中法文化叢書

邏輯之原理及現代各派之評述

Arnold Reymond 著
何兆清譯

商務印書館發行
一九三六

中　法　文　化　叢　書

邏輯之原理及現代各派之評述

Arnold Reymond 著
何　兆　清　譯

商　務　印　書　館　發　行

目　　錄

譯者序

西方邏輯一學，自十九世紀來，新潮競起，派別紛歧，頗呈一混亂之觀。其原因由於在十九世紀發展極速之各種科學中，有幾種科學，如數學，心理學，社會學，進步極速，其結果遂在邏輯中引出許多新問題，造成許多新理論。

第一如穆勒(Stuart Mill)由心理學立場，宣稱思想之形式法則，不過是由感覺造出的一種心理習慣。即如矛盾律，亦視爲經驗中最習見最普遍之法則，其所指示之矛盾，實與吾人之用味覺以定食物之可食與否相同。

斯賓塞(H. Spencer)則於穆勒所倡習慣說之上，加上遺傳說，謂由遺傳可將千百年傳下之思想習慣保持永不變。

實用主義者習勒(F. C. Schiller)，由心理學之立場，攻擊邏輯的眞理問題，謂形式邏輯不明吾人所立判斷之重要意義。一

判斷之眞，並非繫於吾人所賦予之邏輯形式，而是繫於下判斷者所有的心理內容，及所處之環境。將思想之形式與其內容分開，卽不能道出眞理由何組織而成。

社會學派如賴危·布魯兒（Levy-Bruhl）等，則由原始社會之研究，謂人類思想之普遍法則，並非永恆不變的，實隨人類進化程度之高低而異。如野蠻人之對事實下判斷，卽不全似文明人，係按同一律及不矛盾律以思維。有若干種類文明，卽應有若干種類思維推理之法式。

故就心理學派與社會學派觀之，形式邏輯之原理，並無普遍之價值。邏輯應與心理學及社會學所研究之事實相連，始有眞切之意義。

第二，與上述趨勢相反者，在十九世紀中，有摩爾根（Morgan）布爾（Boole）等，遠承來布尼慈之說，採用數學的技巧，發揮形式邏輯之聲光，另立出一種符號邏輯之體系，成立數理邏輯一派。

並因在十九世紀數學中有兩大新發見，益促此派將布爾所創之業擴張光大。卽一爲非歐派幾何學之成功，將康德在其純理批判大著中所創時空之先驗直覺說推翻，可使學者重新定出與一種空間形式有關之一系基本命題，以創立一種新幾何。其次爲

康托 (J. Cantor) 創出之總集論(La théorie des ensembles)，不再視數學的無限，爲一種空間的量或數目的量之極限，而視數學的無限，可列爲各種數目的類 (Classes des nombres) 此各種數目的類，是可受邏輯演式支配。由是遂產生出數學與邏輯之關係。

由此兩種數學的新發現，遂令十九世紀末葉以來之數理邏輯，產生無數派別。

一爲邏輯的代數，徐裸德 (Schrœder) 三大册之巨著足爲代表。古士哈 (Couturat) 曾將之約述於一小册中。

另一支發生於意大利，以斑諾 (Peano) 巴多阿 (Padoa) 爲代表。其努力專限於數學方面，以闡明用於數學中之演繹法及證理爲主，但尚未將數學化入邏輯中，而仍視數學與邏輯各別。

至在英國，則有羅素及懷特赫德努力於數學的邏輯化，欲將數學全部化入於邏輯的觀察與式子中，並欲將力學物理學以及其他科學，先化入數學形式中，再與數學同逐漸化入形式邏輯之中。

羅素之門人尼哥 (Nicod) 及威特根斯坦 (Wittgenstein) 則略修正羅素之說，並各有其特別發揮貢獻之處。

此外如希爾伯 (Hilbert) 亦循羅素所採之途徑，主張將數

學之基礎建立於一種不可再分而又是自成一類的元素上。

又如布魯維(Brouwer)及外爾(Weyle)則有一種新企圖欲將排中律在數學證理中之價值縮小。

故一方由心理學及社會學之發展，他方面由數學中兩種新發展，遂使邏輯至本世紀初葉發生出極端相反之兩派趨勢。一派竟至否定邏輯法則之普遍永久性，只承認有多少固定的心理習慣。他一派如羅素等則發揮形式邏輯之聲光，竟欲將應用邏輯併入於形式邏輯中。

在此相反之兩派思潮中，試觀彼此議論紛紜，互相攻擊，已足令人目眩神搖。而在每派中，又各持論不同，主張互異，即如數理邏輯派中，於方法既無公認之見解，於邏輯之眞義亦無一致之結論，愈足令初學者莫知所宗。現代邏輯，在此混亂紛歧之現象下，實需一位大師，廣覽博閱，深入各派之中心，評其短長，作一比較綜合之研究，以爲學者之助。雷蒙教授所作『邏輯之原理及現代各派之評述』一書，即甚符合此項要求者也。

雷蒙爲瑞士羅桑大學 (Lausanne) 教授，平生哲學著述甚多，計有:

1 邏輯與數學（1908年出版）。

2. 古希臘之科學發達史（1924年出版）。

3. 柏格森哲學與理性之問題（1904年出版）。

4. 科學眞理與宗教眞理（1913年出版）。

5. 哲學研究與現代（1926年出版）。

此外尙有宗教之研究多種。

至『邏輯之原理及現代各派之批評』一書則於一九三二年出版，此書內容原係黎氏於一九二七年及一九三〇年先後兩次在巴黎大學主講『現代數理邏輯』之講稿，並略加修正而成者。全書內容豐富，將現代各種重要邏輯著述，提要鉤玄，幾於網羅無遺。其體裁係略述各派所採之新立場趨勢後，復加以個人之按語，明定其長短得失，令人一讀此書；頗能了然於現代各派邏輯之價值地位。譯者因感吾國今日出版界，尙無此類著述，爰將此書譯出，以餉讀者。

全書共分九章，第一章述邏輯歷史發展之概況。黎氏對古代邏輯如何由建立幾何學中原始命題遇着困難而後產生，述之甚詳。次述到亞氏邏輯之構成，在將詭辯派所喜弄的虛玄解決。迄文藝復興時代，因數學物理學之革興，亞氏邏輯頗受各方之攻擊，於是十七世紀後，邏輯遂分爲三途發展，一路向歸納邏輯方面，以洛克爲代表。第二路爲形而上學的邏輯，由康德奠其基，直至黑格爾之辯證法，將邏輯改造爲一種觀念的形而上學。第三路

由來不尼慈之天才努力，將邏輯向代數形式方面發展。及至十九世紀，一方因數學，他方因心理學，社會學進步之結果，遂使近代邏輯集中於邏輯原理之討論，追問在思想發展之進程中，是否有不可少之形式原理在，是否無此種形式原理，思想之活動卽爲不可思議。此項討論，黎氏分述於以後各章，如第二章卽論定邏輯爲規範科學，以研究眞妄價值爲務，並立出眞理在邏輯上應具之條件。第三章卽進將十九世紀流行反對邏輯形式原理之實用主義派，社會學派等辭而闢之，將邏輯原理之普遍價值指明。第四章則評述新多瑪派之邏輯，並闡明概念論應採之說法。第五章則評述羅素派之新邏輯，第六章則評駁布魯維 (Brouwer) 所倡之新邏輯。第七章則評述羅素化數學入邏輯之不可能處。第八章則評述自希臘以至近代數學證理之邏輯結構。

讀者試詳閱第二章討論眞理問題及邏輯之規範性，卽可明瞭作者對邏輯所持之態度。數理邏輯派多視此問題爲空論，但黎孟則視此爲研究邏輯應先認清之點，此點論清，始可進而衡論各派之得失。依黎氏，邏輯爲規範科學之一，與道德學，美學同，同以建立價值判斷爲主。規範科學所講者爲兩種相對的價值，如道德學論定善與惡兩種價值，美學論定美與醜兩種價值，邏輯則論究眞與妄兩種價值。邏輯視一命題是有眞有妄，且定出求眞之範

規，以便立出至眞之命題。亦如道德學視一種行爲或動機有好有壞兩面，將善之標準確定後，卽進而立出達於至善之規則。邏輯所論眞妄之價值，爲一切科學發展之基本。因無論何科，所研究者不外尋求思想自身之合理一貫，及尋求思想與實在 (La realité)之合理一貫，換言之卽不外辨其眞與妄也。

眞與妄之價值，是與一切思想之活動相連的。眞理，可界說爲思想上的一種自得，可用判斷表出之，係由各方面的思想相合融貫而成，一方面在思想之自身能原委一貫，他方面又能與事實相通符合。世有將眞理分爲形式的與實質的兩種，而稱形式邏輯所研究者爲形式的眞理，應用邏輯所研究者爲實質的眞理，黎氏認爲錯誤。思想如僅合於形式原理，而與實在不合，決不能稱爲眞理，反之亦然。故黎氏將從來模寫的眞理說，法定的眞理說及效用的眞理說，嚴加評駁，而謂眞理必指合於人人彼此心思的思想，爲一切正常思維之人類所共認，而又與客觀實在關係相合者。如此的眞理，其成立須有兩種因素，一種爲主觀的思想的形式原理，如思想三律主張思想須求自身同一與不矛盾是。他種因素爲客觀事象之性質，能爲思想所攝取。兩種因素相連合，然後產生出眞或妄之判斷。故眞理包攝有兩重相通連貫，一爲思想自身的原委一貫，一爲思想與事實相通連貫。蓋黎氏視眞理係思想與

事實兩者互相參照相合而成者也。

黎氏對眞理之主張如是，故一方在第三章中對於實用主義派，心理主義派及社會學派之忽視思想的形式原理，及排斥思想三律之價值者，則深加批評。因闡明人類思想活動之本身，實賦有三律與生俱來，缺一不可。他方在第七章中申述數學不能化入邏輯之種種理由，卽以明形式邏輯派主張邏輯不是論究眞正命題間之關係，而是專論形式的無眞妄可言的命題函數間推演關係，亦爲失當。因思想在活動時，決不能離卻一定之對象也。

顧黎氏雖指明數學不能視爲邏輯之引伸，但對羅素所貢獻的新邏輯(La logistique)則極加贊賞。故第五章述新邏輯及邏輯的運算，列舉優點，詳加解釋，其明暢實爲罕見。此外黎氏對於數學所需要以構成及發展成爲科學之一切概念的邏輯組織，研究極深，發揮甚透，讀者試詳閱第八章，述幾何公理的邏輯結構，及幾何證理與算術證理的發展概況，不僅可明數學推理的邏輯如何發展，且於數學技術之內容，亦可增多無窮之認識，實爲講數學邏輯極稀見之作。

總觀黎孟全書，對於現代各派邏輯所獲之地位，及其意義與價值，述之甚詳。除於實用主義派，心理學派，社會學派，新多瑪派，及布魯維之直覺派，抱批評闢本之態度外，於數理式之邏輯，

則特別發揮甚透。至第一章述近代邏輯發展之歷史時，雖曾提到黑格爾派之辨證邏輯，但此後書中全未論到此派，蓋因黎孟此書，原係以演講近代數理式的邏輯為中心，故除述及數理邏輯在現代思潮中所引起有關係之問題外，餘如黑格爾之觀念的形而上學，卽不暇詳述之矣。

一九三六年三月九日

原　序

拿郎德(André Lalande)先生於一九二七年及一九三〇年先後兩次被請赴開羅大學講學，余卽蒙巴黎大學文學院，邀至巴大演講數理式的邏輯及該派邏輯在現代思潮中所引起之問題。

此書卽爲兩次講稿內容略加修正而成者。目的在指示學生以現代邏輯所獲之地位及其意義與價值；但此書尙非一種袖珍課本欲將近二十年來之數理式邏輯詳述之者。講到近二十年來之數理式邏輯，吾人多提到英國，德國及義大利方面之著述，因在法國，此方面之研究者，似多不幸。如古士阿 (Couturat) 英年凋謝之後，都斐米耶 (H. Dufumier) 及尼哥 (T. Nicod) 在大戰時已皆爲國犧牲。最近曾以數學證理之論文著名一時的韓布郎(J. Herbrand)亦因登阿爾卑斯山遇險而死。

作者之希望，在以此小規模之作物引起用法語之學生對此

此页无页码

問題發生興趣，此等問題雖偏於形式方面，而實際是論到眞理之問題。

論到眞理之問題，吾人並不欲使邏輯脫離一切形上學之關係，即欲亦不可能，但吾人須將邏輯由一種特殊的形而上學中解放出來。故吾人曾將眞理可能成立之條件，與由此等條件獲得之眞理分別。由是一方即可進將『妄』解爲包含有『眞』的可能性，但非包含眞；他方面則以『謬』(l'absurde)附屬於命題函數(Fonction propositionnelle)及其所界說之事實上。由此法，吾人自信足以證明矛盾律及排中律在思想活動中常保有辨別眞妄之價值，與同一律相同。

至對邏輯與數學之複雜關係，吾人似覺不能不持昔日所立「不可計量的類」及「眞可計量的類」之區別。不可計量的類（即邏輯的類），重視足將一種雜多現象之原素分開或連合之性質。反之可計量的類（即數學的類），則僅重視一雜多現象之元素之可彼此由其數目區別者。再則按所謂「可剖分的原素」或「不可剖分的原素」之數値言，數與單位，可界說爲含有可分性的或不含可分性的東西。

此可分性之極限，乃是數學家的技巧及符號 $<\varepsilon$ 及 $>N$ 之函數。『無限』之公理，是不能證明此等符號之位置，由吾人不

能解『連續』爲一個無窮原素之總集之有 $2^{\aleph}$ 爲冪數者卽可知之。故吾人由是在布魯維 (Brouwer) 所主張不可分的事件，及希爾柏 (Hilbert) 所主張數而上學 (Métamathématique) 純粹形式之間採一中介之地位。

本書大部分印就後，卽有滿演生(E. Meyerson)，覺金生(J. Jörgensen)及波里耶 (R. Poirier) 諸氏發表許多文章，論到吾人所研究之問題之一部或全體。諸氏之見，大都證實吾人所持之主張，讀者可於吾書結論中見之。

末了，余對巴黎大學諸同仁及巴黎大學校長霞勒第 (Charléty) 先生之盛意隆情，實銘感無旣。至巴大男女諸同學聽講不倦之精神，給余以極可貴之鼓勵，亦爲余所甚感。謹獻此書，以誌不忘。

一九三二年七月，序於羅桑

導　言

邏輯在今日，亦如數學，呈一混亂之觀。在一切科學中，邏輯一科，應當組織較善，而反不然，其基礎反有最多的爭論。而吾人反常謂一理能得邏輯的證明，此理卽可達最高的正確性，此實一怪異之事也。

自吾人觀之，此種混亂現象，一方實起於邏輯所研究的對象，他方則因受十九世紀科學奇異發展之影響。

第一，極與吾人所想的相左者，則爲邏輯之領域及任務；極難加以界說。試一讀拿郎德先生所編之哲學辭彙（Lalande: Vocabulaire Philosophique）講邏輯一條時卽可知之。吾人此時暫勿庸深入各派論辯之中心，試一檢討邏輯最流行的界說，謂邏輯之目的，在求思想自身之相合（l'accord），及思想與實在之相合；又謂邏輯之任務，卽在研究可以得到此兩種相合之法則。

由此界說，邏輯卽自然能分爲『形式邏輯』（論思想自身的相合）及『應用邏輯』（論思想與實在相合）兩種。

而此兩種相合之難得，則可約述如下：

吾人心中所有之觀念，表於言語之中則爲名詞。諸名詞之間，有一定相連之關係，可用命題及推理表明之。但此等命題及此等推理，須依何種法則，始可將名詞或觀念之眞理關係表明之？解答此問題者，則爲形式邏輯。

但在吾人心中之一切觀察，無論其最後性質爲何，總與吾人所居之環境實在，發生一種神祕之關係。此等環境實在，現於吾人之心中，則爲感覺，爲感情，爲印像……等。旣然如此，則必有以下之結果：一切觀念遇着此等事實，卽常能改變其內容。

