部?** 先就含有一位整數的任何數 x 來講:

因 $1<x<10$，故 $\log 1<\log x<\log 10$，

就是 $$0<\log x<1。$$

$\therefore$ $$\log x=0+\text{小數}$$

這就是說含有一位整數的數，牠的對數的定位部是 0。如果將 x 的小數點移右一位，就是將 x 乘 10^1，也就是在 x 原來的對數定位部 0 上加 1，所以

凡有 2 位整數的數，牠的對數定位部是 1。

如果將 x 的小數點移右二位，就是將 x 乘 100^1 或 10^2，也就是在 x 原來的對數定位部 0 上加 2，所以

凡有 3 位整數的數，牠的對數定位部是 2。

推之，

凡有 n 位整數的數，牠的對數定位部是 $(n-1)$。

用同樣的方法，如果將 x 的小數點移左一位，就是將 x 乘 10^{-1}，也就是在 x 原來的對數定位部 0 上加 -1；如果將 x 的小數點移左二位，就是將 x 乘 100^{-1} 或 10^{-2}，也就是在 x 原來的對數定位部 0 上加 -2。所以，凡小數的第一位有效數字與小數點之間，

有 0 個 0 的，牠的對數的定位部是 -1，簡寫為 $\overline{1}$，

有 1 個 0 的，牠的對數的定位部是 -2，簡寫為 $\overline{2}$。

推之，

凡小數的第一位有效數字與小數點之間有 n 個 0 的，其定位部為 $-(n+1)$，簡寫為 $\overline{n+1}$。（此處 $n+1$ 上面的記號"——"不作括號線用）。

［例一］　求 log 87500 的定位部。

［解法］　因 87500 有五位整數，

故
$$\log 87500 = 4.\cdots\cdots。$$

［例二］　求 log .000875 的定位部。

［解法］　因 .000875 中，小數點與 8 之間有三個 0，

故
$$\log .000875 = \overline{4}.\cdots\cdots。$$

［例三］　已知 $\log 2 = .3010$ 求 $2^{20}, 2^{40}$ 各有幾位整數？

［解法］　(1) $\log 2^{20} = 20 \log 2 = 20 \times .3010 = 6.020$

因 $\log 2^{20}$ 的定位部是 6。故知 2^{20} 有七位整數。

(2) $\log 2^{40} = 40 \log 2 = 40 \times .3010 = 12.04$

因 $\log 2^{40}$ 的定位部是 12，故知 2^{40} 有 13 位整數。

[註] 由本節(3)可見 $\log .356 = -1 + .5514$，這式的值本來就是 $-.4486$；所以寫成 $\bar{1}.5514$ 這樣形式的，只爲便利的緣故。便利何在？第一，任何數的定值部都是正數；第二，任何數的定值部與他的小數點所在的位置無關。例如在 $\log 356$，$\log 35.6$，$\log 3.56$，$\log .356$，$\log .0356$，$\log .000356$ 中，定值部都是 .5514。這樣，造表檢表，便可省許多手續了。

§ 165. 怎樣求定值部？ 這個問題本是很難的問題。直接求解，勢必勞而無功。好在算界先賢，早已有人不辭勞苦，求得結果造成表册。我輩後生，只要坐享其成，按表檢數就行了。

[例一] 求 $\log 84.6$ 的定值部。

[解法] 因定值部與 84.6 內小數點的位置無關，所以只求 $\log 846$ 的定值部就得了。

在下頁所附對數表中，先由最左一行（即 N 下的縱行）查出 84，再在最上一行（即 N 右的橫行）查出 6。由 84 向右看，同時由 6 向下看，其交叉之處有一數 9274，就是 $\log 846$ 的定值部。

