Also haben wir

4 $$G(x\, y\, z \dots) = \Sigma\, \mathfrak{P}_{\lambda\mu\nu\dots}(u, v, w \dots)$$

Nun ist die Frage, unter welcher Bedingung ich $\Sigma\, \mathfrak{P}_{\lambda\mu\nu\dots}$ in eine Potenzreihe von $u, v, w \dots$ umwandeln kann. Dies ~~unterscheiden~~ entscheiden wir nach dem Satze auf der Seite 196., wenn ich eine zweckmässige Function $\Psi_{\lambda\mu\nu\dots}(u, v, w \dots)$ habe, in welcher die Coefficienten positive Zahlen sind, die größer oder gleich sind den absoluten Beträgen der entsprechenden Coefficienten in $\mathfrak{P}_{\lambda\mu\nu}(u, v \dots)$. Ich bilde zunächst aus den Reihen

$$g_1(u, v, \dots)$$
$$g_2(u, v, \dots) \text{ folgende}$$
$$\bar{x} = \bar{g}_1(u, v \dots)$$
5 $$\bar{y} = \bar{g}_2(u, v, w \dots)$$
$$\dots\dots\dots$$

welche aus den ursprünglichen entstehen, wenn ich dort statt der Coefficienten positive Zahlen setze, die gleich oder größer sind, als die absoluten Beträge der entsprechenden Coefficienten. Ich bilde nun die Functionen $\Psi_{\lambda\mu\nu\dots}$ durch die Gleichung

6 $$|a_{\lambda\mu\nu\dots}| \cdot \bar{g}_1^{\lambda}\, \bar{g}_2^{\mu}\, \bar{g}_3^{\nu} \dots = \Psi_{\lambda\mu\nu\dots}(u, v, w \dots)$$

Alsdann erfüllen die Ψ die Bedingung, dass jeder Coefficient darin eine positive Zahl ist, die größer oder gleich ist dem absoluten Betrage des entsprechenden Gliedes in $\mathfrak{P}_{\lambda,\mu,\nu}(u, v, w \dots)$; ~~nur~~ um das letztere nachzuweisen wende ich folgenden Hilfsatz an. Wenn man mit complexen Größen a, b, c.. rechnet und nur Addition und Multiplication vornimmt, dann mit anderen positiven Größen $a' b' c'$..., für welche $|a| \leqq a'$, $|b| \leqq b'$.. ist, dieselben Operationen vornimmt, so wird das Resultat der letzteren Rechnung positiv und nie kleiner als der absolute Betrag von dem Resultate der Rechnung mit den Zahlen a, b, c... Denn das Resultat der Rechnung im 1ten Falle läßt sich stets auf die Form bringen einer Summe von Gliedern der Gestalt:

$$A_{\alpha\beta\gamma\ldots}\, a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots \text{ wo } A\text{'s positiv sind.}$$

Im 2ten Falle mit den Größen $a' b' c'$ wird sich das Resultat als Summe von Gliedern darstellen.

$$A_{\alpha\beta\gamma}\, a'^{\alpha} b'^{\beta} c'^{\gamma} \ldots\ldots$$

und zwar so daß jedes Glied der 1ten Summe ein entsprechendes mit demselben Coefficient $A_{\alpha\beta\gamma}$ behaftetes Glied in der 2ten Summe hat. Nun ist

$$|\Sigma A_{\alpha\beta\gamma\ldots}\, a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}| \leqq \Sigma A_{\alpha\beta\gamma\ldots} |a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}|.$$ da nun allgemein $A_{\alpha\beta\gamma} |a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}| \leqq A_{\alpha\beta\gamma\ldots}\, a'^{\alpha} b'^{\beta} c'^{\gamma}$.
so ist $|\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\, a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots| \leqq \Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\, a'^{\alpha} b'^{\beta} c'^{\gamma}$
Wenden wir nun dies auf die Bildung der Function $\Psi_{\lambda\mu\gamma}(u, v, w..)$. Wenn ich die Rechnung mit $x y z$... ausführe, so ist jeder Coefficient von

$$a_{\lambda\mu\nu\ldots}\, x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \ldots\ldots = C_{\lambda\mu\nu}(u, v, w..)$$

durch Addition und Multiplication zusammengesetzt aus den Coefficienten $\alpha_{\lambda\mu\nu}$ und den Coefficienten von $g_1, g_2 \dots$ Nun habe ich, um $\Psi_{\lambda\mu\nu}(u, v, w..)$ zu bilden, dieselbe Operation mit den Coefficienten von $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ und dem absoluten Betrage von $\alpha_{\lambda\mu\nu}$ vorgenommen.

Da nun die Coefficienten in $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ nie kleiner sein sollen als die absoluten Beträge der entsprechenden in $g_1, g_2 \dots$, so wird der absolute Betrag eines jeden der Coefficienten in $\varphi_{\lambda\mu\nu}$ nie größer sein koennen, als der entsprechende Coefficient von $\Psi_{\lambda\mu\nu}$. Es stehen also die φ's und die Ψs in dem verlangten Zusammenhange. Wenn ich nun nachweisen kann, daß es ein Werthsystem $u_0 v_0 w_0 \dots$ gibt, (welches nicht null ist) für welches stets

7 $\sum \Psi_{\lambda\mu\nu}(u_0 v_0 \dots) < h$

wie viel ich auch der Functionen Ψ nehmen mag, so sind die Bedingungen des Satzes (196) erfüllt und dann kann ich schließen, daß für alle Werthsysteme $|x| \leq x_0 \; |y| \leq |y_0| \dots$ die Reihe $\sum \varphi_{\lambda\mu\nu}(u, v..)$ transformirt werden kann in Gruppen.

Um die Existenz der positiven Zahlen $u_0 v_0 ..$ nachzuweisen, betrachten wir die Reihe $\bar{G}(x y z \dots)$, welche aus der Reihe $G(x y \dots)$ entsteht, indem man jeden Coeff. in der letzteren auf seinen absoluten Betrag reducirt. Die Reihe $\bar{G}(x y z \dots)$ hat sicher denselben Convergenzbereich, wie die Reihe $G(x y z \dots)$, da ja je 2 Glieder derselben den selben absoluten Betrag haben. Wenn ich nun $\Sigma\, \Psi_{\lambda\mu\nu}(u_0\, v_0 \ldots)$ bilden will, so kann ich dies auch so machen, dass ich in $\bar{G}(x\,y\,z)$ statt $x\,y\,z$ ~~der Reihe~~ die Reihen $\bar{g}_1(u_0\, v_0 \ldots)$, $\bar{g}_2(u_0\, v_0 \ldots)$ einsetze; denn dies ist ja die Bedingung zur Bildung des Ψ's. Wir haben somit

$$\Sigma\, \Psi_{\lambda\mu\nu}(u_0\, v_0 \ldots) = \bar{G}\left\{\bar{g}_1(u_0\, v_0 \ldots),\ \bar{g}_2(u_0\, v_0 \ldots) \ldots\right\} \qquad 8$$

Es wird offenbar die Bedingung 7 erfüllt, wenn man die $u_0\, v_0 \ldots$ so wählen kann, dass der Werth $\bar{G}$ nach der Substitution endlich ist. Nun ist

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(u_0\, v_0 \ldots) &= |a| + \bar{g}_1'(u_0\, v_0 \ldots)\\ \bar{g}_2(u_0\, v_0 \ldots) &= |b| + \bar{g}_2'(u_0\, v_0 \ldots)\end{aligned} \qquad 9$$

Ferner haben wir vorausgesetzt, dass ~~es~~ die Werthe $a\, b\, c \ldots$ innerhalb des Convergenzkreises von $\bar{G}(x\,y\,z \ldots)$ liegen, und die Reihen $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2 \ldots$ selbst convergent sind, d. h. es muss ein Werthsystem $u_1\, v_1 \ldots$ geben, für welches jedes Glied jeder Reihe kleiner ist, als eine angebbare endliche positive Zahl h. Es sei dies der Fall für $u = u_1$, $v = v_1 \ldots$ so dass jedes Glied der Reihe $\bar{g}_1 < h_1$. Alsdann ist die Summe aller Glieder der Reihe für $|u| < u_1$, $|v| < v_1 \ldots$

$\bar{g}_1(u_1\, v_1 \ldots)$ kleiner ~~als~~ oder höchstens gleich

$$\frac{h_1}{\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\left(1-\frac{v}{v_1}\right)\ldots}$$

und die Grösse $\frac{h_1}{\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\left(1-\frac{v}{v_1}\right)\ldots} - h_1$ $\cancel{\frac{h_1}{\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\left(1-\frac{v}{v_1}\right)} - h_1}$ wird eine Potenzreihe liefern, in welcher jedes Glied dem absoluten Betrage nach nie kleiner ist, als das entsprechende in $\bar{g}_1'(u.\,v. \ldots)$. Folglich haben wir sicher

10. $\bar{g}_1'(u_0\, v_0\, w_0 \ldots) \leqq \frac{h_1}{(1-\frac{u_0}{u_1})(1-\frac{v_0}{v_1})\ldots} - h_1$,
wofern nur $u_0 < u_1$ $v_0 < v_1$ ....

Nun sei der kleinste unter den Quotienten
$\frac{u_0}{u_1}, \frac{v_0}{v_1} \ldots$ mit s bezeichnet, dann haben wir, wenn die Anzahl der Variablen $u, v, w \ldots$ gleich m ist, offenbar

$$\frac{h_1}{(1-\frac{u_0}{u_1})(1-\frac{v_0}{v_1})\ldots} - h_1 < \frac{h_1}{(1-s)^m} - h_1 = \frac{1-(1-s)^m}{(1-s)^m}\, h_1$$

Diese Größe kann offenbar durch Verkleinerung des s beliebig klein gemacht werden. Ich kann also die $u_0\, v_0\, w_0$.. stets so wählen, daß

12 $\bar{g}_1'(u_0\, v_0 \ldots) < \varepsilon$ dasselbe gilt für
$\bar{g}_2', \bar{g}_3' \ldots$

Damit G in 8 einen endlichen Werth hat, hat man ~~nun~~ nur die Umgebung von $|a|, |b| \ldots$ zu bestimmen, und wenn dieses resp. $\delta_1, \delta_2 \ldots$ ist, so braucht man nur $u_0\, v_0$.. so klein zu wählen daß

$\bar{g}_1' < \delta_1, \bar{g}_2' < \delta_2 \ldots$

was immer möglich ist, alsdann gehört jeder Werth $\bar{g}_1(u_0\, v_0 \ldots), \bar{g}_2(u_0\, v_0 \ldots) \ldots$ ~~nach~~ noch dem Convergenzbereiche von $\bar{G}(xyz..)$. Dazu, daß die $\bar{g}_1(u_0 \ldots)$ noch in dem Convergenzbereiche liegen, ist wie wir gesehen, nur nöthig, daß $a, b, c \ldots$ innerhalb des Convergenzbereiches liegt, und die Reihen $g_1 \ldots$ convergent sind. Für solche Werthe von u_0 v_0.. die den obigen Bedingungen zu genügen haben, wir

$$\sum{}' \Psi_{\lambda\mu\chi\nu\ldots}(u_0\, v_0 \ldots) < h$$

wie ich auch die $\Psi_{\lambda\mu\chi\nu}$ wählen möge. Wenn wir nun den Satz Seite 196 anwenden, so sehen wir, daß für alle Werthsysteme von $u, v, w, \ldots$ für welche $|u| \leqq u_0\, |v| \leqq v_0 \ldots$ ist, man die Gleichung hat:

$$\sum \varphi_{\lambda\mu\chi\nu\ldots}(u, v, w \ldots) = \sum_{\lambda\mu\chi\nu\ldots} c_{\lambda\mu\chi\nu\ldots}\, u^{\lambda} v^{\mu} w^{\chi} \ldots$$

Also

$$G(x\, y\, z \ldots) = \sum_{\lambda\mu\chi\nu\ldots} c_{\lambda\mu\chi\nu\ldots}\, u^{\lambda} v^{\mu} w^{\chi} \ldots \qquad 13$$

Hiermit ist unser Satz vollständig nachgewiesen.

Folgerung. Angenommen die Reihe $G(x\, y\, z \ldots)$ sei beständig convergirend, dann ist die Bedingung daß

$$x_0 = \bar{g}_1(u_0\, v_0 \ldots)$$
$$y_0 = \bar{g}_2(u_0\, v_0 \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

dem Convergenzbereiche von $G(x\, y\, z \ldots)$ gehören, stets erfüllt, also die Transformation stets möglich.

Das Wesentliche bei der obigen Untersuchung ist, daß die transformirten Reihen stets einen Convergenzbereich haben, und daß sie innerhalb eines bestimmten gemeinschaftlichen Convergenzbereiches identische Werthe liefern. Wie weit sich diese Uebereinstimmung erstreckt, koennen wir mittelst des obigen Satzes nicht entscheiden; darauf kommen wir später zurück. Als eine Anwendung des obigen Satzes ergibt sich ein interessanter und wichtiger Satz der Functionstheorie.

Es sei die Potenzreihe $G(x\,y\,z\ldots)$ und wir machen die einfachste Substitution

$$x = a + u$$

1 $$y = b + v$$

$$z = c + w$$

$$\ldots\ldots$$

wo $a, b, c \ldots$ innerhalb des Convergenzbereiches von $G(x, y, z\ldots)$ ~~$(x\,y\,z\ldots)$~~ liegen soll. In diesem Falle ist also

$$g_1 = a + u$$

2 $$g_2 = b + v$$

$$g_3 = c + w \text{ und}$$

3 $$\overline{g}_1 = |a| + u$$

$$\overline{g}_2 = |b| + v \text{ ~~und~~}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ und}$$

$$x_0 = \overline{g}_1(u_0\, v_0 \ldots) = |a| + u_0$$

$$y_0 = \overline{g}_2(u_0\, v_0 \ldots) = |b| + v_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$u_0\, v_0$ positive Zahlen bedeutend. Unter der Bedingung daß $a+u$, $b+v \ldots$ noch zu dem C.bereiche von $G(x\,y\,z\ldots)$ gehören, welche Bedingung sicher erfüllt ist, wenn ~~wenn~~ $|a| + |u|$, $|b| + |v| \ldots$ dem Convergenzbereiche angehören, läßt sich also $G(x\,y\,z\ldots)$ transformiren in eine Potenzreihe von $u, v, w,$ und innerhalb eines bestimmten Bereiches ist

4 $$G(x\,y\,z) = G_1(u, v, w \ldots)$$

Setze ich nun $u = x - a$

$x = y - b$ wegen 1, so habe ich

$$G(x\,y\,z\ldots) = G_1(x-a,\; y-b,\; z-c\ldots) \qquad 5$$

Wenn also $a, b, c\ldots$ dem Convergenzkreise gehört von $G(x\,y\,z\ldots)$, so läßt sich $G(x\,y\,z\ldots)$ transformiren in eine Potenzreihe von $x-a,\; y-b,\; z-c,\ldots$ wenn

$$|a| + |x-a|,\; |b| + |y-b|,\; |z| + |z-c|,\ldots \qquad 6$$

Dem Convergenzkreise von $G(x\,y\,z\ldots)$ gehören.

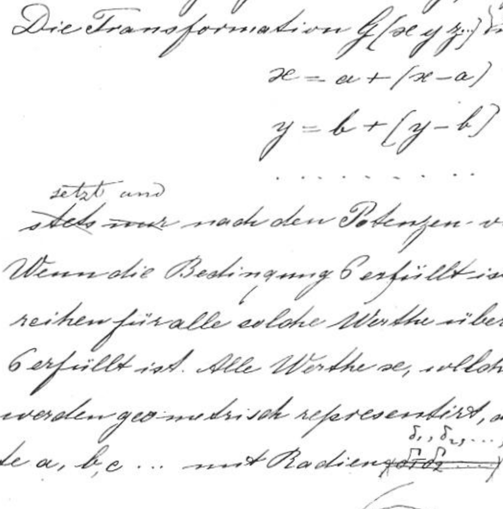
Die Transformation $G(x\,y\,z\ldots)$ geschieht indem man ~~kurz~~ kurz

$$x = a + (x-a)$$

$$y = b + (y-b)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

~~stets nur~~ setzt und nach den Potenzen von $(x-a), (y-b)\ldots$ ordnet. Wenn die Bedingung 6 erfüllt ist, so stimmen bei Potenzreihen für alle solche Werthe überein, für welche die Beding. 6 erfüllt ist. Alle Werthe x, welche die Bedingung erfüllen werden geometrisch repräsentirt, durch Kreise um die Punkte $a, b, c\ldots$ mit Radien ~~$\delta\delta$~~ $\delta_1, \delta_2, \ldots$ welche Kreise vollständig dem Convergenzbereich von $G(x\,y\,z\ldots)$ gehören. Daß alle Punkte dieser Kreise die Bedingung 6 erfüllen, folgt aus folgender Betrachtung.



Da $a\, b\, c\ldots$ innerhalb des Convergenzbereiches $G(x\,y\ldots)$ liegen so kann man noch $\overline{oa}, \overline{ob}, \overline{oc},\ldots$ vergrößern bis nach

$a_2\ b_2\ c_2 \ldots$ und dann ist für jedes $x\,y$ innerhalb des kleinen Kreises $|x_0| < |a_{2}0|,\ |y_0| < |b_{2}0| \ldots$ ~~$|x_0| < |a_{2}0|,\ |y_0| < |b_{2}0|$~~ … Ob die Uebereinstimmung beider Reihen noch weiter stattfindet, ~~unter~~ entscheidet der obige Satz nicht, er zeigt nur, daß für alle diese Werthe die Uebereinstimmung sicher Statt hat. Um eine bequeme Schreibweise zu haben, bezeichnen wir eine Reihe die nach Potenzen von $x-a,\ y-b \ldots$ steigt, mit $G(x\,y\,z \ldots | a\,b\,c \ldots)$. Wir haben also aus ~~auch~~

$G(x\,y\,z \ldots)$ hergeleitet $G_1(x\,y\,z | a\,b\,c \ldots)$ und für bestimmte Werthe von $x\,y\,z$ ist

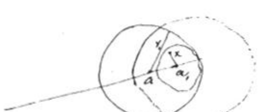
7 $$G(x\,y\,z \ldots) = G_1(x\,y\,z \ldots | a\,b\,c \ldots)$$

Mit der Reihe $G_1(x\,y\,z \ldots | a\,b\,c \ldots)$ koennen wir dasselbe vornehmen, indem wir setzen

8 $$\begin{aligned} x-a &= (a_1-a)+(x-a_1) = (a_1-a)+u \\ y-b &= (b_1-b)+(y-b_1) = (b_1-b)+v \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und dann haben wir

9 $$G_1(x-a,\ y-b, \ldots) = G_1((a_1-a)+u,\ (b_1-b)+v, \ldots)$$



für alle Werthe von u, welche innerhalb des Convergenzkreises um $a\,b\,c \ldots$ liegen. Wenn wir annehmen, daß die Reihe $G_1(x-a,\ y-b \ldots)$ convergent ist für alle Werthsysteme, für welche

$|x-a| < \cancel{\rho}\, r_1, \ |y-b| < \cancel{\rho}\, r_2 \cdots$ so muss

$|a_1 - a| + |x - a_1| < \cancel{\rho}\, r_1$

$|b_1 - b| + |y - b_1| < \cancel{\rho}\, r_2$

. . . . diese Bedingungen sind aber erfüllt wenn ich annehme $\overline{a a_1} + \overline{x a_1} < \cancel{\rho}\, r_1$ u. s. w.

D. h. innerhalb eines um $a, b, c, \ldots$ beschriebenen Kreises, welcher vollständig in dem Convergenzbereiche von $G_1(x\,y \ldots | a\,b_\cdot)$ liegt, ist:

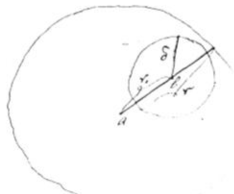
$$G_1(x-a, y-b, \ldots) = G_1\big((a_1-a)+u, (b_1-b)+v \ldots\big)$$
$$= \quad G_2(u, v, w \ldots) = G_2(x-a_1, y-b_1 \ldots) \text{ oder}$$
$$G_1(x\,y\,z \ldots | a\,b\,c \ldots) = G_2(x\,y\,z \ldots | a_1\,b_1\,c_1 \ldots) \qquad 10$$

Das Resultat ist also: Wenn ich eine in der Umgebung einer Stelle definirte Function $G_1(x\,y \ldots | a\,b\,c \ldots)$ habe, und nehme innerhalb dieser Umgebung eine Stelle $a, b, c_1 \ldots$ so kann ich die ursprüngliche Potenzreihe in eine andere ~~umtauschen~~ umwandeln, welche mit der ersteren übereinstimmt für eine gewisse Umgebung von $a, b, c_1 \ldots$

Diese Sätze kann man nun nach zwei Richtungen hin verfolgen. Nach der einen Richtung hin werden sie uns zu den Begriffen und Principien der Differential- und Integralrechnung führen, nach der andern werden sie uns den Begriff einer analytischen Function erweitern.

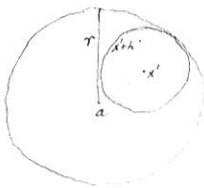
Principien der Differentialrechnung.

Wenn wir im Folgenden von ganzen Functionen sprechen, so verstehen wir auch darunter unendliche Potenzreihen. Es sei $G(x|a)$ eine ganze Function, so hat sie innerhalb eines um a beschriebenen Kreises, innerhalb des Convergenzkreises ihren Sinn. Nun wählen wir innerhalb des Convergenzbereiches einen Punkt b, so können wir die Function $G(x|a)$ umwandeln in eine andere $G_1(x|b)$. Beide Reihen stimmen innerhalb eines bestimmten Bereiches überein, und zwar haben wir gefunden, daß diese



Uebereinstimmung stattfindet für alle Werthe von x in der Umgebung von b, für welche $|x-b| < r - r_1$. In diesem Bereiche werden beide Reihen identisch dieselben Werthe liefern; d. h. es is die eine Reihe $G_1(x|b)$ nur eine andere Darstellung von $G(x|a)$, für die betreffende Umgebung. Dasselbe gilt für beliebig viele Variablen $x\, y\, z \dots$ Es wird sich später zeigen, daß die neue abgeleitete Reihe einen Convergenzkreis hat, der im Allgemeinen auch solche Werthe von $x\, y\, z$ enthält, für welche die erste Reihe divergent ist, also überhaupt keinen Sinn hat. Man wird alsdann die

2te Reihe als Fortsetzung der durch die 1te Reihe definirten Function ansehen können. Um nun die Principien der Differentialrechnung zu entwickeln, bleiben wir bei einer Variablen stehen. Es sei $G(x|a)$ eine beliebige ganze Function und wir legen dem x einen bestimmten im Convergenzkreise liegenden, sonst beliebigen Werth $x = x'$ bei, und bringen x auf die Form $x = x' + h$, wobei h so gewählt werden muss, dass ~~auch~~ noch $x' + h$ innerhalb des Convergenzkreises von $G(x|a)$ liegt, was ja immer möglich ist. Alsdann läßt $G(x|a)$ umwandeln in eine Reihe $G_1(x|x')$



d.h. in eine Reihe, die nach Potenzen von $x - x' = h$ fortschreitet. Für alle Werthe von x, wofür $|x - x'| + |x' - a| = |x' - a| + |h| < r$ werden beide Reihen übereinstimmen. Wir erhalten somit unter der obigen Bedingung, $G(x|a) = G(x' + h|a) =$ einer Potenzreihe von h. Denn wenn das allgemeine Glied von $G(x|a)$ gleich ist $c_\alpha x^\alpha$, so haben wir hier für $x = x' + h$ zu setzen und bekommen $c_\alpha (x' + h)^\alpha$; dies wird sich aber nach den allgemeinen Multiplicationssätzen darstellen lassen als Potenzreihe von x', h, fassen wir nun alle Glieder in $\sum_\alpha c_\alpha (x' + h)^\alpha$ die dasselbe h haben, so bekommen wir eine Potenzreihe von h, wobei jeder Coefficient von h wiederum eine Potenzreihe von $x' - a$ sein wird. Wir können also setzen

$$G(x' + h|a) = G(x'|a) + G_1(x'|a) \cdot h + G_2(x'|a)\, h^2 + G_3(x'|a)\, h^3 + \dots \quad 1$$

Es handelt sich nun um die Bedeutung der Coefficienten $G_1\, G_2 \ldots$; zunächst ist klar, daß sich jeder derselben wirklich darstellen. So erhalten wir z. B. für das allgemeine Glied von $G_1(x'|a)$, $\mu c_\mu (x'-a)^{\mu-1}$ also

2 $$G_1(x'|a) = \sum \mu\, c_\mu (x'-a)^{\mu-1} = \sum (\mu+1) c_{\mu+1} (x'-a)^\mu$$

Da dies für jedes x innerhalb des Convergenzbereiches gilt, so haben wir für jedes x innerhalb des C. bereiches

3 $$G_1(x|a) = \sum (\mu+1)\, c_{\mu+1} (x-a)^\mu$$

Nun können wir die Formel 1 auch so umwandeln

$$G(x'+h|a) - G(x'|a) = G_1(x'|a)h + G_2(x'|a)h^2 + \ldots$$

4 $$= G_1(x'|a)h + h\{G_2(x'|a)h + G_3(x'|a)h^2 + \ldots$$

Nun stellt die linke Seite von 4 die Werthänderung von $G(x'|a)$ wenn man von x' zu $x'+h$ übergeht, die rechte Seite, welche dieselbe Aenderung darstellt, ist in 2 Theile getheilt, den einen, welcher proportional dem h wächst, und einen andern der gleich ist h multiplicirt mit einer von h abhängigen g. Function. Diese Aenderung auf die obige Weise in 2 Theile zu sondern, wird man schon dann veranlaßt, wenn man die Werthaenderung der ganzen Function $G(x'|a)$ für kleine Werthe von h bezeichnen will, wobei es sich zeigt, daß besonders das 1te Glied in 4, nämlich $G_1(x'|a)h$ dem Werthe nach überwiegt. Um das letztere zu zeigen, betrachten wir die ganze Function

5 $$b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 + \ldots = h(b_1 + b_2 h + b_3 h^2 + \ldots)$$

Wenn es nun einen Werth für h, einen positiven realen Werth $h = h_0$ gibt, wofür alle Glieder der Reihe endlich sind, was wegen der Convergenz von 5 nöthig ist, so ist die Reihe für alle h, deren absoluter Betrag kleiner ist, als h_0 sicher convergent, und dann haben wir, wenn wir mit B die positive Grenze bezeichnen innerhalb welcher alle Glieder der Reihe, ihrem absoluten Betrage nach für $h = h_0$, liegen, so haben wir für jedes h wofür $|h| < h_0$ ist

$$\left| h\left(b_1 + b_2 h + b_3 h^2 + \dots\right)\right| < \frac{B}{1-\left|\frac{h}{h_0}\right|}\cdot h \qquad 6$$

Wenn ich nun den absoluten Betrag der Summe kleiner machen will, als eine beliebig kleine positive Grösse ε, so kann ich für $|h|$ eine Grenze δ bestimmen, so dass für jedes h, dessen absoluter Betrag kleiner ist als δ, die Summe ihrem absoluten Betrage nach $< \varepsilon$. Dann setzen wir

$$\frac{B}{1-\left|\frac{h}{h_0}\right|}\cdot|h| < \varepsilon \text{ so folgt hieraus} \qquad 7$$

$$|h| < \frac{\varepsilon}{B^{2} + \frac{\varepsilon}{h_0}}\text{. Ich kann also dann setzen} \qquad 8$$

$$\delta \leqq \frac{\varepsilon}{B + \frac{\varepsilon}{h_0}} \text{ und für alle } h \text{ wofür} \qquad 9$$

$|h| < \delta$ ist die Bedingung erfüllt, dass $\left|h\left(b_1 + b_2 h + \dots\right)\right| < \varepsilon$.

$\cancel{< \varepsilon.}$

Kehren wir zu der Reihe 4 zurück, so koennen wir nachdem wir eine beliebige positive Grösse ε angenommen haben, das h so bestimmen, dass für h wofür $|h| < \delta$;

$$\left| G_2(x|a)\, h + G_3(x|a)\, h^2 + \dots \right| < \varepsilon \qquad 10$$

Hieraus ist ersichtlich, dass man bei der ~~Rechnung~~ Berechnung von ~~$G(x'+h|a) - G(x'|a)$~~ $G(x'+h|a) - G(x'|a)$ für hinreichend kleine Werthe von h, besonders auf das Glied $G_1(x'|a)h$ zu achten hat. Um unsere Begriffe präciser auszudrücken, wollen wir zunächst die Definition der unendlich kleinen Grössen festsetzen. Eine veränderliche Grösse heisst unendlich klein, wenn es unter den Werthen, die sie annehmen kann, solche giebt, die kleiner sind, als eine beliebig kleine Grösse δ, ohne dass sie Null sind. Der letzte Zusatz ist sehr wesentlich; eine veraenderliche Grösse z. B. die alle Werthe bis zu α annimmt, wo α beliebige endliche Grösse sein mag, deren alle andern unterhalb α liegenden Werthe Null sind, ist keine unendlich kleine Grösse. Mit dem Begriff des unendlich Kleinen ist streng verbunden die Continuität des Abnehmens durch alle möglichen Stufen bis zu Null herab. Diese Definition der unendlich kleinen Grössen ist jeder metaphysischen Form entkleidet und sie reicht vollständig aus, um die Begriffe der Differentialrechnung mathematisch zu präcisiren. Bei unsern Reihen $G(x'+h|a)$ ist h eine unendlich kleine Grösse, da sie ja unbeschränkt veränderlich ist, also durch alle Stufen abnehmen kann.

Nun steht mit einer jeden unendlich kleinen Grösse h eine andere k im Zusammenhange; so dass, wenn man für $|k|$ eine beliebig kleine, positive Grösse ε annimmt, sodass $|k|<\varepsilon$, es immer Werthe von h gibt, für welche $|h|<\delta$, wo δ ebenfalls eine beliebige kleine positive Grösse bedeutet. In diesem Falle sagen wir von den Grössen k u. h, sie werden gleichzeitig unendlich klein. Dies ist der wesentlichste ~~veränderlichste~~ Begriff der Differentialrechnung. Es wird sich später zeigen, dass bei den Potenzreihen die Beziehung von k u. h wechselseitig ist, so dass nicht nur k gleichzeitig mit h, aber auch umgekehrt h gleichzeitig mit k unendlich klein wird. Wir haben bis jetzt angenommen, dass mit h ein Werth in solchem Zusammenhange steht, sodass, wenn $|k|<\varepsilon$ ~~$|k|<\varepsilon$~~ angenommen wird, es möglich ist für h eine Grenze δ so zu finden, dass $|h|<\delta$ ist, wenn $|k|<\varepsilon$. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass mit einem h mehrere k in den obigen Zusammenhange stehen, wie z. B. $k = \pm\sqrt{h}$; beide Grössen werden aber gleichzeitig unendlich klein.

Unsere Function $G(x'|a)$ hat nun die Eigenschaft, dass die Veränderung

$$G(x'+h|a) - G(x'|a) = k$$ gleichzeitig mit h unendlich klein wird. Wir sagen dann, einer unendlich kleinen Änderung des Argumentes entspricht eine unendlich kleine Aenderung der Function. 11

Wenn eine Grösse k gleichzeitig mit h unendlich klein wird so lässt sie sich auf die Form bringen

$$k = l \cdot h.$$

Nun ist möglich, daß auch l unendlich klein wird. gleichzeitig mit h, dann wird auch $\frac{k}{h} = l$ gleichzeitig mit h unendlich klein, alsdann sagen wir, es wird k unendlich klein im Verhältniß zu h. Um den nothwendigen Begriff des unendlich kleinen im Verhältniß zum unendlich kleinen zu entwickeln ist der Zusatz bei der Definition des unendlich kleinen nöthig. Denn wären alle Werthe von h deren absoluter Betrag kleiner ist als δ sämmtlich Null, so könnten wir von dem Verhältniß $\frac{k}{h}$ gar nicht sprechen. Bei der Reihe 4 ist der 2te abgesonderte Theil

12 $$h\left\{G_2(x'|a)h + \dots\right\}$$ eine unendlich kleine Größe im Verhältniß zu h.

Auch hieraus sehen wir die Nothwendigkeit der Theilung der Aenderung $G(x+h|a) - G(x'|a)$ in 2 Theile, von denen erster unendlich klein ist, so daß er gleich ist $c \cdot h$ wo c nicht mehr unendlich klein ist und deren 2ter unendlich klein ist im Verhältniß zu h. Nun wollen wir zeigen, daß die Trennung einer Größe k in 2 Theile von denen einer unendlich klein wird im Verhältniß zu h, nur auf eine einzige Weise möglich ist. Nehmen wir überhaupt an

13 $$k = c \cdot h + h_1 h$$ wo c nicht mehr unendlich klein, h_1 aber gleichzeitig mit h unendlich

klein wird. Nehmen wir nun ferner an, es sei eine andere Zerlegung möglich

$$k = c'h + h_1'h \quad \text{wo } c' \text{ nicht unendlich klein,} \qquad 14$$

h_1' aber mit h unendlich klein ist. Durch Subtraction erhalten wir nun

$$(c-c')h = (h_1 - h_1')h \qquad 15$$

Nun kann ich $|h| < \delta$ nehmen, ohne daß es Null ist, ich kann somit durch h dividiren und erhalte

$$c - c' = h_1 - h_1' \qquad 16$$

Nun kann ich $|h|$ so klein annehmen, daß

$$|h_1 - h_1'| < \varepsilon \text{ ist.}$$

Also kann ich das h so klein wählen, daß

$$|c - c'| < \varepsilon \qquad 17$$

Nun ist das c u c' von h unabhängig, da ja alle Größen, welche noch von h abhängig waren, in h_1 u h_1' zusammengefaßt sind. Da sich also das c u c' mit h nicht ändert, so kann die Ungleichung 17 nur dann bestehen, wenn

$c - c' = 0$ ist, d. h. es muß

$$c = c' \qquad 18$$

Es ist also die Zerlegung der Aenderung von $G(x/a)$ auf die obige Weise, nur auf eine einzige Art möglich, so daß $G_1(x/a) \cdot h$ fest definirt ist. Der Bedeutung von $G_1(x/a) \cdot h$ wegen, scheidet man diesen Theil von der ganzen Reihe, in 4 ab und unterzieht ihn einer genaueren

Untersuchung; und so nun wie die linke Seite die vollständige Aenderung von $G(x'/a)$ darstellt, stellt uns dieser Theil den für kleines h vor allem überwiegenden Theil der ganzen Aenderung. Man nent nun diesen Theil der ganzen Aenderung $G_1(x'/a)h$, die Differentialänderung oder das Differential. Man setzt dann um die Aenderung von x' anzudeuten $h = dx'$ und so wie man die vollständige Aenderung $G(x'+h/a) - G(x'/a) = \Delta G(x'/a)$ setzt, setzt man auch um das Differential zu bezeichnen

19 $$dG(x'/a) = G_1(x'/a)\,dx'.$$

Nun war die Größe x' vollständig willkürlich. Wir können also allgemein innerhalb des Convergenzbereiches von $G(x/a)$ setzen

20 $$dG(x/a) = G_1(x/a)\,dx$$

Die Größe $G_1(x/a)$ nennt man den Differentialcoefficienten. Nun ist wegen 20 auch

21 $$\frac{dG(x/a)}{dx} = G_1(x/a)$$

linkerhand steht nun der Quotient zweier Differentialen, $dG(x/a)$, u. dx, (da ja dx selbst die Aenderung von x und sogar die vollständige Aenderung), aus diesem Grunde nennt man $G_1(x/a) = \frac{dG(x/a)}{dx}$ auch den Differentialquotienten.

Wir haben also hier den Begriff der Differentialrechnung aus ganzen Functionen entwickelt und nun mit der ~~Concretisirung~~ Erweiterung des Begriffes der Functionen werden sich die ferneren Begriffe der Differentialrechnung entwickeln. Dies ist nach Prof. Weyerstrass der allein richtige Weg. Denn der Begriff des Differentialquotienten läßt sich anfangs nur an speciellen Beispielen zeigen; man kann nie nachweisen, dass allgemein die Grenze, die man als Differentialquotienten definirt, existirt. Auch kann man nicht ohne weiteres auf die Existenz der höheren Differentialquotienten einer Function kommen, da man ja noch nicht die Existenz des 1ten Differentialquotienten nachweisen kann. Man wollte die Existenz desselben aus dem Begriffe der Stetigkeit der Functionen herleiten, man kannte aber schon längst Beispiele für welche es sich ergab, dass obgleich die Function vollständig stetig ist, sie an bestimmten Stellen entweder einen ∞ Differentialquotienten, oder auch keinen haben. So ist z. B. die Function $\sqrt[3]{x}$ für alle reellen Werthe stetig, und für $x = 0$ liefert sie den ganz bestimmten Werth 0; der Differentialquotient aber ist für diese Stelle ∞; denn lassen wir $x = 0$ wachsen ~~und~~ um h, so bekommen wir als den Diff.-Quotienten

$\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$ und dies kann grösser gemacht werden, als jede beliebig grosse angebbare Zahl. Die Function ferner $x \sin x$ welche für alle Werthe von x stetig ist

„und für $x = 0$ den Werth 0 annimmt, da ja sin. stets zwi-
„schen -1 u. $+1$ enthalten ist, hat für die Stelle $x = 0$ keinen
„Differentialquotienten. Denn nehme ich h, so bekomme ich

$$\frac{h \cdot \sin\frac{1}{h}}{h} = \sin\frac{1}{h}$$ wenn nun h unend-
„lich klein wird, nähert sich diese Function keinem
„bestimmten Werthe. Die Function $x \sin\frac{1}{x}$ ist überall
„stetig, hat überall einen Differentialquotienten mit
„Ausnahme $x = 0$. Darauf achtend hat man den Satz
„aufgestellt, daſs jede stetige eindeutige Function von
„x stets einen Differentialquotienten hat mit Aus-
„nahme einiger Stellen.
„Den Beweis dieses Satzes hat man mittelst der Vor-
„aussetzung geliefert, daſs jede Curve eine Tangente hat;
„die Voraussetzung schlieſst aber schon die Existenz des
„Differentialquotienten in sich. Man kann sogar stetige
„Curven angeben, die unendlich vielen Punkten (die
„alle sogar in einem endlichen Intervalle liegen kön-
„nen) die Eigenschaft hat, daſs an diesem Punkte keine
„Tangente möglich ist, das heiſst, daſs es unbestimmt ist,
„welche Linie die Tangente ist. Hiermit würde also die
„Falschheit des Beweises vollständig dargethan. Man
„hat auch aus der Mechanik Beweise für die Existenz
„des Diff. quotienten hergeholt, indem man so rai-
„sonnirte. Denkt man sich x als die Zeit, y als den

Weg, so stellt $\frac{dy}{dx}$ die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt auf der Bahn bewegt; da nun die Geschwindigkeit des Punktes immer bestimmt ist, so ist auch hiermit die Existenz des Diff. quotienten nachgewiesen. Es ist aber nun Frage, ob wirklich der Punkt in jeder Stelle seiner Bahn eine bestimmte Geschwindigkeit hat, wenn die Bahn beliebig ist?

Später hat ~~meist~~ zuerst Ampère einen analytischen Beweis dafür gegeben; Duhamel und Bertrand haben ihn mit einigen Modificationen aufgenommen. Alle diese Beweise sind aber fehlerhaft, denn sie setzen voraus, daß man das Intervall für das Argument so theilen kann, daß in jedem Theile des Intervalles die Function nur wächst oder fällt. Man kann aber solche Functionen bilden, die in jedem beliebig kleinen Intervalle wachsen und fallen, obgleich sie vollständig stetig sind. Riemann hat in seinen Vorlesungen eine Function angegeben, die obgleich sie stetig ist, doch keinen Differentialquotienten haben soll.

Diese Function ist

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

Riemann gab aber dafür keinen Beweis, und es ist nicht sicher, ob die Function überhaupt keine Differentialquotienten zulasse, oder ob es an unendlich vielen Stellen

„ der Fall sei ist.
Weierstraß hat nun eine sehr einfache stetige Function aufgestellt, die überhaupt keinen Differentialquotienten hat. Diese Function ist die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n x)\pi$$ wo $b<1$ vorausgesetzt wird,

a eine positive ganze (ungerade) Zahl. Diese Reihe ist eine stetige Function von x, sie ist endlich, daß jedes Glied kleiner oder höchstens gleich ist, dem entsprechenden aus der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$, welche letztere wegen $b<1$ convergent ist. In dem Falle wenn man

$a\,b > 1$ annimmt,

hat die obige Reihe keinen Differentialquotienten. Man kann nämlich von ihr leicht nachweisen, daß wenn ich für ein beliebiges $x = x_0$, den Ausdruck $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ bilde und ihn für unendlich kleine Werthe h ~~bezeichnen~~ berechnen will, so zeigt es sich daß ich $|h|<\delta$ so finden kann, daß der Differentialquotient sich der Grenze $+\infty$ und solche Werthe $|h|<\delta$ für welche er sich der Grenze $-\infty$ beliebig sehr nähert. Die Grenze für $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ist ~~aus~~ an keiner Stelle bestimmt, d.h. die Function hat keinen Differentialquotienten. Auf den Beweis des Obigen kommen wir noch später.„ Hier möge „ es ausreichen das Beispiel erwähnt zu haben, woraus es „ klar ist, daß alle Beweise für die Existenz des Differen-

„tialquotienten, die auf der Stetigkeit beruhen falsch sind; Die
„logischen Fehler derselben stecken, aber manchmal sehr tief,
„so dass man sie auf den ersten Blick nicht herausfinden kann.
„Es bleibt somit nur der Weg der Induction, um die Existenz
„des Differentialquotienten nachzuweisen. Man muss
„mit den einfachsten Functionen anfangen, für sie die Diffe-
„rentialquotienten bilden und mit der Erweiterung des Be-
„griffes einer Function ~~muss~~ muss man die Begriffe der Differen-
„tialrechnung erweitern. Dies ist der pädagogische und wissen-
„schaftlich allein richtige Weg.
„Wir wollen nun zeigen, dass die oben erwähnte Function

$$f(x) = \sum_0^\infty b^n \cos(a^n x)\pi.$$

eine stetige Function ist, die keinen Differentialquoti-
enten hat. Wir setzen von ihr voraus, dass b eine positive
Zahl ist, die kleiner ist als 1, a eine ganze positive ungera-
de Zahl ist. Um die Existenz einer Function nachzuweisen
die keinen Differentialcoefficienten hat, reicht es aus,
wenn man zeigt, dass sie für reelle Werthe von x keinen
hat. Wenn wir nur reelle Werthe für x zulassen, ha-
ben wir nur die geometrische Definition von ~~sin x~~ sin x,
cos x nöthig, wobei bekannt ist, dass sin x u. cos x nur
die Werthe zwischen -1 u. $+1$ annehmen kann, und dass
ferner stets der Bogen x grösser ist als sin x.
Nun ist zunächst klar, dass die Funktion $f(x)$ unter

der Voraussetzung, daß $b<1$ ist, einen endlichen Werth hat. Denn betrachten wir das allgemeine Glied der Reihe, so ist

$b^n \cos(a^n x)\pi$ dem absoluten Betrage nach kleiner oder höchstens gleich zu b^n, also sicher

23. $$\sum_{0\,n}^{\infty} b^n \cos(a^n x)\pi \leqq \sum_{0\,n}^{\infty} b^n$$

Nun convergirt aber letztere Reihe, da ja $b<1$, folglich hat auch $f(x)$ für jeden Werth von x einen endlichen Werth. Nun zeigen wir, daß diese Function eine stetige Function ist; d.h. daß man nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ε, für h stets eine Grenze δ angeben kann, so daß für Werthe von $h<\delta$, für jedes beliebige x ~~der~~ die Differenz

24 $$f(x+h)-f(x)<\varepsilon$$

wobei wir immer den absoluten Betrag verstehen wollen. Wir theilen das ε in 2 Theile

25 $$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

Nun haben wir für die Differenz

26 $$f(x+h)-f(x)=\sum_{0\,n}^{\infty} b^n\left\{\cos(a^n(x+h))\pi-\cos(a^n x)\pi\right\}$$

Diese Differenz können wir aber so in 2 Theile theilen, daß der 2te Theil für jeden Werth von x kleiner ist als ε_2.

