

II. *Solutio Generalis Problematis XV. propositi à D. de Moivre, in tractatu de Mensura Sortis inserto Actis Philosophicis Anglicanis No 329. pro numero quocunque Collusorum: per D. Nicolaum Bernoulli, Basiliensem, Reg. Soc. Sodalem.*

CUM Methodus synthetica, quâ usus est *D. de Moivre* ad inveniendam cujusque Collusoris sortem, in usum verti nequeat tunc quando plures quam tres sunt collusores, ob vix perspiciendam legem progressionis serierum quæ se offerunt; ostendam hic quo modo Analysis in ejusmodi Problematis, ubi depositum continuo augetur, adhiberi queat: eumque in finem demonstrationem dabo analyticam trium Theorematum, quæ inveni, & quidem diu ante visum *D. Moivre* libellum de Mensura Sortis, occasione triplicis quæstionis mihi ab amico circa ludum hunc, quem Galli vocant *le Jeu de la Poule*, propositæ, pro inveniendis scil. probabilitate vincendi, lucro item vel damno cujusque Collusoris, & duratione certaminis.

### THEOREMA I.

Si Collusores aliquot *A, B, C, D, E, &c.* quorum numerus est  $n + 1$  & dexteritates sunt æquales, deponant singuli 1, & istis conditionibus certent. 1°. Ut illorum duo *A & B* ludum incipiant. 2°. Ut victus locum suum tertio *C* cedat, ita ut ille tertius *C* jam cum victore contendat, quique ex hoc certamine victor evaserit cum quarto *D* ludat, & ita deinceps. 3°. Ut ille depositum totum obtineat, qui omnes collusores successive vicerit. Dico probabilitates vincendi duorum quorumlibet collusorum sese immediate in ordine ludendi sequentium esse in ratione  $1 + 2^n$  ad  $2^n$ , adeoque expectationes lusorum *A (B), C, D, E, &c.* esse in progressionem Geometricam.

U

*Demon-*

*Demonstratio.*

Ponantur expectationes vincendi ipsius *A* vel  $B = a$ , ipsius  $C = c$ , ipsius  $D = d$ , ipsius  $E = e$ , &c. Porro cum accideret possit, ut collusor aliquis prima vice in ludum intrans inveniatur adversarium qui vel nondum, vel semel, vel bis, vel ter, &c. jam successive victor extitit, vocetur expectatio lusoris illius primo casu  $= z$ , secundo  $= y$ , tertio  $= x$ , quarto  $= u$ , quinto  $= t$ , &c. Item cum collusor aliquis vinci possit ab adversario qui antea jam vel nullum, vel unum, vel duos, vel tres, &c. collusores successive vicit, ita ut exiens è ludo relinquat adversarium qui vel semel, vel bis, vel ter, vel quater &c. victor extitit, vocetur expectatio seu probabilitas vincendi ejus qui exit è ludo primo casu  $= h$ , secundo  $= k$ , tertio  $= l$ , quarto  $= m$ , &c. Hisce omnibus positis habebuntur sequentes novem series æquationum signatæ N°. 1. N°. 2. N°. 3, &c. usque ad N°. 9. *Tab. I.* Ratio eas inveniendi breviter hæc est.

Inter æquationes N. 1°. reperitur *ex. gr.*  $f = \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x$

$+ \frac{1}{2}y$ . Nam collusor *F* certabit vel cum collusore *A*, vel *B*,

vel *C*, vel *D*, vel *E* : ut primum vel secundum contingat, oportet ut vel *A* vel *B* quater successive victor existat, cujus eventus probabilitas est  $\frac{2}{16}$  seu  $\frac{1}{8}$  : Ut tertium contingat oportet ut *C* ter victor existat, cujus eventus probabilitas est etiam  $\frac{1}{8}$  : Ut quartum contingat oportet ut *D* bis successive vincat, quod probabilitatem habet  $\frac{1}{4}$  ; Ut quintum contingat, oportet ut *E* semel vincat, cujus eventus probabilitas est  $\frac{1}{2}$  ;

ergo

ergo lusoris  $F$  probabilitas vincendi est  $= \frac{1}{8} l + \frac{1}{8} m + \frac{1}{4} x$   
 $+ \frac{1}{2} y$ . Sic inter æquationes No. 2. est, *ex. gr.*  $x = \frac{1}{2} l$

$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{2^n} \times b + \frac{1}{2^n} \times 1$ . Collusor enim  
 qui certat cum adversario qui jam bis successive victor extitit,  
 vincere potest vel omnes collusores, vel aliquos, vel nullum.

