朱言鈞編

師範學校教科書

算學

第三冊
解析幾何

商務印書館發行

朱言鈞編

師範學校教科書 算學

第三冊 解析幾何

商務印書館發行

中華民國二十四年九月初版
中華民國三十五年十一月二〇版

師範學校教科書 算學 第三冊 解析幾何

(58701C)

定價國幣肆角捌分
印刷地點外另加運費

編纂者 朱言鈞
發行人 朱經農 上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

(本書校對者袁稟美)

目　次

第一章　作圖法

第二章　點與線段

第三章　直　線

第六章　拋物線

第七章 橢圓

第八章 雙曲線

第九章　二次曲線總論

師範學校教科書

解析幾何

第一章 作圖法

§1 直角坐標

經過平面中之任何一點O,畫兩條互相垂直的直線,如圖(1). 其一叫做橫軸,即圖(1)中之OX,與之垂直者叫縱軸,如圖中之OY;兩者總稱坐標軸. 縱橫兩軸相交之點叫做坐標起點或稱零點. 在每軸之上,有兩相反之方向可以識別據普通的習慣,橫軸上自左而右之方向稱正方向,縱軸上自下而上之方向稱正方向,與之相反之方向爲負方向.

以上說明何謂坐標軸之意義. 試在橫軸或縱軸之上,由零點依如上規定之正方向取一相當之線段作爲單位,則兩軸上任何線段之長或與兩軸相平行之任何線段之長都一一可量了.

復次,我們既在一平面中畫兩相垂直的坐標軸,這個平面就因之而劃分爲四個區域. 這四種區域,我們常用I II III IV 加以表識,如圖(1)所示. 倘在任何區內任擇一點如P,由P作兩直線與縱橫兩軸各相垂直,於是P與縱橫軸相去之距離就可以知道. 今假定P與縱軸相去之距離爲x,與橫軸相去之距離爲y,則x與y兩數,可用以規定P在平面中所處之地位,因之遂叫做P之坐標. 我們常稱x爲P點之橫坐標,y爲其縱坐標. 於此可知,凡點之地位,在縱軸之右者,其橫坐標爲一正數,在縱軸之左者,其橫坐標爲一負數. 復次,凡點之地位處於橫軸之上者,其縱坐標爲正,處於橫軸之下者,其縱坐標爲負.

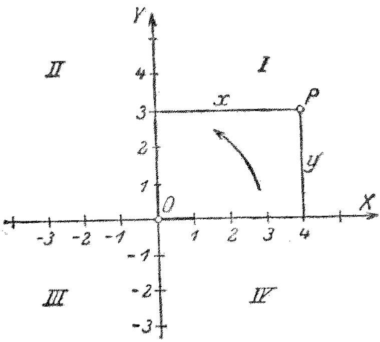


圖 (1)

既明以上所說,我們可得如下之結果. 倘立兩相垂直之坐標軸,並在每軸之上擇一相當之線段(如假定爲一公分)作爲單位,則任何一點之地位必可用兩數以規定之,此用以規定其他位之數叫做該點之坐標. 反之,

倘有任何兩數於此,我們必可求得一點,其坐標適為已知之兩數.

苟有一點 P,其橫坐標為 $x=a$,縱坐標為 $y=b$ 者,我們常用 $P(a,b)$ 之符號以表之. 括弧內兩數之次序一定,不許互易,其中第一字母所以表示點之橫坐標,第二字母表示其縱坐標. 故 $A(x_0,y_0)$ 之意無他,謂有一點 A,其橫坐標為 x_0,縱坐標為 y_0 罷了.

習題

1. 作以下諸點 $A(4,3)$; $B(-5,2)$; $C(-2,-4)$; $D(5,-4)$.

2. 設 R 為橫軸上之一點,其縱坐標為何數?又設 T 為縱軸上之一點,其橫坐標為何數?

3. 問點之橫坐標為 3 者,其所處之地位何如?凡點之縱坐標為 -2 者,其所處之地位何如?

4. (a) 求一切點,其縱橫坐標相等;(b) 更求一切點,其縱橫坐標之值相等,符號相反者.

§2 圖表法

凡數之值始終如一者叫做常數. 惟現象世界,森羅錯綜,瞬息萬變,倘欲描寫其究竟,必創變數以應付之. 所謂變數,乃在一規定範圍之內可以任意變化其值之數. 若人體之重量,氣體之溫度,都藉變數之用,表而出之.

今以x與y表兩變數．倘y之值隨x而定，則y稱做x之函數．函數之例，所在皆是．如氣體之壓力，當其温度不變之時，與其容量成反比例；若以y表壓力，x表容量，則其間之關係如下：

$$y=\frac{1}{x}$$

這個公式，所以表示壓力與容量相隨相倚的關係．y之大小旣隨x而定，因之遂稱y爲x之函數．又如鐵條之漲縮與温度之升降，亦相隨而變；若名鐵條之長爲y，其在零度時之長爲y_0（顯然是一常數），x爲温度，a爲漲率（亦爲一常數），則兩者間之關係，據物理學中的定律，可用下式表之：

$$y=y_0(1+a x)$$

據此，y之值隨x之值而定，故y稱做x之函數．要而言之，如有一變數y，其值依一確定之公例隨其他一變數x而定者，y叫做x的函數．如

$$y=0.5x+2$$

$$y=0.1x^2+3x-4$$

$$y=\frac{5x-2}{3x+4}$$

都表示y與x之間的函數關係．就$y=0,5x+2$的關係言之，倘其中x之值爲$0, 2, 5, 10, -6$時，y即隨之而得$2, 3,$

4.5, 7, −1 諸值:

x	0	2	5	10	−6
y	2	3	4.5	7	−1

故這公式 $y=0.5x+2$ 之用,所以說明 y 如何隨 x 而變的關係. 這種關係我們倘求助於坐標之用,可以很明顯的表而達之. 其法無他,將滿足這關係的 (x,y) 用點代表之.

如上 (0,2) (2,3) (5,4.5) (10.7) (−6,−1) 其點均在一直線之上,觀於圖(2),可以瞭然.

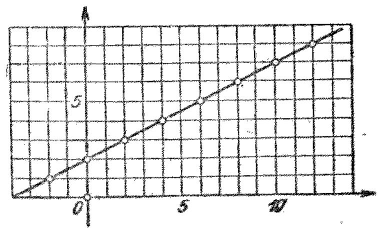


圖 (2)

既明以上之例,乃可進而立一函數之普遍定義如下: 設有一變數 x, 其值可等於 a b 兩常數之間之任何一數,換言之, x 的變化區域受如下條件之限制:

$$a \leqq x \leqq b$$

若 x 為此區域內之任何一數時,另一變數 y 依一公例而得一確定之值,於是 y 卽叫做 x 之函數. 欲表示 y 為 x 之函數,我們常用如下之符號:

$$y=f\,(x)$$

或 $y=F(x)$

這類符號所包含的意義無他,謂 y 之值隨 x 而定,由 x 得以知 y,如是而已. 其中之 x,叫做自變數,y 叫做因變數.

設有一函數 $y=f(x)$ 於此;當其中之自變數 x 爲一確定之數時,因變數 y 必循一公例亦有一數與之相應. 此 x 及與之相應之 y,我們可用一點以表達之,當 x 與 y 相隨而變,其點自隨之移動,於是得一曲線如圖(3). 故任何函數,除其中公例有少數特殊者外,都可用一曲線表而達之. 這事之所以可能,推本窮源,實由於算學中一種基本思想. 此思想無他,使數與點彼此發生關係;明白言之,數者,可由點以代表之,而點之地位可由數以規定之. 惟其如是,兩者可互爲代表;兩變數間相隨而變之關係,由點之變跡(卽其點所描寫之曲線)可以表顯. 反之,曲線既可視作某點運動之軌跡,當其運動之時,自遵一確定之公例;換言之,某點當運動之時,其坐標 x 與 y 必滿足一確定之關係,此關係卽表示那公例之內容,要求 x 與 y 如何相隨而變之關係. 由是以論,兩變

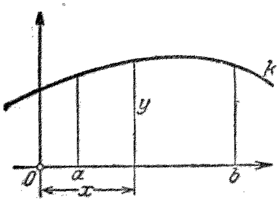


圖 (3)

數間之函數關係,常可繪製一曲線表而出之;而曲線之性質,亦可由一函數說明之. 倘我們已爲某種曲線求得其函數 $y=f(x)$,則彼曲線叫做這函數的圖表,而這函數又叫做該曲線的方程式.

我們爲一函數製圖,其用意使兩變數間相隨而變之關係,瞭然無餘. 今既有一曲線,復求其函數(或方程式),其意何在,不妨略加說明. 原來曲線爲物,常欠精確,賴以助我認識之力則可,以之爲推論之基則不可. 因此之故,要研究曲線,可研究其所代表之函數;研究函數,自在在與精密之數字與公式相周旋,故精微周到,無以復加. 我們既知函數所循之理,即可推論其所代表之曲線,究有何種性質. 據此以觀,倘以坐標系爲基礎,用計算之法推求幾何學中之定理,其結果必很圓滿. 以這種方法研究幾何學的學問叫做解析幾何學.

我們從事解析幾何學之先,對於以上所談,還有幾點加以補充,並擬多舉幾種實例,使本段所說之理,益見透澈明瞭. 兩變數間之函數關係,不過表示其間相隨相倚之情形;故有時大可不必指定何者爲自變數,何者爲因變數. 如 $x^2+y^2-64=0$ 即表示 x 與 y 相隨而變,倘其中之一得一確定之值時,其他之值必隨之而定. 這種

形式亦稱x與y間之隱函數(implicit function),我們常用如下之符號以表之:

$$F(x,y)=0$$

其意謂x與y之間,有相隨相倚之關係罷了. 前舉之例,如

$$y=0.5x+2$$

$$y=\frac{5x-2}{3x+4}$$

都可化爲隱函數之形式. 若某種函數已得隱函數之形式,我們在相當條件之下,復可指定其中變數之一如x爲自變數,更化爲$y=f(x)$之形式. 要之,爲$y=f(x)$固可,爲$F(x,y)=0$亦可,形式上雖不同,其代表平面中之一曲線則一.

我們既爲一函數$y=f(x)$製一曲線以代表之,如欲決定某點是否在此曲線之上,但視其點之坐標如$P(a,b)$是否滿足$y=f(x)$之方程式,換言之,但視$b=f(a)$之能否成立而定. 所謂$f(a)$,其意卽自變數爲a時因變數所有之値. 如$y=f(x)=0.1x^2$,則$f(2)=0.4$, $f(12)=14.4$, $f(-12)=14.4$. 倘某點$P(a,b)$果在此曲線之上,則其坐標必滿足$y=f(x)$;反之,倘有兩數a與b,果其滿足$y=f(x)$,則其所代表之點必在此曲線之上. 由是以論,凡此曲線上之點且亦惟此曲線上之點能滿足其所代表之函數$y=f(x)$;

故此函數必能將彼曲線之性質曲折盡達,因之遂稱做該曲線之方程式.

§3 舉例

例一　製 $y=0.2x^2$ 之圖表. 當

$x=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y=0$	0.2	0.8	1.8	3.2	5.0	7.2	9.8	12.8

但當 x 之值爲 $-1;\ -2;\ -3;\ -4;$……時, y 之值依然如上. 故試以 x_1 表任何一數,則 $0.2x_1{}^2=0.2(-x_1)^2=y$. 於此可見 $(x_1,y)(-x_1,y)$ 各點無一不滿足此函數關係,即無一不在此曲線之上. 凡點之縱坐標相同,橫坐標同值異號者,其所處之地位與縱坐標軸相對稱 (symmetrical in respect to Y-axis). 因此之故, $y=0.2x^2$ 之圖表與縱坐標相對稱. 又因 y 之值,不論 x 爲何數,始終爲正,故此圖表必在橫坐標軸之上.

例二　製 $x^2+y^2=64$ 之圖表. 先將此隱函數化爲如下之形式: $y=\pm\sqrt{64-x^2}$; 然後給 x 以各種不同之值,以求與之相應之 y:

$x=0$	±2	±4	±6	±8	±10
$y=\pm8$	±7.75	±6.93	±5.29	0	?

於此可見其圖表與縱橫兩軸均相對稱. 當 x 之值小於 8, 大於 -8 時, 必有一確定之 y 與之相應. 若 $x>8$ 時, $64-x^2$ 爲負, 故與之相應之 y 決非實數, 故無一實點以代表之. $x^2+y^2=64$ 之圖表爲 $-8\leqq x\leqq 8$ 範圍內之一圓

例三 製 $y=\dfrac{24}{x-2}$ 之圖表. 給 x 以各種不同之值, 以求與之相應之 y, 得:

$x=$	-6	-4	-2	0	$+2$	$+4$	$+6$	$+8$
$y=$	-3	-4	-6	-12	$\mp\infty$	$+12$	$+6$	$+4$

此曲線當 $x=2$ 時最堪注意, 試略加以討論. 當 x 小於 2, 換言之, 當 $x=2-\epsilon$, ϵ 假定爲一正數, 故 $x=2-\epsilon$ 時 x 卽小於 2, y 之值爲 $\dfrac{24}{-\epsilon}$. 若 ϵ 漸漸變小, 卽 x 漸漸趨於 2, 則 y 雖爲負數, 其絕對值則愈趨愈大. 復次, 當 x 大於 2 時, 換言之, 當 $x=2+\epsilon$, y 之值爲 $y=\dfrac{24}{\epsilon}$, 然後使 x 趨於 2, 卽 $\epsilon\to 0$, y 之值愈趨愈大. 故 $x=2$ 時, 我們不能得一有盡之 y 與之相應; 此處之圖表遂成中斷之勢. 惟當 x 之絕對值愈趨愈大時, y 之值隨之而趨小, 因此可知此圖表漸漸與橫坐標軸相接近.

例四 製 $y=0.1x^3$ 之圖表. 給 x 以各種不同之值, 然後求與之相應之 y, 得:

$x=$ -5 -3 -1 0 $+1$ $+3$ $+5$

$y = -12.5 \quad -2.7 \quad -0.1 \quad 0 \quad +0.1 \quad +2.7 \quad +12.5$

於此可知,(0,0)既滿足如上之方程式,其圖表必經過坐標起點. 復次,倘有一點 $P_1(x_1, y_1)$ 果在此圖表之上,換言之,如 $y_1 = 0.1x_1^3$, 則 $P_2(-x_1, -y_1)$ 亦必同在此圖表之上,因 $0.1(-x_1)^3 = -0.1x_1^3 = -y_1$. 故 P_1P_2 之線段必爲坐標起點所平分. 這種曲線,叫做與零點相對稱.

習 題

1. 假定自變數 x 之變化範圍爲 $-10 \leqq x \leqq 10$, 試製下列各函數之圖表:

$$y = 0.5x + 4 \qquad y = x + 4 \qquad y = -1.2x + 8$$

$$y = 0.5x - 2 \qquad y = -x + 5 \qquad y = \frac{5}{6}x - 4$$

2. 試製下列各函數之圖表,其自變數之變化範圍與前同:

$$y = 0.1x^2 \qquad y = 0.1x^2 + 4 \qquad y = -0.2x^2 + x + 2$$

$$y = 0.3x^2 \qquad y = 0.1x^2 - x + 4 \qquad y = 0.2x^2 + 0.5x - 3$$

3. 製下列各函數之圖表:

$$y = 0.8\sqrt{64 - x^2}; \qquad y = 0.5\sqrt{64 - x^2}; \qquad y = 1.5\sqrt{64 - x^2}.$$

4. 製下列各函數之圖表:

$$y = \frac{12}{x} \qquad y = \frac{24}{x} \qquad y = -\frac{24}{x} \qquad y = 2 + \frac{12}{x - 3}$$

5. 製 $y^2 = 0.1x(x-3)(x+2)$ 之圖表,並假定 x 之變化範圍爲 $-4 \leqq x \leqq +6$.

6. 假定 $-5 \leqq x \leqq 5$, 試製

$$y = \frac{x^3 + x}{10} \qquad 及 \qquad x = \frac{y^3 + y}{10}$$

之圖表.

7. 製 $y=\pm\sqrt{\frac{x}{x-3}}$; $(-6\leqq x\leqq+10)$

8. 製 $y=\frac{10}{x^2+1}$ $(-4\leqq x\leqq+4)$

9. 欲為 $y=x+2+\frac{10}{x-3}$ 製圖,可先求以下兩圖

$$y'=x+2$$

$$y''=\frac{10}{x-3}$$

然後將兩者之縱坐標一一相加,遂得 $y=y'+y''$.(假定 x 變化之區域為 $-10\leqq x\leqq+10$)

10. 用同樣方法試為 $y=4\sin(x+30°)+3\sin(x+60°)$ 製圖. x 為量角之變數. 在橫坐標軸上,可以一公分之長代表 20°; 先作 $y'=4\sin(x+30°)$ $y''=3\sin(x+60°)$, 然後求 $y=y'+y''$. y 之最高點為 6.77 公分.

11. 求 $y=10(1-e^{-0.2x})$ 之圖由 $x=0$ 至 $x=12$. 在這裏, e 的意義是自然對數之根,約為 $=2.71828$. 先給 x 以各種不同之值,求與之相應之 y:

$x=0$	2	4	6	8	10	12
$y=0$	3.30	5.51	6.98	7.98	8.65	9.09

問 x 愈趨愈大時, y 之值怎樣變化?

12. 製 $y=10\times0.9^x$ 由 $x=0$ 至 $x=14$. 於此,

$x=0$	2	4	6	8	10	12	14
$y=10$	8.10	6.56	5.31	4.30	3.49	2.82	2.29

問 x 愈趨愈大時, y 之值怎樣變化?

13. 有一半圓,其半徑 $r=5$. 在此半圓之內,以直徑為邊,可作種種長方形,其中兩頂在半圓線之上. 如以半圓之中心為坐標零點,其

直徑爲橫軸，又名長方形在半圓上之一角爲 (x, y)，則此長方形之面積 F 自爲 $F=2x \cdot y=2x\sqrt{25-x^2}$，試爲 $F=2x\sqrt{25-x^2}$（x 由 0 變至 5）作圖；問 (a) x 必如何 F 始爲 $20\ cm^2$；(b) x 必如何，F 之值爲最大；此最大之 F 爲何數？

第二章 點與線段

§4 兩點間之距離

試叫某線段之起點爲 $A(x_1,y_1)$，終點爲 $B(x_2,y_2)$. 將 AB 投影於縱橫坐標軸,則其在兩軸上之影爲:

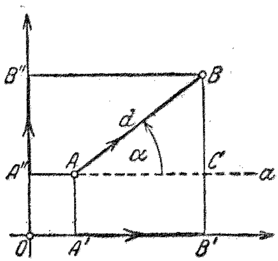


圖 (4)

$$A'B'=x_2-x_1$$

$$A''B''=y_2-y_1$$

不論 A 與 B 相處之地位何如,以上兩差數之絕對值卽表示影之長,其符號之或正或負卽表示影之方向. 若 B' 在 A' 之右,則 x_2-x_1 爲正,否則爲負;若 B'' 在 A'' 之上,則 y_2-y_1 爲正,否則爲負. 倘我們欲計算由 A 至 B 線段之長,則影之符號絕無何種關係. 因

$$AB=d=\sqrt{AC^2+BC^2}$$

又因 $AC=x_2-x_1$　$BC=y_2-y_1$, 故得

$$d=AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

式中開方之符號恆定為正號.

§5 斜度 規定線段的方向的角度

經過線段 AB 之起點 A, 畫一線與橫坐標軸之正方向相平行,名此線為 a 如圖(3). 此 a 與 AB, 彼此之間成一角 α. 此角之所由成,實因將 a 旋轉之,而旋轉之方向與普通鐘錶內計時針旋轉之方向適相反,如是旋轉使 a 與 AB 相合;因此而成之角就叫做 α. 此 α 之角卽可用以規定 AB 之方向. 因

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

這叫做 AB 之斜度,我們常用 m 之符號代表之:

$$m=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

α 的變化區域,自為 $0°\leqq\alpha\leqq360°$. 如上公式內,坐標之前後次序,須加以注意. 細觀上式,可知

當 y_2-y_1 為	+	+	−	−
x_2-x_1 為	+	−	−	+
時, α 必居於	第一區	第二區	第三區	第四區

§6 舉例

例一 問 (x_1,y_1) 與零點相去之距離為何? 由零點至

(x_1,y_1) 之距離顯然爲 $d=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

例二 由 $A(-8,5)$ 至 $B(6,-3)$ 之線段,其長與方向如何?

$$AB=\sqrt{(6+8)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{260}=16.12,$$

$$\tan\alpha=\frac{-3-5}{6-(-8)}=-0.5714,$$

$$\text{故 } \alpha=360^\circ-29^\circ45'=330^\circ15'.$$

例三 若 P 與 $A(8,0)$ $B(-7,4)$ $C(5,7)$ 各點相去之距離相等,其坐標爲何. 欲求 P 之坐標,我們姑先以 (x,y) 名之. 既要求 $PA=PB$,故 $\sqrt{(x-8)^2+y^2}=\sqrt{(x+7)^2+(y-4)^2}$, 由此得 $30x-8y=-1$. 又因欲要求 $PA=PC$,故 $\sqrt{(x-8)^2+y^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}$ 或 $6x-14y=-10$. 欲求

$$30x-8y=-1$$

$$6x-14y=-10$$

之同時成立, $x=\frac{11}{12}$; $y=\frac{49}{62}$.

故此卽爲 P 點之坐標.

習 題

1. 求 $A(a,0)$ $B(-b,0)$ 兩點間之距離.
2. 求三角形 ABC 各邊之長,其中 $A(5,2)$; $B(-6,4)$; $C(2,-5)$.
3. 若 P 點與 $A(6,5)$ $B(0,-3)$ $C(-2,1)$ 各點之距離相等,其坐標爲

何.

4. 試證三角形 $A(3,-1)$ $B(5,-3)$ $C(11,5)$ 之邊相等.

5. 試證以下三點 $A(-6,-7)$ $B(0,-4)$ $C(10,1)$ 在一直線之上,(注意:證 AB 之斜度 $=BC$ 之斜度)

6. 在縱軸上求一點 P, 與 $A(3,8)$ $B(7,5)$ 兩點之距離各相等.

