Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 15

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.1. Warum sind mathematische Beweise schwierig, obwohl sie (zumindest für erststufige Aussagen) aufgrund des Vollständigkeitssatzes mit einem sehr begrenzten und übersichtlichen formalen Regelwerk durchgeführt werden können?

Aufgabe 15.2. Diskutiere Metasprache und Objektsprache anhand der Formulierung „im Widerspruch zur Widerspruchsfreiheit“ aus dem Beweis zu Lemma 15.1.

Aufgabe 15.3. Es sei S ein Symbolalphabet (das mindestens eine Variable enthalte) einer Sprache erster Stufe und T die zugehörige Termmenge. Zeige, dass man T als Grundmenge einer Interpretation von S nehmen kann, indem man Variablen, Konstanten und Funktionssymbole „natürlich“ und Relationssymbole willkürlich interpretiert.

Aufgabe 15.4. Zeige, dass es eine widerspruchsfreie, unter Ableitungen abgeschlossene Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^S$ geben kann, wobei die Variablenmenge aus x_n, $n \in \mathbb{N}$, besteht, derart, dass es einen Ausdruck α mit $\exists x_0 \alpha \in \Gamma$ und $\neg \alpha \frac{x_n}{x_0} \in \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 15.5. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge, die über beliebig großen endlichen Grundmengen erfüllbar ist. Zeige, dass Γ auch über einer unendlichen Menge erfüllbar ist.

Aufgabe 15.6.*

Es sei S ein Symbolalphabet und $\Gamma = L^S$ eine Ausdrucksmenge. Begründe, warum man im Allgemeinen bei der Hinzunahme von Beispielen (innerhalb des Beweises des Vollständigkeitssatzes) nicht für alle Existenzaussagen $\exists x \alpha \in L^S$ mit einer einzigen neuen Variablen z arbeiten kann.

Aufgabe 15.7.*

Zeige, dass es einen Peano-Halbring M mit der Eigenschaft gibt, dass es darin ein Element $x \in M$ gibt, das größer als jede natürliche Zahl in M (also Zahlen der Form $1 + 1 + \cdots + 1$) ist.

Aufgabe 15.8. Man mache sich Gedanken zu den folgenden Zitaten aus Ludwig Wittgensteins Tractatus logico-philosophicus.

„6.2 Die Mathematik ist eine logische Methode. Die Sätze der Mathematik sind Gleichungen, also Scheinsätze. 6.21 Der Satz der Mathematik drückt keinen Gedanken aus“.

„6.22 Die Logik der Welt, die die Sätze der Logik in den Tautologien zeigen, zeigt die Mathematik in den Gleichungen“.

„6.2321 Und, dass die Sätze der Mathematik bewiesen werden können, heißt ja nichts anderes, als dass ihre Richtigkeit einzusehen ist, ohne dass das, was sie ausdrücken, selbst mit den Tatsachen auf seine Richtigkeit hin verglichen werden muss“.

„6.234 Die Mathematik ist eine Methode der Logik.

6.2341 Das Wesentliche der mathematischen Methode ist es, mit Gleichungen zu arbeiten. Auf dieser Methode beruht es nämlich, dass jeder Satz der Mathematik sich von selbst verstehen muss“.

„6.24 Die Methode der Mathematik, zu ihren Gleichungen zu kommen, ist die Substitutionsmethode“. (...)

Wir besprechen den für die Konstruktion eines Modells (zum Satz von Henkin) wichtigen Begriff einer Äquivalenzrelation anhand einiger Aufgaben.

Aufgabe 15.9. Wir betrachten die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und eine fixierte natürliche Zahl $a \geq 0$. Zeige, dass auf $\mathbb{Z}$ durch

$$x \sim y, \text{ wenn die Differenz } x - y \text{ ein Vielfaches von } a \text{ ist},$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Aufgabe 15.10. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir betrachten die Relation auf V, die durch

$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U$$

definiert ist. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 15.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf V, die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w \text{ gibt}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

Aufgabe 15.12.*

Betrachte auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist}.$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass es zu jedem (a, b) ein äquivalentes Paar (a', b') mit $b' > 0$ gibt.

c) Es sei M die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow M,\ z \longmapsto [(z, 1)].$$

Zeige, dass φ injektiv ist.

d) Definiere auf M (aus Teil c) eine Verknüpfung $+$ derart, dass M mit dieser Verknüpfung und mit $[(0, 1)]$ als neutralem Element eine Gruppe wird, und dass für die Abbildung φ die Beziehung

$$\varphi(z_1 + z_2) \ =\ \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 15.13.*

Es seien M und N Mengen und

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

sei eine Abbildung. Zeige, dass auf M durch die Relation

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } \varphi(x) = \varphi(y)$$

eine Äquivalenzrelation gegeben wird.

Aufgabe 15.14.*

Es sei M die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Definiere auf M eine Relation durch

$$f \sim g \text{ falls } f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0) \text{ und } f''(1) = g''(1)\,.$$

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Finde für jede Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation einen polynomialen Vertreter.

c) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation mit der Addition von Funktionen verträglich ist.

d) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation nicht mit der Multiplikation von Funktionen verträglich ist.

Aufgabe 15.15. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Betrachte die Relation R auf U, wobei xRy bedeutet, dass es eine stetige Abbildung

$$\gamma\colon\ [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \gamma(t),$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf U ist.

Aufgabe 15.16. Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M mit den Äquivalenzklassen $[x]$. Es sei I die Menge aller Äquivalenzklassen. Zeige folgende Aussagen.

(1) Es ist $x \sim y$ genau dann, wenn $[x] = [y]$ ist, und dies gilt genau dann, wenn $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.
(2) $M = \bigcup_{x \in I} [x]$ ist eine disjunkte Vereinigung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.17. (2 Punkte)

Wir betrachten für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die symmetrische Differenz

$$A \triangle B \,=\, (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen

$$A \sim B\,,$$

falls $A \triangle B$ endlich ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}\,(\mathbb{N})$ definiert wird.

Aufgabe 15.18. (2 Punkte)

Es sei S ein Symbolalphabet einer Sprache erster Stufe, T die Menge der S-Terme und I eine S-Interpretation. Zeige, dass auf T durch

$$s \sim t, \text{ falls } I(s) = I(t)\,,$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird.

Aufgabe 15.19. (4 Punkte)

Es seien s, t nicht identische S-Terme. Zeige, dass es ein endliches S-Modell mit

$$I(s) \,\neq\, I(t)$$

gibt.

Aufgabe 15.20. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine widerspruchsfreie, unter Ableitungen abgeschlossene Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^S$ derart, dass für die konstruierte Interpretation I nicht $\Gamma \subseteq I^{\vDash}$ gilt.

Aufgabe 15.21. (4 Punkte)

Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine abzählbare widerspruchsfreie Ausdrucksmenge. Zeige, dass Γ ein erfüllendes Modell mit abzählbar vielen Elementen besitzt.

AUFGABE 15.22. (4 Punkte)

Zeige, dass man die natürlichen Zahlen nicht erststufig festlegen kann.