Wir setzen nämlich $\cos(a^n x)\pi$

27 $$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \sum_{0\,n}^{m-1} b^n\left[\cos\{a^n(x+h)\}\pi-\cos(a^n x)\pi\right] \\ &\quad+\sum_{m\,n}^{\infty} b^n\left[\cos\{a^n(x+h)\}\pi-\cos(a^n x)\pi\right] \\ &= \sum_{0\,n}^{m-1} b^n\left[\cos\{a^n(x+h)\}\pi-\cos(a^n x)\pi\right] \end{aligned}$$

$$+ \sum_0^\infty{}_n\, b^{m+n}\left[\cos\{a^{m+n}(x+h)\}\pi - \cos(a^{m+n}x)\pi\right]$$

Nun ist dem absoluten Betrage nach

$$\left.\begin{matrix}\cos\{a^{m+n}(x+h)\}\pi\\ \cos\{a^{m+n}x\}\pi\end{matrix}\right\} \leq 1,$$ also die Differenz

$$|\cos\{a^{m+n}(x+h)\pi\} - \cos\{a^{m+n}x\}\pi| \leq 2,$$ folglich ist

$$\sum_0^\infty{}_n\, b^{m+n}\left[\cos\{a^{m+n}(x+h)\}\pi - \cos(a^{m+n}x)\pi\right] < 2b^m\sum_0^\infty{}_n\, b^n$$

also

$$\sum_0^\infty{}_n\, b^{m+n}\left[\cos\{a^{m+n}(x+h)\}\pi - \cos(a^{m+n}x)\pi\right] < \frac{2b^m}{1-b} \qquad 28$$

Nun nimmt b^m mit wachsendem m stets ab, sodass ist immer* das m so gross nehmen kann, dass

$$\frac{2b^m}{1-b} < \varepsilon_2 \qquad 29$$

d.h. der 2te Theil kann für beliebiges x kleiner gemacht werden als ε_2, wenn man nur m hinreichend gross annehme. Nun betrachten wir den 1ten Theil von 27, welcher aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht. Das allgemeine Glied kann auf die Form gebracht werden ±(

$$2b^n a^n \frac{h}{2}\pi, \qquad 30$$

also die Summe von $x = 0 \ldots m-1$ kleiner als

$h\pi\sum_0^{m-1} a^n b^n$ und da $\pi\sum_0^{m-1} a^n b^n$ einen endlichen Werth hat, so kann ich immer das $h < \delta$ so annehmen, dass diese Summe kleiner wird als ε_1. Man kann also wirklich für h eine Grösse δ so bestimmen, dass für $h < \delta$ die Differenz

$f(x+h) - f(x)$ kleiner ist als $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ oder als ε.

Demnach ist $f(x)$ eine stetige Function, denn unendlich

$-2b^n \sin\{a^n(x+\frac{h}{2})\}\pi \cdot \sin(a^n\frac{h}{2}\pi)$. Nun ist jedes dieser Glieder seinem absoluten Betrage nach kleiner als kleinen Aenderungen von $\{x\}$ entsprechen unendlich kleine Aenderungen von $f(x)$.

Nun gehen wir dazu über, zu zeigen, daß die Function $f(x)$ trotz ihrer Stetigkeit keinen Differentialcoefficienten hat. Wenn eine Function für einen Werth $x = x_0$ den Diff. coefficienten haben soll, so heißt dies, es muß eine von h unabhängige Größe c, geben, so daß man hat.

31 $$f(x_0+h) - f(x_0) = ch + hh_1, \text{ wo}$$

h_1 gleichzeitig mit h unendlich klein wird, oder in andern Worten es muß für jedes $x = x_0$ eine ganz bestimmte von h unabhängige Größe c geben, so daß die Differenz zwischen der totalen Zunahme der Function und der Größe ch beliebig klein gemacht werden können, wenn man nur h hinreichend klein nimmt. Oder auch wenn ich $x_0+h = {}$ $= x'$ nehme, so muß.

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x'-x_0} = c + h_1,$$ wo c eine bestimmte Größe ist, die sich von dem Quotienten ~~nur~~ um eine unendlich kleine Größe unterscheidet, wenn ich x' hinreichend nahe an x_0 annehme. Wenn ich nun von unserer Function nachweisen kann, daß es in der Nähe eines jeden x_0 Werthe x' gibt, für welche der Quotient beliebig groß positiv und solche x', für welche er beliebig groß negativ gemacht werden kann, so wird die Function $f(x)$ keinen Diff. coef-

ficienten haben, denn es wird keine bestimmte von h unabhängige Größe c geben, für welche die Gleichung 31 bestände.

Wir haben wegen 27

$$f(x')-f(x_0)=\sum_0^{m-1}{}_n\, b^n\left[\cos(a^n x')\pi-\cos(a^n x_0)\pi\right] \qquad 32$$
$$+\sum_0^{\infty}{}_n\, b^{m+n}\left[\cos(a^{m+n} x')\pi-\cos(a^{m+n} x_0)\pi\right]$$

Denken wir uns nun die positive ganze Zahl a als Grundzahl eines Zahlsystems, so kann ich jedes x_0 auf die Form bringen $x_0=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{a}+\frac{\alpha_2}{a^2}+\frac{\alpha_3}{a^3}+\dots$

$$x_0=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{a}+\frac{\alpha_2}{a^2}+\frac{\alpha_3}{a^3}+\dots \qquad 33$$

wo die α's ganze positive oder negative Zahlen sind, ihrem absoluten Betrage nach höchstens $=\frac{1}{2}(a-1)$.

Dann setzen wir

$$a^n x_0=\beta_n+x_n \qquad 34$$

wo β_n die größte in $a^n x_0$ enthaltene ganze Zahl ist, und $x_n<1$. Ja wir können dies so einrichten, daß $|x_n|<\frac{1}{2}$, denn wäre $x_n>\frac{1}{2}$, so können wir doch setzen

$$a^n x_0=\beta_n+1+(x_n-1), \text{ wo dann } |x_n-1|<\tfrac{1}{2}.$$

Wir können also stets die Zerlegung so bewirken, daß x_n zwischen $-\frac{1}{2}$ u. $\frac{1}{2}$ liegt. Bestimme ich nun die Zahl ~~B_{n+1}~~ β_{n+1}, so daß

$$a^{n+1}x_0=\beta_{n+1}+x_{n+1}, \text{ wo } |x_{n+1}|\leq\tfrac{1}{2} \qquad 35$$

multiplicieren wir 34 mit a und vergleichen mit 35, so folgt

$$\beta_{n+1}+x_{n+1}=a\,x_n+a\,\beta_n \qquad 36$$

Setzen wir nun

37 $\beta_{n+1} - a\beta_n = \alpha_n$ so sehen wir zunächst, daß α_n eine ganze Zahl ist; nun folgt aber weiter ~~in~~ aus 36,

$$x_n = \frac{\alpha_n + x_{n+1}}{a}$$

und $\alpha_n = a\,x_n - x_{n+1}$. Nun erhält offenbar α_n seinen größten Werth, wenn x_n den möglichst großen, x_{n+1} aber den möglichst kleinen Werth hat, d.h. für

$$x_n = \frac{1}{2}$$

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}$$, dann ist aber

38 $\alpha_n = \frac{1}{2}(a-1)$, der möglichst niedrige Werth von α_n ergibt sich $\alpha_n = -\frac{1}{2}(a-1)$. Also die α's sind ganze positive oder negative Zahlen ihrem absoluten Betrage nach nie größer als $\frac{1}{2}(a-1)$.

Durch diese Formeln kann man das x_n und dann α_n berechnen. Wenden wir diese Formeln wiederholt an, so kommen wir zu der Formel

39 $$x_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \frac{\alpha_3}{a^3} + \dots$$

Nun sei

40 $$x_0 = \frac{\beta_m + x_m}{a^m}$$ und

41 $$x' = \frac{\beta_m + 1}{a^m}$$, dann ist

42 $$x' - x_0 = \frac{1 - x_m}{a^m}$$ also $x' - x_0$ eine positive Größe.

Der möglichst große Werth der rechten Seite ist nun für $x_m = -\frac{1}{2}$, dann ist der möglichst große Werth von $x' - x_0 = \frac{3}{2a^m}$, nun kann $\frac{3}{2a^m}$ durch Vergrösserung von m beliebig klein gemacht werden, so daß die Annahme 40, 41, eine solche ist, dass das x' dem x_0 beliebig nahe gebracht werden kann. Nun kann man den 1ten Theil von 32 auf die Form bringen:

$$-2\sum_{0\ n}^{m-1} b^n \sin\left(a^n \frac{x_0'+x_0}{2}\pi\right)\sin\left(a^n \frac{x'-x_0}{2}\pi\right) \qquad 43$$

Nun machen wir die Voraussetzung, dass a eine ungerade Zahl ist; es ist wegen 41

$$a^{m+n}x' = a^n\beta_m + a^n \qquad 44$$

Die rechte Seite hiervon, $a^n\beta_m + a^n$, ist gerade oder ungerade je nachdem $\beta_m + 1$ gerade oder ungerade ist, d. h.

$$a^{m+n}x' \equiv \beta_m + 1 \pmod 2 \qquad 45$$

Es wird somit $\cos(a^{m+n}x')\pi$, da $a^{m+n}x'$ eine ganze Zahl ist, $+1$ oder -1, sein, je nachdem $\beta_m + 1$ gerade oder ungerade ist. Es ist also $\cos(a^{m+n}x')\pi = -(-1)^{\beta_m}$ 46

Ferner ist

$$a^{m+n}x_0 = a^n\beta_m + a^n x_m \text{, also}$$

$$\cos(a^{m+n}x_0)\pi = \cos(a^n\beta_m + a^n x_m)\pi = (-1)^{\beta_m}\cos(a^n x_m)\pi \qquad 47$$

Wir erhalten also

$$\sum_{0\ n}^{\infty} b^{m+n}\left[\cos(a^{m+n}x')\pi - \cos(a^{m+n}x_0)\pi\right] \qquad 48$$

$$= -(-1)^{\beta_m} b^m \sum_0^\infty b^n\left\{1+\cos(a^n x_m)\pi\right\}$$

Demnach haben wir

$$f(x') - f(x_0)$$

$$= -2\sum_{0\ n}^{m-1} b^n \sin\left(a^n \frac{x'+x_0}{2}\pi\right)\sin\left(a^n \frac{x'-x_0}{2}\pi\right) \qquad 49$$

$$+(-1)^{\beta_m+1} b^m \sum_0^\infty b^n\left\{1+\cos(a^n x_m)\pi\right\}.$$

Um nun auf den Ausdruck für $\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$ zu kommen, dividiren wir das allgemeine Glied in der ersten Reihe von 49 durch $x' - x_0$ und schreiben es in der Form

50 $$\pi (ab)^n \frac{\sin\left(a^n \frac{x'-x_0}{2}\pi\right)}{\left(a^n \frac{x'-x_0}{2}\pi\right)} \sin\left(a^n \frac{x'+x_0}{2}\pi\right)$$

der absolute Betrag von diesem Gliede ist kleiner (oder für einige x', x_0 höchstens gleich) als $\pi (ab)^n$, so daß die ganze 1te Summe ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als $\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \pi . \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} < \pi \frac{(ab)^m}{ab-1}$

Wir koennen also setzen

$$-\frac{2}{x'-x_0} \sum_0^{m-1} b^n \sin\left(a^n \frac{x'+x_0}{2}\pi\right) \sin\left(a^n \frac{x'-x_0}{2}\pi\right) = \eta_m \pi \frac{(ab)^m}{ab-1}$$

wobei $-1 < \eta_m < 1$ und η_m nicht Null ist.

In der 2ten Summe ist nun jedes Glied positiv, also die Summe sicher größer als das 1te Glied für $n = 0$.

Da nun $x' - x_0 = \frac{1 - x_m}{a^m} < \frac{3}{2a^m}$ so wird das 2te Glied von 49 dividirt durch $x' - x_0$ dem absoluten Betrage nach größer sein.

als $\frac{2}{3} (ab)^m$, wir koennen also setzen

$$\frac{(-1)^{\beta_m+1} b^m}{x'-x_0} \sum_0^{\infty} b^n \left\{1 + \cos(a^n x_m)\pi\right\} = (-1)^{\beta_m+1} (1+\varepsilon_m) \frac{2}{3} (ab)^m$$

Also haben wir

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \eta_m \frac{\pi (ab)^m}{ab-1} + (-1)^{\beta_m+1} (1+\varepsilon_m) \frac{2}{3} (ab)^m$$

$$-1 < \eta_m < +1, \quad \eta_m \gtrless 0.$$

$$0 < \varepsilon_m < 1 \quad \text{oder auch}$$

51 $$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (1+\varepsilon_m)(-1)^{\beta_m+1} (ab)^m \left[\frac{2}{3} + \frac{\pi \eta'_m}{ab-1}\right]$$

wo nun $\eta'_m = \frac{\eta_m}{1+\varepsilon_m} (-1)^{\beta_m+1}$ also ebenfalls zwischen -1 u $+1$ liegt. Wählen wir nun das $a b$ so, daß

$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$ ist, oder $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$ 52

was immer möglich ist, so wird die Rechte von 51 mit wachsendem m stets wachsen und das Zeichen von $(-1)^{\beta m+1}$ haben. Mit wachsendem m nähert sich aber x' dem x_0. Wir können somit das x' so nahe an x_0 wählen, daß der Quotient $\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$ größer wird, als jede noch so große Zahl mit dem Vorzeichen $(-1)^{\beta m+1}$. Daraus sieht man also, daß sich $\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$ keiner endlichen Größe nähert. Wenn wir nun zweitens $x''-x_0 = -\frac{1+x_m}{a^m}$ setzen und dieselbe Rechnung ausführen, so erhalten wir

$$\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0} = -(1+\varepsilon_m)(-1)^{\beta m+1}(ab)^m\left[\frac{2}{3}+\frac{\pi\eta_m''}{ab-1}\right]$$ 53

und unter der obigen Voraussetzung $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$, wird die Rechte mit wachsendem m ohne Ende wachsen und das Vorzeichen $-(-1)^{\beta m+1}$ haben. Man kann somit das x'' an x_0 so nahe bringen, daß der Quotient $\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}$ größer wird als jede beliebig große Zahl mit dem Vorzeichen $-(-1)^{\beta m+1}$. Das Resultat ist also, man kann stets in der Nähe eines jeden x_0 solche Werthe x' finden, daß der Quotient $\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$ für hinreichend kleines $x'-x_0$ größer ist, als jede positive noch so große Zahl und ebenfalls größer wird als jede negative noch so große Zahl. Es nähert sich somit der Quotient $\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$ an keiner Stelle einem bestimmten Werthe, das heißt unsere Function $f(x)$ hat für reelle Werthe keinen Differentialcoefficienten.

Hieraus sehen wir, daß wir die Existenz des Differential-quotienten nicht voraussetzen dürfen, und die Beweise der Existenz desselben, die auf der Stetigkeit der Function beruhen, sind falsch. Denn unsere Function ist vollständig stetig, und doch hat sie keinen Diff. coefficienten. Ferner folgt aus dem Vorigen, daß man in jeder noch so kleinen Entfernung von x_0 Werthe finden kann x', x'', für welche

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$$
$$\frac{f(x'')-f(x_0)}{x_0-x''}$$

dasselbe Zeichen haben. Wenn wir uns $x' > x_0$ $x'' < 0$ annehmen, so muß

$$\left.\begin{matrix} f(x') \\ f(x'') \end{matrix}\right\} > f(x_0) \text{ oder ~~auf~~ auch}$$

$$\left.\begin{matrix} f(x') \\ f(x'') \end{matrix}\right\} < f(x_0) \text{ sein.}$$

D. h. wie klein man auch das Intervall $x'' x_0 x'$ nimmt, so gibt es darin Werthe, für welche die Function $f(x)$ steigt, als auch fällt. Dies zeigt uns die Unzulässigkeit der Beweise, die auf einer solchen Theilung des Intervalles beruhen, daß zu demselben die Function entweder nur abnimmt, oder nur zunimmt.

Wenn $f(x)$ eine eindeutig definirte Function ist, die einen Diff. coefficienten haben soll, so muss es für jedes x_0 ein h in der Umgebung von x_0 geben, so dass man setzen kann

$$f(x_0+h) - f(x_0) = ch + hh_1 \quad \text{wo } c \text{ von } h \qquad 54$$

unabhängig, h_1 aber gleichzeitig mit h unendlich klein wird. Oder wenn wir x in der Nähe von x_0 nehmen, ist

$$f(x) - f(x_0) = c(x-x_0) + (x-x_0)f(x, x_0) \quad \text{wo} \qquad 55$$

$f(x, x_0)$ gleichzeitig mit $x-x_0$ unendlich klein wird. Schreiben wir 55 in folgender Form:

$$f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + (x-x_0)f(x, x_0) \qquad 56$$

so sehen wir, dass in der Nähe von x_0 die beiden ersten Glieder hauptsächlich überwiegen, d.h. in der Nähe von x_0 ist die Function $f(x)$ vergleichbar mit einer linearen Function

$$f_1(x) = f(x_0) + c(x-x_0), \text{ so dass letztere} \qquad 57$$

die Werthe von $f(x)$ desto genauer darstellen wird, je kleiner wir $x-x_0$ nehmen. Die Function 57 ist unter den linearen Functionen von x die einzige, welche sich am meisten in der Nähe von x_0 an die Function $f(x)$ ~~an die Function 56~~ anschliesst, d.h., welche in der Nähe von x_0 genauer die Werthe von $f(x)$ angibt, als jede andere lineare Function von x. Denn nehmen wir an eine andere lineare Function

$$f_2(x) = f(x_0) + c'(x-x_0) \text{ so haben wir zunächst} \qquad 58$$

$$f(x) - f_1(x) = (x-x_0)f(x, x_0) \text{ und dann} \qquad 59$$

$$f(x) - f_2(x) = [(c-c') + f(x, x_0)](x-x_0) \qquad 60$$

das Verhältniss ~~beider Differenz~~ beider Differenzen ist aber

$\dfrac{f(x_1, x_0)}{(c - c') + f(x_1, x_0)}$ d. h. die erste Differenz ist unendlich klein im Verhältniss zu der anderen, d. h. $f_1(x)$ stellt $f(x)$ genauer dar, als $f_2(x)$ sobald c von c' verschieden ist.

Denken wir uns x als Abscisse und $f(x)$ als Ordinate einer Curve, so stellt uns

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + (x - x_0) f(x, x_0)$$

die Curve dar in der Nähe von x_0 und

$f_1(x) = f(x_0) + c(x - x_0)$ ist die Tangente an dem Punkt x_0. Die Tangente schliesst sich aber genauer an die Curve in der Nähe des Berührungspunktes, als jede andere durch denselben gehende Gerade. Kehren wir nun zu unseren ganzen Functionen zurück, und betrachten speciell ganze Function einer Veränderlichen x. Diese sei

61 $f(x) = \sum c_\lambda (x - a)^\lambda$ und sie möge für eine bestimte Umgebung von a ihre Gültigkeit haben. Nehmen wir x in dem Convergenzbereiche und dann wählen h. so dass $x + h$ noch immerhalb des Convergenzbereiches liegt, so koennen wir

62 $f(x + h) = \sum_\lambda c_\lambda (x + h - a)^\lambda$ nach Potenzen von h ordnen, da ja die Reihe $f(x + h)$ convergent ist, also beliebig in Gruppen getheilt werden kann, u. suchen dann den Coefficienten von h auf, so ist dieser nach der Definition des Differentialcoefficient, den ~~mir~~ wir mit

$\frac{d f(x)}{dx}$ oder $f'(x)$ bezeichnen, und dann finden wir

$$f'(x) = \sum_\lambda \lambda \cdot c_\lambda (x-a)^{\lambda-1} \qquad 63.$$

welche Gleichung auch für $\lambda = 0$ richtig ist, da ja sich die negative Potenz von $x-a$, weghebt. Dieser Diff. coefficient ist wiederum eine ganze Function von x, hat also innerhalb eines bestimmten Convergenzbereiches seine Gültigkeit. Sein Convergenzbereich stimmt aber offenbar mit dem von $f(x)$ überein. Denn sobald x so gewählt wird, dass $f(x)$ convergent ist, d. h. solange x innerhalb des Convergenzbereiches liegt, kann man h stets so klein annehmen, dass auch $x+h$ innerhalb desselben liegt, das heisst, die Reihe für 62 für alle $x+h$ die der Bedingung genügen, ihre Gültigkeit hat. Da nun die Reihe 62. also innerhalb desselben Convergenzbereiches convergent ist, so wird die neue Reihe, die wir durch Gruppeneintheilung erhalten, ebenfalls innerhalb desselben Convergenzbereiches convergent sein, also wird die Summe von einigen Gliedern von 62, gerade derjenigen, welche $f'(x)$ ausmachen, innerhalb desselben Convergenzbereiches endlich sein, das heisst also

$f'(x)$ ist eine ganze Function, die innerhalb desselben Convergenzbereiches convergent ist, wie $f(x)$.

Dass dies auch umgekehrt gilt, folgt ohne Weiteres daraus, dass jedes Glied von $f(x)$ kleiner ist als das entsprechende von $f'(x)$. Wir nennen auch $f'(x)$ die Ableitung der Function $f(x)$.

Wir haben also den Satz: Jede in einer gewissen Umgebung von a definirte ganze Function hat an jeder Stelle des Convergenzbereiches einen Differentialquotienten coefficienten, der selbst eine ganze Function ist, gültig für denselben Convergenzbereich wie $f(x)$.

Daraus schliessen wir sofort, dass $f'(x)$ selbst eine Ableitung hat, welche mit $f''(x)$ bezeichnet wird und die 2te Ableitung von $f(x)$ heisst. Nun hätten wir nach der Erklärung

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx, \text{ also analog}$$
$$d\,f'(x) = f''(x)\,dx$$

Es ist nun $d\,f(x)$ eine Function von x, und dx, welche letztere Grösse als Constante zu betrachten ist.

Wir können also auch so schliessen

$$d\,(df(x)) = d(f'(x)\,dx) = dx.\,d\,f'(x) \text{ also}$$
$$d(d\,f(x)) = f''(x)\,dx^2.$$

Man schreibt nun der Kürze wegen

$$d(d\,f(x)) = d^2 f(x) \text{ und dann haben wir}$$
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

Nun wird ebenso $f''(x)$ eine ganze Function sein mit demselben C. bereiche wie $f'(x)$ also auch wie $f(x)$. Sie hat also selbst einen Differentialcoefficienten, den wir mit $f'''(x)$ bezeichnen und die 3te Ableitung von $f(x)$ nennen. Es ist dann

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = f'''(x) \text{ u.s.w.}$$

Jede ganze Function von x, hat also Differentialcoëfficienten aller Ordnungen, welche selbst ganze Functionen sind mit dem Convergenzbereiche der ursprünglichen Function $f(x)$.

Was die Bezeichnung der Ableitungen anbetrifft, ist noch die Cauchy'sche Bezeichnung zu erwähnen;

Cauchy setzt nämlich

$$Df(x) = f'(x)$$

$$D^2 f(x) = f''(x)$$

Diese Bezeichnung hat ihren Vortheil bei Functionen mehrerer Argumente.

Nun gehen wir zu der Erweiterung der Begriffe für mehrere Variablen. Wir wollen es für 2 Variablen x, y thun.

Wir wählen innerhalb des Convergenzbereiches der Function $f(xy)$ eine beliebige Stelle und bestimmen h, k so daß auch noch $x+h, y+k$, innerhalb derselben liegt.

und bilden die totale Änderung von $f(x, y)$

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

Da nun $f(x+h, y+k)$ eine convergente Reihe ist, so läßt sie sich nach Potenzen von h u. k in Gruppen theilen, so daß wir setzen können.

$$f(x+h, y+k) - f(xy) = ch + c'k + (h\,k)_1\, h + (h\,k)_2\, k$$ 64

wo c u c' von h u k unabhängig, $(h\,k)_1$, $(h\,k)_2$ aber gleichzeitig mit h. und k unendlich klein werden. Nun nennen wir den 1^ten^ Theil, worin h u k linear vorkommen, das totale Differential von $f(xy)$ u. setzen

$$d\,f(xy) = ch + c'k; \text{ oder für } h, dx \text{ für } k\, dy \text{ gesetzt}$$

$$d\,f(xy) = c\,dx + c'\,dy.$$

Um die Bedeutung von c u c' zu erfahren bemerken wir, daß die Gleichung 64 für jedes h, u k gelten muß. Für k gleich Null erhalten wir aber

64 $$f(x+h, y) - f(xy) = ch + (h\,0)_1\,h$$

Nach der Definition ist aber c nichts weiter als die Ableitung von $f(xy)$, wenn man y als constant betrachtet; wir nennen dies die partielle Ableitung von $f(x,y)$ nach x und bezeichnen mit landy

$$c = D_x\,f(xy) \text{ ebenso folgt für } h = 0$$

$$c' = D_y\,f(xy)$$

Also haben wir

65 $$d\,f(xy) = D_x\,f(xy)\,dx + D_y\,f(xy)\cdot dy.$$

d. h. das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentialen. Die Bedeutung des Differentials von $f(xy)$ zeigt sich zunächst bei der Berechnung der Änderung von $f(xy)$ für kleine Werthe von h, k, wo dann das Differential dem Werthe nach ~~übersteigt~~ überwiegt.

Setzen wir in 64 $x = x_0$, $y = y_0$, $x+h = x$, $y+k = y$, so erhalten wir

$$f(xy) = f(x_0 y_0) + (x - x_0) D_x f(x_0 y_0) + (y - y_0) D_y f(x_0 y_0) + \dots \qquad 66$$

wo der Rest unendlich klein wird im Verhältniss zu $x - x_0$, $y - y_0$. Setzen wir

$$f_1(xy) = f(x_0 y_0) + (x - x_0) D_x f(x_0 y_0) + (y - y_0) D_y f(x_0 y_0) \qquad 67$$

so stellt die Function $f_1(xy)$ in der Nähe von $x_0\, y_0$ die Werthe der Function $f(xy)$ genauer als jede andere lineare Function von xy. Geometrisch bedeutet ~~66~~ 66 eine Fläche, 67 die Tangente im Punkte $x_0\, y_0$.

Die Definitionen bleiben dieselben bei Functionen von mehreren Veränderlichen.

Für die hier betrachteten ganzen Functionen gestalten sich die Sätze der Differentialrechnung sehr einfach. Es existiren hier Ableitungen aller Ordnungen, die in demselben Bereiche gültig sind, wie die ursprüngliche Function. Haben wir die Ableitung von der Function $f(xyz)$ gebildet nach x, so ist diese Ableitung wiederum eine ganze Function von xyz.., wir können von ihr die Ableitung nach y z. B. suchen u. s. w. Wir bezeichnen dies durch folgende Gleichung

$$D_x D_x D_y D_x f = D_x \left[D_x \left\{ D_y (D_x f) \right\} \right] \qquad 68$$

wobei die Operationen vorgenommen werden, ~~wie~~ in der Ordnung ~~der~~ wie die Zeichen es angeben, von rechts nach links.

<u>Lehrsatz</u>. Um die Ableitung von $f(x) = \sum c_\alpha (x-a)^\alpha$ zu finden, vermindere man in der Summe jeden Exponenten

~~zur~~ um Einheit und multiplicire das Glied mit λ, d.h. es ist

$$D_x f(x) = \sum_{\lambda} \lambda c_{\lambda}(x-a)^{\lambda-1}$$

Dies ist ohne Weiteres aus dem Vorigen ~~entwickelt~~ ersichtlich.
Bei Functionen mehrerer Veränderlichen gilt dieselbe Regel. Haben wir nämlich

$$f(xyz) = \sum_{\lambda\mu\nu} c_{\lambda\mu\nu}(x-a)^{\lambda}(y-b)^{\mu}(z-c)^{\nu}$$

so ist dies eine ganze Function ~~der Bestimmung~~ in Beziehung auf $x-a$ die wir gleich setzen

$$\sum_{\lambda} c_{\lambda}(x-a)^{\lambda}, \text{ wo } c_{\lambda} = \sum_{\mu\nu} c_{\lambda}(y-b)^{\mu}(z-c)^{\nu}$$

welche Gruppirung wegen der Convergenz erlaubt ist.
Nun nach dem obigen ist

$$D_x f(xyz) = \sum_{\lambda} \lambda c_{\lambda}(x-a)^{\lambda-1}$$
$$= \sum_{\lambda\mu\nu} \lambda (x-a)^{\lambda-1}(y-b)^{\mu}(z-c)^{\nu} c_{\lambda\mu\nu}.$$

dann denn auch diese Gruppirung ist erlaubt. Diese letztere Reihe hat denselben Convergenzbereich wie $f(xyz)$.
Man sieht also, dass man die Operation an jedem einzelnen Gliede vornehmen kann. Nun sieht man sofort, dass

$$D_y D_x f(xyz) = \sum_{\lambda\mu\nu} \lambda\mu c_{\lambda\mu\nu}(x-a)^{\lambda-1}(y-b)^{\mu-1}(z-c)^{\nu}$$

nimmt man die Operation der umgekehrten Reihenfolge vor, so ~~hat~~ erhält man

$$D_x D_y f(xyz) = \sum_{\lambda\mu\nu} \lambda\mu c_{\lambda\mu\nu}(x-a)^{\lambda-1}(y-b)^{\mu-1}(z-c)^{\nu}$$

Daraus ziehen wir den Schluss dass

69 $$D_y D_x f(xy) = D_x D_y f(xy).$$

Man kann also die Operation in einer beliebigen Reihenfolge vornehmen. Auf dieselbe Weise würde man sich leicht über überzeugen können, daſs dies allgemein für beliebig viele Operationen gilt.

Lehrsatz. Wenn eine beliebige Function von beliebig vielen Variablen innerhalb eines Bereiches stetig und eindeutig ist, und in Bezug auf jede der Veränderlichen Ableitung hat, die in demselben Bereiche stetig und eindeutig sind, so hat die Function ein, aber auch nur ein Differential.

Die obigen Bedingungen sind hinreichend und auch zulässig, denn nur solche Functionen überhaupt bilden den Gegenstand der Differentialrechnung.

Da die Function in Bezug auf jede der Variablen eine Ableitung hat, so können wir setzen

$$f(x+h, y, z) - f(xyz) = h\, D_x f(xyz) + h\, f(xyzh) \qquad 70$$

wo $f(xyzh)$ gleichzeitig mit h unendlich klein wird, was für alle Werthe des Convergenzbereiches gelten muſs. Dies ist so zu verstehen: Wir denken uns innerhalb des Bereiches xyz .. B, einen um xyz .. liegenden Bereich B_1, der vollständig innerhalb des Bereiches B liegt, so muſs es innerhalb des Bereiches B_1 Werthe für h geben, für welche $f(xyzh)$ beliebig klein gemacht werden kann. Es muſs B_1 vollständig innerhalb B, nicht an der Grenze liegen, da ja es sonst in B_1 Werthe geben würde, für weldie die Function für $x+h$ nicht mehr existirte.

Nachdem wir nun den Bereich B_1 gewählt haben, dann damit können wir setzen für alle Werthe dieses Bereiches

71 $$f(x+h, y\,z) = f(xyz) + h D_x f(xyz) + h f_1(x\,y\,z\,h)$$

Ebenso erhalten wir hieraus

72 $$f(x+h, y+k, z) = f(x+h, y, z) + k D_y f(x+h, y, z) + \cancel{k f_2 (x+h, y, z\, k)} + \kappa f_2(x+h, y, z, \kappa),$$

wo f_2 gleichzeitig mit k unendlich klein wird.

Wegen 71, erhalten wir aber $f(x+h, y+k, z) =$

$$= f(xyz) + h D_x f(xyz) + h f_1(xyzh) +$$
$$+ k D_y f(x+h, y, z) + k f_2(x+h, y, z, k)$$
$$= f(xyz) + h D_x f(xyz) + h f_1(xyzh)$$
$$+ k D_y f(xyz) + k\left[D_y f(x+h, y, z) - D_y f(xyz)\right]$$
$$+ k f_2(x+h, y, z, k)$$

Nun wird aber wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Ableitungen

$D_y f(x+h, y\,z) - D_y f(xyz)$ gleichzeitig mit h unendlich klein. Wir koennen also ansetzen

73 $$f(x+h, y+k, z) = f(xyz) + h D_x f(xyz) + k D_y f(xyz) + h f_1(xyzh) + k f_3(xyzhk)$$

wo f_1 u. f_3 gleichzeitig mit h, k unendlich klein wird.

Verändern wir nun noch z ~~zu~~ um l, so erhalten wir zunächst

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x+h, y+k, z) + l D_z f(x+h, y+k, z)$$
$$l f_4(x+h, y+k, z, l)$$ und wegen 73

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(xyz) + h\, D_x f(xyz) + k\, D_y f(xyz)$$
$$+ l\, D_z f(x+h, y+k, z) + h f_1(xyz h) + k\, f_3(xyzhk)$$
$$+ l f_4(x+h, y+k, z, l)$$ wo f_4 gleichzeitig mit l unendlich klein wird. Wir koennen dies auch so schreiben.

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(xyz) + h D_x f(xyz)$$
$$+ k\, D_y f(xyz)$$
$$+ l D_z f(xyz)$$
$$+ l\left[D_z f(x+h, y+k, z) - D_z f(x, y, z)\right] + h f_1(xyzh) + k f_3(xyzhk)$$
$$+ l f_4(x+h, y+k, z, l).$$ Nun ist wegen der Stetigkeit des Differentialquotienten

$D_z f(x+h, y+k, z) - D_z f(x, y, z)$ gleichzeitig mit h u. k unendlich klein. Bezeichnen wir nun kurzweg mit $(h k l)_1, (h k l)_2 (h k l)_3$ Größen die gleichzeitig mit h, k, l unendlich klein werden, so haben wir

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(xyz) =$$
$$h\, D_x f(xyz) + k\, D_y f(xyz) + l\, D_z f(xyz) \qquad 74$$
$$+ h(h k l)_1 + k(h k l)_2 + l(h k l)_3.$$ Die Differenz ist also: der 1ste Theil eine lineare Function von h, k, l, der zweite Theil besteht aus Größen, die unendlich klein werden mit h, k, l, jede multiplicirt noch mit h, k, l. Nach der Definition des Differentials ist also

$$d f(xyz) = dx\, D_x f(xyz) + dy\, D_y f(xyz) + dz\, D_z f(x,y,z) \qquad 75$$
$$\cancel{f(xyz)}$$

Wir sehen dass alle Voraussetzungen nöthig waren u. dass unter denselben ~~der~~ die Function $f(xyz)$ ein Differential in der That ~~besteht~~ besitzt. Gleichzeitig ist durch die Formel 75 bewiesen, dass das totale Differential aus der Summe der partiellen Differentialien besteht. Es ist noch zu beweisen, dass es nur ein Differential gibt, d. h. dass die Darstellung 74 nur auf eine einzige Weise möglich ist.

Angenommen die eine Darstellung sei

$$c_1 h + c_2 k + \dots + h g_1 + k g_2 + \dots$$

wo die $c_1\, c_2$ von $h\, k \dots$ unabhängig ~~$g_1\, g_2$~~ $g_1\, g_2 \dots$ aber gleichzeitig mit $h\, k \dots$ unendlich klein werden.

Nehmen wir an, wir hätten noch eine 2te Darstellung

$$c_1' h + c_2' k + \dots + h g_1' + k g_2' + \dots$$

Die Differenz beider muss identisch null sein. Also ist

$$(c_1' - c_1 + g_1' - g_1) h + (c_2' - c_2 + g_2' - g_2) k + \dots = 0.$$

Dies gilt für beliebige Werthe $h, k, \dots$ also auch für $h \gtrless 0$, $k = 0 \dots$; dann bekommen wir

$$h(c_1' - c_1 + \bar{g}_1' - \bar{g}_1) = 0$$

Dies gilt für alle hinreichend kleinen Werthe von h, die von Null verschieden sind. Demnach ist

$$c_1' - c_1 + \bar{g}_1' - \bar{g}_1 = 0$$

oder $\quad c_1' - c_1 = \bar{g}_1 - \bar{g}_1'$. Nun kann ich h so klein annehmen dass $\bar{g}_1 - \bar{g}_1' < \varepsilon$ also muss auch

$c_1' - c_1 < \varepsilon$ sein, wo ε eine beliebig kleine Größe ist. Daraus schließen wir, daß

$$c_1' - c_1 = 0 \text{ oder } c_1' = c_1.$$

Dasselbe gilt für die übrigen $c_2' = c_2$ u. s. w.
Hiermit ist unser Satz mit aller Strenge nachgewiesen. Die Deductionen sind so angestellt, daß sie auf alle Functionen mit den vorausgesetzten Eigenschaften passen.
Wenn es sich bei einer beliebigen Function $f(x\,y\,z)$ zeigt, daß sie auch höhere Differentialquotienten in Bezug auf jede der Variablen hat, und man die Vertauschbarkeit der Operation

$$D_y D_x f, \quad D_x D_y f$$

für 2 Zeichen nachweisen kann, so ist allgemein die Anordnung der Operation beliebig. Wählen wir z. B.

$$D_x D_z D_x D_x D_y D_z D_y f,$$

so können wir zunächst die beiden äussersten vertauschen und ~~statt~~ erhalten

$$D_z D_x D_x D_x D_y D_z D_y f.$$

Nun kann man je zwei innere vertauschen.

$$D_x\{D_y[D_z(D_y f)]\} =$$
$$D_x\{D_y[D_y(D_z f)]\} =$$
$$D_y\{D_x[D_y(D_z f)]\} \text{ u. s. w.}$$

Durch Vertauschung von je 2 Elementen eines Systems kann man jede Anordnung erreichen. Also ist die Vertauschung der Operationszeichen erlaubt, sobald sie für 2 erlaubt ist. Für ganze Functionen haben wir es direct nachgewiesen.

Der Taylor'sche Satz.

Der Taylorsche Satz stellt uns die ~~Ve~~ Änderung der Function mittelst des Differentialquotienten. Um ihn zu entwickeln zunächst für ganze Functionen sei

$$f(x|a) \text{ eine ganze Function von } x,$$

die für die Umgebung der Stelle a definirt ist. Nehmen wir innerhalb der Umgebung von a einen beliebigen Punkt x_0 an, und setzen

$$x = x_0 + (x - x_0) \text{ so können wir sobald}$$

$x_0 + (x - x_0)$ noch innerhalb des Convergenzbereiches liegt, die Function $f(x|a)$ ~~um~~ ~~dasselbe~~ umwandeln in eine nach Potenzen von $x - x_0$ forschreitende Reihe

1 $$f(x|a) = \sum_\mu c_\mu (x - x_0)^\mu$$

welche convergent ist, innerhalb einer bestimmten Umgebung von x_0, und darin mit $f(x|a)$ übereinstimmt. Diese neue Function hat Ableitungen aller Ordnungen, die ich erhalte, indem ich für x, $x+h$ setze und dann nach Potenzen von h ordne. Bezeichnen wir die Ableitungen mit $f^{(1)}, f^{(2)} f^{(3)} \ldots$ so haben wir

2 $$f^{(1)}(x) = \sum_\mu \mu\, c_\mu (x - x_0)^{\mu - 1}$$

$$f^{(2)}(x) = \sum_\lambda \lambda(\lambda-1)\, c_\lambda (x-x_0)^{\lambda-2}$$

. . . . 2.

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_\lambda \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-\alpha+1)\, c_\lambda (x-x_0)^{\lambda-\alpha}$$

Setzen wir in der letzten Formel $x = x_0$ so verschwinden alle Glieder der Summe mit Ausnahme des constanten, welches sich ergibt für $\lambda = \alpha$. Wir haben also

$$f^{(\alpha)}(x_0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 3.2.1\, c_\alpha.$$ 3

Wenn wir das Product der ganzen Zahlen von 1 bis λ mit $\lambda!$ bezeichnen, und festsetzen daß $0! = 1$ ist, und $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ so haben wir zunächst aus 3

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x_0)$$ also die Reihe 1 hat die

Gestalt $$f(x|a) = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!} f^{(\lambda)}(x_0)(x-x_0)^\lambda = f(x|x_0)$$ 4

Wenn ich nun hierin $x = x_0 + h$ setze, so folgt

$$f(x_0+h) = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!} f^{(\lambda)}(x_0)\, h^\lambda$$

und dies ist der Taylorsche Satz, welcher angibt den Zusammenhang zwischen der Änderung der ganzen Function und ihren Ableitungen. Die Formel 4 gibt uns die Regel zur Umwandlung von $f(x|a)$ in $f(x|x_0)$. Wenn wir nun festsetzen, daß wir unter der Umgebung einer Stelle diejenige Umgebung verstehen, welche ganz innerhalb des Convergenzbereiches liegt, so sehen wir, daß für alle Werthe x_0 und solche h, für welche h in der Umgebung von x_0 liegt, die Formel ~~gilt~~ gilt.

6 $$f(x+h) = \sum_\mu \frac{1}{\mu!} f^{\mu}(x) h^\mu$$

Dazu ist also nur nöthig, daß x in dem Convergenz-bereiche, h in der Umgebung von x liegt.
Dieser Satz gilt auch für ganze Functionen mehrerer Veränderlichen in analoger Weise.
Zu der obigen Entwickelung bemerken wir, daß die hierbei angewandte, sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten hier vollständig berechtigt ist, da wir schon im Voraus die Existenz einer solchen Reihe wissen.
Dieser Satz, der für ganze Functionen gilt, läßt sich nicht ohne Weiteres auf beliebige Functionen übertragen, ja es gibt sogar ganze Functionen, auf die er garnicht anwendbar ist. Wenn wir nun eine beliebige, stetige Function $f(x)$ haben, von der wir wissen, daß sie alle Ableitungen bis zu der $(n+1)^{te}$ inclusive besitzt, so koennen wir vermuthungsweise annehmen, daß sie sich auf aehnliche Weise ~~die~~ wie ganze Function darstellen wird, durch die Ableitungen. Zu dem Ende betrachten wir die Differenz

7 $$f(x) - \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(x_0)(x-x_0)^\mu = \varphi(x|x_0)$$

Da $f(x)$ und ihre ~~...~~ Differentialquotienten bis zum n^{ten} stetig sind, so wird auch $\varphi(x|x_0)$ eine stetige Function sein. Weiter wissen wir davon nichts. Jedenfalls ist die Form 7 annehmbar. Nun werden wir zeigen eine merkwürdige Eigenschaft von $\varphi(x|x_0)$ nämlich, daß sie in Bezug auf x_0 eine Ableitung hat. Zu dem Ende setzen wir für x_0 x_0+h, so erhalten wir für jedes einzelne Glied

$$f^{(\mu)}(x_0+h)(x-x_0-h)^\mu =$$
$$\left(f^{(\mu)}(x_0)+h f^{(\mu+1)}(x_0)+h h_1\right)\left((x-x_0)^\mu - \mu h(x-x_0)^{\mu-1}+h h_2\right)$$

wo h_1 u h_2 gleichzeitig mit h unendlich klein werden.
Dieses giebt nach der Multiplication

$$h f^{(\mu+1)}(x_0)(x-x_0)^\mu - \mu h(x-x_0)^{\mu-1} f^{(\mu)}(x_0) + h h_3$$

Wir erhalten somit

$$\varphi(x,x_0+h)-\varphi(x,x_0) = -\sum_{0\,\mu}^{n-1}\frac{1}{\mu!}\left\{f^{(\mu+1)}(x_0)(x-x_0)^\mu - \mu f^{(\mu)}(x_0)(x-x_0)^{\mu-1}\right\}h+hh_3 \qquad 8$$
$$\cancel{h+hh_3}$$

wo h_3 gleichzeitig mit h unendlich klein wird.
Es ist also nach der Definition der Ableitung

$$D_{x_0}\varphi(x,x_0) = -\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}\left\{\frac{1}{\mu!}f^{(\mu+1)}(x_0)(x-x_0)^\mu - \frac{1}{(\mu-1)!}f^{(\mu)}(x_0)(x-x_0)^{\mu-1}\right\} \qquad 9$$

Die Reihe hat aber nun die Eigenschaft, daß sich in ihr alle Glieder wegheben mit Ausnahme des letzten so daß es folgt

$$D_{x_0}\varphi(x,x_0) = -\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} \qquad 10$$

Wir wissen also, daß von der Function $\varphi(x,x_0)$ nur daß sie stetig ist und in Bezug auf x_0 eine Ableitung ~~besteht~~ besitzt.
Wir werden später dazu kommen, daß man für jede Function mit den vorausgesetzten Eigenschaften haben wird:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}$$
$$+ F_n(x, x_0)(x-x_0)^n \text{ oder auch}$$
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1}$$
$$+ F_n(x_0+h, x_0)h^n$$

und von der Function F_n wird man zeigen können, dass sie für unendlich kleines h unendlich klein wird im Verhältniss zu h^{n-1}, d. h. sie wird unendlich klein von höherer als der $(n-1)$ten Ordnung. Wir sagen von einer Grösse, sie wird unendlich klein von der λten Ordnung, wenn sie durch $h^{\lambda-1}$ dividirt noch unendlich klein wird, und durch h^{λ} dividirt endlich von Null verschieden ist.