7. 求兩點之坐標,其與 $A(1,2)$ 之相距爲 5, 與縱坐標軸之相距爲 4.

8. 有一平行四邊形 (Parallelogramm) $ABCD$. 其兩鄰近之項 A 與 B 之坐標爲 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$. 兩對角線 (Diagonal) 之相交點爲零點. 問 C 與 D 兩項之坐標爲何? 又假定 $AB=CD=a$; $BC=AD=b$; $BD=e$; $AC=f$. 試證 $2(a^2+b^2)=e^2+f^2$.

§7 割比

在一直線上,任意擇兩固定之點 A 與 B. 設有其他一點 P, 假定其位置亦在同一直線之上,於是 AB 之線段即爲 P 所分割, $AP:BP$ 叫做 AB 被 P 分割後的割比,我們常用 n 的符號以表之:

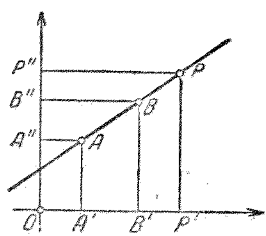


圖 (5)

$$n=\frac{AP}{BP}$$

圖 (6)

於此可知,當 AP 與 BP 之方向相同時, n 爲一正數,否則爲一負數. 又因

$$n=\frac{AP}{BP}=\frac{AB+BP}{BP}=1+\frac{AB}{BP}$$

之故,如下幾種認識,亦顯而易見. 第一,倘 P 處於 AB 兩點之間,則 n 爲一負數,否則爲正. 第二,倘 P 在 B 之右,n 爲大於1之一正數;倘 P 在 A 之左,n 爲小於1之一正數. 第三,倘 P 平分 AB 之線段,換言之,P 適爲 AB 間之中點,則 $n=-1$;倘 P 之地位漸趨於 A,n 隨之而趨於 O;若 P 趨於 B,n 隨之而變大. 第四,若 P 在 B 之右而向正方向愈趨愈遠,則 n 之値將趨於1. 要之,直線上任何一點 P 之地位,可由其割比 n 表而達之.

我們試擇一直角坐標系,將這直線上 A, B, P 各點投影於縱橫兩軸(觀圖(5)),得

$$AP:BP=A'P':B'P'=A''P'':B''P''=n$$

於是知割比之値,不因投影而變, A 與 B 既爲兩固定之點,其坐標以 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ 名之,P 之坐標以 $P(x,y)$ 表之,於是知

$$n=\frac{A'P'}{B'P'}=\frac{OP'-OA'}{OP'-OB'}=\frac{x-x_1}{x-x_2}$$

$$n=\frac{A''P''}{B''P''}=\frac{OP''-OA''}{OP''-OB''}=\frac{y-y_1}{y-y_2}$$

由是得 $$x=\frac{x_1-nx_2}{1-n} \qquad y=\frac{y_1-ny_2}{1-n}$$

倘我們已知AB兩點及割比n,就可根據以上公式以計算P之坐標.

§8 舉例

例一: 平分某線段之點,其坐標爲何. 倘某線段之兩端爲$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$,其爲中點所分之割比,據上所論,爲$n=-1$,故中點之坐標爲:

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\qquad\qquad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

例二: 某三角形之三頂假定爲已知. 求此三角形之重心點. 假定三角形之頂爲$A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$,欲求其重心點$S(x,y)$,先將AB之中點M與C頂相連,求$MS=\frac{1}{2}SC$. M之坐標,據前例所示,爲$\frac{1}{2}(x_1+x_2)$,$\frac{1}{2}(y_1+y_2)$. 然後視M與C爲固定點,則MC爲S所分之割比爲$MS:CS=-\frac{1}{2}$,於是S之坐標爲:

$$x=\frac{\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}x_3}{1-(-\frac{1}{2})}\qquad\qquad y=\frac{\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{1}{2}y_3}{1-(-\frac{1}{2})}$$

化簡之,得

$$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\qquad\qquad y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

習 題

1. 設有一線段 AB, 其兩端爲 $A(-4,6)$ $B(6,-4)$. 求其中點之坐標.

2. 苟 AB 之兩端爲 $A(a,b)$ $B(-a,-b)$, 求其中點之坐標.

3. 求三角形 $A(5,4)$ $B(-5,2)$ $C(3,-3)$ 之重心點.

4. 有一經過 $A(-4,6)$ $B(2,-3)$ 之直線; 其中 C,D,E 諸點之割比爲 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 2, 試求 C,D,E 各點之坐標.

§9 多邊形之面積

如有一多邊形於此,我們已知其頂之坐標,欲進而求其面積,解析幾何學中有一極簡便之法. 試先就一三角形說明其理;三角形之面積如能計算,其他多邊形之面積,也不難類推. 假定三角形之頂爲 $P_1(x_1,y_1)$ $P_2(x_2,y_2)$ $P_3(x_3,y_3)$ (觀圖 7) 又 $OP_1=r_1$, $OP_2=r_2$, $OP_3=r_3$, 這 OP_1, OP_2, OP_3 三線與橫軸各成 α_1, α_2, α_3 之角. 於是三角形 $P_1P_2P_3$ 之面積 J 自爲

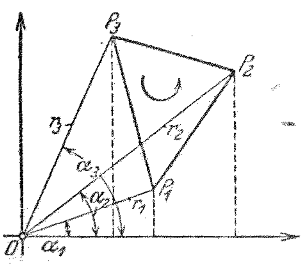


圖 (7)

$$J=\triangle OP_1P_2+\triangle OP_2P_3-OP_3P_1$$

或

$$2J=r_1 r_2 \sin(\alpha_2-\alpha_1)+r_2 r_3 \sin(\alpha_3-\alpha_2)-r_3 r_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)$$

無疑. 因 $\sin(\alpha_3-\alpha_1)=-\sin(\alpha_1-\alpha_3)$,故亦可寫作

$$2J=r_1 r_2 \sin(\alpha_2-\alpha_1)+r_2 r_3 \sin(\alpha_3-\alpha_2)+r_3 r_1 \sin(\alpha_1-\alpha_3)$$

將式中正弦函數展開之,得

$$\begin{aligned}2J=&r_1 r_2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_1-r_1 r_2 \cos\alpha_2 \sin\alpha_1\\&+r_2 r_3 \sin\alpha_3 \cos\alpha_2-r_2 r_3 \cos\alpha_3 \sin\alpha_2\\&+r_3 r_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_3-r_3 r_1 \cos\alpha_1 \sin\alpha_3\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}x_1&=r_1\cos\alpha_1 & y_1&=r_1\sin\alpha_1\\x_2&=r_2\cos\alpha_2 & y_2&=r_2\sin\alpha_2\\x_3&=r_3\cos\alpha_3 & y_3&=r_3\sin\alpha_3\end{aligned}$$

故得

$$2J=(x_1 y_2-x_2 y_1)+(x_2 y_3-x_3 y_2)+(x_3 y_1-x_1 y_3)$$

或

$$2J=x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$

於此可見一三角形之面積,由其頂之坐標可以計算得之. 這個面積,當我們由 P_1 經 P_2 而至 P_3,三角形在我們之左時,爲一正數,否則爲一負數.

§10 舉例

例一: 設有一五邊形,其頂之坐標如表中第一第二

兩行所示. 求其面積.

x_i	y_i	$y_{i+1}-y_{i-1}$		$x_i(y_{i+1}-y_{i-1})$		
5	1	+11		+55		
1	7	+2		+2		
−4	3		−12	+48		
−5	−5		−7	+35		
−1	−4	+6			−6	
		+19	−19	140	−6	=134=2J

故 $J=67\ \mathrm{cm}^2$

例二: 設有一三角形,其頂之坐標爲 (0,0),(1,8),(9,2), 求其面積. $2J=x_1y_2-x_2y_1=1\cdot2-9\cdot8=-70$,

故 $J=-35\ \mathrm{cm}^2$. 讀者試說明此中負號之由來. 若 (9,2) 先於 (1,8), 則面積爲 $J=35\ \mathrm{cm}^2$.

習　題

多邊形各頂之坐標如下所示,求其面積:

1. $x=7\quad -10\quad -3$

$y=3\quad 5\quad -6$

2. $x=120\quad 50.2\quad 18.4$ m.

$y=20.5\quad 140.3\quad 70.4$ m.

3. $x=2.6\quad 1.8\quad -1.7\quad -3.8\quad -6\quad -3.4\quad -0.9\quad 1.4$

$y=4.3\quad 7.5\quad 6.7\quad 4.2\quad -1.4\quad -5.3\quad -2.6\quad 1.[illegible]$

4. $x=-1\quad 3\quad 7$

$y=-1 \quad -3 \quad -5$

5. 若有一三邊形,其頂爲 $(0,0)$ (x_1,y_1) (x_2,y_2),由其圖表中推知其面積必爲

$$J=\frac{1}{2}(x_1 y_2-x_2 y_1)$$

第三章 直線

§11 直線之方程式 $y=mx+b$

今有一直線 g,其中任何一點 P 之坐標爲 (x,y);於是

$$y=AB+BP$$

因其中 $AB=x\cdot\tan\alpha$

$BP=b=$由零點直至 g 與縱軸相交之處,亦稱做 g 在縱軸上之截段,

故

$$y=x\cdot\tan\alpha+b$$

應用第五節中的符號 $\tan\alpha=m$,亦可寫作

$$y=mx+b.$$

這個公式,叫做直線 g 的方程式,因 g 上任何一點 P 之坐標 (x,y) 必滿足這關係,且滿足這關係的 x 與 y,即代表 g 上之任何一點. 倘我們旣知 m (或 α) 與 b,則任何 x,必有一 y 依如上之公式與之相應,換言之,我們可依如上之公式,以推知某點之橫坐標爲 x 者,其與橫軸之

距離(即縱坐標)究爲多少. 方程式中之m,即所以表示這直線g之斜度. 倘我們在這直線之上,除P點外,更取一點Q,Q之橫坐標與P之橫坐標相差爲1;如P之橫坐標爲x,Q之橫坐標自爲$x+1$. 於是Q之縱坐標爲

$$y'=m(x+1)+b$$

但P之縱坐標爲 $y=mx+b$

故兩點之縱坐標之相差爲 $RQ=y'-y=m$

即這直線之斜度. 於是可知一直線之斜度無他,當橫坐標增加一單位時,縱坐標因之而獲得的增量罷了;

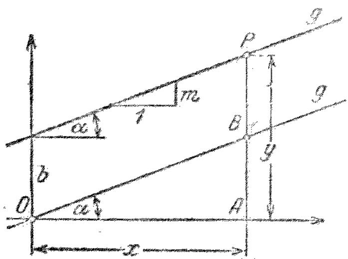


圖 8

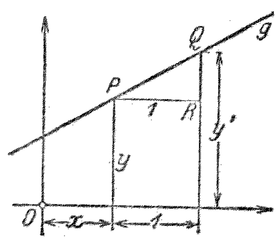


圖 9

至m愈小,則直線愈坦平,亦可以見了.

直線有所謂纖升直線,亦有所謂纖降直線. 凡一直線(或一曲線),苟其橫坐標增大,其縱坐標亦隨之而增大者,叫做纖升直線;苟其橫坐標增大,其縱坐標隨之而減少者叫做纖降直線. 如圖(10)中之g_1爲纖升,g_2

爲繼降. 凡繼升之直線,其斜度 m 爲一正數,繼降之直線,其斜度 m 爲一負數,略一思索,便可瞭然.

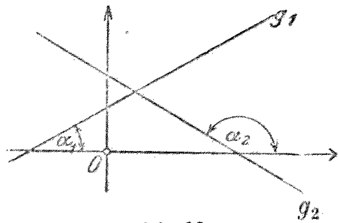


圖 10

以上略言如何求一方程式以代表一已知之直線. 反之,如我們已知一直線之方程式,我們將如何作圖以示其所代表之直線,這個問題與上所談者,適相對峙. 作圖之法,大略如下.

設有一方程式如

$$y=0.5\,x+4$$

這條直線與縱軸相交於 $y=4$; 由這相交點 B 向橫軸之正方向前進 10 cm. 復依縱軸之正方向推上 5 cm. 得一點 P; 使 B 與 P 相連,即得我們所欲求的直線; 因這直線在縱軸上有 4 cm 之一截段,其斜度又爲 $\tan\alpha=5:10=0.5$, 與方程式所要求者完全相符.

此外復有一作圖之法. 既有 $y=0.5\,x+4$ 之方程式,先求任何兩滿足此方程式之點(兩點之距離不妨稍遠,俾作圖時可以比較明晰); 如 $x=10$, 則 $y=5+4=9$; 如 $x=-10$, 則 $y=-5+4=-1$. 於是經過 $(10, 9)\,(-10, -1)$ 作一直線; 凡此直線上任何一點,其坐標必受

$y=0.5x+4$ 條件之限制.

旣明以上所說之理,可知凡直線之經過坐標起點者(如圖(8)之 g'),其方程式必有如下之形式:

$$y=mx.$$

§12 舉例

例一:有一經過零點及 $P(8,12)$ 之直線.求其方程式.凡經過零點之直線,其方程式必有如下之形式 $y=mx$. 又因經過 $(8,12)$ 之故, $12=m\,8$, 故 $m=1.5$. 於是遂得 $y=1.5\,x$ (若 $m=\tan\alpha=1.5$, 則 $\alpha=56°19'$).

例二:一繼降之直線與縱軸相交於 $(0,8)$, 又與橫軸成一 $-30°$ 之角.求其方程式.答案: $y=-\tan 30°\cdot x+8$ 或 $y=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot x+8$.

例三:凡與橫軸相平行之直線,必有如下之方程式: $y=$ 常數;此常數卽所以示其與橫軸之距離.凡與縱軸相平行之直線,其方程式爲 $x=$ 常數;此常數亦所以示其與縱軸相去之距離.

凡經過零點之繼升直線,與橫軸作 $45°$ 之角者,其方程式爲 $y=x$. 經過零點之繼降直線,與橫軸作 $-45°$ 之角者其方程式爲 $y=-x$.

例四: 問兩直線何時始得平行? 兩直線

$$y=m_1x+b_1$$

$$y=m_2x+b_2$$

如平行,其斜度必相等,換言之, $m_1=m_2$.

例五: 問兩直線何時始垂直?〔觀圖(11)〕?

因 $$\alpha_2=90+\alpha_1$$

$$\tan\alpha_2=\tan(90+\alpha_1)=-\cot\alpha_1=-\frac{1}{\tan\alpha_1}$$

故 $$m_2=-\frac{1}{m_1}$$

或 $$m_1=-\frac{1}{m_2}\qquad m_1m_2=-1$$

總之,兩直線如垂直,則其斜度之積爲 -1.

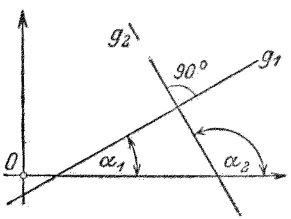


圖 (11)

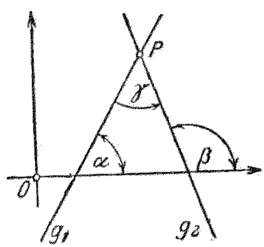


圖 (12)

例六: 兩直線 $y=m_1x+b_1$, $y=m_2x+b_2$ 相交於一點求一公式以規定其間之角.觀圖(12),可知

$$\gamma=\beta-\alpha$$

故 $$\tan\gamma=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

因 $$\tan\alpha=m_1,\quad \tan\beta=m_2,$$

故 $$\tan\gamma=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

由此公式,可以計算γ之大小,γ者,以P爲固定點,將g_1依正方向(與計時針相反之方向爲正方向)旋轉而與g_2相合時所成之角. 若$m_1=m_2$,則$\tan\gamma=0$,於是兩線遂平行,(例四). 若$m_1m_2=-1$,或$1+m_1m_2=0$,則$\tan\gamma=\infty$,於是兩線互相垂直(例五).

例七:有一直線經過(x_1, y_1),其斜度爲m. 求其方程式. 苟直線之斜度爲m,其方程式爲$y=mx+b$. 又因經過(x_1, y_1)之故,如下之關係自必成立:$y_1=mx_1+b_1$或$b=y_1-mx_1$,故得一方程式如下: $y=mx+y_1-mx_1$或寫作

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

例八:有一經過$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$之直線;求其方程式.惟其經過(x_1, y_1)與(x_2, y_2),故如下之關係必能成立:

$$y_1=mx_1+b$$

$$y_2=mx_2+b$$

由此得 $$y_2-y_1=m(x_2-x_1)$$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$b=y_1-mx_1=y_2-mx_2$$

於是得其方程式如下:

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1$$

或寫作 $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

或 $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

例九: 兩直線$y=-x+7$, $y=2x-8$相交於一點. 求其相交點之坐標. 所謂兩直線之相交點,必同時在兩直線之上,故其坐標必同時滿足如上兩方程式. 因此 $y=-x+7=2x-8$, 故 $x=5$, $y=2$ 為其相交點之坐標.

習 題

1. 作以下各直線:

$y=0.3x$　　$y=0.7x$　　$y=x$　　$y=1.5x$

$y=-0.3x$　　$y=-0.7x$　　$y=-x$　　$y=-1.5x$

2. 作以下各直線:

$y=0.5x+5$　　$y=0.3x-4$　　$y=x+1$

$y=0.5x+8$　　$y=-0.3x+4$　　$y=-x+8$

3. 如有一變數x與別一變數成正比,則兩者之間成如下之關

係
$$y=mx$$

式中之m叫做比率. 製圖表之,爲一經過零點之直線. 例如

$u=\pi d$　u=圓周;　d=圓之直徑.

$v=gt$　v=速度;　t=時秒;　g=地面加速=9.81 m/sec^2.

$\widehat{a}=\frac{\pi}{180}a^\circ$　$\widehat{a}$=圓弧;　a°=角度……

4. 有一直線,經過(2,3),又與$y=-0.9x+12$相平行. 求其方程式.

5. 有一直線,經過(5, 2),又與$y=-0.5x+4$相垂直. 求其方程式.

6. 有一直線,經過(4, 5),又與$y=2x-4$相垂直. 求其方程式.

7. 求以下各直線之方程式:

(a) 經過 $A(3, -6)$ $B(9, 6)$ 者;

(b) 經過 $A(4, -3)$ $B(8, 3)$ 者;

(c) 經過 $A(-1, 9)$ $B(10, 2)$ 者.

8. 某三角形之頂爲$A(-6, 7)$ $B(7, -6)$ $C(3, 4)$; 求各邊之方程式.

9. 求下列下直線之相交點:

$$y=-3.5x+14$$

$$y=\frac{4}{17}x-\frac{16}{17}$$

10. 有一經過$A(3, 7)$ $B(7, 3)$兩點之直線,更有一經過$C(-2, 2)$ $D(6, 6)$之直線. 求兩者相交點之坐標.

11. 問$y=-\frac{2}{3}x-16$是否經過$y=-3x+5$及$y=-2x-4$兩直線之相交點?

12. 經過$P(5, 8)$作一直線與$y=-0.5x+7$相垂直. 此垂直線之

終點稱作 A. 問 PA 線段之長.

13. 有一直線, 經過 $(0,6)$ 其斜度爲 $\frac{1}{4}$. 更有一直線經過 $(10,0)$, 且下降而與橫軸成 $-45°$ 之角. 問兩線之相交點及其相交時之角是否爲一銳角.

14. 有兩直線, 其一經過 $(0,8)$, 斜度爲 -0.1; 其他經過 $(4,0)$, 斜度爲 $\frac{1}{3}$. 問兩線之相交點及相交時之角.

15. 求

(a) $y=0.4x+7$ 及 $y=-0.9x+4.2$ 兩直線間之角.

(b) $y=-0.9x+4.2$ 及 $y=2.5x+13$.

16. 某三角形之頂爲 $A(-6,2)$ $B(10,6)$ $C(3,-3)$. 試求其角.

17. 某三角形之邊有 $m, \frac{1}{m}$ 及 1 之斜度. 證其爲一等腰三角形.

18. OP_1 與 OP_2 爲兩相垂直之直線; 試證 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

19. 有一直線 g_1 其斜度爲 0.5. 更有一直線 g_2 與此成 $-45°$ 之角. 問 g_2 之斜度.

20. 有一直線經過 (x_1, y_1) (x_2, y_2); 求其方程式.

§13 直線方程式之別種形式

1. 任何直線必與縱橫兩軸相交, 因之遂有縱橫軸上截段之產生, 如圖 (14) 中之 $OA=a$ 爲此直線在橫軸上之截段, $OB=b$ 爲其在縱軸上之截段. 因 $m=-\frac{b}{a}$, 故此直線之方程式可寫作 $y=-\frac{b}{a}x+b$, 或

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

直線上任何一點,其$\frac{x}{a}$與$\frac{y}{b}$兩者相加必為1,所謂a,即直線在橫軸上之截段,b則為其縱軸上之截段.

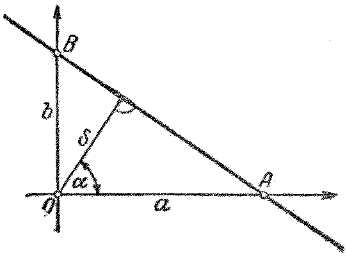


圖 (13)

2. 普通形式 有一直線於此,倘我們知其與零點相去之距離,換言之,知δ垂直線之長,更知此垂直線與橫軸所成之角α,則此直線之性質,也可完全規定. 因$a=\delta:\cos\alpha$; $b=\delta:\sin\alpha$,故如上之方程式亦可寫作:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta=0.$$

這種形式,也叫做直線方程式之普通形式,其中δ常視為正數.

3. 直線之普遍方程式. 凡一方程式如

$$Ax+By+C=0.$$

必代表一直線,式中之A, B, C為任何固定之實數. 因B若不為零時,此公式可化為

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

是代表一直線,其斜度為$-\frac{A}{B}$,在縱軸上之截段為$-\frac{C}{B}$.

若$B=0$,則$Ax+C=0$,或

$$x=-\frac{C}{A}.$$

故代表一與縱軸相平行,且經過$(-\frac{C}{A};0)$之一直線.因此,凡一初次方程式,其中有兩變數x與y者必代表一直線.