於是卽當考驗觀念與觀念之相通連貫，是否卽與事實關係所表現之體系相符合。

廣義說的應用邏輯，卽以尋求此種考驗之方法爲務。

現在卽可明白所謂思想自身的連絡條貫及思想與實在相通連貫之意義。但欲定出可以得到此等相通聯貫之結果之標準則更見困難。

第一，語言是隨各民族而異其構造的，卽同一民族之語言，亦卽隨時代變化。試問在此情形下，如何能將一名詞及此名詞所表

述之觀念，立出一精確之關係？且在此關係中，如何能將其區分出孰爲必然不變的，及孰爲偶然常變的？

再一方面言，如吾人心中之觀念，並非是永久不變之實體，而是隨經驗之範圍以推廣，則有何法可使其常與實在相切合？如吾人不確知其法，將用何標準以定孰種觀念爲合宜，孰種觀念爲不合宜乎？例如古之幾何學家，視空間爲有限的，苟有人欲論到無限，卽以爲不可思議，而視爲荒謬。然而近代之幾何學，卻因能超越此限制，始獲到許多驚奇之成績。

最後，可追問指導思想活動之形式原理之眞正價值爲何。此等形式原理是否卽爲由數千年來之社會強制力所造成的一種心理習慣？抑或者此等理原眞有其形上的基礎，如無之思想卽不能認識其自身及認識實在乎？

此等問題，皆難於解決，至謂能夠造出一種形式邏輯，而無需預先解決形而上學，心理學及知識論等問題，殊足令人懷疑也。

總之，於此可明余在開端時所述的第二理由謂邏輯難於作成一獨立的研究，因其發展，係與其他科學之發展相連的。

此可由邏輯發展史之一瞥證實之。在下節邏輯史之一瞥中，余特注重古代時期，因其最能指出邏輯發展之趨向也。

邏輯之原理及現代各派之評述

第一章　邏輯史一瞥

縱觀古代埃及與美索布達尼平原之文明，從未見成立有邏輯一學。惟在司法實際裁判方面，尚可發見些成分。因據今日所獲此等古國之典籍觀之，其司法實際裁判，分別罪情，決定刑事，須用推理，而此種推理，卽預示出對立命題（Les Propositions opposées）及三段論式。例如在哈姆那比法令之前有一條法律曰『如有婦女向其夫曰：子非吾夫，則此婦當被投河』（註一）。此條假定，在法律實施時卽可變成三段論式曰『凡婦女背棄其夫者，當被投河，今此婦曾背棄其夫，故此婦當被投河』。

又例如裁判官是不許更改既定的判詞，更改既定判詞者，將

（註一）參考 L. Delaporte: La Mesopotamie, 1923, p.100.

受免職的處分(註一)。蓋裁判官自反其判詞，則爲自相矛盾，此矛盾可表述如下之對立命題曰『凡旣宣告之判詞是確定的，而有些宣告的判詞是不確定』。

故在立法材料中，方可發見東方各國有一種研求眞理的注意。但據作者所知，埃及人與嘉爾泰人並未立出研求眞理之法式或條件。至於印度，據瓦丁頓之說(註二)，古佛教徒曾用三段論式的推理，但亦未立出推理的機構形式，故未見印度即爲三段論式之搖籃地也。

邏輯之研究，實起於希臘。當日冉龍(Zenon)與披打哥兒斯派(Pythagoriciens)互相爭辯，即顯出算學的概念與推理兩者應用至事實上之困難。

柏門尼德(Parmenide)曾曰，眞的存在是單一的，不變的，不可分爲部分的，因眞的存在是連續的。披打哥兒斯派即引事實譏之曰，有兩條羊在牧場中來來往往喫草，即明見其彼此獨立分開，何以謂其爲不可分的連續體乎？

於是冉龍向披打哥兒斯派駁詰曰『君等謂一切存在，皆是數的不連續，一直線一空間皆係積點而成。信如君等之說，則運

(註一)參考 Delaporte: La Mesopotamie, p. 101.

(註二)參考 Essai de logique, p. 87.

動爲不可能。一動體 M 卽不能走盡一直線 A B,因其先須走二分之一,繼走四分之一,繼走八分之一……如是下去是永走不到盡頭的』。

冉龍此說,豈眞謂運動爲不可能乎? 對此問題,已無典籍可考,吾人不能作決斷的答覆。

無論如何冉龍所欲證者,至少爲證明運動之觀念是與披打哥兒斯派所主張一切存在爲數的不連續之說是不相容的。

今如謂思想連貫合理卽足爲事實的連貫合理之準繩,則披打哥兒斯派之說,卽當廢棄。故在此種推論方式中,已可微微見到近代的論式。蓋有一假說於此,被暫認爲眞,卽當再視由此假說推得之結論是否可能成立。如其可能,則此假說卽可認爲眞,如不可能卽當放棄之,而另尋其他假說。

此種推理方法,至少在算學方面,已明白確定,而爲柏拉圖以前之幾何學中重要元素,蓋柏拉圖以前之幾何學之基本原則在披打哥兒斯學派中已構成不少,而爲後來歐氏幾何學原本之範式也。

此等幾何元素之發展步驟,如次:先立出些命題及定義,將空間關係之特性表出之,然後用直尺圓規構出各種幾何圖形及其眞的關係,而構圖之可能性,卽爲該圖存在之必要的與充足的

條件。

但用以構造幾何圖形之種種基本元素，有何價值乎？此爲冉龍之辯及以後詭辯派所辯之點，曾大擾動人心者，例如直線與曲線不能互變之例是。

因詭辯派，尤以安悌坊(Antiphon)爲最著，對於此事之論辯，曾大困其敵人曰『君等謂正多邊形之邊數增多至無限時，卽可漸近爲圓。試思多邊形始終仍爲多邊形，仍爲無數直線合成之形。今如君等之說，卽無異謂直線可等於曲線』。詭辯派並由是推論到道德的觀念與規範，亦無何種確定不易之性質。此結論尤爲蘇格拉底(Socrate)所反對。蘇氏將數學物理學之問題，置之不論，專致力指明道德概念之不變性。不過道德概念，未能有與物理學數學同等之普遍性而已。因許多道德概念之間，可包含有種種變化關係，此所以同一道德規律，可有各方面的應用。例如正義公平一概念，係包含有各種特殊性，視其對於家庭，對於同國之人，或對於敵人，而異其應用。

柏拉圖擴充蘇氏之概念說至各方面，將算學物理學皆包含之，成立其世所共知的觀念論(idealisme)謂殊相(particulier)須參有共相(universel)然後存在。柏氏由是推得一種有趣的推理說。

柏氏之言曰，推理有兩種。

其一，係由假說 (hypothèse) 出發，由假說以推出結論，如幾何學中用圓規直尺以構造圖形是。

其二，則由假說反去追尋可以證明假說成立之原理。(按卽解析法)。

第一種推理，是必藉助於感覺意像以推證，第二種則爲純粹的思維，純用觀念以運思。

由是可見柏拉圖並未將邏輯與形而上學及知識論分開。

如是，苟將柏氏之觀念回憶說放棄，試問演繹推理所據爲本的原始觀念將有何價值?

於此，曾如恩利格司 (F. Enriqués) 之言，遂有兩種思潮表現(註一)。

其一，屬於德摩克利圖 (Democritus)，其他屬於亞里士多德(Aristote)。

德摩克利圖將知識分爲兩類，其一爲純粹的，正確的，因其最爲精純的，其他爲不純粹的，因其係直接附屬於感覺的。

使吾人深覺有興趣者，爲第一種，因其係以概念爲本，而概念係由感覺中重複比較而成，且能預測可能有的新經驗。此時

(註一)參考 L'évolution de la logique, 1926.

之概念可稱爲公理，爲亞里士多德及歐克立德所常道。

此等公理，並非是先天生就的觀念，乃是些假說，爲吾人應付事變所造者，而此等假說，可由經驗逐漸證實之。

故德摩克利圖可稱爲第一人，首先見到凡演繹科學推理所根據之諸原始命題，皆屬假設性也。

雖典籍甚少可考，但德摩克利圖之意見約可如上所述；吾人可由其對於後來斯多噶學派（Stoiciens）中倡概然說者（如 Carnéade）及倡懷疑論者（如 Sextus Empirieus）所生之影響，卽可間接證實之。

至於亞里士多德，綜合其前輩之思想，幾將邏輯一學中各部創造完成，惟於形式邏輯與應用邏輯之分尙未指明。

自亞里士多德觀之，邏輯應爲一切科學證理之工具；不過有一難點。

卽所謂眞實的只有特殊個體。而科學之知，則爲普遍共相。

亞氏以爲如特殊個體，係由一些質料（matières）與法式（formes）兩者合成，則此困難卽可除去。法式是可用智慧在感覺事物中抽象而得，此時在心中之法式，卽是些觀念。觀念等是可按其內包與外延之關係，而有一定的次第等差，特殊個體卽由此等外延與內包之關係，以附麗於本體上而得說明。

既然如此，則欲實施一條證理時，卽當由一些界說淸楚而又能表述實物特性的名詞出發。顧因將一切名詞皆爲之界說，爲當然不可能之事，卽當以一些無可界說而又能令人一見而明的公理或公設爲據。

在此等條件下，則一完善的證理(démonstration)，卽可歸到三段論式。因三段論式可將個體附屬於適當的類與種或本體上，而闡明其性質也。

此種證理，卽可標出眞確的知識。當一種推理所據以爲本的基本概念，缺乏一見明白之意義，僅帶有近眞之性質時，則由是推得之知識卽爲辯論的知識。至於由個體特例以推到公例之歸納的知識，苟在個體選出之特性是普遍的，而爲一同類中之一切個體所公有者，則此歸納的知識卽爲正確的。

亞里士多德在邏輯方面之貢獻，實極奇偉，但其邏輯所根據之形而上學，則大有可議之處。布郎雪維克氏(M. Brunschvicg)曾屢述亞氏邏輯中含有生物的目性在，極不適於算學與物理學的證理。

因三段論式只論到類與種(genre et espèce)互相包含之關係，僅便於實施呆板的分類，不能證出近代所稱的自然法則。如算學及算學的物理學中所有的函數關係，係用等號(＝)表示

之者，在算學及物理學中之應用比之亞氏邏輯所講的包含關係尤爲重要。

三段論式僅是一種很好的武器是將亞氏時代之詭辯家所喜弄的一些曖昧不清含義兩可之辭釐清。布勒以耶(Bréhier)曾云亞氏之創造邏輯，亦在欲制止此等詭辯之風而已(註一)。

至近代科學如何應用三段論式吾人下次再詳論之。

亞氏所立之邏輯格式大爲後世普遍的歡迎。惟斯多噶派則欲改變亞氏邏輯之眞義與價値。但在古代，雖有克利西勃(Chrysipe)之推崇傳授，此種改造之企圖，仍少人了解，且遭西賽羅(Cicéron)的嚴厲批評。卽近代學者如佛郎克(A. Frank)冉勒(Zeller)及勃郎特(Prantl)，亦斥責斯多噶派之邏輯，只是亞氏邏輯的一種卑鄙的模仿。

直至二十世紀之初，始發見許多贊同斯多噶派邏輯之意見。據布羅霞(Brochard)說，斯多噶派之邏輯，在努力創建自然法則，此自然法則，乃是近代科學之基礎(註二)。布勒以耶亦述及斯多噶派此種努力之好處(註三)。

(註一)參看 Histoire de la Philosophie, I. p. 173.

(註二)參看 Etudes de la Philosophie ancienne, p. 221.

(註三)參看 Histoire de la Philosophie, I. p. 300.

斯多噶派之邏輯係受安梯斯坦(Antisthène)的唯名論及醫學理論之影響，其說如次。

第一須先將感覺材料與事物變象"Les lecta"分淸，惟事物之變象始能爲辯證之對象（研究眞與僞之判斷）。

感覺材料，是一切公共概念所由本，宗教的及道德的公共概念亦然。因須認淸外面世界及人類行爲，始知信仰上帝，及服從正義公道也。

感覺材料被攝取於心中時則爲意像(ropesentation)。意像能示吾人以特殊實物之形狀（如此人，某處的樹等）。如是卽可引起精神上的一種是非的理解。當是非的理解能適當時，此意像卽可理解而可爲科學思想之出發點。

至事物變象則指個體事物所有的變化情況。如蘇格拉底跌在地上，生病……等。這些變化情況，是屬於個體的，因蘇格拉底之病決不全同於柏拉圖之病也。至蘇格拉底之跌地，亦決不全與他人之跌地全同。

由是可知事物變象(lecta)所指者是無形迹的，無實在性的，因如跌地一事，決不是永存於天地間的或永遠附麗於蘇格拉底及其他人之身上者。

旣然如此，則斯多噶派辯證之目的，卽不似柏拉圖之尋求超

越感覺現象的一種觀念界，亦不似亞里士多德之尋求法式界的次第等差。此派辯證之目的，乃在注意目前見到一類事物所生之變化的關係，足以預測未見到的其他變象。

例如云『若此人有一創疤，則因他會受過傷』，或反之『如此人受傷，則他必有一創疤』。

斯多噶派以爲如此去觀察事變的因果關係，卽可免除種種困難，如柏拉圖所講的觀念的參照作用（Participation des idees），及亞里士多德所講概念的外延內包互相包含關係所引起者。實則在事實上如無亞里士多德所分的屬，種，及本體之時，人們亦決不問西施未攝盡一切美性而何以亦能如是之美的。

由是則邏輯可化爲簡單。除了一些個體命題外，不再有其他，而個體命題已不再用繫詞『是』字表述主詞及表詞互相包含之關係。此等個體命題是由兩語合成，其一表示主詞，其他表述主詞所生之事變（卽動詞）。

如將此等單稱命題分開觀之，並無補於知識；但其好處，在能產生複合判斷，可分類爲設言判斷（如天明則必光亮）；選言判斷（或天明，或發光亮）；因果判斷（因爲……）；數量判斷（多或少之表示）。

由此等複合判斷，卽可得出幾種有價値的三段論式。例如

說：『如天明，則必發亮。今天已明（或未明），故發亮（或未發亮）』。此處即無需研究三段論式之格(Figures)與式(modes)，因為單純命題總是些單稱命題，僅有主詞及動詞兩端而已。

至三段論式之重要點，為大前提所建立之關係。但由此複合判斷所成之大前提有何價值？斯多噶派則遲疑不決。在辯證方面他們以為此類大前提所建立者是異中推同之關係。例如說：『有創痕』即無異是說『曾受傷』此二語所指者實即同一事。惟如是則邏輯即不能發見新知，因其不能於事實的雜多因素中求出其眞實的關係。故斯多噶派在實施方面，則放棄辯證的立場，而視由許多經驗的證實，即足保證因果關係之實在。

但這樣的見解，足將其所持的唯名論推翻。如果惟個體及個體的殊相是眞實的，則由一個體至他一個體間，即無由知其何以會有一定相同之關係。自然，在斯多噶派則以為有上帝（或天命）保持事實界有其合理之關係，但上帝如係按柏拉圖之觀念以支配世界，或按亞理士多德之法式以支配世界，則當放棄唯名論之說法。抑或者上帝之支配萬物，係按適於各物之計劃而行，而人又從未確知有對此個體有價值者對其他個體亦有價值之例。

由此即可見斯多噶派之理論，與近代自然法則之觀念，有些不同。近代科學視一羣現象所具之常住不變關係，不是人們對事

物的一種看法，而是事物現象的本身組織結構。個體的存在及個別的環境，須受此種不變關係之支配，始有意義可尋。例如物體下落之法則與物體之形色性相無關。故斯多噶派所視爲重要者，近代科學則以爲無關宏旨矣。

但斯多噶派之邏輯雖不完善，仍有不少的趣味。如其所倡之同意說，卽近於由心理方面去說明『確信』之意義；他方面又預想到研究思想之法則時，不當以概念爲本，應當以判斷爲出發點，且曾闡明設言判斷在科學求知中之功用與價值。此派並欲以聯絡個體事實之因果關係與函數關係，去代替亞氏邏輯所講的包含關係，可惜尙未成功。

總之，可見邏輯在古希臘時乃由建立數學（尤其是幾何學）的一些原始命題遇着許多困難而後產生。

至中古時代，亞氏邏輯盛行一時，而經院學派之努力，亦發生不少效果，如唯名論，唯實論及概念論三派之爭，卽漸闢出新園地。三段論式之各格式與規則，皆有精細的研究與分類。且奧康學派(L'école occamiste)又指出觀察法與實驗法之重要。

至文藝復興時代。因數學與物理學有突飛之進步，各方皆欲起而脫離亞氏邏輯之束縛。

倍根（Bacon）卽首先用一種新邏輯名曰發明新知的邏輯，

以與亞氏邏輯對抗。他視『三段論式之論證形式，只宜應用至一般通俗科學如道德學法律學，政治學及神學中，因其深適合於人類智慧之弱點。如在物理學中，則須用種種努力，以研究自然之理，不似與人爭辯。如用三段論式，卽獲不到眞理。因極精細之辯論，決不符合於自然變化之法則也』(註一)。

倍根之說，頗得其當代與後代之歡迎，但至十九世紀，則頗爲人所議。人謂其不知假說之價值，且不知數學在歸納科學中之功用；並將歸納科學之目的弄錯，而俳徊於亞里士多德之法式及相依而變之關係兩者間而無所決擇。卽就其所成就者而論，亦不過是些觀察的手續，並無歸納邏輯之原理。在歸納法之原理方面，加利列(Galilèé) 及開布勒 (Kepler) 二人比他高明得多，因二人都能看淸物理現象之硏究，須得將數學形式及實驗結果合作方可。

但拿郎德先生則以爲世人此種批評不公允，且由於誤解倍根之著作而來(註二)。

惟笛卡兒(Descartes) 對於力學物理學博物學，則有極明晰之觀念，以爲此等科學應以算學爲模範。他視三段論式僅爲陳

(註一)參考 De dignitate et angmentis scientiarun, Liv.V. II. Ch. II

(註二)參考 Revue des cours et conférences, 1922-23.