Hauptsatz der Differentialrechnung.

Angenommen es sei $F(y_1 \dots y_m)$ eine Function von m Variablen $y_1 \dots y_m$, die innerhalb eines Bereiches definirt ist; so dass jedem Werthsysteme $y_1 \dots y_m$ innerhalb desselben ein Werth von F gehört; ferner möge sie stetig sein, und das Differential haben, so dass wir setzen können:

1 $$\Delta F = D_{y_1} F \Delta y_1 + D_{y_2} F \Delta y_2 + \dots + D_{y_m} F \cdot \Delta y_m + \delta_1 \Delta y_1 + \dots + \delta_m \Delta y_m$$

wo $\delta_1 \dots \delta_m$ gleichzeitig mit $\Delta y_1 \dots \Delta y_m$ verschwindet.

Denken wir uns nun gesetzt.

2 $$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) \\ y_2 &= f_2(x) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x) \end{aligned}$$

wobei $f_1\, f_2 \dots f_m$ ebenfalls definirte, stetige und differentiirbare

bare Functionen bedeuten, welche für die betrachteten Werthe von x Werthsysteme für $y_1 \cdots y_m$ geben, die dem Conv. bereiche von F gehören. Setzen wir nun in $F(y_1 \cdots y_m)$ die Werthe 2, so erhalten wir

$F\{f_1(x), f_2(x) \cdots f_m(x)\} = \varphi(x)$ und wenn wir 3

nun das Differential von $\varphi(x)$ suchen, so erhalten wir dasselbe, wenn wir die partiellen Ableitungen von $F(y_1 \cdots y_m)$ nach $y_1, \cdots y_m$, bilden, in dem Resultate $y_1 \cdots y_m$ durch die Werthe 2 ersetzen, jede Ableitung mit dem Differential von derjenigen der f's multipliciren, welches dem y entspricht, nach welchem die Ableitung von F gebildet wurde und die Summe aller dieser Ausdrücke ~~Veränderliche~~ bilden. Oder kürzer gesprochen: Das Differential von $\varphi(x)$ erhalten wir, indem wir in dem totalen Differential von $F(y_1 \cdots y_m)$ jedes y durch $f(x)$, und dy durch das Differential von $f(x)$ ersetzen. In Formel lautet der Satz:

Wenn $d\,F(y_1 \cdots y_m) = D_{y_1} F.\,dy_1 + D_{y_2} F.\,dy_2 + \cdots + D_{y_m} F.\,dy_m$ ist, so ist

$$d\,F\{f_1(x) \cdots f_m(x)\} = d\varphi(x) =$$

$$\Big[D_{y_1} F(y_1 \cdots y_m)\Big]_{y_1=f_1(x) \cdots y_m=f_m(x)} d f_1(x) + \cdots + \Big[D_{y_m} F(y_1 \cdots y_m)\Big]_{y_1=f_1(x) \cdots y_m=f_m(x)} d f_m(x)$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen

$D_{y_\lambda} F(y_1 \cdots y_m) = F_\lambda(y_1 \cdots y_m)$ u. denken wir uns für $y_1 \cdots y_m$ die Werthe aus 2 gesetzt, so erhalten wir

$$F\{f_1(x)+\Delta f_1(x), \dots f_m(x)+\Delta f_m(x)\} =$$

4 $$\varphi(x) + \sum_{1\,\mu}^{m} F\{f_1(x)\dots f_m(x)\}_\mu' \,\Delta f_\mu(x) + \delta_1 \Delta f_1(x) + \dots + \delta_m \Delta f_m(x)$$

$\delta_1 \dots \delta_m$ werden gleichzeitig mit $\Delta y_1, \dots \Delta y_m$ unendlich klein. Nun ist der Annahme nach

$$\Delta f_\mu(x) = D_x f_\mu(x)\,\Delta x + \delta_\mu' \cdot \Delta x$$ setze ich die in 4 ein

so bekomme ich

5 $$\Delta\varphi(x) = \sum_{1\,\mu}^{m} F\{f_1(x)\dots f_m(x)\}_\mu' \,D_x f_\mu(x)\,\Delta x + \Delta x(\Delta x)$$

wo (Δx) eine mit Δx ~~gleichartig~~ gleichzeitig unendlich kleine Größe bedeutet. Daraus geht hervor, daß $\varphi(x)$ differenzierbar ist, und zwar ist.

6 $$d\varphi(x) = \sum_{1\,\mu}^{m} F\{f_1(x)\dots f_m(x)\}_\mu' \,D_x f_\mu(x)\,dx.$$

Und hierin ist der Satz ausgesprochen: Um das Differential von $\varphi(x)$ zu bilden, bilde man das Differential von $F(y_1 \dots y_m)$, ersetze in dem Resultate jedes y durch das entsprechende $f(x)$ und dy durch $D_x f(x)\,dx$.

Dieser Satz bleibt unter denselben Voraussetzungen noch dann bestehen, wenn wir statt $y_1 \dots y_m$ Functionen von beliebig vielen Variablen $x_1, \dots x_n$ einsetzen, welche in Bezug auf jede der Variablen, die oben ausgesprochenen Eigenschaften besitzen. Betrachten wir nun $F(y_1 \dots y_m)$ und setzen hierin

$$y_1 = f(x_1, \dots x_n)$$
$$y_m = f(x_1, \dots x_n)$$ so verwandelt sich

$F(y \dots y_m)$ in $\varphi(x_1, \dots x_n)$. Nun haben wir nach dem Obigen für die partiellen Differentialsen von φ folgende Gleichungen

$$d_{x_1}\varphi(x_1 \ldots x_n) = \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} F\{f_1(x_1 \ldots x_n) \ldots f_m(x_1 \ldots x_n)\}_{\lambda} D_{x_1} f_{\lambda}(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \quad \times$$

$$d_{x_2}\varphi(x_1 \ldots x_n) = \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} F\{f_1(x_1 \ldots x_n) \ldots f_m(x_1 \ldots x_n)\}_{\lambda} D_{x_2} f_{\lambda}(x_1 \ldots x_n)\, dx_2$$

~~und somit ist der allgemeine Satz bewiesen.~~ . . . . +

Dieser Hauptsatz enthält alle Regeln des Differenzirens, wie wir es an Beispielen zeigen wollen.

1, Das Differential der Summe von Functionen.

Es sei $F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ wir denken uns gesetzt.

$$y_1 = f_1(x)$$

$y_2 = f_2(x)$ und haben nach dem obigen Satze

$$d\,F(x) = d\,f_1(x) + d\,f_2(x) + \ldots$$

2) Es sei $F(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \ldots$ Dann ist

$$d\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots\} = c_1 d_1 f_1(x) + c_2 d_2 f_2(x) + \ldots$$

3) $F = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \ldots f_n = y_1 \cdot y_2\, y_3 \ldots y_n$

$$d\,f_1 \cdot f_2\, f_3 \ldots f_n = d(y_1 \ldots y_n) =$$

$y_2\, y_3 \ldots y_n\, dy_1 + y_1\, y_3 \ldots y_n\, dy_2 + \ldots + y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}\, dy_{n-1}$ oder

$$d\,f_1\, f_2 \ldots f_n = f_2 \ldots f_n\, d f_1 + f_1 f_3 \ldots f_n\, d f_2 + \ldots$$

4) Man wendet den obigen Satz auch manchmal, wo es nicht erlaubt ist. Wenn z. B. zwischen y u x eine algebraische Gleichung gegeben ist. $G(x\,y) = 0$.

Denken wir uns hieraus y dargestellt in der Form

$y = \varphi(x)$, so daß

$G(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Dann schließt man so

Wenn man die Gleichung differenzirt, so folgt

$$d\,G(x, \varphi(x)) = G(x, \varphi(x))_1\, dx + G(x, \varphi(x))_2\, d\varphi(x) = 0$$

+ und nach dem schon früher bewiesenen Satz ist

$d\varphi(x_1 \ldots x_n) = \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} d_{x_\lambda}\varphi(x_1 \ldots x_n)$ also

$d\varphi(x_1 \ldots x_n) = \sum_{1}^{m}{}_{\lambda} F\{f_1(x_1 \ldots x_n) \ldots f_m(x_1 \ldots x_n)\}_{\lambda}\, d f_{\lambda}(x_1 \ldots x_n)$ . . . . 7.

und hieraus

8 $$d\,\varphi(x) = -\frac{G(x,\varphi(x))_1}{G(x,\varphi(x))_2}\,dx$$

Dieser Schluß ist richtig aber nicht erlaubt, da man ja die Existenz des Differentials von $\varphi(x)$ nicht nachgewiesen hat. Man kann zwar einen Bereich finden, worin $\varphi(x)$ stetig ist, aber man sieht nicht, ob es auch differenzierbar ist. Wir müßen nun um die Richtigkeit der Formel 8 zu zeigen, nachweisen daß $\varphi(x)$ differenzierbar ist. Nun zeigt uns schon die Formel 8 selbst, daß zur Existenz des Differentialcoefficienten von $\varphi(x)$ nöthig ist, daß nicht

$$G(x,\varphi(x))_2 \text{ gleichzeitig mit } G(x,\varphi(x))$$

verschwindet, da ja für ~~alle~~ solche Werthe es keinen Differentialcoefficienten hat. Dies erfordert also daß $G(xy)_1$ u $G(xy)_2$ keinen gemeinsamen Theiler haben.

Dies kann aber nur für specielle Werthe von x der Fall sein, denn wir koennen stets 2 Functionen $H(y)$ u. $H_1(y)$ finden, so daß

$$H(y)\,G(xy) + H_1(y)\,G(xy)_2 = 1$$

Oder indem man sich H u H_1 auf den gemeinschaftlichen Nenner bringt, der in Folge der gebrochenen Coefficienten in H u. H_1 erscheint, so ist

9 $$h(xy)\,G(xy)_1 + h_1(xy)\,G(xy)_2 = R(x)$$

Soll nun $G(xy)_1$ u $G(xy)_2$ ~~gleichartig~~ gleichzeitig verschwinden, so muss $R(x) = 0$ sein; dies gilt aber nur für specielle Werthe von x, die wir singuläre Werthe von x nennen wollen. Wir sehen also, dass wir das x unbedingt auf einen Bereich einschließen müssen, der keine singulären Stellen enthält. Alsdann existirt stets eine stetige Function $y = \varphi(x)$, welche die Gleichung $G(x, y) = 0$ identisch befriedigt, und die einen Differentialcoefficienten hat. Um das letztere nachzuweisen, denken wir uns in $G(x, y)$ statt y vorläufig eine beliebige Function $\varphi(x)$ eingesetzt. Nun haben wir, da $G(xy)$ eine ganze Function von xy ist

$$\begin{aligned} G(x+h, y+k) = {} & G(xy) + G(xy)_1 h + G(xy)_2 k \\ & + G_1(xy, hk) h + G_2(xy, hk) k \end{aligned} \tag{10}$$

wo $g_1\, g_2$ ganze Functionen sind, die gleichzeitig mit $h.k$ unendlich klein werden. Denken wir uns nun $y = \varphi(x)$ gesetzt, so dass

$$G(x, \varphi(x)) \equiv 0 \text{ so ist auch}$$

$$G(x + \Delta x, \varphi(x) + \Delta \varphi(x)) \equiv 0 \text{ wo } \Delta \varphi(x)$$

wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ gleichzeitig mit Δx unendlich klein wird. Es folgt dann aus 10

$$0 = G(x, \varphi(x))_1 \Delta x + G(x, \varphi(x))_2 \Delta \varphi(x) + (\Delta x)_1 \Delta x + (\Delta x)_2 \Delta \varphi(x) \tag{11}$$

wo $(\Delta x)_1$ u $(\Delta x)_2$ gleichzeitig mit Δx unendlich klein werden. Daraus folgt nun

$$\Delta \varphi(x) = - \frac{G(x, \varphi(x))_1 + (\Delta x)_1}{G(x, \varphi(x))_2 + (\Delta x)_2} \Delta x \tag{12}$$

Nun ist, sobald b von Null verschieden ist

13 $$\frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)}$$

Wenden wir dies auf 12 an, indem wir

$$a = G(x, \varphi(x))_1, \quad \alpha = (\Delta x)_1$$
$$b = G(x, \varphi(x))_2, \quad \beta = (\Delta x)_2 \text{ setzen}$$

und das x auf den Bereich beschränken, worin

$G(x, \varphi(x))_2 \gtrless 0$ so haben wir

14 $$\Delta \varphi(x) = -\frac{G(x,\varphi(x))_1}{G(x,\varphi(x))_2}\,\Delta x + (\Delta x)_3\,\Delta x$$ wo $(\Delta x)_3$ mit Δx unendlich klein wird.

Nach der Definition ist also

15 $$d\varphi(x) = -\frac{G(x,\varphi(x))_1}{G(x,\varphi(x))_2}\,dx$$

somit ist $\varphi(x)$ differenzirbar und das Differential hat diese Form.

3) Es sei ferner $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ wo

$f(x)$ und $g(x)$ differenzirbare Functionen sind.

Auch hierbei müssen wir das Intervall von x beschränken auf das Bereich wofür $g(x) \gtrless 0$.

Alsdann schliessen wir so:

$$\Delta \varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{g(x)\left\{f(x)+\Delta f(x)\right\} - f(x)\left\{g(x)+\Delta g(x)\right\}}{g(x)\left[g(x)+\Delta g(x)\right]}$$
$$= \frac{g(x)\,\Delta f(x) - f(x)\,\Delta g(x)}{g(x)\left(g(x)+\Delta g(x)\right)}$$
$$= \frac{g(x)\,\Delta f(x) - f(x)\,\Delta g(x)}{g^2(x)} - \frac{\Delta g(x)\left[g(x)\,\Delta f(x) - f(x)\,\Delta g(x)\right]}{g^2(x)\left[g(x)+\Delta g(x)\right]}$$

Wenn wir nun setzen

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + (\Delta x)_1 \Delta x$$
$$\Delta g(x) = g'(x)\Delta x + (\Delta x)_2 \Delta x$$

so erhalten wir leicht für das Differential

$$d\varphi(x) = \frac{g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}$$ 16

Hiermit verlassen wir die Principien der Differentialrechnung, die wir auf systematischem Wege haben streng entwickeln können, indem wir einige noch wichtige Punkte, für die spätere Untersuchung aufbewahren. Besonders wird es der Taylorsche Satz sein, den wir später noch näher ins Auge zu fassen haben.

Rationale Functionen.

Nach den ganzen Functionen sind die einfachsten diejenigen, welche in Form eines Quotienten zweier ganzen Functionen (Potenzreihen) erscheinen. Wenn der Quotient dieselben Eigenschaften haben soll, welche den ganzen Functionen zukommen, so müssen wir ~~den~~ der Variablen unbedingt Beschränkungen auferlegen. Die Beschränkung ist nun diejenige, dass die Variable keinen Werth annehmen soll, für welchen der Nenner des Quotienten Null ist; denn sonst könnte die Function in der Form erscheinen $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$. Im 1ten Falle ist der Werth unendlich gross, im 2ten unbestimmt; Wir wollen also die Stellen für welche der Nenner zu Null wird, ausschliessen.

Es sei die gegebene Function

1 $$\frac{F(xy\ldots|ab\ldots)}{G(xy\ldots|ab\ldots)}$$

wo F und G ganze Functionen sind von $xy\ldots$ In dem gemeinschaftlichen Convergenzbereiche bei der Reihen F u. G, nehme ich eine Stelle $x_0 y_0\ldots$ an, aber so, dass für sie der Nenner nicht verschwindet. Wir können alsdann sowohl den Zähler, als auch den Nenner transformiren für Potenzreihen von $x-x_0$, $y-y_0$, … nämlich in:

$$\frac{F_1(xy\ldots|x_0 y_0\ldots)}{G_1(xy\ldots|x_0 y_0\ldots)}$$

nun sondern wir sowohl im Zähler als auch im Nenner das constante ~~Constantenglied~~ Glied, und wir haben

2 $$\frac{F_1(xy\ldots|x_0 y_0)}{G_1(xy\ldots|x_0 y_0)} = \frac{F(x_0 y_0\ldots|ab\ldots)+\varphi}{G(x_0 y_0\ldots|ab\ldots)+\psi} = \frac{F_0+\varphi}{G_0+\psi}$$

wo φ u. ψ Potenzreihen von $x-x_0$, $y-y_0$ sind, und G_0 der Annahme nach von Null verschieden ist.

Die obige Umwandelung hat aber nur solange einen Sinn, wenn $G_0+\psi$ nicht Null ist. Wir koennen aber stets das $xy.$ so bestimmen, dass $|\psi|<|G_0|$. Wir denken uns also ~~welche~~ solche Werthe für $xy\ldots$ bestimmt, und dann ψ_0 berechnet, welches die Eigenschaft hat, dass $|\psi_0|<|G_0|$. Wenn wir nun die Umgebung von $x_0 y_0\ldots$ so wählen, dass alle Werthe von xy in der Umgebung die Bedingung erfüllen, dass

$|\psi| \leqq |\psi_0|$, (welche Werthe innerhalb eines bestimmten Kreises um $x_0\, y_0 \ldots$ liegen werden), so haben wir

$$\frac{1}{G_0+\psi} = \sum_\mu (-1)^\mu \frac{\psi^\mu}{G_0^{\mu+1}}, \text{ also auch} \qquad 3$$

$$\frac{F_0+\varphi}{G_0+\psi} = \sum_\mu (-1)^\mu F_0 \frac{\psi^\mu}{G_0^{\mu+1}} + \sum_\mu (-1)^\mu \varphi \frac{\psi^\mu}{G_0^{\mu+1}} \qquad 4$$

und jedes einzelne Glied der Summe ist eine Potenzreihe von $x-x_0$, $y-y_0$, ... Denken wir uns für den Augenblick gesetzt $x-x_0=u$, $y-y_0=v$, ..., so haben wir in 4 jedes Glied in eine Potenzreihe von $u, v \ldots$. Nun denken wir uns aus ψ eine neue Reihe gebildet, indem wir hierin jeden Coeffi-cienten auf seinen absoluten Betrag reduciren und bezeichnen diese mit $\overline{\psi}$ ebenso statt φ führen wir eine analoge Function $\overline{\varphi}$ ein. Nun können wir für

$x-x_0=u$ .. solche Grenzen angeben

daß für alle Werthsysteme u, v.. deren absolute Beträge kleiner sind als die Grenzen

$$\overline{\psi} < |\psi_0| \text{ ist.}$$

Nun betrachten wir die Reihe, deren allgemeines Glied ist

$$\frac{\overline{\psi}^\mu}{|G_0|^{\mu+1}}; \text{ diese Reihe hat die Eigenschaft,}$$

daß die Summe von beliebig vielen Gliedern derselben stets unterhalb einer festen Grenze liegt. Dasselbe gilt von der Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\overline{\varphi}\,\frac{\overline{\psi}^\mu}{|G_0|^{\mu+1}}.$$

Die Reihen in 4 sind also nach dem Satze Seite 196 endlich und lassen sich beliebig in Gruppen theilen. Wir können sie in Gruppen nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ theilen und erhalten somit für alle Werthsysteme $x, y, \dots$ welche den obigen Bedingungen genügen $\frac{f_0 + \varphi}{g_0 + \psi}$, dargestellt als eine Potenzreihe von $x - x_0$, $y - y_0 \dots$

Hieraus folgt nun ohne Weiteres, dass sich

$\frac{F(x+h, y+k, \dots | ab)}{G(x+h, y+k \dots | ab \dots)}$ als Potenzreihe von $h, k, \dots$ darstellen läßt. Hierdurch ist auch nachgewiesen, dass die Functionen der betrachteten Art Differentialien besitzen. Nachdem wir die Existenz des Differentials nachgewiesen, können wir sagen, uns auf die vorigen Regeln stützend, dass z. B. bei Functionen einer Veränderlichen die Ableitung eine Function derselben Art ist. Denn wir hatten

$$d\varphi = \frac{g f' - f g'}{g^2}\, dx;$$

also die Ableitung ist wiederum eine gebrochene Function derselben Art, gültig in demselben Convergenzbereiche wie f, g gleichzeitig, sie besitzt also wiederum eine Ableitung. Dasselbe gilt so weiter und läßt sich leicht auf Functionen mehrerer Veränderlichen übertragen. Wir erhalten auf diese Weise den Satz: Jede Function, die als Quotient zweier ganzen Functionen darstellbar ist, die innerhalb eines bestimmten Bereiches definirt sind, ist differenzirbar und hat Ableitungen aller Ordnungen, welche innerhalb eines bei den ganzen Functionen gemeinschaftlichen

Convergenzbereiches gültig sind. Natürlich müssen hier solche Stellen ausgeschlossen werden, für welche der Nenner gleich Null wird.

Wenn man nun eine solche Function mehrerer Variablen hat, so kann man durch wirkliches Ausführen der Operation zeigen, dass auch bei diesen Functionen die Differentation nach der einen und dann nach der andern Variablen umgetauscht werden kann, also dass z. B.

$$D_x D_y f = D_y D_x f.$$

Daraus folgt nach dem allgemeinen Satze, dass die Reihenfolge der Operationen des Differenziirens überhaupt willkürlich ist. Es zeigt sich allgemein, dass bei der Beschränkung der Variablen auf einen Bereich, in welchem es keine Stellen giebt, für die der Nenner null ist, genau dieselben Regeln des Differenzirens bei diesen Functionen bestehen, welche bei ganzen Functionen stattfanden.

Ueber die Zeichen der Diff. rechnung.

Wie wir schon früher bemerkt haben, bezeichnet man das $n$te Differential, das heisst das Resultat der $n$maligen Differentation einer Function bei einer Veränderlichen, durch das Zeichen $d^n f(x)$, so dass man hat

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\, dx^n;$$

wo $f^{(n)}(x)$ die $n$te Ableitung der Function bedeutet.

man setzt dann auch $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ welches seinen unzweidentigen Sinn hat. Bei Functionen mehrerer Veränderlichen behält man dasselbe Bezeichnung, indem man also

$$\frac{d f(xy)}{dx}, \frac{d f(xy)}{dy}$$

setzt und darunter die partiellen Ableitungen von $f(xy)$ nach x, und nach y bezeichnet. Diese Bezeichnung ist an und für sich sinnlos, da ja man durch $d f(xy)$ das totale Differential bezeichnet und deshalb auch in manchen Fällen zweideutig.

So lange man mit vollständig unabhängigen Größen xy zu thun hat, geht es ~~machen~~ noch aus. Denkt man sich aber $x = \varphi(t)$

$y = \psi(t)$ so würde

$\frac{d f(xy)}{dx}$ einerseits das totale Differential der Function dividirt durch dx bezeichnen können, denn es ist ja y selbst eine Function von x, andrerseits die partielle Ableitung von $f(xy)$ nach x, y als constant angesehen. Diese Zweideutigkeit hebt man auf, sobald man sich der von Jacobi vorgeschriebenen Bezeichnung bedient. Jacobi bezeichnet nämlich die partielle Differentialaenderung einer Function durch das runde ∂, so daß man hat

$$\frac{\partial f(xy)}{dx} = \frac{D_x f(xy) dx}{\partial x} = D_x f(xy)$$

Ebenso $\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x \partial y} = \frac{D_x D_y f(xy)\, dy\, dx}{\partial x\, \partial y} = D_x D_y f(xy)$

Allgemein

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} f(xyz)}{\partial x^{\lambda} \partial y^{\mu} \partial z^{\nu}} = D_x^{\lambda} D_y^{\mu} D_z^{\nu} f(xyz)$$

man könnte auch die Cauchy'sche Bezeichnungsweise ersetzen durch folgende

$$D_x^{\lambda} D_y^{\mu} D_z^{\nu} f(xyz) = \partial_x^{\lambda} \partial_y^{\mu} \partial_z^{\nu} f(xyz).$$

Auch wendet man oft die Schreibart $\frac{\partial}{\partial x} f(xyz)$ im Sinne

$$\frac{\partial}{\partial x} f(xyz) = \frac{\partial f(xyz)}{\partial x} = \partial_x f(xyz).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(xyz) = \frac{\partial^2 f(xyz)}{\partial x \partial y} = \partial_x \partial_y f(xyz).$$

Auch wendet man gern die Bezeichnung der Function mit Indicibus wie bei einer Veränderlichen

$$f', f'', \dots f^{(n)}$$

welche Bezeichnung besonders dann einen Vortheil gewährt, wenn man nach der Ausführung der Operation für die Variablen specielle Werthe einsetzen soll. So ist z.B.

$$\left[\frac{\partial^{\lambda+\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial y^{\mu}} f(xy)\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = f^{(\lambda,\mu)}(a,b)$$

während

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial y^{\mu}} f(ab)$$ keinen Sinn haben würde.

Es gibt noch andere Bezeichnungen, mit diesen hier aber kommt man vollständig aus, indes entsteht hierbei keine Zweideutigkeit.

Sätze über Convergenzbereiche der Reihen.

Wenn wir zunächst eine ganze Function von x, eine Potenzreihe betrachten, so hat die Potenzreihe entweder einen unbeschränkten Convergenzbereich dann ist sie beständig convergirend, oder auch, sie hat einen beschränkten Conv. bereich, sodass sie ausserhalb desselben als ganze Function nicht mehr existirt. In letzterem Falle muss es an der Grenze des Conv. bereiches irgend eine Stelle geben wo die Function ein Verhalten zeigt, das von dem einer ganzen Function verschieden ist. Dieses Verhalten der Functionen an der Grenze des Conv. bereiches zu untersuchen, wird die Aufgabe dieses Kapitels sein. Die Resultate werden uns sehr wichtige Kriterien der Convergenz der Reihen abgeben, wonach wir im Stande sein werden den Conv. bereich der Function, ohne etwas über die Coefficienten der Reihe vorauszusetzen, a priori aus der Definition derselben herzuleiten. Um ein Beispiel zu haben, betrachten wir eine Function $\frac{f(x)}{g(x)}$ wo $f(x)$ u $g(x)$ in einem bestimmten Bereiche definirt sind. Denken wir uns den Quotienten in eine Potenzreihe entwickelt, so wird der Quotient innerhalb eines bestimmten, beiden Functionen $f(x)$, $g(x)$ gemeinschaftlichen Conv. bereiches, convergent sein, und es wird sich zeigen, dass der Conv. kreis des Quotienten dadurch definirt sein wird, dass an der Grenze desselben es wenigstens eine Stelle x_0 gibt, wofür ~~$\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ wird~~ $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \infty$ wird.

1

Es wird also auf der Grenze des Conv. kreises eine Stelle geben, für deren Umgebung $\frac{f(x)}{g(x)}$ beliebig groß gemacht werden kann, wenn man nur x hinreichend nahe an x_0 nimt. An dieser Stelle verliert der Quotient den Charakter einer ganzen Function. Im speciellen Falle wo $f(x)$ u $g(x)$ ganze Functionen sind, suche man diejenigen Stellen, wofür $g(x) = 0$ wird. Nimt man nun diejenige heraus, für welche x seinem absoluten Betrage nach am kleinsten ist, so wird der Conv. kreis für $\frac{f(x)}{g(x)}$ durch diese Stelle gehen. Hieraus werden sich sehr interessante und wichtige Folgerungen ziehen lassen. (So wird man mittelst dessen beweisen können, daß jede ganze Function wenigstens für einen Werth der Variablen x verschwinden muß.)

<u>Lehrsatz:</u> Es sei $F(x)$ eine beliebige ganze Function von x, eine Potenzreihe von x, innerhalb eines bestimten Bereiches definirt. Wählen wir innerhalb des Conv. bereiches desselben irgend eine Stelle (x_0), dessen absoluter Betrag r_0 sein möge und geben dem x_0 alle möglichen Werthe bei, welche denselben absoluten Betrag r_0 haben, oder was dasselbe ist, lassen wir das x_0 einen Kreis mit dem Radius r durchlaufen, so wird die Function $F(x)$ ~~ein~~ an irgend einer Stelle dieses Kreises einen dem absoluten Betrage nach größten Werth g erhalten. Wenn nun die

Function $F(x)$ die Gestalt hat

$$F(x) = \sum_0 \alpha_\mu\, x^\mu \text{ so wird}$$

$$|\alpha_0| \leqq g \text{ und allgemein}$$

$$|\alpha_\mu| \leqq g \cdot r_1^{-\mu} \text{ sein.}$$

Um diesen überaus wichtigen Satz elementar nachzuweisen, verfahren wir schrittweise.

1) Es sei zunächst $F(x)$ eine ganze rationale Function von x, l^{den} Grades, also

1 $$F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_l x^l$$

Nehmen wir nun irgend einen Werth x_0 an, und geben dem x alle möglichen Werthe, deren absolute Beträge gleich sind $|x_0| = r_1$. Zu dem Ende sei ξ eine complexe Größe, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, dann ist auch $|\xi^2| = 1$ u.s.w. Wir wollen nun unter x_0 einen positiven, reellen Werth verstehen, der gleich ist r_1. Legen wir nun dem x die Werthe bei

2 $$x_0,\ x_0\xi,\ x_0\xi^2, \ldots x_0\xi^{n-1}$$

so haben alle Werthe denselben absoluten Betrag x_0. Setzen wir dies in 1 ein, und summiren die daraus entspringenden Gleichungen, so erhalten wir nach Division durch n,

3 $$\frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} F(x_0\xi^\mu) = \alpha_0 + \frac{1}{n}\alpha_1 x_0 \frac{1-\xi^n}{1-\xi} + \frac{1}{n}\alpha_2 x_0^2 \frac{1-\xi^{2n}}{1-\xi^2} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n}\alpha_l x_0^l \frac{1-\xi^{ln}}{1-\xi^l}$$

Wählen wir nun das ξ so, daß keiner der Größen

$\xi, \xi^2, \dots \xi^l$ gleich 1 ist, was doch immer zu errei-
chen ist, auf unendlich viele Arten, da man nur z. B. für ξ eine Wurzel einer Gleichung $1-\xi^m=0$ zu nehmen hat, wo $m > l$. Daraus folgt, daß die Nenner in 3 stets endlich von n unabhängig und nie Null sind. Lassen wir nun das n wachsen, so wird jedes Glied auf der Rechten, mit Ausnahme von a_0, beliebig klein gemacht werden koennen, wenn man nur das n hinreichend groß nimmt.

Wir erhalten somit aus 3

$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=0}^{n-1} F(x_0 \xi^\alpha) + \delta_n$ wo δ_n dem absoluten Betrage 4
nach beliebig klein gemacht werden kann. Nun ist $F(x)$ eine stetige Function von x. Wenn also x den Kreis durchläuft, oder durch x_0 hindurchgeht, so muß für irgend eine Stelle des Kreises $F(x)$ einen dem absoluten Betrage nach größten, endlichen Werth bekommen. Diesen größten absoluten Betrag von $F(x)$ bezeichnen wir mit g. Daß g endlich ist, folgt unmittelbar daraus, daß $F(x)$ für endliche Werthe von x nicht beliebig groß gemacht werden ~~können~~. kann.

Setzen wir dies in 4 ein, so haben wir zunächst

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} F(x_0 \xi^\alpha)\right| \leqq \frac{1}{n} \cdot ng \leqq g$$

Also ist $|a_0| \leqq g + |\delta_n|$ da nun die Gleichung 4 5
für beliebig großes n gilt, und $|\delta_n|$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn man das n hinreichend groß nimmt,

so sehen wir, daſs wie wenig ich auch g ändere, die Gleichung 5 stets besteht, daſs heiſst die obere Grenze von $|a_0|$ ist g, also haben wir

6 $$|a_0| \leqq g.$$

2) Es sei ferner

7 $$F(x) = a_0 + a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \dots + a_r x^{m_r}$$

wo $m_1, m_2 \dots$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten mögen. Wenn ich dem x wiederum die Werthe $x_0, x_0 \xi, \dots$ beilege und die Gleichung summire, so erhalte ich ebenfalls

7 $$\frac{1}{n}\sum_{\mu} F(x_0 \xi^{\mu}) = a_0 + \frac{1}{n} a_1 x_0^{m_1} \frac{1-\xi^{m_1 n}}{1-\xi^{m_1}} + \frac{1}{n} a_2 x_0^{m_2} \frac{1-\xi^{m_2 n}}{1-\xi^{m_2}} + \dots$$

und wenn ich für ξ einen solchen Werth wähle daſs nie $\xi^{m_1}, \xi^{m_2} \dots$ gleich 1 ist, so erhalte ich durch dieselbe Schluſsweise auch hier

$$|a_0| \leqq g.$$

3) Nun sei $F(x)$ eine beliebige Potenzreihe von x, in der auch negative Potenzen von x in endlicher Anzahl vorkommen können, also

8 $$F(x) = \sum_{\mu} a_{\mu} x^{\mu}$$

Es sei nun x_0 ein positiver Werth von x, ~~unterhalb~~ innerhalb des Convergenzkreises von $F(x)$ und gebe dem x alle möglichen Werthe, deren absoluter Betrag gleich x_0 ist, und wird $F(x)$, da sie eine stetige Function von x ist, an irgend einer Stelle des Kreises, einen gröſsten absoluten Betrag g bekommen. Alle Werthe von x deren absoluter Betrag gleich x_0 ist, liegen nun innerhalb des Convergenzkreises von $F(x)$, d. h. es giebt noch Werthe von $x_1 (x_1) > x_0$, für welche noch die Convergenz der Reihe besteht. Aus der Convergenz folgt nun leicht

$|a_\lambda\, x_1^{\,\lambda}| < h$, für jedes λ, wo h eine feste positive Zahl ist. Es ist also

$|a_\lambda| < \frac{h}{|x_1|^\lambda}$ also auch für alle Werthe von x deren absoluter Betrag gleich $x_0 < |x_1|$ ist,

$|a_\lambda\, x^\lambda| < h\left|\frac{x}{x_1}\right|^\lambda$ und wenn wir dies von $\lambda = m$ bis $\lambda = \infty$ summiren, erhalten wir

$$\left|\sum_{m}^{\infty}{}_\lambda\, a_\lambda\, x^\lambda\right| \leq \sum_{m}^{\infty}{}_\lambda |a_\lambda\, x^\lambda| < h\left|\frac{x}{x_1}\right|^m \frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_1}\right|} \qquad 9$$

Für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag gleich ist x_0 haben wir aber $\left|\frac{x_0}{x_1}\right| = \frac{x_0}{|x_1|} < 1$; ich kann also für alle diese Werthe von x die Summe 9 beliebig klein machen, wenn ich nur das m hinreichend gross gewählt habe, oder anders gesagt, nach Annahme einer beliebigen kleinen Grösse δ, kann ich m stets so bestimmen, dass

$$h\left|\frac{x}{x_1}\right|^m \frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_1}\right|} < \delta \text{ ist.}$$

Nun theilen wir $F(x)$ in 2 Theile nämlich

$$\sum_{h}^{m-1}{}_\lambda\, a_\lambda\, x^\lambda = F(x) - \sum_{m}^{\infty}{}_\lambda\, a_\lambda\, x^\lambda = F(x) - F_m(x) \qquad 10$$

Nun ist zunächst

$$|F(x)| \leq \left|\sum_{h}^{m-1}{}_\lambda\, a_\lambda\, x^\lambda\right| + |F_m(x)| \qquad 11$$

12 oder $|F(x)| \leq |\sum_{h}^{m-1} a_\mu x^\mu| + \delta_m$

wo δ_m beliebig klein gemacht werden kann. Wenn wir nun mit g' die obere Grenze von der Function $|\sum_{h}^{m-1} a_\mu x^\mu|$ für den Umfang des Kreises, der durch x_0 geht bezeichnen, und wenden wir auf die linke Seite den Satz №2, so folgt

$|a_0| \leq g'$ und wenn g das Maximum von $|F(x)|$ bezeichnet, so ist

$$g \leq g' + \delta_m \text{, also ist auch}$$

$|a_0| \leq g - \delta_m$. da ich nun δ_m beliebig klein machen kann, so ist

13 $$|a_0| \leq g.$$

Um nun die analoge Relation für einen beliebigen Coefficienten herzuleiten, betrachten wir in

$F(x) = \sum a_\mu x^\mu$ einen Coefficienten z. B. a_μ.

Multipliciren wir diese Reihe mit $x^{-\mu}$, so erhalten wir

14 $$F(x)\, x^{-\mu} = a_\mu + \dots$$

wo a_μ, das von x unabhängige Glied bedeutet.

Bezeichnen wir mit g' das Maximum des absoluten Betrages von $F(x)\, x^{-\mu}$, den diese Function auf dem Kreise erreichen kann, so haben wir:

$$g' = \max.|F(x)\, x^{-\mu}| = x_0^{-\mu} \max.|F(x)|$$
$$= x_0^{-\mu} g$$

Wenden wir nun auf 14 den Satz 3 an, so folgt

14 $$|a_\mu| \leq g \cdot x_0^{-\mu}$$

Es ist also der Satz in voller Allgemeinheit nachgewiesen. Wenn wir also in einer beliebigen Function, die als eine Potenzreihe von x gegeben ist, in welcher negative Potenzen von x nur in endlicher Anzahl vorkommen, die Variablen x einen Kreis innerhalb des Convergenzkreises durchlaufen lassen, mit dem Radius x_0 und das Maximum des absoluten Betrages von $F(x)$ bestimmen, das diese Function auf dem Kreise erhalten kann, so findet dann zwischen diesem Maximum und den Coefficienten die Relation 14 statt.

<u>Folgerung</u> Wir hatten früher den Satz gehabt, dass wenn

$|a_\mu x_1^\mu| < h$, dass dann die Reihe $\sum a_\mu x^\mu$ convergirt, für alle Werthe von x, für welche $|x| < |x_1|$.

Nun erhalten wir aus 14

$|a_\mu x^\mu| \leq g\left|\frac{x}{x_0}\right|^\mu$, so dass wir hier die Bedeutung der Grösse h klar ersehen.

Den vorigen Satz kann man erweitern auf Functionen mehrerer Veränderlichen.

<u>Lehrsatz.</u> Es sei $F(x_1, x_2 \dots x_k)$ eine Function, die gegeben ist in der Form

$$F(x_1, x_2 \dots x_k) = \sum_{m_1 \dots} c\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$$

wo die m's positive und negative Zahlen bedeuten mögen, die negativen aber in einer endlichen Anzahl, und man wählt in dem Conv. bereiche eine Stelle $x_1, x_2 \dots x_k$ wofür die absoluten Beträge resp. $r_1, r_2 \dots r_k$ sein mögen, gibt dann den $x_1, x_2 \dots x_k$ alle möglichen Werthcombinationen, wobei jedes x nur Werthe annehmen soll, die auf dem entsprechenden Kreise mit dem Radius r liegen, indem man setzt

$$x_\lambda = r_\lambda \xi_\lambda^{\nu_\lambda} \quad \text{und} \quad |\xi_\lambda| = 1$$

so wird die Function $F(x_1, x_2 \dots x_k)$ für irgend eine Combination der Werthsysteme $x_1 \dots x_k$ dem absoluten Betrage nach einen größten Werth g erhalten.

Alsdann gilt der Satz, daß

$$|c_{\lambda\mu\nu\dots}| \leqq g\, r_1^{-\lambda} r_2^{-\mu} r_3^{-\nu} \dots$$

Auch hier beweisen wir den Satz für endliche Anzahl von Gliedern. Es sei

$$F(x_1, x_2 \dots x_k) = c_0 + \sum c\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$$

wo die $m_1 m_2 \dots$ beliebige endliche Werthe annehmen kann, nur dürfen nicht alle gleichzeitig Null sein, denn c_0 soll alle Glieder zusammenfassen, welche kein x enthalten.

Nun geben wir jedem x_λ die Werthe $x_\lambda = r_\lambda \xi_\lambda^{\nu_\lambda}$ und bilden die Summe

$$\sum_{\substack{\nu_1 = 0 \dots s-1 \\ \dots \\ \nu_k = 0 \dots s-1}} F(r_1 \xi_1^{\nu_1}, \dots r_k \xi_k^{\nu_k})$$ und dividiren dies durch s^k

Betrachten wir nun

15 $$\frac{1}{s^k} \sum_{\substack{\nu_1 = 0 \dots s-1 \\ \dots \\ \nu_k = 0 \dots s-1}} c\, r_1^{m_1} \dots r_k^{m_k} \xi_1^{\nu_1 m_1} \dots \xi_k^{\nu_k m_k} = c\, r_1^{m_1} \dots r_k^{m_k} \cdot \frac{1}{s} \sum_{\nu_1} \xi_1^{\nu_1 m_1} \cdot \frac{1}{s} \sum_{\nu_2} \xi_2^{\nu_2 m_2} \dots \frac{1}{s} \sum_{\nu_k} \xi_k^{\nu_k m_k}$$

Für jeden Factor auf der Rechten erhalten wir nun

$$\frac{1}{s}\sum_{\nu}\xi^{\nu m}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-\xi^{ms}}{1-\xi^{m}} \qquad 16$$

nun unterscheiden wir 2 Fälle, 1tens m ist von Null verschieden. Wenn wir ξ so wählen, daß ξ^{m} nicht gleich 1 ist, so wird das Glied 16 mit wachsendem s sich der Grenze Null nähern. Alle Glieder in 15 rechts werden sich also der Null nähern mit wachsendem s, wenn die m's von Null verschieden sind. 2tens sei $m=0$ so erhalten wir

$$\frac{1}{s}\sum_{\nu}\xi^{\nu m}=\frac{1}{s}\cdot s=1$$

da nun in 15 nie alle m's auf einmal Null sein können, so wird sich stets das Product in 15 der Grenze Null nähern wenn man das s wachsen läßt. Wenn ich nun den absoluten Betrag der oberen Grenze von F mit g bezeichne, so habe ich

$$\frac{1}{s^k}\left|\sum F(r_1\xi_1^{\nu_1}\dots r_k\xi_k^{\nu_k})\right|\leq g$$

Da sich aber die Größe rechts von c_0 und eine beliebig kleine Größe von (α) unterscheidet, so haben wir

$$|c_0|\leq g \qquad 17$$

Um diesen Satz für beliebige Potenzreihen von $x_1 \dots x_k$ in welcher auch negative Potenzen von $x_1 \dots$ in endlicher Anzahl vorkommen können, nachzuweisen, ist es nur nöthig zu zeigen, daß man von einer solchen Potenzreihe stets eine endliche Anzahl von Gliedern in welchen die Summe der Exponenten kleiner ist als n, so abzusondern, daß der Rest der Reihe beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur das n hinreichend klein annimmt. Zu dem Ende sei das allgemeine Glied der Potenzreihe

$$c\, x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_k^{\lambda_k}$$

Nun ist der absolute Betrag der Summe kleiner oder höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge. Wenn wir also nachgewiesen haben, daß dies bei der Summe der absoluten Beträge möglich ist, so wird es möglich sein von der ursprünglichen Reihe den Rest so zu bestimmen, daß er dem absoluten Betrage nach kleiner ist als δ.

Die Werthe, welche $x_1 \ldots x_k$ annehmen können, haben alle die absoluten Beträge $r_1 \ldots r_k$, welche noch innerhalb des Conv. bereiches liegen. Es ist somit möglich, Größen $\varrho_1 \ldots \varrho_k > r_1 \ldots r_k$ so zu bestimmen, daß noch $\varrho_1 \ldots \varrho_k$ innerhalb des Conv. bereiches liegen. Wegen der Endlichkeit der Reihe ist der absolute Betrag jeden Gliedes für $x_1 \ldots x_k = \varrho_1 \ldots \varrho_k$ kleiner als eine feste endliche Grenze h, also kleiner als

$$h \left|\frac{x_1}{\varrho_1}\right|^{\lambda_1} \left|\frac{x_2}{\varrho_2}\right|^{\lambda_2} \cdots \left|\frac{x_k}{\varrho_k}\right|^{\lambda_k}$$

für alle Werthcombinationen von $x_1 \ldots x_k$ welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_k$. Nun durchläuft in unserem Falle jedes $x_1 \ldots x_k$ einen Kreis mit den Radien $r_1 < \varrho_1,\ r_2 < \varrho_2 \ldots$ also ist der absolute Betrag eines jeden Gliedes unserer Reihe für beliebige Werthcombinationen der

18 $x_1 \ldots x_k$ auf den Kreisen kleiner als $h \left|\frac{r_1}{\varrho_1}\right|^{\lambda_1} \left|\frac{r_2}{\varrho_2}\right|^{\lambda_2} \cdots \left|\frac{r_k}{\varrho_k}\right|^{\lambda_k}$.