Prioris eventus probabilitas est  $\frac{1}{2^n}$ , secundi  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$

$\dots \frac{1}{2^n}$ , & tertii  $\frac{1}{2}$ ; si primus eventus contingat, probabilitas

vincendi evadit certitudo integra seu 1; si secundus, exit è lu-  
 do relinquens collusorem qui semel vicit; si tertius, exit è  
 ludo relinquens collusorem qui ter successive vicit; adeoque

fors ejus totalis est  $\frac{1}{2} \times l + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \frac{1}{2^n} \times b + \frac{1}{2^n} \times 1$ .

Simili ratiocinio inveniuntur æquationes N<sup>o</sup>. 3. Collu-  
 sor enim qui victus ab adversario exit è ludo, relinquens *ex. gr.*  
 collusorem unius tantum ludi victorem, acquirit fortem vel  
 ipsius  $C$ , vel ipsius  $D$ , vel ipsius  $E$ , vel ipsius  $F$ , &c. prout  
 adversarius à quo victus est vincit vel omnes collusores præter  
 unum, vel omnes præter duos, vel omnes præter tres, &c.

unde sequitur quod  $b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}}$

$\times f + \&c.$  Æquationes N<sup>o</sup>. 4. inveniuntur subtrahendo æqua-  
 tiones N<sup>o</sup>. 2. ab invicem: & æquationes N<sup>o</sup>. 5. subtrahendo  
 æquationes N<sup>o</sup>. 3. ab invicem. Æquationes N<sup>o</sup>. 6. inveni-  
 untur substituendo in æquationibus N<sup>o</sup>. 4. valores inventos  
 per æquationes N<sup>o</sup>. 5. Æquationes N<sup>o</sup>. 7. inveniuntur qua-  
 rendo valores ipsarum  $z, y, x, u$ , &c. per æquationes N<sup>o</sup>. 1.  
 Et his valoribus substitutis in æquationibus N<sup>o</sup>. 4. habebuntur  
 æquationes No. 8, quæ comparatæ cum æquationibus N<sup>o</sup>. 6.

dant æquationes N<sup>o</sup>. 9. ex quibus sequitur quod  $1 + 2^n : 2^n ::$   
 $:: a : c :: c : d :: d : e$ , &c. *Q. E. D.*

*Corollarium.*

Hinc faciliè inveniuntur probabilitates vincendi singulorum  
 Collusorum, quas habent tum ante ludum inceptum, tum in  
 quolibet statu in quem ludum prosequendo pervenire possunt.  
 Si sint, *ex gr.* tres collusores *A, B, C*, erit  $n = 2$ , &  $1 + 2^n : 2^n ::$   
 $5 : 4 :: a : c$  : id est, probabilitates vincendi ipsorum *A, B, C*,  
 antequam *A* vicerit *B*, vel *B* vicerit *A*, se habent ut numeri

5, 5, 4, adeoque ipsæ probabilitates sunt  $\frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{14}$  : omnes e-

nim simul sumptæ facere debent 1 seu certitudinem integram.  
 Postquam *A* vicerit *B*, probabilitates vincendi ipsorum *B, C, A*,  
 erunt *b, y* seu *c*, & (quia *A* æqualem habet expectationem ad

victoriam, & ad sortem ipsius *B* obtinendam)  $\frac{1+b}{2}$  respectivè,

*hoc est*, quia per æq. 1. N<sup>o</sup>. 3.  $b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c = \frac{1}{2} c$ , &  $c = \frac{4}{14} =$

$\frac{2}{7}$  ut modo inventum, hæc probabilitates erunt  $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}$ , ut

*D. de Moivre* invenit Coroll. 1. Prop. 15. pag. 242.

