Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 27

Übungsaufgaben

Aufgabe 27.1. Zeige, dass eine K-Modallogik, in der das Möglichkeitsaxiom und das Löb-Axiom gelten, bereits widersprüchlich ist.

Aufgabe 27.2. Zeige, dass das universelle modallogische Modell zu einer einzigen Aussagenvariable p bereits unendlich ist.

Aufgabe 27.3. Es sei T eine maximal widerspruchsfreie modallogische Ausdrucksmenge. Zeige, dass T vollständig ist, dass also für jedes $\alpha \in L$ die Alternative „Entweder $\alpha \in T$ oder $\neg\alpha \in T$“ gilt.

Aufgabe 27.4. Es sei T eine maximal widerspruchsfreie modallogische Ausdrucksmenge, die die K-Modallogik umfasse und in der die Nezessisierungsregel gelte. Zeige, dass in T entweder das Leerheitsaxiom oder das Fatalismusaxiom gilt.

Aufgabe 27.5. Es sei T eine maximal widerspruchsfreie modallogische Ausdrucksmenge, die die K-Modallogik umfasse und in der es einen paradoxen Ausdruck gebe. Zeige, dass T nicht unter der Nezessisierungsregel abgeschlossen ist.

Die folgende Aufgabe kann man wegen Aufgabe 25.6 insbesondere auf die Beweisbarkeitslogik anwenden.

Aufgabe 27.6. Wir setzen

$$\bot := p \wedge \neg p.$$

Es sei Γ eine K-Modallogik, in der

$$\Gamma \vdash \Box\bot \leftrightarrow \Box\neg\Box\bot$$

ableitbar ist. Zeige, dass es keine widerspruchsfreie Erweiterung

$$\Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$$

gibt, die aussagenlogisch und unter der Nezessierungsregel abgeschlossen ist.

Aufgabe 27.7. Es sei $K = K^{\vdash}$ die K-Modallogik und sei U das universelle modallogische Modell. Zeige

$$K = \bigcap_{W \in U} W.$$

Aufgabe 27.8. Ist das universelle modallogische Modell symmetrisch, reflexiv, transitiv? Ist das universell symmetrische modallogische Modell reflexiv?

Aufgabe 27.9. Es sei (U, R, ν) das universelle modallogische Modell. Kann man auf (U, R) auch eine andere Wahrheitsbelegung definieren?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.10. (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für ein modallogisches Modell (M, R, ν), eine Welt $w \in M$ und einen modallogischen Ausdruck $\alpha \rightarrow \beta$ mit

$$(M, R, \nu, w) \vDash \alpha \rightarrow \beta\,,$$

aber

$$(M, R, \nu, w) \nvDash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta\,.$$

Aufgabe 27.11. (3 Punkte)

Es sei (M, S, μ) ein modallogisches Modell und (U, R, ν) das universelle modallogische Modell. Zeige, dass durch

$$M \longrightarrow U,\ w \longmapsto (M, S, \mu, w)^{\vDash},$$

eine Abbildung definiert ist, die ein Homomorphismus (bezüglich der zweistelligen Relationen S und R) ist.

Aufgabe 27.12. (4 Punkte)

Es sei (M, R, μ) ein modallogisches Modell für die $S5$-Modallogik. Zeige, dass für zueinander erreichbare Welten $v, w \in M$ die Gültigkeitsmengen verschieden sein können, dass aber für jeden Ausdruck $(M, R, \mu, v) \vDash \Box\alpha$ genau dann gilt, wenn $(M, R, \mu, w) \vDash \Box\alpha$ gilt.

Aufgabe 27.13. (2 Punkte)

Es sei Γ eine modallogische Ausdrucksmenge und α ein modallogischer Ausdruck. Es sei $\Gamma \vDash \alpha$. Zeige, dass es eine endliche Teilmenge $\Gamma_e \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_e \vDash \alpha$ gibt.

Aufgabe 27.14. (3 Punkte)

Zeige, dass in der K-Modallogik das Schema

$$\Box\alpha \wedge \Diamond\beta \rightarrow \Diamond\alpha$$

ableitbar ist.

Aufgabe 27.15. (2 Punkte)

In einem K-modallogischen System S gelte das Axiomenschema

$$\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha\,.$$

Zeige, dass man in S das Möglichkeitsaxiom

$$\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$$

ableiten kann.

Aufgabe 27.16. (3 Punkte)

Charakterisiere die modallogischen Rahmen, in denen (bei jeder Wahrheitsbelegung) das Axiomenschema

$$\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha$$

gilt.

Aufgabe 27.17. (3 Punkte)

Zeige, dass aus dem K-modallogischen Axiomenschema

$$\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha$$

nicht das Axiomenschema

$$\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$$

ableitbar ist.

Abbildungsverzeichnis