述已知眞理之一法，乃集中全力去尋可以發見新知之法則。

此等法則，在將複雜現象中，求出構成此現象之簡單因素，以便引未知到已知。如此卽可得出些不可再化分而又本身明白淸晰之觀念。此等觀念旣發見，卽可由其綜合，用以闡明與此等觀念有關之事物。

例如解析幾何以一線節爲原始觀念，此一線節，可代表量的單位；於是卽可將幾何圖形之量，繹成代數方程式，以便用一普遍的而又是數量的方法，去解決幾何與代數所引起之問題。由是卽可如布郎雪維克（Brunschvicg）先生所說『量者，已非如歐克立德視由實物中觀察得來；論量之學，已不是一種自然科學。量之觀念無須經驗爲本，純是思想構造的，可按推理之連環，推展至於無窮(註一)。

且因力學現象與物理現象處處表現有幾何的空間性，於是此等現象卽可用幾何的量譯述之，故笛氏主張普遍的應用數學，並非不可能之事。

亞氏邏輯至是所受之影響，比笛卡兒所想者尤重，因爲普遍數學主義所革新者，不僅是關於三段論式發見新知之問題，且涉

(註一)參考 Les étapes de la philosophie mathématique, 1re édit., p. 123.

及演繹法之價值，因爲亞里士多德所視爲不再分化的實物性質，至是皆可化爲數量而譯成數的關係。故笛卡兒所提倡演繹科學，意義極高，如今日愛因斯坦的物理學亦可視爲其說之結果。此在滿演生(Meyerson)所著『相對論的演繹』一書中，已詳述之。

不過自吾人觀之，笛卡兒之觀念，與近代之觀念微有不同。

因笛卡兒視一公理自身是令人一見明白的，視幾何學與物理學終各爲別。近代科學家則視幾何公理應用至物理現象時，其本身不能獨立自足，必與適於物理現象之運動學公理密切接合。故在物理學與幾何學之間有一種密切關係，與笛氏哲學所述者異。

且笛氏並未分清孰種思想活動是屬於邏輯的，孰種思想活動是屬於心理學的，且孰種思想活動是屬於形而上學的。故當他批評經院派時，即常有許多自相矛盾之意見。

洛克(Locke)嚮往笛卡兒派所倡之反省思維法，欲由心理的分析，指出邏輯眞理的結構。

斯賓洛薩(Spinoza)則將笛氏發揮的數學演繹，直用至形而上學方面。

斯賓洛薩謂亞里士多德所定的類與種 (des genres et des

espèces）之區別，並不能指出個體事物之存在。如由『人』類與『希臘』種二者並不能將蘇格拉底個人分析出來。

算學方法則反是。算學由定義，即可構造出算學對象之一切性質。如已有一定點，一直線，及一定之距離，即可立出一圓之界說，而此界說是可引出一圓及圓之各種性質。

在形而上學方面亦然，只須定出一些概念（如本體，自在因……等）即可用以界說上帝之意義。上帝之存在，可由是證實云。

自十七世紀以來，邏輯因與各種科學之發展相連，遂分為三途發展。

第一路係向歸納邏輯方面，曾引動洛克從事心理的分析，而柏克烈（Berkeley）及休謨（Hume）雖倡惟心論，亦為此路最著之代表。

第二路係向形而上學的邏輯發展，由康德建其基礎。康德見到數學與牛頓的物理學皆有明確之眞理，皆能應用至實在現象上。欲闡明此兩種科學眞理之性質，康德因用先天的綜合判斷，以為形式的眞理與事實的眞理兩者，即可由是而得連鎖。由此等條件去解釋邏輯之性質與價值，不僅可解說眞理之可能性，且可定

出眞理之範圍與限度。

此可知費希特(Fichte)尤其是黑格爾(Hegel)何以會看到康德的思想，是正反兩面之綜合。黑格爾並由此綜合之觀念立出一偉大的辯證法，將事實與理性合一，並將邏輯改造為一種觀念的形而上學。

至第三路由來本尼慈(Leibniz)之天才努力，邏輯遂向代數形式方面發展。但來本尼慈之努力在十九世紀末葉以前，鮮有知者，其後輩重視之點，僅為其形而上學之價值。如其立必然眞理與偶然眞理之區分，充足理由之價值，及由實有界到可能界等問題是。

來本尼慈之外，有龔底亞 (Condillac) 雖為一主張感覺論者，但曾將形式邏輯之問題確定，謂其重要處在其符號。其說如次：

『……欲得可以反省思維之觀念，卽須要想出些符號以連絡各種簡單觀念，且吾人之思想如精確，亦惟賴能造出些符號以確定之』。

至十九世紀各種科學皆有空前的發展。尤其是有幾種科學進步之結果，再使邏輯生出許多問題。卽一方是數學，他方面是

心理學及社會學是也。

此幾種科學與邏輯之關係，可約述如下：

第一穆勒(Stuart Mill)即由心理學之立場，宣稱思想之形式法則，不過由感覺造出來的一些心理習慣。例如矛盾律，即爲經驗中最普遍習見及最基本者(Logique, I. P. 315)。此律所表示的矛盾，實與吾人之用味覺以定某植物及某動物可食或不可食之例同。阿勒工 (Orégon) 土人喜食地上小蟲，即與歐人之口味相反，如試食之必至嘔吐。

附於穆勒習慣說之上，斯賓塞(Spencer)再益以遺傳說，謂遺傳可將千百年傳下之思想習慣保持永久。

至社會學派則努力由事實證明思想的不變法則，亦有其變易之性質。例如野蠻人之對事實下判斷，即不似文明人係按同一律及矛盾律以思維。故謂有多少種類文明，即有多少種類推理的法式。

實用主義著名之代表習勒(F. C. Scheller)，又攻擊邏輯的眞理問題，謂邏輯不明吾人所立判斷之重要性而常把事實的知識 解。蓋一判斷之眞並非繫於吾人所給之法式、乃繫於其心理的內容及吾人下判斷時所處之環境。

人不能指出一事全屬於邏輯的，而可與心理學及社會學所

研究之事分開。故形式邏輯與應用邏輯應合一。

至與此派趨勢相反者，則爲符號邏輯派或數理邏輯派，不過此派又可分爲數家。

在英國十九世紀中葉時，有摩爾根 (Morgan) 尤其是布爾 (Boole)，在來本尼慈之後，再尋着符號邏輯之基本。布爾尤能精密的規定出邏輯演式之門徑及範圍，並立出一種符號與界說的體系，以爲後人之用。顧因布爾之作，過於附屬於數學技術之內，致其關於表示邏輯思想之部分，則尚未完善(註一)。

此外尚有兩種數學的新發見，促進邏輯家起而修正及擴大布爾所創之業。一爲非歐派幾何學之成立，將康德在其純理批判一書中所倡時空之先天直覺說動搖，而重定與一種空間形式有關之原始命題，此空間形式是可先經驗而直接表現的。

他方面由康脫(G. Cantor)創出總集論 (La théorie des ensembles) 使人不再視數學的無限，純爲一種空間的量或數的量之關係之極限，乃在將數學的無限實現，且將之計數出來(註二)。數學的無限，可列爲各種數目的類(classes)。因各種數目的類，是可受邏輯演式支配的。由是遂產生邏輯與數學互相關係

(註一)參看 George Boole: Collected Logical Works, vol. II.

(註二)參看 A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre.

之問題。

吾人由以上所述種種新的發見，又可明十九世紀末葉各種邏輯派別所以產生之原因。

其一派成爲邏輯的代數，爲徐祿德(Schrœder)發揮於其三大册之著作中(註一)而古士阿(Couturat)曾將之約述於一小册中(註二)。

約在同時可有一支新潮發生於義大利，以班洛(Peano)，巴多(Padoa)等之努力而成。此派思想家，將其研究之範圍縮小，專限於數學方面。他們皆不滿於亞里士多德之邏輯，遂努力建造一種演繹邏輯代替之。此演繹邏輯，係用以闡明用於數學中之演繹法及證理者。但他們並未將數學化入邏輯中，因自義大利派觀之，數學與邏輯兩者仍是各別的(註三)。

至英國之羅素(Russell)懷特赫德(Whitehead)與法國之古士阿則持相反之意見。據此數位學者觀之，數學是可全部化入於邏輯之觀念與式子中，數學中決無不可用邏輯分析的元素

(註一)參看 Vorlesungen über du Algebra Logik. 3 vol. (1890–1895)

(註二)參看 Algèbre de la logique.

(註三)參看 Peano: Formulaire de mathématique, 5e édit. (1905)

(註一)。

他方面如力學，物理學以及其他一切科學，皆爭化爲數學的形式，結果此等科學亦應當與數學同逐漸入於形式邏輯之中。如是，卽不會再有形式邏輯與應用邏輯之分；雖或事實上尙未有，而在理論上則應只有一種邏輯存在，卽形式邏輯是也。如是則眞理之統一，卽可實現。

上述的種種企圖，皆極有趣，不過這些企圖，太過於限制了邏輯問題之範圍及性質，並太重視概念之外延而忽視其內包，其結果遂至破壞邏輯眞理之問題。

古土阿於此已有所覺悟，故在晚年視新邏輯 (Logistique) (註二)漸與傳統邏輯相近(註三)。而恩利格斯 (Enriqués) 於此問題亦曾發表有許多卓見(註四)。

羅素亦曾修改擴大其初時對於新邏輯之見解，但對於用邏

(註一)參看 B. Russell: Principles of Mathematics (1903) L. Conturat: Principe des mathématique (1905)。

(註二)參看 Logik Encychopädic der wissenschaften (1912) p. 137

(註三) Logistique 一字，有譯音爲『邏輯司梯克』者，Poincarée 則稱爲『新邏輯』。本書作者亦屢稱之爲新邏輯，故譯者亦暫譯之爲『新邏輯』。

(註四)參看 L'évolution de la logique, p. 134.

輯常項及邏輯演式以闡釋數學之希望，仍未拋棄(註一)。其書有數點，已被其高足威特根斯坦 (Wittgenstein) 及尼哥 (Nicod) 發揮更透(註二)。

至希爾柏(Hilbert)則完全循羅素所採之相同路逕，亦主張數學之基礎，應為一種不可再分而又自成一類之元素(註三)。

末了，吾人可述最近希魯維(Bronwer)及外爾(Weyl)(註四)有一種企圖，欲將排中律在數學證理方面之價值減小。

由上觀之，一方由心理學及社會學之發展、他方由數學之發展，遂突使邏輯在二十世紀初葉分出極端相反的兩派趨勢。一派至否定有邏輯的連貫合理性，只承認有多少固定的心理習慣。他一派如羅素等則發揮形式邏輯之聲光，至欲將應用邏輯併入形式邏輯中。

在此互相反之兩派中間，則有新多瑪派(Neo-thomiste)。此派在近數年之成就，大部由於其對上述之問題，取一持中之態

(註一)參看Principia mathematica, 3 vol. Introdution to Mathematical Philosophy.

(註二)參看 Tractatus Logico-philosophicus, 1921.

(註三) Grundzüge der theoretischen Logik, 1928.

(註四) Philosophie der Mathematik und Naturwissenchaft. Berlin, 1927.

度。

拿郎德先生在一篇名作中(註一)主張'理'有相對的兩種,一為構成的理,一爲建設的理。吾人卽欲持此兩種相對的理以衡論現代邏輯的各派趨勢,而察在建設之理中,是否有不可少的形式原理在,是否無此原理,思想之活動卽爲不可思議。

此項研究約分爲下列數題:卽邏輯之規範性及眞理問題,形式邏輯與實用主義,社會學及新多瑪派之相對; 新邏輯,邏輯的公理及排中律;邏輯與數學;公理與數學證理是。

(註一)參看 Raison "Constituante et raison constituée" Revue de cours et conférence, avril, 1925.

第二章　真理問題及邏輯之規範性

在各種科學中，邏輯應屬於何種？此問題極難答，且常發生許多爭論，吾人不暇具述。在中古時，此問題之意，在問邏輯是一種技術，抑是一種科學。至現代此問題已不發生興趣，因吾人今日所謂科學及成爲科學之條件，與古時所見不同，且古時視科學與技術之分，亦與今日異趣。

今日之所認爲急務者，乃在研究邏輯是否爲一種規範科學，與道德學及美學同。如認邏輯是一種規範科學，則眞善美三者，視爲各自成一類之價值，此三種價值之實現，是認爲可能的，且是可喜的，只需思想之活動，意志之活動及感情之活動，能遵一定之規範以行卽可。

顧有許多邏輯家，則以此問題爲廢話，視邏輯應當以命題之眞與妄爲事實，以爲其演式之出發點，無庸評定此等演式是眞或

妄之理由。蓋視邏輯之任務，應限於由一些原理以推出由此事實應得之結論。

此說可引一比喻以明之。在代數中，一數值可爲正亦可爲負。其結果是例如兩數之積，卽可有時爲正有時爲負，視此兩數之符號是相同抑或相反而定。當一方程式置於數學家之前，此數學家卽無庸尋問何以某量是正號，某量是負號。其惟一之任務，在將當前之方程式解出而已。

對於命題的邏輯演算，亦可用同樣看法。如云『人是有死』一語無論爲眞爲妄，其陳述總常如此，而在眞妄兩面中，此命題之對立命題則爲『有人不死』。此後一命題之爲眞或妄，純依『人是有死』之眞妄而定。

如是則邏輯家之任務卽限於建立一些眞與妄之關係，此等眞妄關係，係由一些在事實上或在理論上認爲眞或妄之命題推出。初看此種見解甚覺合理，但細觀之卽多可議之處。

卽以上述之數作比喻。如一數可以有時爲正號，可以有時爲負號，但不能同時爲正又爲負，亦如一命題不能同時爲眞又爲妄。顧在數序之中，零數卽有特殊性質可爲正數與負數之分界，又有中立之性質可不爲正，亦不爲負，且亦可爲正，亦可爲負。

能亦有命題可有同樣的中立性質無眞妄可言乎？如有之，則

矛盾律對於由此類命題演繹出來之結論，即無效用。且如矛盾律在好些場合是可非議，則排中律亦不能例外。吾人後來將述到許多數學家以為排中律之價值，並非絕對的，而是依所據事實之範圍是有限或無限而定。則邏輯即不能避開研究使思想自身一致及使思想與事實一致之一切條件的性質。

顧這些條件，即含有規範性乎？例如果不羅(Goblot)先生主張邏輯當常與具體事實相接觸，但謂邏輯並不因此即比其他科學更為規範些。他說『世只有一種規範科學，即討論人生目的之價值者如道德學是』。至於『邏輯，則研究求到眞理之工具，是一種實用科學，是一種技術或為研究獲得眞理之一切條件之學，換言之亦是一種理論科學(註一)。如是則邏輯並不異於其他科學。邏輯不是規範科學，即使是規範科學，亦與『數學，物理學及其他科學之意義同』，亦以發見原理為目的。此發見之原理可變為尋求眞理之實用規則，亦如物理學發見之法則可以變為實用之規則也。

顧吾人覺得此種見解，並不完全確當。討論眞善美之最後價值，視為人類活動之目的者，則為形而上學。惟形而上學始討論到眞善美等價值是否有其客觀的基礎，抑僅有主觀的基礎，且討

(註一)參看 Traité de Logique, p. 9.