Nun ist die Reihe, deren allgemeines Glied 18 ist, convergent und ihre Summe gleich

$$h \cdot \frac{1}{1-\frac{r_1}{\rho_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{r_2}{\rho_2}} \cdots \frac{1}{1-\frac{r_k}{\rho_k}}$$

Wenn nun ε den größten der Quotienten $\frac{r}{\rho}$ bedeutet, so ist

$$h \frac{1}{1-\frac{r_1}{\rho_1}} \cdots \frac{1}{1-\frac{r_k}{\rho_k}} < h \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} \qquad 19$$

Wenn ich nun nur diejenigen Glieder betrachten will in welchen $\mu_1 + \mu_2 + \dots \mu_k \geqq n$ ist, so habe ich von

$h \frac{1}{(1-\varepsilon)^k}$ abzuziehen, alle Glieder für welche

$\mu_1 + \dots + \mu_k < n$ ist. Für den Rest folgt

$$h \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} - h(1 + c_1 \varepsilon + \dots + c_{n-1} \varepsilon^{n-1})$$

Dieser veränderte Rest kann aber beliebig klein gemacht werden und der Rest der Reihe

$$\sum h \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{r_k}{\rho_k}\right)^{\mu_k} \qquad 20$$

kleiner ist, als der verwandelte Rest, so wird der Rest von 20 kl. auch ~~kl.~~ beliebig klein gemacht werden können

Daraus schliessen wir folgendes:

Wenn wir eine Potenzreihe $\sum c\, x_1^{\mu_1} \cdots x_k^{\mu_k}$ haben, worin negative Potenzen in endlicher Anzahl vorkommen, und eine beliebige, kleine Größe δ festsetzen, so kann ich n stets so bestimmen, dass die Summe der Glieder für welche

$\mu_1 + \mu_2 \dots + \mu_k \geqq n$, dem absoluten Betrage nach kleiner ist als δ für alle Werthe von $x_1 \dots x_k$ innerhalb des conv. Bereiches der Reihe.

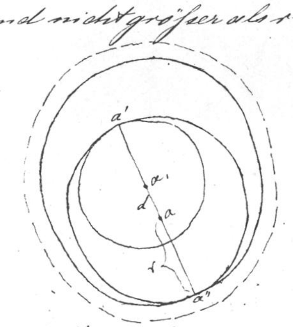
Nun gelangen wir durch dieselben Schlüsse, wie bei dem 1ten Satze, dass, wenn g das max. des absoluten Betrages von $F(x_1 \dots x_k)$

ist für irgend eine Werthcombination auf den Kreisen $r_1 \dots r_k$, stets ist

21 $$|c_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_k}| \leq g\, r_1^{-\nu_1}\, r_2^{-\nu_2} \dots r_k^{-\nu_k}$$

Diese beiden Sätze werden gewöhnlich mittelst der Integralrechnung nachgewiesen; hier sind sie ganz elementar bewiesen. Nun wollen wir uns zunächst mit Potenzreihen einer Variablen beschäftigen.

Lehrsatz: Es sei $\mathfrak{P}(x|a)$ eine ganze Potenzreihe innerhalb eines bestimmten um a liegenden Conv. bereiches definirt. Ich wähle nun innerhalb des Convergenzbereiches einen Punkt a_1 beliebig aus, und wandle die Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$ in eine neue $\mathfrak{P}_1(x|a_1)$. Wenn nun der Convergenzradius der 1ten Reihe gleich r ist, und der Abstand der Punkte $a\, a_1$ gleich d, so ist der Convergenzradius der 2ten Reihe $\mathfrak{P}_1(x|a_1)$ sicher nicht kleiner als $r-d$ und nicht größer als $r+d$.



Es sei der Kreis um a mit dem Radius r der Conv. kreis der Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$. Wählen a_1 innerhalb desselben und wandeln $\mathfrak{P}_1(x|a)$ in $\mathfrak{P}_1(x|a_1)$ um. Diese 2te Reihe stimmt, wie wir es nachgewiesen haben, mit der ursprünglichen Reihe überein für alle Werthe von x, für welche

$$|x-a_1|+|a_1-a|<r \text{ ist,}$$

d. h. die zweite Reihe $G_1(x|a_1)$ hat Sinn für alle Werthe von x welche innerhalb eines um a_1 mit dem Radius $r-d$ beschriebenen Kreises liegen, also ihr Convergenzradius ist wenigstens $r-d$. Um den 2^ten^ Theil nachzuweisen, beschreiben um a_1 einen Kreis mit dem Radius $\overline{a_1 a''} = r+d$ und einen zweiten mit einem Radius $r+d$. Nehmen wir an, die zweite Reihe $G_1(x|a_1)$ convergire noch innerhalb dieses größeren Kreises, alsdann wird a innerhalb des Convergenzkreises mit einem Radius $r+d$ liegen. Nun können wir aus $G_1(x|a_1)$ eine neue Reihe herleiten $G_2(x|a)$.

Nehme ich nun x innerhalb des Kreises um a_1 mit dem Radius $r-d$, so haben wir für alle diese Punkte

$$G(x|a) = G_1(x|a_1) \qquad 1$$

Dieselben Punkte liegen aber auch in dem Conv. kreise von $G_1(x|a_1)$ und $G_2(x|a)$ unserer Annahme nach, d. h. der ganze Conv. kreis von $G_2(x|a)$ liegt innerhalb des Conv. kreises von $G_1(x|a_1)$, also haben wir sicher für alle diese Punkte

$$G_1(x|a_1) = G_2(x|a) \qquad 2$$

Für die Punkte des Kreises um a gilt aber auch die Reihe $G(x|a)$, also haben wir innerhalb des um a beschriebenen Kreises

$$G(x|a) = G_1(x|a_1) = G_2(x|a) \text{ d. h.}$$

$$G(x|a) = G_2(x|a) \qquad 3$$

Diese Potenzreihen von $(x-a)$ stimmen innerhalb eines

Bereiches überein, was nur dann möglich ist, wenn sie in den Coefficienten übereinstimmen. Da nun für alle diese Werthe

$$G(x|a) - G_2(x|a) \equiv 0 \text{ sein muss, so ist}$$

$$(c_\mu - c'_\mu)(x-a)^\mu + (c_{\mu+1} - c'_{\mu+1})(x-a)^{\mu+1} + \cdots \equiv 0$$

Daraus folgt, da ich $x - a$ beliebig klein und von Null verschieden annehmen kann

4 $$(c_\mu - c'_\mu) + (c_{\mu+1} - c'_{\mu+1})(x-a) + \cdots \equiv 0.$$

Nun kann ich, wenn ich $x - a$ hinlänglich klein mache

$$|(c_{\mu+1} - c'_{\mu+1})(x-a) + \cdots| < \delta, \text{ also muss stets}$$

$$|c_\mu - c'_\mu| < \delta$$ da aber c_μ u. c'_μ von $x-a$ unabhängig ist, so muss $c_\mu \equiv c'_\mu$ sein u.s.w.

Wenn wir nun mit r_1 den Convergenzradius der Reihe $G_1(x|a_1)$ bezeichnen, so wissen wir, dass der Convergenzradius von $G_2(x|a)$ oder, was dasselbe ist, von $G(x|a)$ nie kleiner ist als $r_1 - d$, oder $r \geqq r_1 - d$ und daraus folgt

$$r_1 \leqq r + d \quad \text{w. z. b. w.}$$

<u>Folgerungen</u>

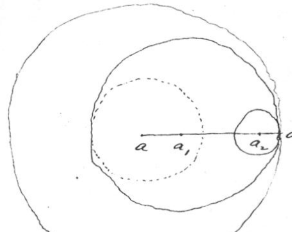
1) Wenn wir von a zu dem unendlich nahen Punkte a_1 übergehen, und $G(x|a)$ in $G_1(x|a_1)$ umwandeln, so wird sich der Convergenzradius von $G_1(x|a_1)$, unendlich wenig von dem der Reihe $G(x|a)$ unterscheiden. Wir sehen also, dass der Radius der abgeleiteten Reihe eine Function von a ist, und zwar eine stetige Function. Haben wir

also eine Reihe $G(x)$ und wählen $x' = u + iv$ beliebig in dem Convergenzbereich, so wird die Reihe $G_1(x|x')$ einen neuen Radius r' haben, der sich stetig mit x' ändert, also ist $r' = f(u, v)$. Zu jedem Werthe von x' oder zu jeder Werthcombination von u, v gehört ein r'. Die Analysis führt uns also auf Functionen, von denen wir nichts weiter wissen als die Stetigkeit.

Es ist wahrscheinlich, dass r' nicht immer ein Differential hat.

2) Wenn wir aus einer Reihe mit beschränktem Convergenzbereiche neue Reihen herleiten, so können wir nie zu einer beständig convergirenden Reihe gelangen. Aus beständig convergirenden Reihen hergeleitete Reihen werden auch beständig convergent sein.

3. Wenn wir innerhalb des Conv. Kreises von $G(x|a)$ einen Punkt wählen a_1, so dass $\overline{aa_1}$ kleiner ist als $\frac{1}{2}$ Radius des Conv. Kreises von $G(x|a)$ und dann eine Reihe $G_1(x|a_1)$ herleiten, so kann ich umgekehrt aus $G_1(x|a_1)$ direct $G(x|a)$ herleiten. Wir können nämlich



die Reihen bilden $G(x|a)$, $G_1(x|a_1)$, $G_2(x|a)$.

Nun stimmt $G(x|a)$ mit $G_1(x|a_1)$ innerhalb des Kreises um a_1 überein und $G_2(x|a)$ mit $G_1(x|a_1)$ innerhalb im Kreise um a überein; daraus folgt, daß innerhalb des Kreises um a

$$G(x|a) = G_1(x|a) = G_2(x|a) \text{ also.}$$

$$G(x|a) \equiv G_2(x|a).$$

Wenn ich aber a_2 näher an die Peripherie nehme, so daß $\overline{a\,a_2} > \frac{1}{2} r_1$ so ist dies nicht möglich und auch aus

$G_1(x|a_2)$ kann ich nur durch Vermittelung neuer Punkte $G(x|a)$ herleiten.

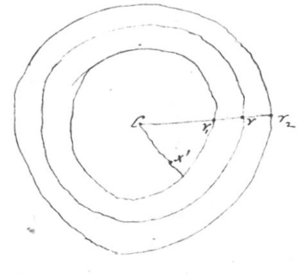
Alle diese Sätze bleiben bestehen bei Potenzreihen mehrerer Veränderlichen, was wir aber erst später zeigen wollen.

Wie wir schon in der Folgerung 1 gesehen haben, ist der Convergenzradius r' eine stetige Function der Werthe x' innerhalb des Conv. kreises der ursprünglichen Reihe; es wird also eine untere Grenze ϱ haben.

<u>Lehrsatz</u>: Es sei $G(x)$ eine ganze Function von x mit dem Convergenzradius r. Wenn r der wahre Conv. radius ist, so ist die untere Grenze von r' $\varrho = 0$.

Angenommen es sei $G(x)$ eine ganze Function, von der wir wissen, daß sie convergent ist für alle Werthe von x, für welche $|x| < r$; wissen aber nicht ob r der wahre Conv. radius der Reihe $G(x)$ ist. Leiten wir aus $G(x)$ eine Reihe $G(x|x')$, wo x' innerhalb des Conv. kreises von $G(x)$ liegt, und bestimmen den neuen Radius des Conv. kreises von $G(x|x')$, r'. Wenn es sich zeigt, daß die untere Grenze von r gleich ϱ nicht null ist, so kann man nachweisen, dass die ursprüngliche Reihe $G(x)$ auch convergent ist für x, dessen $|x| > r$ ist.

Nehmen wir an, es sei ϱ von null verschieden; alsdann können wir eine positive Grösse d bestimmen, so dass $d < \varrho$ ist.



Nun haben wir

$$G(x|x') = \sum_\mu \frac{1}{\mu!} G^{(\mu)}(x')(x-x')^\mu \qquad 1$$

Setzen wir $x = x'+h$ so haben wir

$$G(x'+h) = \sum_\mu \frac{1}{\mu!} G^{(\mu)}(x') h^\mu \qquad 2$$

Nehmen wir nun an 2 Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius r_1 u. r_2, so dass

$$r_2 - r_1 < d$$ ist und in gleicher Zeit soll r_1 möglichst nahe an r liegen, damit r_2 ausserhalb des Kreises mit dem Radius r zu liegen kommt. Dies gibt folgende Bedingung. Aus 3 folgt

$$r_2 - r < d - (r - r_1)$$ nun soll r_2 hinaus d.h. $r_2 - r$ positiv sein, also muss

$$d + r_1 > r_1 \text{ oder}$$

$$r_1 > r - d \qquad 4$$

Nun beschränken wir x auf das Innere und den Umfang des Kreises mit dem Radius r_1, wenn ich nun h nicht grösser annehme als d, so liegt $x+h$ innerhalb des

Conv.-bereiches von $G(x)$; denn es ist

$$|x'+h| \leqq |x'| + |h|$$

Wenn also x' den Kreis r_1 durchläuft und $|h| = d$ gesetzt wird, so erhalten wir höchstens

$$|x'+h| \leqq r_1 + d \text{ und ist}$$

$$r < r_1 + d.$$

Da das Minimum von r' gleich ϱ von Null verschieden ist, so wird

$$G(x'+h) = \Sigma_\mu \frac{1}{\mu!} G^{(\mu)}(x')h^\mu$$ auch dann convergent sein, wenn man x' auf dem Kreis mit dem Radius r_1 annimmt, und dem h Werthe gibt, welche innerhalb des von x' beschriebenen Kreises liegen. Nun ist der Annahme nach, wie man auch das x wählen mag, der Radius dieses Conv.-kreises gleich ϱ von Null verschieden. Da wir nun $d < \varrho$ angenommen haben, so wird also die Function $G(x'+h)$ convergent sein für alle x' auf dem Kreise mit dem Radius r_1 und für alle h deren absoluten Beträge gleich sind d. Durchläuft nun h die Werthe auf dem Kreis, der um x' mit dem Radius h beschrieben ist, so wird $G(x'+h)$ dem absoluten Betrage nach eine endliche obere Grenze g haben, deren Existenz wir nachher nachweisen wollen. Nehmen wir nun an, dass die obere Grenze wirklich existirt, so haben wir nach dem Satze Seite 265

/

$$\left|\frac{1}{\mu!}\, G^{(\mu)}(x')\right| \leqq g\, d^{-\mu}$$ 5

Jetzt will ich nachweisen, daß die Function $G(x)$ in welcher das allgemeine Glied mit $c_\mu x^\mu$ bezeichnet werden möge, noch convergent für Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach größer sind als r. Dazu ist nur nöthig nachzuweisen, daß noch $c_\mu r_2^{\,\mu}$ wo $r_2 > r$ ist, stets endlich und unterhalb einer festen Grenze liegt. Zu dem Ende betrachte ich folgende Reihe

$$F(x') = G(x') + \frac{\varepsilon x'}{1} G'(x') + \frac{(\varepsilon x')^2}{2!} G^{(2)}(x') + \dots + \frac{(\varepsilon x')^n}{n!} G^{(n)}(x')$$ 6

wo ε eine positive Größe bedeutet. Geometrisch bedeutet dies, wenn man $\varepsilon x' = h$ setzt, daß das h ein Punkt ist, der in der Strecke $0x'$ liegt. Diese Function 6 hat zunächst einen endlichen Werth, weil sie doch ein Theil von $G(x' + \varepsilon x')$ ist, sobald $|\varepsilon x'| \leqq d$ ist. Sie besteht ferner aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, deshalb kann ich sie in eine Potenzreihe von x' umwandeln. Um nun den Coefficienten von x'^n zu bestimmen, bemerken wir, daß wir aus jedem G', $G^{(2)}$ . . alle Glieder weglassen können in denen die Potenzen von x' höher sind als n. Bezeichnen wir für den Augenblick mit $\bar{G}^{(\mu)}(x')$ dasjenige was wir aus $G^{(\mu)}(x')$ erhalten nach Weglassung in 6 der höheren Potenzen von x' als die n^{te}. Alsdann wird uns die Function

$$\bar{G}(x') + \frac{\varepsilon x'}{1} \bar{G}'(x') + \dots + \frac{(\varepsilon x')^n}{n!} \bar{G}^{(n)}(x')$$ denselben 7

Coefficienten von x'^n liefern. Diese Function ist nun eine ganze Function n^{ten} Grades, die ich aus $\bar{G}(x'+\varepsilon x')$ erhalte, wenn ich hierin alle Glieder weglasse, in denen höhere Potenzen von $x'+\varepsilon x'$ vorkommen als n. Ich erhalte also:

8 $$\bar{G}(x'+\varepsilon x') = \bar{G}(x') + \frac{\varepsilon x'}{1}\bar{G}^{(1)}(x') + \dots + \left(\frac{\varepsilon x'}{n!}\right)^n \bar{G}^{(n)}(x')$$

Nun ist aber auf der linken Seite der Coefficient von x'^n gleich $c_n(1+\varepsilon)^n$. Also haben wir wenn wir mit $\left[F(x')\right]_{x'^n}$ den Coefficienten von $F(x')$ bei x'^n bezeichnen,

9 $$\left[F(x')\right]_{x'^n} = c_n(1+\varepsilon)^n$$

Wenn ich nun dem x' in $F(x')$ alle Werthe beilege wofür $(x') = r_1$, so wird $F(x')$ eine obere Grenze erreichen, deren absoluter Betrag sei f. Wir haben demnach:

10 $$|c_n| \cdot (1+\varepsilon)^n \leqq f \cdot r_1^{-n}$$

Ich erhalte aber bei Anwendung der Formel 5 noch eine andere Bedeutung der Grenze von $|c_n|\, r_2^n$. Wir haben wegen 5

11. $$|F(x')| \leqq g(1 + \varepsilon r_1 d^{-1} + \dots + (\varepsilon r_1)^n d^{-n})$$

Wenn ich nun festsetze, daß

$(\varepsilon r_1) d^{-1} < 1$ sein soll, so ist sicher die obige Summe kleiner als

12 $$g \frac{1}{1-\frac{\varepsilon r_1}{d}}$$

Diese Bedingung für ε ist aber erfüllt, wenn ich

$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_1}$ setze, denn es ist alsdann

$$\frac{\varepsilon r_1}{d} = \frac{r_2 - r_1}{d} < 1$$

nun haben wir

$$f < g \cdot \frac{1}{1-\frac{r_2-r_1}{d}} = g \cdot \frac{d}{r_1+d-r_2}$$ und dies in 10 gesetzt 13

liefert $|c_n| \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \leqq g \cdot \frac{d}{r_1+d-r_2}\, r_1^{-n}$ also

$$|c_n|\, r_2^{\,n} \leqq g \frac{d}{r_1+d-r_2}$$

Die Größe g ist von n unabhängig, also haben wir das Resultat, daß die Reihe $G(x)$ die Eigenschaft hat, daß noch $|c_n|\, r_2^n|$ unterhalb einer festen unveränderlichen Grenze liegt, obgleich $r_2 > r$. Demnach hat die Reihe $G(x)$ einen endlichen Werth für alle x, die dem absoluten Betrage nach kleiner sind als r_2, und dies gilt, wie nahe ich auch r_1 an r annehme. Denke ich mir nun r_1 näher gerückt an r, so wird aus r_2 $r_2' > r_2$ und die vorigen Schlüsse gelten auch für r_2', demnach wird die Reihe $G(x)$ noch einen endlichen Werth haben für Werthe deren absoluter Betrag gleich $r_2 > r$. Das heißt die Reihe $G(x)$ convergirt noch außerhalb des ursprünglichen C. kreises mit dem Radius r. Sobald als die untere Grenze des $r' = \varrho$ von Null verschieden ist, wie man auch so nahe an der Peripherie nimmt, oder genauer gesprochen, sobald ϱ in dem C. Kreise mit dem Radius r nicht unendlich klein wird, so ist r nicht der wahre C. radius von $G(x)$, da die Convergenz noch weiter geht. Daraus schließen wir unmittelbar, daß sobald r der wahre C. radius ist, ϱ unendlich klein werden muß für irgend eine Stelle. Denn angenommen ϱ könnte nirgends unendlich klein werden, so wäre r nicht der wahre Conv. radius, was gegen die Voraussetzung ist. Also muss, wenn r der wahre Conv. radius ist, ϱ irgendwo unendlich klein werden können.

Auch sieht man unmittelbar, dass wenn ϱ stets > Null ist, der Convergenzradius von $G(x)$ bis in $r+d$ gebracht werden kann, wo $d < \varrho$ ist.

Hilfsätze.

Bei dem vorigen Satze haben wir vorausgesetzt, dass die Function $G(x+h)$ welche für jede Combination von x u. h die gewissen Bedingungen unterworfen sind, einen endlichen Werth hat, so dass für sie eine obere Grenze existirt, die sich an irgend einer Stelle erreicht. Mit anderen Wörter, wir haben vorausgesetzt, dass die Function, welche für bestimte Werthe von x u. h definirt ist an irgend einer Stelle einen Werth erreicht, der dem absoluten Betrage nach der grösste ist, unter allen die die Function überhaupt annehmen kann. Diese Annahme ist aber nicht selbstverständlich, denn in dem Begriff der Grenze liegt gar nicht die Nothwendigkeit, dass die Grenze selbst zu den Werthen der Variablen gehört, d. h. es ist gar nicht selbstverständlich, dass eine variable Grösse, für welche eine obere (oder untere) Grenze stets existirt, diese Grenze selbst mal erreicht.

Um die obige Annahme streng zu beweisen, wollen wir einige Hilfsätze entwickeln, die uns auch bei den späteren Untersuchungen von großem Nutzen sein werden.

I Satz. Im Gebiete einer reellen Größe x, sei eine Größe x' auf irgend eine Weise definirt, jedoch so, daß sie unendlich viele Werthe annehmen kann, die zwischen 2 endlichen Grenzen a, b, liegen. Es soll bewiesen werden, daß es in dem Gebiete von x wenigstens eine Stelle gibt α, von der Eigenschaft, daß in jeder noch so kleinen Umgebung von α, es unendlich viele Werthe von x' gibt. Mit anderen Worten, es gibt in dem Gebiete von x sicher eine Stelle α, so daß nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ, es stets Werthe von x' gibt, die zwischen $\alpha+\delta$ und $\alpha-\delta$ liegen, und zwar unendlich viele solche Werthe.

Hierbei wollen wir die Gesamtheit der Werthe von x' zwischen a b, die Grenze selbst ausgeschlossen, die Strecke nennen. Denken wir uns unter n eine beliebige ganze große Zahl, und unter u eine ganze positive oder negative Zahl, so können wir das ganze Intervall zwischen a b theilen in Intervalle, welche Werthe von x' enthalten, die zwischen $\frac{u}{n}$ und $\frac{u+1}{n}$ liegen. Wir unterscheiden alsdann frühere und spätere Bereiche nach folgender Definition. Wenn wir $\frac{u}{n}$, $\frac{u+1}{n}$; $\frac{u'}{n}$, $\frac{u'+1}{n}$ vergleichen und finden daß $u'-u$ positiv ist so ist $\frac{u}{n}$.. der frühere Bereich als $\frac{u'}{n}$..; Wir bilden also die

Intervalle

$$\dots\left(-\frac{2}{n},-\frac{1}{n}\right),\left(-\frac{1}{n},0\right),\left(0,\frac{1}{n}\right),\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\dots$$

Aus allen diesen unendlich vielen Intervallen, in die wir das unendliche Gebiet von x theilen können, behalten wir nur diejenigen, in denen Werthe von x' vorkom̄en. Da alle unendlich vielen Werthe von x' zwischen 2 endlichen Werthen a b liegen, so wird die Anzahl der zu betrachtenden Bereiche endlich sein. Da nun alle unendlich vielen Werthe x' in diesen in endlicher Anzahl vorhandenen Bereiche enthalten sind, so muss es wenigstens einen Bereich geben, in dem unendlich viele Werthe x' liegen, noch mehr es muss einen ersten Bereich geben, in welchem zuerst unendlich viele Werthe x' liegen. Dieser fest definirte Bereich als das Intervall zwischen $\frac{\nu}{n}, \frac{\nu+1}{n}$. Auf diese Weise definiren wir zu jeder Zahl n eine ganz bestimmte Zahl ν, so dass zu jedem n eine ganz bestimmte Zahl ν begrifflich existirt. Nehmen wir nun irgend einen anderen Nenner z.B. $m.n$. so haben wir die Bereiche

$\frac{u}{m.n}, \frac{u+1}{m.n}$, was nichts weiter bedeutet, als dass wir jeden der Bereiche $\frac{u}{n}, \frac{u+1}{n}$ in m andere Bereiche theilen. Wenden wir das auf denselben Bereich

$\frac{\nu}{n}, \frac{\nu+1}{n}$ und bilden den Bereich

$$\left(\frac{\nu m}{m.n}\dots\frac{\nu m}{m.n}+\frac{1}{m.n}\right),\left(\frac{\nu m}{m.n}+\frac{2}{m.m}\dots\frac{\nu m}{m.m}+\frac{2}{m.n}\right)\dots$$
$$\left(\frac{\nu m}{m.n}+\frac{m-1}{m.n}\right)\dots\frac{\nu m}{m\,n}+\frac{m}{m.n}\Big)$$

so theilen wir hierdurch das Bereich $\frac{\nu}{n}$, $\frac{\nu+1}{n}$ in m andere Bereiche. Da nun in diesem Bereiche $\frac{\nu}{n}$ ⋯ $\frac{\nu+1}{n}$ unendlich viele Werthe von x' liegen, und diese Bereiche in endliche Anzahl von neuen Bereichen getheilt wurde, so muss es unter allen diesen m Bereichen einen ersten Bereich $\frac{\mu}{m\cdot n}$ ⋯ $\frac{\mu+1}{m\cdot n}$ geben, in welchem unendlich viele Werthe von x' enthalten sind. Hierdurch fixiren wir wiederum eine Zahl μ.

Nach diesen Bemerkungen betrachten wir die Bereiche mit den Nennern $n^0, n^1, n^2, n^3, \ldots$ Also die Intervalle von der Form $\frac{\mu}{n^0}$: $\frac{\mu+1}{n^0}$ u. s. w. Zu der ersten Theilung wird sich nur ein Bereich $\frac{\nu_0}{n^0}$, $\frac{\nu_0+1}{n^0}$ als der 1te ergeben, in dem unendlich viele Werthe von x' liegen, dann betrachten wir die Bereiche $\frac{\nu}{n'}$, $\frac{\nu+1}{n'}$ welches nichts weiter bedeutet, als dass wir den ursprünglichen Bereich $\frac{\nu_0}{n^0}$, $\frac{\nu_0+1}{n^0}$ in n Theile theilen. Unter diesen Theilen wird es den ersten $\frac{\nu_1}{n}$, $\frac{\nu_1+1}{n}$ geben, in welchem unendlich viele Werthe von x' liegen; dann betrachten wir die Intervalle $\frac{\mu}{n^2}$, $\frac{\mu+1}{n^2}$, d. h. die Theilbereiche von $\frac{\nu_1}{n}$, $\frac{\nu_1+1}{n}$ so gibt es hier wiederum einen ersten Bereich $\frac{\nu_2}{n^2}$, $\frac{\nu_2+1}{n^2}$ in welchem unendlich viele Werthe von x' liegen u. s. w.

Auf diese Weise bestimmen wir begrifflich zu jeder der Zahlen

$n^0, n', n^2, n^3, \ldots$ eine bestimmte Zahl

resp ν_0 ν_1 ν_2 ν_3 ⋯ und nach der ganzen Herleitung sieht man, dass in einem jeden Intervalle

$$\frac{\nu_k}{n^k} \cdots \frac{\nu_k+1}{n^k}$$

unendlich viele Werthe von x' liegen. Betrachten wir nun die Zahl $\frac{\nu_{k+1}}{n^{k+1}}$, so sehen wir zunächst daß sie zwischen $\frac{\nu_k}{n^k}$ u. $\frac{\nu_k+1}{n^k}$ liegen muß.

Denn jedes neue aus dem Intervalle

$$\frac{\nu_k}{n^k} \quad \frac{\nu_k+1}{n^k}$$

entstandene Intervall $\frac{\mu}{n^{k+1}}$ $\frac{\mu+1}{n^{k+1}}$ ist doch kleiner als das ursprüngliche. Wenn wir nun das Intervall

$$\frac{\nu_k}{n^k}, \quad \frac{\nu_k+1}{n^k}$$ auf die Form bringen

$$\frac{n\nu_k}{n^{k+1}} \quad \frac{n\nu_k+n}{n^{k+1}}$$

so muß jede der Zahlen $\frac{\mu}{n^{k+1}}$ dazwischen liegen, also auch

$$\frac{\nu_{k+1}}{n^{k+1}},$$ das heißt es muß sein

$$\nu_{k+1} = n\nu_k + \mu_{k+1}$$

wo μ_{k+1} die Zahlen $0, 1 \dots (n-1)$ annehmen kann.

Daß μ_{k+1} nicht n sein kann, folgt sogleich daraus, daß als dann

$$\frac{\nu_{k+1}}{n^{k+1}} \dots \frac{\nu_{k+1}+1}{n^{k+1}},$$ oder

$$\frac{\nu_k+1}{n^k} \dots \frac{\nu_{k+1}}{n^k}+\frac{1}{n^{k+1}}$$

der erste Bereich sein würde, in welchem unendlich viele Werthe von x' vorkommen, was nicht möglich ist, da ja schon

$$\frac{\nu_k}{n^k}, \dots \frac{\nu_k+1}{n^k}$$ der erste Bereich ist.

Durch die Gleichung $\nu_{k+1} = n\nu_k + \mu_{k+1}$ definiren wir nun ganz bestimmte ganze Zahlen μ_{k+1}, welche $0, \dots (n-1)$ sein können. Bilden wir nun die Zahl

$$a_1 = \nu_0 + \frac{\mu_1}{n} + \frac{\mu_2}{n^2} + \frac{\mu_3}{n^3} + \dots \text{(in inf.)}$$

so sehen wir zunächst, daß diese Zahl einen endlichen Werth hat. Ferner ist leicht zu zeigen, dass sie eine Zahl ist, die in dem fesgesetzten Intervall a b liegt.

Dann brechen wir die Reihe mit dem r^{ten} Gliede ab, so haben wir $a' = \nu_0 + \frac{\mu_1}{n} + \frac{\mu_2}{n^2} + \dots + \frac{\mu_r}{n^r}$

Nun ist aber

$$\nu_1 = n\nu_0 + \mu_1$$
$$\nu_2 = n\nu_1 + \mu_2$$
$$\dots\dots$$
$$\nu_r = n\nu_{r-1} + \mu_r \text{ oder}$$

$$\frac{\nu_1}{n} = \nu_0 + \frac{\mu_1}{n}$$
$$\frac{\nu_2}{n^2} = \frac{\nu_1}{n} + \frac{\mu_2}{n^2}$$
$$\frac{\nu_r}{n^r} = \frac{\nu_{r-1}}{n^{r-1}} + \frac{\mu_r}{n^r} \text{ und durch Summation folgt}$$
$$\frac{\nu_r}{n^r} = a'. \text{ Es ist somit}$$
$$\frac{\nu_r}{n^r} < a_1 < \frac{\nu_r + 1}{n^r}$$ d. h. a_1 ist eine Zahl in deren Intervalle es Werthe von x' gibt. Nun können wir leicht zeigen, dass eben die Zahl a_1 es diejenige Stelle ist, in deren noch so kleiner Umgebung es unendlich viele Werthe von x gibt. Nun gibt es in dem Intervalle $\frac{\nu_r}{n^r} \dots \frac{\nu_r+1}{n^r}$ unendlich viele Werthe von x'. Das heisst, wie klein wir auch das Intervall nehmen, so kommen darin immer unendlich viele Werthe von x' die sämmtlich in der Nähe von a_1 liegen. Denn es ist leicht zu berechnen dass

$$a_1 - \frac{\nu_r}{n^r} < \delta \text{ und}$$
$$\frac{\nu_r+1}{n^r} - \frac{\nu_r}{n^r} = \frac{1}{n^r} < \delta,$$ Es kommen also in dem Intervalle

$a_1 - \delta$, und $a_1 + \delta$ unendlich viele Werthe von x'

vor. Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

<u>Anwendung:</u> Es sei $f(x)$ eine eindeutige stetige Funktion von x mit reellen Coefficienten. Wenn wir die reelle Größe auf ein bestimtes Intervall beschränken, das vollständig im Endlichen liegt, zwischen a, b, so hat $f(x)$ eine untere und eine obere Grenze, die für einen bestimmten Werth von x erreicht wird.

Es sei die untere Grenze von $f(x)$ gleich g und n bedeute eine ganze positive Zahl. Theilen wir das ganze Intervall in Bereiche von der Form $\frac{\nu}{n} \ldots \frac{\nu+1}{n}$

In allen Intervallen hat $f(x)$ eine untere Grenze, es muß nothwendig ein Intervall geben, in welchem $f(x)$ die untere Grenze g hat. Die Größe x beschränken wir nun auf dieses Intervall $\frac{\nu}{n} \ldots \frac{\nu+1}{n}$. Hierdurch definiren wir die Größe $\frac{\nu}{n}$ so, daß sie stets zwischen a b liegt, und unendlich viele Werthe annimmt, welche man alle erhält, wenn man ν varriren läßt zwischen ν u $\nu+1$. Nach dem allgemeinen Satze muß es in dem Intervalle $\frac{\nu}{n} \ldots \frac{\nu+1}{n}$ wenigstens eine Stelle geben, in deren beliebig kleiner Umgebung es unendlich viele Werthe von $\frac{\nu}{n}$ gibt. Diese Stelle sei α, Wenn ich nun x beschränke auf das Intervall $\frac{\nu}{n} - \delta \ldots \frac{\nu+\delta}{n}$ und $\frac{1}{n} < \delta$ annehme, so haben wir folgendes. Nehmen wir an $f(x)$ koenne g nicht erreichen, sondern an einer Stelle dieses Intervalls sei es $g' > g$, wobei g' dem g beliebig nahe gebracht werden kann. Setzen wir

$f(x) = g + g_1$ so können wir immer für jedes x innerhalb dieses Intervalls wegen der Stetigkeit von $f(x)$ ein h so bestimmen, daß

$$f_1(x_0 + h) - f(x_0) < g_1$$

Nehmen wir nun an g' wäre stets größer als g, so kann ich eine Größe ε bestimmen, so daß g in dem Intervalle $g' - \varepsilon$ u. $g' + \varepsilon$ nicht vorkomt. Alsdann kann ich die Größe δ so klein wählen, daß wenn ich x auf das Intervall $a_1 + \delta$, $a_1 + \delta$ beschränken; $f(x)$ stets die Werthe zwischen $g' - \varepsilon$ u $g' + \varepsilon$ annimmt. Es könnte somit $f(x)$ nicht beliebig nahe an g gebracht werden; was gegen die Definition der Grenze ist. Es muß also $f(x)$ an irgend einer Stelle des Bereiches $\frac{\nu}{n}$, $\frac{\nu+1}{n}$ die untere Grenze erreichen. Ebenso kann man es von der oberen Grenze nachweisen.

<u>Definition</u>. Die Gesammtheit der Werthsysteme von n unbeschränkt, veränderlicher Größen, nennen wir eine n fache Mannigfaltigkeit. Irgend ein bestimmtes Werthsystem nennen wir die Stelle der Mannigfaltigkeit, die Stelle des Gebietes.

<u>Lehrsatz</u>. Angenommen, in einer von n unbeschränkt veränderlichen reellen Größen gebildeten Mannigfaltigkeit $(x_1 \dots x_n)$, seien Stellen $(x_1'\, x_2' \cdot x_3')$ auf irgend eine Weise definirt, jedoch so, daß alle im Endlichen liegen und daß deren unendlich viele vorhanden sind; so gibt es in dem Gebiete von

$x_1 \dots x_n$, wenigstens eine Stelle $a_1 \dots a_2$ in deren jeder noch so kleinen Umgebung es unendlich viele Werthsysteme $x_1' \dots x_n'$ gibt.

Betrachten wir 2 Werthsysteme

$$b_1\, b_2\, b_3 \dots b_n$$

$$c_1\, c_2 \dots \quad c_n$$

und suchen das jenige c auf, das zuerst von dem gleichstelligen b verschieden ist. Ist nun $c > b$, so sagen wir die Stelle

$c_1 \dots c_n$ folgt auf die Stelle

$b_1 \dots b_n$

Diese Art der Vergleichung ist willkürlich, wir brauchen sie nur zu unserem Beweise. Nun theilen wir das ganze Gebiet von $x_1 \dots x_n$ in Intervalle von der Form

$$x_1 = \frac{\mu_1}{m} \dots \frac{\mu_1 + 1}{m}$$

$$x_n = \frac{\mu_n}{m} \dots \frac{\mu_n + 1}{m}$$

wo m ganze positive Zahl bedeutet. Denken wir uns aus allen diesen Bereichen, diejenigen hervorgehoben, in denen Werth von $x_1' \dots x_n'$ vorkommen, die Anzahl derselben muss eine endliche sein, da ja sämmtliche $x_1' \dots x_n'$ zwischen 2 endlichen Grenzen liegen sollen. Diese Bereiche denken wir uns in eine Reihe geordnet und zwar so, dass von je 2 zusammenstehenden, der eine auf den andern folgt in dem obigen Sinne. Unter diesen Bereichen muss es nun einen ersteren geben, in dem unendlich viele Werthsysteme

$x_1' \ldots x_n'$ vorhanden sind.

Auf diese Weise erhalten wir zu jedem m ein System von Zahlen μ. Nehmen wir nun statt der Bereiche mit dem Nenner m, andere mit dem Nenner $m \cdot n$, so erhalten wir ein 2tes System der Zahlen μ. Wir nehmen nun hier als Nenner der Bereiche der Zahlen

$m^0, m^1, m^2 \ldots$ und die hierzu gehörigen Werthsysteme der Zahlen μ seien:

$$\mu_{0,1},\ \mu_{1,1},\ \mu_{2,1},\ \ldots \mu_{m,1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_{0,n},\ \mu_{1,n},\ \ldots\ldots \mu_{m,n}$$

und nun erhalten wir durch dieselben Schlüsse wie bei einer Variablen

$$\mu_{k+1,\alpha} = m \cdot \mu_{k,\alpha} + \nu_{k+1,\alpha}$$

wo $\nu_{k+1,\alpha}$ gleich ist den Zahlen $0, 1 \ldots m-1$

Bilden wir nun die Zahlen

$$\alpha_1 = \mu_{0,1} + \frac{\nu_{1,1}}{m} + \frac{\nu_{2,1}}{m^2} + \frac{\nu_{m,1}}{m^3} + \ldots$$
$$\alpha_2 = \mu_{0,2} + \frac{\nu_{1,2}}{m} + \frac{\nu_{2,2}}{m^2} + \frac{\nu_{3,2}}{m^3} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n = \mu_{0,n} + \frac{\nu_{1,n}}{m} + \frac{\nu_{2,n}}{m^2} + \frac{\nu_{3,n}}{m^3} + \ldots$$

Diese Stelle $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ist nun eine Stelle im Gebiete $x_1, \ldots x_n$, so daß es in jeder Umgebung derselben unendlich viele Werthe von $x_1' \ldots x_n'$ gibt, was man leicht nach der selben Art wie bei einer Varriablen nachweisen kann.

Diese Größen lassen sich ohne weiteres auf complexe Größen erweitern. Ersetzen wir nämlich jede complexe Größe durch ihre beiden Coordinaten, so bekommen wir eine 2n fache Mannigfaltigkeit von reellen Größen; alsdann ist die Erweiterung des Satzes folgende. Wenn man in einer von n unbeschränkt veränderlichen complexen Größe $x_1 \ldots x_n$ gebildeten 2n fachen Mannigfaltigkeit, n Größen $x_1' \ldots x_n'$ auf beliebige Weise definirt, jedoch so daß alle Werthsysteme derselben im Endlichen liegen, und daß es derselben in diesem endlichen Intervalle unendlich viele gibt, so gibt es in dem Gebiete von $x_1 \ldots x_n$ wenigstens eine Stelle in deren Umgebung unendlich viele Werthsysteme von $x_1' \ldots x_n'$ vorhanden sind, wie klein man auch die Umgebung nimmt.

<u>Lehrsatz</u>. Mögen im Gebiete der unbeschränkten Veränderlichen $x_1\, x_2 \ldots x_n$ Größen $x_1' \ldots x_n'$ definirt sein, so daß sie stets endlich bleiben. Mit diesen Größen $x_1' \ldots x_n'$ sei eine andere reelle Größe ξ so verbunden, daß zu jedem Werthsysteme $x_1' \ldots x_n'$ ein Werth von ξ gehört, so hat die Größe ξ eine untere und eine obere Grenze. Alsdann gibt es im Gebiete $x_1 \ldots x_n$ wenigstens eine Stelle $a_1 \ldots a_n$, die so liegt, daß wenn man diejenigen Systeme $x_1' \ldots x_n'$ betrachtet, die in der Umgebung der Stelle $a_1 \ldots a_n$ liegen, die angehörigen ξ's dieselbe obere und untere Grenze haben. Wenn für die Größe ξ, die mit $x_1' \ldots x_n'$ auf die obige Weise

so zusammenhängt, die obere Grenze gibt, und wenn ich dann eine beliebige Grösse δ annehme und betrachte das Intervall $g-\delta, \dots g$, so gibt es nach dem Begriff der Grenze Werthe von ξ, die in diesem Intervalle liegen, wie klein ich auch δ annehme, und diese Werthe von ξ gehören zu bestimmten Werthsystemen $x_1' \dots x_n'$. Solcher Werthsysteme $x_1' \dots x_n'$ muss es aber unendlich viele geben, da ich dem δ unendlich viele Werthe beilegen kann. Denn denken wir uns $\delta = \delta_0$ gesetzt, so giebt es Werthe ξ, die zwischen $g-\delta$ u g liegen, also auch Wertsysteme $x_1' \dots x_n'$. Setzen wir nun $\delta = \delta_1$ so dass $g-\delta_1 > \xi$ so gibt es andere Werthe von ξ und andere Systeme $x_1' \dots x_n'$ u.s.w.

Es muss also in dem Gebiete $x_1 \dots x_n$ wenigstens eine Stelle, die so liegt, dass in jeder Umgebung derselben es unendlich viele Werthe von $x_1' \dots x_n'$ gibt, und deren entsprechende Werthe von dem g beliebig nahe gebracht werden koennen. Hiermit ist also eigentlich unser Satz bewiesen. Wir wollen dies noch auf andere Weise nachweisen, indem wir uns darauf beschränken, das Gebiet $x_1 \dots x_n$ als reell vorauszusetzen, woraus man dann leicht den Satz auf complexe Grössen erweitern kann. Zu dem Ende sei m eine beliebige positive ganze Zahl und theilen den ganzen Bereich in Intervalle von der Form $\frac{\mu_1}{m} \dots \frac{\mu_2}{m}$ und betrachten die Bereiche

$$x_1 = \frac{\mu_1}{m} \cdots \frac{\mu_1+1}{m}$$
$$\vdots$$
$$x_n = \frac{\mu_n}{m} \cdots \frac{\mu_n+1}{m}$$

Von allen diesen Bereichen betrachte ich nun diejenigen, in denen es Werthe von $x_1' \ldots x_n'$ gibt, welche Bereiche natürlich in endlicher Zahl vorkommen müssen, wegen Endlichkeit der Werthsysteme $x_1' \ldots x_n'$. Betrachten wir nun irgend ein Bereich, so wird es in jedem Bereiche Werthsysteme $x_1' \ldots x_n'$ geben, zu denen eine bestimmte obere Grenze von ξ gehört. Es muss nun einen Bereich geben, in welchem die obere Grenze von ξ gleich g ist. Für jedes m gibt es einen ganz bestimmten Bereich, in welchem Werthsysteme $x_1' \ldots x_n'$ liegen und für welche die obere Grenze von ξ gleich g ist. Es sei der Bereich $\frac{\nu_1}{m} \ldots \frac{\nu_n}{m}$. Fassen wir diesen Bereich in's Auge, so hat dieser unendlich viele Punkte, die so definirt sind, dass in dem Gebiete $x_1 \ldots x_n$ es unendlich viele Punkte gibt mit endlichen Coordinaten. Es muss also in dem Gebiete $x_1 \ldots x_n$ wenigstens eine Stelle $a_1 \ldots a_n$ geben, in deren jeder Umgebung es unendlich viele solche Werthe gibt. Betrachten wir die Werthsysteme

$$x_1 = a_1 - \delta_1 \ldots a_1 + \delta^2;$$
$$x_2 = a_2 - \delta_1 \ldots a_2 + \delta^2$$
$$\vdots$$
$$x_n = a_n - \delta^2 \ldots a_n + \delta$$

so koennen wir innerhalb dieses Bereiches stets Punkte $\frac{\nu_1}{m}, \ldots \frac{\nu_n}{m}$ finden. Wenn ich nun die Punkte in's Auge fasse, für welche

$$x_1 = \frac{\nu_1}{m}, \ldots \frac{\nu_1+1}{m}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \frac{\nu_n}{m}, \ldots \frac{\nu_n+1}{m}$$

so kann man das m so groß annehmen daß jedes Werthsystem $x_1 \ldots x_n$ von $a_1 \ldots a_n$, so wenig verschieden ist, wie man will. Man kann also m so groß annehmen, daß $\frac{\nu_1}{m} \ldots \frac{\nu_1+1}{m}$ zwisch $a_1 - \delta_1$ und $a_1 + \delta_1$ u. s. w. liegt. Unter diesen Bedingungen haben wir in

$$x_1 = \frac{\nu_1}{m} \ldots \frac{\nu_1+1}{m}$$
$$x_n = \frac{\nu_n}{m} \ldots \frac{\nu_n+1}{m}$$

einen Bereich innerhalb dessen es Werthsysteme von $x_1 \ldots x_n$ gibt, für welche die obere Grenze von ξ gleich g ist. Demnach gibt es in der Umgebung von $a_1 \ldots a_n$ Werthsysteme $x_1' \ldots x_n'$, welche für ξ dieselbe obere Grenze g ergeben. Hiermit ist der Satz mit aller Strenge bewiesen. Man kann den Satz ~~auch~~ ~~so~~ aussprechen, daß man in die Aussage desselben gar nicht das Gebiet der Größen $x_1 \ldots x_n$ hinüberbringt. Alsdann lautet der Satz folgendermaßen.