§14 舉例

例一:有一直線$3x-8y-24=0$,求其在縱橫軸上之截段.欲求此直線在橫軸上之截段,換言之,求其與橫軸相交之點,必使$y=0$,於是知$x=8$.依同法,使$x=0$,遂知$y=-3$爲其在縱軸上之截段.復次,我們如把此方程式化爲$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$之形式,將各項除以24,得$\frac{x}{8}+\frac{y}{-3}=1$,即知$a=8$;$b=-3$.

例二:求$2x-4y+3=0$及$4x-3y-6=0$兩直線間之角.我們先將此方程式化作:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{4}{3}x-2$$

於是知前者之斜度爲$m_1=\frac{1}{2}$,後者之斜度爲$\frac{4}{3}$,故根據§12例六:

$$\tan\gamma=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{8-3}{6+4}=0.5 \qquad \text{故 } \gamma=26°34'.$$

例三：　以零點爲中心，r 爲半徑作一圓如圖(15)，更作半徑 OP，與橫軸成一 α 之角．求經過 $P(x_1,y_1)$ 點與圓相切之直線之方程式．我們應用§13中之普通形式，使 $\delta=r$，得

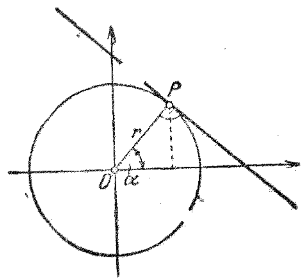


圖 (14)

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-r=0$$

但

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{r};\ \sin\alpha=\frac{y_1}{r}$$

故

$$\frac{xx_1}{r}+\frac{yy_1}{r}-r=0$$

或

$$xx_1+yy_1=r^2$$

是卽我們所欲求的切線的方程式．

§15　怎樣將直線方程式化爲普通形式

設有一直線如 $4x+3y+20=0$，我們倘欲化爲普通形式，換言之，要改用 δ（卽此直線與零點相去之距離）與 α

(即 δ 與橫軸所成之角)以規定此直線,如第十三節中所說:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta=0$$

倘欲用此式以代表 $4x+3y+20=0$ 之直線,則兩式中各項之係數彼此必成正比,即必有一正比率 K 之存在,使

$$\cos\alpha=4K \qquad 20K=-\delta$$
$$\sin\alpha=3K$$

將前兩式平方後相加,

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=25K^2=1$$

故 $$K=\pm\sqrt{\frac{1}{25}}=\pm\frac{1}{5}$$

又因 δ 必為正數,故 K 非負不可;因此遂得

$$\cos\alpha=-\frac{4}{5};\ \sin\alpha=-\frac{3}{5};\quad \delta=4.$$

故此直線之普通形式為:

$$x\left(-\frac{4}{5}\right)+y\left(-\frac{3}{5}\right)-4=0$$

觀此,可知其普通形式實由 $4x+3y+20=0$ 以 $K=-\frac{1}{5}$ 而得.

普遍言之,若欲使 $Ax+By+C=0$ 及 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta=0$ 代表同一直線,必先求一 K 以滿足

$$KA=\cos\alpha \qquad KB=\sin\alpha$$

換言之, $K^2(A^2+B^2)=1$

或 $$K=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

因 $KC=-\delta$ 爲一負數,故 K 中開方前面之符號必適合此條件,換言之,必須與 C 所有之符號相反而後可. 要之,直線方程式 $Ax+By+C=0$ 內之 A,B,C 與其普通形式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta=0$ 中之 α 與 δ, 其間有如下關係之成立:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \sin\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\delta$$

我們要把 $Ax+By+C=0$ 化爲普通形式,祇要乘以 $K=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 就是了.

§16 舉例

例一: 將 $5x-12y+100=0$ 化爲普通形式. 欲使其成 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta=0$, 必 $5K=\cos\alpha$, $-12K=\sin\alpha$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=169K^2=1$, 或 $K=\pm\dfrac{1}{13}$; 因欲使 $-\delta=K\cdot 100$, 故 K 必爲負數: $K=-\dfrac{1}{13}$. 於是得

$$\frac{5x-12y+100}{-13}=0$$

由此可知此直線與零點相去之距離 $\delta=100:13=7.7$cm；又因 $\cos\alpha=-5:13$； $\sin\alpha=12:13$. 故 α 必在 90° 與 180° 之間.

例二： 將 $y=mx+b$ 化為普通形式. 答案：

$\dfrac{mx-y+b}{\sqrt{1+m^2}}=0$ （式中 $\sqrt{1+m^2}$ 之符號與 b 之符號相反）

例三： 將 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 化為普通形式. 答案：

因 $bx+ay-ab=0$, 遂得 $\dfrac{bx+ay-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$.

§17 求一點與一直線相去之距離

設有一點 $P(x_1,y_1)$ 及一直線於此. 欲計算 $P(x_1,y_1)$ 與此直線相去之距離,當先分別兩種情形：

其一： $P(x_1,y_1)$ 與零點同在直線之一方如圖 (15) 所示. 圖中之 $PC=d$ 為我們所欲求的距離. 將 $OAPC$ 投影於 δ, 即得

$$\delta=OA\cos\alpha+AP\sin\alpha+d=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha+d$$

故 $$d=PC=-(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-\delta)\quad\cdots\cdots(1)$$

其二： $P(x_1,y_1)$ 與零點分處於直線之對方如圖 (16).

由此得 $$d+\delta=OA\cos\alpha+AP\sin\alpha$$

或　$d=(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-\delta)$ ………………………………… (2)

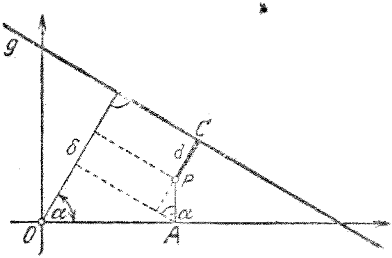


圖 (15)

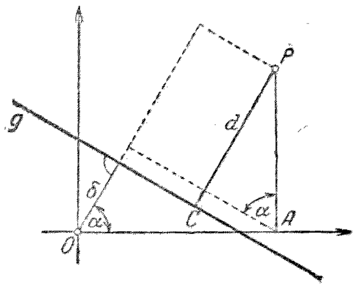


圖 (16)

觀公式(1)與(2),括弧內所含與直線之普通形式極相似,不過其中變數x與y,以P之坐標替代之罷了. 我們既用d以表$P(x_1,y_1)$與g相去之距離,d之爲一正數,自無疑義. 倘$P(x_1,y_1)$與零點同居直線之一方,則其距離如公式(1)所示爲

$$d=-(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-\delta) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

倘由零點觀察,$P(x_1,y_1)$居於直線之彼方,則欲知其距離,須在此更加一負號. 由是以觀,我們由d之符號可以斷定任何一點P與一直線相處之地位,不必作圖之後,始得知之.

要而論之,如有一點$P(x_1,y_1)$及一直線之方程式,我們欲知$l(x_1,y_1)$與直線相去之距離,第一步,將直線之方程

式化爲普通形式,第二步,將其中x,y代以P之坐標,第三步,將如是獲得之數加一負號,即爲我們所欲求的 d

例如有一直線之方程式如下:

$$Ax+By+C=0$$

$P(x_1,y_1)$與此相去之距離自爲

$$d=-\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

式中$\sqrt{A^2+B^2}$前之符號與C適相反. 苟d爲正數,則P與零點同處於直線之一方;苟d爲負數,分處直線之兩方;苟$d=0$,則P爲直線上之一點.

§18 舉例

例一: 求$P(5,8)$與$y=-0.5x+7$相去之距離.

因 $$0.5\,x+y-7=0$$

或 $$x+2\,y-14=0$$

故得 $$d=-\frac{5+2\cdot 8-14}{\sqrt{5}}=-\frac{7}{8}\sqrt{5}=-3.13\text{ cm.}$$

例二: 有一直線由零點與(10,7)相連而成;求$(-6,8)$與此直線相去之距離. 此直線之方程式爲$y=0.7x$或$7x-10\,y=0$,故

$$d=-\frac{7(-6)-10\cdot 8}{\sqrt{149}}=10 \text{ cm}$$

習題

1. 求零點與 $2x+3y-7=0$ 相去之距離.

2. 求 $P(4,3$ 與 $y=-0.9x+4.2$ 之相距.

 $P(4,3)$ 與 $y=\quad 0.4x+7$ 之相距.

3. 有一直線,由 $A(-5,2)$ $B(3,10)$ 兩點相連而成;求 $P(5,2)$ 與此直線之相距.

4. 求一三角形之高,苟其頂爲 $A(-5,2)$ $B(5,8)$ $C(7,-7)$.

5. 求兩平行直線 $y=0.5x+8$; $y=0.5x-4$ 之相隔.

6. 苟一直線在縱橫軸上之截段爲 a 與 b, 則零點與此直線之相距爲

$$d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

證之

§19 平分線之方程式

玆假定 $g_1=0$ 及 $g_2=0$ 爲兩直線之方程式,並假定其方程式已依前法化爲普通形式. 凡平分此兩直線間之角的直線,如圖 (17) 中之 w_1 及 w_2 叫做 $g_1=0$ 及 $g_2=0$ 兩直線之平分線. 我們在本節中所欲研討的問題,是怎g樣由$_1=0$, $g_2=0$ 以推知其平分線的方程式罷了.

試在平分線上〔如圖(17)中之 w_1〕任擇一點 $P(x,y)$, 根據定義,由 P 至 g_1 與 g_2 之距離必相等: $d_1=d_2$. 欲知 d_1 與 d_2, 祇將 P 之坐標代入 g_1 與 g_2 卽得,故 w_1 線上任何一點 P 之坐標都滿足 $g_1-g_2=0$, 且滿足此方程式之 x_1, y 都代表 w_1 上之點. 因此, $g_1-g_2=0$ 就是 w_1 的方程式. 至於平分線 w_2 上之任何一點,其與 g_1 及 g_2 之距離,就其絕對値言之,自是相等,惟就其符號言之,則適相反;因此 $d_1+d_2=0$, 故其方程式爲 $g_1+g_2=0$.

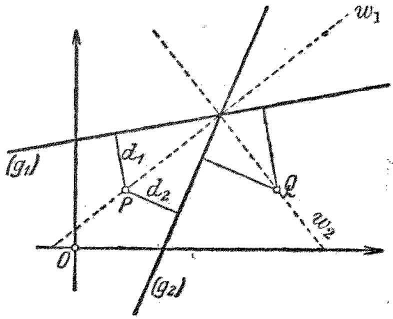


圖 (17)

例一: 求平分 $2x+9y-14=0$ 及 $6x+7y+20=0$ 兩直線之方程式. 答案:

$$g_1=\frac{2x+9g-14}{\sqrt{85}}$$

$$g_2=\frac{6x+7y+20}{-\sqrt{85}}$$

故其一之平分線爲 $\dfrac{2x+9y-14}{\sqrt{85}}-\dfrac{6x+7y+20}{-\sqrt{85}}=0$

或　$4x+8y+3=0$,其他為

$$\frac{2x+9y-14}{\sqrt{85}}+\frac{6x+7y+20}{-\sqrt{85}}=0$$

或　$2x-y+17=0$.

例二：如有兩點 $P(3,11)$ 及 $Q(7,9)$,則平分 OP 與 OQ 間所成之銳角(acute angle)之直線為 $y=2x$.

§20　直線一束

為求推論之便利,我們常用 G_1, G_2 等符號以代表下列方程式之左方:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ 及 } A_2x+B_2y+C_2=0$$

因此

$$G_1=0 \text{ 及 } G_2=0$$

可視為兩直線之方程式. 於是我們復得如下之認識. 倘 n 為一任何實數,則

$$G_1+n\,G_2=0$$

亦為一直線,且必經過 $G_1=0$, $G_2=0$ 兩直線之相交點. 何則,因

$$G_1+n\,G_2=(A_1+n\,A_2)x+(B_1+n\,B_2)y+C_1+n\,C_2=0$$

為一初次含有 x 與 y 之方程式,故必代表一直線. 復次,

$G_1=0, G_2=0$ 兩直線之相交點既滿足此兩方程式,當然亦滿足 $G_1+nG_2=0$, 換言之,亦爲此 $G_1+nG_2=0$ 上之一點.

以上假定n爲一任何實數. 不與n爲何數, $G_1+nG_2=0$ 必代表一經過 $G_1=0$ 及 $G_2=0$ 兩線之相交點之直線. 倘n之値任意變化,但始終爲一實數,則 $G_1+nG_2=0$ 自代表種種不同之直線,惟此種直線,無一不經過$G_1=0$ 及 $G_2=0$ 兩直線之相交點. 在平面中,如有種種不同之直線經過一點者叫做一束直線.

例一: 將 $3x-4y+4=0$ 及 $4x+3y-8=0$ 兩直線之相交點與零點相連,得一直線;求其方程式. 凡直線之經過如上兩直線之相交點者,必有如下之形式:

$$3x-4y+4+n(4x+3y-8)=0$$

又因其經過零點,故　$4+n(-8)=0$ 或 $n=0.5$

因此得　$$3x-4y+4+0.5(4x+3y-8)=0$$

或　$$5x-2.5y=0 \qquad y=2x$$

例二: 將 $y=2x-7$ 及 $y=-3x+1$ 兩直線之相交點與(4,5)相連,得一直線;求其方程式. 凡直線之經過如上兩直線之相交點者必有如下之形式:

$$2x-y-7+n(-3x-y+1)=0$$

又因 (4,5) 亦在此直線之上,故

$$8-5-7+n(-12-5+1)=0$$

$$n=-\frac{1}{4}$$

故
$$2x-y-7-\frac{1}{4}(-3x-y+1)=0$$

$$11x-3y-29=0$$

§21 坐標軸上之不同單位

我們製圖的時候,在縱橫軸上所取的單位不必相同;且應用不同的單位,反能使製圖更覺簡易,觀於下例,可以瞭然. 今試假定在橫軸上一cm.之長等於 μ_1 單位,在縱軸上一cm之長爲 μ_2 單位,我們以此爲基,也可爲一已知之函數作圖. 不過其圖與應用同一cm作單位時所作者顯然有不同之點. 若縱橫軸上之單位同爲1 cm時,某點之坐標爲 (x,y);今橫軸上改用 $\frac{1}{\mu_1}$,縱軸上改用 $\frac{1}{\mu_2}$ 作單位,則某點之坐標必爲 $\left(\frac{x}{\mu_1},\frac{x}{\mu_2}\right)$. 由是以推,任何一點之坐標 (x,y),與改用不同單位後之坐標 (x',y'),其間必有如下關係之成立:

$$x=\mu_1 x'$$

$$y=\mu_2 y$$

故 $y=f(x)$, 自縱橫軸上改用不同單位後,將一變而爲

$$\mu_2 y'=f(\mu_1 x').$$

例一: 試在縱橫軸上用不同之單位作 $y=mx+b$ 之圖. 果如是,我們必將 x 代以 $\mu_1 x'$, y 代以 $\mu_2 y'$, 此直線遂爲 $\mu_2 y'=m\mu_1 x'+b$, 或

$$y'=m\frac{\mu_1}{\mu_2}x'+\frac{b}{\mu_2}$$

故仍爲一直線,惟其斜度非 m 而爲 $m\frac{\mu_1}{\mu_2}$, 其在縱軸上之截段非 b 而爲 $\frac{b}{\mu_2}$ 了.

例二: 假定 x 之變化區域爲 $2\leqq x\leqq 4$, 試作 $y=80x+43$ 之圖. 當 $x_1=2$ 時, $y_1=203$; $x_2=4$ 時, $y_2=363$. 是 x 之變化極微: $x_2-x_1=2$: 而 y 之變化極大: $y_2-y_1=160$. 因此之故,製圖既不簡便,且不正確. 倘在橫軸上以 $\mu_1=0.1$ 作單位,在縱軸上以 $\mu_2=10$ 作單位,如是則 $x_2-x_1:\mu_1=20$ cm $y_2-y_1:\mu_2=16$ cm. 此層困難即可避去了.

第四章　坐標軸之平移及旋轉

§22　坐標軸之平移

我們將縱橫兩坐標軸不變其固有方向而移動之,使零點移於$O'(h, k)$.　如是則任何一點P,其固有坐標爲(x, y)者,現在之坐標爲(x', y').　其前後坐標之關係顯然如下:

$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

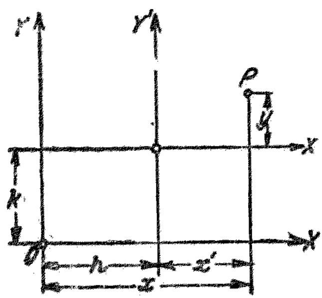


圖　(18)

這兩公式,叫做坐標之平移公式.　倘有一曲線之方程式如下 $y=f(x)$;我們若將坐標軸如上平移之,則其方程式爲　$y'+k=f(x'+h)$.

例一:　有一經過零點之直線 $y=mx$.　倘將兩軸平移,使零點移於$(-x_1, -y_1)$,求此直線之方程式.　將x代以 $x'-x_1$, y代以 $y'-y_1$ 得 $y'-y_1=m(x'-x_1)$.　既得此方程式,我們不妨仍用 $x\ y$ 之符號以代表變數,故此方程

式可寫作 $y-y_1=m(x-x_1)$

例二：有一曲線如 $y=0.1x^2-0.8x-4.4$；將坐標軸平移，使零點移於 $(4,-6)$，求其方程式. 答案：

$y-6=0.1(x+4)^2-0.8(x+4)-4.4$ 簡化之，得 $y=0.1x^2$

§23 坐標軸之旋轉

我們將縱橫兩軸依正方向（與計時針旋轉之方向相反）旋轉之，如圖(19)所示，如是則任何一點 P，其固有坐標爲 (x, y)，現有之坐標爲(x', y'). 其前後坐標間之關係，我們不難發見. 試叫 P 與零點之距離爲 r，觀圖(19)可知

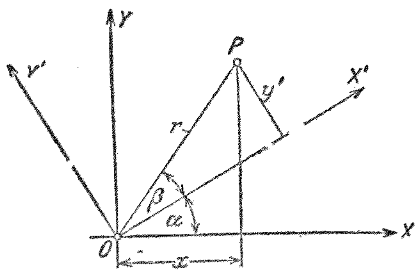


圖 (19)

$$x=r\cos(\alpha+\beta)$$

$$y=r\sin(\alpha+\beta)$$

或 $$x=r\cos\alpha\cos\beta-r\sin\alpha\sin\beta$$

$$y=r\sin\alpha\cos\beta+r\cos\alpha\sin\beta$$

因 $$x'=r\cos\beta \quad y'=r\sin\beta$$

故得 $$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

這兩式叫做坐標之旋轉公式．倘有一曲線之方程式 $y=f(x)$，我們若將坐標軸如上旋轉之而欲求得其方程式，祇要將其中之 x 代以 $x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$，其中之 y 代以 $x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$ 就好了．既得此方程式之後，不妨仍用 x, y 以代表變數．

例一：有一直線如 $y=b$；將兩軸依前法轉一 α 之角，求其方程式．

答案：$x\sin\alpha+y\cos\alpha=b$ 或 $y=-\tan\alpha\cdot x+\dfrac{b}{\cos\alpha}$

例二：若將縱橫兩軸依前法轉一 $(-45°)$ 之角，則 $x^2-y^2=a^2$ 將如何變化．因 $\cos\alpha=\cos(-45°)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin\alpha=\sin(-45°)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$，故

$$x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x'+y')=x$$

$$x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(-x'+y')=y$$

$x^2-y^2=a^2$ 遂變爲

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2\left(x'+y'\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2\left(-x'+y'\right)^2=a^2$$

或 $$x'y'=\frac{a^2}{2}$$

若仍用 x,y 以表變數,則 $$xy=\frac{a^2}{2}$$

讀者試作圖以明如上之結果.

第五章　圓

§24　圓之方程式

設有一圓，其中心爲 $M(h, k)$，半徑之長爲 r. 於是圓線上任何一點 $P(x, y)$ 與 M 相去之距離必相等. 觀圖 (25)，知

$$MA^2 + AP^2 = r^2$$

又因

$$MA = x - h$$

$$AP = y - k$$

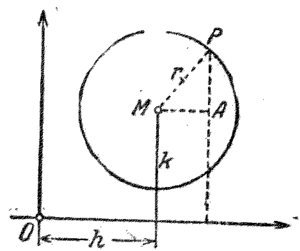


圖 (20)

故 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ……………… (1)

於此可見圓之中心爲 $M(h, k)$，半徑爲 r 者，其方程式必如 (1) 所示；圓線上任何一點之坐標必滿足 (1)，且滿足 (1) 者無不代表圓線上之一點.

既明以上所說，凡圓之中心在零點者，換言之，$h=0$ $k=0$，則其方程式必爲

$$x^2 + y^2 = r^2$$

我們將公式 (1) 中之平方展開之得

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

或
$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

反之,倘x與y之間果有如下關係之存在:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其中a, b, c表示常數;我們將式之左右各加入

$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$,可將上式化為

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

由此知其亦代表一圓,至其中心$M(h, k)$及半徑r則為

$$h=-\frac{a}{2} \quad k=-\frac{b}{2} \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

惟必 $a^2+b^2>4c$. 倘 $a^2+b^2=4c$, 則圓之半徑為0;倘$a^2+b^2<4c$, 則其所代表者非一實圓(Reeller Kreis). 要而言之,若$a^2+b^2>4c$, 則有無窮多之點滿足(2),此無窮多之點,相連而成一圓;若$a^2+b^2=4c$, 則僅有一點滿足(2);若$a^2+b^2<4c$, 則平面上無一點能滿足(2).

我們細看公式(2),其最堪注意者,有二:

1. x^2與y^2兩項之係數完全相等且不等於0.

2. $x \cdot y$之積未出現於方程式之內.

圓線方程式之特點就在此

§25 舉例

例一: 有一圓,其中心爲 $(-3;2)$, 半徑爲 $r=4$; 求其方程式. 中心既爲 $(-3;2)$, 故 $h=-3$, $k=2$, 因此

$$(x+3)^2+(y-2)^2=16$$

此圓與橫軸相交之點,可由下法知之. 當其與橫軸相交時, $y=0$, 故 $\qquad (x+3)^2+(0-2)^2=16$

由此得知其與橫軸相交於兩點

$$x_1=2\sqrt{3}-3=0.464 \qquad x_2=-2\sqrt{3}-3=-6.464$$

例二: 問 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 是否代表一圓. 將此公式化爲 $\qquad (x^2-4x)+(y^2-2y)=20$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=20+4+1=25$$

故爲一圓,其中心爲 $M(2,1)$, 半徑爲 $r=5\text{cm}$.