論此等價值,是否有一公同根源而可互相爲用。至於邏輯,道德學美學三者則係各以眞與妄,善與惡,美與醜,爲研究之對象而無庸論到此等價值如何合宜,故此三者皆可稱爲規範科學。

既然如此,則道德學論到善與惡之最後性質,欲以確證其所取的基本假設及標準時,則不宜稱之爲科學,而當稱之爲形而上學。必其基本假定已確定,可由是推出此結論,可用此結論以評定人生之行爲時,始可稱之爲科學。

故規範科學與形而上學之分是實有的。但此區分仍無礙於果不羅氏之說,因他以爲如果稱邏輯爲規範科學,則邏輯亦未異於其他科學也。故問題之所在,乃在問是否一切規範科學(邏輯亦在內)如常人所述,係以一些價值的判斷(Jugement de valeur)爲基礎,至其他一切實證科學則以存在的判斷(Jugement de l'existence)爲基礎。

顧吾人覺得此種分別亦不見佳,因未能將問題之要素充分釐清也。

第一節 價值之概念 一價科學及兩價科學

細分析價值的判斷,即可見價值一詞含義紛歧,因價值的判斷,係同時含有評價者之態度,及評價所據之因素在,而評價者

之態度是主觀的，評價所據之因素則係客觀的。如希臘神話中說『沙摩圖阿斯(Samothrace)之勝利是美的』一語，即為價值判斷，而此判斷包含主觀的賞贊態度，及客觀因素(如戰神之姿式，戰旗之飄揚等)在。故價值雖是人們主觀任意定的，但亦有其客觀因素存在，金剛石之可貴，因其稀有，且發美光。一火爐上之裝飾物本身是無意義的，但如其曾為拿破侖(Napoléon)御用過之物即有不少的價值。

故如突以存在的判斷與價值的判斷相對，即將減少價值之客觀性，而誤視其純為主觀的。結果將不自覺的解決了一形上問題，而視價值為一虛影，為事實之一幻相。

何以價值觀念中會有此誤解發生？此問題尚重要，余欲略討論之如次。

古代哲學與近代思想，皆同知有價值一事。不過古希臘學者視價值有客觀的永久的存在，以為價值無賴於人類思想之活動，縱人類思想活動能發見到價值，能利用價值以應各種目的，如道德的目的，與美的目的等，而人類之思想活動，仍不能隨變遷無常之現象，以創造出各種價值。

此種見解直維持到十八世紀而不衰，直至康德哲學出始將

之動搖。

據康德之純理批判觀之，世只有一種眞正科學的客觀知識，即由感覺與悟性之先天法式以攝取現象界之印像而構成者是。

另一種知識，則爲實踐理性所獲者。實踐理性之本性是自由自主的，能自由服從良心無上之命令，成立人類信仰之規條，以保障道德行爲之價值。

後有亞柏呂稀(Albert Ritschll)者傾服康德之說，由彼及其門人，赫莽(W. Hermann)首將『存在的判斷』及『價值的判斷』兩詞引用，後一詞用以指精神的主觀的世界，前一詞用以指客觀的現象界。如是，宗教價值的知識即可視爲與人類之精神的道德的活動相連。亞柏呂稀並非謂上帝即由此說造出，但謂人心之能知有上帝，此種精神道德之活動實不可少，此說較之古代見解略爲新鮮，因如蘇格拉底及柏拉圖尙視道德的善及上帝之認識，可傳之惡人而改造其生命也。

至尼采(Nietsche)出，即將亞柏呂稀所持價值判斷中之超越因素排除。他視惟人類能依其活動之需要以創造價值，且亦惟人能將舊價值銷毀，而另造新價值。於是價值之創造，即變化莫測。此並非謂吾人不知價值之存在，乃因價值係隨人類之權力慾望而生滅，故至莫測其極也。

依尼采之說似乎人類是可以無中生有的創造價值的，實則如此的創造，是不可思議。無論人們贊同與否，相對的價值（如善與惡，眞與妄，美與醜是），無論取何種形式總是包含於人類思想之活動中，因人類之思想活動不能無眞妄美醜善惡之辨也。

故新價值之產生不僅有賴於人類思想活動之內在性，而且依於意志活動所據之情境，新價值是不能無中生有的產生。

故『價值的判斷』亦如『存在的判斷』是有一定的依據。且細觀之，凡判斷是價值的判斷，同時亦是存在的判斷，因判斷是肯定（或否定）某物賦有某種品質及某種特性也。

自然，存在的判斷與價值的判斷是有差別的，顧通常所稱呼之區別，是不甚妥當，因如通常所稱者，縱不視價值爲空幻，亦將視爲鮮有存在的根據。不如對此形上問題，無存成見，而呼『存在的判斷』爲一價判斷(monovalente)，而稱價值的判斷爲『兩價的判斷』(bivalentes)。因存在的判斷，視其所判斷之對象只有一種價值，或只有一種存在的式樣，至於價值判斷，則視判斷之對象有兩種價值，或兩種相對的存在式樣。例如一件道德行爲，可有好有壞兩種價值也。今試詳究此點，因規範科學與非規範科學之分，卽可由此定之。

第二應注意者，凡科學都需要一些界說以構成其基本假定，此等界說有一部分是可任意規定的，且可隨所赴之目的，而引入各種價值。此等基本命題，對於科學之成立，爲必要的出發點。例如在幾何學中有長度之界說與量的單位之界說等，在物理學中有力之界說與質量之界說，在道德學中有善與惡之界說是。此觀點在一切科學中，並無大異之處。

但如此等基本命題選定之後，卽可分出規範科學與非規範科學之別，規範科學中之存在判斷，是論到兩價的，非規範科學中之存在判斷，則只論到一價。

例如幾何學所論究者只是一種幾何性相。雖有些幾何命題可眞可妄，但就已成功之幾何學而論，則只有眞的命題在，對於妄的幾何命題卽置不論。至兼論眞與妄兩種價者，則爲邏輯之學。同理，如問一證理是否比其他證理較爲漂亮，或一幾何構圖是否比其他構圖較爲美觀，則牽涉到美學而須於幾何的基本假定之外，再加些美的規範。只就幾何學之本身言，並無一種『非幾何學』與之相對，如道德與不道德之相對，及美與醜之相對然。幾何學中雖有『較大或較小』之語，但仍不變其一價之意義。例如在一等邊三角形中，其一邊大於其他任一邊時，並無含有此一邊卽較其他任一邊爲優。推之物理學，化學，及其他博物學亦皆如是。

規範科學則有其特異之性質，是講到兩種價值的，常須論定一種價值是優於其他，且以指出可將較優價值實現之條件爲要務。如邏輯，視一命題是有眞有妄，且當定出眞理之規範，以便可用以立出眞的命題。道德學亦然，視一種思想，一種行爲或一個動機都有好與壞兩面，道德學將善之標準確定後，卽須用心立出可以達於至善之規則。法律學亦爲規範科學，以區別公民行爲合法與不合法爲務，且當定出法律規條，以便下公平的審判。衞生學亦爲規範科學，指出健康與病態之分，並立出些可獲健康之法則。不過在這些規範科學中，倘須略加區別，卽法學與衞生學則爲附屬的或轉化出來的規範科學，因須插入些道德善惡之價值於其中也。

總之如馮德(Wundt)所述眞正基本的規範科學只有三種，卽邏輯，道德學，美學是也。此三種科學所論定之價值，實爲其他科學構成及發展不可少之基本。學者無論專攻何科，皆不能不求其思想自身之合理一貫，及求其思想與事實之相通連貫，換言之，卽不能不辨其眞與妄也。

以上所述卽易將邏輯與心理學所爭論之關係闡明。因就前述之理觀之，邏輯卽不能併入心理學中。心理學研究思想之活動時，對眞的推理或錯的推理，對情緒的思想或純理的思想，對有

秩序的思想或瘋狂的思想，皆抱平等之眼光以研究之；心理學家研究此等事實時，以能盡事實之眞相爲務。至研究眞與妄之價值，及研究思想如何始能實現此等價值之論理學，皆不能併入於心理學中，因心理學只須平等的將一切思想歷程當作事實去研究也。

可知邏輯，道德學，美學係研究兩種對立的價值（如眞與妄，善與惡，美與醜），並研究可以實現較優價值之條件，與其他科學顯然有別。其他科學是預定價值之存在，但不研究如何實現此等價值之普遍的及特殊的條件。

故關於此點，及謂價值的判斷爲兩種價值的判斷，吾人可完全同意拿郎德先生之言曰『一種科學之起點與終點，皆係價值的判斷者，則爲規範科學；如一種科學之起點與終點，皆是些物理事實的判斷者，則爲物質科學』(註一)。

第二節　邏輯爲規範科學之結果

依拿郎德先生，如明邏輯爲規範科學之後，即可進而釋明許多非此不能釋明之問題。如三段論式是。

實則歸納法之原理，爲世人引以證實歸納推理之價值者，不

(註一)參看 Revue Philosophique, 1929. t. ch II. p. 161.

能由有定論(Le déterminisme)，或大多數之原則，或其他因果法則，證其爲正當。欲得此原理之眞義，當如下述曰『當無一種相反之例時，卽當斷定某現象曾由某種方式演現者，將來亦繼續的依同樣方式演現』。此乃一合法推論之規則，或可稱爲一合法之程序，其結論之可靠程度，卽含有很大的可能性。

是時三段論式之大前提，卽視爲一條定律或法則，小前提卽是一件事實，而人心自然不容自已的去接受之而由是引出一結論。如不欲得出結論，卽當放棄持大小兩前提爲推理之根據。

例如現謂『一切人是有死，而某君是人』，卽當結論謂『某君有死』。

不過三段論式之大前提不能任意定爲是眞的。拿郎德先生所謂『應當推斷』之理由，是以『毫無相反之例證』爲據的。此點實堪特別注意。邏輯亦如道德學，在其所有之領域內，是要指出何故應當選取某種思想的立場而不應取其他。邏輯應問此『應當』的要求，是否在事實上可以實現，且依何條件去現實。

誠然眞與妄之價值，是不能化爲他物的，因此眞與妄之價值，是與一切思想之活動相連的。但實現獲得眞理之條件，只可由不斷的分析思想活動與所思之物兩者之相互關係，而後可以

闡明。果不羅先生指出此點之必要，實為卓見。

至普通稱他一部分邏輯爲應用邏輯，其錯誤甚明，反不如稱之爲專科邏輯(La logique spécialisée) 之爲當。邏輯家欲建立適合於每一科學之原理與方法，即須研究推理之連貫形式，因由此等推理的連貫形式，科學家始可於其專攻之範圍內，擴展其收穫之成績，故吾人在『導言』中已述及邏輯問題如何在歷史過程中因科學之進步，而有不斷的革新。

至形式邏輯則似無此種必要，因形式邏輯之任務，僅在研究思想自身之系統如何能原委一貫。至與事實如何，可不過問。但眞理之意義，是否即可由此分割爲二?事實上，眞理只有一種，因眞理係假定思想自身原委一貫，而同時可與事實相合一貫的。世稱形式邏輯所研究者，爲形式的眞理，應用邏輯所研究者，爲實質的眞理，實爲錯誤。毋寧謂眞理有其形式上的條件及事實上的條件，而將邏輯分爲普通邏輯(La logique générale) 及專科邏輯(La logique spéciale) 兩種，在兩種邏輯中之原理，皆應能夠充分的應用至眞理之兩類條件上。此說俟至後再詳述之。

人或反對謂：如形式邏輯所講的推理形式，是假定有一種思想的對象存在，則此種推理形式，對於思想之對象，即不失其獨立性，因爲此對象是被思想認爲完全未定者，或僅被羅素所稱的

邏輯常值(constants logiques)所單獨決定。此等邏輯常值中，不僅有『以及』(et)『或者』(ou)等連續詞，且有『一切，許多，幾個，一個』(tout, plusieurs, quelques, un)等形容詞，適於表述一些物體，或任何種物體之羣，於是有此等邏輯常值在之推理形式，即不受實物之性質所影響。

不過依數學中最近爭辯之結果，似乎證明其不然；若其如此，而在事實中有些邏輯常值，並不是有同一之意義，而是隨所述之對象而異，其故何在，豈可不研究之。由三段論式觀之，於此點即甚有意義。初看三段論式之形式，似能本身自足的，因其對於一切思想之連絡條貫，皆不可少。而思想之連絡條貫，須由一種演繹而得，此演繹，係常由普通原理推證特殊事實，或反之由特例以推出公例也。但細觀其大前提中常值『一切』之意義，即隨不同之物而變的。

今試就此點以考查三段論式在數學中及在自然科學中之功用。假定有一圓於此，於圓周上指出兩點，由此兩點及圓心一點，即可構成一個二等邊三角形。此時即可得出一個三段論式曰：

『凡二等邊三角形有兩角相等，

今此三角形是二等邊三角形，

故此三角形有兩角相等』。

如將此三段論式與前述『一切人是有死，某君是人，故某君有死』之例比而觀之，卽可見兩個三段論式中之兩前提，雖有同一之形式，並無同樣之力量深入人心。因『凡二等邊三角形有二角等』是已證明爲眞的。『一切人是有死』一前提則不如是（因如有人假定說將來醫學更進步將來的人或可以不死，此時亦無法證其爲妄）。

盧格(M. G. H. Luquet) 在其『系統的與簡化的邏輯』一書中(註一)欲解決困難曰『三段論式之重要，不在其結論是必然的，而是在其大前提中主詞與表詞是常有不變之關係。如『一切人是有死』之命題，只須知『死』與人性有相連不變之關係，卽足以確證某君是有死，無須追問人何以含有死之原故也。

但如此說法，卽將『恆常』(toujours) 一字之意義弄得不清，如『一切人是有死』一語，就吾人所能知，並非謂死與人性是恆常相連，僅謂自已往至現在，死是恆常與人性相連的，所謂『一切人』一語之意義，須有限制。或許科學將來能發見一種方法，能將生物之細胞時時返老還童，則此後之人類，卽可不死矣。

在此情形下，三段論式卽不能隨所論不同之物而仍有同一

(註一)參看 Essaie logique systématique et simplificée, 1913, p. 3.