Wenn man mit den Variablen $x_1' \ldots x_n'$ die alle endlich bleiben sollen eine reelle Größe verbindet, so daß in jedem Werthsysteme von $x_1' \ldots x_n'$ ein Werth von ξ gibt, so gibt es in dem Gebiete von $x_1' \ldots x_n'$ oder an dessen Grenze Werthsysteme, welche für ξ dieselbe obere und untere Grenze liefern. Man kann nun die obige Untersuchung leicht auf complexe Größen erweitern, und dasselbe was man von der oberen Grenze nachgewiesen hat, kann man auch von der unteren Grenze zeigen. Auch ist es nicht nöthig vorauszusetzen, daß   für jedes Werthsystem von $x_1' \ldots x_n'$ nur einen Werth erhält. Der Beweis bleibt derselbe, wenn auch   mehrere, ja sogar unendlich viele Werthe annimmt.

Denken wir uns nun mal eine Function, zunächst mehrerer reellen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ und zwar eine eindeutige Function $f(x_1 \ldots x_n)$ worunter wir eine Grenze verstehen, die zu jedem Werthsysteme innerhalb eines continuirlichen Gebietes oder an dessen Grenze einen Werth hat $y = f(x_1 \ldots x_n)$ das Gebiet der Größen $x_1 \ldots x_n$ soll ein geschlossenes Continuum sein. Diese Werthsysteme sind also hier, daß was wir im vorigen Satze mit $x_1' \ldots x_n'$ bezeichnet haben, und y entspricht der dortigen Größe ξ. Die Größe y hat eine obere und eine untere Grenze. Nach dem vorigen Satze muß es also in dem Gebiete $x_1 \ldots x_n$ oder an dessen Grenze eine Stelle $a_1 \ldots a_n$ geben, die so liegt, daß wenn ich $x_1 \ldots x_n$ auf eine noch so kleine Umgebung von $a_1 \ldots a_n$ beschränke, für diese Werthsysteme von $x_1 \ldots x_n$ y dieselbe obere Grenze hat. Wenn sich nun zeigen läßt, daß diese obere Grenze nicht gehört zu einem Werthsysteme $x_1 \ldots x_n$ das an der Grenze des Gebietes von $x_1 \ldots x_n$ liegt und $f(x_1 \ldots x_n)$ stetig ist, so gibt es in dem Gebiete $x_1 \dots x_n$ eine Stelle wo y_1 die obere Grenze g wirklich erreicht, also Maximum hat. Denn es sei $x_1 \dots x_n$ die Stelle in deren noch so kleiner Umgebung $f(x_1 \dots x_n)$ dieselbe obere Grenze g hat. Wenn diese Stelle nicht an der Grenze des Gebietes $x_1 \dots x_n$ liegt, so kann ich, wenn ich $x_1 \dots x_n$ beschränke auf das Intervall

$$\begin{array}{l} a_1 - \delta, \dots a_1 + \delta, \\ a_2 - \delta, \dots a_2 + \delta, \\ a_n - \delta, \dots a_n + \delta, \end{array}$$

$f(x_1 \dots x_n)$ der Grösse so nahe bringen, wie ich will. Nun ändert sich $f(x_1 \dots x_n)$ stetig, daraus folgt dass

$$f(a_1 \dots a_n) = g$$

sein muss. Denn angenommen es wäre

$f(a_1 \dots a_n) = g'$ wo g' von g verschieden ist, so kann ich ε so klein annehmen, dass das g in dem Intervall $g' - \varepsilon, \dots g' + \varepsilon$ nicht liegt, nun kann ich aber δ auch so klein annehmen, dass, wenn ich $x_1 \dots x_n$ beschränke auf das Intervall

$$a_1 + \delta,\ a_1 - \delta,$$

für alle diese Werthsysteme $f(x_1 \dots x_n)$ wegen der Stetigkeit Werthe enthält, welche zwischen

$$g' - \varepsilon \text{ u. } g' + \varepsilon \text{ liegen.}$$

D. h. man koennte eine solche Umgebung von $a_1 \dots a_n$ angeben, in welcher die Function $f(x_1 \dots x_n)$ dem Werthe g

nicht beliebig nahe gebracht werden koennte, was gegen die Definition der Grenze ist.

Es muss also

$$f(a_1 \ldots a_n) = g \text{ das Maximum sein.}$$

Wie kann man nun entscheiden ob die Stelle $a_1 \ldots a_n$ nicht an der Grenze liegt. Im Falle der oberen Grenze sucht man nachzuweisen, dass es im Innern des Bereiches noch Stellen gibt, für welche der zugehörige Werth von y noch grösser ist als die obere Grenze des Werthes y für den Umfang des Bereiches. Im Falle der unteren Grenze sucht man zu zeigen, dass es im Innern des Bereiches Stellen gibt, für welche der zugehorige Werth von y kleiner ist als die untere Grenze für y, im Umfange des Bereiches von $x_1 \ldots x_n$

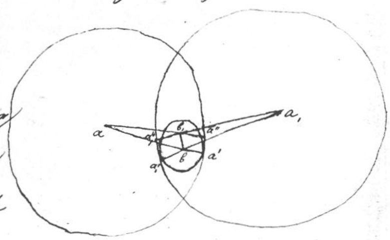
Haben wir eine Function von mehreren complexen Grössen $x_1 \ldots x_n$ so hat der Werth von y keine solche obere oder untere Grenze, aber wohl der absolute Betrag von y. Und wenn wir $x_1 \ldots x_n$ durch die beiden Coordinaten ersetzen, so kommen wir leicht zu dem Schlusse, dass, wenn die Stelle $a_1 \ldots a_n$, in deren Umgebung die Werthe von y dem absoluten Betrage nach dieselbe obere (oder untere) Grenze haben, im Innern des Gebietes $x_1 \ldots x_n$ liegt und die Function $f(x_1 \ldots x_n)$ stetig ist, sie das Maximum (oder Minimum) an einer Stelle wirklich erreicht.

Bei unstetigen Functionen braucht es nicht der Fall zu sein.

Weitere Theorie der Potenzreihen.

Lehrsatz. Es seien 2 Potenzreihen $G(x|a)$, $G_1(x|a_1)$ gegeben, und ihre Convergenzkreise mögen theilweise auf einander liegen. Wenn es sich zeigen läßt, daß beide Reihen innerhalb einer bestimmten Umgebung eines im Innern des gemeinschaftlichen Conv. Bereiches gewählten Punkte b übereinstimmen, so stimmen sie innerhalb des ganzen gemeinschaftlichen Convergenzbereiches überein.

Es seien die Convergenzkreise beider Reihen, die um a u. a_1 beschriebenen Kreise, die sich theilweise decken mögen. Innerhalb des beiden Reihen gemeinsamen Conv. bereiches sei b gewählt, wenn es sich nun zeigen läßt, daß innerhalb einer gewissen Umgebung von b $G(x|a) = G_1(x|a_1)$ ist, so muß für den ganzen gemeinsamen Bereich $G(x|a) = G_1(x|a_1)$. Aus $G(x|a)$ leiten wir $\bar{G}(x\,b)$ u. aus $G(x|a_1)$ $\bar{G}_1(x|a_1)$. Nun wissen wir nach einem der früheren Sätze, daß innerhalb einer bestimmten Umgebung von b



$$G(x|a) = \bar{G}(x|b) \text{ u.}$$
$$G_1(x|a_1) = \bar{G}_1(x|b) \text{ ist.}$$

und zwar wissen wir genau, daß die Uebereinstimmung von $G(x|a)$ u $\bar{G}(x|b)$ innerhalb eines um b mit dem Radius $b\bar{a}'$ beschriebenen Kreises übereinstimmt, und $G_1(x|a_1)$ mit $\bar{G}_1(x|b_1)$ innerhalb des mit $b\bar{a}'_1$ beschriebenen Kreises ~~Übereinstimmung~~ $G(x|a)$ mit $G_1(x|a_1)$ innerhalb einer bestimmten Umgebung um b übereinstimmt, so wird auch innerhalb einer gewissen Umgebung von b die Gleichung stattfinden müssen

$$\bar{G}(x|b) = \bar{G}_1(x|b)$$

d. h. beide Reihen müssen in den Coefficienten übereinstimmen d. h. identisch sein. Um nun nachzuweisen, daß $G(x|a) = G_1(x|a_1)$ für den ganzen Bereich der gemeinschaftlich ist, wählen wir b_1 in der Umgebung von b. Nun haben wir aus $G(x|a)$ hergeleitet $\bar{G}(x|b)$ und hieraus können wir herleiten $\bar{G}'(x|b_1)$

Unter welchen Umständen wird nun $\bar{G}'(x|b_1)$ in $\bar{G}(x|b)$ übereinstimmen? Wenn ich $b_1 b$ kleiner annehme als $b a'_1$ und kleiner als $b\bar{a}'$, so wird $\bar{G}'(x|b_1)$ sicher mit $\bar{G}(x|b)$ übereinstimmen in einer gewissen Umgebung von b_1. Unter diesen Umständen haben wir die hergeleiteten Reihen.

$$G_1(x|a_1),\ \bar{G}_1(x|b),\ \bar{G}_1'(x|b_1) \text{ und}$$
$$G(x|a)\ \bar{G}(x|b),\ \bar{G}'(x|b_1)$$

Nun stimmt aber innerhalb einer gewissen Umgebung daß b_1 $\bar{G}(x|b)$ mit $\bar{G}'(x|b_1)$, ~~$\bar{G}(x|b)$~~ überein. d. h.

$$\bar{G}(x|b) = \bar{G}'(x|b_1)$$

Nun kann der Punkt b_1 so gewählt werden, daß die Umgebung von b_1 in der Umgebung von b liegt, wofür

$G(x|a) = \bar{G}(x|b)$ also wird für diese Umgebung auch

$$G(x|a) = \bar{G}'(x|b_1)$$

Ebenso erhalten wir für die Nähe von b_1, welchen Punkt wir auch so gewählt denken können, daß seine Umgebung in derjenigen Umgebung von b liegt, wofür

$G_1(x|a_1) = \bar{G}_1(x|b)$, für dieselbe Umgebung haben wir aber auch

$$\bar{G}_1(x|b) = \bar{G}_1'(x|b_1);\ \text{also auch}$$

$$G_1(x|a_1) = \bar{G}_1'(x|b_1)$$

Nun ist der Voraussetzung gemäß, für eine gewisse Umgebung von b

$G(x|a) = G_1(x|a_1)$ also muß auch

$\bar{G}'(x|b_1) = \bar{G}_1'(x|b_1)$ d. h. beide Reihen müssen in den Coefficienten übereinstimmen, also ist

$$\bar{G}'(x|b_1) \equiv \bar{G}_1'(x|b_1)$$

Nun denken wir uns aus $G(x|a)$ u. $G_1(x|a_1)$ direct die Reihen $\bar{\bar{G}}(x|b_1)$ und $\bar{\bar{G}}_1(x|b_1)$ hergeleitet. Und es ist innerhalb eines Kreises um b_1, der ganz innerhalb des gemeinsamen Bereiches liegt, sicher

$$G(x|a) = \overline{\overline{G}}(x|b_1) \text{ und}$$
$$G_1(x|a_1) = \overline{\overline{G}}_1(x|b_1)$$

Nun war innerhalb einer bestimmten Umgebung das b_1

$$G(x|a) = \overline{G}'(x|b_1)$$
$$G_1(x|a_1) = \overline{G}_1'(x|b_1) \text{ also ist auch innerhalb}$$

derselben Umgebung

$$\overline{\overline{G}}(x|b_1) = \overline{G}'(x|b_1) \text{ u.}$$
$$\overline{\overline{G}}_1(x|b_1) = \overline{G}_1'(x|b_1) \text{ also muß auch}$$
$$\overline{G}'(x|b_1) = \overline{G}_1'(x|b_1) \text{ und daraus folgt, daß}$$

innerhalb der bestimmten Umgebung von b_1

$$G(x|a) = G_1(x|a_1).$$

Daßelbe können wir für jeden neuen Punkt b_2 zeigen, der nur so gewählt werden muß, daß er in der Umgebung von b_1 liegt und durch Wiederholung der Schlüße, kommen wir zu dem Satze daß

$$G(x|a) = G_1(x|a_1)$$

für alle Punkte des gemeinsamen Conv. bereiches sein muß. W. z. b. w.

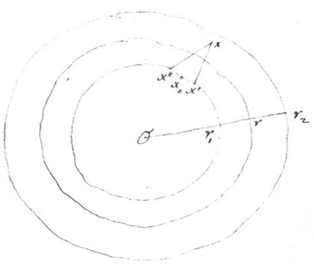
Nun kehren wir zu dem Beweise der Voraussetzung, die wir auf der Seite   gemacht haben zurück; daß nämlich die Function $\sum_\mu \frac{1}{\mu!} g^{\mu}(x) h^{\mu}$, wenn man x und h auf das dort erwähnte Gebiet beschränkt, an irgend einer Stelle einen Werth erreicht, der dem absoluten Betrage nach das Maximum g ist. Dazu ist es nun nöthig, nach den Untersuchungen (   ), nachzuweisen, daß die Function

$$G(x'; h) = \sum \frac{1}{\nu!} G^{(\nu)}(x') h$$

sich stetig mit x' u. h ändert. Alsdann muß es nach dem Vorigen irgend eine Stelle geben, wofür $|G(x', h)| = g$ = Maximum ist. Da nun die Function an jeder Stelle endlich ist, so wird auch das Maximum g endlich sein müssen. Wir haben also nur zu zeigen, daß es, sobald x' u. h innerhalb des Conv. bereiches liegt, möglich ist ξ u. k so zu wählen, daß

$$G(x' + \xi, h + k) - G(x', h)$$

beliebig klein wird. Mit Beibehaltung der auf der Seite erwähnten Bedingungen, wählen wir auf dem Kreise mit dem Radius r, irgend 2 Punkte x' u. x'' an und dann irgend einen 3ten Punkt x. Die Punkte müssen aber so gewählt werden, daß sowohl



$$x x' \leqq d \text{ also auch}$$
$$x x'' \leqq d$$

Die Reihe $G(n)$ soll innerhalb des Kreises mit r convergent sein. Wenn wir nun aus $G(n)$ herleiten $G(n|x')$ und dann $G_1(n, x'')$ so werden beide Reihen für x convergent sein, da ja der Conv. radius beider sicher nicht kleiner ist, als

ϱ und $\overline{xx'}, \overline{xx''} \leq d$, wo $d < \varrho$ angenommen wurde. Nun sehen wir, daß sobald man x so wählt, daß $\overline{xx'} < d$, $\overline{xx''} \leq d$ also $\overline{x''x'} \leq 2d$ ist, die Functionen in der Nähe eines bestimmten Punktes x_0 zwischen x_1' u x_2'' übereinstimmen müßen, da sie ja den Werth von $G(x)$ in der Nähe von x_0 darstellen. Sie müßen also sobald

$\overline{xx'}, \overline{xx'} \leq d$ für den ganzen gemeinsamen Conv. bereich übereinstimmen, d. h. es ist

$$G(x|x') = G(x|x'')$$

Betrachten wir hiernach $G(x'+\xi, h+k)$ Es die zunächst

$$G(x', h) = G(x'+h|x') \text{ und}$$
$$G(x'+\xi, h+k) = G(x'+h+k+\xi|x'+\xi)$$

Hieraus folgt nun, wenn man für k setzt $-\xi$,

$$G(x'+\xi, h-\xi) = G(x'+h|x'+\xi) \text{ Ferner ist}$$
$$G(x', h) = G(x'+h|x') = G(x'+\xi+h+\xi+x')$$
$$= G(x'+\xi, h-\xi) \text{ Setzt man nun } h = h+\xi \text{ so folgt}$$
$$G(x'+\xi, h) = G(x', h+\xi) \text{ und } h \text{ um } k$$

vermehrt gibt.

$$G(x'+\xi, h+k) = G(x', h+k+\xi)$$
$$= G(x'+h+k+\xi|x') \text{ d. h.}$$

$G(x'+\xi, h+k)$ läßt sich darstellen als Potenzreihe von $h+k+\xi$ und wenn k, h, ξ so gewählt wird, daß $|h| + |x| + |\xi| < \varrho$ ist, so ist die Potenzreihe endlich und convergirend. Jede Potenzreihe ist aber stetig, folglich ist auch möglich ε u h so klein zu wählen, daß

$$G(x'+\xi,\ h+k) - G(x',h) = G(x',\ h+k+\xi) - G(x',h)$$

beliebig kleiner gemacht wird, daß heißt

$G(x',h)$ ist in Bezug auf x' u. h stetig, und daraus folgt, daß es irgendwo im Gebiete von x' u. h, oder an dessen Grenze eine Stelle geben muß, für welche der absolute Betrag sein Maximum erreicht

---

Wir haben also den überaus wichtigen Satz mit aller Strenge nachgewiesen, daß wenn die Größe ϱ eine untere Grenze hat, die von Null verschieden ist, so ist r nicht der wahre Convergenzradius, sondern die Reihe convergirt noch für Werthe, welche dem absoluten Betrage nach größer sind als r. Bei den vorigen Untersuchungen sind wir ausgegangen von einer Potenzreihe von x $G(x)$, dieselben Schlüße gelten unmittelbar für Reihen von $x-a$, $G(x|a)$ und wenn wir im Künftigen nur Potenzreihen von x, $G(x)$ betrachten, so gelten die Schlüße ebenso für $G(x|a)$.

Es folgt nun weiter, daß sobald r der wahre Convergenzradius ist, so muß die untere Grenze von ϱ gleich Null sein.

Faßen wir ins Auge einen Punkt x_0 im Umfange und betrachten eine kleine Umgebung von x_0. Beschränken wir nun x auf das Innere des gemeinschaftlichen Bereiches der beiden Kreise um 0 u. x_0.

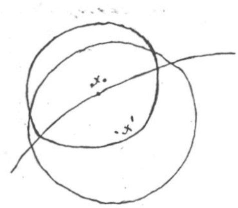
Zu jedem x' gehört ein bestimmtes h als Radius der Umgebung von x'. Es sei nun möglich den Kreis um x_0 so klein zu wählen, daß die untere Grenze von h nicht Null ist. Wenn ich nun transformire $f_1(x)$ in $f_1(x|x')$, so wird die Reihe $f_1(x|x')$ convergent sein, sobald $\overline{x_0 x'} < h_0$, wo h_0 die untere Grenze von h ist, innerhalb der Umgebung von x_0. Wählen wir nun x' hinreichend nahe an x_0, so wird der Kreis um x' den Punkt x_0 umfassen. Nun hat ein Potenzreihe innerhalb des Conv. bereiches den Charakter einer ganzen Function. Wenn also x_0 ein Punkt des Umfanges ist, für welchen es eine Umgebung gibt, in welcher die untere Grenze von h' nicht Null ist, so sagen wir die Function behält den Charakter einer ganzen Function, wie nahe man auch an x_0 kommen mag. Wenn r der wahre Convergenzradius ist, so muß es eine Stelle geben, wo die obige Voraussetzung nicht stattfindet, d. h. es muß wenigstens eine Stelle geben, für deren jede noch so kleine Umgebung die untere Grenze von h' Null ist. Es muß also entweder innerhalb, oder an der Grenze des Gebietes von x eine Stelle geben, für deren Umgebung die untere Grenze von h' Null ist. Im Innern giebt es keinen solchen Punkt, denn wie man auch x im Innern annimmt, so hat stets die Reihe $f_1(x|x')$ einen von Null verschiedenen

C. radius. Demnach muss es an der Grenze des Gebietes von x d. h. im Umfange des Conv. Kreises einen Punkt wenigstens geben, für dessen Umgebung die untere Grenze von h' gleich Null ist. Alsdann kann man nicht aus $f(x)$ eine Reihe $f_1(x, x')$ herleiten in deren Convergenzkreise noch der Punkt enthalten wäre; denn da die untere Grenze von $h'=0$, so kann man nicht das x' so nahe an diesen Punkt wählen, dass der Conv. kreis von $f_1(x|x')$ welcher gleich h' ist, den Punkt umfasst; da ja dazu nöthig ist, dass $\overline{x'x_0} <$ als die untere Grenze von h' was offenbar nicht möglich ist. Wir sagen in diesem Falle die gegebene Function verliere den Charakter einer ganzen Function, wenn sich x dem erwähnten Punkte nähert. Das Resultat ist also: Wenn es möglich ist aus $f(x)$, $f_1(x|x')$ herzuleiten, (wobei x' im Innern des C. kreises von $f(x)$ liegt, so dass der Punkt x_0 des Umfanges in dem C. Bereiche der Reihe $f_1(x|x')$ liegt, so behält die Function $f(x)$ in der Nähe von x_0 den Charakter einer ganzen Function, wenn es nicht möglich ist so verliert sie den Charakter einer ganzen Function.

Wir können somit folgenden Satz aussprechen

<u>Lehrsatz</u> Der wahre Conv. radius einer Potenzreihe is dadurch charakterisirt, dass es im Umfange des mit ihm beschriebenen Kreises, wenigstens eine Stelle gibt, in deren Nähe der Function den Charakter einer ganzen Function verliert. —

Wenn nun x_0 ein Punkt ist in dessen Nähe $f(x)$ den Charakter einer ganzen Function behält, so können wir aus $f(x)$ herleiten $f_1(x|x')$ und der Convergenzkreis von $f_1(x|x')$ umfaßt den Punkt x_0.



Ich kann also aus $f_1(x|x')$ herleiten $f_2(x|x_0)$. Nun stimmt $f(x)$ u $f_1(x|x')$ innerhalb des gemeinschaftlichen Bereiches von $f(x)$ u $f_1(x|x')$ überein, und $f_1(x|x')$ mit $f_2(x|x_0)$ innerhalb des den Kreisen um x_0 u x' gemeinsamen Theiles. Innerhalb der allen 3 Kreisen gemeinsamen Fläche haben wir

$$f(x) = f_1(x|x') = f_2(x|x_0) \text{ also}$$

$$f(x) = f_2(x|x_0)$$

Innerhalb des den Convergenzkreisen von $f(x)$ u $f_2(x|x_0)$ gemeinsamen Theiles haben wir also

$$f(x) = f_2(x|x_0)$$

Nun geht die Gültigkeit von $f_2(x|x_0)$ noch weiter, es kann somit $f_2(x|x_0)$ als Fortsetzung von $f(x)$ angesehen werden. An solchen Stellen in deren Nähe die Function $f(x)$ den Charakter einer ganzen Function behält, ist es also möglich eine Reihe $f_2(x|x_0)$ zu finden welche innerhalb des beiden Reihen $f(x)$, $f_2(x|x_0)$ gemeinsamen Conv. bereiches, mit $f(x)$ übereinstimmt. Wenn x_0 ein Punkt ist, in dessen Nähe

$f(x)$ den Charakter einer ganzen Function verliert, so ist es nicht möglich aus $f(x)$ die Reihe $f(x|x_0)$ herzuleiten, die mit $f(x)$ in irgend einem Bereiche übereinstimmt. Wir können unserem Satze also auch folgende Fassung geben.

Lehrsatz. Wenn man nachweisen kann, dass für alle Punkte x_0 des Conv. kreises einer Function $f(x)$ mit dem Radius r es möglich ist Reihen $f(x|x_0)$ herzuleiten, die innerhalb eines bestimmten Bereiches mit $f(x)$ übereinstimmen, so ist r nicht der wahre Conv. radius, sondern die Convergenz der Reihe $f(x)$ erstreckt sich weiter, und umgekehrt, wenn der Kreis mit dem Radius r der wahre Conv. kreis ist; so muss es in seinem Umfange wenigstens eine Stelle x_0 geben, so dass es nicht möglich ist aus $f(x)$ die Reihe $f(x|x_0)$ herzuleiten, die innerhalb eines Bereiches mit $f(x)$ übereinstimmen.

Die Sätze, die wir hier nur für Potenzreihen von x, $f(x)$ hergeleitet haben, gelten ohne Weiteres für Potenzreihen von $x-a$, $f(x|a)$. —

Diese Stellen in deren Nähe die Funktion den Charakter einer ganzen Function verliert, nennen wir singuläre Stellen. Wir bemerken hierbei, dass die Anordnung der singulären Stellen sehr mannigfaltig ist. Es gibt Potenzreihen, bei denen es erstens) nur eine solche Stelle, 2) mehrere solche Stellen gibt 2) unendlich viele singuläre Stellen 3) ganze Strecken,

4) bei denen der ganze Umfang des Conv. Kreises singulär ist.

Beispiele. Als erstes Beispiel wollen wir eine rationale Function nehmen, d. h. einen Quotienten zweier ganzer Functionen von x. (Die rationalen Funktionen waren diejenigen, welche zunächst auf Reihen geführt haben, nämlich die Function $\frac{1}{1-x}$); die gegebene Function sei $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$ wo F_1 u. F_2 ganze rationale Functionen sind ohne gemeinschaftlichen Factor. Nehmen wir irgend einen Punkt a, für welchen der Nenner nicht verschwindet, so existirt, wie wir es schon bewiesen haben eine Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$ sodass innerhalb eines bestimmten Bezirkes

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \mathfrak{P}(x|a) \text{ ist}$$

Wenn für irgend einen Werth b, $F_2(x) = 0$ wird, so besteht sicher die obige Gleichung nicht mehr.

Wenn man um a einen Kreis beschreibt, so dass innerhalb desselben die Function $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$ nicht unendlich gross wird, so gibt die obige Gleichung innerhalb dieses Kreises. Angenommen es sei r der wahre Conv. radius von $\mathfrak{P}(x|a)$, dann besteht für Punkte des Innern Kreises die obige Gleichung, denn es wird

$F_1(x) = F_2(x)\mathfrak{P}(x|a)$ in den Coefficienten übereinstimmen. Nun muss es nach den Beweisen in dem Umfange wenigstens eine Stelle x_0 geben, in deren Nähe $\mathfrak{P}(x|a)$ also auch $\frac{F_1}{F_2}$ den Charakter einer ganzen Function verliert d. h., es ist nicht möglich aus $G(x|a)$ eine Function $G(x|x)$ so herzuleiten, dass ihr Conv.-bereich den Punkt x_0 umfasst. Daraus können wir schliessen, dass an dieser Stelle $F_2(x_0) = 0$ wird. Denn setzen wir

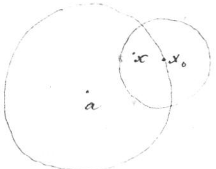
$$F_2(x) = F_2(x_0) + F_2'(x_0)(x - x_0) + \dots$$

und wäre $F_2(x_0) \gtrless 0$, so könnte ich dies in $\frac{F_1}{F_2}$ setzen, und dann würde in der Nähe von x_0 die Gleichung gelten

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = G_1(x|x_0)$$

Für Punkte beider Kreise gilt also

$$G(x|a) = G_1(x|x_0)$$



Also verliert der Quotient in der Nähe von x_0 den Charakter einer ganzen Function nicht; es muss also $F_2(x_0) = 0$ werden. Wenn $F_2(x) = 0$ für $b_1, b_2 \dots$ so geht unser Kreis durch einen Punkt b, für welchen der absolute Betrag von $b - a$ am kleinsten ist. Als unmittelbare Anwendung dieses Resultates ergibt sich der Satz, dass eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades stets n Wurzeln hat, jede so oft gezählt, als es die Ordnungszahl angibt. Es sei $F(x)$ die algebraische Gleichung und wir zeigen, dass $F(x)$ überhaupt einmal null werden muss. Zu dem Ende betrachten wir die Function $\frac{F'(x)}{F(x)}$ und nehmen an, dass $F(x)$ für $x = 0$ nicht verschwindet. Unter dieser Voraussetzung können wir setzen

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Verschwände $F(x)$ für keinen Werth, so würde diese Reihe beständig convergent sein. Eine beständig convergirende Reihe hat nun folgende Eigenschaft. Denken wir uns um den Nullpunkt einen beliebig großen Kreis, so kann man außerhalb desselben noch immer Werthe von x finden, für welche die Reihe convergirt. Wir hatten nun

$$|c_\lambda|\, r^{\lambda} \leqq g \text{ oder}$$

$$|c_\lambda| \leqq g \cdot r^{-\lambda}$$

Nun ist $|c_\lambda|$ constant, und nun kann man r beliebig groß, also $r^{-\lambda}$ beliebig klein machen, folglich wenn g endlich wäre, könnte man auch $g\, r^{-\lambda}$ beliebig klein machen; daraus würde die Function obiger Relation folgen; demnach muß es möglich sein durch Vergrößerung von r, den Werth der Reihe dem absoluten Betrage nach; d.h. das g so groß zu machen, wie man nur will. Wenn unsere Reihe $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ beständig convergent wäre, so müßte es also möglich sein durch Vergrößerung von x, den Werth von $\frac{F'(x)}{F(x)}$ so groß zu machen, wie man nur will. Nun ist aber

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \text{ und}$$

$$F'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}, \text{ also}$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{n a_0 x^{-1} + (n-1) a_1 x^{-2} + \dots}{a_0 + a_1 x^{-1} + \dots}$$

man kann also durch Vergrößerung von x den Werth von $\frac{F'(x)}{F(x)}$ beliebig klein machen. Also muss unsere Voraussetzung falsch sein, d.h. es muss $F(x)$ für irgend einen Werth Null sein. Wir wollen annehmen, dass $F(x)$ an einigen Stellen $x_1 \dots x_r$ verschwindet und zwar mit den Ordnungszahlen $\nu_1 \dots \nu_r$, alsdann kann ich doch setzen.

$$F(x) = (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2} \dots (x-x_r)^{\nu_r} F_1(x) \text{ wo}$$

$F_1(x)$ nicht mehr verschwindet. Nun sind hier zwei Fälle möglich 1) $\sum \nu = n$, dann muss $F_1(x)$ constant sein, oder 2) $\sum \nu < n$, dann kann $F_1(x)$ wirkliche Function sein. Nun haben wir

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\nu_1}{x-x_1} + \dots + \frac{\nu_r}{x-x_r} + \frac{F_1'(x)}{F_1(x)}$$

Wenn $F_1(x)$ nicht verschwindet, so wird sich $\frac{F_1'(x)}{F_1(x)}$ in eine beständige convergirende Reihe entwickeln lassen, daraus schliessen wir, dass $\frac{F_1'(x)}{F_1(x)}$ eine Constante sein muss. Nun können wir aber, sobald x eine Grenze nicht überschreitet, setzen

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = n x^{-1} + \dots \quad \text{und auch}$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = (\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r) x^{-1} + (\nu_1 x_1 + \dots + \nu_r x_r) x^{-2} + \dots$$

und durch Vergleichung folgt $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = n$.

d.h. eine ganze Function n^{ten} Grades verschwindet genau für n Werthe von x (wenn man die Ordnungszahl berücksichtigt.)

Wenn ich statt einer wirklich rationalen gebrochenen

Function, einen Quotienten 2ter Potenzreihen nehme, $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ und wählen a so, dass es in dem gemeinschaftlichen Conv.bereiche von F_1 u F liegt, und $F(x) < 0$ ist, so koennen wir $\frac{F_1}{F}$ in eine Potenzreihe $G(x/a)$ entwickeln und der Convergenzkreis derselben geht durch die nächsten an a liegende Stelle, wofür der Quotient ∞ wird.

<u>Allgemeiner Polynomialsatz</u> Zunächst wollen wir die allgemeine Definition einer Potenz z^m geben, wo m beliebige reelle oder complexe Zahl bedeutet. Es ist bekannt, das für jedes u man hat

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

Setzt man $e^u = z$ oder $u = lz$, so definirt man z^m durch folgende Gleichung

$$z^m = e^{m\,lz}$$

Betrachten wir nun die Reihe

$z = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ und sie soll einen bestimmten Conv. kreis besitzen, und wir wollen die Convergenz jeder beliebigen Potenz von z untersuchen. Es ergibt sich alsdann der Lehrsatz: Wenn z innerhalb des Convergenzbereiches von Null verschieden ist, so convergirt jede Potenz von z wenigstens so weit, wie z selbst; wenn dagegen für irgend eine Stelle des Conv. Bereiches von z, $z = 0$ wird, so suche man denjenigen Werth von x für den $z = 0$, ~~dessen~~ dessen absoluter Betrag der kleinste ist r; dann convergirt z^m für alle Werthe von x, für die der absolute Betrag kleiner ist als r. Um dies nachzuweisen, schließen wir so. Es ist

$$\frac{de^n}{dn} = e^n \text{ oder } \frac{dz}{dn} = z \text{ also}$$

$$dn = \frac{dz}{z} \text{ also ist}$$

$$\frac{d\ln z}{dz} = \frac{1}{z} \text{ und daraus folgt}$$

$$\frac{d\ln z}{dn} = \frac{c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots}{1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots} = \frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}$$

Da nun für $x = 0$, $z = 1$ wird, so läßt sich $\frac{1}{\varphi(n)}$ entwickeln in eine Potenzreihe von x und wir erhalten alsdann

$$\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} = c_1 + c_1' x + c_2' x^2 + \dots$$

Wird nun z innerhalb des Conv.bereiches nicht Null, so läßt sich $\frac{1}{1+c_1x+\dots}$ entwickeln in eine Potenzreihe von x, die wenigstens so weit convergirt als z; wird dagegen $z=0$ innerhalb des Conv bereiches, so convergirt die Reihe für $\frac{1}{1+c_1x+}$ bis an denjenigen Punkt, für welchen $z=0$ und dessen absoluter Betrag der kleinste ist r. Dasselbe gilt offenbar von der Reihe für $\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}$, da ja φ' u φ denselben Convergenzbereich haben. Nun bestimmen wir folgende Function

$$\psi(x) = c_1 x + \frac{c_2' x^2}{2} + \frac{c_3' x^3}{3} + \dots$$ so convergirt die Reihe innerhalb desselben Conv.bereiches, wie $\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}$

Wir haben nun die Gleichung

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}$$

Die Function $e^{\psi(n)}$ läßt sich wiederum entwickeln in eine Potenzreihe von x, die wenigstens für dieselben Werthe von x convergirt, wie $\psi(x)$ d.h. wie $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$. Nun folgt weiter

$$\frac{d\, e^{\psi(x)}}{dx} = e^{\psi(x)} \cdot \psi'(x) = e^{\psi(x)} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Daraus folgt nun

$$-\varphi(x)\frac{d\, e^{\psi(x)}}{dx} + e^{\psi(x)}\varphi'(x) = 0$$

Dieses durch $\psi(x)^2$ dividirt ergibt

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\varphi(x)}{e^{\psi(x)}} = 0$$

Da nun $e^{\psi(x)}$ für keinen Werth des Conv. bereiches von z null wird, so läßt sich

$\frac{\varphi(x)}{e^{\psi(x)}}$ entwickeln in Potenzreihen

von x, da nun die Ableitung derselben gleich null ist, so muß

$$\frac{\varphi(x)}{e^{\psi(x)}} = C \text{ sein oder}$$

$$\varphi(x) = C e^{\psi(x)} \text{ da für } x=0 \text{ folgt } C = 1,$$

so ist also $\varphi(x) = e^{\psi(x)}$

Hieraus sehen wir, daß es eine ganz bestimmte Reihe gibt $\psi(x)$, welche den einen Logarithmus von $\varphi(x)$ darstellt.

Ferner erhalten wir

$$\varphi^m(x) = e^{m\psi(x)} = 1 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

Es läßt sich also wirklich φ^m in Potenzreihen entwickeln und diese convergirt so weit wie $\varphi(x)$, wenn $\varphi(x)$ innerhalb des Conv. bereiches nicht null wird.

Wenn dagegen $\varphi(x)$ innerhalb des Bereiches für $|x| = r$ null wird, wo r der kleinste Werth ist, so convergirt die Reihe sicher für alle von x für die $|x| < r$. Wir sehen also daß einer der Werthe von $\varphi^m(x)$ durch eine convergirende Reihe darstellen läßt.

Im speciellen Fall $\varphi(x) = 1 + x$, erhalten wir den Satz, daß $(1+x)^m$ convergent ist für alle Werthe von x für welche der absolute Betrag kleiner ist als 1. Denn $a = -1$ ist der dem absoluten Betrage nach kleinster Werth für welchen $1 + x = 0$ ist.

Die Coefficienten von $\varphi^m(x)$ kann man auf folgende Weise bestimmen; setzen wir

$$y = e^{m\,\psi(x)} \text{ so ist}$$

$$\frac{dy}{dx} = my\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \text{ oder}$$

$$\varphi(x)\,\frac{dy}{dx} - my\,\varphi'(x) = 0$$

Da wir nun einmal die Existenz der Reihe für y nachgewiesen und ihre Convergenz gefunden, so können wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen, indem wir für y eine Potenzreihe ansetzen und dies in die letzte Gleichung setzen; dann erhalten wir zur Bestimmung des Coefficienten von y ein recurirendes Gesetz.

Die vorigen Beispiele mögen ausreichen, um an ihnen zu sehen, wie man aus der Definition der Function, ohne Kenntniß der Coefficienten derselben a ihre Gültigkeit finden kann. Nachdem man sich nach den vorigen Methoden über die Existenz einer Potenzreihe überzeugt hat, kann man zur Bestimmung derselben irgend eine Methode anwenden.

Dieser Weg ist der eigentliche bei der Untersuchung der Function.

Die Sätze, die wir in diesem Abschnitte für Functionen einer Variablen nachgewiesen haben, lassen sich leicht mit einigen Beschränkungen auf Function beliebig vielen Variablen ausdehnen. Vorher wollen wir einige Begriffe entwickeln, die uns die Beweise der Sätze erleichtern.

Wenn x eine complexe Größe a a' ebenfalls und t eine reelle Variable bedeutet, so wird die Grade dargestellt durch die Gleichung $x = a + a't$ und diese Gerade geht offenbar durch die Punkte a, u $a + a'$. Durchläuft t die Werthe von ∞ bis $+\infty$, so bedeutet x eine Gerade. Wenn ich eine Grenze haben will, die durch die Punkte a u a_1 geht, so ist sie offenbar

$$x = a + (a_1 - a)t$$

und wenn man das t beschränkt auf die Werthe von 0 bis 1, so stellt uns $x = a + (a_1 - a)t$ die Strecke zwischen a u x_1. Hierdurch definiren wir die Gerade ganz arithmetisch, indem wir sie auffassen als die einfachste Function lineare zwischen der complexen Größe x und der reellen t. Nehmen wir mehrere und mehrere Variablen $x\, y\, z$ und bilden die Functionen. $x = a + a't$

$$y = b + b't$$
$$z = c + c't$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

indem wir das t von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen in reellen Werthen; so nennen wir die Gesamtheit der Werthsysteme von $x\,y\,z\ldots$ die sich zu einem und demselben t ergeben eine Gerade in diesem Gebiete. Und die Strecke von $a\,b\,c,\ldots$ bis $a_1\,b_1\,c_1\ldots$ wird in diesem Gebiete repräsentirt durch die Gleichungen

$$x = a(1-t) + a_1 t$$
$$y = b(1-t) + b_1 t \qquad (t = 0, \ldots 1)$$
$$z = c(1-t) + c_1 t$$

Allgemeiner, wenn wir unter $\varphi_1(t)\ \varphi_2(t),\ \varphi_3(t)$ eindeutige stetige Functionen der reellen t verstehen irgend einer Art, stellen die Werthsysteme von $x\,y\,z\ldots$ die sich für dieselben Werthe von t ergeben aus den Gleichungen

$$x = a + a_1 \varphi_1(t)$$
$$y = b + b_1 \varphi_2(t)$$
$$z = c + c_1 \varphi_3(t)$$

eine Linie in diesem Gebiete überhaupt.

Wenn nun gesagt wird, ein bestimmter Bereich, in welchem $x\,y\,z\ldots$ enthalten ist, bilde ein Continuum, so bedeutet diese Ausdrucksweise folgendes: Wenn $a\,b\,c\ldots$ irgend eine Stelle des Bereiches $a_1,\,b_1,\,c_1\ldots$ irgend eine andere, so bildet der Bereich ein Continuum, wenn man von der Stelle $a\,b\,c,\ldots$ zu der Stelle $a_1\,b_1\,c_1\ldots$ auf irgend einer geraden gebrochenen oder krummen Linie dieses Gebietes gelangen kann. Diese Definition des Continuum stimmt überein mit der auf der Seite gegebenen. Bei einer Variablen ist der Abstand des Punktes x von einem anderen Punkte a gleich dem absoluten Betrage von $(x-a)$; bei mehreren Variablen definiren wir den Abstand einer Stelle $x\, y\, z$ von einer andern auf folgende Weise. Es sei

$$\alpha^2 = (x-a)^2$$
$$\beta^2 = (y-b)^2$$
$$\gamma^2 = (z-c)^2$$

so ist der Abstand von $x\, y\, z \ldots$ u $a\, b\, c \ldots$ gleich $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots}$

Wir haben schon früher gesehen, daß wenn wir eine Potenzreihe von $x\, y\, z \ldots$ $G(x\, y\, z)$ haben und im Innern des Conv.bereiches einen Punkt $a\, b\, c$ wählen, so können wir die vorgelegte Reihe umwandeln in eine andere $G(x\, y\, z \ldots | a\, b\, c)$ und wir wissen, daß diese neue Reihe einen bestimmten Convergenzbezirk hat. Wir haben gesehen, daß es sich eine Größe δ angeben läßt, daß für alle Werthe von $x, y, z \ldots$ für welche

$$|x-a| < \delta \quad |y-b| < \delta \quad |z-c| < \delta$$ ist, die Reihe

convergent ist. Die Größe δ hat nun eine obere Grenze, die wir mit δ allein bezeichnen wollen. Alsdann ist die Reihe $G(x\, y\, z | a\, b\, c)$ convergent sobald $|x-a| < \delta, |y-b| < \delta$ $|z-c| < \delta \ldots$ ist. Die Größe δ hat alsdann die Eigenschaft, dass die Reihe aufhört zu convergiren, sobald wir alle $|x-a|, |y-b| \dots$ über δ wählen. Wir wollen nun unter Umgebung der Stelle $a, b, c \dots$ alle Werthsysteme von xyz verstehen, für welche

$$|x-a| < \delta, |y-b| < \delta, -$$

Diese Umgebung der Stelle $abc\dots$ nennt Weierstrass den engeren Convergenzbezirk.