例三: 有一方程式如 $x^2+y^2+8x+10y+41=0$. 此式亦可寫爲 $\quad (x+4)^2+(y+5)^2=16+25-41=0$

於此可知僅有一點 $x=-4$, $y=-5$ 滿足之. 在此情形之下,可說其圓縮爲一點.

例四: 如 $\qquad x^2+y^2+6x-4y+16=0$

或 $\qquad (x+3)^2+(y-2)^2=9+4-16=-3$

無一實點 (x,y) 能滿足之;因 x,y 如爲實數, $(x+3)^2+(y-2)^2$

無論如何不能是一負數．故此方程式不能代表一實圓．

例五：有一經過 $A(-2,-1)$, $B(0,-5)$, $C(6,3)$ 三點之一圓；求其方程式．圓之方程式必可化爲

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

之形式．A, B, C 三點旣在此圓之上，其坐標自必滿足此方程式：

$$4+1-2a-b+c=0 \ (A)$$

$$0+25-0-5b+c=0 \ (B)$$

$$36+9+6a+3b+c=0 \ (C)$$

將此三式解答之後，得 $a=-6$, $b=2$, $c=-15$．於是

$$x^2+y^2-6x+2y-15=0$$

或
$$(x-3)^2+(y+1)^2=25$$

故爲一圓，其中心爲 $M(3,-1)$，半徑爲 $r=5$．

例六：有一圓，其半徑爲 r，其中心在正橫軸之上，圓之本身復與縱軸相切．求其方程式．根據如上所要求，知 $h=r$, $k=0$，故

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

或
$$y^2=x(2r-x)$$

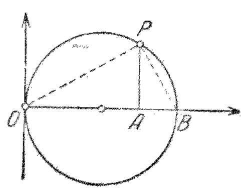


圖 (21)

此方程式亦可由右圖推知之：

$$PA^2=OA\cdot AB$$

故 $$y^2=x(2r-x)$$

例七: 求 $x^2+y^2=16$ 與 $y=0.5x+2$ 相交之點. 兩者之相交點必同時處於 $x^2+y^2=16$ 及 $y=0.5x+2$ 之上,故其坐標必同時滿足此兩方程式.

將 $y=0.5x+2$ 代入 $x^2+y^2=16$, 得

$$5x^2+8x-48=0$$

由是得兩相交點: $A(2.4, 3.2)$, $B(-4,0)$. 讀者試作圖以證實之.

習題

1. 有一經過$(-4,3)$之圓,其中心在零點;求其方程式.

2. 有一圓與 $4x+5y-40=0$ 相切,又其中心在零點;求其方程式.

3. 與正負之縱橫軸相切於零點之四種圓,其半徑各爲 r 者,求其方程式.

4. 作一圓,將習題(3)之四圓包括於其中(或說,將習題(3)之四圓外切),並求其方程式.

5. 求 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 與坐標軸相交之點.

6. 有一與縱橫正軸相切之圓,其半徑爲 r;求其方程式.

7. 作一圓,其中心在零點,復外切習題(6)之圓,並求其方程式.

8. 作一圓,其中心在零點,復內切習題(6)之圓,並求其方程式.

9. 求下列諸圓之中心及半徑:

a. $x^2+y^2-2x+2y-14=0$

b. $x^2+y^2-8x-9=0$

c. $2x^2+2y^2+10x-2y-5=0$

d. $x^2+y^2-10x+8y=0$

e. $4x^2+4y^2-28x+28y+49=0$

f. $x^2+y^2-8x+2y+19=0$

g. $x^2+y^2-8x+2y+17=0$

h. $a(x^2+y^2)+b(x+y)+c=0$

10. 有經過

a.	$A(-5,2)$	$B(5,2)$	$C(2,-5)$
b.	$A(0,0)$	$B(0,4)$	$C(7,0)$
c.	$A(0,3)$	$B(-2,2)$	$C(6,6)$
d.	$A(-2,2)$	$B(4,3)$	$C(10,0)$

之四圓,各求其中心及半徑.

11. 有一圓,與 $y=-3x$ 相切於零點且經過 $(0,8)$; 求其方程式.

12. 有一圓與 $4x-3y-8=0$, 其中心在 $(-4,2)$; 求其方程式.

13. 作 $x^2-8y+y^2=0$ 及 $y=0.5x+2$ 之圖,並求兩者相交之點.

14. 有一圓經過 $(2,-2)$ 及 $(8,4)$ 兩點,圓之中心在橫軸之上;求其方程式.

15. 有一圓經過 $P(2,5)$ 且與縱橫兩軸相切;求其方程式.

16. 有一圓與縱橫兩軸相切,其中心在 $y=0.5x+4$ 之上; 求其方程式.

17. 有一 $x^2+y^2-8x-4y-5=0$ 之圓,求其直徑之與橫軸成一 45° 之角者立一方程式.

18. 有一經過 $(1,2)$, $(-3,6)$ 兩點之一圓,其半徑為 $r=4$ cm.; 求其

方程式.

19. 有一圓,與 $y=\frac{4}{3}x$ 及正橫軸相切,圓之半徑爲 2 cm.; 求其方程式.

20. 有一經過 $A(-6,0)$, $B(0,3)$, $C(6,0)$ 三點之一圓,求圓之半徑. 又當 $x=2$ 及 $x=4$ 時求圓之高.

21. 有一圓,其中心爲 $M(0,12)$, 半徑爲 $r=10$ cm. 當 $x=2$; 4; 及 6 cm 時,問下半圓與橫軸之距離.

22. 有一圓,其中心爲 $M(0,r)$, 半徑爲 r. 作圓之垂直直徑,直徑之上端 B 與 $A(a,0)$ 相連. 求 AB 與此圓之相交點. 又如 $a\to\infty$, 此相交點如何變化.

§26 圓之切線

在第十四節第三例中,我們已爲 $x^2+y^2=r^2$ 的切線立一方程式. 倘 (x_1, y_1) 爲兩者相切之點,則切線之方程式據前所說爲

$$xx_1+yy_1=r^2$$

如將圓之中心移於 $(-h; -k)$, 則圓之方程式爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

其切線之方程式爲

$$(x-h)(x_1-h)+(y-k)(y_1-k)=r^2$$

這是顯而易見之理,不必細說了.

§27 舉例

例一： 有一圓 $x^2+y^2=72.25$. 就其中兩點 $A(-4,7.5)$, $B(7.5,4)$ 作兩切線；求切線之方程式，並求其間之角.

答案：

$$在 A 點上之切線：\quad -4x+7.5y=72.25$$

$$在 B 點上之切線：\quad 7.5x+4y=72.25$$

前者之斜度爲 $m_1=4:7.5$，後者之斜度爲 $m_2=-7.5:4$，故 $m_1m_2=-1$，兩切線實相垂直.

例二： 有一圓，其中心在零點，半徑爲 r；復作一平方以外切之如圖 (23). 假定 $OA=AE$，又假定 CD 爲其在 P 點之切線；求 P 之坐標及 BC 與 DE 之長. 直線 AB，因其經過 $A(\frac{r}{2},0)$ 及 $B(r,r)$，故有如下之方程式：

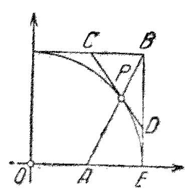


圖 (22)

$y=2x-r$. 求 $x^2+y^2=r^2$ 與 $y=2x-r$ 相交之點，得 P 之坐標 $I(\frac{4}{5}r,\frac{3}{5}r)$. 於是切線 CD 之方程式爲

$$\frac{4}{5}rx+\frac{3}{5}ry=r^2$$

或 $4x+3y=5r$. 求此切線與 $y=r$ 及 $x=r$ 之相交點，可知

$$BC=\frac{1}{2}r \qquad DE=\frac{1}{3}r$$

例三：　求 $x^2+y^2=r^2$ 之切線，其斜度爲 m.　凡有斜度 m 之直線，其方程式必爲 $y=mx+b$，式中 b 爲一未定數．求 $x^2+y^2=r^2$ 與 $y=mx+b$ 相交，其相交點之坐標必同時滿足此兩方程式；由此得

$$x=\frac{-bm\pm\sqrt{b^2m^2-(1+m^2)(b^2-r^2)}}{1+m^2}$$

既要求 $y=mx+b$ 爲 $x^2+y^2=r^2$ 之切線，自必要求其相交於一點，故　$b^2m^2-(1+m^2)(b^2-r^2)=0$

於是得 $b=\pm r\sqrt{1+m^2}$.　故 $x^2+y^2=r^2$ 之切線，其斜度爲 m 者，爲

$$y=mx+r\sqrt{1+m^2}$$

$$y=mx-r\sqrt{1+m^2}$$

例四：　由 $P(a,b)$ 作 $x^2+y^2=r^2$ 之切線．　苟此切線與圓相遇於 (x_1,y_1) 則其方程式必爲

$$xx_1+yy_1=r^2$$

但 x_1 與 y_1 尙爲未知；所知者，此切線必經過 $P(a,b)$

$$ax_1+by_1=r^2$$

及 (x_1,y_1) 必在 $x^2+y^2=r^2$ 之上：　$x_1^2+y_1^2=r^2$

由此兩式可以知 x_1 與 y_1，故切線之方程式也可知道了．

習 題

1. 經過(7,1),作 $x^2+y^2=25$ 之切線,求其方程式.

2. 作 $x^2+y^2=16$ 之切線與 $y=2x+8$ 相平行者. 求其方程式.

3. 在 $x^2-6x+y^2+4y=0$ 與橫軸相交之點,作此圓之切線並求其方程式.

4. 由零點作直線與 $x^2+y^2-16x+48=0$ 相切,求其方程式.

5. 在 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 與 $x=6$ 相交之點,作此圓之切線;求其方程式.

6. 有一圓,與橫軸及 $y=x$ 相切並知其半徑爲 $r=2$cm. 其中心在橫軸之上;求其中心之坐標.

7. 有一圓,與 $2x-9y+30=0$ 及 $6x+7y-14=0$ 相切,其中心在 $y=x-1$ 之上;求中心之坐標.

8. 有一圓 $x^2+y^2=16$ 及一點 $P(-10,0)$;由 P 作直線與圓相切,求其方程式.

9. 有一圓 $x^2+y^2=25$ 及一點 $P(13,0)$: 由 P 作圓之切線,求其方程式.

10. 試規定 $y=-x+b$ 中之 b,使此直線爲 $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ 之切線.

§28 圓線一束

在平面中,凡一切經過兩固定點之圓叫做圓線一束,或簡稱圓束. 如有兩圓:

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$$

並以K_1及K_2代表如上兩方程式之左方，則此方程式亦可縮寫如下：

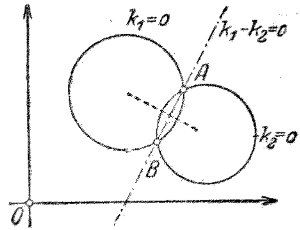


圖 (23)

$$K_1=0 \qquad K_2=0$$

於是苟以n表一任何實數，則

$$K_1+n\,K_2=0$$

亦必為一圓，且為經過$K_1=0$及$K_2=0$相交點之一圓。

因 $$K_1+nK_2=(1+n)x^2+(1+n)y^2+(a_1+na_2)x+(b_1+nb_2)y$$

$$+c_1+nc_2=0$$

其中x^2與y^2兩項之係數完全相同，且$x\cdot y$之積未出現於方程式內，故據前所論，必為一圓無疑．復次，$K_1=0$及$K_2=0$如相交於A,B兩點，則此兩點之坐標必同時能使$K_1=0$，$K_2=0$之滿足，因此亦必滿足$K_1+nK_2=0$；換言之，$K_1+nK_2=0$，不論其中n為任何實數，必經過A,B兩點．

§29　舉例

例一：　經過零點及$x^2+y^2=16$與$x^2+y^2-8x-6y+9=0$

兩圓之相交點作一圓,求其方程式. 所求之圓必有如下之方程式

$$x^2+y^2-16+n(x^2+y^2-8x-6y+9)=0$$

式中之n爲未定數;我們如是規定之,使如上之圓復經過零點,因此必求:

$$-16+n9=0 \quad 或 \quad n=\frac{16}{9}$$

故我們所欲求的方程式爲

$$25(x^2+y^2)-128x-96y=0$$

例二: 若$K_1+nK_2=0$中之$n=-1$時,考此方程式之意義. 若$n=-1$

$$K_1-K_2=(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0$$

這是一直線之方程式;因其經過$K_1=0$及$K_2=0$之相交點,故爲此兩圓之公共割線.

習 題

1. 有兩圓如 $K_1=(x-h_1)^2+(y-k_1)^2-r_1^2=0$ 及 $K_2=(x-h_2)^2+(y-k_2)^2-r_2^2=0$. 求一點,由此作相等之直線與如上兩圓相切;並證明能滿足此條件之點,爲數無窮,且自成一直線(叫做指線Potenzlinie)與連結兩圓中心之直線相垂直.

2. 求 $x^2+y^2-4x-4y-8=0$ 及 $x^2+y^2-12x+4y+15=0$ 兩圓之公共割線並求其相交點之坐標.

3. 有一圓,經過習題2中兩圓之相交點,其中心在縱軸之上;求其方程式.

§30　極坐標

直角坐標之用,所以規定點之位置;惟點之位置,不必藉直角坐標始得規定.除直角坐標之外,又有所謂極坐標(Polarkoordinaten)者.我們任擇一點O,叫做極點,由極點作一直線叫做極軸如圖(24)之P.於是平面中任何一點P之位置,可由其與極點相去之距離r及r與極軸所成之正角(所謂正,乃將極軸依正方向旋轉而成)ϕ以規定之.

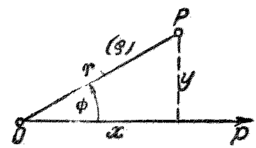


圖 (24)

我們既可用兩種不同之坐標以規定同一之點,此不同坐標之間必有彼此溝通之關係.直角坐標與極坐標間之關係,我們不難發見.我們將直角坐標之零點與極坐標之極點相合,正橫軸於極軸相合,遂知

$$x=r\cos\phi$$

$$y=r\sin\phi$$

倘有一曲線如$y=f(x)$,將其中之直角坐標x代以$r\cos\phi$,y代以$r\sin\phi$,即得一應用極坐標之方程式.反之,如已用極坐標建立一方程式,復欲改用直角坐標,則可

應用如下之關係：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\phi=\frac{y}{x}$$

$$\cos\phi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\phi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

§31 舉例

例一： 有一點 P，其直角坐標爲 $P(-5,8)$；求其極坐標. 答案： $r=\sqrt{(-5)^2+8^2}=\sqrt{89}=9.434$

$$\tan\phi=8:(-5)=-1.6 \quad 故\ \phi=180^\circ-58^\circ=122^\circ$$

例二： 某點之極坐標爲 $r=10, \phi=204^\circ$；求其直角坐標. 答案： $x=10\cos 204^\circ=-10\cos 24^\circ=-9.135$

$$y=10\sin 204^\circ=-10\sin 24^\circ=-4.067$$

例三： 改用極坐標以立 $x^2+y^2=a^2$ 之方程式.

$$(r\cos\phi)^2+(r\sin\phi)^2=a^2 \quad 或 \quad r=a$$

即爲其方程式. 據此不論 ϕ 如何變化，凡圓線上各點與極點相去之距離必始終爲 a.

例四： 改用極坐標以立 $x\cdot y=\frac{a^2}{2}$ 之方程式. 答案：

$$r^2 \sin\phi \cos\phi = \frac{a^2}{2} \quad 或 \quad r = a\sqrt{\frac{1}{\sin(2\phi)}}$$

§32 圓之極形方程式

設有一圓，其中心在(h, k)，半徑爲a：

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

我們若改用極坐標r及ϕ，將其中x代以$r\cos\phi$，y代以$r\sin\phi$，即得$(r\cos\phi-h)^2+(r\sin\phi-k)^2-a^2=0$或

$$r^2-2r(h\cos\phi+k\sin\phi)+(h^2+k^2-a^2)=0$$

這是圓之極形方程式．就r而論，這是一個兩次方程式；即一ϕ有兩r之值r_1與r_2，換言之，有兩點如圖(25)中之P_1, P_2與之相應：

$$r=h\cos\phi+k\sin\phi\pm\sqrt{D}$$

$$D=(h\cos\phi+k\sin\phi)^2-(h^2+k^2-a^2)$$

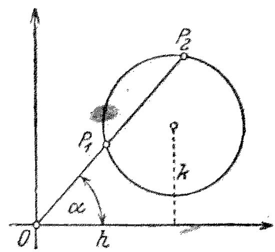


圖 (25)

若$r_1=r_2$，則經過0之直線與圓相切，因之$D=0$；此切線之方向ϕ，遂由上式可以規定之．若$D<0$，則無一實數r，即無一實點與之相應．我們在下節中將討論各種不同之情形．

§33 舉例

例一：有一經過極點之圓，其經過極點之直徑即

爲極軸．　如是則$h=a$　$k=0$

$$r^2-2ra\cos\phi=0$$

或
$$r(r-2a\cos\phi)=0$$

因O在圓之上,其r始終爲零．至其他之點均滿足

$$r=2a\cos\phi$$

這叫做此圓之極形方程式,由圖(26)亦可推知之．

例二：　有一經過極點之圓,其經過極點之直徑與極軸成一α之角．〔觀圖(27)〕如例一中之ϕ代以$\phi-\alpha$即得其極形之方程式：

$$r=2a\cos(\phi-\alpha)$$

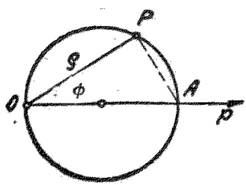


圖　(26)

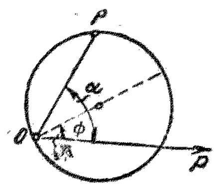


圖　(27)

例三：　有一未嘗經過極點之圓,其通過極點之直徑即爲極軸．　如是則$h=l$, $k=0$,圓之極形方程式遂爲

$$r^2-2lr\cos\phi+l^2-a^2=0$$

這方程式由圖(28)亦可推知之．

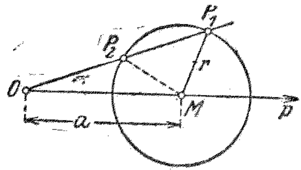


圖 (28)

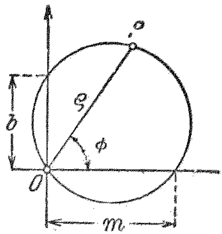


圖 (29)

例四：有一經過極點之圓，其在縱橫軸上之截段為 m 與 n. 〔觀圖 (29)〕如是則 $h=\dfrac{m}{2}$, $k=\dfrac{n}{2}$, $a^2=\dfrac{m^2+n^2}{4}$ 故其極形方程式為

$$r^2-r\,(m\cos\phi+n\sin\phi)=0$$

或
$$r=m\cos\phi+n\sin\phi$$

習題

1. 有一圓,其半徑為 $a=5$ cm, 中心與極點之距離為 10 cm., 又 $OM=$ 極軸. 求圓之極形方程式. 又問 $\phi=\pm0°, 5°, 10°, 30°$ 時 r 之值幾何.

2. 在正橫軸上由零點作一線段 OA, 其長為 a; $OA=a$; 在正縱軸上亦由零點作一線段 OB, 其長為 b, $OB=b$. 經過零點,任意作一直線 g. 由 A,B 兩點, 作 AP_1, BP_2 與 g 相垂直. 求此種 P_1P_2 諸線之中點.

3. 有一圓,與縱橫軸相切, 其半徑為 a 如圖 (30); 問割線 AB 之長, 怎樣隨 a 及 ϕ 而變.

4. 有兩圓, 半徑相等; 其一之中心在其他之圓周上如圖 (31).

$OM_1=OM_2$, O=極點, M_1M_2=極軸, 試證 $x=a\cos\phi$ (式中之 a 爲兩圓之半徑).

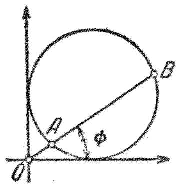


圖 (30)

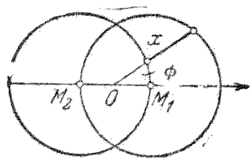


圖 (31)

§34 方程式之又一形式

如上所論,我們可用直角坐標,將一曲線以一方程式 $y=f(x)$ 或一隱函數 $F(x,y)=0$ 以代表之,例如 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 或 $x^2+y^2-r^2=0$. 復次,我們可用極坐標將方程式化爲 $r=f(\phi)$, 例如 $r=a\cos\phi+b\sin\phi$.

除此以外,我們復有一種建立方程式之法;即以坐標 x 與 y 作爲其他一變數如 t 之函數:

$$x=\phi(t)$$

$$y=\phi(t)$$

這兩種函數即所以明示 x 與 y 怎樣變化的法則; x 與 y 既循一確定的法則而變,其所代表之點即隨之而描寫一曲線,故此兩式可作爲曲線之方程式. 變數 t 亦稱輔變數. 我們倘由兩式中將輔變數 t 消去,即得一

y與x間之關係,這關係無他,就是用直角坐標所建立的方程式,故兩種形式之間,可以互相溝通;觀於下例,更可瞭然.

§35 舉例

例一: 在圓線上之任何一點 $P(x, y)$, 其坐標〔觀圖(31)〕x與y必滿足

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

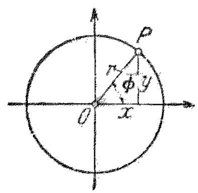


圖 (32)

式中之r表半徑之長,ϕ為一輔變數.

將兩式平方後相加,卽得 $x^2 + y^2 = r^2$.

例二: 若圓之中心在$M(h; k)$,我們用一輔變數ϕ可立其方程式如下:

$$x = h + r \cos \phi$$

$$y = k + r \sin \phi$$

若將式中之ϕ作爲常數,r作爲變數,則兩式所代表者爲一經過(h, k)且具有斜度 $\tan \phi$ 之直線,因由兩式消去r,得

$$y - k = \tan \phi \, (x - h)$$

例三: 作一長方形如圖(33),其一邊之長爲a,他邊

之長為b;並假定OD與橫軸相合,OA與縱軸相合. 取C,B兩點,要求$CD=na$, $BD=nb$, n為<1之數. 連A與B兩點,並由C作一直線與AB相垂直.