之意義，且人卽可由此點去將數學與自然科學分清。在數學中，三段論式之大前提。是已證明爲眞，無須吾人再證，如上述由圓周上兩點對圓心作一個二等邊三角形之例是。

在自然科學中則不然，三段論式，只能是一種控制旣觀察過的事物之工具。如被暴風雨吹至一世無人知的荒島上，見一生平未識之動物正哺其子，卽可下一推理曰：

『一切哺乳類是有肺的，

今此動物是一哺乳者，

則此動物亦是有肺的』

欲證實此結論是否眞確，須將此動物殺而觀之，如證其然，則已往所採的動物分類可不修正。如得反證，則當將哺乳動物分爲兩類一爲有肺的，一爲無肺的。

但如此看法，人或持反對之言曰，一切數學的證理皆假設有些公理爲最後根據，而這些公理，乃由千百次經驗現象之結果獲得，與博物學家在三段論式中所用之大前提並無不同。信如是，則問題卽難決，因數學公理與感覺界之關係，是極複雜，吾人暫避免討論此問題。實則，欲由三段論式之用法上，去在數學及自然科學之間立一嚴格之分界，亦不可能也。

且數學中有許多三段論式之大前提，亦有可疑未決者例如：

『一切整數是素數（或稱質數）或非素數，

而2^n+1是整數

則2^n+1是素數及非素數』。

欲證明此三段論式之大前提是普遍的眞確，即當問是否可將整數下一界說，使適於 1. 2. 3……以至無窮大之任何整數。但有許多數學家則否認其可能，因謂數學係各有一定的證實方法(vérification) 的。試問在『無限』數中，或『無窮大』中，如何能加以證實？如此問題未得一滿意的解決，吾人即不能肯定謂一切數必是素數或非素數。或許在一切整數中，實際未能加以計數者，會有一整數另有新的特性，亦未可知。

再則在生物學中亦有許多三段論式是有普遍性質的。例如：

『一切有機體之存在有其物理化學之條件，

今此物爲有機體，

故此物亦有其物理化學的條件』

如懷疑此三段論式大前提之普遍價值，即將搖動生物學之基本公設。果眞有人欲如此做，則生物學即將有一日如幾何學之分爲歐派與非歐派。

布郎雪維克 (M. Brunschvicg) 曾說得好，吾人不能絕對的將數學與自然科學對立，而謂數學爲純粹演繹的，謂自然科

學爲純粹歸納的，因兩者皆常須參考到經驗的事實。數學所據以成立的基本命題，亦同樣的有經驗材料爲基礎，雖此等經驗材料是曾經充分鍛鍊過，但非是完全唯心創造的。

不過無論對數學或自然科學而言，吾人所指出在三段論式中之兩種意義，仍存在的。三段論式或對已觀察過之事實爲一種控制的工具，或用以喚起已經證明爲眞之理，而『一切』二字係隨所遇之例可指出不同之概括範圍也。

可見形式邏輯亦須討論其規範之合法性及此等規範應用之範圍。此外尙有其他一問題值得注意者，如下。

思想活動，與指導此活動之規範兩者之關係，是否亦如一有機器官與其機能功用之關係相同？且思想之構造，是否在長時期中，亦隨民族環境及歷史文化之程度而進化？如其有之，則人類思想在其發展中，亦將經過幾個階段，如社會學家所稱的『先邏輯的階段』(phase pre-logique)，邏輯的階段(phase logique)及超邏輯的階級（phase supra-logique）三種。適合第一階段者爲孩童思想及初民思想，適合第二階段者爲近代之科學思想，將來由高等數學愈發達之結果，即可入於第三階段。

不過縱承認有此三種邏輯心思之區別，而此三者之分界，試問當達何程度？思想形式之進化，是否即認爲思想所遵依的一切

規則之一種根本變化？抑在此等規範中，豈無數種規範，是永不改變而永附麗於思想活動之本身，爲人類心思所同具者乎？如有之則僅應用之範圍，是隨各人之心思而異，且可知初民之心思與科學思想同遵一樣的形式法則，不過所得之結果不同耳。

此種種問題，使吾人不能不涉及眞理之問題，因爲如眞與妄之意義是未定的卽當確定其意義也。

第三節　眞理之問題

眞理可界說爲思想上的一種自得，可用判斷表之。此種自得，仍假定思想主體與所思之物有一種區別。思想主體（卽思想的我）對所思之物取一種觀點，俾能發生出一種函數的關係於思想與事實之間。

此函數的關係，在所思之目的物及判斷活動之間，係包含一種連合作用及分辨作用。故在判斷之中，常含有思想之主體及所思之目的物兩元素在，至判斷之眞或妄。則視其是否確立於所思之目的物上而定。

惟如何了解思想之眞與妄？亦可將思想與其對象相連之函數關係闡明之乎？

對此問題，須將心理方面及論理方面分清，須將下判斷者之

態度及離此態度而獨立之命題分別。

下判斷的態度，是與個人的心理活動相連的，係對所發之問題而作之答語，其中包含有許多歷程，如發問懷疑，徘徊於是非可否之間，最後始得一決定。至此最後階段時，判斷始表現於外，而列入命題之形式中，可離判斷者之主觀而獨立存在矣。

自是以後，判斷的態度，即可取得邏輯的價值，而成為客觀的，可以離產生所在之時間空間而獨立存在，其眞或妄，可供一切有思想之人所共證驗。

然此豈即謂眞理應視一種獨立自足的本體，有如一羣眞命題（肯定的或否定的），吾人之心思，經過無數的錯誤嘗試之後，始漸認識之乎？

許多人對此作肯定的答覆，一派謂神可作此眞理本體之代表，其他一派則謂其為構成宇宙現象之組織關係。

但自吾人觀之，此等見解並不正確。因此等說法將引到拿郎德先生所述不充足不精確的三種眞理，即摸寫的眞理（vérité-copie）法定的眞理（vérité-code）及效用的眞理（vérité-succès）是。

摸寫的眞理，以為觀念是可與事實適合的。有許多普遍觀

念，自甚適合於對象實物。例如『存在』之觀念，確能表述事物之存在；『性質』之觀念，確能表述事物所有不同之性相。但如說到一物由何物組成時，則觀念與實物卽各不同。

依法定的眞理說，眞理是與一羣公理及一羣永久不變之法則相合的，此等公理及法則，由吾人經驗感覺之刺激，引起吾人之智慧去分析發見之。此種說法，卽無異謂眞理界與事實界可以彼此獨立不倚的存在，此却與科學進步之實況相反。

至於最後效用的眞理說，爲實用主義派所主張。但世多知一理論之成效，並不足以證明該理論是眞的。如一深爲羣衆信仰之人，卽常能鼓動羣衆盲目的服從，無須完全正確的言論，亦無須聽衆有完全的了解。有時用無稽之論，反比用眞理能得最速最久之成效。

既然如此，故拿郎德先生以爲眞理應界說爲一種化異爲同(assimilation) 之結果，蓋謂眞理係由各種思想互相貫通一致而構成者。此種化異爲同之眞理說，較前數派之說爲當，且將其過於絕對之處去除。

吾人完全同意拿郎德之說，並特聲明在事實上化異爲同之眞理，並非是一種隨便的同意，而是有種種條件的，一類條件爲客觀的事實，他類條件爲指導思想活動之不變規範。故吾人覺得

另有一語由布郎雪維克借來用的，比化異爲同之眞理一語爲佳；名曰互合的眞理(vérité-réciprocité)，卽謂眞理係合於人人彼此心中的思想，爲一切有思想的人類所共認，且又與客觀實在關係相合者。

如此的相合，亦有其條件，吾人可以試簡述如下。

實在 (le réel) 之最後基礎，無論爲神或僅爲一羣事實，而實在之本身，是無眞妄可言的，『實在』只爲吾人下判斷之條件，換言之，只爲眞理之條件。

第一，如承認神是存在的，能支配萬物使符合於原型觀念界，則將有許多困難。因神創造世界之說，純是一種擬人形之見(anthropomorphisme)，視神是一位超人按一定計劃以創造萬物，亦如吾人之造器具然，此純爲妄擬之見。

吾人僅謂如問人類何以會有逐漸構成一系眞理之能力，而所構成之眞理，又何以能普遍符合於一切有思想人類之心思，此亦可假定謂出於天授（卽神授）。不過對此根本問題，吾人可不過問，儘可視眞理是一種事實，爲科學進步所獲之結果。

惟有不可忽忘者，在眞理之範圍中，不僅指實有的事，且亦講到妄的及不存在的事。如我可假定不知道 2+2 爲若干，但知道 2+2 不爲 5。『眞的，2+2 是不等於 5 的』。

故實在之本身，是無眞無妄可言的。惟吾人對實在所下之判斷，始有眞有妄之別。實在之本身，不是眞理，僅爲思想活動之所本，爲眞理產生之條件。

不過僅有『實在』一種條件，尙不夠產生眞理，必用思想於下判斷時，按照一種不變的形式原理去活動始可。此形式原理之本身，亦與實在同，是無眞妄可言的，僅爲眞理之條件。

例如同一律，係假定在判斷中，所述的一切概念之本身是前後同一的。如云『此馬是棕色的』，『此馬』之概念在吾之心中，始終爲馬，決不會變爲鹿的概念。而棕色的概念，亦決不會變爲黃色的概念。且綜合主詞與表詞之關係，亦係前後同一，不會變爲其他。如不依此等條件則判斷卽不可能，而思想亦爲無意義。

矛盾律亦然，謂不能對一判斷中之主詞，賦以兩種相反的屬性，如云『此馬是棕色的亦不是棕色的』卽爲無意義。

顧思想上同一與不矛盾，在事實中達於何種程度？對此問題，吾人可約述之曰；在『實在』之中，有常同不變之元素，亦有變遷差異之現象。吾人之經驗，在使一方知道何者元素爲常住不變，可由思想推知其爲同，他方又知道現象之差異至何程度，庶使思想不至包含矛盾。

故眞理之成立，須有兩種因素，一爲思想活動須按其一定之

原理，一爲客觀事象有一定之性質，能被思想所攝取。卽如數學，亦含有一定之對象，該對象不能由人心任意創造，僅能據爲研究之本。

旣然如此，思想與實在之間互相作用之關係，將如何建立乎？此關係是實有的，笛卡兒的『我思故我存在』之說已證明之，不過難於用一定公式表述之耳。

在知覺中，無論是內心的或是外界的，吾人不能超過旣定事件而發見感覺何以會表現爲『我的』與『非我的』之別，吾人僅考察得一方面思想與事實發生之關係，他方面思想與事實兩者又是各自獨立的，此獨立性可由吾人能對之發生眞或妄之命題以明之。故思想與事實有一種相互作用之關係，惟不易加以分析。其故如下。

事物呈現於吾人之心中時，是統一的，亦同時是複雜的。思想對於此等事物，並非純是被動的直覺，而是同時有分析反省綜合論證之活動在；此所以眞理不能僅視爲一種摸寫，或一種規範，或一種效用也。

故由邏輯之立場觀之，構成一命題之名詞，如係孤立的，或一孤立之命題，皆不能適當的表述一部分孤立的事實。如『跑』一事不能離跑的人而獨立，且跑是在一定的空間時間內表現。又

如『我喘氣』一語，其意義並非簡單，係指先時並未喘氣，先時喘氣與我，原係兩事。

故一命題與其他命題相連時，始可表現出眞或妄之意義。如云『此馬是棕色的』，則僅指其毛色有別於他馬而言。但此馬是在一定的地方，且有一定的大小。

或謂除無眞妄可言之思想的形式原理外，豈不尙有些公理式的命題，亦可離其他命題而獨立自足者乎？此則不能斷言，因此等公理式的命題，亦係就一定之範圍而言。例如『全大於分』之命題，古代視爲本身自明的公理，但在超有限數之數論（l'arithmétique du transfini）中，可將一列整數與一列偶數相對，此兩列相對推至無窮時，則整數之量卽可等於偶數之量。於是全大於分在有限之範圍內爲眞者，而在超有限之集合中，則不適用矣。

故思想與實在之相通符合，不是在思想之一孤立元素與所對事實某一單獨元素發生關係中，而是表現在由實在所喚起之一列未定的判斷與實在所生之函數關係中。

故不能謂眞的命題可以恆常不變，僅能謂思想有其爲眞之不變條件在，此等條件一方爲客觀的實在，一方爲形式的原理，有此兩項條件，卽足保證眞理之絕對價值。但如是，又將如何說明

眞理之進步變遷?

第四節　眞理之獲得法

由前說,獲得眞理之可能性,係由直接或間接不斷的證實試驗(vérification)。即形而上學的研究,亦不能外是。故吾人在『形而上學與道德學』雜誌上謂笛卡兒的『我思故我存在』之說,應釋爲假說的證實試驗(註一)。

在數學方面,布郎雲維克著『數理哲學發展之階段』一書已評述之。他說『應當向發明家與邏輯家指出一公同之目標:要將數學算式逐漸的擴展。科學之眞理,是由證實試驗之手續得來,而證實試驗是包在數學發展之中』(註二)。

『在數學中常有些出乎意外之事發生,如在計算直三角形斜邊之長度時,遇到無理數,(例如$\sqrt{2}$)之發生,初見者以爲矛盾不可解。又如在研究代數方程式中有負數虛數等,初亦令人迷惑,視爲荒謬。及後深思研究之結果,反由是得出些新概念,可爲新的演繹之基本』(註三)。

(註一)參看 Revue de métaphysique et de morale, 1923, p 529.

(註二)參看 Etape de philosophie mathématique, p. 561.

(註三)參看 L'expérience humaine et la cansaliti physique, p. 605.

在物理學中亦然。布郎雪維克指出其中一種逐漸證實試驗以達於完滿之歷程，與算學相同。首先是由性質方面去研究感覺界的現象，以後物理學家，卽漸漸將分析得之結果，化爲數學的運算，在其數學公式中，事實與思想，交互融通，使證實試驗可以達於理解之最精深處。自然，物理的數學公式之成立，係由經驗與理性經過許多的往返交涉而來，但檢察旣成之方程式及其形式，亦可啓示物理學家去修正其理論，改造其對於事實之意見。如由洛郎慈（Lorentz）之變換式，啓示出格利林之羣論（le groupe galilèen）是也……(註一)。

但由是亦不可卽謂物理學化爲數學之形式，卽失去了物理的特性。物理的各種特性，是常存於所定之量，及所用之符號公式中。其存在，亦如解析幾何之方程式，各有其一定之幾何圖形。物理學中某量是函數，某量是變數，皆有一定的關係，不能任意改變，此點卽足表明出事實的質與量兩者之眞面目。不過物理學是儘可研究其量的關係，無庸去問其質的關係也。

今試將科學進步中的證實試驗約述之。

舉幾何學爲例最好。幾何學是以一組基本命題爲出發點，同時用構造法及演繹法，卽足證出一組互相連貫的定理。愈再前推

(註一)參看 L'expérience humaine et la cansaliti physique, p. 595

進，幾何的材料事實即愈見其複雜，出人意外。須再退回去深究一切基本命題，以區別出各種幾何學。

幾何學如此，物理學生物學等以至政治道德，宗教之理論莫不皆然。

例如加利列與牛頓用質量，速度，時間，空間之觀念去解釋物理現象，自可將一部份有定量的物理現象闡明，但對於稍深的光電磁所啓示之現象，則不可能（例如放射現象是）。

至於社會政治方面，某種政治經濟的政策體系是適合於過去某世紀者，如視爲眞理而亦引用至現代，即會發生危險。

形而上學之觀念亦然。吾人決不能只去接受前人之遺產，而不計及可以不斷啓發人類思想的科學進步之新遠景。

故無論在知識的任何方面，對某一點之研究愈深，即常引到全部之修改。

在科學發達每一階段上，客觀事實譯成一組極複雜之意義於吾人之心中，實如笛卡兒之言，可比之一系含有無數未知量之方程式。如未知量之數目適等於方程式之數目，則數學家由此等方程式即可得出一解或多解。

如未知量之數比方程式之數多，則得不定之解。爲研究方便計，亦可自由將未知量定爲某值，但如此，則方程式即將得出無

數之解。

同理，吾人所研究之事項，如有一定之性質，可以充分的定出，則所得之命題即眞。如其性質，是可任意選定的，則所得之命題，即只有概然近似的性質。

總之，在研究眞理之問題中，須顧到造判斷之心理的歷程及表現於一命題中之態度。謂此命題之本身是眞的，並非謂其永存於宇宙之中，乃謂一切有思想之人類見之，皆不能不認其爲眞。蓋一切有思想的人，皆按同一條件以思維推論，皆按同一條件以接觸事實也。

故在眞理之觀念中，實含有心理的態度，思想的形式原理及客觀的實在三者。眞理之重要條件，固如布郎雪維克所述，在能將思想統一，但自吾人觀之，須有一定的事實爲對象，思想始能發揮其統一作用。