Lehrsatz. Es seien 2 Potenzreihen $G(xyz\dots|abc)$ und $G_1(xyz\dots|a_1 b_1 c_1)$ gegeben, die bestimmte Convergenzbereiche besitzen. Angenommen dass in der Umgebung einer bestimmten Stelle $a_2\ b_2\ c_2 \dots$ die innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbereiches beider Reihen $G(xy\dots|ab\dots)$ und $G_1(xyz|a_1 b_1 \dots)$ liegt, beide Reihen übereinstimmen, so findet die Uebereinstimmung statt für alle Werthsysteme xyz, welche in dem gemeinschaftlichen Convergenzbereiche beider Reihen liegen, vorausgesetzt, dass von der Stelle $x_2\ y_2\ z_2 \dots$ in der Umgebung von $a_2\ b_2\ c_2 \dots$ an der Stelle $xyz\dots$ des gemeinsamen Conv. bereiches ein stetiger Uebergang möglich ist. [Der letzte Zusatz war bei den Potenzreihen einer Variablen nicht nöttig, da man ja von jeder Stelle des Conv. kreises zu jeder andern stetig gelangen kann. Hier bei Potenzreihen mehrerer Variablen ist der Zusatz nothwendig, da es bis jetzt noch nicht feststeht ob der Conv. bereich einer Potenreihe

von mehreren Variablen ein Continuum bildet. [Diese Untersuchung, die an für sich nicht wesentlich ist, soll aber interessant, wurde von Weyerstraß empfohlen.]
In dieser Fassung wird dieser Satz mit Hinzunahme der oben entwickelten Begriffe, auf dieselbe Weise nachgewiesen, wie bei einer Variablen.
Es sei $a\,b\,c$ .. die eine Stelle $a_1\,b_1\,c_1$ die 2te u. $a_2\,b_2\,c_2$ .. die 3te. Die Stelle $a_2\,b_2\,c_2$ .. soll in dem gemeinsamen Conv. bereiche von $G(x\ldots|a\ldots)$, $G_1(x\ldots|a_1\ldots)$ liegen, und nun beschränken wir uns auf Werthsysteme von $x\,y\,z$.. von denen ein continuirlicher Uebergang nach $a_2\,b_2\,c_2$.. möglich ist, d. h. wir beschränken uns auf die Linie welche von der Stelle $a_2\,b_2\,c_2$ .. nach der betrachteten Stelle geht. Die Werthsysteme von $x\,y\,z$ –, welche auf diese Linie beschränkt sind, bezeichnen wir mit $x'y'z'$... Nehmen wir nun irgend einen Punkt der Uebergangslinie und verbinden ihn mit der Grenze des Conv. bezirkes, so ist der Abstand beider Punkte nicht null, da ja die ganze Linie innerhalb des gemeinsamen Conv. bereiches liegt. Dieser Abstand muß für den betrachteten Punkt eine untere Grenze haben, die wir mit ε bezeichnen. Diese untere Grenze kann nicht null sein; denn bezeichnen wir diesen Punkt mit $\dot{x}'y'z'$ und setzen

$(x-x')^2 = \alpha^2$ $(\eta-y')^2 = \beta^2$, … wo xy …. die Punkte der Grenze des Conv. bereiches sind, so müßte $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\ldots}$ irgendwo die untere Grenze Null haben; dies ist aber nur dann möglich wenn

$\alpha = |x - x'| = 0$, $\beta = |\eta - \eta'| = 0$ .. ist, d. h

es müßte $x'y'$ an der Grenze des Conv. bereiches liegen, was gegen die Voraussetzung ist. Lassen wir nun das $x'y'$ die Linie durchlaufen, so wird sich auch ξ ändern, und es muß ebenfalls irgendwo eine untere Grenze ξ_0 haben, die ebenfalls von Null verschieden ist. Denn wäre ξ_0 gleich Null, so müßte das xyz auf eine endliche Strecke beschränkt ist, irgendwo eine Stelle der Strecke vorhanden sein, für deren Umgebung die untere Grenze von ξ gleich Null wäre, was nicht der Fall ist. Es ist also ξ_0 von Null verschieden.

Leiten wir nun aus $G(xy..(abc)$ die Reihe $(G(xy(a_2 b_2 c_2)$ und aus $G_1(xy..(a_1 b_1 c_1..)$ die Reihe $G_1(xy..(a_2 b_2 c_2)$ so müssen, da in der Umgebung von $a_2\, b_2\, c_2$ .. der Annahme nach $G(xy..(abc) = G_1(xy..(a_1 b_1 c_1)$ und ebenfalls

$$G(xy..(abc) = G(xy..(a_2 b_2 c_2)$$

$G_1(xy..(a_1 b_1 \ldots) = G_1(xy..(a_2 b_2)$, die beiden Reihen

$$G(xy..(a_2 b_2 \ldots) = G_1(xy..(a_2 b_2 \ldots)$$

d. h sie müssen identisch sein. Nun nehmen wir auf der Linie von abc.. eine Stelle $x_1 y_1 z_1$ sodaß sie in Bezug

auf die Conv. bereiche von $G(x..|a)$ u. $G_1(x..|a_1..)$ von $a_2\, b_2$ einen Abstand hat, der kleiner ist als ε_0.
Nun können wir aus $G(xy.|a_2\, b_2..)$ u. $G_1(xy|a_2\, b_2..)$ die Reihen herleiten.

$$G(xy|x_1\, y_1..),\ G_1(xy..|x_1\, y_1..)$$

welche in einer bestimten Umgebung von $x\, y..$ überein-stimmen, folglich identisch sein müssen.
Leiten wir nun aus $G(xy.|a\, b..)$ u. $G_1(x..|a_1..)$ die Reihe

$$\overline{G}(xy..|x_1\, y_1..)\ u\ G_1(xy..|x_1\, y_1..)$$

so ist leicht zu zeigen, dass diese beiden Reihen übereinstimmen mit $G(xy..|x_1 y_1)$ u $G_1(xy..|x_1\, y_1)$; und hieraus folgt, dass in der Umgebung von $x_1\, y_1..$

$$G(xy|a\, b..) = G_1(xy..|a_1\, b_1)$$

Offenbar können wir so fortfahren, indem wir auf der Linie einen neuen Punkt $x_2\, y_2\, z_2$ wählen, so dass sein Abstand von $x_1\, y_1..$ kleiner ist als ε_0 und können auf diese Weise zu jeder beliebigen Stelle der Linie von $a_2\, b_2\, c_2$ gelangen und die Uebereinstimmung von $G(xy..|a\, b..)$ u $G_1(xy..|a_1\, b_1..)$ hierfür nachweisen. Auf dieselbe Weise können wir die Uebereinstimmung von $G(x...|a..)$ u $G_1(x..|a_1..)$ für alle diejenigen Stellen des gemeinsamen Conv. bereiches von G u. G_1 zeigen, zu denen ein continuirlicher Uebergang von $a_2\, b_2\, c_2$ möglich ist
Hiermit ist der Satz vollständig nachgewiesen, und

der Beweis ist ganz analog dem für eine Variable.

Lehrsatz. Es sei $G(xy\ldots|ab\ldots)$ gegeben, und wir gehen von $a\,b\,c$ zu einer andern Stelle des Convergenzbereiches $a_1 b_1 c_1$ über. Wenn der kleinste Abstand des Punktes $a\,b\,c$ von der Grenze des Conv. bezirkes gleich d ist, und $d < \xi_0$, so kann man, wenn man den Punkt $a_1 b_1 c_1 \ldots$ so wählt, daß sein Abstand von $a\,b\,c$ kleiner ist als $\frac{d}{2}$, aus $G(xy\ldots|a_1 b_1\ldots)$ der Reihe $G(xy\ldots|a_1 b_1 c_1)$ und aus $G(xy\ldots|a_1 b_1\ldots)$ direct $G(xy\ldots|ab\ldots)$ herleiten.

Der Beweis ist ganz analog dem bei einer Veränderlichen.

Aus diesem Satze folgen leicht folgende Folgerungen

1) Es sei für die Reihe $G(xy\ldots|ab\ldots)$ der engere Conv. radius gleich δ, für die aus $G(xy|ab\ldots)$ hergeleitete Reihe $G(xy\ldots|a_1 b_1\ldots)$ sei δ' der engere Convergenzradius, und d der Abstand von $a\,b\,c\ldots\; a_1 b_1 c_1 \ldots$, so ist sicher δ' nicht kleiner als die Differenz $\delta - d$, und nicht größer als $\delta + d$.

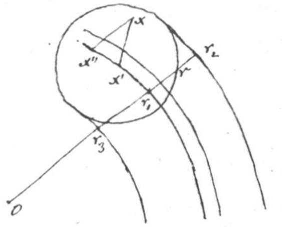
2) Wenn die ursprüngliche Reihe bedingt convergent ist, so ist jede aus ihr hergeleitete ebenfalls bedingt convergent.

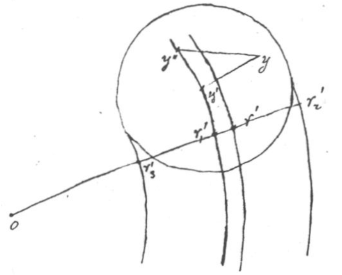
3) Die Größe δ der engere Convergenzradius der aus $G(xy\ldots)$ hergeleiteten Reihe $G(x\ldots|a\ldots)$ ändert sich stetig mit der Stelle $(a\,b\ldots)$

Hauptsatz. Wir nehmen an, es sei eine Potenzreihe von $x\,y\,z\ldots$ $G(xyz\ldots)$ gegeben, und man wisse, daß sie sicher convergent ist für Werthsysteme von $x\,y\,z$ .. deren absolute Beträge kleiner sind als resp. $r_1\, r_2\, r_3 \ldots$, wissen aber nicht, ob $r_1\, r_2\, r_3 \ldots$ die wahren Convergenzradien sind. Es sei nun $x'y'z'$ irgend eine Stelle im Innern des Convergenzbezirkes, die aber an die Bedingung geknüpft ist, dass $|x'| < r_1$, $|y'| < r_2$, $|z'| < r_3$ .. alsdann gehört zu jedem $x'y'z'$ ein engerer Convergenzradius δ. Dieser hat nun eine untere Grenze ϱ. Wenn nun die untere Grenze von δ, gleich ϱ von Null verschieden ist, so erstreckt sich der Conv. bereich der ursprünglichen Reihe noch weiter, indem sie noch für solche Werthsysteme von $x\,y\,z$ .. convergent ist, für die

$$|x| > r_1 \,..\, |y| > r_2,\ |z| > r_3$$

Diesen Satz beweist man mit einigen Modificationen, so wie bei einer Variablen, und wir wollen, soweit dieser Beweis verschieden ist von dem erwähnten, ihn für 2 Variablen führen, welches Verfahren sich sofort auf beliebig viele Variablen ausdehnen lässt. Es sei also $G(xy)$ die gegebene Potenzreihe von xy, und sie sei sicher convergent für alle Werthcombinationen von xy, für die $|x| < r$, $|y| < r'$. d. h. für alle Punkte in den Kreisen mit den Radien r u. r'. Wenn man innerhalb beider Kreise die Stelle $x'y'$ beliebig wählt, so kann man $G(xy)$ entwickeln nach Potenzen von $x - x'$, $y - y'$ oder man bekommt eine Entwicklung von $G(x'+h, y'+k)$ nach Poreihen von h, k,





Diese Potenzreihe von h, k, hat einen engeren Convergenzradius δ, da sich mit der Stelle $x'y'$ ändert, also eine untere Grenze ϱ haben muss. Wenn nun $\varrho > 0$ ist, so kann man r nur vergrössern und die Reihe $G(xy)$ wird auch dann convergent sein. Nehmen wir $d < \varrho$ an, und dann beschreiben wir um die Nullpunkte Kreise, mit den Radien $r_1 < r$, u r_2, so dass die Differenz $r_2 - r_1 \leqq d$ und wählen r_1 so aus, dass $r_2 > r$ ist; dasselbe machen wir für den 2ten Kreis. Alsdann beschränken wir x auf den Kreis r_1 und y auf r_2'. Wir erhalten nun

$$G(x'+h, y'+k) = \sum_{\lambda\mu} G^{(\lambda,\mu)}(x'y')\,\frac{h^\lambda}{\lambda!}\cdot\frac{k^\mu}{\mu!},$$

und diese Reihe ist sicher convergent für alle h, k's, für welche $|h| < \varrho$, $|k| < \varrho$. Es handelt sich nun darum für $G^{(\lambda,\mu)}(x'y')$ eine Grenze zu finden. Wir construiren noch einen Kreis, der durch r_3 geht, so dass $\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1 r_3}$ und ebenso einen durch r_3' $\overline{r_1' r_2'} = \overline{r_1' r_3'}$. Nun beschränken wir die Variablen auf den Bereich zwischen den Kreisen r_3 u r_2, r_3' u r_2' und ihre Grenzen. Wir nehmen in diesem Gebiete einen Punkt xy, wählen und definiren eine Function $G(xy)$ so dass sie Sinn hat für alle Punkte

des Convergenzbereiches von $G(xy)$ und außerhalb desselben inner-
halb des Conv:bereiches von $G_1(xy)$ aber mit $G_1(xy)$ übereinstimmt.
Haben wir den Punkt xy gewählt, so können wir $x'y'$ auf
dem Kreise mit dem Radius r_1 u r_1' so wählen, daß $\overline{xx'} < \varrho$,
$\overline{yy'} < \varrho$. Alsdann hat die Reihe

$$\sum_{\lambda\mu} G^{(\lambda\mu)}(x'y') \frac{(x-x')^{\lambda}}{\lambda!} \frac{(y-y')^{\mu}}{\mu!}$$

einen endlichen Werth. Der Werth der Reihe ist von $x'y'$
unabhängig, denn nehmen wir irgend einen andern
Punkt $x''y''$ auf den Kreisen $r_1 r_1'$ an, so daß

$\overline{xx''} < \varrho$ $\overline{yy''} < \varrho$ so erhalten wir die Reihe

$$\sum_{\lambda\mu} G^{(\lambda\mu)}(x''y'') \frac{(x-x'')^{\lambda}}{\lambda!} \frac{(y-y'')^{\mu}}{\mu!}$$

Da nun beide Reihen convergent sind für alle Werthe
von x, wofür $|x-x'| = \overline{xx'} < \varrho$ $|y-y'| = \overline{yy'} < \varrho$

$|x-x''| = \overline{xx''} < \varrho$ $|y-y''| = \overline{yy''} < \varrho$

d. h. für alle Punkte die in den Kreisen resp. in $x'y'$, $x''y''$
liegen, welche vollständig zwischen den Kreisen $r_3 r_2$, $r_3' r_2'$
liegen und wegen $\overline{xx'} < \varrho$ $\overline{xx''} < \varrho$ $\overline{x'x''} < 2\varrho$ in

$\overline{yy'} < \varrho$, $\overline{yy''} < \varrho$ $\overline{y'y''} < 2\varrho$

wobei denn die Convergenzbereiche beider Reihen nothwen-
dig theilweise aufeinander fallen. Nehmen wir nun einen
Punkt xy an, der innerhalb des gemeinsamen Conv. berei-
ches von beiden Reihen, und gleichzeitig in dem Con.bereich
von $G(xy)$ liegt, so werden die beiden Reihen hier überein-
stimmen müßen, da sie hier den Werth von $G(xy)$ darstel.

len, sie müssen also innerhalb des ganzen, gemeinsamen Convbereiches dieselben Werthe darstellen. Nun liegt offenbar xy innerhalb des gemeinsamen Bereiches, also stellen beide Reihen denselben Werth vor für xy unabhängig von $x'y'$. Setzen wir

$$\bar{G}(xy) = \sum_{\mu\mu} G^{(\mu\mu)}(x'y')\frac{(x-x')^{\mu}}{\mu!}\frac{(y-y')^{\mu}}{\mu!}$$

so sehen wir daß sich diese Function stetig mit x y aendert, also auch ihr absoluter Betrag ändert sich stetig, demnach muß es irgendwo im Innern, oder an der Grenze sein Maximum erreichen. Dieses Maximum sei g. Lassen wir nun x den Kreis um x', y den um y' beschreiben, und zwar mit dem Radius d, so wird $|\bar{G}(xy)|$ sein Maximum erreichen, daß nicht größer sein kann als g. Wir haben nun nach dem allgemeinen Satz

$$\left|\frac{G^{(\mu\mu)}(x'y')}{\mu!\,\mu!}\right| \leqq g \cdot d^{-\mu\mu}$$

Der weitere Beweis ist ganz derselbe wie bei einer Variablen und man kommt zu dem Resultate, daß die Reihe $G(xy)$ auch noch convergent ist für $|x| > r$ $|y| > r'$ und zwar kann man den Convergenzradius bis an r_2 r_2' bringen.

Hieraus folgt, daß sobald r u. r' die wahren Convergenzradien sind, es nothwendig für g die Grenze halt geben muß.

Dieses Verfahren läßt sich auf beliebig viele Variablen anwenden.

Hieraus schließen wir wiederum folgendes. Nehmen wir nun irgendeine Stelle der Grenze des Conv. bereiches $x_0 y_0 z_0$.. und zwar möge die Grenze von ϱ für die Umgebung von $x_0 y_0 z_0$ von Null verschieden sein. Alsdann kann man in der Nähe von $x_0 y_0 z_0$.. innerhalb des Conv. bereiches von $G(xyz.)$ einen Punkt $x' y' z'$ wählen und die Reihe herleiten $G(xyz - (x'y'z'..)$ Der Convergenz bereich dieser Reihe wird den Punkt $x_0 y_0 z_0$ umfassen. Alsdann sagen wir die Function $G(xyz..)$ behält in der Nähe von $x_0 y_0$ den Charakter einer ganzen Function. Man kann dann auch die Reihe $G(xy..|x_0 y_0..)$ herleiten. Wenn $x_0 y_0$.. ein Punkt ist für dessen Umgebung die Grenze ϱ gleich Null ist, so wird es nicht möglich sein, eine solche Reihe herzuleiten; dann sagen wir die Function $G(xyz)$ verliere in der Nähe von $x_0 y_0$.. den Charakter einer ganzen Function. Wir können hiernach den Satz aussprechen

<u>Lehrsatz</u> Wenn der gegebene Conv. bereich einer Potenzreihe, der wahre Conv. bereich ist, so muß es an dessen Grenze wenigstens eine Stelle geben, in deren Nähe die Function den Charakter einer ganzen Function verliert.

Umgekehrt kann man aus dem Vorigen den Schluß ziehen: Wenn man für jede Stelle der Grenze des Conv. bereiches $G(xy..)$ eine Reihe $G(xy..|x_0 y_0 z_0..)$ herleiten kann, so geht die Convergenz noch weiter von $G(xy)$.

Wir haben hier die Sätze nachgewiesen für eine Potenzreihe von $x\,y\,z\ldots$, man kann ihn aber sofort übertragen auf Potenzreihen von $x-x'$, $y-y'\ldots$

Man kann nach den vorigen Sätzen den Gültigkeitsbereich einer Reihe direct aus der hinreichenden Definition der Function herleiten, ohne das Coefficientengesetz zu kennen.

Als unmittelbare Anwendung des Satzes nehmen wir das Beispiel eines Quotienten zweier Potenzreihen von $x\,y\,z\ldots$ Es sei die gegebene Function

$$\frac{G_1(xyz)}{G_2(xyz)}$$

wobei $G_2(xy\ldots)$ für $x=y=z=\ldots=0$ nicht verschwinden soll. Wählen wir nun innerhalb der beiden Potenzreihen des gemeinsamen Conv. bereiches eine Stelle $x'y'z'\ldots$ für welche der Nenner nicht verschwindet, so können wir eine Reihe finden, sodass

$$\frac{G_1(xyz\ldots)}{G_2(xy\ldots)} = G(xyz\ldots|x'y'z')$$

und die Convergenz wird gelten innerhalb eines um $x'y'\ldots$ beschriebenen Bereiches von Kreisen, die mit Radien beschrieben sind, welche die absoluten Beträge von $|x_0-x|$ $|y_0-y|\ldots$ sind, wobei $x_0\,y_0\ldots$ die nächste an $x'y'\ldots$ liegende Stelle ist, wofür $G_2(xy\ldots)=0$ ist

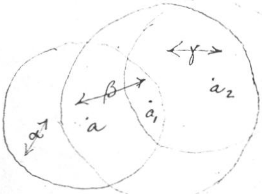
---

Begriff einer analytischen Funktion!

So wie wir in der allgemeinen Grössenlehre zunächst

Zahlen betrachteten, die aus endlicher Anzahl von Elementen bestanden und dann zu unendlichen Reihen von Zahlenelementen übergingen, so lag es nahe nach Betrachtung der ganzen Function, die aus endlicher Anzahl von Gliedern bestanden, unendliche Reihe von Gliedern zu betrachten, von denen jedes eine ganze Function ist und multiplicirt mit einer Constante. Diese neuen Functionen stehen nahe den ganzen Functionen, indem sie für bestimmte Bereiche analoge Eigenschaften besitzen, wie die ganzen rationalen Functionen. Diese Potenzreihen, können nun beständig convergent sein, alsdann stehen sie den ganzen Functionen am nächsten, sie haben aber eine Eigenthümlichkeit, die sie vor den ganzen rationalen Functionen kennzeichnet, nämlich, daß sie im Unendlichen eine Stelle haben, für die sie unbestimmt bleiben, und auf keine Weise definirt werden können.
Der Quotient zweier solcher beständig convergirenden Reihen, steht den gebrochenen, rationalen Functionen am nächsten. Um die neuen Begriffe zu entwickeln, wollen wir bei Functionen einer Variablen stehen bleiben. Wenn die gegebene Reihe $G(x|a)$ einen beschränkten Conv.bereich hat, so können wir aus ihr eine neue Reihe ableiten. In dem Conv.bereiche von $G(x|a)$ nehmen wir einen Punkt a, an, und wandeln $G(x|a)$ in $G(x|a)$ um.

Diese neue durch die Reihe definirte Function hat einen neuen Conv. bereich. Der Conv. bereich dieser neuen Reihe $\mathfrak{P}(x|a_1)$ kann entweder vollständig innerhalb des Conv. bereiches von $\mathfrak{P}(x|a)$ liegen und dann ist $\mathfrak{P}(x|a_1)$, da wo sie existirt identisch mit $\mathfrak{P}(x|a)$; sie ist eine andere Darstellung von $\mathfrak{P}(x|a)$ die innerhalb eines bestimmten Bereiches giltig ist. Im Allgemeinen wird aber der Conv. bereich der neuen Reihe $\mathfrak{P}(x|a_1)$ über den Conv. bereich von $\mathfrak{P}(x|a)$ hinausragen. Innerhalb des beiden Reihen gemeinsamen Conv. Kreises sind beide Reihen dem Werthe nach identisch. Bezeichnen wir den



gemeinschaftlichen Convergenzkreis von $\mathfrak{P}(x|a)$ $\mathfrak{P}(x|a_1)$ mit β den übrigen Theil des Conv. kreises von $\mathfrak{P}(x|a)$ mit α, und den von $\mathfrak{P}(x|a_1)$ mit γ, so sehen wir, daß $\mathfrak{P}(x|a)$ definirt ist für α u. β, $\mathfrak{P}(x|a_1)$ dagegen für β u. γ.

Innerhalb β stimmen beide Reihen überein, die Convergenz der zweiten geht aber noch über β hinaus bis zu γ, ebenso wie die von $\mathfrak{P}(x|a)$ über β hinaus nach α. Wir können somit die 2te Reihe als die Fortsetzung der 1ten Reihe ansehen und wir sagen auch: $\mathfrak{P}(x|a_1)$ ist die Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x|a)$. Nun können wir innerhalb des Conv. bereiches von $\mathfrak{P}(x|a_1)$ einen Punkt a_2 wählen, und die Reihe herleiten $\mathfrak{P}(x|a_2)$ so wird man wiederum $\mathfrak{P}(x|a)$ als die Fortsetzung von $G(n/a_1)$ ansehen können. u.s.w. Mit dem Ableiten der Reihen kann man so fortfahren u. kann zuletzt zu einer Potenz gelangen, deren Conv. bezirk vollständig außerhalb des Conv. Bereiches der ursprünglichen Reihe liegt und die doch in der ersten Reihe ihren Ursprung hat.

Wenn nun $G(n/a_1)$ aus $G(x/a)$ hergeleitet ist, so könnte dies entweder direct geschehen, indem man direct $G(n/a)$ formell in $G(n/a_1)$ umwandelte, wozu natürlich nöthig ist, dass a_1 innerhalb des Conv. bereiches von $G(n/a)$ liegt, oder auch indirect, dadurch dass man zunächst aus $G(n/a)$ direct eine Reihe $G(n/a')$, dann aus dieser $G(n/a'')$ u.s.w. herleitet und schließlich zu $G(n/a_1)$ gelangte.

<u>Lehrsatz</u> Wenn man aus $G(n/a)$ unmittelbar $G(n/a_1)$ herleitet, so kann man auch aus $G(n/a_1)$ entweder unmittelbar oder durch Vermittelung mehrerer Punkte $G(n/a)$ wieder herleiten.

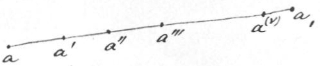
Es sei a der Mittelpunkt des Conv. kreises, und $G(n/a)$ um a_1 ein Punkt im Innern des Conv. kreises. Wenn nun die Strecke $\overline{aa_1}$ kleiner ist als die Hälfte des Conv. radius von $G(n/a)$, so wird nicht nur a_1 innerhalb des Conv. kreises von $G(n/a)$ sondern auch a innerhalb des Conv. kreises von $G(n/a_1)$ sicher liegen.

Alsdann können wir aus $G(n|a)$ herleiten $G(n|a_1)$ und dann unmittelbar aus $G(n|a_1)$ wiederum $G(n|a)$. Denn wählen wir innerhalb des Conv. Kreises von $G(n|a_1)$ den Punkt a, so können wir aus $G(n|a_1)$ jedenfalls eine Reihe herleiten $\overline{G}(x|a)$. Die Reihe stimmt innerhalb einer bestimmten Umgebung von a sicher mit $G(x|a_1)$ und stimmt aber auch $G(x|a)$ mit $G(n|a_1)$ innerhalb einer bestimmten Umgebung von a_1; es muss also innerhalb einer Umgebung von a sicher sein.

$$G(n|a) = \overline{G}(n|a)$$

d. h. beide Reihen müssen identisch sein. Also lässt sich in diesem Falle aus $G(n|a_1)$ unmittelbar $G(n|a)$ herleiten.

Um den Satz aber allgemein nachzuweisen sei a_1 beliebig innerhalb des Conv. Kreises um a gewählt, und man leite unmittelbar aus $G(n|a)$, $G(n|a_1)$ her. Nun wähle ich auf der Linie von a nach a_1 Punkte



$a'\, a''\, a''' \ldots a^{(\nu)}$ die aber so liegen sollen, dass der Abstand von je zwei kleiner ist als d, wo d der kleinste Abstand der Punkte der Linie von der Grenze des Conv. bereiches von $G(n|a)$ ist. (Im Falle dass $a\,a_1$ eine Gerade ist, ist d der Abstand von a_1 von der Peripherie) es ist aber nicht nöthig, $a\,a_1$ als eine Gerade anzusehen, nur muss immer die Linie vollständig innerhalb des Conv. Kreises von $G(n|a)$ liegen. Nun können wir aus $G(n|a)$ herleiten $G(n|a')$ daraus dann $G(n|a'')$

u. s. w. Auf diese Weise erhalten wir die Reihe der Functionen

$$\mathfrak{P}(x/a), \mathfrak{P}(x/a'), \mathfrak{P}(x/a'') \dots \mathfrak{P}(x/a^{(V)}) \overline{\mathfrak{P}}(x/a_1)$$

Nun ist klar, dass die aus $\mathfrak{P}(x/a^{(V)})$ hergeleitete Reihe $\mathfrak{P}(x/a_1)$ identisch sein muss mit $\mathfrak{P}(x/a_1)$ welche direct aus $\mathfrak{P}(x/a)$ hergeleitet wird. Denn zunächst stimmt $\mathfrak{P}(x/a)$ mit $\mathfrak{P}(x/a')$ innerhalb einer bestimmten Umgebung von a' überein, ebenso stimmt $\mathfrak{P}(x/a'')$ mit $\mathfrak{P}(x/a')$ in einer gewissen Umgebung um x' überein, daraus folgt dass $\mathfrak{P}(x/a)$ mit $\mathfrak{P}(x/a'')$ innerhalb einer bestimmten Umgebung um a' übereinstimmen, sie müssen somit in dem ganzen gemeinsamen Conv. bereiche übereinstimmen. Nun ist der Conv R von $\mathfrak{P}(x/a'')$ sicher nicht kleiner als d. Also liegt a''' innerhalb des Conv. bereiches von $\mathfrak{P}(x/a'')$ und gleichzeitig des Conv. Bereiches von $\mathfrak{P}(x/a)$ Es ist nun zunächst für die Umgebung von a'' $\mathfrak{P}(x/a'') = \mathfrak{P}(x/a''')$ und ebenfalls

$\mathfrak{P}(x/a) = \mathfrak{P}(x/a'')$ also nun innerhalb der Umgebung von a'' $\mathfrak{P}(x/a) = \mathfrak{P}(x/a''')$. Auf diese Weise weiter schliessend gelangt man, dass innerhalb einer bestimmten Umgebung von $a^{(V)}$

$$\mathfrak{P}(x/a) = \overline{\mathfrak{P}}(x/a_1)$$

Nun liegt a_2'' oder auch in dem Conv. bereiche von $\mathfrak{P}(x/a_1)$ da ja $\overline{a''a_1} < d$ ist, also muss für die Umgebung von $a^{(V)}$ auch $\overline{\mathfrak{P}}(x/a_1) = \mathfrak{P}(x/a)$ also auch

$\mathfrak{P}(x/a_1) = \mathfrak{P}(x/a_1)$ d. h. beide Reihen sind identisch. Nun haben je zwei der Reihen

$$G(n|a)\, G(n|a')\cdots G(n|a^{(r)})\, G(x|a_1)$$

die aufeinanderfolgende Eigenschaft, daß sie gegenseitig unmittelbar auseinander ableitbar sind, und daraus folgt daß man rückwärts aus $G(n|a_1)$ oder, was dasselbe ist aus $G(n|a_1)$ durch Vermittelung der Punkte $a^{(r)} a^{(r-1)} \ldots a'' a'$ die Reihe $G(n|a)$ ableiten kann, was zu beweisen war.

Dieser Satz wie auch der folgende ist eine unmittelbare Folge des auf Seite bewiesenen Satzes.

Lehrsatz. Denken wir uns alle Reihen, die aus einer gegebenen Reihe $G(n|a)$ hergeleitet sind, so bildet das ganze Heer dieser Reihen ein in sich abgeschlossenes Ganze; d. h. daß alle Reihen durch eine einzige beliebige von ihnen bestimmt sind.

Greifen wir nämlich von allen den Reihen 2 beliebige heraus z. B. $G(x|a_1)$ u. $G(x|a_2)$ heraus und es sei $G(n|a_1)$ aus $G(n|a)$ u. $G(n|a_2)$ aus $G(n|a_1)$ mittelbar oder unmittelbar hergeleitet. Nach dem vorigen Satze können wir aber unmittelbar oder mittelbar aus $G(x|a_2)$ auch $G(n|a_1)$ und hieraus $G(n|a)$ herleiten, und dieses gilt von jeder beliebigen Reihe $G(x|a')$. Wir können somit von jeder beliebigen Reihe ausgehen und aus ihr die ursprüngliche $G(n|a)$ und daraus alle übrigen herleiten. Jede Reihe des ganzen Heeres kann somit als die ursprüngliche Reihe angesehen werden, und durch sie sind alle Reihen bestimmt. Wir sehen also wirklich, daß alle aus der gegebenen Reihe $G(x|a)$ hergeleiteten Reihen ein sich geschlossenes Ganze bilden. Eine Reihe, die aus keiner der Reihen dieses Systemes hergeleitet werden kann, kann nicht zu diesem Ganzen mitgerechnet werden. Dies ist auch der innere Grund, weshalb man die eine Reihe als Fortsetzung der andern ansehen kann.

Definition. Wir gehen von $G(x|a)$ aus und leiten hieraus neue Reihen ab. Angenommen, dass x' irgend ein bestimmter Werth von x, innerhalb des Conv. bereiches irgend einer der Reihen liegt, so hat die Reihe für $x = x'$ einen ganz bestimmten Werth. Betrachten wir diese Reihe als die Umbildung der ursprünglichen, so sagen wir, der Werth der Reihe für $x = x'$ sei ein Werth, der durch die ursprüngliche Reihe definirten Function. Von der Potenzreihe sagen wir, sie sei ein Functionenelement, Element der Function, da die Function in ihr den Ursprung hat. Hiermit ist der Begriff einer analytischen Function gegeben, er ist aber noch nicht erschöpft. Eine aus einem Functionselement ableitbare Function nennt Weierstraß eine monogene Function, da sie in einer einzigen Quelle ihren Ursprung hat, und wir sehen dass eine monogene Function durch ein Element vollständig definirt ist.

Nun sehen wir, dass man aus einem Element unendlich viele neue Elemente (Reihen) herleiten kann; damit ist aber noch nicht gesagt, dass die Punkte für welche wir dies thun können, die ganze Ebene erfüllen. Ja es ist möglich wie wir aus den vorigen Betrachtungen sehen können, dass es in der Ebene Punkte gibt, für welche man keine Reihen herleiten kann, so dass für diese Punkte die Function nicht definirt ist. Die Gesammtheit der Werthe, zu denen man auf die obige Weise gelangen kann, nennen wir das Gebiet der Variablen x und die Stellen zu denen man nicht gelangen kann, nennen wir eine singuläre Stellen. Hierbei gibt es nun eine grosse Mannigfaltigkeit, es gibt Functionen, für welche das Argument die ganze Ebene erfüllt, mit Ausnahme einiger in endlicher Anzahl vorkommenden Stellen; bei mancher Function gibt es unendlich viele Stellen der Art, ja es gibt sogar solche Fälle, wo ganze Strecken, ganze Flächen von dem Gebiete des Argumentes auszuschliessen sind. Der Bereich innerhalb dessen x als Argument der definirten analytischen Function betrachtet werden kann, bildet ein Continuum, das aber nicht die ganze Ebene zu erfüllen braucht. Für solche singuläre Stellen sind die Functionen noch näher zu untersuchen, und es wird sich zeigen, dass man für manche Stellen die Werthe der Function als Grenzwerthe definiren kann, die die Function wirklich erreicht; es gibt aber auch Stellen für die die Function gar nicht definirbar sind. Es wird sich z. B. zeigen, dass bei den transcendenten Functionen es wenigstens eine Stelle gibt, für welche die Function gar nicht definirt werden kann. Wir werden nämlich sehen, dass bei manchen Functionen der Fall eintritt, dass die Umgebung einer singulären Stelle, die Function einen ganz bestimmten Werth erhält. Wie klein man auch die Umgebung wählt, dass es dagegen die Functionen gibt, welche in der Umgebung einer singulären Stelle jedem beliebigen Werthe beliebig nahegebracht werden können. Alsdann wird es im 1ten Falle zu untersuchen sein, ob die Function den Werth, dem sie für die Umgebung der singulären Stelle beliebig nahe gebracht werden kann, wirklich erreicht oder nicht. Es ist nämlich nicht nothwendig, dass die Function den Werth, dem sie beliebig nahe gebracht werden kann, wirklich erreicht. Um ein Beispiel zu haben, seien x, y, x, m's t reelle Grössen und wir betrachten eine Curve, die durch die Gleichung definirt ist

$$x = a_1 \cos(m_1 t) + a_2 \cos(m_2 t) + \ldots$$

$$y = b_1 \cos(m_1 t) + b_2 \cos(m_2 t) + \ldots$$

Wenn wir m_1, m_2 irrational voraussetzen, so hat die Curve die Eigenschaft, dass sie jedem Punkte der Ebene unendlich nahe gebracht werden kann, ohne dass sie durch alle Punkte hindurchgeht. — Mit der Untersuchung der Grenzwerthe der Functionen werden wir uns später zu beschäftigen haben. Jetzt gehen wir zu der Entwickelung des Begriffes einer eindeutigen und einer mehrdeutigen analytischen Function über. Wenn wir aus einem Elemente $G(x|a)$ für eine Stelle x' die in dem Gebiete des Argumentes x liegt. Reihen herleiten durch Vermittelung von anderen Punkten, so können 2 Fälle eintreten. Es ist möglich, dass welche Punkte man auch zur Vermittelung nimmt, man stets nur eine Reihe $G(n|x')$ erhält, dann hat die Function für $x=x'$ nur einen einzigen Werth, was auch für die Umgebung von x' gilt, dann sagen wir von der durch das Element $G(x|a)$ definirten Function sie sei eine eindeutige Function. Möglicherweise können wir aber aus ein und demselben Elemente $G(x|a)$ verschiedene Reihen $G(n|x')$ herleiten, alsdann wird die Function für $x=x'$ mehrere verschiedene Werthe erhalten koennen. Dann sagen wir, die Function sei 2, 3, ... unendlich vieldeutig, je nachdem wir für die Umgebung der Stelle $x=x'$ 2, 3 ... unendlich viel Reihen $G(n|x')$ herleiten können. Hierdurch ist aber nur die Möglichkeit mehrdeutiger Functionen gegeben, nicht aber ihre Existenz. Es ist bis jetzt a   nicht möglich zu entwickeldn

welcher von beiden Fällen stattfindet.
Die Existenz mehrdeutiger Functionen ist aber noch nachzuweisen. Die Möglichkeit müssen wir aber zulassen, da wir ja von der Stelle a zu der Stelle x' auf unendlich vielen verschiedenen Wegen gelangen können auf denen wir aus $\mathfrak{G}(x/a)$ die Reihen für die Umgebung von x', $\mathfrak{G}(x/x')$ herleiten können.
Um ein Beispiel für die Existenz mehrdeutiger Functionen zu haben, betrachten wir die Function welche dadurch definirt wird, dass ihr Differential gleich ist $\frac{dx}{x}$ und welche für $x = 1$ Null werden soll. Diese Function bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}(x)$. Um ein Element der Function zu definiren, betrachten wir die Stelle 1. Zunächst ist klar, dass man die Function $\frac{1}{x}$ entwickeln kann in eine Potenzreihe von $x-1$, nämlich

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\dots$$

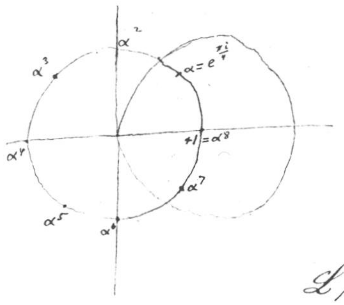
Diese Function convergirt innerhalb eines um 1 beschriebenen Kreises, der durch den Nullpunkt geht. Die Function deren Differential $\frac{dx}{x}$ ist wird, wenn man sie für die Umgebung der Stelle 1 definirt, sein

$$\mathfrak{L}(x/1) = \frac{x}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + C \therefore \text{ da nun}$$

$\mathfrak{L}(x/1)$ für $x = 1$ Null sein soll, so muss $C = 1$ sein also ist

$$\mathfrak{L}(x/1) = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \dots$$

und diese Reihe convergirt innerhalb desselben Kreises um 1. Nun denken wir uns um Nullpunkt einen Kreis beschrieben mit dem Radius 1 und leiten aus $\mathfrak{L}(x|1)$



durch Vermittelung der Punkte α, α^2 neue Reihen wo $\alpha = e^{\frac{\pi i}{4}}$ ist. Zunächst sehen wir daß $\alpha = e^{\frac{\pi i}{4}}$ innerhalb des Conv. kreises von $\mathfrak{L}(x|1)$ liegt, also können wir hieraus eine Reihe herleiten die Gestalt hat

$$\mathfrak{L}(x|\alpha) = \sum_{0\mu}^{\infty} \mathfrak{L}^{\mu}(\alpha|1)\frac{(x-\alpha)^{\mu}}{\mu!}$$

Durch einfache Rechnung kommen wir zu der Reihe

$$\mathfrak{L}(x|\alpha) = \mathfrak{L}(\alpha|1) + \frac{1}{\alpha}\frac{(x-\alpha)}{1} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{(x-\alpha)^2}{2} + \frac{1}{\alpha^3}\frac{(x-\alpha)^3}{3} - \dots \qquad 2$$

Wählen wir nun $\alpha^2 = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, so liegt dieser Punkt innerhalb des Conv. kreises von 2, da dieser den Radius hat gleich 1, wir leiten aus 2 eine Reihe

$$\mathfrak{L}(x|\alpha^2) = \mathfrak{L}(\alpha^2|\alpha) + \frac{1}{\alpha^2}\frac{x-\alpha^2}{1} - \frac{1}{\alpha^4}\frac{(x-\alpha^2)}{2} + \frac{1}{\alpha^6}\frac{(x-\alpha^2)^3}{3} \dots \qquad 3$$

Ebenso verfahren wir weiter und erhalten die Reihen

$$\mathfrak{L}(x|\alpha^3) = \mathfrak{L}(\alpha^3|\alpha^2) + \frac{1}{\alpha^3}\frac{(x-\alpha^3)}{1} - \frac{1}{\alpha^6}\frac{(x-\alpha^3)^2}{2} + \dots$$

$$\mathfrak{L}(x|\alpha^4) = \mathfrak{L}(\alpha^4|\alpha^3) + \frac{1}{\alpha^4}\frac{(x-\alpha^4)}{1} \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathfrak{L}(x|\alpha^8) = \mathfrak{L}(x|1) = \mathfrak{L}(1|\alpha^7) + \frac{x-1}{1} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \dots$$

Hieraus ersehen wir zunächst, daß wir aus dem Elemente $\mathfrak{L}(x|1)$ für die Umgebung 1 eine Reihe herleiten, welche um eine Constante von der ursprünglichen verschieden ist. Für Punkte in der Umgebung von 1, wird also $\mathfrak{L}(x)$ 2 verschiedene Werthe annehmen können, die um die Con, stante $\mathfrak{L}(1|\alpha^7)$ verschieden sind. Die Constante können wir folgendermaßen bestimmen. Es ist zunächst

$$\mathfrak{L}(1|\alpha^7) = \mathfrak{L}(\alpha^8|\alpha^7) = \mathfrak{L}(\alpha^7|\alpha^6) + \frac{1}{\alpha^7}\frac{(\alpha^8-\alpha^7)}{1} - \frac{1}{\alpha^{14}}\frac{(\alpha^8-\alpha^7)^2}{2} + \ldots$$

$$\mathfrak{L}(\alpha^7|\alpha^6) = \mathfrak{L}(\alpha^6|\alpha^5) + \frac{1}{\alpha^6}\frac{\alpha^7-\alpha^6}{1} - \frac{1}{\alpha^{12}}\frac{(\alpha^7-\alpha^6)^2}{2} + \ldots \text{ u. s. w.}$$

Setzen wir die Werthe successive ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{L}(1+\alpha^7) = \frac{1}{\alpha^7}\cdot\frac{(\alpha^8-\alpha^7)}{1} - \frac{1}{\alpha^{14}}\frac{(\alpha^8-\alpha^7)^2}{2} + \ldots$$
$$+\frac{1}{\alpha^6}\frac{(\alpha^7-\alpha^6)}{1} - \frac{1}{\alpha^{12}}\frac{(\alpha^7-\alpha^6)^2}{2} + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{\alpha}\frac{(\alpha^2-\alpha)}{1} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{(\alpha^2-\alpha)^2}{2} + \ldots$$
$$+\frac{1}{1}\frac{(\alpha-1)}{1} - \frac{1}{1}\frac{(\alpha-1)^2}{2} + \ldots$$
$$= 8\left\{\frac{\alpha-1}{1} - \frac{(\alpha-1)^2}{2} + \frac{(\alpha-1)^3}{3} \ldots\right\} = 8\mathfrak{L}(\alpha|1)$$

oder $\mathfrak{L}(1|\alpha^7) = 8\mathfrak{L}(e^{\frac{\pi i}{4}})$ und dies ist $2\pi i$

Wenn wir die Herleitung noch mal machen aus der neuen Reihe, so gelangen wir zu einer Reihe, die um $2\cdot 2\pi i$ verschieden ist von der ursprünglichen.

Wir sehen also, daß wir aus einem Elemente für die Umgebung derselben Stelle unendlich viele Reihen definiren koennen, die alle um $2\pi i$ verschieden sind, sie ist also eine unendlich vieldeutige Function. Hiermit ist nicht nur die Möglichkeit mehrdeutiger Functionen klar, sondern auch ihre Existenz nachgewiesen.

Daß man die aus einem Elemente hergeleiteten Reihen als ein Ganzes zu betrachten hat, wird sich auch aus dem Satze ergeben, daß eine analytische Function, welche

für irgend eine noch so kleine Umgebung eine Eigenschaft hat, diese Eigenschaft überall, wo sie existirt besitzt. Als Beispiel wollen wir die durch Differentialgleichungen definirten Functionen: Wenn man für irgend eine Umgebung eine Stelle, eine Reihe finden kann, die der Differentialgleichung genügt, so wird jede aus dieser hergeleitete Reihe auch der Differentialgleichung genügen. – Wenn zwischen den Function $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \dots$ irgend eine Gleichung besteht, u. bildet man mittelst derselben Zwischenwerthe neue Reihen, so wird zwischen diesen dieselbe Gleichung bestehen.
Es wird sich zeigen, daß jede monogene (d.h. durch eine irreductible Gleichung definirbare) Curve, durch ein beliebig kleines Stück definirt sind.

Definition eines Systems von Functionen.