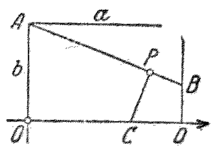


圖 (33)

當n任意變化時,問P將隨何公例而變. 觀圖(31)可知AB之方程式為

$$y=-\frac{(1-n)b}{a}x+b$$

PC之方程式為 $y=\frac{a}{(1-n)b}[x-a(1-n)]$

將兩式中之n消去,得

$$x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{b}y=a^2$$

故$P(x, y)$實循一圓之軌跡而變,圓之中心在

$\left(0; -\frac{a^2-b^2}{2b}\right)$, 半徑為$r=\frac{a^2+b^2}{2b}$.

例四: 有一點$P(x, y)$在平面中運動,惟運動之時,其與兩固定點A與B之距離之比e始終不變;果如是,P究隨何公例而變. 假定$AB=2a$, 並以此線段之中點作為零點,AB與橫軸相合,如是則$AP^2=(x-a)^2+y^2$, $BP^2=(x+a)^2+y^2$. 既要求$AP:BP=e=$不變,故

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=e^2$$

由此得

$$(1-e^2)(x^2+y^2)-2a(1+e^2)x+a^2(1-e^2)=0$$

這是一圓之方程式,其中心在橫軸之上. 若 $e=0.5$

$AB=6$, 則 $r=4$ cm; $h=5$, $k=0$.

第六章 拋物線

§36 拋物線之定義及其方程式

在平面中任意擇一固定之點如圖(34)中之F及一固定之直線如圖中之l. 凡一切與F及l相距等遠之點相聚而成之曲線叫做拋物線. F叫做焦點,l叫做準線.

既明如上之定義,我們卽得一簡便之法以製拋物線之圖. 作一直線g,與l相平行,其與l相去之距離爲r;更以r爲半徑,F作中心,畫一圓. 此圓與g相交之點,則圖中之P與P_1必爲拋物線上之點無疑,因

$$PF=PA.$$

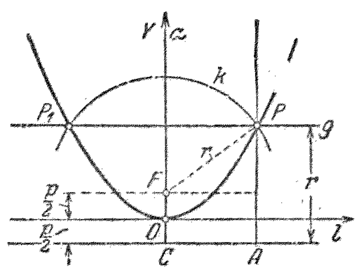


圖 (34)

經過F,作一直線與l相垂直叫做a. 其中FC一段之中點,卽圖中之O,顯然爲拋物線之最低點,亦稱頂點. FC一段之長,稱做P;於

是$FO=OC=\frac{P}{2}$,觀圖,可知拋物線對a實相對稱.因此,a叫做拋物線之軸,PF叫做焦線.凡經過拋物線之任何一點,與其軸相平行之直線都叫做拋物線之直徑.

我們倘欲爲拋物線立一方程式,最好以其頂點作爲直角坐標之零點,以經過零點之切線作爲橫軸.如是則拋物線上任何一點之坐標,因$PF=PA$之故,又因

$$PF=\sqrt{\left(y-\frac{P}{2}\right)^2+x^2}$$

$$PA=y+\frac{P}{2}$$

必滿足

$$\sqrt{\left(y-\frac{P}{2}\right)^2+x^2}=y+\frac{P}{2}$$

由此化簡得

$$y=\frac{1}{2P}x^2$$

這就是拋物線的方程式.凡拋物線上任何一點,其坐標必滿足此函數關係,且滿足此關係之x,y無一不代表拋物線上之點.

細觀如上之方程式,可知拋物線之形式,實隨P而定.爲便於討論之故,使$\frac{1}{2}P=a$

則

$$y=ax^2$$

當 $a>0$ 時,其線向上; $a<0$ 時,其線向下〔圖 (35)(36)〕惟各經過零點. 至若將 x 與 y 對調後所得之曲線

$$x=ay^2$$

其形狀觀於圖 (37) 及 (38) 亦可瞭然.

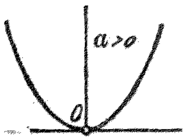


圖 (35)

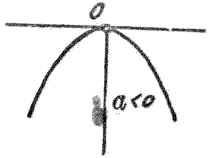


圖 (36)

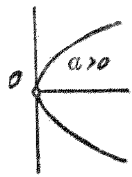


圖 (37)

圖 (38)

(35) $y=ax^2$ $a>0$ (36) $y=ax^2$ $a<0$

(37) $x=ay^2$ $a>0$ (38) $x=ay^2$ $a<0$

§37 舉例

例一: 有一拋物線,經過 (10, 10),其頂點爲零點;其經過頂點之切線即爲橫軸;求其方程式. 凡以頂點爲零點,以經過零點之切線爲橫軸者必有如下之方程式: $y=ax^2$ 又因其經過 (10, 10) 之故, $10=100a$, 故 $a=0.1$ 於是遂有如下之形式: $y=0.1x^2$. 其焦點,因

$$a=\frac{1}{2P}=0.1=\frac{1}{10}, \text{故在} \frac{P}{2}=OF=2.5\text{ cm}.$$

例二: 有一拋物線 $y=ax^2$, 經過 (x_1, y_1), 求其方程式.

$y_1=ax_1^2 \quad a=\frac{y_1}{x_1^2}$ 故其方程式爲

$$y=\frac{y_1}{x_1^2}x^2 \quad 或 \quad \frac{y}{y_1}=\frac{x^2}{x_1^2}$$

§38 平行之割線

欲求一直線 $y=mx+b$ 與一拋物線 $y=ax^2$ 相交,因相交點之坐標同時滿足此兩方程式,故必求

$$y=mx+b$$

與

$$y=ax^2$$

之同時成立,換言之,求 $ax^2=mx+b$

由此得滿足此方程式之兩根:

$$x_1=\frac{m+\sqrt{m^2+4ab}}{2a}$$

$$x_2=\frac{m-\sqrt{m^2+4ab}}{2a}$$

這就是相交點之橫坐標. 由是以論, $y=mx+b$ 與 $y=ax^2$ 至多有兩相交之點;苟 $m^2+4ab>0$, 則兩者在兩不同之實點相交;苟 $m^2+4ab<0$, 則相交於虛點;苟 $m^2+4ab=0$, 則僅有一相交點,於是 $y=mx+b$ 遂成 $y=ax^2$ 之切線,彼此相切點之橫坐標自爲 $x=\frac{m}{2a}$.

倘 $y=mx+b$ 與 $y=ax^2$ 果相交於兩點,如圖 (39) 中 P_1

與 P_2, 則 x_1 與 x_2 爲兩不同之實數,惟

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m}{2a}$$

這是 P_1P_2 的中點之橫坐標.觀此,其中點之橫坐標隨 m 而變,與 b 却絲毫無關. 由是以

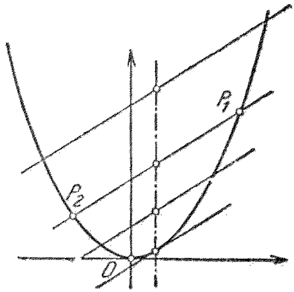


圖 (39)

論,凡一切與 P_1P_2 平行之割線,其中點之橫坐標與縱軸(在此卽拋物線之軸)相去之距離始終爲 $\frac{m}{2a}$. 由此就可以推知,拋物線之一切平行割線,其中點必處於一直徑之上.

§39 拋物線之切線

據上節所說,苟 $m^2+4ab=0$, 則 $y=mx+b$ 爲 $y=ax^2$ 之切線,相切點之橫坐標爲 $x_1=m:2a$. 故 (x_1, y_1) 若爲一已知之點,則切線在此點上之斜度顯然爲 $m=2ax_1$. 於是我們得一極簡便的方法,爲一拋物線在任何一點上的切線,建立一方程式. 一拋物線 $y=ax^2$ 在 (x_1, y_1) 點之切線,既明以上所說,必有如下之方程式:

$$y-y_1=2ax_1(x-x_1)$$

§40 切線之特性

既明切線之方程式,乃可進而論其特性。

在拋物線上任擇一點 $P(x_1, y_1)$,作一切線. 此切線與縱橫軸相交,在兩軸上各得一截段,如圖(40)中之 OA 與 OB. 我們試先計算 OA 與 OB 之長.

查切線之方程式爲

$$y-y_1=2ax_1(x-x_1)$$

當 $y=0$ 時, $OA=x$, 故 $-y_1=2ax_1(OA-x_1)$

或 $$OA=x_1-\frac{y_1}{2ax_1}=x_1-\frac{x_1}{2}=\frac{x_1}{2}$$

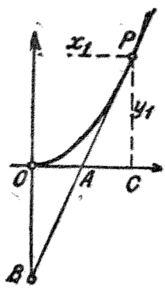


圖 (40)

於是知 OAB 與 ACP 兩三角形相合,遂得 $OB=-y_1$, 由是得如下之認識.

(a) 在拋物線之頂點作一切線,叫頂切線. 於是拋物線上任何其他切線必與頂切線相交於一點 A, A 與頂點相去之距離適爲切點 P 與拋物線軸距離之一半.

(b) 任何切線與拋物線軸相交於一點 B, B 之距離頂點與切點 P 之距離頂切線相等.

以上兩點,我們可應用之,以作切線之圖,在此不必再贅. 在引線 l 上擇一點 D, 其橫坐標與 P 之橫坐標相等;將焦點 F 與 D 相連,則 FD 因 $OF=OE=\frac{P}{2}$ 之故,亦

必經過 A 點. 又因 $PF=PD$, $AF=AD$, 故 PA 與 FD 相垂直. 於是知

(c) 苟在任何切線與頂切線之相交點,作切線之垂直線,此切線之垂直線必經過拋物線之焦點.

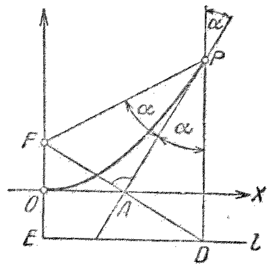


圖 (41)

復次, $\sphericalangle FPA=\sphericalangle APD$, 故

(d) 在任何點上作一切線;經過同一之點更作一焦線及直徑,此兩線與切線必成相等之角.

又設有兩切線:

$$y-y_1=2ax_1(x-x_1)$$

$$y-y_2=2ax_2(x-x_2)$$

相交於 C〔如圖(42)〕, C 之坐標自必滿足

$$y_1-y_2=2ax(x_2-x_1)-2y_2+2y_1$$

故其橫坐標爲

$$x=\frac{y_2-y_1}{2a(x_2-x_1)}=\frac{ax_2^2-ax_1^2}{2a(x_2-x_1)}=\frac{x_2+x_1}{2}$$

設叫割線 AB 之中點爲 M, 則 C 之橫坐標與 M 之橫坐標適相同, 故 M 與 C 實同在直徑 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 之上. 要而言之:

(e) 在任何割線之兩端作兩切線,此兩切線之相交點,必在平分割線之直徑之上. 申言之.

(f) 若由任何一點C作兩直線與一抛物線相切,則切線之截段〔圖(42)之AC與BC〕投於頂切線(或與頂切線相平行之直線)之影必彼此相等.

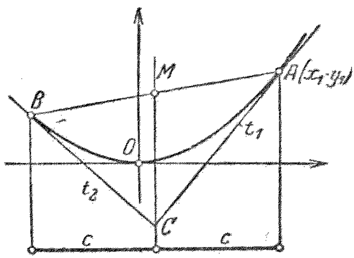


圖 (42)

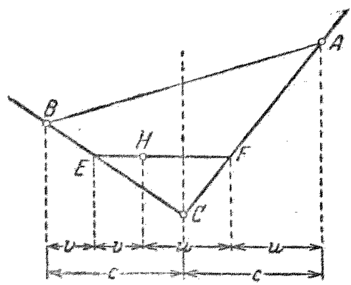


圖 (43)

明乎此,我們復得一重要之認識. 除AC與BC兩切線之外,更作一切線EF如圖(43). 於是不特AC與BC投於頂切線之影同爲C;即EB與EH之影,FH與FA之影亦必相等. 叫前者之長爲v,後者之長爲u;觀圖(43)可知

$$2v+2u=2c$$

或 $u+v=c$ 於此可知

(g) 兩切線t_1及t_2若與一其他切線t_3相交於E及F兩點,則EF投於頂切線之影爲一不變之數c.

復次，由 $v+u=c$ 知 $v=c-u$, $c-v=u$

故

$$v:(c-v)=(c-u):u$$

於是 $$BE:EC=CF:FA$$

苟 $v=\frac{c}{2}$, 則 $u=\frac{c}{2}$ 於是又得一認識：

(h) 由任何一點 C 作兩直線與拋物線相切於 A 及 B. 將 AC 與 BC 兩切線截段之中點相連得一直線 EF〔如圖 (44)〕. 此直線必與拋物線相切於其中點 P.

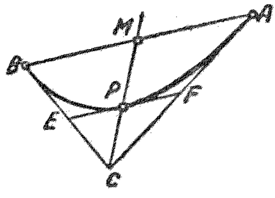


圖 (44)

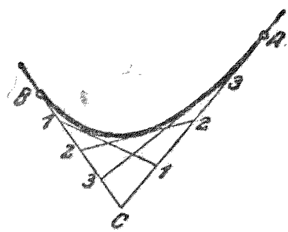


圖 (45)

根據以上所說，我們可由兩切線及其相切點以製拋物線之圖如圖 (44), (45) 所示.

§ 41 垂線與副垂線

經過拋物線之任何一點 $P(x_1, y_1)$ 作一切線，更作一直線與切線相垂直. 此與切線相垂直之直線叫做拋物線在此點上之垂線. 在 $P(x_1, y_1)$ 點上之切線，其

斜度既爲$2ax_1$,與之垂直之垂線必有斜度$-\frac{1}{2ax_1}$. 因此垂線之方程式必爲

$$y-y_1=-\frac{1}{2ax_1}(x-x_1)$$

將垂線之截段PN投影於拋物線之軸,得RN. 這RN叫做副垂線. 其長我們試計算之. N之坐標爲$x=0$, $y=y_1+RN$,故

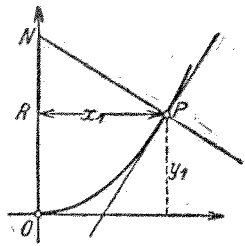


圖 (46)

$$y_1+RN-y_1=-\frac{1}{2ax_1}(-x_1)$$

由此得知　　$$RN=\frac{1}{2a}$$

由是以論,不論切點P之地位如何,凡拋物線之副垂線均有確定之長.

§42 舉例

例一: 求拋物線$y=0.1x^2$在P點之切線,P之橫坐標爲$x_1=7$. P既爲拋物線上之一點,其橫坐標爲$x_1=7$,縱坐標自爲$y_1=0.1\times7^2=4.9$. 在P點之切線必有斜度$m=2ax_1=2\times0.1\times7=1.4$; 故其方程式爲$y-4.9=1.4(x-7)$

或　　$$y=1.4x-4.9$$

例二: 問$y=x+4$與拋物線$y=0.8x^2$相交於何處. 兩

者之相交點必滿足$0.8x^2=x+4$，由此得$x_1=2.95$ $x_2=-1.70$. 旣得其橫坐標，將其代入曲線方程式中，即得其縱坐標.

例三：如有一物體由O點用速度v_0向橫軸之正方向擲去〔觀圖(47)〕，據奈端之力學定律，如不注意空氣之磨擦力，此物體之運動，必依如下所規定：

$$x=v_0t \qquad y=\frac{g}{2}t^2$$

此處之t表示時間，並假定由O點向下之方向爲縱軸之正方向. 於此可見物體在此種情形之下，必依一拋物線運動，因由上式消去t，即得

$$y=\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

試求此拋物線之焦點，及在任何點上切線之方向.

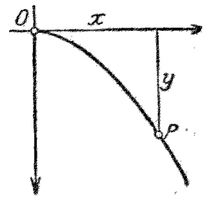


圖 (47)

習 題

1. 有一拋物線$y=0.1x^2$；求其與$y=2x+4$相平行之切線，並求其相切之點.

2. 求 $y=-\frac{1}{4}x+3$與$y=\frac{1}{8}x^2$相交之點. 苟其相交於兩實點，求兩點相去之距離.

3. 求$x=\frac{1}{4}y^2$與以下各直線相交之點：

(a)　$y=2x-5$

(b)　$y=2x+0.5$

(c)　$y=2x+2$

4.　作 $y=-0.2x^2$ 之圖．求其焦點之坐標．求其在 P 點之切線，假定 P 之橫坐標爲 $x_1=6$．問在何點其切線之斜度爲 $+1$．

5.　問在拋物線 $y=ax^2$ 之何處，其切線與頂切線成一 α 之角．

6.　由 $P(8,-4)$ 作 $y=\frac{1}{9}x^2$ 之切線，求其方程式．

7.　求 (a)　$x^2+y^2=16$ 與 $y=0.2x^2$ 相交之點．

(b)　$y^2=x(10-x)$ 與 $y=0.1x^2$ 相交之點．

8.　若在兩坐標軸上用不同之單位，$y=ax^2$ 是否爲一拋物線．

9.　在兩坐標軸上取不同之單位，作 $F=\frac{\pi}{4}d^2$ 及 $S=\frac{g}{2}t^2$ 之圖．

§43. 拋物線與整函數 $y=ax^2+bx+c$

如上所說，倘拋物線之頂點在坐標起點 O'，復以其頂切線作爲橫軸 $O'x'$ 如圖 (48)，則拋物線之方程式爲

$$y'=ax'^2$$

今將坐標起點移於 $O(-h,-k)$，則其方程式對此平移後之坐標系自有如下之形式：

$$y-k=a(x-h)^2 \qquad \text{(1)}$$

h,k 於是遂爲其頂點之坐標．將上式展開，得

$y=ax^2-2ahx+(ah^2+k)$

設叫　$-2ah=b$，

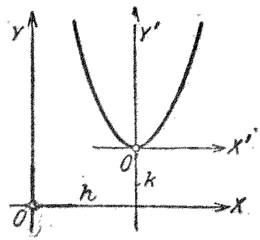


圖 (48)

$ah^2+k=c$，此方程式亦可簡寫如下：

$$y=ax^2+bx+c \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

反之，若有一方程式如(2)，我們亦可化之，使其有(1)之形式：

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

或

$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

由是可知 $y=ax^2+bx+c$ 亦代表一拋物線，其頂之坐標為

$$h=-\frac{b}{2a} \qquad k=c-\frac{b^2}{4a}$$

其軸則與縱軸相平行．要而言之，$y=ax^2+bx+c$ 實與 $y=ax^2$ 完全相同，前者由後者平移而得．

至欲求 $y=ax^2+bx+c$ 在任何一點之切線，其法如下

如前所說，將 $y'=ax'^2$ 依下法平移．

$$x'=x-h=x+\frac{b}{2a}$$

$$y'=y-k=y+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

卽得 $y=ax^2+bx+c$ 之拋物線. 據第三十九節中所論, $y'=ax'^2$ 在 (x_1', y_1') 點上之切線有如下之方程式

$$y'-y_1'=2ax_1'(x'-x_1')$$

其斜度爲 $m=2ax_1'$. 因此, 平移之後, 其斜度爲

$$m=2a(x_1-h)=2ax_1-2ah$$

或 $$m=2ax_1+b$$

故 $y=ax^2+bx+c$ 在任何一點 (x_1, y_1) 上之切線必有如下之方程式: $$y-y_1=(2ax_1+b)(x-x_1)$$

我們既知 $y=ax^2+bx+c$ 代表一拋物線, 其中 a, b, c 亦各有其幾何上的意義. 觀於以上所說, a 之意義與前同: $a=\frac{1}{2p}$. 使 $y=ax^2+bx+c$ 中之 $x=0$, 得 $y=c$, 故 c 可知其表拋物線在縱軸上截段之長. 又因任何點上 (x_1, y_1) 切線之斜度爲 $m=ax_1+b$, 故 b 實爲 (O, C) 點上切線之斜度無疑.

§44 斜度之函數

據上所說, 拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 在任何一點 (x, y) 之斜度爲 $m=2ax+b$; 於此可知 m 亦隨 x 而變, 換言之, m 爲 x 之函數. 這個函數, 所以表示斜度變化的情形, 叫做斜度之函數

§45 拋物線截段所包圍之面積

經過任何一點C作兩直線AC與BC與一拋物線相切,假定相切之點爲A及B如圖(49.) 復假定$AD=DC$, $BE=EC$則DE必又爲拋物線之切線.於是 $AB=2ED$,

$\triangle ABF=2\triangle EDC$

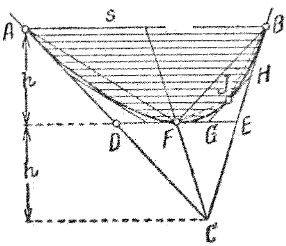


圖 (49)

然後更作一切線GH與BF相平行,如是FBJ之面積,又兩倍於EGH.依此方法繼續作切線,可得種種三角形.惟三角形之居於拋物線之內者,其面積無不兩倍於在外之三角形.如是逐步進行,我們可以推知,被拋物線AFB所包圍之面積.必兩倍於$ADCEBF$所包圍之面積.於是知AFB所包圍之面積實爲$\frac{2}{3}\triangle ACB$,換言之,若叫拋物線AFB所包圍之面積爲F, AB割線之長爲S,拋物線截段之高爲h,必有如下關係之成立 $F=\frac{2}{3}S\cdot h$

§46 舉例

例一: 觀拋物線之方程式$y=ax^2+bx+c$,其中有三個常數: a,b,c. 因此我們可任意爲一拋物線擇定三

點,藉以規定其方程式.而求一拋物線之方程式,其軸與縱軸相平行,且經過 $A(-6,4),B(-2,-2),C(8,0.5)$,其法如下:凡拋物線之軸與縱軸相平行者,其方程式必爲

$$y=ax^2+bx+c$$

因其經過 $A(-6,4)$ 故 $4=36a-6b+c$

因其經過 $B(-2,-2)$ 故 $-2=4a-2b+c$

又因其經過 $C(8,0.5)$ 故 $0.5=64a+0.5b+c$

由此得 $a=\frac{1}{8}$; $b=-0.5$; $c=-3.5$. 於是我們所欲求的方程式爲

$$y=\frac{1}{8}x^2-0.5x-3.5$$

此拋物線與縱軸相交於 $(0,-3.5)$;在此點上其切線爲 $y=-0.5x-3.5$. 又在 A, B, C 三點上之切線各爲 $y=-2x-8$; $y=-x-4$; $y=1.5x-11.5$. 復次,如上之拋物線與橫軸相交之點可由 $\frac{1}{8}x^2-0.5x-3.5=0$ 求得之;其頂在 $(2,-4)$.