故 $\log 84.6$ 的定值部爲 .9274

[註] 表內所載定值部，小數點一律省而不寫；用時須自行補加。

[例二] 求 $\log 95600$ 的定值部。

仿例一在 N 下的縱行內查出 95，又在 N 右的橫行內查出 6。由 95 向右看，由 6 向下看，其交叉處得一數 .9805，這是 $\log 956$

的定值部，也就是 log 95600 的定位部。

習題一百二十一（口答 1–2）

1. 求下列各數的定位部：

(a) log 887。　　(b) log 88700。

(c) log 00887。　　(d) $\log(3.12\times10^5)$。

(e) $\log(.761\times10^{-3})$。　　(f) $\log\frac{359}{761}$。

2. 求下列各數的定值部：

(a) log 878000。　　(b) log 45600。

(c) log .000456。　　(d) log 7590000。

(e) log 579000。　　(f) log .0000796。

3. 已知 log 2 = .3010，log 3 = .4771，求下列各對數：

(a) $\log 2^5=?$　　(b) $\log 3^5=?$

(c) $\log 6^5=?$　　(d) $\log 1.6^5=?$

(e) $\log\sqrt[3]{2}=?$　　(f) $\log\sqrt[5]{3}=?$

4. 已知 log 3 = .4771，log 5 = .6990，求下列諸數各有幾位：

(a) 3^{10}。　　(b) 5^{10}。　　(c) $\frac{3^5}{5^3}$。

5. (a) 5.67^{10} 是幾位數？　　(b) 7.65^{10} 是幾位數？

(c) 5.76^{10} 是幾位數？　　(d) 7.56^{10} 是幾位數？

§ 156. 求對數　已知一數，欲求他的對數，只要求其定位，定值兩部，再取其和就行了。

［例一］　求 log 886 = ?

［解法］　依求定位部的方法求得定位部是 2。

次依法檢表檢得定值部是 .5866。

$\therefore$ $$\log 386=2.5866。$$

［例二］ 求　　$\log .000379=?$

［解法］ 定位部爲 -4; 定值部檢得 .5786

$\therefore$ $$\log .000379=\overline{4}.5786。$$

習題一百二十二

1. 求下列各對數：

(a) $\log 34=?$　　(b) $\log .34=?$

(c) $\log 3410=?$　　(d) $\log .358=?$

(e) $\log .0[illegible]318=?$　　(f) $\log 356900=?$

2. 求下列各對數：

(a) $\log 31^{10}=?$　　(b) $\log .92^{10}=?$

(c) $\log 75.6^{10}=?$　　(d) $\log 26.6^{\frac{1}{[illegible]}}=?$

(e) $\log 38.7^{5}=?$　　(f) $\log 55590^{\frac{1}{[illegible]}}=?$

3. 求下列各式的結果：

(a) $\log(3^{3}\times 4^{3}\times 5^{[illegible]})$。　　(b) $\log(518^{2}\div 316^{[illegible]})$。

(c) log([illegible])。

§ 167. **求反對數**　在等式 $\log y=x$ 中，x 叫做 y 的對數，y 叫做 x 的反對數。已知 y 欲求 x，是爲求對數。已知 x 欲求 y，這就是求反對數。

求反對數的方法：先由對數的定值部求出反對數各位的數

字，再由定位部決定反對數中小數點的位置。

[例一]　已知 $\log x=2.5514$，求 x。

[解法]　先在對數表中查出定值部 .5514。由 .5514 向左看，得 N 下的縱行內相應數字是 35；再由 .5514 向上看，得 N 右的橫行內相應數字是 6。故知 .5514 是 356 的定值部。

又因 $\log x$ 的定位部是 2，故知 x 有三位整數。

$$x=356。$$

[例二]　已知 $\log x=\overline{2}.6857$，求 x。

[解法]　先在對數表中查出定值部 .6857。由 .6857 向右看，得 N 下的縱行內相應數字是 48；又由 .6857 向上看，得 N 右的橫行內相應數字是 5。故知 .6857 是 485 的定值部。