Haben wir ein System von n Potenzreihen $G_1(x|a)$ $G_2(x|a)$ .. die für die Umgebung derselben Stelle definirt sind, so können wir hieraus für die Umgebung einer andern Stelle a_1 durch dieselben vermittelnden Punkte neue Reihen $G_1(x|a_1)$, $G_2(x|a_2)$ ... herleiten. Wenn nun x' innerhalb des gemeinsamen Conv. bereiches der neuen Reihen liegt, so nennen wir die dem Punkte x' entsprechenden Werthe von $G_1, G_2, \dots$, das System zusammengehöriger Werthe der durch die ursprünglichen Elemente definirten analytischen Functionen. Diese Definition ist nothwendig, um bei mehrdeutigen Functionen stets die zugehörigen Werthe finden zu können. Nehmen wir z. B. die einfachsten doppeldeutigen Functionen

$$\sqrt{1+x},\ \sqrt{1+x^2},\ \sqrt{1+x^3}, \ldots$$

und setzen fest, daß für $x = 0$ alle den Werth $+1$ haben sollen. Wollen wir nun für irgend einen andern Werth von x die Werthe bestimmen, so wißen wir nicht welche Zeichencombinationen zu nehmen sind. Dies können wir aber nach dem Vorigen entscheiden, wenn wir aus den Elementen für die Umgebung von 0, die Reihe für die Umgebung des neuen Punktes durch dieselben vermittelnden Punkte herleiten. Wir wollen nun zeigen, wie man auf solche mehrdeutige Functionen die Definition des Differentialcoefficienten übertragen kann. Wenn wir das Functionselement $G(x|a)$ haben, so können wir zunächst die Ableitung bilden $G'(x|a)$, $G''(x|a)$. Die ursprüngliche Function nebst ihren Ableitungen

$$G(x|a),\ G'(x|a),\ G''(x|a) \ldots$$

definiren ein Functionssystem. Nun können wir aus diesen Elementen durch Vermittelung derselben Punkte $b, c, d, \ldots$ Reihen für die Umgebung von x_0 herleiten und erhalten folgendes System von Reihen

$$\begin{array}{l} G(x|a),\ G(x|b),\ G(x|c) \ldots\ldots G(x|x_0) \\ G'(x|a),\ G'(x|b)\ G'(x|c) \ldots\ldots G'(x|x_0) \end{array}$$

$$G''(n|a)\ G''(n|b)\ G''(n\,c) \dots G''(x|x_0)$$

Wenn es möglich ist auf dem Wege bc.. aus $G(n|a)$ die Function $G(n|x_0)$ herzuleiten, so ist es auch möglich aus $G'(n|a)$ auf demselben Wege $G'(n|x_0)$ herzuleiten, welche Möglichkeit auf dem Satze beruht, daß die Reihe $G(n|a)$ und ihre Ableitungen stets denselben Conv.kreis haben. Nun wollen wir zeigen, daß $G'(n|x_0)$ die Ableitung von $G(n|x_0)$ ist. Es ist zunächst

$$G(n|b) = \sum_{0\,\mu} G^{(\mu)}(b|a)\,\frac{(x-b)^{\mu}}{\mu!} \text{ und}$$
$$G'(n|b) = \sum_{0\,\mu} G^{(\mu+1)}(b|a)\,\frac{(x-b)^{\mu}}{\mu!}$$

Nun kann man die erste Reihe auch so schreiben

$$G(n|b) = G(b|a) + \sum_{0\,\mu} G^{(\mu+1)}(b|a)\,\frac{(x-b)^{\mu+1}}{\mu+1}$$

und die Ableitung hiervon ist

$$\sum_{0\,\mu} G^{(\mu+1)}(b|a)\,\frac{(x-b)^{\mu}}{\mu!}$$

also ist $G'(x|b)$ die Ableitung von $G(n|b)$. Es läßt sich eben so aus $G''(n|a)$. $G''(n|b)$ herleiten, und $G''(n|b)$ ergibt sich als die 2te Ableitung von $G(x|b)$ u. s. w. So kann man weiter gehen und gelangt zu dem Resultate: Wenn sich auf dem Wege $abc \dots x_0$ aus $G(n|a)$ die Reihe $G(n|x_0)$ herleiten läßt, so lassen sich auf demselben Wege aus $G'(x|a)$. $G''(n|a)$.. die Reihen $G'(n|x_0)$ $G''(n|x_0)$ herleiten und letztere sind die Ableitungen von $G(n|x_0)$. Nun sei der Kürze wegen

$$G(x|x_0) = y_0 + y_0'\,\frac{(x-x_0)}{1!} + y_0''\,\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

[Wo $y_0\ y_0' \dots$ die Ableitungen (die nullte erste ..) von $G(n|x_0)$

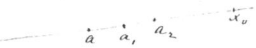
für $x = x_0$ bedeute], dann ist

$$\mathfrak{P}(x|x_0) = y_0 + y_0'(x-x_0) + \ldots$$

Nach der Definition des Differentialcoefficienten ist y_0' die Ableitung von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ für $x = x_0$.
Wenn man also aus $\mathfrak{P}'(x|x)$ die Reihe $\mathfrak{P}'(x|x_0)$ herleitet so liefert sie für $x = x_0$ den Differentialcoefficienten von $\mathfrak{P}(x|x_0)$. Hieraus sehen wir, dass obgleich die Function für einen Punkt mehrere Werthe hat, sie dann zu jedem Werthe einen ganz bestimmten Differentialcoefficienten hat.
Trotz der Verschiedenheit der Werthe der Function, gehört, sobald der Werth der Function fixirt ist, zu jedem Werthe ein ganz bestimmter Differentialcoefficient. Jede mehrdeutige Function hat für jeden Punkt ebensoviel Differentialcoefficienten, wie viel Werthe sie hat, welche auf denselben Wegen erhalten werden aus $\mathfrak{P}'(x|a)$ wie $\mathfrak{P}(x|x_0)$ aus $\mathfrak{P}(x|a)$.
Da nun $\mathfrak{P}'(x|a)$ eine Function derselben Art ist, so gilt dies für alle Ableitungen. —

Ueber mehrdeutige analytische Functionen.

Wenn aus einem Functionselemente $\mathfrak{P}(x|a)$ eine mehrdeutige Function entspringt, so ist es doch möglich dadurch, dass man die Variable x gehörig beschränkt, zu bewirken, dass die Function für diesen beschränkten Bereich zu einer eindeutigen wird. Wir wollen zunächst x auf eine durch a gehende Gerade beschränkt wird. Die Linie können wir darstellen durch die Gleichung, $x = a + ct$ wo t reelle Werthe durchläuft. Wir wollen nun mittelst der Punkte dieser Geraden aus $G(x|a)$ neue Reihen herleiten. Als vermittelnde Punkte wählen wir die Punkte $a_1, a_2 \ldots$ und nehmen an, dass die $a_1, a_2 \ldots$ auf a folgen, d.h. diejenigen Werthe von x sind, für die t positiv ist.



Wir nehmen aber die Punkte so an: Es sei a_1 so gewählt, dass er in dem Conv.-bereich von $G(x|a)$ liegt, dann leiten wir direkt aus $G(x|a)$ die Reihe $G(x|a_1)$; dann wählen wir a_2 im Conv.-bereich von $G(x|a_1)$ und leiten $G(x|a_2)$ u.s.w. Wir erhalten also eine Reihe von Reihen

$$G(x|a),\ G(x|a_1),\ G(x|a_2), \ldots$$

Diese Reihe kann entweder bis ins Unendliche fortgesetzt werden, oder man kommt zu einem Punkte der Gerade, für welchen man keine solche Reihe herleiten kann. Wir wollen annehmen, dass wir zu $x = x_0$ noch gelangen können, und die Reihe $G(x|x_0)$ herleiten. Auf diese Weise definiren wir für Puncte der Geraden eine analytische Function, und nun wollen wir zeigen, dass, wenn auch aus dem Elemente $G(x|a)$ eine mehrdeutige Function entspringt, man immer durch

Vermittelung der Punkte der Geraden, wie man dieselben auch wählen mag, für $x = x_0$ stets dieselbe Reihe

$G(n/x_0)$ erhält.

Zunächst sehen wir, daß die auf die obige Art definirte Function für jeden Punkt der Linie definirt ist, denn z. B. für Punkte zwischen a u a_1 ist wie definirt durch $G(n/a)$, für Punkte zwischen a_1 u a_2 durch $G(n/a_1)$ u. s. w. Jedem Werthe von x ist also eine ganz bestimmter Werth der Function zugeordnet. Nun zeigen wir, daß die Function überall die Linie den Charakter einer ganzen Function hat, d. h. daß wenn x' die betrachtete Stelle ist, sie sich in der Umgebung von x' nach Potenzen von $x - x'$ entwickeln läßt. Liegt zunächst x' z. B. zwischen a_2 u a_3, dann liegt x' innerhalb des Convbereiches von $G(n/a_2)$ und man kann aus $G(n/a_2)$ herleiten.

$$G(x/x') = G(x'/a_2) + G'(x'/a_2)(x - x') + \dots$$

sie hat also wirklich für alle Punkte, die zwischen den Uebergangspunkten liegen den Charakter einer ganzen Function. Dasselbe gilt für die Uebergangspunkte $a_1\, a_2 \dots$ wo wir 2 Definitionen haben. Es ist z. B. für die Umgebung von a_3 zunächst $G(x/a_3)$; ferner können wir aber aus $G(x/a_2)$ eine Reihe herleiten nämlich.

$$G(a_3/a_2) + G'(a_3/a_2)(x - a_3) + \dots$$

Die auf die obige Weise definirte Function hat also überall, wo sie definirt ist, den Charakter einer ganzen Function.

Wenn ich nun zur Vermittelung der Ableitung der Reihe für die Umgebung von $x = x_0$ neue von $a_1, a_2 \ldots$ verschiedene Punkte $b_1 b_2$ der geraden wähle und die Reihen $G(x/b_1) G(x/b_2) \ldots \bar{G}(x/x_0)$ herleite, so soll bewiesen werden, daß die auf dem 2ten Wege hergeleitete Reihe $\bar{G}(x/x_0)$ identisch ist mit der $G(x/x_0)$

Satz. Es seien allgemein 2 Functionen $F(x)$ u $F_1(x)$ gegeben, die eindeutig sind und den Charakter ganzer Functionen besitzen und in der Nähe von a übereinstimmen (in den Coeff. von $x - a$) Da sie in der Nähe von a übereinstimmen, so müßen sie bis zu einem gewißen Werthe a' übereinstimmen. Nun denken wir uns $F(x)$ u $F(x)$ vorgestellt in der Form

$$F(x) = c_0 + c_1 \frac{(x - a')}{1} + c_2 \frac{(x - a')^2}{2!} + \ldots$$
$$F_1(x) = c_0' + c_1' \frac{(x - a')}{1} + c_2' \frac{(x - a')}{2!} + \ldots$$

was nach der Voraussetzung möglich ist, so stimmen beide Reihen für Werthe von x, die in der Umgebung von a' und zwischen a u a' liegen, überein, sie müßen also identisch sein d. h.

$$c_0 = c_0'$$
$$c_1' = c_1$$

d. h. beide Functionen F u. F_1 müßen somit überein,

stimmen, wie weit die Convergenz von den obigen Reihen geht, dieselbe geht aber über a' hinaus. Wenn also F u. F_1 bis zu a' hin (a' c d.) übereinstimmen.
Wir können nun den Punkt a' weiter von a entfernt nehmen und so fort schließen, der Punkt a' hat dann (eigentlich die reelle Größe t) eine obere Grenze a_2. Bis dahin ist die Uebereinstimmung festgesetzt und weiter kann sie nicht gehen; daraus folgt, daß die Functionen $F(x)$ u. $F_1(x)$ nur bis a_2 fortgesetzt werden können; denn wenn sie über x_2 fortgesetzt werden koennten, so müßten sie noch weiter übereinstimmen, d. h. über a_2 hinaus, alsdann wäre aber a_2 nicht die Grenze. Wir haben also den Schluß, wenn die Functionen F u. F_1 in einer gewissen Umgebung von a übereinstimmen, so stimmen sie überhaupt so weit überein, als sie festgesetzt werden können.
Daraus folgt nun unmittelbar daß $G(x|x_0) = \bar{G}(x|x_0)$
Denn durch die beiden Reihen.

$$G(x|a)\ G(x|b_1)\ G(x|a_2) \cdots G(x|x_0)$$
$$G(x|a)\ G(x|b_1)\ G(x|b_2) \cdots G(x|x_0)$$

sind 2 Functionen definirt, die in der Nähe von a übereinstimmen, sie müßen also überall übereinstimmen wo sie fortgesetzt werden können.
Hiermit ist also unsere Behauptung bewiesen.

Wenn wir also durch $G(x|a)$ eine Function definiren, und das x auf eine durch a gehende Gerade beschränken, so ent. springt für alle Punkte der Geraden, zu denen man mit der Herleitung der Reihen gelangen kann, eine ganz be. stimmte eindeutige Function, wenn auch die aus dem Ele. mente $G(x|a)$ überhaupt entspringende Function mehr. deutig ist. Für die Punkte x_0 zu denen man überhaupt gelangen kann, gibt es eine obere und eine untere Grenze, die wir resp. mit x_2 u x_1 bezeichnen wollen. Für alle Punkte der Geraden, welche durch a geht zwischen x_1 u x_2, kann ich aus dem Functionselemente $G(x|a)$ Potenz. reihen herleiten, und zwar für jeden Punkt nur eine einzige. Wenn man also das Argument x, auf diese Stelle beschränkt, so entspringt aus dem Functionsele. ment $G(x|a)$ eine eindeutige analytische Function, die überall für die Punkte der Linie zwischen x_1 u x_2 den Charakter einer ganzen Function hat. Ueber die Punkte x_1 x_2 kann die Function nicht fortgesetzt werden, ohne dass sie den Charakter der ganzen Function verliert.

Daraus erklärt es sich auch, weshalb die Functionen reeller Argumente zwischen bestimmten Grenzen eindeutig sind, wie z. B. $\log x$, $\sin x$ etc. Hierbei ist nämlich die Ver. änderlichkeit der Variablen x, auf die Gerade $x = t$ beschränkt.

Von einer Function von x, welche durch Beschränkung der Veränderlichkeit von x auf einen Bereich zu einer eindeutigen geworden ist mit dem Charakter einer ganzen Function wollen wir sagen, dass sie eine reguläre Function, ein regulärer Zweig einer analytischen Function ist.

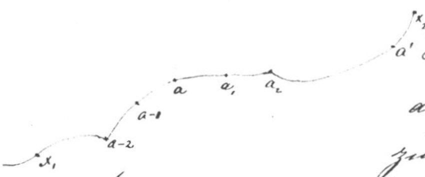
Verstehen wir unter t eine reelle Variable und unter $\varphi(t)$ irgend eine reguläre Function, so wird durch $x = \varphi(t)$ eine Linie definirt, die wir eine reguläre Linie nennen wollen. Es ist zunächst $\varphi(t)$ definirt durch eine Potenzreihe von $t - t_0$, wo t_0 der Ausgangspunkt sein möge. Nun kann man aus diesem Elemente neue Reihen herleiten, die Function $\varphi(t)$ wird hierdurch fortgesetzt. Man wird einmal zu Punkten kommen, über die hinaus die Function $\varphi(t)$ nicht fortgesetzt werden kann, ohne den Character einer ganzen (eindeutigen) Function zu verlieren. Auf diese Weise wird die Linie

$$x = \varphi(t)$$

durch 2 Punkte beschränkt, und eben diesen beschränkten Theil der Linie nennen wir eine reguläre Linie. Denken wir uns nun eine reguläre Linie von x_0 nach x_1 und bestimmen die zugehörige Function $x = \varphi(t)$ und es möge dem x_0 x_1 entsprechen, resp. t_0, t_1, wobei t_0, t_1 nicht die Grenzwerthe von t sind. An diese Linie können wir eine neue ansetzen, die wir durch eine neue Function $x = \varphi_1(t)$ definiren, die ebenfalls regulär sein soll u. s. w. Auf diese Weise kommen wir Wege von x_0 bis nach x' definiren, die entweder einfache reguläre Linien sind, oder aus regulären Linienstücken zusammengesetzt sind. Wenn die Linie aus mehreren Stücken besteht, so können wir stets bewirken, daß die den verschiedenen Zusammensetzungspunkten entsprechenden t's auf einander folgen. Denn wenn z. B. sich aus $x = \varphi(t)$ für x_1 ergibt t_1 und aus $x = \varphi_1(t)$ für x_1 sich t_1' ergibt, so substituiren wir $t = t_1' + t - t_1$ und dann verwandelt sich

$x = \varphi_1(t)$ in $x = \bar{\varphi}(t)$ mit der Eigenschaft daß dem x_1 auch hier $t = t_1$ entspricht. Man kann also leicht bewirken, daß während t alle reellen Werthe $+\infty \dots +\infty$ durchläuft, x die ganze Linie beschreibt. Nach diesen Festsetzungen können wir von früheren und späteren Punkten sprechen, indem wir von zwei Punkten x', x'' denjenigen den späteren nennen, der einem späteren Werthe von t entspricht. Hiermit ist auch der Sinn der Linien festgestellt.

Wenn wir nun für die Umgebung von a eine Function definiren durch das Element $\mathfrak{P}(x|a)$ und ziehen durch den Punkt a eine beliebige reguläre oder aus regulären Stücken zusammengesetzte Linie, so können wir für die Punkte dieser Linie aus dem



Elemente $G(x|a)$ neue Reihen herleiten, wenn wir allgemein die Punkte der Linie zu denen wir überhaupt gelangen können mit a' bezeichnen, so daß wir aus $G(n|a)$ eine Reihe $G(n|a')$ unmittelbar oder mittelbar herleiten können, so werden wir zu jedem a' ein entsprechendes t' haben. Diese Größe t' wird eine obere und eine untere Grenze haben, welche denjenigen Punkten der Linie entspricht, über die hinaus die Function auf die obige Weise nicht fortsetzbar ist. Diese Punkte wollen wir mit x_1 u. x_2 bezeichnen. Nun können wir beweisen folgenden

<u>Lehrsatz</u>: Wenn wir für irgend eine Umgebung von a eine Function $G(n|a)$ definiren, und durch den Punkt a eine beliebige reguläre, oder aus regulären Stücken bestehende Linie ziehen, so wird für alle Punkte dieser Linie zwischen 2 bestimmten Punkten, über die hinaus die Function $G(n|a)$ nicht fortgesetzt werden kann, ohne den Charakter einer ganzen Function zu verlieren, durch das Element $G(n|a)$ eine eindeutige Function definirt, die den Charakter einer gan-

zen Function hat, mag die durch $\mathfrak{P}(x|a)$ definirte Function ein oder mehrdeutig sein.

Dieser Satz, der eine Verallgemeinerung des auf Seite 353 bewiesenen ist, beweisen wir ebenso wie dort. Zunächst zeigen wir, daß für alle Punkte dieser Linie die Function eindeutig ist. Wählen wir einen Punkt a_1 so, daß die ganze Linie $a\,a_1$ innerhalb des Convergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x|a)$ liegt, so können wir eine Reihe $\mathfrak{P}(x|a_1)$ herleiten. Wählen dann a_2 so, daß $\overline{a_1 a_2}$ innerhalb des C. B. von $\mathfrak{P}(x|a_1)$ liegt, so können wir $\mathfrak{P}(x|a_2)$ herleiten u. s. w., bis wir zu $\mathfrak{P}(x|a')$ gelangen. Wählen wir nun andere vermittelnde Punkte $b_1\, b_2 \ldots$, die aber auch so gewählt werden müssen, daß $b\,b_1$ ~~vollständig~~ innerhalb des C. B. von $\mathfrak{P}(x|a)$ liegt. u. s. w. so können wir eine 2te Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x|a')$ herleiten, und nun handelt es sich darum nachzuweisen, daß $\mathfrak{P}(x|a') = \overline{\mathfrak{P}}(x|a')$. Dies ist aber sofort ersichtlich; denn da sowohl a_1 als auch b_1 vollständig innerhalb des Convergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x|a)$ liegen, so müßen die durch $\mathfrak{P}(x|a)$ definirten Functionen, welche wir durch Vermittelung der Punkte $a_1\, a_2 \ldots$ u. .. $b_1\, b_2 \ldots$ herleiten, anfangs übereinstimmen; sie müßen also nach dem bewiesenen Satze überall übereinstimmen, wie weit sie nur fortgesetzt werden können, also muß

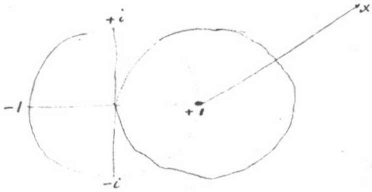
$$\mathfrak{G}(x/a') = \overline{\mathfrak{G}}(x/a')$$

Also entspringt aus dem Elemente $\mathfrak{G}(x/a)$ für jeden Punkt der Linie nur eine Reihe, d. h. die Function ist eindeutig. Daß diese Function den Charakter einer ganzen Function hat, folgt ebenso leicht wie Seite 353

Man sieht also, daß wenn man die Veränderlichkeit des Argumentes x auf eine Linie beschränkt daß alsdann für jeden Punkt der Linie aus dem gegebenen Elemente $\mathfrak{G}(x/a)$ nur ein einziger Werth der Function sich ergibt.

Wir kommen hier auf den Begriff eines eindeutigen Zweiges einer mehrdeutigen, analytischen Function, worunter wir verstehen, die Gesammtheit der Werthe, welche sich für die durch das Element $\mathfrak{G}(x/a)$ definirte Function ergeben, wenn man x auf eine Linie beschränkt.

Auch hat es nun seinen Sinn, wenn man spricht von Werthen einer Funktion, die man auf einem bestimmten Wege bekommt; das bedeutet nichts weiter, als diejenigen Werthe der Function, die man für eine Stelle x' erhält, wenn man aus $\mathfrak{G}(x/a)$ durch Vermittelung von Punkten, die auf verschiedenen durch a u. a' gehenden Linien Reihen $\mathfrak{G}(x/a')$ leitet. Auch können wir uns vorstellen, daß die Mehrdeutigkeit der Functionen von der Verschiedenheit der Wege abhängt, die man von der Ausgangstelle a zu der betreffenden Stelle a' zieht. So wird z. B. die auf Seite 340 definirte Function für jede Stelle $x = x'$ verschiedene Werthe annehmen, je nachdem man, um den Werth von $L(x')$ zu berechnen aus der Reihe für die Umgebung von $+1$ eine Reihe für die Umgebung von x' auf der Geraden $+1\,x'$ herleitet, oder zunächst aus $L(x/1)$ durch Vermittelung der Punkte des Kreises $(+1\ +i\ -1\ -i)$ eine Reihe für die Umgebung von $+1$ herleiten, (welche, wie wir wissen, von der ursprünglichen verschieden ist) und dann erst von $+1$ auf der Geraden nach x' geht.

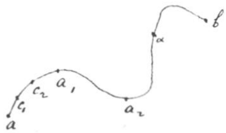


Die oben entwickelten Begriffe sind sehr wichtig, weil wir dadurch genöthigt werden, verschiedene Werthe einer mehrdeutigen Function als Werthe einer einzigen Function anzusehen.—

Den Satz (360) kann man noch auf andere Weise begründen wenn man folgenden Lehrsatz vorausgehen läßt.

<u>Lehrsatz</u>: Es sei das Functionselement $G(x/a')$ gegeben. In dem Convergenzbereiche wählen wir irgend einen Punkt b, und irgend eine Linie von a nach b, die aber vollständig innerhalb des Conv. bereiches liegen soll. Nun leiten wir durch Vermittelung der Punkte dieser Linie

eine Reihe $\bar{G}(n|b)$ und es soll bewiesen werden, daß diese Reihe identisch ist mit derjenigen $G(n|b)$, welche direct aus $G(n|a)$ hergeleitet wird. – Die vermittelnden Punkte der Linie ab seien willkürlich gewählt: $a_1\ a_2 \ldots$



und nun leiten wir aus $G(n|a)$ $G(n|a_1)$ hieraus $G(n|a_2)$ u. s. w. bis wir zu $G(x|b)$ kommen. Da nun $a_1\ a_2$ willkürlich gewählt worden sind, so wird man im Allgemeinen noch andere vermittelnde Punkte $c_1\ c_2 \ldots$ innehalten müssen, sodaß jeder folgende in der Umgebung der vorausgehenden liegt, und ihr Abstand muß kleiner sein, als der Abstand von der Grenze des C. bereiches. Zunächst ist nach einem der bewiesenen Sätze, daß wie wir auch die Punkte $c_1\ c_2 \ldots$ wählen, wir stets zu denselben Reihen: $G(n|a_1)\ G(n|a_2) \ldots$ $G(x|b)$ gelangen. Nun schließen wir so: Die Reihe $G(x|c_1)$ stimmt in einer gewissen Umgebung von c_1 mit $G(n|a)$ überein; sie muß also überall in dem gemeinsamen Conv. bereiche mit $G(n|a)$ übereinstimmen. Nun liegt c_2 in dem Conv. Bereiche von $G(x|c_1)$ und gleichzeitig von $G(n|a)$; zunächst muß für den ganzen gemeinsamen Conv. bereich von $G(x|c_1)$ u. $G(n|c_2)$ $G(n|c_1) = G(n|c_2)$ Nun liegt c_2 auch in dem Conv. bereiche von $G(n|a)$. Wir haben also für eine Umgebung von c_2

$$G(x|a) = G(x|c_1)$$

$$G(x|c_1) = G(x|c_2) \text{ also auch}$$

$$G(x|a) = G(x|c_2)$$

Folglich müssen beide Reihen innerhalb des ganzen gemeinsamen Conv. bereiches von c_2 übereinstimmen. So gehen wir weiter und gelangen zu dem Schlusse, dass $G(n|a)$ u. $\bar{G}(n|b)$ innerhalb des gemeinsamen Conv. bereichs mit einander übereinstimmen. Leiten wir nun direct aus $G(n|a)$ $G(n|b)$, so haben wir für die Umgebung von b, $G(n|a) = G(n|b)$. Nun ist aber auch für eine gewisse Umgebung von b

$G(n|a) = \bar{G}(n|b)$ also muss auch für die bestimmte Umgebung von b

$G(n|b) = \bar{G}(n|b)$ d. h. beide Reihen müssen identisch sein, was zu beweisen war.

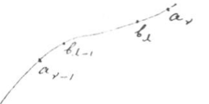
{ Nun können wir den Lehrsatz auf Seite auch durch folgende Deductionen begründen. Es handelt sich hierbei zu zeigen, dass für jede Stelle a'

der durch a gehenden Linie aus dem Elemente $G(n|a)$ stets ein einziger Werth sich ergibt, oder eigentlich eine Reihe $G(n|a')$ wie man auch die vermittelnden Punkte $a_1\, a_2\, a_3 \dots$

wählt, nur müssen die Punkte stets die Bedingung erfüllen, dass die ganze Linie von $a_{\varkappa-1}$ bis nach $a_\varkappa$ vollständig in dem Conv. bereiche von $G(n/a_{\varkappa-1})$ liegt. Verstehen wir unter x_0 irgend einen Punkt der Strecke aa', so soll $G(n/x_0)$ so definirt werden, dass, wenn x_0 mit $a_\varkappa$ zusammenfällt $G(n/x_0) \equiv G(n/a_\varkappa)$, wenn dagegen x_0 zwischen $a_{\varkappa-1}$ und $a_\varkappa$ fällt, so soll unter $G(n/x_0)$ die Reihe verstanden werden, die aus $G(n/a_{\varkappa-1})$ hergeleitet wird. Nun wollen wir eine andere Reihe von Punkten zur Vermittelung wählen, und zwar sollen sie denselben Bedingungen unterworfen sein, wie die a's und leiten vermittelst derselben die Reihe $\bar{G}(n/a')$ und nun soll bewiesen werden, dass $G(n/a')$ identisch ist mit $\bar{G}(x/a')$. Wenn ich nun die zweite Reihe von Punkten nehme, so sei $\bar{G}(n/x_0)$ auf dieselbe Weise definirt wie $G(n/x_0)$. Der Satz wird bewiesen, wenn es sich zeigen lässt, dass $G(n/x_0)$ mit $\bar{G}(n/x_0)$ identisch ist. Dann ist es nur nöthig die Identität von $G(x/b_\varkappa)$ u. $\bar{G}(n/b_\varkappa)$ zu zeigen. Nehmen wir an, dass die Uebereinstimmung von $G(n/b)$ $\bar{G}(n/b_\nu)$ bewiesen ist, für alle b_ν, die dem $b_\varkappa$ vorangehen, und daraus wollen wir zeigen, dass auch $G(n/b_\varkappa) = \bar{G}(n/b_\varkappa)$ ist.

Fassen wir den unmittelbar vorangehenden Punkt $b_{\varkappa-1}$, so liegt er offenbar auf der Strecke von a nach

b_λ, er kann aber in Bezug auf die a's verschiedene Lagen haben; er kann erstens zwischen $a_{\nu-1}$ u. a_ν ebenso wie b_λ fallen, dann mit $a_{\nu-1}$ zusammenfallen, und schließlich dem $a_{\nu-1}$ vorausgehen.



Der erste Fall läßt sich nun einfach beweisen. Denn wenn $b_{\lambda-1}$ zwischen $a_{\nu-1}$ u a_ν fällt, so können wir direct aus $G(n/a_{\nu-1})$ herleiten $G(n/b_{\lambda-1})$ und nun nehmen wir an daß $G(n/b_{\lambda-1}) = \bar{G}(n/b_{\lambda-1})$. Gehen wir von $b_{\lambda-1}$ nach b_λ, so muß $\bar{G}(n/b_\lambda)$ übereinstimmen mit der welche direct aus $G(n/a_{\nu-1})$ hergeleitet wird, d. h. $G(n/b_\lambda) = \bar{G}(n/b_\lambda)$.

Der Fall, wo b_λ zwischen $a_{\nu-1}$ u a_ν, $b_{\lambda-1}$ aber vor $a_{\nu-1}$ zu liegen kommt, läßt sich auch einfach zeigen unter der Annahme, daß $G(n/b_{\lambda-1}) = \bar{G}(n/b_{\lambda-1})$ ist, wenn man nur die Herleitungen gehörig macht, worauf wir hier nicht eingehen wollen. Auf diese Weise können wir unter der Annahme, daß $G(n/b_{\lambda-1}) = \bar{G}(n/b_{\lambda-1})$ zeigen, daß $G(n/b_\lambda) = \bar{G}(n/b_\lambda)$ und dies ist ausreichend, da b_0 mit a, und der letzte ($b_{\nu+1}$) Punkt mit a' zusammenfallend angesehen werden kann. Man könnte noch einen andern Beweis geben, indem man außer der Reihe der Punkte $a, a_2 \dots a'$ $a\, b_1\, b_2 \dots a'$, noch eine dritte passend gewählte Reihe $a\, c_1\, c_2 \dots a'$ betrachtet.

und durch Vermittelung der Reihen für die Punkte die Identität der beiden Reihen für a', welche durch $a_1 \ldots$ und $b_1 \ldots$ hergeleitet worden sind.}

Definition des analytischen Gebildes und Begriff der Grenzwerthe der Function.

Wir haben durch ein Functionselement eine Function definirt. Bezeichnen wir mit y die Werthe der Function, so erhalten wir aus dem Elemente $y = G(x|a)$ ein System von zusammengehörigen Werthepaaren $x\,y$. Wir können im Anschluss an die analytische Geometrie die Gesammtheit der Werthepaare $x\,y$, die durch die, durch das Element $y = G(x|a)$ definirte Function bestimmt werden, das analytische Gebiet nennen, und die Gesammtheit der Werthepaare $x\,y$, die aus einem Functionselemente entspringen das Element des analytischen Gebildes. Jedes einzelne Werthepaar $x\,y$ des analytischen Gebildes, wollen wir die Stelle, oder den Punkt des analyt. Gebildes nennen. Bis jetzt haben wir als das Gebilde die Gesammtheit nur derjenigen Stellen betrachtet, für die man Elemente $y = G(x|a')$ herleiten kann. Es gibt aber auch Stellen x, wie wir es schon wissen, für deren Umgebung es nicht möglich ist, Functionselemente aus dem ursprünglichen Elemente herzuleiten. Solche Stellen werden nun die Grenzstellen des Gebildes sein, und wir wollen uns nun mit diesen etwas beschäftigen. Die Grenzstellen können wir nun in 2 Theile theilen, erstens in solche, die dem Gebilde wirklich zugeordnet werden müssen, als in der That zu denselben gehörige, und solche, die als Grenzfälle uneigentlich zugeordnet werden. Man schließt gewöhnlich so; es sei $y = G(u|a)$ das Element und a' ein Punkt der Linie durch a, über die hinaus die Function $y = G(u|a)$ nicht fortgesetzt werden kann ohne den Charakter einer ganzen Function zu verlieren. Nun kann es vorkommen, daß es einen Werth b' von y gibt, sodaß nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ε, es möglich sein muß, die Grenze δ so anzugeben, daß für Werthe von x, für die $|x - a'| < \delta$ beständig

$$|y - b'| < \varepsilon$$

sei. Alsdann sagen wir y nähert sich der Grenze b', wenn x sich dem a' nähert. Nun sagt man, der Werth x' sei der Werth von y für den Werth $x = a'$. Dies ist aber dem Wesen der Functionen nach nicht richtig. Es liegt die Stelle $a'b'$ an der Grenze des Gebildes, aber sie braucht nicht dazu zu gehören, was wir hier noch nicht zeigen können. Wir müssen hier eine Definition der Grenzstellen des Gebildes geben, nach der wir entscheiden können, ob diese Grenzstelle dem Gebilde wirklich gehört, oder ob sie nur uneigentlich zugeordnet wird.

Das Wesen der analytischen Function ist nämlich, daß in der Nähe einer jeden Stelle des Gebildes ($x_0\, y_0$ es ein Zusammenhang gibt, der durch eine analytische Formel $y - y_0 = G(x|x_0)$ sich darstellen läßt; oder was dasselbe ist, daß die Stellen $x_0\, y_0$, welche einem und demselben Elemente angehören, sich durch eine Gleichung zwischen $x\, y$ $x_0\, y_0$ bestimmen lassen. Wenn nun für die oben betrachteten Stellen $a'b'$ das Gebilde die Eigenschaft hat, daß das Werthepaar $x\, y$ in der Umgebung von $a'b'$ eine Gleichung ergibt von der Form $G(x\, y|a'b') = 0$, so sagen wir, die Stelle $a'b'$ gehört zu dem Gebilde, und die Function y behält in der Nähe von a' den Charakter einer algebraischen Function. In diesem Falle wird, wenn sich x dem a' nähert y dem b' ohne Ende nähern. Wir ordnen in diesem Falle die Stelle $a'b'$ dem Gebilde als einen Punkt zu. Die Gesammtheit aller Punkte $x\, y$ des Gebildes nennen wir dann eine monogene, analytische Function.

Wenn es keine solche analytische Gleichung $G(x\, y|a'b') = 0$ gibt, so ordnen wir die Stelle $a'b'$ nicht eigentlich zu als den Grenzfall. Um ein Beispiel zu haben, betrachten wir die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ wo $x\, y\, r$ reelle Größen sein sollen. Ein Element des Gebildes wird definirt durch die Gleichung

$$y^2+(x-r)(x-r+2r)=0.$$

Die Stelle $x=r\ y=0$ ist also zu dem Gebilde zuzurechnen, was geometrisch klar ist.

Wenn wir für die Grenzstelle die Gleichung $G(xy\,|\,a'b')=0$ gefunden haben, so wird uns dieselbe in der Nähe von a' die Werthe von y liefern. Diese Gleichung wird, wie wir es sehen werden, auch noch durch andere Werthepaare xy befriedigt; es wird sich aber zeigen, daß diese Werthepaare schon durch die Definition des Elementes definirt sind. Die Gleichung $G(xy\,|\,a'b')=0$, die die Grenzpunkte defi- nirt, welche dem Gebilde zuzurechnen sind, muß irreduc- tibel sein; sollte sie reductibel sein, so nehme man den irreductiblen Factor, welchem $x=a'\ y=b'$ genügt.

Die obigen Definitionen bleiben bei einem Systeme von Functionen bestehen. Wenn durch Elemente $G_1(x|a)\ G_2(x|a)$ mehrere Functionen für die Umgebung einer und der- selben Stelle definirt werden, und ziehen wir durch a eine Linie auf der alle Fc. Elemente bis zu einem gewis- sen Punkte fortgesetzt werden können, so können wir von Werthen des Func. Systems sprechen, die auf diesem bestimmten Wege erhalten werden. Wollen wir nämlich für eine Stelle x' die zugehörigen Werthe des Func. Sys- tems finden, so ziehen wir von a' nach x' eine Linie, aber so, daß auf derselben alle Functionen bis nach x'

fortgesetzt werden können, und leiten durch Vermittelung derselben Punkte die Reihen $G_1(u/u')$, $G_2(u/u')$, so geben uns ~~daran~~ die Constanten Glieder dieser Reihe die Werthe der Functionen für $x = a'$, die zusammengehören.

Ebenso können wir die Grenzwerthe definiren. Wenn wir nämlich auf der Linie nach a', wo a' ein Punkt ist, über den die Functionen nicht fortgesetzt werden können, sich dem Punkte a' nähern, und die Werthe der Functionen sich ganz bestimmten Werthen $b_1'\, b_2' \ldots$ nähern, so sagen wir $(a')\, b_1'\, b_2' \ldots$ sind die Grenzwerthe der F. Systeme für $x = a'$.

Wenn es sich nun für die Umgebung der Stelle a' analytische Gleichungen von der Form ergeben

$$G_1(x\, y_1 \,|\, a'\, b_1') = 0$$
$$G_2(x\, y_2 \,|\, a'\, b_2') = 0$$
$$\cdots\cdots$$

ergeben die für a' die Werthe $b_1'\, b_2'$ liefern, so sagen wir die Stelle a' gehört zu dem Gebiete der Variablen x.

Wir können die Sache auch so auffassen.

<u>Definitionen</u>. Bezeichnen wir die so zusammengehörigen Werthe der Functionen mit $y_1\, y_2 \ldots y_r$ so können wir die Gesamtheit der Werthsysteme

$x\, y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_r$ auch ein Gebilde nennen, und zwar ein Gebilde 1ter Stufe im Gebiete der $r+1$ Variablen.

Allgemeiner denken wir uns zwischen n Variablen complexen Grössen $x_1\ x_2 \ldots x_n$, m Gleichungen gegeben, wo $m < n$ ist. Ist nun $m = n-1$, so sagen wir, die Gesammtheit der Werthsysteme $x_1 \ldots x_n$ bildet im Gebiete der n Variablen $x_1 \ldots x_n$ ein analytisches Gebilde 1ter Stufe; ist $m = n-2$, so ist das Gebilde der zweiten Stufe definirt, u. s. w. Jede complexe Variable bildet eine 2fache Mannigfaltigkeit und n Variablen $2n$fache Mannigfaltigkeit; wir können also auch von analytischen Gebilden verschiedener Stufen in verschiedenen Mannigfaltigkeiten sprechen. Wenn wir ein Element $G(x/a)$ definiren, so definiren wir hierdurch ein analytisches Gebilde xy 1ter Stufe im Gebiete der 2 Veränderlichen xy, y als Werth der Function betrachtet. Die Sache auf diese Weise aufzufassen ist sehr wesentlich, weil wir gezwungen werden nicht nur y als Function von x, sondern auch umgekehrt x als Function von y zu betrachten. Alsdann werden wir den Satz zu beweisen haben, dass, wenn wir z. B. durch das Element $y = a\,x + a_1\,x^2 + \ldots$ ein Gebilde definiren und aus dem Elemente, das Element

$$x = b\,y + b_1\,y^2 + \ldots$$

herleiten, welches wieder um ein analytisches Gebilde definirt, dass alsdann beide Gebilde identisch sind, d. h. dass wir dieselben Werthepaare xy erhalten, ob wir aus dem Elemente

$y = an + \alpha_1 n^2 + ..$ oder aus

$x = by + b_1 y^2 ..$ ausgehen. Diese Betrachtung wird uns dazu führen, die Nothwendigkeit der Adjunction der Stellen $a'b'$, für deren Umgebung eine analytische Gleichung $G(xy|a'b') = 0$ besteht, einzusehen.

Es ist bis jetzt nicht ausgeschlossen, dass die Stelle $a'b'$ des Gebildes im Unendlichen liegt, alsdann haben wir nun statt $x - a'$ $y - b'$, welche unendlich klein werden, wenn sich x an a nähert, die Werthe $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{y}$ einzuführen, wenn $a' = \infty$ $b' = \infty$ oder $\frac{1}{x}$, $y - b'$ wenn $a' = \infty$ b' endlich ist u. s. w. Die Stelle $a'b'$ ordnen wir dem Gebilde zu, wenn für die Umgebung der Stelle die Gleichung $G(xy|a'b') = 0$ besteht, und im Falle, dass $a'b'$ unendlich wird, hat man statt der Potenzreihe von $x - a'$, $y - b'$, die Potenzreihe resp. von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ sich zu denken.

Wir haben schon früher den Satz erwähnt, dass wenn zwischen mehreren Functionen eine Gleichung besteht für irgend welche Func. Elemente, die für die Umgebung einer und derselben Stelle definirt werden, dass alsdann dieselbe Gleichung besteht, für alle zusammengehörigen Functionselemente, die aus dem Gegebenen hergeleitet werden. Wir wollen nun diesen Satz nachweisen.

<u>Lehrsatz</u>. Es sei $f_1(x), f_2(x)\,..$ irgend ein System von Functionen, definirt durch Functionselemente $G_1(x|a)$ $G_2(x|a)$, ..., Es möge nun zwischen diesen Elementen eine analytische Gleichung bestehen

$$G(f_1(x), f_2(x)\,..\,) = 0$$

wo G eine ganze Function ist, oder eine beständig convergirende Reihe. Wenn wir aus diesen Elementen für die Umgebung einer andern Stelle b die zusammengehörigen Elemente $G_1(x|b)$ $G_2(x|b)\,..$ herleiten, so soll bewiesen werden, daß auch für diese Elemente die obige Gleichung besteht.

Es sei $f_\varkappa(x) = G_\varkappa(x|a)$ setzen wir für die f's diese Ausdrücke in der Gleichung, so können wir die Glieder beliebig anordnen, um G umwandeln in eine Potenzreihe von $x-a$, die sicher convergent ist innerhalb des allen Reihen $G_\varkappa(x|a)$ gemeinsamen Conv. bereiches. Betrachten wir nun G als Function von x, die sich aus Potenzreihen von $x-a$ darstellen läßt, so können wir G umwandeln in Potenzreihen von $x-b$, wenn wir b innerhalb des Conv. bereiches von $G(\;)\,.. = \mathfrak{P}(x-a)$ also innerhalb der den Reihen $G_n(x|a)$ gemeinsamen Conv. bereiches wählen, so daß wir erhalten

$$G(f_1(x)\,..\,) = \mathfrak{P}(x-b)$$

Dasselbe erreichen wir aber, wenn wir $f_\varkappa(x)$ in Potenzreihe

von $x-b$, also in $g_\varkappa(x|b)$ umwandeln, und dann die Reihe in $G(f_1(a)\ldots)$ erweitern.
Dies möge nun liefern

$$G(g_1(x|b)\ldots) = \mathfrak{P}_1(x-b)$$

Zunächst sehen wir folgendes. Es liegt b vollständig innerhalb des Conv. bereiches aller Reihen; es muss also für die Umgebung der Stelle b

$$g_\varkappa(x|a) = g_\varkappa(x|b);$$

Ferner ist für die Umgebung dieser Stelle auch

$$G(f_1(x|a)\ldots) = \mathfrak{P}(x-a) = G(f_1(x)\ldots) = \mathfrak{P}(x-b)$$

und daraus folgt, dass für die Umgebung der Stelle b $\mathfrak{P}(x-b = \mathfrak{P}_1(x-b)$ d. h. es ist identisch $\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1$. Nun haben wir für die Umgebung von a $G(f_1(x)\ldots) = G(g_1(x|a)\ldots) = \mathfrak{P}(x-a) \equiv 0$. Es muss also auch $\mathfrak{P}(x-b)$ für die Umgebung von b in den Coefficienten Null sein. d. h.

$$G(g_1(x|b)\ldots) = 0 \text{ für die Umgebung von } b.$$

Die Gleichung

$$G(g_1(x|b)\ldots) = \mathfrak{P}_1(x-b)$$ hat aber Gültigkeit für alle Punkte, die innerhalb des allen Reihen gemeinsamen Conv. bereiches $(g_\varkappa(x|b))$ liegen, demnach muss

$$G(g_1(x|b), g_2(x|b)\ldots) = 0$$

für alle Punkte die innerhalb des allen Reihen $g_\varkappa(x|b)$ gemeinsamen Conv. bereiches liegen.
Auf diese Weise können wir weiter schliessen für neue

aus $g_1(n/b/)$.. hergeleitete zusammengehörige Elemente und auf diese Weise kommen wir zu dem Schlusse, dass wenn obige Gleichung für irgend eine Umgebung gilt, dass sie dann überall gilt, für alle zusammengehörigen Werthe der Function. Wenn nun a' ein Grenzpunkt ist im Endlichen, und nähert sich das System zusammengehöriger Werthe $f_1 f_2$ ... bestimmten endlichen Werthen $b' b''$ ... unendlich, wenn sich x dem a' unendlich nähert, so besteht auch für die Grenze die obige Gleichung, wie man sich leicht überzeugen kann.