Si sint quatuor collusores *A, B, C, D*, erit  $n = 3$ , &  $1 + 2^n$   
 $2^n :: 9, 8$ , adeoque probabilitates collusorum ab initio ludi

erunt ut 9, 9, 8,  $\frac{8 \times 8}{9}$ , sive ut 81, 81, 72, 64, *hoc est*, ipsæ *a, a,*

*c, d*, erunt  $\frac{81}{298}, \frac{81}{298}, \frac{72}{298}$  &  $\frac{64}{298}$ . Postquam *A* vicerit *B*, pro-

babilitates ipsorum *B, D, C, A*, erunt *b, d, c*,  $\frac{1+3b}{4}$ , est au-

tem per æq. 1. N<sup>o</sup>. 3.  $b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d = \frac{1}{4} c + \frac{1}{2} d$ ,

*c*

$\bar{e} = \frac{72}{298} = \frac{36}{149}$ , &  $d = \frac{64}{298} = \frac{32}{149}$ , ut modo inventum :

ergo hæ probabilitates erunt  $\frac{25}{149}$ ,  $\frac{32}{149}$ ,  $\frac{36}{149}$ ,  $\frac{56}{149}$  respective.

Postquam  $A$  vicerit  $B$  &  $C$ , probabilitates vincendi ipsorum  $C, B, D, A$ , erunt  $k, \frac{c}{2}, x, \frac{1+b}{2}$ , seu (quia per æq. 2. N<sup>o</sup>. 3.

$k = \frac{1}{2^{n+2}} \times d = \frac{1}{2} d$ , & per æq. 3. N<sup>o</sup>. 7.  $x = 2d - c$ )  $\frac{16}{149}, \frac{18}{149}, \frac{28}{149}, \frac{87}{149}$ . Et nota quod calculi bonitas confirmetur ex eo,

quod summæ harum probabilitatum, *hoc est*,  $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$  in

priori exemplo, &  $\frac{25}{149} + \frac{32}{149} + \frac{36}{149} + \frac{56}{149}$ , nec non  $\frac{16}{149} +$

$\frac{18}{149} + \frac{28}{149} + \frac{87}{149}$  in posteriori exemplo, singulæ sint = 1 seu certitudini integræ.

### THEOREMA II.

Positis quæ prius & insuper hac conditione, ut victus semper mulctetur summa  $p$ , quæ deposito augendo inferviat; quod depositum sic gradatim auctum illi soli cedat, qui omnium successive collutorum victor extiterit; denotatis etiam ut antea per literas minúsculas  $a, c, d, e$ , &c. probabilitatibus vincendi ipsorum  $A$  (vel  $B$ ),  $C, D, E$ , &c. respective: per easdem vero literas majúsculas  $A, C, D, E$ , &c. ipsorum  $A$  (vel  $B$ ),  $C, D, E$ , &c. expectationibus, *hoc est*, portionibus depositi

quas singuli expectant: Dico, fore semper  $C = \frac{A + ap \times 2^n - ncp}{1 + 2^n}$

X

$D =$

$$D = \frac{C + c p \times 2^n - n d p}{1 + 2^n}, E = \frac{D + d p \times 2^n - n e p}{1 + 2^n}, \&c.$$

*Demonstratio.*

Denotetur ut prius per literas minuscultas *z, y, x, u, t, &c.* probabilitas vincendi ludentis cum adversario, qui jam vel nullum, vel unum, vel duos, &c. collusores successive vicit; per easdem vero literas majusculas *Z, Y, X, U, T, &c.* ejus expectatio, quam scilicet habet diversis illis casibus, deposito existente  $n + 1, n + 1 + p, n + 1 + 2p, n + 1 + 3p, \&c.$  respectivè. Sic etiam per literas minuscultas *h, k, l, m, &c.* denotetur probabilitas vincendi lusoris victi ab adversario, qui antea vel nullum, vel unum, vel duos, &c. collusores successive vicerat; quemadmodum per literas majusculas *H, K, L, M, &c.* ejusdem expectatio diversis illis casibus, deposito existente  $n + 1 + p, n + 1 + 2p, n + 1 + 3p, \&c.$  respective. His positis iisdem quibus antea ratiociniis inveniuntur sequentes duodecim æquationum series in *Tab. II.* signatæ N°. 1. N°. 2. N°. 3, &c. Inter

æquationes N°. 1. ex. gr. est  $E = \frac{U}{4} + \frac{X + xp}{4} + \frac{T + 2yp}{2}.$

