1. RELACIONET

Përkufizim : Le të jetë **A** një bashkësi dhe **x**, **y** ∈ **A**. Atëherë në vend

të **{x, {x, y}}** do të shënojmë **(x, y)** dhe atë do ta quajmë dyshe të renditur,

ku **x** quhet komponenta e parë kurse **y** e dyta.

Përkufizim : Prodhimi kartezian **A×B** i dy bashkësive **A** dhe **B** është bashkësia e të gjitha dysheve të renditura **(a, b)** ku **a** ∈ **A** dhe **b** ∈ **B**. (Termi kartezian vjen nga mbiemri i matematikanit francez, Rëne Dekart (**Reńe Descartes 1596-1650**).)

Këto dy koncepte mund të përgjithësohen dhe në vend të dyshes së renditur mund të përkufizohet n-shja e renditur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si dhe prodhimi kartezian i një numri të fundëm bashkësish:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Në fakt, mund të zgjerohet prodhimi kartezian edhe tek një familje e pa-fundme bashkësish. Nëse njëra nga bashkësitë **A** ose **B** është boshe, atëherë prodhimi i tyre kartezian është po ashtu bashkësi boshe.

Përkufizim : Le të jenë dhënë dy bashkësi të çfarëdoshme **A** dhe **B**. Relacion binar nga **A** në **B** quhet secila nënbashkësi e prodhimit kartezian **A × B**. Relacionet quhen edhe korrespondenca. Bashkësia **A** quhet domena e relacionit, kurse ajo **B** quhet kodomena e relacionit. Nëse $R \subseteq A \times B$, në vend të $(x, y) \in R$ shpesh shënojmë **xRy**.

Ne do të jemi posaçërisht të interesuar në rastin kur **A = B** dhe në atë rast do themi që **R** është **relacion binar** në **A**. Varësisht nga vetitë që I plotëson relacioni **R** në **A**, kemi këto emërtime:

Relacion refleksiv $\forall x \in A, xRx$;

Relacion simetrik $\forall x, y \in A, xRy \Rightarrow yRx$;

Relacion antisimetrik $\forall x, y \in A, (xRy \land yRx) \Rightarrow x = y$;

Relacion tranzitiv $\forall x, y, z \in A, (xRy \land yRz) \Rightarrow xRz$.

Përkufizim : Nga një ose më shumë relacione të dhëna në A, mund të fitohen relacione të reja, p.sh., si vijon:

Relacioni invers R^-1: xR^-1y ⇔ yRx ;

Relacioni komplement ose negacion R : xRy ⇔ ¬xRy ;

Unioni $R_1 \cup R_2$: $x(R_1 \cup R_2)y \Leftrightarrow xR_1y \vee xR_2y$;

Prerja $R_1 \cap R_2$: $x(R_1 \cap R_2)y \Leftrightarrow xR_1y \wedge xR_2y$;

Diferenca $R_1 \setminus R_2$: $x(R_1 \setminus R_2)y \Leftrightarrow xR_1y \wedge \neg xR_2y$;

Kompozimi $R_1 \circ R_2$: $x(R_1 \circ R_2)y \Leftrightarrow \exists z : xR_2z \wedge zR_1y$.

Tek kompozimi i relacioneve nuk vlen vetia komutative, por vlen gjithmonë ajo asociative. Rolin e identitetit në lidhje me kompozimin e luan relacioni i dhënë me diagonalen **$I = \{(x, x) : x \in A\} \subset A \times A$** në **A**.

1.1 Relacionet e Ekuivalencës

Përkufizim : Relacion në **A** i cili është refleksiv, simetrik dhe tranzitiv quhet relacion ekuivalence në **A**.

Relacionet e ekuivalencës janë të rëndësishme në matematikë dhe ka plot shembuj relacionesh të tilla. Ja një i tillë:

Shembull : Le të jetë **m** numër natyror. Shënojmë $x \equiv y (\mathrm{mod}\ m)$ nëse $x - y$ është shumëfish i numrit **m**. Atëherë **mod m** e paraqet një relacion ekuivalence në **Z** dhe quhet **kongruenca modulo m**.

Për $a \in A$ dhe relacionin e ekuivalencës **R** në **A**, klasa e ekuivalencës e elementit **a** quhet bashkësia :

$$C_a := \{x \in A : xRa\}.$$

Në vend të C_a shënojmë edhe **[a]**. Në vijim do ta japim një mënyrë tjetër të karakterizimit të relacionit të ekuivalencës në një bashkësi joboshe **A**.

Përkufizim : Sistemi $P := \{A_i\}_{i \in I}$ i nënbashkësive $A_i \subseteq A$ quhet **copëzim** (ose **ndarje** ose **partitim**) i **A** nëse çdo element i **A** ndodhet në një dhe vetëm një prej bashkësive A_i.

Nga përkufizimi rrjedh menjëherë që bashkësitë A_i në një copëzim janë dy nga dy disjunkte: $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$.

Përkufizim : Çdo copëzim i bashkësisë A e përcakton një relacion ekuivalence në A dhe anasjelltas, çdo relacion ekuivalence në A e përcakton një copëzim në A.

Vërtetim : Supozojmë se $P := \{A_i\}_{i \in I}$ është një copëzim i **A**. Atëherë empërkufizojmë një relacion ekuivalence **R** në **A** përmes: $xRy \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x, y \in A_i$. Anasjelltas, le të jetë **R** relacion ekuivalence në **A**. Atëherë një copëzim të **A** e marrim përmes klasave të ekuivalencës së elementeve të **A**, duke I mënjanuar përsëritjet.

Bashkësia e të gjitha klasave të ekuivalencës **R** në **A** shënohet **A/R := {Ca : a ∈ A}** dhe quhet **faktor-bashkësi** e **A** në lidhje me **R.**

Shembull : E shqyrtojmë faktor-bashkësinë e **Z** në lidhje me **mod m**. Shohim se janë gjithsej **m** klasa të ekuivalencës, të cilat i korrespondojnë ndarjes së numrave të plotë sipas mbetjes pas pjesëtimit me **m**. Pra, një klasë ekuivalence e përbëjnë numrat e plotë që plotpjesëtohen me **m**, një tjetër ata që kur të pjesëtohen me **m** kanë mbetje **1**, e kështu me radhë.

Përkufizim : Relacioni binar refleksiv, tranzitiv dhe antisimetrik quhet renditje e pjesshme. Quhet renditje e pjesshme sepse dallon nga renditja e plotë ku çdo dy elemente mund të krahasohen. P.sh. në bashkësinë e pjesëve të **{0, 1}**, njërenditje e pjesshme jepet me relacionin **⊆**, por elementet **{0}** dhe **{1}** nuk janë të krahasueshme.

Relacioni invers i një renditje të pjesshme është po ashtu renditje e pjesshme dhe quhet relacion dual i tij. Nëse **R** është renditje e pjesshme në **A**, atëherë **(A, R)** quhet sistem pjesërisht i renditur.