Und hiermit ist unser Satz vollständig nachgewiesen.

Functionen mehrerer Variablen.

Bei der Erweiterung der im Vorigen entwickelten Begriffe bleiben die wesentlichen Principien bestehen. Die Theorie der Functionen mehrerer Veränderlichen in den Elementen aufzunehmen ist nothwendig, da wir schon bei der Untersuchung Functionen einer unabhängig Veränderlichen auf Functionen zweier oder mehrerer Variablen stossen.

Es sei für die Umgebung einer Stelle $a\,b\,c$ ... eine Potenzreihe $G(x\,y\,z\ldots/a\,b\,c\ldots)$ gegeben, aus dieser leiten wir neue Reihe $G(x/y\,z\ldots/a_1\,b_1\,c_1\ldots)$ indem wir $a_1\,b_1\,c_1$.. in dem Conv.bereiche der Reihe $G(x\ldots/a\ldots)$ wählen u. s. w.

Aus denselben Gründen wie bei einer Variablen betrach.

ten wir die neue Function $G(xy..|a,b,..)$ in denjenigen Theile des Conv. bereiches der des C. B. der ursprünglichen Reihe liegt als Fortsetzung der ursprünglichen. Angenommen wir kommen auf diese Weise bis zu der Stelle $a'b'..$ indem wir die Reihe $G(xyz..|a'b'c'..)$ erhalten, und wählen dann in dem C. B. des letzteren eine Stelle $x_0\, y_0\, z_0..$ so sagen wir, $G(x_0\, y_0..|a'b'..)$ sei ein Werth, der durch die Reihe $G(xy...|ab..)$ definirten Function an der Stelle $x_0, y_0..$ Die ursprüngliche Reihe $G(xy..|ab..)$ nennen wir das Element der Function von $xy...$ Wenn es möglich ist eine Stelle $x_0\, y_0\, z_0..$ im Conv. bereiche irgend einer der hergeleiteten Reihen zu bringen, so ist diese Stelle angehörig dem Gebiete $x\, y\, z....$ Man kann dies auch so auffassen. Leiten wir aus $G(xy..|ab..)$ die Reihe $G(xy..|x_0\, y_0..)$ so nennen wir das constante Glied einen Werth, der durch das Element definirten Function an der Stelle $x_0\, y_0..$ Die Gesammtheit der Potenzreihen, die wir aus einer herleiten können, bildet ein in sich geschlossenes Ganze, jede ist aus einer andern beliebigen ableitbar, und alle Reihen sind durch eine beliebige derselben vollständig bestimmt; es ist vollständig bestimmt, welche Reihen dazugehören, welche nicht. Aus diesem Grunde müssen wir wenn aus dem Elemente für eine Stelle $x_0\, y_0 ...$ mehrere Reihen ableitbar sind, die verschiedenen Werthe, als Werthe einer Function ansehen. Wir kommen auch hier zu dem Begriffe eindeutiger und mehrdeutiger Functionen.

Ebenso leicht lassen sich die früher entwickelten Principien auf Systeme von Functionen erweitern. Es seien für die Umgebung einer und derselben Stelle $a\,b\,c\,..$ mehrere Functionselemente $G_1(x\,y\,..\,|\,a\,b)$ G_2, G_3 definirt. Aus diesen leiten wir neue Reihen, indem wir bei allen Functionen das Ableiten durch Vermittelung derselben Stellen ausführen, weshalb die vermittelnden Punkte in dem gemeinsamen C.B. aller Elemente $G_1, G_2\,..$ liegen müssen. Es ist hieraus klar, dass es vorkommen kann, dass eine Function als Glied des Systems Werthe nicht annehmen kann, die sie allein für sich betrachtet annehmen könnte.

<u>Definition</u>. Bezeichnen wir mit $x_1, x_2 \dots x_n$ die Veränderlichen und mit $x_{n+1}, x_{n+2} \dots x_{n+r}$ die Systeme zusammengehöriger Werthe der Functionen, so bildet die Gesammtheit der Werthsysteme $x_1, x_2 \dots x_{n+r}$ ein analytisches Gebilde n^{te} Stufe in dem Gebiete der $n+r$ complexen Variablen. Dadurch verschwindet das Befremdliche, dass man alle Werthe der Function als Werthe einer Function zu betrachten hat. (Nehmen wir z.B. eine Fläche 2ten Grades, also eine Gleichung zwischen denselben Variablen $x\,y\,z$ vom 2ten Grade an, so wird eine

der Variablen z. B. z als Function von xy betrachtet doppeldeutig sein. Betrachten wir die Gesammtheit der Werthsysteme xyz, so sehen wir, dafs sie ein Gebilde darstellt.) Das auf die angegebene Weise entstehende Gebilde nennen wir ein monogenes Gebilde n der Stufe im Gebiete der $n+r$ Veränderlichen. Ebenso sprechen wir von einem monogenen Functionen-System.

Es treten nun 3 wichtige Aufgaben entgegen:

1.) Die Definition zu geben, was es heifst, eine Function oder ein Functionssystem erhalte auf einem bestimmten Wege für eine Stelle einen bestimmten Werth, und die Grenzwerthe zu untersuchen.

2.) Zu beweisen, dafs wenn für irgend ein System zusammengehöriger Elemente eine Gleichung besteht, sie dann auch für alle hergeleiteten besteht.

3.) Denken wir uns $x_{n+1}, \ldots x_{n+r}$ ausgedrückt durch irgend welche Elemente (von $x_1 \ldots x_n$) so mufs bewiesen werden, dafs Folgendes möglich ist. Angenommen es liegen $x_1, \ldots x_n$ in der Umgebung einer Stelle $a_1 \ldots a_n$ und der zusammengehörigen Werthe x_{n+1}, x_{n+r} in der Umgebung von a_{n+1} a_{n+r}. Nehme ich von allen diesen $n+r$ Variablen $x_1, \ldots x_{n+r}$ n beliebige heraus

x_α x_β x_γ … x_ν, so wird es im Allgemeinen möglich sein alle r übrigen als Potenzreihen von $x_\alpha - a_\alpha$,

.... $x_z - a_z$ auszudrücken. Durch diese r neue Reihen wird ein neues Gebilde definirt, und es ist nachzuweisen, daß dieses neue Gebilde identisch ist mit dem ursprünglichen, so daß wir zu jedem monogenen Gebilde n^{ter} Stufe zwischen $n+r$ Variablen r beliebige der Variablen als Functionen der n übrigen werden betrachten können. Diese Aufgabe haben wir bei Functionen einer Veränderlichen auch noch nicht erledigt.

1/ Man soll eine Function auf einer bestimmten Linie fortsetzen. Es sei eine Stelle $a\,b\,c$ .. und man will aus dem Functionselemente ein Element für eine andere Stelle $a'\,b'\,c'$ herleiten, so zeigt es sich, daß man nicht den Uebergang so machen kann, indem man Linien von a nach a', von b nach b' zieht, und die Punkte dieser Linien als Uebergangsstellen benutzt. Man muß die Punkte vielmehr einander zuordnen. Dies geschieht mittelst der Definition einer analytischen Linie. Man denkt sich $x\,y$ als reguläre Functionen einer reellen Variablen t, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ .. und die Gesammtheit der Werthepaare $x\,y$ .. welche sich für dasselbe t ergeben nennen wir eine Linie. Wenn wir also für x einen beliebigen Punkt gewählt haben, so sind hiermit auch die andern Punkte für $y\,z$ .. bestimmt. Die Gesammtheit der Punktensysteme ist dann die verlangte Linie, auf der der Uebergang stattfinden soll. Wenn wir von einer Stelle a_1 .. a_n zu einer andern a_1' .. a_n'

übergehen wollen, so denken wir uns $x_1 \dots x_n$ als Functionen von t, die so bestimmt sind, daß für ein bestimmtes t_0 $x_1 \dots x_n$ gleich sind $a_1 \dots a_n$ und für ein anderes t, gleich $a_1' \dots a_n'$. Jedem Punkte der reellen Graden, worin sich t bewegt entspricht eine Stelle der Linie von $a_1 \dots a_n$ nach $a_1' \dots a_n'$. Die Functionen von t können durch Elemente für die Umgebung einer Stelle t_0 definirt werden, die wenigstens bis zu t' fortgesetzt werden müßen. Unser Element $G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$ verwandelt sich in eine Function von t, die für die Umgebung einer bestimmten Stelle t_0 definirt wird. Jedem Werthe von t in der Umgebung von t_0 entspricht eine Stelle von $x_1 \dots x_n$ und hiermit ein Werth von $G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$. Setzt man das Element von $G(x_1 \dots | a_1 \dots)$ ausgedrückt in t fort, so erhält man für alle Punkte der Linie von $a_1 \dots a_n$ nach $a_1' \dots a_n'$ eine Darstellung der Function die durch $G(x_1 \dots | a_1 \dots)$ definirt wird, bis zu $a_1' \dots a_n'$ inclusive. Wenn nun $a_1' \dots a_n'$ keine Grenzstelle ist, so können wir weitergehen, indem wir für die neue Linie von $a_1' \dots a_n'$, $x_1 \dots x_n$ als neue Functionen von t definiren und $G \dots$ durch t ausdrücken. Nur darf man nicht glauben, daß die Fortsetzung der Function $G(x_1 \dots | a_1 \dots)$ ausgedrückt in t übereinstimmt überall mit der Fortsetzung von $G(x_1 \dots | a_1 \dots)$ als Function von $x_1 \dots x_n$ betrachtet. Bei den algebraischen Functionen stimmt immer die Fortsetzung der Functionselemente $G_{/}(x\ldots/a,\ldots/)$ ist ausgedrückt mit der Fortsetzung in $x, \ldots$; bei den Transcendenten ist es nicht immer der Fall. Um dies an einem Beispiele zu erläutern, nehmen wir an $x\,y\,z$ reell an, so definirt $z = G/(x\,y\,|\,b)$ ein Element einer analytischen Fläche in der Nähe der Stelle $a\,b\,c$. Durch dieses Element ist die Fläche vollständig definirt. Nun denke man sich eine beliebige Gerade und lege durch dieselbe Ebenen, so werden wir hierdurch Linien erhalten, die auf der Fläche liegen, diese Linien kann man durch eine Variable t ausdrücken, und hierdurch werden die Linien vollständig definirt. Nun könnte man glauben, daß auch die Fläche vollständig durch diese Linien definirt wird, so daß ein Element der Linie die Fläche selbst bestimmt. Dies ist aber nicht der Fall bei den transcendenten Flächen. Es zeigt sich nämlich, daß es transcendente geschlossene Flächen gibt auf denen Gerade Linien liegen. Die Gerade wird nun durch ein Element definirt, und kann ins Unendliche fortgesetzt werden können, während nur ein Stück derselben auf der Fläche liegt, und zu der Fläche gehört. Nicht alle Punkte der definirten Linie gehören zu der Fläche, so daß die Fortsetzung der Linie nicht mit der Fortsetzung der Fläche übereinstimmt. Dies hat man jedoch nicht so aufzufassen, als ob Linien, die auch theilweise in, theilweise außerhalb

der Fläche liegen in ihrer Fortsetzung nie zu der Fläche gehören.
Die Heine'sche Fläche ist eine Fläche auf der Gerade Linien liegen, die sich noch weiter erstrecken als die Fläche, sie gehören aber vollständig zu der Fläche, da sie durch die Gleichung der Fläche in ihren ganzen Ausdehnungen vollständig definirt sind, also zu der Fläche zuzurechnen sind, sie sind als Durchschnitt imaginärer Theile der Fläche aufzufassen.

Man kann die Definition der Functionen mehrerer Variablen nicht auf Definitionen der Functionen einer Variablen reduciren. Man hat stets zu untersuchen ob ein Gebilde niederer Stufe, das in einem einer höheren Stufe enthalten ist, in dem definirten Gebilde höherer Stufe vollständig, oder nur zum Theil enthalten ist. Bei den algebraischen Functionen ist stets das Gebilde niederer Stufe, wenn es in einem höherer Stufe zum Theil enthalten ist, auch vollständig darin enthalten, nicht aber bei den transcendenten. Dies hängt damit zusammen, daß das Gebiet der Variablen bei den algebraischen Functionen beliebig weit ausgedehnt werden kann, nicht aber bei den transcendenten. —

Wenn nun ein Element $G(xy|ab\ldots)$ gegeben ist, so denken wir uns von $ab\ldots$ eine Linie gezogen. Nun wählen wir auf derselben einen Punkt $a_1, b_1, \ldots$ (durch a_1 ist $b_1, \ldots$ schon bestimmt, und zwar so daß nicht nur $a_1 b_1 ..$ in dem C. B. von $G/xy../ab../$ liegt, sondern auch die ganze Strecke von $ab..$ nach $a_1 b_1 ..$ Alsdann können wir aus $G/xy../ab../$ herleiten $G/xy../a_1 b_1../$. Wir wählen nun $a_2 b_2 ..$ in dem C. B. von $G/xy../a_1 b_1../$ ebenso und leiten aus $G/x../a_1../$ $G/x../a_2../$ Wenn ich auf diese Weise bis zu $G/xy../a'b'../$ komme, so sagen wir das Element $G/xy.../a'b'../$ auf dem bestimmten Wege aus $G/xy.../ab../$ hergeleitet und dann ist das constante Glied von $G/xy.../a'b'/$ ein Werth der durch das Element $G/xy../ab../$ definirten Function an der Stelle $a'b'$! Man sieht aber, daß dies nur dann Sinn hat, wenn man nachgewiesen hat, daß man durch verschiedene vermittelnde Punkte derselben Linie von $ab..$ nach $a'b'..$, die an die obige Bedingung geknüpft sind, stets für $a'b'$ dasselbe Element $G/xy../a'b'/$ herleitet. Der Kürze wegen wird bei dem Beweise des oben erwähnten Satzes Folgendes festgehalten. Eine Stelle $a_1 \dots a_n$ wollen wir kurz mit a bezeichnen und die Potenzreihe für die Umgebung der Stelle $G/x_1 x_2 ../a_1 ../$ mit $G/a/$ u. s. w.

<u>Lehrsatz</u>: Es sei ein Functionselement $G/a/$ gegeben, und wir leiten aus demselben ein neues $G/a^{(\nu)}/$ auf folgende Weise. Wir ziehen von a nach $a^{(\nu)}$ eine Linie und wählen auf derselben Punkte $a'a''a'''$ so, daß nicht nur a' sondern auch die ganze Strecke aa' in dem Conv.bereiche von $G/a/$, ebenso

$a'a''$ im Conv.bereiche der aus $G(a)$ hergeleiteten Reihe $G(a')$ liegt u.s.w. bis wir zu $a^{(\mu)}$ kommen, um $G(a^{(\mu)})$ erhalten. Es soll bewiesen werden, dass man aus $G(a)$ stets zu demselben Elemente $G(a^{(\mu)})$ gelangt, wie man auch die vermittelnden Punkte auf der Linie mit Beibehaltung der obigen Bedingung wählt.

Es seien zunächst die vermittelnden Punkte $a\,a'\,a''\ldots a^{(\mu)}$ und die hergeleiteten Reihen.

$$G(a)\;G(a')\;G(a'')\ldots G(a^{(\mu)})$$

Nun nehmen wir eine zweite Reihe von Punkten

$b\,b'\,b''\ldots b^{(\nu)}$, wo b mit a, u. $b^{(\nu)}$ mit $a^{(\mu)}$ identisch sein soll und der Bedingung gemäss gewählt und bilden die Reihe

$$G(b)\,G(b')\,G(b'')\ldots G(b^{(\nu)})$$

und es soll bewiesen werden, dass $G(a^{(\mu)}) \equiv G(b^{(\nu)})$ d.h. dass die für die Stelle $a^{(\mu)}$ durch Vermittelung von $a'a''a'''$ hergeleitete Reihe identisch ist mit der, welche für dieselbe Stelle durch Vermittelung von $b'b''$.. hergeleitet wird.

Um dieses nachzuweisen wählen wir eine dritte Reihe von Punkten

$c\,c'\,c''\,c'''\ldots c^{(\delta)}$ so, dass sie aus den a's und b's zusammengesetzt ist in der Reihenfolge, wie die a's und b's in die Reihe geordnet auf einander folgen, wobei ebenfalls $c \equiv a$, $c^{(\delta)} \equiv a^{(\mu)} \equiv b^{(\nu)}$ und nun leiten wir die Reihen

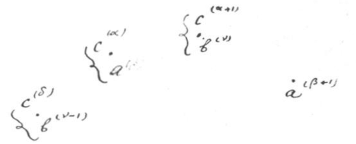
$$G(c)\; G(c')\; G(c'') \dots\; G(c^{(\delta)})$$

Alsdann zeigen wir, daß jedes $G(c')$ zusammenfällt mit $G(a')$ oder $G(b')$, je nachdem c mit a oder b zusammenfällt. Wir nehmen an, daß dieses schon bis $c^{(\alpha)}$ bewiesen ist; d. h. daß $G(c^{(\alpha)})$ übereinstimmt mit der Reihe $G(a^{(\beta)})$ oder $G(b^{(\gamma)})$ je nachdem $a^{(\beta)}$ oder $b^{(\gamma)}$ mit $c^{(\alpha)}$ zusammenfällt, und ebenfalls alle vorangehenden. Fassen wir nun 2 aufeinander folgende Stellen $c^{(\alpha)}$ u $c^{(\alpha+1)}$ in's Auge. Zunächst ist klar, daß $c^{(\alpha)}$ mit einem der a's oder b's zusammenfällt, alsdann muß $c^{(\alpha+1)}$ mit irgend einem Punkte der Reihe a oder b zusammenfallen. Nehmen wir zunächst an, daß $c^{(\alpha)}$ u $c^{(\alpha+1)}$ mit Punkten zusammenfällt, die derselben Reihe [(a) oder (b)] angehören. Es sei z. B. $c^{(\alpha)} \equiv a^{(\beta)}$, $c^{(\alpha+1)} \equiv a^{(\beta+1)}$, dann ist die Sache abgemacht; denn da der Voraussetzung gemäß

$G(c^{(\alpha)}) \equiv G(a^{(\beta)})$ und $a^{(\beta+1)}$ in dem Conv.-kreis von $G(a^{(\beta)})$ also auch von $G(c^{(\alpha)})$ liegt, so hat man direct

$$G(c^{(\alpha+1)}) \equiv G(a^{(\beta+1)}).$$

Nun seien die Punkte mit denen $c^{(\alpha)}$ und $c^{(\alpha+1)}$ zusammenfällt zwei verschiedenen Reihen angehörig. Es sei z. B. $c^{(\alpha)} \equiv a^{(\beta)}$ u $c^{(\alpha+1)} \equiv b^{(\gamma)}$. Nun folgt auf $a^{(\beta)}$ der Punkt $a^{(\beta+1)}$ da $c^{(\alpha+1)}$ der nächste an $c^{(\alpha)}$ liegende Punkt ist, so muß $b^{(\gamma)}$ zwischen $a^{(\beta)}$ u $a^{(\beta+1)}$ liegen. Demnach liegt $b^{(\gamma)}$ in dem



conv. bereiche von $G/(a^{(\beta)})$. Ich habe der Annahme nach $G/(c^{(\alpha)}) \equiv G/(a^{(\beta)})$; daraus kann ich nun herleiten $G/(c^{(\alpha+1)}) \equiv \bar{G}/(b^{(\delta)})$ und will nachweisen dass

$$\bar{G}/(b^{(\delta)}) \equiv G/(b^{(\delta)})$$

Es geht dem $b^{(\delta)}$ ein $b^{(\delta-1)}$ voran, welches mit $c^{(\delta)}$ zusammenfallen möge. Nun ist der Annahme nach

$$G/(c^{(\delta)}) \equiv G b^{(\delta-1)}$$

Da nun die ganze Strecke $b^{(\delta-1)}\, b^{(\delta)}$ innerhalb des conv. bereiches von $G/b^{(\delta-1)}$ liegt, so können wir hieraus $\bar{G}/(a^{(\beta)})$ herleiten. und mit dieser muss bewiesen werden, dass sie identisch ist mit $G/(a^{(\beta)})$ dies ist aber ohne Weiteres klar, denn die ganze Strecke $c^{(\delta)} c^{(\alpha)}$ liegt in dem c. B. von $G/(c^{(\delta)}) \equiv G/(b^{(\delta-1)})$ Ich kann aber aus $G/(c^{(\delta)})$ herleiten $G/(c^{(\alpha)}) \equiv G/(a^{(\beta)})$ und aus

$G/(b^{(\delta-1)}) \equiv G/(c^{(\delta)})$ eine Reihe $\bar{G}/(a^{(\beta)})$ da $G/(a^{(\beta)})$ und $\bar{G}/(a^{(\beta)})$ innerhalb des gemeinsamen c. Bereiches mit der Reihe $G/(c^{(\delta)})$ gleiche Werthe liefern, so müssen sie überhaupt identisch sein, d. h. $G/(a^{(\beta)}) \equiv \bar{G}/(a^{(\beta)})$

Wenn ich nun so fortfahre und aus $G/(a^{(\beta)})$ herleite $\bar{G}/(b^{(\delta)})$ so haben wir zunächst

$$G/(c^{(\alpha+1)}) \equiv \bar{G}/(b^{(\delta)}) \text{ und ebenfalls}$$
$$G/(b^{(\delta)}) \equiv \bar{G}/(b^{(\delta)}) \text{ also ist auch}$$
$$G/(c^{(\alpha+1)}) \equiv \bar{G}/(b^{(\delta)})$$

Nun fällt c mit a u. b zusammen und $c^{(\delta)}$ mit $a^{(\alpha)}$, $b^{(\alpha)}$. Es folgt also hieraus dass

$$G/c^{(\delta')}/\equiv G/a^{(\mu)}/$$
$$G/c^{(\delta')}/\equiv G/b^{(\mu)}/ \text{ oder}$$
$$G/a^{(\mu)}\equiv G/b^{(\mu)}/ \text{ was zu beweisen war.}$$

Aus diesem Satze folgt ohne Weiteres, dass wenn wir die Variablen einer durch das Element $G/x_1, x_2 \dots x_n/a_1, \dots a_n/$ definirten Function $G/x_1 \dots x_n/$ auf eine Linie im obigen Sinne beschränken, so erhält die Function $G/x_1 \dots x_n/$ für jede Stelle dieser Linie einen eindeutig bestimmten Werth. Man kann also sprechen von Werthen die eine Function definirt durch das Element $G/x_1 \dots/a_1 \dots/$ für eine Stelle $x_1^0\, x_2^0 \dots$ bekomt, wenn der Uebergang von $a_1 \dots a_n$ nach $x_1^0 \dots x_n^0$ auf einem bestimmten Wege stattfindet. — Die durch das Element $G/x_1 \dots x_n/a_1 \dots a_n/$ definirte Function, hat außerdem für alle Punkte der Linie den Charakter einer ganzen Function, so weit überhaupt die Function auf der Linie fortgesetzt werden kann. Es gibt nun auf dieser Linie 2 Punkte über die die Function nicht fortgesetzt werden kann, ohne den Charakter einer ganzen Function zu verlieren. Es sei nun $a_1' \dots a_n'$ eine solche Stelle über die hinaus die Function nicht fortgesetzt werden kann. Wenn sich nun, während sich $x_1 \dots x_n$ auf einem bestimmten Wege der Stelle $a_1' \dots a_n'$ nähert, der Werth der Function einem bestimmten Werthe a_{n+1} unendlich nähert, so sagen wir a_{n+1} ist der Grenzwerth der Function. Es ist noch die Frage, unter welchen Umständen der Grenzwerth a_{n+1}, an den Werthen der Function zu adjungiren ist, oder unter welchen Umständen die Stelle $a'_{n+1}, a'_1 \dots a'_n$ des definirten Gebietes, dem Gebilde wirklich zu adjungiren ist. Hierfür stellen wir das Criterium wie bei Functionen einer Variablen. Wenn zwischen den Grössen $x_{n+1} - a'_{n+1}$, $x_1 - a'_1 \dots x_n - a_n$ eine algebraische Gleichung besteht für eine Umgebung der Stelle $a'_{n+1}, a'_1 \dots a'_n$, ausdrückbar als Potenzreihe von $x_{n+1} - a_{n+1}$, $x_1 - a'_1 \dots x'_n - a'_n$ so zählen wir die Stelle $a_{n+1}, a'_1 \dots a'_n$ zu dem Gebilde. Wir sagen alsdann, die Function verliere in der Nähe von $a' \dots a'_n$ den Charakter einer ganzen Function behalte aber den einer algebraischen.

Dieselben Begriffe lassen sich sofort auf Systeme von Functionen übertragen. Die Grenzstelle eines Systems von Functionen adjungiren wir zu dem Gebilde, wenn für jede einzelne Function $x_{n+1}, \dots x_{n+r}$ das gilt, was für eine Function gelten muss. Es wird sich zeigen, dass es in diesem Falle ausreichend sein wird, wenn für die Umgebung der Grenzstelle $a'_1 a'_2 \dots a'_n a'_{n+1} \dots a'_{n+r}$ zwischen den Grössen

$$x_1 - a_1, \dots x_{n+r} - a_{n+r}$$

r algebraische Gleichungen bestehen.

Die obige Adjunction wird gerechtfertigt durch folgende Ueberlegung. Betrachten wir eine Function von n Variablen $x_1 \dots x_n$ und bezeichnen den Werth derselben mit

x_{n+1}, so wird durch die Gesammtheit der Werthsysteme $x_1, x_2 \dots x_n\ x_{n+1}$ ein Gebilde n^{ter} Stufe in dem Gebiete der $(n+1)$ Variablen definirt. (durch das Functionselement $x_{n+1} = G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$) Nun bezeichnen wir mit $b_1 \dots b_n$ die Grenzstelle über die hinaus auf dem vorgeschriebenen Wege die Function nicht fortsetzbar ist und $b_1' \dots b_n'$ eine Stelle vorher. Nun nehmen wir an, dass wenn sich $b_1' \dots b_n'$ der Stelle $b_1 \dots b_n$ unendlich nähert, dass sich der Werth b_{n+1}' einem bestimmten Werthe b_{n+1} nähert. So lange die Stelle $b_1 \dots b_n$ nicht erreicht ist, besteht zwischen $x_1 \dots x_n\ x_{n+1}$ die analytische Gleichung

$$x_{n+1} = \mathfrak{P}(x_1 - b_1' \dots x_n - b_n')$$

wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe von $x_1 - b_1' \dots$ bedeutet. Es kann möglicher Weise der Fall eintreten, dass wir eine Gleichung von der Form erhalten

$$F(x_1 - b_1, \dots x_{n+1} - b_{n+1}) = 0$$ die befriedigt wird für Werthe in der Nähe von $b_1 \dots b_{n+1}$. Nähert sich nun x_{n+1} dem b_{n+1}, wenn sich $x_1 \dots x_n$, $b_1 \dots b_n$ nähert, so können wir mit Recht die Stelle $b_1 \dots b_{n+1}$ dem Gebiete adjungiren, da ja die Gleichung $F = 0$ alle Punkte des durch $x_{n+1} = G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$ bis zu $b_1 \dots b_{n+1}$ enthält und für die Grenzstelle, für welche die Reihen zu gelten aufhören, ebenfalls giltig ist. Damit die Gleichung besteht $F = 0$ muss, wenn sich aus $x_{n+1} = G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$ die Reihe herleite

$$x_{n+1} = G(x_1 \dots x_n | b_1' \dots b_n')$$ u. für x_{n+1} dies

einsetze in F, die Gleichung $F=0$ identisch befriedigt werden, denn die Gleichung gilt für jedes $x_1 \dots x_n$ in der Umgebung von $b_1 \dots b_{n+1}$.

Ebenso diese Grenzstellen werden solche sein, wo die Functionen charakteristische Singularstellen zeigen. Es wird sich z. B. zeigen, dass solche singular Stellen die Mehrdeutigkeit der Functionen verursachen ($y = +\sqrt{x-b}$), dass bei Functionen mehrerer Variablen diese singular Stellen die Unbestimmtheit der Functionen mit sich bringen u. s. w. Das letztere findet sogar schon bei Functionen einer Variablen z. B. bei $e^{\frac{1}{x}}$ statt; es zeigt sich, dass in der Nähe der Stelle $x=0$ die Function $e^{\frac{1}{x}}$ jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden kann, was sich durch die Verschiedenheit der Wege bewerkstelligen läßt.

Auf diese Weise haben wir den allgemeinsten Begriff der analytischen Abhängigkeit entwickelt. Zur Vervollständigung derselben bleiben noch einige Sätze übrig, die wir jetzt beweisen werden.

II Lehrsatz. Es sei ein System von r Functionen von n Variablen $\varphi_1(x_1 \dots x_n) \dots \varphi_r(x_1 \dots x_n)$ definirt durch die Elemente für die Umgebung einer und derselben Stelle $a_1 \dots a_n \dots \varphi_r(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$ Nun mögen zwischen diesen Functionen in der Umgebung der Stelle $a_1 \dots a_n$ eine Gleichung von der Form bestehen

$$G(\varphi_1 \dots \varphi_\nu) = 0$$

wo G eine ganze Function oder eine beständig convergirende Reihe ist. Es ist zu beweisen, dass dieselbe Gleichung besteht für alle Systeme aller aus $\varphi_1(x_1 \dots | a_1 \dots) \dots \varphi_\nu(x_1 \dots | a_1 \dots)$ für jede beliebige Stelle $b_1 \dots b_n$ ableitbaren Elemente.

$$\varphi_1(x_1 \dots | b_1 \dots) \dots \varphi_\nu(x_1 \dots | b_1 \dots).$$

Zu dem Ende wählen wir innerhalb des C. B. von allen $\varphi_1 \dots \varphi_\nu$ eine Stelle $b_1 \dots b_n$ und leiten aus den Elementen

$$\varphi_\alpha(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n) \text{ die Elemente}$$

$$\varphi_\alpha(x_1 \dots x_n | b_1 \dots b_n) \text{ her.}$$

Setzen wir dies in G ein, so bekommen wir, wenn wir die Glieder nach Potenzen von $x_1 - b_1 \dots x_n - b_n$ ordnen

$$G(\varphi_1 \dots \varphi_\alpha) = \mathfrak{P}(x_1 - b_1 \dots x_n \dots b_n)$$

Da nun in einer gewissen Umgebung von $b_1 \dots b_n$

$$\varphi_\alpha(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n) = \varphi_\alpha(x_1 \dots x_n | b_1 \dots b_n)$$

so muss für dieselbe Umgebung von $b_1 \dots b_n$.

$$G(\varphi_1 \dots \varphi_\nu) = \mathfrak{P}(x_1 - b_1 \dots x_n - b_n) = 0 \text{ sein.}$$

dies ist nur dann möglich, wenn die Coefficienten einzeln Null sind, d. h. die Gleichung

$$G(\varphi_1 \dots \varphi_\nu) = 0$$

gilt also überall wo $\varphi_\alpha(x_1 \dots x_n | b_1 \dots b_n)$ existirt, d. h. sie gilt auch für die Umgebung der Stelle $b_1 \dots b_n$ für alle $x_1 \dots x_n$ wie weit die Entwickelung von $\varphi_\alpha \dots$ möglich ist. Auf diese Weise schliessend kommen wir zu dem Resultate, dass die

Gleichung für alle $x_1 \dots x_n$ gilt, wie weit wir überhaupt mit der Entwickelung der Reihen gelangen können.

<u>Zusatz</u> Wenn sich $\varphi_1 \dots \varphi_r$ ganz bestimmten endlichen Grenzen nähern, wenn $x_1 \dots x_n$ von $a_1 \dots a_n$ an $a_1' \dots a_n'$ unendlich nahe kommen, so wird die Gleichung auch hierfür befriedigt. Wenn also $a_1' \dots a_n'$ dem Gebiete gehört, so gilt die Gleichung $G(\varphi_1 \dots \varphi_r) = 0$ überall.

III Jetzt komt folgender Satz: Geht man von einem Systeme r Functionen $\varphi_1 \dots \varphi_r$ zwischen n Variablen $x_1 \dots x_n$ und setzt $x_{n+1} = \varphi_1$ $x_{n+2} = \varphi_2 \dots x_{n+r} = \varphi_r$ so wird hierdurch ein Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete der $n+r$ Variablen definirt. Wir werden zeigen, daß wir auf mannigfaltige Weise, sei es aus dem System dieser ursprünglichen Gleichungen, sei es aus dem System der daraus ableitbaren Gleichungen, andere Gleichungen erhalten können, in denen andere Größen x als Functionen der übrigen erscheinen, und daß das neue hierdurch definirte Gebilde identisch ist mit dem ursprünglichen. Wenn z. B. $x_2 = \mathfrak{P}(x_1 - a_1)$ gegeben ist, so soll bewiesen werden, daß das hieraus hergeleitete Element $x_1 = \mathfrak{P}_1(x_2 - a_2)$ identisch dieselbe Function definirt wie die erste Gleichung. Wenn wir also alsdann von einem Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete von $(n+r)$ Variablen sprechen, so kann man beliebige r der Variablen als Functionen der n übrigen ansehen. Dieser Satz braucht einige Vorbereitung.

sätze, welche selbst sehr wichtige Sätze der Theorie sind, und die wir zunächst entwickeln wollen. Wir wollen im Folgenden mit $(u_1 \dots u_n)_\alpha$ alle Glieder eines Ausdruckes bezeichnen, in denen die Größen $u_1 \dots u_n$ in der α ten Dimension vorkommen, und mit $(u_1 \dots u_n)_{\alpha+1}$ die Glieder der $(\alpha+1)$ ten Dimension u.s.w. Ferner soll, wenn wir einer Größe einen griechischen Index beigeben, diese Größe das System aller ähnlichen Größen bezeichnen, welche verschiedene Indexe haben, so bezeichnet z. B. die Gleichung

$$a_{\alpha,1}\, u_1 + a_{\alpha,2}\, u_2 + \dots a_{\alpha,n}\, u_n = v_\alpha$$

das System aller Gleichungen, die man erhält, wenn man ~~dem~~ α die Werthe 1, 2, .. bis zu einer gewissen Grenze gibt.

<u>1 Lehrsatz</u> Denken wir uns eine Potenzreihe gegeben von n Variablen $u_1 \dots u_n$.

$$\mathfrak{P}(u_1 \dots u_n) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\alpha}\, (u_1 \dots u_n)_\alpha \qquad 1$$

(wo also $(u_1 \dots u_n)_\alpha$ eine homogene Function α. Dimension ist, welche innerhalb eines bestimmten Conv. bereiches convergent ist. Setzen wir nun in diese Potenzreihe

$$u_\mu = \mathfrak{P}_\mu(v_1 \dots v_n) = \sum_\alpha (v_1 \dots v_n)_{\mu,\alpha} \quad (\mu = 1, 2 \dots n) \qquad 2$$

welche Potenzreihen convergent sein sollen, und für $v_1, v_2 \dots v_n = 0$ die Werthe $u_\mu = 0$ liefern, so kann man zunächst nach dem allgemeinen Satze (Seite) nachdem man in jedes einzelne Glied $(u_1 \dots u_n)_\alpha$ die Potenzreihen eingesetzt, das Resultat hierauf nach Potenzen von $v_1 \dots v_n$ ordnen und erhält auf diese

Weise für einen bestimmten Bereich

3 $$\mathfrak{P}(u_1 \dots u_n) = \mathfrak{P}_1(v_1 \dots v_n) = \sum_{0\ \alpha}^{\infty} (v_1 \dots v_n)_\alpha$$

Fassen wir nun irgend einen Coefficienten von $\mathfrak{P}_\mu$ ins Auge, z. B. irgend einen Coefficienten in der homogenen Function νter Dimension so wird es in dem Substitutionsresultate, d. h. in der Reihe

$$\mathfrak{P}_1(v_1 \dots v_n) = \sum_{0\ \alpha}^{\infty} (v_1 \dots v_n)_\alpha$$

erst in den Gliedern νter Dimension und höheren erscheinens nicht aber in den Gliedern niedriger Dimensionen. In den Gliedern νter Dimension wird es linear erscheinen und alle Coefficienten von Gliedern der νten Dimension in 2, werden in dem Resultate erst in Gliedern νter Dimension erscheinen und zwar linear.

Dies sieht man sogleich, wenn man folgendes überlegt. Setzen wir in die Function

$$(u_1 \dots u_n)_\alpha \text{ statt } u_1, u_2 \dots u_n$$

die Werthe aus 2 ein, so erhalten wir hierdurch die Glieder, welche in Bezug auf die v's sind von der αten, $\alpha+1$ten, $\alpha+2$ten ... ten Dimension, und zwar sieht man, dass die Glieder aus

$$u_\mu = \sum_\alpha (v_1 \dots v_n)_{\mu,\alpha},$$ welche von der βten Dimension sind, werden uns in solchen Gliedern vorkommen, deren Dimension wenigstens $(\alpha+\beta-1)\alpha+\beta+\alpha$ ist. Denn z. B. das Glied $(v_1 \dots v_n)_{\mu,\beta}$ kommt im αten, $\alpha-1$ ... ten

Grade vor. Der niedrigste Grad in welchem $(\nu_1 \ldots \nu_n)_{\mu\beta}$ vorkomt ist also 1; da aber alle Glieder, die hier in Betracht kommen aus Gliedern von der αten Dimension entstehen, so wird das Glied $(\nu_1 \ldots \nu_n)_{\mu\beta}$ noch mit andern Gliedern erscheinen müßen, und zwar sei daßes mit dem Producte von $(\alpha-1)$ anderen Gliedern vorkomt. Nun ist offenbar die niedrigste Dimension, die durch Producte von $\alpha-1$ Gliedern 1ter, 2ter, 3ter Dimension hergeleitet werden kann, die $(\alpha-1)$te. Das Glied $(\nu_1 \ldots \nu_n)_{\mu\beta}$ wird also mit diesen Gliedern die möglichst niedrige $(\alpha+\beta-1)$te Dimension liefern. Nun kann aber das Glied vorkommen können in der αten Potenz. Es wird alsdann ein Glied von der Dimension $\alpha\beta$ liefern. Nun ist aber sobald $\alpha > 1$, $\beta > 1$,

$$\alpha\beta > \alpha+\beta-1,$$

Denn es sei $\alpha = \alpha'+1$

$\beta = \beta'+1$ so ist

$\alpha+\beta = \alpha'+\beta'+2$ und

$\alpha\beta = \alpha'\beta'+\alpha'+\beta'+1 = \alpha+\beta-1+\alpha'\beta'$

also sicher $\alpha\beta > \alpha+\beta-1$. Im Falle $\alpha=1$, $\beta=$ beliebig ist aber $\alpha\cdot\beta = \alpha+\beta-1$. Ferner kann es vorkommen noch in der $(\alpha-1)$ten $(\alpha-2)$.. Potenz, resp. multiplicirt mit anderen Gliedern in μ_μ, die in der 1ten, 2ten 3ten Potenz vorkommen; die niedrigste Dimension wird offenbar erzeugt, wenn wir jedes Mal die $(\alpha-1)(\alpha-2)$.. Potenz von $(\nu_1 ..)_{\mu\beta}$ multiplicieren resp. mit der 1ten 2ten Potenz von Gliedern von der

1ten Dimension aus den übrigen μ_μ, also $(v_1 \dots v_n)$ – oder mit dem Producte 2, 3 solcher Glieder. Hierdurch werden allgemeine Glieder entstehen, die in Bezug auf die v's von der

$(\alpha - n)\beta + n$ten Dimension sind, wo $n = 1, 2 \dots$ bis höchstens $(\alpha - 1)$ gehen kann. Nun sehen wir, daß der Ausdruck $(\alpha - n)\beta + n$ größer ist, oder gleich $\alpha + \beta - 1$. Wir sehen also hieraus, daß wenn wir in $(u_1 \dots u_n)_\alpha$ für $u_1 ..$ die Werthe aus 2 setzen und dann nach Dimensionen von $v_1 .. v_n$ ordnen das Glied $(v_1 .. v_n)\mu_\beta$ zum ersten Mal in den Gliedern der $(\alpha + \beta - 1)$.ten Dimension vorkommt, und in keinen niedrigeren. Auch sieht man sofort, daß die Coefficienten von $(v_1 .. v_n)\mu_\beta$ hierin linear vorkommen.

Nun denken wir uns in $\sum_{2}^{\alpha} (u_1 .. u_n)_\alpha$ für u die Werthe 2 eingesetzt, und fassen das Glied ν.ter Dimension von einem μ_μ ins Auge, so wird offenbar wenn wir uns das Resultat nach Dimensionen von $v_1 \dots v_n$ geordnet denken, nach dem Vorigen das Glied niedrigster Dimension, in dem das Glied νter Dimension von μ_μ zum ersten Mal vorkommt von der

$(1 + \nu - 1) = \nu$ter Dimension sein, und die Coefficienten des betrachteten Gliedes, werden in diesem nur linear vorkommen w. z. b. war.

Jetzt wollen wir folgende Aufgabe lösen, welche für die Theorie der Functionen von größter Bedeutung ist, und die uns auch als Hilfsatz zum Beweise unseres Hauptsatzes dienen wird.

Aufgabe. Angenommen es sei zwischen n Variablen $x_1 \ldots x_n$ gegeben eine gewisse Anzahl von Gleichungen, die m sein möge, so daß $m < n$, von der Form

$$g_\lambda(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_n) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots m) \qquad 1$$

Sie mögen sämmtlich für $x_\lambda = a_\lambda$ befriedigt werden. Wie erhält man nun alle andern Systeme der $x_1 \ldots x_n$, deren absoluten Beträge eine gewisse Grenze nicht überschreiten und die den Gleichungen genügen. Diese Aufgabe wollen wir zunächst unter folgender Voraussetzung lösen. Es sei g_λ entwickelt nach Potenzen von $x_1 - a_1 \ldots x_2 - a_2$, so muß das constante Glied Null sein und wir setzen voraus, daß g_λ mit Gliedern 1ter Dimension anfängt; auf diesen Fall lassen sich die allgemeinen Gleichungen zurückführen. Unter dieser Voraussetzung setzen wir

$x_1 - a_1 = u_1$, $x_2 - a_2 = u_2 \ldots$ und erhalten alsdann die Gleichungen

$$A_{\lambda,1} u_1 + \ldots + A_{\lambda n} u_n + \bar{g}_\lambda = 0 \quad (\lambda = 1 \ldots m)$$

wo $\bar{g}_\lambda$ die Glieder höherer Dimensionen bezeichnet und wo $A_{\lambda n}$ Coeff. sind, die nicht sämmtlich Null sind. Zu diesen Gleichungen nehmen wir noch $(n-m)$ lineare Functionen von $u_1 \ldots u_n$ und $(n-m)$ anderen Variablen t_λ von der Form

$$A_{m+\lambda,1} u_1 + \ldots + A_{m+\lambda,n} u_n = t_\lambda \quad (\lambda = 1, \ldots n-m) \qquad 2$$

wo die Coefficienten $A_{m+\lambda,n}$ willkürlich sind und so gewählt werden müssen, dass die Determinante aller n^2 Coeff. in 1 u. 2 nicht verschwindet, d. h.

3 $$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \\ A_{m+1,1} & \cdots & A_{m+1,n} \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix} \lessgtr 0$$

Die Aufgabe reducirt sich nun auf folgende.
Man soll alle Werthsysteme von $u_1 \ldots u_n$ finden, die diesen Gleichungen 1. u. 2 genügen.
Denken wir uns die Gleichungen aufgelöst nach den u's so erhalten wir

$$u_\mu = v_\mu + U_\mu \quad (\mu = 1 \ldots n)$$

wo v_μ eine lineare Function von $t_1 \ldots t_{n-m}$ und U_μ lineare Function der g_μ ist.
Jetzt zeigen wir, dass man ganz bestimmte Potenzreihen der t's finden kann für die u's, die die Gleichung formell befriedigen, das heisst, dass wenn man die Reihen in 4 setzt, die Ausdrücke auf der Linken und Rechten identisch sind. Alsdann zeigen wir, dass diese Potenzreihen einen gemeinsamen Conv. bezirk haben, den man so beschränken kann, dass diese Potenzreihen den ursprünglichen Gleichungen genügen, und schliesslich, dass diese Potenzreihen alle Systeme der u's liefern, die eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Wir nehmen für die u's Potenzreihen mit