例二: 有一拋物線經過零點如圖(50),其高爲 h,其寬爲 S. 求其方程式. 此拋物線既經過零點,其軸又與縱軸平行,故其方程式之形式爲 $y=ax^2+bx$;又因其頂 A 之坐標爲 $\left(\frac{s}{2},h\right)$,故

$$h=a\frac{s^2}{4}+b\frac{s}{2}$$

又因其經過 $B(s,0)$

$$0=as^2+bs$$

由此得 $a=-\frac{4h}{s^2}$; $b=\frac{4h}{s}$ 故此拋物線之方程式爲

$$y=\frac{4h}{s}x-\frac{4h}{s^2}x^2$$

或
$$y=\frac{4h}{s^2}x(s-x)$$

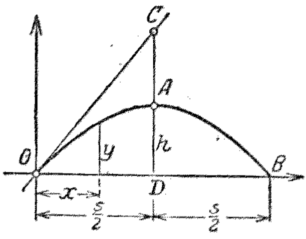


圖 (50)

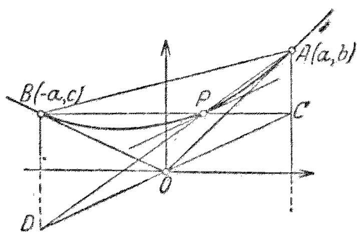


圖 (51)

例三: 設有任何兩點 $A(a,b)$ $B(-a,c)$; 由此兩點作直線與橫軸相垂直. 此兩垂直線與經過零點之任何直線相交於 D 及 C 如圖 (51) 所示. 更作 AD 與 BC, 並叫兩者之相交點爲 P. 試證 A,B,P 在一拋物線之上; OA 與 OB 爲拋物線之切線且經過 P 之切線必與 DC 平行.

DC之方程式必有如下之形式$y=mx$；由此知C與D之縱坐標爲ma及$-ma$. 於是可知AD與BC兩直線之方程式爲:

$$y-b=\frac{b+ma}{2a}(x-a) \qquad (AD)$$

$$y-c=-\frac{c-ma}{2a}(x+a) \qquad (BC)$$

由以上兩式消去m,得

$$y=\frac{b+c}{4a^2}x^2+\frac{b-c}{2a}x+\frac{b+c}{4}$$

這是一經過A,B,P三點之拋物線. 至切線OA與OB之方程式顯然爲

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{及} \quad y=-\frac{c}{a}x$$

最後欲證經過P之切線與DC相平行,可先求P之坐標,然後觀拋物線在此點上之斜度是否爲m.

例四: 有一拋物線,其軸與縱軸相平行且經過零點及(x_0, y_0)；在零點上切線之方向已知其爲m. 求其方程式. 因與縱軸平行且經過零點,

故 $$y=ax^2+bx$$

又 $$y_0=ax_0{}^2+bx_0$$

$$m=b$$

故欲求之方程式爲

$$y=\frac{y_0-mx_0}{x_0{}^2}x^2+mx$$

在 $P(x_0, y_0)$ 點上之切線與在零點上之切線相交於一點,其橫坐標爲 $\frac{x_0}{2}$,由此可以推知之.

習題

1. 作 $y=0.1x^2$; $y=0.1x^2+2$; $y=0.1x^2+0.5x+2$ 之圖. 問我們應怎樣將坐標系平移始可由 $y=0.1x^2$ 得 $y=0.1x^2+0.5x+2$.

2. 作 $y_1=-0.2x^2$ 及 $y_2=x+1$ 之圖,然後相加以求 $y_1+y_2=-0.2x^2+x+1$.

3. 作以下各拋物線:

(a) $y=-0.16x^2+1.6x$ $\qquad 0\leqq x\leqq 10$

(b) $y=-0.18x^2+1.9x+1$ $\qquad 0\leqq x\leqq 10$

(c) $y=\frac{1}{84}(13x^2-32x-240)$ $\qquad -6\leqq x\leqq 4$

4. 求拋物線,其軸與縱軸相平行,且經過如下各三點. 求其方程式及其頂之坐標.

(a) $A(-4, -1)$ $\quad B(0, 4.6)$ $\quad C(6, 1)$

(b) $A(-5, -2)$ $\quad B(0, -9)$ $\quad C(5, 4)$

(c) $A(3, 3)$ $\quad B(6, 4)$ $\quad C(12, 0)$

(d) $A(0, 0)$ $\quad B(5, 4)$ $\quad C(15, 0)$

(e) $A(3, 4)$ $\quad B(-3, 4)$ 焦點在 $O(0, 0)$

5. 有一拋物線,其軸與橫軸平行,並經過 $A(0, 0)$, $B(4, 5)$, $C(0, 10)$; 求其方程式並求其在 C 點上切線之方程式.

6. 有兩拋物線,各經過 $A(0,0)$ $B(s,0)$,其軸均與縱軸平行,其頂均在橫軸之上;其一之頂有縱坐標 h_1,其他之頂之縱坐標爲 $h_2(h_2>h_1)$. 求兩拋物線所包圍之面積,及其縱軸上任何一處(即不論 x 爲任何數)所割之截段.

7. 求 $y=\frac{1}{8}x^2$ 與 $y=-\frac{1}{4}x+3$ 相交之點,及兩者所包圍之面積.

8. 有一向上伸展之拋物線,其頂在 $(5,2)$,其軸與縱軸平行,又 $p=4cm$. 求其方程式.

9. 有一拋物線,其軸與縱軸平行,並經過 $A(2,2)$, $B(12,-4)$,又其切線在 A 點之斜度爲 $+1$;求拋物線之方程式.

10. 作 $y_1=0.1x^2+0.5x+3$

$$y_2=-0.2x^2+0.9x+2$$

及 y_1+y_2 之圖,並求 y_1+y_2 之頂.

11. 若在縱橫軸上用不同之單位,問 $y=ax^2+bx+c$ 是否亦代表一拋物線.$(x=\mu_1x', y=\mu_2y')$

12. 凡圓之經過 P 點且與一直線 g 相切者,其中心相聚成一何種曲線.

§47 拋物線之極形方程式

倘我們捨直角坐標,改用極坐標以立拋物線之方程式,並以拋物線之焦點作爲極點,由焦點向頂之直線作爲極軸,觀於圖(52),知拋物線上任何一點 P 必滿足.

$$PF = PA = CF + FD$$

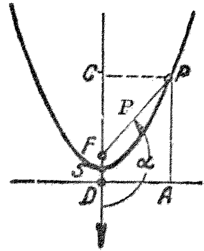


圖 (52)

因 $\quad PF = \rho \quad CF = \rho\cos(180 - \alpha)$

$$= -\rho\cos\alpha$$

$$FD = p$$

故抛物線之極形方程式爲

$$\rho = p - \rho\cos\alpha$$

或 $$\rho = \frac{p}{1+\cos\alpha}$$

又因 $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, 及 $FS = \frac{p}{2}$ 之故, 此方程式亦可化爲

$$\rho = \frac{FS}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = FS\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

復次, 倘以抛物線之頂作爲極點, 抛物線之軸作爲極軸, 由極軸以量 α 如圖 (53), 於是抛物線 $y = ax^2$ 因 $y = \rho\cos\alpha$, $x = \rho\sin\alpha$ 之故, 遂有如下之方程式:

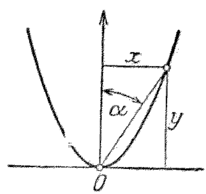


圖 (53)

$$\rho\cos\alpha = a\rho^2\sin^2\alpha$$

或 $$\rho = \frac{\cos\alpha}{a\sin^2\alpha} = \frac{2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

或 $$\rho = 2p\cos\alpha(1+\cot^2\alpha)$$

習 題

1. 經過抛物線之焦點作一割線與抛物線相交於兩點 (ρ_1, α_1)

$(\rho_2;\ \alpha_2)$；試證 $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{2}{p}$.

2. 經過拋物線之焦點 F 作一割線 AB，其方向與在任何一點 P 之切線相平行；證 $AB=4PF$.

3. 假定 $p=2cm$. 根據 $\rho=\frac{p}{1+\cos\alpha}$ 以作如下各點：$\alpha=0°;5°;10°;30°;90°;100°;120°$.

第七章 橢圓

§48 相仿之曲線

設有一曲線C,其方程式如下:

$$y=f(x)$$

將此曲線上各點之縱坐標引長或縮短之,同時使其橫坐標不變,如是可由C另得一曲線C',叫做C之相仿曲線.如圖中之P'點,乃將P之縱坐標縮短而得,P'與P之橫坐標則彼此相同.由是以推,可知C上任何一點$P(x, y)$與其相仿曲線C'上之$P'(x', y')$,其坐標間實有如下之關係:

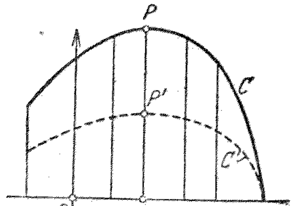


圖 (54)

$$x'=x$$

$$y'=ny$$

式中之n爲一確定常數.故與$y=f(x)$相仿之曲線必有如下之方程式:

$$\frac{1}{n}y'=f(x')=f(x)$$

或
$$y'=nf(x)$$

苟其如是,我們亦稱橫坐標軸為仿射軸. 復次,若將 $y=f(x)$ 各點之橫坐標引長或縮短之,同時使其縱坐標依然不變,如是亦得一與 $y=f(x)$ 相仿之曲線,不過現在之仿射軸改為縱坐標軸罷了.

既明何謂相仿曲線,可知與直線 $y=mx+b$ 相仿者仍為一直線: $y'=n\cdot mx+b$. 如兩直線互相平行,與之相仿之直線亦必互相平行.

§49 圓之相仿線

設有一圓 $x^2+y^2=a^2$ 於此,我們依上節所述之法,應用:
$$x'=x$$
$$y'=ny$$

求一與之相仿之曲線,即得

$$x^2+\frac{1}{n^2}y'^2=a^2$$

這種曲線,叫做橢圓. 若橢圓上之一點 $C(0,\ a)$ 其縱坐標由圓線上 $B(0,\ b)$ 之縱坐標

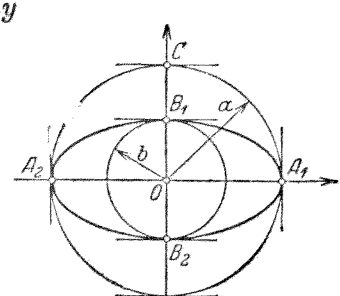


圖 55

引長而得如圖(55), 則 $n=\frac{b}{a}$, 可以斷言. 因此之故, 橢圓之方程式亦可寫作

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2$$

或
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

由此方程式, 可以知道橢圓之形狀對縱橫兩軸均相對稱. 橢圓與橫軸相割之點, 如圖(55)中之 A_1 及 A_2, 又其與縱軸相割之點如 B_1, B_2 叫做橢圓之頂; A_1A_2, B_1B_2 叫做橢圓之軸, A_1A_2 謂正軸, B_1B_2 謂副軸, O 謂橢圓之中心.

我們既知橢圓爲圓之相仿曲線, 則如下種種認識, 亦顯而易見之理. 凡經過中心之割線必爲中心所平分, 此種割線叫做直徑. 又在 B_1 與 B_2 兩點上之切線與橫軸相平行, 在 A_1 與 A_2 兩點之切線與縱軸相平行. 凡在直徑之端立切線則彼此必相平行; 凡平行之割線, 其中點均在一直徑之上.

§50 橢圓與其頂上之圓

設有一橢圓:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

其中心在零點,其半軸之長爲 a 及 b, 並假定 $a>b$. 以零點爲中心, a 及 b 爲半徑,作兩圓線;如是則前者必經過橢圓之頂 A_1 及 A_2, 後者必經過橢圓之頂 B_1 及 B_2; 因此之故,此兩圓叫做橢圓之頂圓 (Scheitelkreise). 其較大者謂大頂圓,較小者爲小頂圓. 在圖(56),我們將橢圓及其頂圓作四分之一,至其他部分,自也可想見了. 與橫軸相垂直,作一直線 g, 與大頂圓相交於 A 點.將 O 與 A 相連得一直線,此直線與小頂圓相交於 B; 由 B 作一直線與橫軸相平行,此直線與 g 相交於 C. 於是我們可以推知 C 必爲橢圓上之一點,何則, A 與 C 之橫坐標相等,其縱坐標之比:

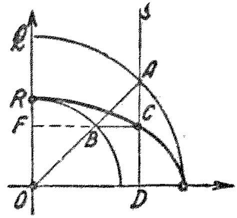


圖 (56)

$$\frac{CD}{AD}=\frac{OB}{OA}=\frac{b}{a}$$

又因 $AD=\sqrt{a^2-x^2}$, 故

$$CD=y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

於此可知 C 必爲橢圓上之一點了. 根據同樣之推理,若將 BC 延長至 F, 可知 B 與 C 之縱坐標相等,其橫坐標之比爲:

$$\frac{FC}{FB}=\frac{OA}{OB}=\frac{a}{b}$$

$$FB=\sqrt{b^2-y^2}$$

於是
$$FC=x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

旣明以上所說,乃知橢圓在一方面可視爲大頂圓之相仿線,在他方面也可視爲小頂圓之相仿線.

我們旣由如上之法,求得橢圓上之各點,其各點之坐標復可用下法表而達之.設 OA 與橫軸所成之角爲 α,則橢圓上任何一點 C 之坐標 (x, y) 必滿足 $x=OA\cos\alpha$, $y=CD=OB\sin\alpha$; 故

$$x=a\cos\alpha$$

$$y=b\sin\alpha$$

是卽橢圓之方程式,以 α 爲輔變數,其中各點皆滿足此關係,且滿足此關係之 (x, y) 無一非橢圓上之點.

§51 舉例

例一: 有一橢圓,其中心在零點,半軸之長爲 $a=5$, $b=3$. 於是其方程式爲 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $y=\pm 0.6\sqrt{25-x^2}$.

當	$x=0$	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
	$y=\pm 3$	± 2.94	± 2.75	± 2.4	± 1.8	0

由是知$|x|>5$時,y未能爲一實數.

例二: 倘將橢圓之一頂$(-a, 0)$移作坐標系之零點,同時使其軸之方向依然不變;如是則其方程式必

爲
$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

或
$$\frac{x^2}{a^2}-2\frac{x}{a}+1+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

例三: 有一橢圓,其中心在$M(h, k)$,其軸與縱橫兩軸相平行,求其方程式. 答案:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

例四: 方程式如$16x^2+9y^2-96x-72y+144=0$必代表一橢圓. 因 $16(x^2-6x)+9(y^2-8y)=-144$

或
$$16(x-3)^2+9(y-4)^2=16\cdot 9+9\cdot 16-144=144$$

故
$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

習 題

1. 有一橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$經過$(6, 4)$及$(8, 3)$兩點;求其軸之長.

2. 設有下列之橢圓:

   (a) $25x^2+4y^2-200x-40y+400=0$

(b) $9x^2+25y^2-150y=0$

(c) $x^2+4y^2+2x+16y-47=0$

(d) $x^2+4y^2-12x=0$

求其中心及其軸之長.

3. 作一橢圓,其半軸為 $a=15$, $b=10$, 並求與 $x=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ 相應之 y.

§52 橢圓之切線

如上所說,橢圓可視為兩種圓之相仿曲線.如 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 共有四頂,其中兩頂在正軸之上,其他兩頂在副軸之上. 所謂橢圓之大頂圓,即以零點為中心,且經過正軸上兩頂之圓;所謂小頂圓,則為經過副軸上兩頂之圓. 我們既知橢圓在一方面為大頂圓之相仿線(如是則橫軸為仿射軸),同時又為小頂圓之相仿線(於是其仿射軸為縱軸),觀於圖(57)乃知橢圓上 C 點必與其大頂圓上之 A 點相應$\left(\text{因 } A \text{ 與 } C\right.$ 之橫坐標相同,其縱坐標之比為 $\left.\frac{a}{b}\right)$. 於是在 A 點上作一圓之切線,在 C 點上作一橢圓之切線,兩者相遇於其仿射軸上之一點 D. 復次,橢圓上之 C 點又與小頂圓上之 B

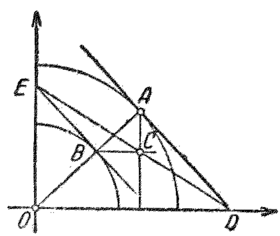


圖 (57)

點相應(因 B 與 C 之縱坐標相同,其橫坐標之比爲 $\frac{b}{a}$).於是在 B 點上作一圓之切線,在 C 點上作一橢圓之切線,兩者自相遇於其仿射軸上之一點 E. 故 E,C,D 三點實在同一直線之上.

倘名 C 之坐標爲 (x_1, y_1),可知 $OD\cdot x_1=a^2$,又 $OE\cdot y_1=b^2$;於是知切線 ED 在橫軸上所割之截段爲 $OD=\frac{a^2}{x_1}$,在縱軸上所割之截段爲 $OE=\frac{b^2}{y_1}$.由是以論,在橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任何一綫 $C(x_1;y_1)$ 作一切線.其方程式爲

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_1}}+\frac{y}{\frac{b^2}{y_1}}=1$$

或

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

由是可知此切線之斜度爲

$$m=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_1}{y_1}$$

苟經過 (x_1, y_1),作一直線與此切線相垂直,其方程式自爲

$$y-y_1=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$$

§53 相配直徑

觀於以上橢圓之性質,可知其正軸實爲副軸所平分,其副軸則爲正軸所平分. 不惟如此,倘我們作種種

與正軸相平行之割線,其中點必在副軸之上(換言之,為副軸所平分);倘作種種與副軸相平行之割線,其中點必在正軸之上(為正軸所平分). 此理既明,我們乃提出一普遍之問題,如有一羣平行之割線,其方向為m,試問其中點之分佈究竟何若. 欲研討此問題,當先立此種割線之方程式. 此種割線無他,乃具有斜度m之直線

$$y=mx+q$$

且與橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$有兩實交點者,故必求

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+q)^2}{b^2}-1=0$$

或

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+\frac{2mxq}{b^2}+\frac{q^2}{b^2}-1=0$$

有兩實根x_1及x_2. 我們欲問此種割線之中點如何,但問

$$\frac{x_1+x_2}{2}$$

已足. 據代數學中之推理,凡一兩次方程式$Ax^2+Bx+C=0$中兩根之和必為$-\frac{B}{A}$,於是遂知割線之中點,其橫坐標ξ為

$$\xi=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{mqa^2}{b^2+a^2m^2}$$

其縱坐標η為

$$\eta=m\xi+q=\frac{qb^2}{b^2+a^2m^2}$$

由此得
$$\frac{\eta}{\xi}=-\frac{b^2}{ma^2}$$
故一切割線,其方向爲 m 者,其中點居於一直線
$$\eta=-\frac{b^2}{ma^2}\xi$$
之上;此直線既經過零點,故爲一直徑.由是以論,凡平行之割線,其中點在一直徑之上;此直徑之斜度 m_1 與割線之斜度 m 適成如下之關係
$$m_1=-\frac{b_2}{ma^2}\quad 或\quad mm_1=-\frac{b^2}{a^2}$$
觀此公式中 m_1 與 m 間之關係,復可推得一結論如下:倘我們作種種割線與此直徑(其斜度爲 m_1)相平行,則其中點必在一直徑之上,其斜度爲 m. 此兩直徑叫做相配直徑. 要而言之,兩直徑叫做相配,苟其中之一果能平分一切與其他直徑相平行之割線;兩者之斜度 m 與 m_1 滿足如下之關係
$$mm_1=-\frac{b^2}{a^2}$$

既明相配直徑之定義,可知圓之相配直徑無他,兩相垂直之直徑罷了. 於此可知,大頂圓中兩相垂直之半徑 OC 與 OD 必與橢圓之兩相

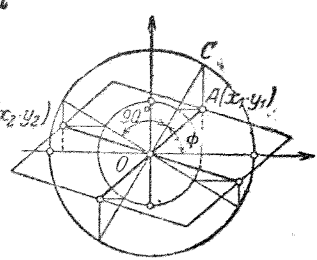


圖 (58)

配半徑OA與OB相應. 名$OA=a_1$, $OB=b_1$; OC與正軸所成之角爲ϕ; A與B兩點之坐標爲$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$; 如是觀於圖(58), 可知

$$x_1=a\cos\phi \qquad x_2=a\cos 90+\phi)=-a\sin\phi$$

$$y_1=b\sin\phi \qquad y_2=b\sin(90+\phi)=\quad b\cos\phi$$

由是得 $$(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)=a^2+b^2$$

惟 $x_1^2+y_1^2=\overline{OA}^2=a_1^2$; $x_2^2+y_2^2=b_1^2$ 故

$$a_1^2+b_1^2=a^2+b^2$$

§54 橢圓之焦點

在橢圓 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

之正軸上,有兩點具有特殊之性質,請略言之. 試在橢圓之小頂圓上,作一與正軸相平行之切線,此切線與大頂圓相交於兩點;將此兩點投影於正軸,得F_1與F_2兩點. 此兩點F_1與F_2叫做橢圓之焦點,其與零點相去之距離若以C名之: $OF_1=OF_2=c$,

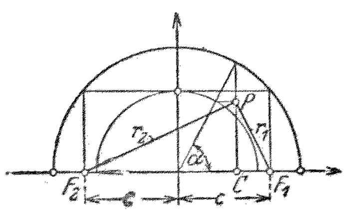


圖 (59)

則 $$a^2-b^2=c^2$$

之眞確,自是顯而易見. 若P爲橢圓上任何一點,則其

與焦點之距離 F_1P 及 F_2P 叫做焦線，我們用 r_1 及 r_2 表之：

$$F_1P=r_1,\ F_2P=r_2.$$

因 $$F_1C=c-a\cos\alpha,\ PC=b\sin\alpha$$

故 $$r_1^2=(c-a\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2$$

又因 $b^2=a^2-c^2$ 之故，得

$$r_1^2=(c-a\cos\alpha)^2+(a^2-c^2)\sin^2\alpha$$

$$r_1^2=a^2-2ac\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha=(a-c\cos\alpha)^2$$

$$r_1=a-c\cos\alpha$$

據同理，得

$$r_2=a+c\cos\alpha$$

於是得 $$r_1+r_2=2a$$

要而言之，橢圓上任何一點，其與焦點相去之距離 r_1 及 r_2 相加必與正軸之長相等.