Lusor enim *E* ludet vel cum lusore *A*, vel lusore *B*, vel *C*, vel *D*. Si ludit cum *A* vel *B*, expectatio ejus erit = *U*, quia ludit cum adversario qui jam tres adversarios vicit, deposito existente  $n + 1 + 3p$ . Si ludit cum lusore *C*, expectatio ejus erit =  $X + xp$ , ludit enim cum adversario qui jam duos collusores vicit, adeoque si depositum esset  $n + 1 + 2p$  ejus expectatio esset = *X*: verum quia ludente *E* depositum est =  $n + 1 + 3p$ , ob tres collusores victos & summa *p* multatos, addenda est expectationi *X* portio illa multæ unius *p*, quam lusor *E* sperare potest: est autem hæc portio (quia probabilitas ejus vincendi est *x*) =  $xp$ , ejus igitur expectatio totalis tunc erit =  $X + xp$ . Sic si ludit cum lusore *D*, expectatio ejus erit =  $T + 2yp$ : additur ad *T* (quæ esset ejus expectatio deposito existente  $n + 1 + p$ ) portio  $2yp$ , quæ ipsi debetur de duobus multis

multis  $2p$ , quibus depositum  $n + 1 + 3p$  majus est quam  $n + 1 + p$ . Simili modo habentur æquationes N<sup>o</sup>. 2. 3. 4. & 5. Substituendo autem primam æquationem N<sup>o</sup>. 2. *Tab. I.* in æquationibus N<sup>o</sup>. 4. habentur æquationes N<sup>o</sup>. 6. Et substituendo primam æquationem N<sup>o</sup>. 3. *Tab. I.* in æquationibus N<sup>o</sup>. 5. habentur æquationes N<sup>o</sup>. 7. quibus dein in æquationibus No 6. substitutis habentur æquationes No. 8. Æquationes N<sup>o</sup> 9. inveniuntur quærendo valores ipsarum  $Z, T, X, U,$  &c per æquationes N<sup>o</sup>. 1. *Tab. I.* & II. vel N<sup>o</sup> 2. *Tab. II.* & N<sup>o</sup>. 7. *Tab. I.* Et his valoribus substitutis in æquationibus N<sup>o</sup>. 4. habentur æquationes N<sup>o</sup>. 10. Quæ comparatæ cum æquationibus N<sup>o</sup>. 8 (in quibus pro  $z$  substituatur  $a$ , per 1. æq. *Tab. I.*) dant æquationes N<sup>o</sup>. 11. Et hæc æquationes N<sup>o</sup>. 11. comparatæ cum æquationibus N<sup>o</sup>. 9. *Tab. I.* dant æquationes N<sup>o</sup>. 12, quæ constituunt Theorema, quod demonstrandum erat.

*Corollarium.*

Hinc quoque facile inveniuntur singulorum Collusorum sortes seu expectationes, ipsorumque adeo lucra vel damna.

Sint *ex. gr.* tres collusores  $A, B, C$ : erit  $C = \frac{A + ap \times 2^n - ncp}{1 + 2^n}$

$$= (\text{ob } n = 2) \frac{4A + 4ap - 2cp}{5} = (\text{ob } a = \frac{5}{14} \text{ \& } c = \frac{2}{7}$$

per coroll. Theor. 1.)  $\frac{4A + \frac{6}{7}p}{5}$ . Unde cum omnium trium

expectationes simul sumptæ, *id est*,  $A + A + C$  æquare debeant id quod ab initio depositum fuit, *id est* 3, erit  $2A + \frac{4A + \frac{6}{7}p}{5} = \frac{14A + \frac{6}{7}p}{5} = 3$ , &  $14A = 15 - \frac{6}{7}p$ , &

$A = \frac{15}{14} - \frac{3}{49}p =$  expectationi lusoris  $A$  vel  $B$ : proinde  $C$

expectatio lusoris tertii  $C = \frac{4A + \frac{6}{7}p}{5} = \frac{6}{7} + \frac{6}{49}p$ . A quibus

X. 2

bus expectationibus si subtrahatur 1, id quod ab initio singuli deposuerunt, remanebit ibi  $\frac{1}{14} - \frac{3}{49} p$ , hic  $\frac{6}{49} p - \frac{1}{7}$ ; quemadmodum D. de Moivre invenit. Exempl. 2. Sint collutores 4, A, B, C, D, erit  $C = \frac{A + ap \times 2^n - nc p}{1 + 2^n} = (\text{ob } n = 3)$

$$\frac{8A + 8ap - 3cp}{9} = (\text{ob } a = \frac{81}{298} \text{ \& } c = \frac{36}{149}, \text{ per coroll.})$$