又因 $\log x$ 的定位部是 $\overline{2}$，故知 x 的第一位有效數字與小數點之間應有一個 0。

$$\therefore \quad x=.0485。$$

[例三]　已知 $\log x=\overline{5}.5933$，求 x。

[解法]　從表得反對數的數字是 392。又因定位部是 $\overline{5}$，故

$$x=.0000392。$$

習題一百二十三

1.　已知 $\log x=2.279$，求 x。

［解法］ 先在對數表中查出 2279。由 2279 向左看，得 N 下的縱行內相應數字是 16；再由 2279 向上看，得 N 右的橫行內相應數字是 9。故知反對數的各位數字是 169。

又因定位部是 2，故反對數有三位整數。

$\therefore \qquad x=169$。

［注意］ 上面解法有沒有錯誤？錯在何處？然則欲求反對數的各位數字，在對數表中應查對數的全部，還是只查定值部？

這種錯誤，初學者往往不免。務宜隨時留心！

2. 已知 $\log x=1.8169$，求 x。 已知 $\log y=2.8169$，求 y。

已知 $\log z=\overline{2}.8169$，求 z。 已知 $\log u=\overline{3}.8169$，求 u。

3. 已知 $\log a=5.7868$，求 a。 已知 $\log b=5.7875$，求 b。

已知 $\log c=5.7882$，求 c。 已知 $\log d=5.8774$，求 d。

4. 求下列各式中的 x：

(a) $\log x=1.9657$。 (b) $\log x=2.97\ 3$。

(c) $\log x=3.9380$。 (d) $\log x=\overline{2}.8971$。

(e) $\log x=\overline{5}.8686$。 (f) $\log x=20.6263$。

5. 求下列各式中的 x：

(a) $\log x=2.8459$。 (b) $\log x=4.8343$。

(c) $\log x=4.444$。 (d) $\log x=9.999$。

(e) $\log x=\overline{3}.333$。 (f) $\log x=\overline{5}.555$。

§ 168. **利用對數來計算** 已經知道怎樣求對數，怎樣求反對數，那麼，關於乘，除，乘方，開方等計算問題，都可利用對數來縮短演算手續，而 § 154 所舉諸問題，也可完全解決了。

［例一］ 求 2^{100} 的首三位數。

［解法］ 先求 $\log 2^{100}$ 是何值，再由該值求其反對數，還

樣，就得所求的數值。算式如下：

$$\log 2^{100}=100\ \log 2=100\times .3010=30.10。$$

$$\therefore\qquad 2^{100}=1.26\times 10^{30}=126\times 10^{28}。$$

［例二］　求$\sqrt[100]{2}$的首三位數。

［解法］　$\log\sqrt[100]{2}=\frac{1}{100}\log 2=\frac{1}{100}\times .3010$

$$=.0030。$$

$$\therefore\qquad \sqrt[100]{2}=1.01。$$

［例三］　求 $\sqrt[5]{.002}=?$

［解法］　$\log\sqrt[5]{.002}=\frac{1}{5}\log .002$

$$=\frac{1}{5}(\bar{3}.3010) \qquad (A)$$

$$=\frac{1}{5}(\bar{5}+2.3010) \qquad (B)$$

$$=\bar{1}.4602。 \qquad (C)$$

$$\therefore\qquad \sqrt[5]{.002}=.289。$$（算到首三位數）。

［注意］　由(A)何以不直接化爲(C)？由(A)如何化爲(B)？由(B)化爲(C)，是否比由(A)直接求(C)來得方便？

［例四］　求$\frac{325^2\times 532^3\times 235^{\frac{1}{4}}}{879\times 789\sqrt{897}}=?$

［解法］　爲寫式便利計，設 $x=\frac{325^2\times 532^3\times 235^{\frac{1}{4}}}{879\times 789\times\sqrt{897}}$，