視眞理爲化異爲同及互相符合之結果，即能同時顧到其心理的歷程，思想的規範，及所研究的客觀實在。

在一切思想之規範間，其屬於被構成之理者 (Raison Constituèe) 是可進化的。其屬於建設之理 (Raison constituante) 者，則爲固定不變的，而爲一切思想所必遵之條件。但自實用主

義，心理學家及社會學家觀之邏輯原理固定不變之價值，仍是可非議的。吾人下章即研究諸家之說是否合理。

第三章　實用主義派，心理主義派，及社會學派之思潮

第一節　實用主義

主張實用主義之學者總是輕視邏輯的，尤其是形式邏輯。

詹門氏 (James) 亦不免對邏輯加以譏刺。其言曰『就我所知，實用主義者對於事物之觀點，由於近五十年來科學舊時理論之破產得來』。可笑世人常謂上帝是幾何學家，歐氏幾何原理，卽係將上帝之幾何學翻印成通俗文字者。並謂世有一種永久不變之理性，此理性之呼聲，卽表現於三段論式之記誦歌中。同理，『所謂物理化學之法則，及生物之分類等，皆視爲摸寫原藏於事物中之範型，爲吾人智慧所能發見者』。

並謂『世界之結構是邏輯的，其邏輯卽爲大學中教授所講

授者』(註一)。

詹門氏之言雖謔，但尚未有何結論可爲改造邏輯之本。他因被人反對，以後卽稍修改其對此問題之意見。

其根本主張如次。他以爲人類的思想，並不是靜觀外物，並不是對於過去的現在的事實，皆持不偏之態度。思想之活動，是有『目的』的，思想創造觀念或學理，純爲指導行爲活動之用；所謂眞理，卽指其能漸漸滿足吾人身心之需要者而言。

故眞理，可解說爲一種可以證實試驗的假說，蓋謂一個眞確的觀念，是可達到一個實際的事實的。至在感覺所知的事實外，另有一種更深的經驗，則只可爲信仰界之對象。此種信仰，僅可由其效用能滿足吾人之要求，以爲其眞實之標準。實則以效用爲『眞』之標準，無論在何項眞理範圍中皆然，卽一條科學理論，亦只以其發生效用與滿足爲其能爲眞理之標準。

實用主義自產生後，卽頗受各方激烈的批評(註二)。斥其說改變了名詞的眞義，造出些不可恕的誤會。因眞理與實用兩者縱常相契合，但兩者仍有分別，一眞的命題所陳述的事實，可與吾人之利害無關。且所滿足，亦有多種，各種滿足常相反，如肉體的

(註一) Idée de vérité, p. 50

(註二)參看 Berthelot: Un romantisme utilitaire, 3 vol.

滿足卽常與履行道德義務之快樂相衝突是也。

將眞理與其證實混爲一談，直將兩不相同的事混而爲一。蓋一命題可以本身是眞的，而證實則屬於吾人可能爲之事。例如『水星上有生物』一語是可眞可妄，而此語之眞或妄，吾人則可以證之或不能證之。

再者，一信仰有實效，不能卽視此信仰爲眞，因一朝此信仰成爲幻夢，卽將失其效用。例如古代有些民族信月蝕爲被龍吞食，急擊鼓鳴鐘以救之，結果常偶有效，因擊鼓鳴鐘以後不久，月果然再完全出現。但自天文學將月蝕之理闡明後，古時之迷信陋說，卽無效用。

自吾人觀之，實用主義之可採處，或如下一點：卽吾人之一切觀念與理論，須常與事實接觸，而受事實之證驗。

由於與事實接觸，人心始得知其爲眞之程度。惟分析此接觸之機構則甚難，其結果並非如詹門氏所述者。

例如詹門氏在眞理問題中未分淸觀念與判斷之別。據他看來，觀念能引到一眞實事相者爲眞，例如散步於通衢上一賽會中，忽聞吼聲自一小屋中發出，吾以爲是虎，如入其中果見其爲虎，則吾心所藏虎之觀念，卽爲眞的。實則此事之歷程甚複雜。當聞吼聲時，余以爲虎，余卽已先下一判斷，以備與入屋躬親目睹

時所得之判斷對照。並非是將孤立的觀念去與事實證驗。乃是將一事前之判斷，去與事後所得之判斷對照。此乃極重要之區別，而詹門氏未注意到，故其對於眞理問題之解釋，仍闇不淸。

其對於實用與成效兩觀念亦然。

故拿郞德曾云『如謂成功卽是就一命題所附帶之利益快感而言，則實用主義，卽爲極端的懷疑主義，而將眞理之觀念，完全併入個人之利害，則有效的謊語，亦可成爲眞理矣。於是在甲以爲眞者，乙可以爲妄……。反之如謂『成功』係指思想與事實之證驗相符合，爲人人所公認，則實用主義之態度，卽漸接近理性主義。在此兩極端之態度中，可列出一切大同小異之中間態度。詹門氏初期是傾向前者，其最後作品之態度，則漸近於後者』(註一)。

第二節　人本主義及工具主義(Humanisme et Instrumentalisme)

在實用主義派中，以習勒(F. G. S. Schiller)最爲輕視形式邏輯。在其『形式邏輯』一書中，卽深斥形式邏輯之不當。

他說『在實際應用中，欲抽象的去專用邏輯的形式，卽必會

(註一)參看 Vocabulaire Philosophique, Article; Pragmatisme.

將眞理及有意義的思想失掉』。因事實上邏輯的理論，是與實際生活相連。將思想之形式與其內容分開，形式邏輯即不能道出眞理由何組織而成。但眞理仍爲形式邏輯所追求之對象。如此，則形式邏輯所講的思想如何原委一致，僅是文字上的一致，與有生命的思想無關。故形式邏輯實陷入一無可避免的矛盾中，即或者承認人們的思想是活的，是有意義的，或者，形式邏輯只講些空言廢話。

眞正活的思想，在其心理的與情感的內容。如非盲從，人們當承認一判斷在形式上始終不變，但其內容所指之意義則常不同。例如『人是有死』一語，用在邏輯課本中，與用在祭文輓辭中，意義即各不同。

反之，形式不同的判斷，常能表述同一的思想或心情。如云『離相交二直線爲等距離之各點所成之形爲二等分角線』，實與一角被二等分角線平分爲二』一語相同。

且『有些形式常只適宜表述某種材料，有些思想，在此一形式中表現，是比在他一形式中表現更爲自然。故不能說思想之內容材料，是與表述此內容材料之形式，可無絲毫關係影響的』。(p. 5)

總之形式邏輯與實質邏輯之分，是毫無根據的。

習勒更將名詞,命題,推理等詳細分析,以明其說。

他說,名詞只在表面上是固定的。實則其意義是與其他名詞在一語句中相隨共變。亞里士多德以爲每一名詞表述一種本質或一種有定的特質,此觀點已爲近代科學之進步推翻。一名詞決不能只有一種價值意義。

判斷或命題之理論,如普通形式邏輯書中所述者,更無是處。因判斷只能由其心理方面的意義決定之,已如上述。即如著名的思想三律亦不能例外。

例如同一律云『A 爲 A』,如就文字上看是毫無意義,不惟不足以激發思想,反是錮蔽思想的。

此律之應用,最後以得到統一的存在,如希臘伊利亞學派(Eléates)所述,以得到不可思議的統一爲限。除『A』以外不言其他,同一律即不能令人思想再進一步。(p. 118)

如由實用方面求解,此律僅可指部分的同一;如云 A 爲 a,A 爲 b……而故意將事實之異點除去。故此律應是一條假設。

不注意一判斷所指之目的意義,形式邏輯即常得到些狹的分類,及一些曖昧,兩歧的意義。例如一全稱命題可就其數量方面的意義觀之,可就爲假定的說法觀之,亦可就其普遍概括之性質觀之。『人是有死』一語,可視爲『張,王,李,趙……等皆死』,亦

可解爲『自古迄今，一切人皆有死，則將來的人亦皆有死』，又可解爲『凡人皆有死』。

故邏輯表中所列各種推論式是不完全的且多曖昧歧義。此所以亞里士多德之三段論式，引起不絕的爭訟。

習勒之批評是極明白。他將舊形式邏輯之弱點完全指出，不過自吾人觀之，其說多有過火之處。吾人將來述到同一律與矛盾律時再討論此種批評之價值。

如追問事實上能否在思想活動中，將內容及形式兩者分開，自可總結謂形式邏輯之無效。

不過如此的結論，苟認爲可接受，不僅非難了形式邏輯，且將非難了一切科學。

如在物理界中之定律法則，並非存於現象之外以自表現。

例如並無一種重力公例存於宇宙中某處，以備萬物自往依照取法以成形者。定律法則是與物質現象密切連合的。不過物理學家之成立物理學，係在物體變化運動之中，區別出一種法則及一種物質，亦無人去非議之。

思想之活動亦然。思想不是一個無內容材料仍可活動的機器，習勒對於此點自甚言之有理。不過在事實上思想之內容與形式縱是分不開的，但亦未嘗不可將內容與形式兩者分爲思想的

兩面看,於是,形式邏輯,仍可成爲一學,以闡明思想如何獲得眞理之條件法則爲務。

第三節 社會學派之思潮

據社會學派觀之,思想的一切範疇與法則,皆由社會生活之需要所形式。

杜爾幹(Durkheim)雖未將此問題作一特殊之研究,但在其各本大著中,皆論到此問題。他視眞與妄之相對,亦如宗教上之聖與俗相對,皆可化爲社會的協合一致與不協合一致之相對。因據他看來,眞理者乃是社會人心共同了解承認之知識,故眞理是有能力可以強制個人附和服從。眞理是隨社會而變的。

社會並不限於強制個人去了解思想之法則,社會尤能創造思想之範疇與法則,以爲個人思想之規範,此等範疇與法則,後來是可獨立存在的。

如時間,空間,因果等觀念,即係由於氏族時代,族中各人需要互相了解去赴一公同目的,遂產生此等觀念。時空因果觀念既如是,思想的形式法則之產生亦然。

『如不矛盾律之觀念,即以社會必要互相了解爲本』。

杜爾幹此說,並非欲搖動人類理性之統一性,反之,乃是肯定

人類之理性是到處相同的，一切社會之中，應有同一的邏輯，因一切社會皆須服從自然界的同一法則也。此說初看似覺無根據，因各人種是不相同的，各民族發展之環境，尤彼此互異，無法看出人類之理性與邏輯，是同一不變的。毋寧說各種不同的社會結構，應與各種不同的思想結構相對，較爲妥當。

欲解答此問題，萊危布魯(Levy-Bruld)在其有名的各種著作中，將原人心理，曾作深細的研究，而得如下之結論。

他說，野蠻人對於感官所得的知覺現象，其解釋與文明人大異。吾等文明人看見一草一木或一馬一獸時，卽刻將之列入適當之動植物分類表中，以查其屬於何種應得何名。野蠻人則不然，眼見到一切物，如風雲雷雨木石蛇鼠等，皆視爲有神性或魔性在，可以爲人的禍福利害。他們以爲能認識此等物的神性或魔性，比之吾人之從事系統的分類尤爲重要，故常將吾人所細加區別者反視爲相同，如用同一字以記一個鸚鵡，一粒麥種或一羣獸毛等不同之物，其心中一遇見現實界的事物，卽刻會想到神祕界，以爲五官所接的物質性，是與神祕魔術性無區別的。

故一切皆視爲神祕的事象，此等神祕事象中，存有祖宗譜上祖先的神力在。

野蠻人視語言，風俗，及社會制度等皆受此祖宗的神力支配。

例如他們在行獵或捕魚之前，卽舉行祭事，祝神唸呪，欲藉神魔之力，使獵物或魚蝦等前來就捕。

又如常視死者仍如生，能有魔力干涉生人之事，能延長其參與一切之力。故野蠻人之部落中或其家庭中之日常工作，多爲一些敬神事務所擾。

總之，據萊危布魯之說，野蠻人之心思，是與文明人相反的，尤其在邏輯方面。野蠻人之運用思想時，並不似文明人之按照矛盾律。在吾人認爲與生存條件毫無相同關係之物，野蠻人常視爲一樣。例如鸚鵡是一飛鳥，是一能飲能啄之物，與一粒麥種之生於地中者不同，顧野蠻人則用同一字呼之。

故社會學派所尋之證據，似乎證實習勒由心理方面所立之說。不過此種結論確能成立否？吾人將於下節分述之。

第四節　邏輯原理之永恆不變性

邏輯原理之永恆不變性，似應包括兩問題，一爲批評問題，一爲事實問題。

關於批評的，果不羅(Goblot)及魯以耶(Rougier)兩氏在其邏輯書中傾向社會學派之立場而謂邏輯之形式原理乃是些共認的規約(conventions)，用以規定思想言論應有之程序者。

第一，果不羅先生謂眞理之特質，在其能傳達交換，『人心欲求眞理，乃因人類須生活於社會中故，由需要互相了解及互相協合，遂使到大家研究如何傳達交換思想，如何使其思想含有普遍性』(註一)。

邏輯的社會要素是很顯明的。『如語言學，歷史，比較社會學，心理學，尤其是科學史哲學史等皆足使吾人得知廣義的理性主義(Rationalisme)之產生及進化』。

不過自吾人觀之，果不羅之說稍覺過當。傳達性雖爲眞理的性質之一種，但尙不足爲眞理之特點，因錯誤亦是可以傳達的，且有時比眞理之傳達尤速。

但雖如此，而果不羅氏仍由其說推得如下之結論曰：

『此因個人欲得其同類之相信，尤其是欲其對方之相信，始產生邏輯的證理，駁議，討論，反駁等方法』。

是時矛盾律卽爲邏輯的一種規約(convention)。吾人爲思想之便利，取以爲遵循之規則。故矛盾律是一公設(postulat)『亦如其他科學公設，可爲決定是非之標準，爲用極便』。果不羅又謂『但此處所稱的方便，是可變爲一種必需，非邏輯的必需，乃實用的必需。如廢棄矛盾律，則實際上思想卽不可能』。

(註一)參看 Traité de logique, p. 35 ch. sg.