Theor. 1.)  $\frac{8A + \frac{216}{149}p}{9}$ ; item  $D = \frac{C + cp \times 2^n - ndp}{1 + 2^n} =$

$$\frac{8C + 8cp - 3dp}{9} = (\text{ob } d = \frac{32}{149} \text{ per id. corr.}) \frac{8C + \frac{102}{149}p}{9} =$$

$$\frac{64A + \frac{3456}{149}p}{81}; \text{ unde habebitur æquatio } 2A + C + D = 2A +$$

$$\frac{8A + \frac{216}{149}p}{9} + \frac{64A + \frac{3456}{149}p}{9} = \frac{298A + \frac{3600}{149}p}{81} = 4, \text{ sive } 149A$$

$$+ \frac{2700}{149}p = 162, \text{ \& } A = \frac{162}{149} - \frac{2700}{22201}p. \text{ Hinc } C =$$

$$\frac{8A + \frac{216}{149}p}{9} = \frac{144}{149} + \frac{1176}{22201}p, \text{ \& } D = \frac{64A + \frac{102}{149}p}{81} = \frac{128}{149}$$

$$+ \frac{4224}{22201}p. \text{ Subtracta autem unitate 1, quam singuli ab ini-$$

tio ludi deposuerunt, remanebit  $\frac{13}{149} - \frac{2700}{22201}p$  pro lusore

A vel B,  $\frac{1176}{22201}p - \frac{5}{149}$  pro C, \&  $\frac{4224}{22201}p - \frac{21}{149}$  pro D;

quæ singula indigitabunt lucrum vel damnum, prout pars affirmata præpollet negatæ, vel contra. Simili ratione habebuntur etiam sortes quas acquirunt in quolibet statu in quem ludum prosequendo pervenire possunt.



## THEOREMA 3.

Positis quæ prius, si adsint spectatores  $\mathcal{Q}, R, S, T, U,$  &c. quorum numerus sit  $n$  unitate minor quam numerus collusorum, quorumque prior  $\mathcal{Q}$  affirmet certamen finitum iri post  $n+p$  ludos peractos,  $R$  post  $n+p-1$ ,  $S$  post  $n+p-2$ ,  $T$  post  $n+p-3$ ,  $U$  post  $n+p-4$ , &c. præcise, non antea; sintque  $q, r, s, t, u,$  &c. fortes ipsorum  $\mathcal{Q}, R, S, T, U,$  &c. Dico fore  $q = \frac{1}{2} r + \frac{1}{4} s + \frac{1}{8} t + \frac{1}{16} u + \text{\&c.}$

*Demonstratio.*

Vocetur  $A$  collusor ille, qui post  $n+p$  ludos vincere supponitur: hic intrare debet in ludum post  $p$  ludos peractos, & tum ludet contra adversarium, qui jam vel unum vel duos, vel tres, &c. collusores successive vicit. Jam cum, ut primus casus contingat, & ut collusor  $A$  omnes suos collusores præter unum, *id est*,  $n-1$  collusores successive vincat, æque probabile sit quam ut adversarius ejus vincat  $n-1$  collusores, *id est*, (quia jam unius collusoris victor fuit) ut certamen finiat post  $n+p-1$  ludos peractos; hujusque eventus probabilitas sit  $= r$ : erit probabilitas ut collusor  $A$  unum adhuc collusorem vincat, *id est*, certamen finiat post  $n+p$  ludos  $= \frac{1}{2} r$ . Sic, ut secundus; casus existat, & ut  $A$  omnes collusores præter duos vincat, æque probabile est quam ut certamen finiatur post  $n+p-2$  ludos, adeoque ut tunc  $A$  vincat adhuc duos collusores, *id est*, ut certamen finiat post  $n+p$  ludos, probabilitas erit  $= \frac{1}{4} s$ . Eodem modo ut, tertio casu existente,  $A$  vincat omnes collusores, probabilitas est  $= \frac{1}{8} t$ ; ut quarto  $= \frac{1}{16} u$ , &c. Quare ut

indifferentè certamen finiatur post  $n + p$  ludos, probabilitas est

$$\frac{1}{2}r + \frac{1}{4}s + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}u + \text{\&c.} = q. \quad \text{\& E. D.}$$