因 $c<a$，故 $\dfrac{c}{a}$ 爲一小於 1 之數，此數常以 e 名之：$\dfrac{c}{a}=e$. 復因 $\cos\alpha=\dfrac{x}{a}$ 之故，如上兩焦線之長 r_1 及 r_2 亦可寫作：

$$r_1=a-\frac{c}{a}x=a-ex$$

$$r_2=a+\frac{c}{a}x=a+ex$$

§55 橢圓之極形方程式

我們若將橢圓

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

之中心作為極點,其正軸作為極軸,如是則直角坐標與極坐標之間有如下關係 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$ 之成立,故橢圓之方程式一變而為

$$r^2(b^2\cos^2\phi+a^2\sin^2\phi)=a^2b^2$$

復因 $\sin^2\phi=1-\cos^2\phi$, $a^2-b^2=c^2$ 之故,得

$$r^2(a^2-c^2\cos^2\phi)=a^2b^2$$

或

$$r^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\phi} \qquad e=\frac{c}{a}<1$$

若以焦點作為極點,則此極形方程式必另有一種形式,讀者可自思得之.

習 題

1. 有一橢圓,其半軸為 $a=15$, $b=10$. 在 $x=9$ 作一切線,求其方程式.

2. 作直線與橢圓 $9x^2+25y^2=225$ 相切,並求與 $y=-0.8x+1.4$ 相平行. 求其方程式.

3. 作橢圓 $y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2$ 在任何一點 (x_1, y_1) 上之切線並求其方程式.

4. 任何橢圓必有兩相等之相配直徑，其長爲 $\sqrt{2(a^2+b^2)}$. 試證之.

5. 有一橢圓，其 $\frac{c}{a}=0.5$; 立一垂直線 PF_1 於其焦點 F_1 復使 P 與其他一焦點 F_2 相連，於是此直線與副軸相交於 A. 求 F_1F_2A 三角形之面積.

6. 有一橢圓，其互相垂直之半徑爲 u 及 v，試證

$$\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

第八章　雙曲線

56　雙曲線之方程式

設有兩直線 g 與 l 互成一 2α 之角,並相交於坐標零點如圖(60). 取一點 P,由 P 作兩直線與 g 及 l 各相平行,如圖中之 PR 及 OR. 於是 $ORPQ$ 有一確定之面積. 然後使 P 之地位漸漸移動,惟由 P 作直線,與 g 及 l 相平行,其所產生之平行四邊形 $ORPQ$ 始終保持其原有之面積. 苟其如是,P 點運動之軌跡叫做雙曲線. 今欲求雙曲線之方程式,可將 O 作爲坐標起點,平分 2α 之角之直線作爲橫軸,於是雙曲線上任何一點 P 之坐標 (x, y) 自爲 $x=OE$, $y=EP$. 將 EP 引長與 g 相交於 F, 可知

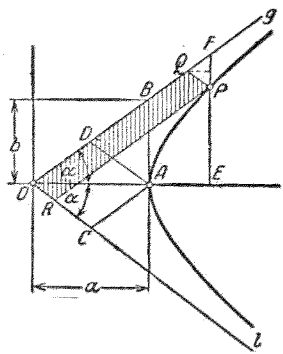


圖 (60)

$$PQ=QF=OR$$

又
$$x=(OQ+QF)\cos\alpha=(OQ+OR)\cos\alpha$$
$$y=(OQ-PQ)\sin\alpha=(OQ-OR)\sin\alpha$$

由是得
$$OQ=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)$$
$$OR=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)$$

故 $ORPQ$ 之面積爲
$$OQ\cdot OR\cdot\sin 2\alpha=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}\right)\sin 2\alpha$$
$$=\frac{1}{2}(x^2\tan\alpha-y^2\cot\alpha)$$

當 P 處於 A 之地位時,$OCAD$ 之面積,我們不難知之.若名 $a=OA$, $AB=b$, 則 $OCAD$ 之面積爲 $\frac{ab}{2}$, 於是復因 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$, $\cot\alpha=\frac{a}{b}$ 之故,遂得
$$\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{b}{a}-y^2\frac{a}{b}\right)$$

或
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

凡雙曲線上任何一點,其坐標必滿足此關係.

§57　雙曲線之軸及漸近線

觀於雙曲線之方程式,其中有 x^2 及 y^2 同時出現,於此可知其對縱橫坐標軸均相對稱.我們如將雙曲線

完全畫出,其圖形可於圖(61)見之. 更將其方程式寫作

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

由是可知當 $|x|<a$ 時,不能得一實數 y 與之相應.

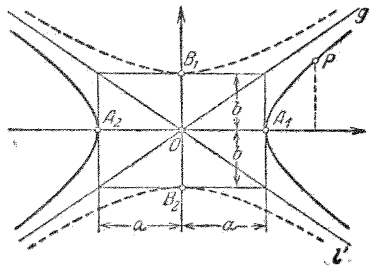


圖 (61)

當 $x=\pm a$ 時, $y=0$, 我們遂得 A_1 與 A_2 兩點. 這 A_1 與 A_2 叫做雙曲線的頂, A_1A_2 之線段叫做雙曲線之軸. 若 $|x|>a$, 則任何 x (不論 x 之值如何大), 必有實數 y 與之相應,由是知雙曲線實向左右伸展,直至無窮. 惟基於雙曲線之定義,由其點所規定之平行四邊形始終相等;故當 x 愈趨愈大時,雙曲線必與 g 及 l 兩直線愈見接近. 因此之故,我們常稱 g 及 l 與雙曲線相遇於無窮,或稱 g 及 l 謂雙曲線在無窮處之切線. 此種切線,與一曲線相切於無窮者,叫做漸近線(Asymptote)又連結 $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ 兩點之線段叫做雙曲線之副軸 (Nebenachse); 副軸之端 B_1B_2 顯然未在雙曲線之上.

至雙曲線之漸近線, 觀圖 (61) 實爲長方形 $A_2B_2A_1B_1$ (其邊爲 $2a$ 及 $2b$) 之兩對角線, 因此知其方程式爲:

漸近線 g 之方程式 $$y=\frac{b}{a}x$$

漸近線 l 之方程式:　　$y=-\frac{b}{a}x$

更有進者,所謂雙曲線,乃種種不同之點組織而成,由此種點作直線與兩已知的且相交於零點之直線 g 與 l 相平行,如此產生之平行四邊形,其面積均相等. 憑此原則以作圖,我們遂得一曲線,其形爲向左右分裂之兩段曲線,與縱橫兩軸相對稱,並與 g 及 l 兩直線愈趨愈近,如上圖所示. 倘我們在 B_1 所處之區域中求滿足如上條件之點,可得一向上下分裂之曲線,如圖(61)中之虛線,其方程式顯然爲

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

這條曲線,亦爲雙曲線,叫做 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之相配雙曲線. 後者旣稱作前者之相配雙曲線,前者亦爲後者之相配雙曲線,自不必說了.

§58 雙曲線之切線

設 P 與 Q 爲雙曲線上任何兩點,如是則 $OCPR$ 與 $OSQD$ (觀圖(62))必相等. 將 P 與 Q 相連,得一割線 AB; 經過 C 點作一直線與 AB 相平行,於是 $APCD$ 與 $BQDC$ 亦必相等,故 $DC=AP=BQ$. 因 $AP=BQ$ 之故,我們得一

極重要之認識:

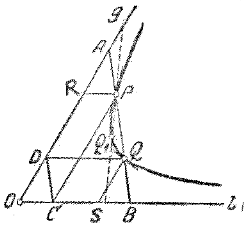


圖 (62)

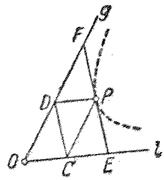


圖 (63)

倘經過雙曲線之任何一點 P 作一割線,此割線之截段,其處於雙曲線及其漸近線之間者 (卽 AP 與 BQ) 彼此必相等. 此理旣明,當 Q 沿雙曲線趨向 P, 則連結 P 與 Q 兩點之割線將趨向 P 點上之切線如圖 (63) 中之 FE. 由圖 (63), 乃知 $PE=PF, OC=CE, OD=DF$. 故我們如欲作 P 點上之切線,先由 P 作一直線 PC 與 g 相平行,然後使 $OC=CE$ 求得 E, 連 E 與 P, 則 EP 卽爲我們所欲求的切線.

至切線 EP 之方程式,我們亦不難求得之. 觀於 EP 之方向,實與 DC 相同,而 DC 則爲 $OCPD$ 之對角線. 如我們將坐標軸選定如下,更名 P 之坐標爲 $P(x_1, y_1)$, D 之坐標爲 $D(x', y')$,

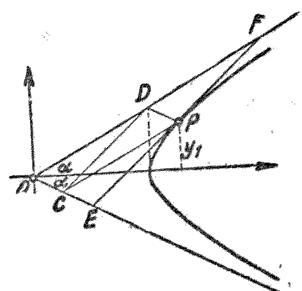


圖 (64)

C之坐標爲$C(x'', y'')$,於是

$$y' = OD \sin \alpha$$

$$y'' = -OC \sin \alpha$$

$$x' = OD \cos \alpha$$

$$x'' = OC \cos \alpha$$

然DC之斜度爲:

$$m = \frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{(OD+OC)\sin \alpha}{(OD-OC)\cos \alpha}$$

復因(參觀§56)

$$OD+OC = \frac{x_1}{\cos \alpha}$$

$$OD-OC = \frac{y_1}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

之故,可知切線EP之斜度爲

$$m = \frac{x_1}{y_1}\tan^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1}$$

由是以觀,雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$在任何一點$P(x_1, y_1)$之切線必有如下之方程式

$$y-y_1 = \frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

若乘以a^2y_1,可將此方程式化爲

$$a^2yy_1-a^2y_1^2=b^2x_1x-b^2x_1^2$$

或
$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}$$

因 $P(x_1,y_1)$ 爲雙曲線上之一點,遂由是得

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$

§59 雙曲線方程式之又一種形式

設有一雙曲線於此,我們倘將其中心 O 作爲中心,以 a 及 b 爲半徑作兩圓,叫做雙曲線之頂圓.更作兩條與橫軸相垂直之直線,各與頂圓相切,如圖 (65) 中之 r 與 s. 經過中心,任意作一直線 g, 此直線 g 與 r 及 s 各相交於 A 及 B. 於是以

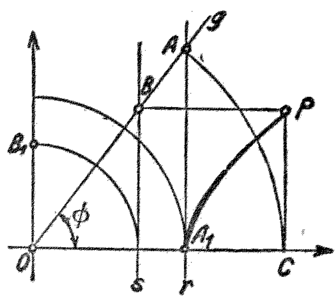


圖 (65)

OA 爲半徑, O 爲中心,作 AC 之圓線段. 經過 C 作一直線與橫軸相垂直,又經過 B 作一直線與橫軸相平行,兩者必相交於雙曲線上之一點 P. 蓋由如上所論,P之坐標 x,y 必滿足

$$x=OC=OA=OA_1:\cos\phi=\frac{a}{\cos\phi}$$

$$y=b\cdot\tan\phi$$

由上兩式消去ϕ,復因$\frac{1}{\cos^2\phi}=1+\tan^2\phi$之故,得$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$故$P(x,y)$為雙曲線上之一點,顯而易見.由是以論,以$\phi$為輔變數,我們可用

$$x=\frac{a}{\cos\phi}$$

$$y=b\cdot\tan\phi$$

以代表雙曲線;故此兩公式可作為雙曲線方程式之又一種形式.至與此相配之雙曲線,若用一輔變數ϕ以表之,可知其必有如下之方程式:

$$x=a\cot\phi,\quad y=b\sin\phi$$

§60 等邊雙曲線

設有一雙曲線,其兩漸近線互成垂直之勢,則此雙曲線叫做等邊雙曲線.根據此定義,可知$a=b$.故我們如用直角坐標,則等邊雙曲線之方程式為

$$x^2-y^2=a^2$$

若用一輔變數ϕ,則其方程式為

$$x=\frac{a}{\cos\phi}\qquad y=a\cdot\tan\phi$$

§61 舉例

例一： 作雙曲線 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ 或 $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2+16}$ 之圖. 此雙曲線之頂在 $B_1(0,3)$, $B_2(0,-3)$, 其漸近線之方程式為

$$y=\frac{3}{4}x \qquad y=-\frac{3}{4}x$$

當	$x=0$	2	4	6	8	10
則	$y=\pm 3$	3.35	4.24	5.4	6.7	8.1

於是其形狀如何,約略可見. 又其在 $P(4, 3\sqrt{2})$ 之切線有如下之方程式:

$$\frac{y\cdot 3\sqrt{2}}{9}-\frac{4x}{16}=1 \text{ 或 } y=\frac{3}{8}\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

例二： 方程式如 $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$ 實代表一雙曲線;因由此知

$$4(x^2-2x)-9(y^2-4y)=68$$

$$4(x-1)^2-9(y-2)^2=68+4-36=36$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

故代表一雙曲線,其中心在 $(1,2)$, $a=3$, $b=2$. 於是知其漸近線之斜度為 $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$; 因此漸近線經過 $(1,2)$, 故其方程式為

$$y-2=\frac{2}{3}(x-1) \qquad y-2=-\frac{2}{3}(x-1)$$

例三：作 $x^2-y^2=a^2$ 之切線,其與橫軸所成之角爲 $60°$；求切線之方程式．此種切線之斜度自爲 $\sqrt{3}$，故其方程式必有如下之形式 $y=\sqrt{3}x+c$，其中 c 尚爲一未定之數．欲求其與 $x^2-y^2=a^2$ 相切,必求其與 $x^2-y^2=a^2$，僅有一共同之點；將 $y=\sqrt{3}x+c$ 代入 $x^2-y^2=a^2$，求 $2x^2+2\sqrt{3}cx+(c^2+a^2)=0$ 僅有一實根,必 $(c\sqrt{3})^2-2(c^2+a^2)=0$ 而後可,故 $c=\pm a\sqrt{2}$．於是我們所欲作之切線,其方程式爲

$$y=\sqrt{3}x+a\sqrt{2}; \qquad y=\sqrt{3}x-a\sqrt{2}$$

習　題

1. 作一雙曲線,其漸近線爲 $y=\frac{1}{2}x$，$y=-\frac{1}{2}x$，其頂在 $(0, 2)$，$(0, -2)$．求其方程式．

2. 問 $x^2+y^2=2a^2$ 與 $x^2-y^2=a^2$ 相交於何處．在其相交之處,兩者之切線成一如何大之角,試計算之．

3. 設有下列諸雙曲線；求各線之中心,其漸近線之方程式及其軸之長：

(a)　$y^2-x^2-2y+2x-4=0$

(b)　$4x^2-24x-9y^2=0$

(c)　$y=0.8+\sqrt{4+x^2}$

(d) $Ax^2-By^2=C$ (A, B, C 爲正數)

(e) $4x^2+8x-3y^2-12y-4=0$

4. 有一雙曲線,其漸近線爲 $y=\frac{2}{3}x$, $y=-\frac{2}{3}x$ 且經過 $(4, 2)$; 求其方程式.

5. 求一曲線,其中各點之縱坐標爲 $x^2-y^2=a^2$ 各點之縱坐標之 $\frac{b}{a}$ 倍.

6. 雙曲線上任何一點與兩固定直線(漸近線)相去之距離相乘爲一常數;證之.

7. 經過雙曲線上任何一點 P, 作一與副軸相平行之直線;此直線與其漸近線相交於 A 及 B; 試證 $PA\cdot PB=b^2$.

8. 經過 $A(-a, 0)$ 任意作一直線,與縱軸相交於 D; 更在 $C(a, 0)$ 作一直線與 DC 相垂直,此直線與 AD 相交於 B. 問此種 B 點將成一何種曲線.

§62 以垂直漸近線爲坐標軸

如上所說,雙曲線之漸近線互相垂直者叫做等邊雙曲線. 我們倘以垂直之漸近線作爲坐標軸,則等邊雙曲線之方程式將有如下之形式:

$$xy=\frac{a^2}{2}=\text{常數}=C$$

或
$$y=\frac{C}{x}$$

在此雙曲線上任擇一點 (x_1, y_1), 可知此常數 C 爲

$xy=x_1y_1=C$, 故此方程式爲

$$y=\frac{x_1y_1}{x}$$

若 C 爲一正數,則此等邊雙曲線居於第一及第三區,否則在第二及第四區.

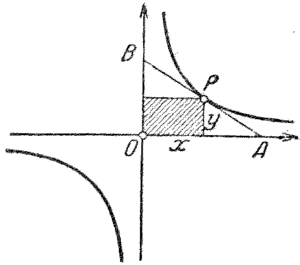


圖 (66)

復次,我們旣知 $OA=2x_1$ $OB=2y_1$ 故此等邊雙曲線在 (x_1, y_1) 點上之切線必有如下之形式:

$$\frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1$$

更有進者,我們倘將此等邊雙曲線之中心平移於 $(-h, -k)$, 則其方程式自一變而爲

$$(x-h)(y-k)=C$$

或
$$y=k+\frac{C}{x-h}$$

或
$$y=\frac{kx-hk+C}{x-h}$$

細考此方程式,其形式不外

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

式中之 a, b, c, d 爲四常數. 反之,若 x 與 y 之間發生

如上之關係,其必代表一等邊雙曲線亦顯而易見. 如

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

則 $$cxy+dy=ax+b$$

或 $$xy-\frac{a}{c}x+\frac{d}{c}y=\frac{b}{c}$$

或 $$\left(x+\frac{d}{c}\right)\left(y-\frac{a}{c}\right)=\frac{bc-ad}{c^2}=C$$

故當 $bc-ad\neq 0$ 時爲一等邊雙曲線,其漸近線與坐標軸相平行且相交於中心 $h=-\frac{d}{c}$, $k=\frac{a}{c}$ $(c\neq 0)$. 又 $(x-h)(y-k)=C$ 在 (x_1, y_1) 之切線必爲

$$\frac{x-h}{2(x_1-h)}+\frac{y-k}{2(y_1-k)}=1$$

讀者可自思得之.

§63 舉例

例一: 有一雙曲線,其漸近線爲 $x=-3$, $y=8$ 並經過零點;求其方程式. 其方程式自爲 $(x+3)(y-8)=C$, 復因經過零點之故 $(0+3)(0-8)=C$, 故 $C=-24$. 於是此雙曲線之方程式爲 $(x+3)(y-8)=-24$. 其在零點上之切線爲 $y=\frac{8}{3}x$. 又當

	$x=0$	2	4	6	8	10	12
則	$y=0$	3.2	4.57	5.33	5.82	6.15	6.4

此雙曲線之形狀,於此可見.

例二: 方程式如 $Bxy+Dx+Ey+F=0$ 必代表一等邊雙曲線;因其可化爲

$$xy+\frac{D}{B}x+\frac{E}{B}y=-\frac{F}{B} \qquad (B\neq 0)$$

或
$$\left(x+\frac{E}{B}\right)\left(y+\frac{D}{B}\right)=\frac{ED-BF}{B^2}$$

若 $ED-BF=0$, 此雙曲線將崩潰而爲兩漸近線

$$x=-\frac{E}{B} \qquad y=-\frac{D}{B}$$

習題

1. 假定 x 之變化範圍爲 $0\leqq x\leqq 14$, 作以下各雙曲線之圖:

$$y=\frac{8}{x}; \qquad y=\frac{16}{x}; \qquad y=\frac{20}{x}.$$

並證其在 $x=3$ 點上之切線相遇於 $(6, 0)$.

2. 證下列各雙曲線:

$$y=\frac{C}{x}; \qquad y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

之相仿線,假定橫軸爲仿射軸,又爲雙曲線.

3. 如在縱橫坐標軸上取不同之單位,

$$y=\frac{C}{x} \text{ 或 } (x-h)(y-k)=C$$

所表示者仍爲等邊雙曲線;證之.

4. 求以下各雙曲線之中心及其漸近線:

(a) $y=\dfrac{5x-6}{x-3}$　　(b) $y=\dfrac{8x-44}{x-3}$

(c) $y=\dfrac{7x}{x+4}$　　(d) $y=\dfrac{25}{x-2}$

5. 求等邊雙曲線 $(x-h)(y-k)=C$ 經過下列 A, B, C 諸點並建立其方程式:

(a) $A(5, 7)$　$B(7, 5)$　$C(-1, -3)$

(b) $A(0, 0)$　$B(3, 3)$　$C(6, 4)$

(c) $A(-1, 2)$　$B(-2, 8)$　$C(1, -1)$

6. 問下列各方程式所代表之曲線究爲何種:

(a) $xy+2x-y-22=0$

(b) $2xy-6x+y-26=0$

(c) $xy-3(x+y)=0$

7. 有種種直線,其與縱橫兩軸相交之點爲 A 及 B, 惟一一經過一固定之點 $P(4, 2)$; 於是 AB 之中點必描寫一曲線; 求此曲線之方程式.

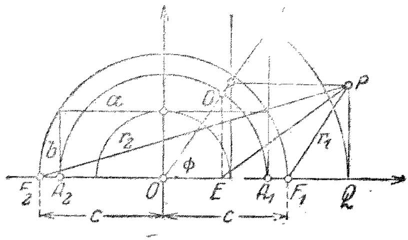
§64 雙曲線之焦點

與以前所論之橢圓相似,在雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之正軸上亦有兩特殊之點,叫做焦點. 以 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 作半徑,O 作中心,作一圓;當此圓與正軸相交之點 F_1 與 F_2 叫做焦點. 我們根據§59所論之法,求得雙曲線之一點 P, 名 $PF_1=r_1$, $PF_2=r_2$ 爲焦線. 於是

$$r_1^2=F_1Q^2+PQ^2=\left(\frac{a}{\cos\phi}-c\right)^2+(b\tan\phi)^2$$

因 $b^2=c^2-a^2$ 之故,此公式亦可寫作

$$r_1^2=\left(\frac{c}{\cos\phi}-a\right)^2$$



(67)

由是得

$$r_1=\frac{c}{\cos\phi}-a$$

據同理得　　$$r_2=\frac{c}{\cos\phi}+a$$

故　　$$r_2-r_1=2a$$

由是以論,雙曲線上任何一點,其與焦點之距離之相差爲一常數;而此常數無他,即爲正軸之長.既明此,我們欲作雙曲線之圖,復有一簡易之法.以焦點 F_1 作中心,任何 u 作半徑,製一圓;更以其他焦點 F_2 作中心,$2a+u$ 作半徑,製一圓;兩圓相交之處必爲雙曲線上之點,因 $r_2-r_1=2a+u-u=2a$.