此種論斷，吾人覺得不甚清楚，其故由於果不羅氏立說未當。

因視基本公設爲一種規約，卽有選擇優劣之可能。人們擇取某種方便的規約，必係在許多可能的規約中去擇取。不然則規約一字卽無意義。

故規約一詞，係包有選擇之可能性在。但講到『選擇』卽須有一種討論商議，因不能不先商妥而後選擇也。

但無一經過考慮而後成立之判斷，是不用到同一律與矛盾律的。無一簡單判斷，不問到某種屬性是否合於某種主詞。如謂矛盾律只是一種公設或規約，卽將犯竊取論據（petition de principe）之弊，因決無一有意義的判斷，是不用到此律也。

廢棄此律，不僅實用上爲不可能，卽邏輯上亦不可能。因無論如何，吾人總是有思想的動物，而吾人之運思，又不能不有所判斷，結果卽不能不用到邏輯之原理。

故矛盾律，同一律與排中律三律，純粹是形式的，換言之，純爲眞妄之條件，吾人論邏輯之規範性時已述之。

一判斷中之主詞，表詞，繫詞三者須始終如一，當思想運用到此等詞時不能卽改變爲他物或變爲相反之物。此等詞應當是固定的，不能成爲流動變化的，不然卽不能有綜合，不能有判斷。

同一律『A 爲 A』之意，僅是不容許思想視其對象是存在的同時又是不存在的；尤其不容許視其對象是如此，同時又不是如此的。此乃形而上學及邏輯的要求，可由笛卡兒之我思故我存在之說證之。

可知一種思想的對象，不能斷其同時有絕相反之性質，不然，此對象在一刹那間的思想中，卽不能前後同一。而矛盾律及排中律卽由是引出。至此二律如何能離同一律而獨立存在。且獨立至何程度，吾人將來論述之。

但同一律之不容許一思想的對象有兩絕相反的性質，並非反對一物有各種不同之性質。吾人對於 A 仍可有種種判斷，如云『A 爲 b』,『A 爲 c』……等，不過不容許有『A 爲非 A』。

『A 爲 b』,『A 爲 c』等命題並不與同一律相反。不過此處所講者僅就一判斷言，並非對一判斷中之主詞表詞繫詞言，換言之，乃對名詞之綜合言。

可見同一律之應用，旣不反對思想的綜合作用，亦不反對事實有雜多的性質。

唯欲『A 爲 b』之綜合爲眞，必須被一切有思想之人類皆能判定爲眞，而此卽爲純理科學發展之趨勢。滿演生 (Meyerson) 在其各種大著中，卽闡述此種趨勢乃是一種空間同一化的發展。

（滿演生在其『相對論的演繹』一書謂相對論持一種時空合一的四度幾何，主張一切物理現象皆可化入此四度幾何中）。此說大體是眞的，但縱如此，尙不能滿足同一律及互相符合的眞理之條件。

蓋宇宙萬象之複雜變異，很難用科學思想，將之化爲一些不變原素。故科學須尋求一些方程式，俾其中各項，皆能代表客觀事物變化之量，但如此卽以爲科學是務將事物之各種性質排除，卽爲大誤。因科學僅在建立些函數關係，以滿足互相符合的眞理之要求，且在深入實在之中，把握其全部性質也。

例如相對論的物理學，係將一切物理現象，化爲一羣向量(vecteurs)，代入一種四度空間連續體系中。但用以表示時間，空間，能力等之量，其性質仍終各爲別，方程式所闡明者，僅其函數互相之關係。故如欲指明科學思想之根本要求，與其謂在求化異爲同，毋寧謂爲在求函數的統一。

故由認識論的觀點及批判的觀點言，吾人所述之思想三律，對於任何思想活動皆不可少。不過各律亦僅在確定思想之如何前後原委一致，並非由是卽將思想溶入一不可分的同一中。

且思想律之永恆不變性，尤不能與思想發生之條件相混。

社會判裁，雖對於思想範疇之表現於個人之心中，是一種必

要的條件，但非一種充足的條件。

例如語言爲傳達思想之必要工具，自是社會生活之產物。但古士阿 (Couturat) 說得好，僅就其本身言，語言不過是一種聲音，一串聲的連續波動。應當使此一串聲音，譯成個人有意義的思想。故思想乃是社會傳達之因，並非其果。

至萊危布魯 (Levy-Bruld) 氏所區分的前邏輯的心思 (la mentalitè Prèlogique) 與文明人的心思，在此等條件下有何價值，吾人亦可略述之。

此種區分有其最大的根據，但並未搖動邏輯之基礎。萊危布魯曾明白的說過『余所謂前邏輯的說法，乃謂人類心思可有兩類，一爲邏輯的，如吾輩文明人之心思是，一爲前邏輯的，爲初民心思，所謂『前邏輯』者，謂其思想不按思想三律之指導，而另有其運思之法則也。此兩類心思，是彼此不同的。而前邏輯的心思不易維持，顯而易見。……余對於人們許多關謬之評而實無關於拙著者勿庸答辯。余因曾用過『前邏輯』(Prelogique)一詞，但不能卽謂提倡前邏輯主義(Prelogisme)(註一)。

實則原人的心思亦如文明人，是同遵依邏輯法則的，所不同

(註一)參看 Bulletin de soc. franc de Phil. 1929. p. 109

者，僅爲經驗之輪廓，因而思想之內容亦異。野蠻人視鸚鵡與麥種相同，吾人固引以爲異。但野蠻人雖視麥種與鸚鵡有同一的神祕性，尙不至視爲與鱷魚有同一之神祕性也。

在其神祕經驗之範圍中，野蠻人由其鬼神參照之觀點以定事物孰有關係，孰無關係，亦與科學家之從事生物分類相同。

故文明人與野蠻人之經驗內容雖不同，但其經驗內容之分類，仍按同一的判斷法則。野蠻人的應用邏輯，自與吾輩文明人異，但其形式邏輯則同，不過野蠻人或埃及人並未想到立出形式邏輯之法則耳。

余對此問題，本不欲多述。顧因皮亞冉(M. Jean Piaget)最近對此問題另持一見，故不得不略論其梗概如下：

他在其『發生的邏輯與社會學』一文中(註一)。仍宗萊危布魯之說，謂人類心思之結構可有幾種，並提議分爲阿梯克的心思(mentalité antique)，(比前邏輯的心思更爲幼稚)，前邏輯的心思及邏輯的心思三種。

依其說法，矛盾律只限於應用在邏輯的心思。因謂須有明確之概念，始可運用矛盾律也。至於原始的心思及前邏輯的心思，只有混沌含糊的觀念。阿梯克的心思所思者多是些具體實物之

(註一)參看 Revue philosophique, 1928, I. p. 167.

意象，前邏輯的心思所思者多是些神鬼，禁物祭器等觀念。但其含義極不確定。

皮阿冉謂如思想是可發展的，則其發展之最後階段，必達於邏輯的心思。如是，則思想活動之初步，即注意到如何連貫，即已含有矛盾律之功用在。皮阿冉之解說，係借生物同化作用之名詞曰『一切生物皆有同化機能，將食物化爲適於己身需要之成分。不過有些生物是有胃的，有些生物則無之，生物消化之機能需要雖同，但其消化之器官構造則不同』。

皮阿冉此種說法甚新奇，不過余頗慮其易引起誤解。如其謂矛盾律爲一切心思結構活動所必依據之規則，並謂此等心思之結構僅於應用方面稍有不同，則吾人尙可接受其說。

此時用消化作用爲喻，尙可贊同。生物之同化作用是能鑑别食物之良否的，因懼生命有危險故雖下等生物，其消化機能亦只能接受一定的化學成分，而排除其他。

同樣，矛盾律在思想錯誤嘗試之歷程中，即發揮其審判力，矛盾律所對付之概念亦無須十分精確的界說，只須個人思想認爲有用卽可。

如此，則原始的思想，仍是按思想之形式法則，以定其實物意像之孰當去取，孰能與其情感適合，至較阿梯克稍高之野蠻

人，雖其所有鬼神之觀念，隨時改變，不甚確定，但當其區別實物孰爲神聖不可侵犯的，孰爲汚俗的，仍以矛盾律爲本。

故有思想的活動時，指導此活動之思想法則卽起而執行其任務。在各種進化不同之人類思想類型中，思想律之運用，實只有程度之差，並無性質不同之別。在思索各實物意象之關係中，或思索各概念之關係中，思想之統一作用，總是按不矛盾之指導以表現。所謂人類心思結構之不同，並非指矛盾律應用之形式言，乃指矛盾律應用之領域而言也。

第五節　情感的邏輯(Logique de sentiment)

社會學家及心理主義者最後尙留有一問題。卽問旣承認思想之形式原理是不可變易的，是否不能再將邏輯分爲兩種，一專研究『存在的判斷』，一專研究『價值的判斷』。關於此問題，吾人在論究規範科學之性質時，已略述之，今尙可由另一觀點以發揮之。

吾人已說過，存在的判斷與價值的判斷，如常人之所分者實不妥當。

一切判斷皆有其存在之形態，與其他之物有別，例如『上帝存在』一語，並非汎指任何物體，乃僅指超越萬有而存在之主

體。任何判斷，皆於明中或暗中指其對象是有一定性質的，是有一定評價選定之意義。故一切判斷是同時肯定有其存在，並鑑定其存在之品質的。

如『牛乳是白的』一語，一方是表述所見之牛乳是與他物有別，他方是言牛乳之白可供他人鑑定，可比之白雪之白，或麵粉之白。同理『此馬是獨眼的』一語，是指此馬有其特點可識，且同是指出馬之價值是有缺點的。

故一切判斷，同時是價值的判斷又是存在的判斷。是價值的判斷，因其所述之特性，係由一組屬性中選出來的。又是存在的判斷，因其所選定之屬性，是確與事實相符。

有許多判斷，是由人心無意之中或盲目的與事實接觸而產生者，似乎此類判斷純是事實的判斷。如云『牛乳是白的』『火在燃燒』等是。但細考之仍有評價之特質在。

故價值之選定，是一切判斷之基本，至選定之價值是屬於感性的，或屬於審美的，或屬於道德的，皆無大關係。所須注意者，即判斷之機構及形式上的性質，皆不因各種不同的價值而變。因判斷之作用，隨時隨地皆在評鑑及指定一種性質，其所指定者總是客觀的，因所指定之性質，能彼此有別，不能與他物相混也。

而通俗流行之語言，並不求思想之內容精確，只隨用力節省

方面去發展，致常用同一之字，去述貌似而實不同之物狀。例如白色有純白，微白之分，而常用一白字表之。冷或熱亦有程度不同常人用冷或熱等字，亦未指明清楚。實際上此等不精確處，亦無妨礙，思想上亦習慣了應用此等不確切之字。

科學則不然，無論為規範科學或非規範科學，總求將所用概念弄清，必使在判斷中，所評定者能與事實切合。

吾人所稱之一價科學，其內容是可分析為一羣不變原素，即能確定其研究之對象，指明其所研究之性質。例如物理學之研究色彩，係確定其一定之波長是也。

至規範科學或兩價科學，亦研究善或美之特質，使可為評衡美醜善惡之標準。美善等之價值，及其高低之等差，在命題中使用時，亦與物理學中論顏色之波長與重力之數量等同一功用。

故如容納通俗之見（吾人以為不當）謂規範科學係研究價值的判斷，實證科學係研究存在的判斷，亦不能特別對於規範科學，另造一種形式邏輯出來。果不羅先生說得好，『價值的判斷，仍按同樣的邏輯，其為肯定或否定，全稱或特稱，直言或設言，亦與存在的判斷同一形式』（註一）

但價值的判斷在形式上與其他判斷雖無區分，而其特殊的

（註一）La logique des jugements de valeur. p. 1.

辯證，不亦當如黎波(Ribot)所述，另有其特別的原理與特別的方法乎？

依黎波，理智的推理，須求得一結論，而情感的推理則係趨向一目標。理智的推理，係按不矛盾之原則，不偏不倚的，由前提推出結論。情感的推理則反是，係按一定之目的以推，其前提係由所欲達之結果以指出。

試觀下列情感的推論式云：

『凡婦人皆妖豔，

亞麗司(Alice)是一婦人，

故亞麗司是妖豔』。

此三段論式，由上所述，卽與下述數學的三段論式大異。

『凡二等邊三角形有兩角相等，

此三角形是二等邊三角形，

故有二角相等』。

如此，黎波卽研究如何由一情感的激動，無意之中漸漸構成一推理，但仍保有情緒之狀態者。此種情感造成之推理，常能造成一種信仰，以流傳至千百年後。如由畏死之情，卽產生靈魂不死之說是。黎波之分析，引起形而上學及心理學的問題，吾人只略述上數點而已。

自吾人觀之，黎波對於他自己所主張價值的判斷與存在的判斷之區分，尚未說清，故其所言理智的邏輯與情感的邏輯之區分極不自然。

且無論是情感的推理或非情感的推理，其前提之提出，總是有一定之目標。在算學的簡捷證理中，亦不能例外。在推理過程中，我因想到一特殊二等邊三角形，始提出上述之三段論式也。

講到情的推理如阿麗斯之例，亦無不同之處。在前述兩例中，前提之提出，是有一定『目的』的，而問題之所在，乃在問提出此等前提是否正當是也。

至黎波以爲矛盾律與情感的推理歷程無關，曾舉如下之例曰：在白日青天中有多人作伴時，心力強者卽會認有鬼神之存在，但在夜間寂靜之時，此輩心力強者，亦會疑神疑鬼自起恐慌；此可謂自相矛盾。但此例不能卽證黎波之說爲合理，因此問題是複雜的。心力強者在夜間之論斷與在日間不同，他們追問是否究竟鬼神不存在，卽覺每一聲響如有鬼神作喘，此時情感之情境卽會產生新推理，不過此新推理仍與舊的推理同，同受矛盾律支配的。

可見並無一種特別適於價值判斷的推理，是異於純粹理智

的推理的。思想之活動，總常期於統一，不過因尋求思想一貫，引起情感衝動時，常有曲解事實之處耳。

第四章　概念問題

第一節　新多瑪派及概念的邏輯

在第一章歷史導言中，吾人曾略述新多瑪派(Le néo-thomisme)已復興多瑪的邏輯(la logique thomiste)其趨勢離數理派，實用主義派，心理學派及社會學派皆遠。

此派邏輯重提亞里士多德之說法，且首將形式邏輯（論思想自身如何能前後一貫）及應用邏輯（論思想與實在如何能符合一致）分得極清楚。

此派邏輯係以一組形而上學的假定爲本，其重要點約如下述。

1°/ 視語言是可能精切的譯述思想。

2°/ 視吾人心中之觀念及觀念之聯絡條貫，可能正確的表

述實在事物之狀態。

3°/ 視個體係賦有所隸屬的種(espèce) 與類(genre) 等之性質，此等關係是有形上的必然性。例如孔子屬於人種(l'espèce homme)，而人種又屬於死類(genre mortel)，則孔子有死是。

既然如此，則形式邏輯卽有一種實體學(ontologique)的價值，因其指出如何可以深入實在之中心之條件。

多瑪派係承繼亞里士多德之邏輯，且大近於經驗派，因其視用感覺經驗，去指導思想尋求眞理爲必要，但亦視心思如能獲有一羣觀念後，卽能照對事實自去定其眞妄的。

欲把握住實在的眞相，思想係用由簡至繁的三種手續，卽概念，判斷，推論三者。如用語言文字表之於邏輯書中則爲名詞，命題，推理三者。

如此，則一簡單命題可視爲一種關係，爲一種用一繫詞以肯定或否定兩個名詞間的關係。例如『我讀書』一語，可邏輯的解爲『我是正在讀書』是。

故思想常可分解爲一些終極元素，卽可表述於名詞中之一切概念是。此等概念可視其互相包含與否而配合成種種形式，其包含之關係，卽用一繫詞表之。如是則止得到舊邏輯靜止的意義。

因馬里丹(Maritain)(註一)不知『我讀書』一語是講我有讀書的『行動』。『我是正在讀書』一語，是講我的『樣子是在讀書』。兩者大不相同。

但無論如何，一朝命題的性質旣經確定，卽可由許多簡單命題間之某種關係，立出推理之形式。

故理智的活動，可分三步驟，第一步最爲重要，因視概念爲簡單元素，頗爲現代邏輯家與心理學家爭論之點。

玆試細觀新多瑪派所發表的概念論。

依馬里丹之說，此派邏輯重視領會，重視智慧能把握住少許實在，(如草木禽虫之類)能見到事實之本質。

詳言之，概念或觀念係由心產生，用以攝取事物現象的。雖其成立係由心與事物接觸而來，但其本身有獨立的存在，因其係由抽象作用得來的共相。旣然如是，故吾人用概念以取得之對象，可視其存在，是在吾心之外(如樹)，或視爲可能的(如最完美的境界)，或視爲純粹理想的(如負數)。

概念作如是解，卽可視爲由人心發見的一種實在，具有不變的特性，不能隨人任意改變。

(註一)參看 Elément de Philosophie, tome II, p. 124.