*Corollarium 1.*

Facile hinc invenitur quænam sit probabilitas ut certamen finiatur intra datum quemvis ludorum numerum. Series enim fractionum incipientium à fractione  $\frac{1}{2^{n-1}}$ , quarum denominatores crescant in continua proportione dupla, numerator autem cujusque fractionis sit summa numeratorum tot fractionum immediate præcedentium quot sunt unitates in  $n-1$ , dabit omnes successive probabilitates, ut certamen finiatur peractis præcise  $n, n + 1, n + 2, n + 3$  &c. ludis: & per consequens si addantur tot termini hujus seriei quot sunt unitates in  $p + 1$ , summa ipsorum exprimet probabilitatem ut certamen finiatur ad minimum ludis  $n + p$  peractis. *Ex. gr.* Si sint collusores 4, a deoque  $n = 3$ , habebitur hæc series  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{32}, \frac{5}{64}, \frac{8}{128}$   
 $\frac{13}{256}, \frac{21}{512}$  &c. E qua si fiat alia  $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{8}{16}, \frac{19}{32}, \frac{43}{64}, \frac{94}{128}, \frac{201}{256}$ ,  
 &c. cujus termini sint summæ terminorum præcedentis seriei, denotabunt iidem termini qualis sit probabilitas ut certamen finiatur ad minimum 3, 4, 5, 6, &c. ludis.

*Corollarium 2.*

Potest terminus quicunque prioris seriei (excepto primo termino,) ut & summa omnium terminorum, *id est*, terminus quicunque posterioris seriei, per formulam generalem exprimi hoc modo. Si  $n + 1$  sit numerus collusorum, &  $p$  sit numerus terminorum, erit ultimus terminus prioris seriei

$$\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{p-n+1}{1 \times 2^{2n}} + \frac{p-2n \times p-2n+3}{1 \times 2 \times 2^{3n}} -$$

$$\frac{p-3n \times p-3n+1 \times p-3n+5}{1 \times 2 \times 3 \times 2^{4n}} +$$

$$+ \frac{p-4n \times p-4n+1 \times p-4n+2 \times p-4n+7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2^{5n}}, \text{ \&c. Et}$$

summa omnium terminorum sive ultimus terminus posterioris

seriei =  $\frac{p+1}{1 \times 2^n} - \frac{p-n \times p-n+3}{1 \times 2 \times 2^{2n}} + \frac{p-2n \times p-2n+1 \times p-2n+5}{1 \times 2 \times 3 \times 2^{3n}}$

$$- \frac{p-3n \times p-3n+1 \times p-3n+2 \times p-3n+7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2^{4n}} + \text{ \&c.}$$

Tabula I.

Intrat		Exit.		N <sup>o</sup> . 1	
0	Sors z	1	Sors b	a = z	
1	y	2	k	c = y	
2	x	3	l	d = $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$	
3	u	4	m	e = $\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$	
4	t			f = $\frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$	

N<sup>o</sup>. 2.

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \times b + \frac{1}{2^n} \times 1$$

$$y = \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \times b + \frac{1}{2^n} \times 1$$

$$x = \frac{1}{2}l + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \times b + \frac{1}{2^n} \times 1$$

$$u = \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \times b + \frac{1}{2^n} \times 1$$

N<sup>o</sup>. 3.

$$b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \dots$$

$$k = \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \dots$$

$$l = \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \dots$$

$$m = \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \dots$$

N<sup>o</sup>. 4.

N<sup>o</sup>. 6.

N<sup>o</sup>. 8.

$$z - y = \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} k = \frac{1}{2^n} \times c = a - c$$

$$y - x = \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} l = \frac{1}{2^{n-1}} \times d = 2c - 2d$$

$$x - u = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} m = \frac{1}{2^{n-2}} \times e = 4d - 4e$$

N<sup>o</sup>. 5.

N<sup>o</sup>. 7.

N<sup>o</sup>. 9.

$$b - k = \frac{1}{2^{n-1}} \times c$$

$$k - l = \frac{1}{2^{n-2}} \times d$$

$$l - m = \frac{1}{2^{n-3}} \times e$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = a \\ y = c \\ x = 2d - y = 2d - c \\ u = 4e - x - 2y = 4e - 2d - c \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = a \times \frac{2^n}{1 + 2^n} \\ d = c \times \frac{2^n}{1 + 2^n} \\ e = d \times \frac{2^n}{1 + 2^n} \end{array} \right.$$

Corollarium 3.

Potest quis priusquam ludus inchoetur in se suscipere, ut summam  $n + 1$  de qua collutores contendunt, & multas omnes pendat, si sibi initio in manus datum sit  $n + 1 + 2^n - 1 \times p$ .

Demonstrationem duorum præcedentium corollariorum curiosis indagandam relinquo.