我們名 $\frac{c}{a}=e$, 此量 e 在雙曲線之情形下爲大於 1 之一數.從因 $x=\frac{a}{\cos\phi}$ 及 $\frac{c}{\cos\phi}=\frac{c}{a}x$ 之關係之故 r_1 及 r_2 亦可寫作:

$$r_1=\frac{c}{a}x-a \qquad r_2=\frac{c}{a}x+a$$

或 $$r_1=ex-a \qquad r_2=ex+a$$

據上所論，經過 E 點〔觀圖 (67)〕有一直線 EP 與雙曲線相切於 P. 惟 $OE=a\cos\phi$,

故 $$F_1E=c-a\cos\phi$$

$$F_2E=c+a\cos\phi$$

於是 $$\frac{F_1E}{F_2E}=\frac{c-a\cos\phi}{c+a\cos\phi}=\frac{r_1}{r_2}$$

由是以論，兩焦線 r_1 及 r_2 在 P 點上實為 P 點之切線所平分.

§65 舉例

例一： 將坐標起點移於雙曲線之一頂 A_1，則其方程式將若何？ 答案： $\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $y^2=2\frac{b^2}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2$.

例二： 有一雙曲線，其漸近線為一任何直線 $y=mx+b$ 及一與橫軸垂直之線 $x=a$；求其方程式. 雙曲線上任何一點 $P(x,y)$ 其與兩漸近線之垂直距離 PA 及 PB 必成如下之關係：

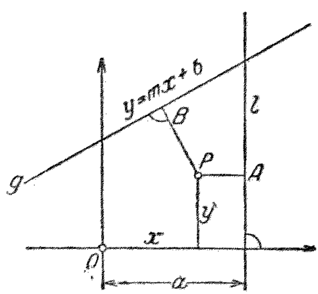


圖 (68)

$$PA\cdot PB=\text{常數}$$

但
$$PA=a-x$$

$$PB=\frac{mx-y+b}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

故
$$\frac{(a-x)(mx-y+b)}{\pm\sqrt{1+m^2}}=\text{常數}=C$$

或
$$(a-x)(mx-y+b)=C$$

或
$$y=mx+b+\frac{C}{x-a}$$

欲知 C, 可在此雙曲線上任擇一點 (x_1, y_1) 即可規定之.

例三: 據例二, 可知 $y=5-x+\frac{18}{x-5}$ 爲一雙曲線, 其漸近線爲 $y=5-x$ 及 $x=5$. 此雙曲線與橫軸相交於 $x_1=5+3\sqrt{2}=9.243$ 及 $x_2=5-3\sqrt{2}=0.757$ 兩點. 又 $(8, 3)$ 必在此雙曲線之上, 此點上之切線則爲 $y=-3x+27$. 試爲此雙曲線作圖.

例四: 有一雙曲線, 其漸近線爲 $y=0.5x-3$ 及 $x=0$ 並經過 $(3, 0)$; 求其方程式. 凡有此兩漸近線之雙曲線必爲
$$y=0.5x-3+\frac{C}{x}$$

因其經過 $(3, 0)$ 故
$$0=1.5-3+\frac{C}{3} \quad C=4.5$$

於是知其方程式爲
$$y=0.5x-3+\frac{4.5}{x}$$

又(9, 2)必在此雙曲線上,在此點上之切線爲 $y=\frac{4}{9}x-2$;又橫軸亦爲其切線. 試爲此雙曲線作圖.

習題

1. 以焦點 F_2 爲中心作一圓,其半徑爲 $2a$. 將此圓上任何一點 A 與其他焦點 F_1 相連;就 AF_1 之中點立一垂直線,則此必爲雙曲線之切線;證之.

2. 由焦點作直線與雙曲線之切線相垂直,問其端合成一何種曲線.

3. 雙曲線之焦點與其漸近線相去之距離爲 b;證之.

4. 若以雙曲線之中心爲極點,橫軸爲極軸,應用極坐標,則雙曲線之方程式爲

$$r^2=\frac{b^2}{e^2\cos^2\phi-1} \qquad e=\frac{c}{a}$$

若以其焦點作極點,由焦點至最近之頂爲極軸之方向,則其方程式爲

$$r=\frac{b^2:a}{1+e\cos\phi}$$

證之.

第九章　二次曲線總論

§66　橢圓拋物線及雙曲線之共同性質

橢圓,拋物線及雙曲線之性質已略如上述. 我們苟細考之,乃知此三種曲線,均可視爲某點運動時所成之軌跡 當其運動時,其與一固定點及與一固定直線之距離相比爲一常數. 我們試擇一固定點 F, 叫做焦點,並一固定直線 l, 叫做準線. 以 l 作縱軸, 由 F 至 l 之垂直線爲橫軸,於是曲線上任何一點 $P(x, y)$, 據如上之條件,必滿足

$$\frac{PF}{PL}=\text{常數}=e \quad \text{或} \quad PF=ePL$$

(PL 爲由 P 至 l 之垂直距離). 用坐標表達之,並名 OF 之長,卽焦點去準線之垂直距離爲 u 如圖 (69), 此條件亦可寫作

$$\sqrt{(x-u)^2+y^2}=ex$$

或

$$(x-u)^2+y^2=e^2x^2$$

或

$$(1-e^2)x^2-2\,ux+y^2+u^2=0$$

觀此方程式,可知其所代表之曲線必與橫軸相對稱,因之我們遂稱橫軸爲此曲線之軸. 又其與橫軸相交之點,可由下式(使 $y=0$)

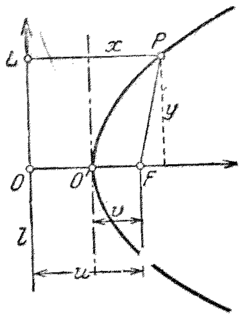


圖 (69)

$$(1-e^2)x^2-2ux+u^2=0$$

知其爲 $x_1=\dfrac{u}{1+e}$　　$x_2=\dfrac{u}{1-e}$

此兩點亦稱其頂. 倘將坐標起點移至於其一頂 x_1,則如上曲線之方程式爲

$$(1-e^2)\left(x+\frac{u}{1+e}\right)^2-2u\left(x+\frac{u}{1+e}\right)+y^2+u^2=0$$

或化爲　　$y^2=2uex-(1-e^2)x^2$

由其頂 O' 至焦點 F 之距離 $O'F$ 若名以 v, $O'F=v$, 則 $v:u-v=e$, 故 $eu=v(e+1)$, 如上之公式復可寫作

$$y^2=2v(e+1)x-(1-e^2)x^2$$

凡橢圓,雙曲線及拋物線無不包羅於此公式之內. 欲明此理,可將坐標起點移至於 $\left(\dfrac{v}{1-e};\ 0\right)$ (如上之方程式內,坐標起點在其一頂之上),於是由此可得.

$$y^2=2v(1+e\left(x+\frac{v}{1-e}\right)-(1-e^2)\left(x+\frac{v}{1-e}\right)^2$$

化簡之,得

$$\frac{(1-e)^2}{v^2}x^2+\frac{1-e}{(1+e)v^2}y^2=1$$

於此知 $e<1$ 時爲一橢圓，$e>1$ 時爲一雙曲線．至於 $e=1$ 時爲一拋物線，自更不待言了．

§ 67　公共之極形方程式

以焦點爲零點，由焦點至準線之垂直距離爲極軸，觀於圖 (70) 乃知 $PF=r$, $PL=u-r\cos\phi$；因如上之三種曲線既滿足 $PF=ePL$，

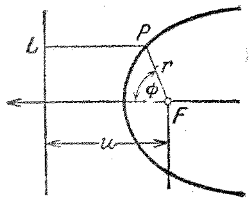


圖 70

故
$$r=e(u-r\cos\phi).$$

或
$$r=\frac{eu}{1+e\cos\phi}$$

其中 e 爲一常數 $e\gtreqless 1$.

§ 68　普遍之二次方程式

觀橢圓及雙曲線之方程式，其中均含有 x 及 y 之平方；如以其中心作坐標起點，則其方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

中除 x 及 y 之平方外，僅有常數之項；否則尚有 x 及 y 之一次項出現. 他如抛物線之方程式，亦爲一二次方程式. 惟最普遍之二次方程式實有如下之形式:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

以上所論橢圓，抛物線及雙曲線之方程式自均屬於此. 不甯惟是，此最普遍之二次方程式，其所代表者，亦不外此三種曲線罷了. 細考橢圓，抛物線及雙曲線之特性，其彼此不同之點，可由其對無窮遠之情形見之. 雙曲線者，依兩不同之方向，即其漸近線所指示之方向伸展至於無窮. 抛物線者，僅依一種方向，即其軸所示之方向，趨於無窮. 至橢圓則始終在有盡之區域. 故我們欲將此三種曲線加以分別之，但注意此即可. 我們試改用極坐標，

$$x=\rho\cos\alpha$$

$$y=\rho\sin\alpha$$

將如上最普遍之二次方程式化爲

$$\rho^2(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)+$$

$$\rho(D\cos\alpha+E\sin\alpha)+F=0$$

或
$$A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha+$$

$$\frac{1}{\rho}(D\cos\alpha+E\sin\alpha)+\frac{1}{\rho^2}F=0$$

欲研討其在無窮之情形,可使 ρ 漸漸趨大,換言之,使 $\frac{1}{\rho}\to 0$; 故欲使此方程式之成立,必求

$$A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha=0$$

或
$$A+B\tan\alpha+C\tan^2\alpha=0$$

於是得
$$\tan\alpha=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2C}$$

由是知此向無窮伸展之方向爲兩不同之方向,若 $B^2-4AC>0$; 爲一種方向,若 $B^2-4AC=0$. 要而言之,此二次方程式所表者爲

$$\left.\begin{array}{r}\text{一雙曲線}\\ \text{一拋物線}\\ \text{一　橢　圓}\end{array}\right\}\text{若 } B^2-4AC\begin{cases}>0\\ =0\\ <0\end{cases}$$

故由 B^2-4AC, 卽可決定此曲線之果爲何種.

復次,若 $B^2-4AC>0$, 則

$$A+B\tan\alpha+C\tan^2\alpha=0$$

有兩實根 $\tan\alpha_1$, $\tan\alpha_2$, 其積爲 $\frac{A}{C}$: 卽 $\operatorname{tag}\alpha_1\cdot\operatorname{tag}\alpha_2=\frac{A}{C}$; 若 $A=-C$, 則此趨向無窮之兩方向互相垂直; 故此曲線之爲等邊雙曲線,可以斷言.

又如 $B=0$, $A=C$, 則如上之二次方程式代表一圓; 故圓可視爲橢圓之一種特別情形,亦包含於如上方程式之中.

習題

問下列各二次方程式所代表者爲何種曲線:

1. $3x^2-4xy-32x+16y=0$

2. $2x^2+3xy-2y^2-5x+15y=0$

3. $8x^2+4xy+5y^2-64x-16y+92=0$

4. $x^2+xy+y^2+4x-y-11=0$

5. $9x^2-24xy+16y^2-200x-150y=0$

6. $(x+y)^2-4(x-y)+4=0$

習題之答案

§1　2.　R 之縱坐標及 T 之橫坐標爲 0.

4.　(a) 點之在第一及第三區之平分線上者;

(b) 點之在第二及第四區之平分線上者.

§3　12.　0.

13.　(a) $x=2.24$ 及 4.47;　(b) $x=3.54$, $F=25\ \mathrm{cm}^2$

§6　1.　$a+b$.

2.　$AB=11.18$　$BC=12.04$　$AC=7.62$　$u=30.84$

3.　$(3,\ 1)$.

4.　$AC=BC=10$.

6.　$\left(0,\ -\frac{1}{6}\right)$.

7.　$(4, 6)$ $(4\ \ -2)$.

§8　1.　$(1, 1)$.

2.　$(0, 0)$.

3.　$(1, 1)$.

4.　$C(-10, 15)$　$D(-2, 3)$　$E(8, -12)$.

§ 10 1. $86.5\ \text{cm}^2$.

2. $4344.3\ \text{cm}^2$.

3. $60.115\ \text{cm}^2$.

4. 0, 三點在一直線之上.

§ 12 4. $y=-0.9x+4.8$.

5. $y=2x-8$.

6. $y=-0.5x+7$.

7. (a) $y=2x-12$ (b) $y=1.5x-9$

(c) $y=-\frac{7}{11}x+\frac{92}{11}$

8. AB: $y=-x+1$; AC: $y=-\frac{1}{3}x+5$;

BC: $y=-2.5x+11.5$.

9. $(4, 0)$.

10. $\left(4\frac{2}{3}, 5\frac{1}{3}\right)$.

11. $(9, -22)$; 是.

12. 3.13 cm.

13. $(3.2, 6.8)$; $59°2'.5$.

14. $(21.54, 5.846)$; $24°9'$.

15. (a) $63°47'$ (b) $69°49'$

16. $\alpha=43°6'$, $\beta=38°5'$, $\gamma=98°49'$.

17. $\tan\gamma_2=\tan\gamma_3=\frac{m-1}{m+1}$.

19. $m=3$.

20. $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

§ 18 **1.** 1.94.

2. -1.786; 5.21.

3. 7.07

4. 10.7; 10.8; 13.9.

5. 10.7.

§ 25 1. $x^2+y^2=25$.

2. $r^2=1600:41$; $r=6.247$; $x^2+y^2=r^2$.

3. $x^2+y^2-2rx=0$; $x^2+y^2-2ry=0$;

$x^2+y^2+2rx=0$; $x^2+y^2+2ry=0$.

4. $x^2+y^2=4r^2$.

5. $x_1=4.828$; $x_2=-0.828$; $y_1=1.236$;

$y_2=-3.236$; $(h, k)=(2, -1)$; $r=3$.

6. $x^2+y^2-2r(x+y)+r^2=0$.

7. $x^2+y^2=r^2(3+2\sqrt{2})$.

8. $x^2+y^2=r^2(3-2\sqrt{2})$.

9. (a) $(1, -1)$; $r=4$. (b) $(4, 0)$; $r=5$

(c) $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $r=3$. (d) $(5, -4)$; $r=\sqrt{41}$.

(e) $(3.5; -3.5)$; $r=3.5$.

(*f*) 虛圓. (*g*) $(4, -1)$; $r = 0$.

(*h*) $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b}{2a}\right)$; $r = \frac{1}{2a}\sqrt{2b^2 - 4ac}$.

10. (*a*) $x^2 + y^2 = 29$.

(*b*) $(h, k) = (3.5, 2)$; $r = \sqrt{16.25}$.

(*c*) 直線 $y = 0.5x + 3$.

(*d*) $(2.625, -7.25)$; $r = 10.24$.

11. $(12, 4)$; $r = 12.65$; $x^2 + y^2 - 24x - 8y = 0$.

12. $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 36$.

13. $(4, 4)$ $(0.8, 2.4)$.

14. $x^2 - 12x + y^2 + 16 = 0$.

15. $x^2 + y^2 - 2r(x+y) + r^2 = 0$; $r_1 = 11.47$; $r_2 = 2.53$.

16. $x^2 + y^2 - 16(x+y) + 64 = 0$;

$9(x^2 + y^2) + 48(x-y) + 64 = 0$.

17. $y = x - 2$.

18. $(h_1, k_1) = (1, 6)$; $(h_2, k_2) = (-3, 2)$; $r = 4$.

19. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$.

20. $r = 7.5$ cm.; $y_1 = 2.725$; $y_2 = 1.83$ cm.

21. $y_1 = 2.2$; $y_2 = 2.84$; $y_3 = 4$ cm..

22. $x = \frac{4ar^2}{a^2 + 4r^2}$; $y = \frac{2a^2 r}{a^2 + 4r^2}$.

§ 27 1. $3x + 4y = 25$; $4x - 3y = 25$.

2. $y=2x\pm 4\sqrt{5}$.

3. $-3x+2y=0$; $3x+2y=18$.

4. $y=\frac{1}{3}\sqrt{3}x$; $y=-\frac{1}{3}\sqrt{3}x$.

5. $4x+3y=36$; $4x-3y=30$.

6. $(2+2\sqrt{2}, 2)$; $r=2$ 及 $(2-2\sqrt{2}, 2)$; $r=2$.

7. $(3, 2)$ 或 $(-3, -4)$.

8. $-1.6x\pm 3.66y=16$.

9. $y=\pm\frac{5}{12}(x-13)$.

10. $b_1=8+5\sqrt{2}$; $b_2=8-5\sqrt{2}$.

§ 29 1. $2(h_1-h_2)x+2(k_1-k_2)y+(h_2^2-h_1^2)+(k_2^2-k_1^2)$

$+(r_1^2-r_2^2)=0$.

2. $8x-8y-23=0$; $x_1=11.75$; $x_2=2.0$.

3. $k=-\frac{1}{3}$; $x^2+y^2-8y-\frac{39}{2}=0$.

§ 33 1.

$\alpha=$	$0°$	$5°$	$10°$	$15°$	$20°$	$25°$	$30°$
$\rho_1=$	15	14.89	14.54	13.94	13.04	11.74	8.66
$\rho_2=$	5	5.04	5.16	5.38	5.75	6.39	8.66

$\rho^2-20\rho\cdot\cos\alpha+75=0$; $\rho_1\cdot\rho_2=75$.

2. $\rho=\frac{a}{2}\cos\alpha+\frac{b}{2}\sin\alpha$.

3. $s=2r\sqrt{\sin(2\alpha)}$.

§ 42 1. $x=y=10$.

2. (4, 2); (−6, 4.5); 距離 = 10.31.

3. (a) ($x=4.658$; $y=4.316$) 及

($x=1.342$; $y=-2.316$).

(b) $x_1=x_2=\dfrac{1}{4}$ (切線).

(c) 不相交.

4. 在 x_1 時之切線: $y=-2.4x+7.2$;

$P(2.5;\ -1.25)$.

5. $\left(\dfrac{1}{2a}\tan\alpha;\dfrac{1}{4a}\tan^2\alpha\right)$.

6. $y=4x-36$; $y=-\dfrac{4}{9}x-\dfrac{4}{9}$.

7. (a) $x=\pm 3.33$; $y=\pm 2.217$.

(b) (0, 0); (6.823, 4.665).

§ 46 1. (2.5, −1.375).

4. (a) $y=-0.2x^2+0.6x+4.6$; (1.5, 5.05).

(b) $y=0.4x^2+0.6x-9$; (−0.75; −9.225).

(c) $y=-\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{4}{3}x$; (6, 4).

(d) $y=-0.08x^2+1.2x$; (7.5; 4.5).

(e) $y=\dfrac{1}{2}x^2-0.5$ 及 $y=-\dfrac{1}{18}x^2+4.5$.

5. $x=-0.16y^2+1.6y$; $y=-\dfrac{5}{8}x+10$.

6. $F=\dfrac{2}{3}s(h_2-h_1)$; $\dfrac{4(h_2-h_1)}{s^2}x(s-x)$.

7. $(4, 2)$; $(-6, 4.5)$; $F = 20\frac{5}{6}\text{cm}^2$.

8. $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{41}{8}$.

9. $y = -0.16x^2 + 1.64x - 0.64$.

10. $y_1 + y_2 = -0.1x^2 + 1.4x + 5$; 其頂 $(7, 14.4)$

11. $y = a\frac{\mu_1^2}{\mu_2}x^2 + b\frac{\mu_1}{\mu_2}x + c\frac{1}{\mu_2}$.

12. 拋物線; P = 焦點; g = 準線.

§ 51 1. $a = 10$; $b = 5$.

2. (a) $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$.

(b) $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

(c) $\frac{(x+1)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

(d) $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

§ 55 1. $y = -0.5x + 12.5$.

2. $y = -0.8x \pm 5$.

3. $yy_1 = \frac{b^2}{a}(x + x_1) - \frac{b^2}{a^2}x \cdot x_1$.

5. $\frac{3}{16}a^2$.

§ 61 1. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$.

2. $x=\pm\frac{a}{2}\sqrt{6}$; $y=\pm\frac{a}{2}\sqrt{2}$; $\gamma=60°$.

3. (a) $(y-1)^2-(x-1)^2=4$; $a=2$; $b=2$; $M(1, 1)$.

(b) $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; $a=3$; $b=2$; $M(3, 0)$.

(c) $\frac{(y-0.8)^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$; $a=2$; $b=2$; $M(0, 0.8)$.

(d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $a=\sqrt{\frac{C}{A}}$; $b=\sqrt{\frac{C}{B}}$.

(e) $\frac{(y+2)^2}{4/3}-(x+1)^2=1$; $a=\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $b=1$.

4. $a=\sqrt{7}$; $b=\frac{2}{3}\sqrt{7}$.

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

8. $x^2-y^2=a^2$.

§ 63 4. (a) $(x-3)(y-5)=21$; $(h, k)=(3, 5)$.

(b) $(x-3)(y-8)=-20$; $(3, 8)$.

(c) $(x+4)(y-7)=-28$; $(-4, 7)$.

(d) $(x-2)y=25$ $(2, 0)$.

5. (a) $(x-2)(y-2)=15$.

(b) $(x+3)(y-6)=-18$.

(c) $(x+3)(y+4)=12$.

6. (a) $(x-1)(y+2)=20$.

(b) $(x+0.5)(y-3)=11.5.$

(c) $(x-3)(y-3)=9$

7. $(x-2)(y-1)=2.$

§ 65 2 爲一圓,其中心爲O,半徑爲a.

§ 68 1. 雙曲線.

2. 等邊雙曲線.

3. 橢圓.

4. 橢圓.

5. 拋物線.

6. 拋物線.