則　$\log x = 2\log 325 + 3\log 532 + \frac{1}{4}\log 235$

$$-\left(\log 379 + \log 789 + \frac{1}{2}\log 897\right)$$

$$= 2\times 2.5119 + 3\times 2.7259 + \frac{1}{4}\times 2.3711$$

$$-\left(2.9440 + 2.8971 + \frac{1}{2}\times 2.0528\right) = 6.4763。$$

∴　$x = 2993000$。（算到首四位數）。

習題一百二十四

用對數計算：

1. 367^{10}。　　2. $\sqrt[17]{567}$。　　3. 753^{5}。

4. $\sqrt[3]{76300}$。　　5. $.0367^{10}$。　　6. $\sqrt[27]{.00367}$。

7. $.00753^{3}$。　　8. $\sqrt[3]{.00753}$。　　9. $-.567^{2}\div 785^{2}$。

10. $-\sqrt{567}\div\sqrt[3]{755}$。　　11. $\sqrt{567}\times\sqrt[3]{765}$。

12. $\dfrac{765}{\sqrt{.0567}}$。

13. $12.3\div 45.6\times .00789\div .789\times 9.78$。

14. $\sqrt[10]{\dfrac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt{10}}}$。

15. 直角三角形的斜邊是 867 市尺，一股是 456 市尺，求他股是幾市尺？

16. 已知圓的半徑是 125.6 市尺，求其面積（圓面積 $=3.1416\times$ 半徑^2）。

§ 169. **指數方程式**　凡含未知指數的方程式，叫做指數

方程式。

指數方程式有時無法求解。但若可化爲 $a^x=b$ 之形，那麼一定可用對數去求解。

［例一］　解 §160 所舉方程式 $2^x=7$。

［解法］　指數方程式所以不能仿尋常方程式求解的原因，就在未知數含於指數之內。倘能用正確方法，把這未知數移到指數以外，那就不難求解了。今將原方程式的兩邊各取對數，如

$$\log 2^x=\log 7,$$

則得 $$x\log 2=\log 7。$$

於是 $$x=\frac{\log 7}{\log 2}=\frac{.8451}{.3010}=2.808。$$

［例二］　解方程式：　$9^x-13(3^x)+36=0$。

［解法］　化原式成　$3^{2x}-13(3^x)+36=0$。

即 $$(3^x-4)(3^x-9)=0。$$

由是得 $$3^x=4 \text{ 及 } 3^x=9。$$

由 $3^x=4$，得 $$x_1=\frac{\log 4}{\log 3}=\frac{.6021}{.4771}=1.26。$$

由 $3^x=9$，得 $$x_2=\frac{\log 9}{\log 3}=\frac{2\log 3}{\log 3}=2。$$

習題一百二十五

【圖 4-7 與指數方程式無關】

1. 解下列各方程式：

(a) $63^x=7$。　　(b) $343^x=7$。　　(c) $125^x=250$。

2. 解下列各方程式：

(a) $2^{2x}-15(2^x)+16=0$。　　(b) $10^x+4^x-53=0$。

3. $\log_3 80=?$　　$\log_{83} 164=?$　　$\log_5 40=?$

4. 求 $1+2+4+8+16+\cdots\cdots+$ 第20項。(算到首四位數)。

5. 某生第一次考試算術得10分。以後每次考試比上一次進步$\frac{1}{10}$。一學期內共考6次。問該生平均成績得幾分?

6. 某人每月儲蓄5元，連續10年。照該月利.5釐，一月一結，照複利息計。問共有本利若干元?

7. 存款一項，15年後本利和5倍於本金。依複利算，年利率該是多少?

8. 解方程式 $2^m+2^{m-1}=8$。

9. 解方程式 $2^m\times3^{m-1}=8^{m+1}$。

10. 存款一項，年利率一分，幾年後本利和5倍於本金?

代數學

英漢名詞索引

A

B

C

D

E

F

Q

R

S

T

U

V

Z