馬里丹氏特別重此點，因由此可進而了解何謂概念的內包與外延。外延者乃一概念所指稱的一羣個體或一羣元素；反之內包者，乃一概念所由構成之一組最簡性質或觀念，

外延，如人＝中國人，黑人，歐洲人……等，

內包，如人＝有生命的動物，有脊椎能造器具……等，

但外延與內包，可由唯名論之意解之，亦可由唯實論之意解之。

自唯名論或科學的唯名論觀之，唯個體最爲眞實，各個體之中有共同之點（共相），有殊異之點（殊相），皆可用名詞表述之。與此等名詞相應者卽爲概念。概念者，人心可取爲一種觀點，以審判事物者也。概念並無何種固定不易之性，因如遇着新個體插入原觀點之範圍中，卽常將概念修改。

例如吾人原自信能用概念將植物界與動物界分淸。但今發見有許多生物（如水中之微生物等），似難定其屬於動物，抑屬於植物。於是不能不將原來之區分放棄，而謂動植物兩者之間，只有程度上之差異，並無根本上重大的區別，結果吾人對於生物之觀念卽改變。

自唯名論觀之，一切概念皆有同樣的改變，其內包可被其外延支配，因新的個體之發見稍多，卽須將概念之內包改變。

故隨吾人視爲實用之方便，而特別重視某同點或某異點，卽可將原來之分類改變，因而概念之內容，亦隨而改變。

但自馬里丹觀之，此說不能成立。因視概念之內包，是攝取事物之本質(essence)而成，有一種客觀的價值。在每一概念中，皆有本質之成分在（如人是有理性的），及由本質引出之性質在（如人能語言），此種本質爲概念之基本，比概念所統屬之個體數目爲重要。

他說『如吾人之概念，眞能攝着事物之本質，則概念之內包卽有客觀的價值，換言之，概念之內包，乃一羣組成概念之要素，第一爲組成概念之本質（如動物及有理性二點爲人之本質是），第二，爲由本質引出之性質（如能言語，能歡笑等)……』(註一)。

故概念之基本，爲其內包。至是否個體含有本質，且有多少個體是含有本質，則爲以後之問題。總之，本質是實有的，且有高低之等差，不能爲人力所改變。吾人只能在自然界中去發見與此高低等差相應之萬類個體。

馬里丹氏視唯名論爲不滿人意，吾人亦贊同，因事實上確有許多事物，是有種與類(espéce et genre)之等差相應。但他方

(註一)參看 Ouvrage cité, p. 35.

面，如視概念確有本質之實在性，則將遇到許多不可解的困難，如近代學者所批評者是。

故在考察邏輯是否要藉一種形而上學以構成之先，吾人先看概念是否能本身自足，無待於外，而爲思想推論之起點。盧格(Luquet)與圖里歌(Tricot)各在其形式邏輯書中，則作肯定之語，（但又不與馬里丹之見全同）。

他們說，概念應當在判斷之前存在的，在判斷中，概念即爲表詞，不然判斷即不能成立。

但此問題又更複雜，因在思想之活動中，概念與判斷，是混合不可分的。

總之，視概念爲一固定不變之原素，即會引出許多困難。

今試就此觀點，再取舊邏輯中所分的抽象概念與具體概念，集合概念與區分概念，普遍概念與特殊概念析述之。

普通文法對於抽象與具體之分，謂由感覺所認知者爲具體，抽象則反是。如由動詞及形容詞，變出之字爲抽象名詞（如運動，白色等），反之，如蘋果，犬，馬，等爲具體名詞。

此種區分，是甚武斷。

如在夏天，由一暗室中出，在正午時立於一條白路上余即閉

目而言曰『此白光傷目』此時所言之白色,卽爲具體。

否定一詞,如視爲判斷之特性,則爲抽象的,但否定某種行爲(如余不作犯罪之行)則爲具體事實。

或謂有些抽象名詞,是本身存在的,因其可指稱抽象的東西,如靈魂美性等字是。但如此說法,卽否定精靈論的客觀價值,而解決了邏輯範圍外一問題,蓋謂靈魂,美性等無本身的存在,只是人心幻造之物也。實則此等名詞,仍如其他,是可具體化的,例如謂 Chimène 有美的靈魂(Chimène) 爲大悲劇家 Conneille 所作 Le cide 一劇中之女主角,爲美女之典型人物)或謂西施具有極美之姿是也。

故細觀之,在邏輯中無一名詞之本欲是可爲具體,又可爲抽象,只須用一切指定詞(如我的,這個,此,彼等)加上去卽可定其性質。如『人是有死』一語中之人字是抽象的,但如云『墜於吾家門前之人已受傷』,此語中之人字,卽爲具體。

自然馬里丹先生對於抽象與具體之別,不似文法之簡單。

他說『如「人」一概念或「白」一概念可表示一定物形於吾人心中,例如用「人」字以指蘇格拉底,此時之人字卽爲具體』。

反之,如『人類』,『白性』表一無所指之形於心中則爲抽

象。

但如此區分，仍不見對。如說『此白光傷吾目』，並未指爲太陽之白光或路的白光，但此時吾所指之白光，則爲具體的。

同理，對於集合概念與區分概念，普遍概念，與特殊概念之分亦然。

如『軍隊』一詞是集合名詞，但如云『英國的軍隊，法國的軍隊，意大利的軍隊等集合於凡爾登（Verdun）之前』，此語中之軍隊，則爲區分的。

又如蘇格拉底本是指個人，但如云『近代來如蘇格拉底一流人物實甚少』，此語中之蘇格拉底則爲集合概念。

同前之理，一名詞爲集合或爲區分；純視其前所用之指定詞及語意而定。

有時人又分出可思的概念，及『不可思議的概念』兩種，但此區分，除偶然之特例外，無大意義。

例如『圓化方』，用直尺圓規之幾何觀之爲不可思議，但自解析幾何學觀之則可解。

故概念不能被視爲簡單固定之原素，而當視其可隨判斷配合以應各種目的。有如一建築師利用同一材料可建築一學校或一住宅。一概念可被判斷賦予以一定之職能功用。

此所以數理式的邏輯（指邏輯的代數等）以及近代大部分的邏輯家，皆視思想之起點是判斷，不是概念，概念乃是一種複合引伸而成之物也。

第二節　概念與現代邏輯

現代邏輯對於概念所取之立場，似乎俱得心理學及哲學的證實。

自心理學觀之，概念在人心中，或可喚起一組物性或可喚起一羣賦有此組物性之個體。

故概念在心中，可煽動思想使向上下四方去活動，因概念是同時包含有雜多物之印象，及統一此雜多現象之意義在。此點布郎雪維氏在其判斷之程式 (modalité du jugement) 一書中發揮得極有趣(p. 8)。

判斷之活動，是不能毫無內容，或言之無物者。誠如馬里丹之說『判斷如眞毫無內容的游戲，則心之內容，將空無所有』。但概念須在判斷中且惟藉判斷，始取得一定之形及確切之意義，此則甚確實。此所以概念是無數判斷結晶而成，爲一切可能的判斷之起點。

德那渴阿 (Delacroix) 說得好『孤立的概念，是不存在的，

一切概念，皆是一已構成之判斷』(註一)。

故讀到一句或聽到一句判斷，當其中所用之概念是合宜時，即會感到不快，例如云『巴黎是法國最小之城』，即會令人詫異。

此點爲戴崙(Taine)所述，而果不羅又重引之(註二)實足與吾人上述概念的心理機能相印證。

至由形而上學方面去觀思想之活動亦然。歷代思想家皆以爲推證的思想(即推理)，是不能得到絕對的。因謂推證的思想，只能攝取事物關係，不能不以『有限』去了解『無限』，不能不以『連續』去了解『不連續』。此種矛盾，由於吾人不能以推證的思想去攝取何種可以本身獨立自足的知識(即不能得到絕對)。

理性是能夠且應當肯定有絕對，以明其活動之最後目標，而賦眞善美以規範的價值。但理性只能解『絕對』爲實在的有限概念，而認爲有相對的存在，吾人之思想，不能超過此限度。因思想之功能爲下判斷，而判斷者卽建立一關係之謂也。

現代邏輯遂與思想之心理歷程相合，或與其形上之價值相合，故古士阿(Couturat)說得好，『舊邏輯純建立於概念的基礎上，新邏輯(logistique)，則視概念爲複合的，引伸的，並非基本

(註一)參看 G. Dumas. Traité de pychologie, I. p. 130.

(註二)參看 Traité de logique, p. 88.

的，且合於現代邏輯之精神，而將概念附屬於判斷，視判斷較爲最根本較爲普遍。其結果即視概念僅爲命題函數 (Propositional function)之一特例』(註一)。

但欲明瞭新邏輯何以會有此種見解，則確定概念之性質，即甚有效。可如下云：

概念者乃一函數的不變式(un invariant fonctionnel)，有質與量兩層關係。

舊邏輯之內容，是重視概念的質。如人之概念，乃是其他概念的質與量的函數。可述如下：

一方面人概念是一不變式，係由其他更普遍的不變式如動物生物……等之下引出，而僅爲此等更普遍的不變式之一函數因子，但他一方面，人概念又是其下所包括的黑人，黃人，白人……等不變式之函數。可用下式表之：

動物$=f(a, b, c\cdots\cdots)$ 此處 $a, b,\cdots\cdots$等代表人，猴子，牛，馬……等。

人$=f(x_1\ x_2\ x_3\cdots\cdots)$ 此處 $x_1\ x_2\cdots\cdots$代表白種人黑種人……等。

(註一)參看 Revue de Métaphysique et de Morale, janvier 1917.

白種人$=f(y_1\ y_2\ y_3\cdots\cdots)$此處 $y_1\ y_2\cdots\cdots$代表拉丁族，日爾曼族……等。

在此情形下概念之內包，一方卽是該概念所隸屬上層的不變式之一切質(例如人概念之內包爲動物之一切性質)，且他方面又爲該概念下層所屬各不變式（如黑種人，白種人，黃種人，……等）之公共性質。

而其外延，則爲全部下層不變式之數目（此時該概念，卽爲全部下層不變式之函數），並非是每個不變式所包含的個體之數目。如是，則概念之量的方面常是附屬於其質的方面，量的表現之形式，是一個單位或全體，或未定的多數(如一個，全部，許多，大多數，很多……等詞是）。

此種看法，可爲司柏 (Spaier) 分析概念的職能時採取心理觀點所證實；司柏所採之心理觀點可以極邏輯的將概念之內包及外延界說清楚，例如『人概念，乃指 xy 之類，而 x 等者，係代表 y, z, w, u.…… 等特質 (y, z, w, u,…… 等卽指一個動物，一個兩足動物，一個有理性的東西，一個能造機械的東西……等）』(註一)換言之，人一概念乃指有理性，能造器械，有兩足

(註一)參看 La Pensée concrète, p. 148.

行走……等特性之一類也。

反之，在精嚴的科學中，視爲不變式的概念，則有一定的量。例如『力』一概念，就其性質考之，久未能確定，如就其機械不變式之形而論則可得：

$$f=mg,$$

固然，吾人在前面曾說個 f, m, g 三者是代表性質各別的東西，不過科學所注意者，則爲三者之數量關係。故其不變式之形，是屬於數量的。

物理學中相對論的基本不變式亦然，其式爲：

$$ds^2=-dx^2{}_1, -dx^2{}_2-dx^2{}_3+dx^2{}_4$$

（此處$dx^2{}_4=c^2dt^2$）

此處用微分表示的距離，時間，空間三種量，仍是性質各別的，而吾人所注意者，則爲三者之間的數量關係。

由此觀之，在質與量兩層關係下，定概念爲一函數的不變式，即可指出常識進爲有組織的數量的知識之歷程。

由此又可看到概念在語言中及在事實中所附着之點何在。

在事實中，有一種不變的性質，有許多顯著的特性而爲無數

的個體元素所公有，如解概念爲一不變式，爲人心由感覺界中漸漸取得者，卽已將概念之功用指明，無須問其是否與一種實體的本質(une essence ontologique)相應，且相應至何程度。如是，則邏輯卽可避免一最難的形而上學問題。

此種概念的界說法，有一好處，可使人明瞭語言在過去時代中是向何方面進化。各種語言在其初期記述此等不變式時，是將之附於所指之物名之語頭或語尾變化上。

如 Duel（二人決鬪）一字，在古希臘文中猶存在，僅將此字之語尾略加改變，卽成爲 Deux（二），故未另立一字以表示『二』。

在拉丁文希臘文及法文中，表示所有權之關係，另有特定之字，如 mon（我的）ton（你的），son（他的）……而在希伯來文中，則僅於所有物之語尾上略加變化，卽足以表示之。

在法文中，常用助動字以表述某種動作方式，如 faire tomber（使落下）是。而希伯來文在 tomber（落）字內略加變化，卽可表出『使落下』之意。

故語言是可逐漸將語根（不變式）離所遇環境而進化，另賦有特別意義。

由上述卽可明概念在判斷中之函數功用，因判斷係在專指

出事物間之一種關係也。

在此觀點下，尙可將個體 (individu) 類、(classe) 及關係 (relation)三者加以區分。

個體(L'individu)者爲不變式所附着以向上下四方作輻射活動之中心點。

類(La classe)者，指一羣個體元素，爲思想所稱爲有同一的不變式或同一羣的不變式者。

由吾人上面所述，則一名詞，可有時視爲個體，可有時視爲類。如云『李太白是一大詩人』即指李太白個人，但如云『李太白一類詩人，在歷史上是很少有的』則指一類。

關係 (La relation) 者指一不變式與許多個體或與許多類相連時之關係。

個體，類與關係三者之相連合有許多顯明的特性，即附屬，包含，實際上的關係三者。

附屬(L'appartenance)者，指一個體元素與其類相連合的關係，可用 ε 記號表示之如『$x\varepsilon—a$』即謂『x 是附屬於一個 a 類』。

包含 (L'inclusion) 者，指類與類之相連合，(如類與種之關係)，可用<記號或⊃記號表示之。如『人類⊃死類』『a 類⊃b 類』是。

實際上說的關係 (La relation proprement dite) 是指連結許多個體使成一體，或連許多類使成一體之關係，如前所述者是。此種關係用 R. X 等字表之。

由此三類連合關係，卽可產生各種論式，且能遵依各種法則。

例如附屬的關係是無傳遞性的 (intransitive) 而包含的關係則可傳遞的。如云：

巴黎人是法國人

法國人是歐洲人

則巴黎人是歐洲人

此論式是指類包含類的關係，其繫詞之傳遞性是很顯明的。但如下列二個論式卽不爲傳遞的；強爲傳遞的卽不通。

使徒共有十二，

彼德及傑克是使徒。

彼德及傑克是十二。

又協約國共有八。

義大利與英國是協約國。

義大利與英國共有八

上二式之不通，卽因其繫詞本是不傳遞的。其兩前提中，皆只有個體附屬於其類的附屬關係，其介詞有時是類，有時是個體。

此種細微的分別，從前經院派學者，曾注意到，謂三段論式中之介詞，不能在前提中爲『複合之意』，在他一前提中則爲『區分之意』。

此所以上述之例甚有趣味，但經院派學者視此種細微的差別，係在概念上，不似近代邏輯家視此種細微的差別，是在所立之關係上。殊不知概念之性質是極複雜，常易發生曖昧晦塞之弊。如由其關係上觀之，並用一種適當的語言或記號區別之，則晦塞曖昧之弊卽可免除。

且如關係之硏究很重要，則用文字記號表述此等關係，將極方便，因用文字記號，易將此等關係之特質表示也。

故現代邏輯是用 p, q, r,……等文字代表命題。用 x, y, z, 代表個體。用 a, b, c,代表類。用 R, X, Y 代表關係。

關係之能用不變式表之者，爲數理式的邏輯，於解說思想之活動時，所視爲極重要者。

不過數理式的邏輯之取命題爲其演式之出發點，不取概念

爲出發點，並非一躍而達如是之結果，乃曾久陷於數學的技術與符號之階段中，以後始獲進步者，吾人於導言中已約述之。

自都夫米耶(Dufumier)觀之，此階段是必經的歷程，因可強制形式邏輯去研究數學家如何推理，及去發見其推理之法則(註一)。

但此派邏輯完全重視概念的外延方面，其結果將使概念之意義枯窮，並將邏輯之領域縮小。

此派邏輯固已免除經院派邏輯所持概念的實在論，但又陷入『類的實在論』中，尤其是持空類(la classe nulle)的實在論，常令人不可解。

一個類之存在，係以其所包含之原素而定，試問一空無所包之類，有何意義可言乎?

包含的關係及加式乘式等，就其量的意義解釋，亦不足以明概念之性質。

都夫米耶說得好，不當在其數目的函數中，去求出概念之眞義。概念所包含元素之數目及所含蓋之領域，並非爲其界說的元素。邏輯的說，概念總與一點眞實的事物之立場相應，其基本特質乃是其可以肯定或否定之容量。所謂概念的加式或乘式，乃是

(註一)參看 Revue de la Métaphysique et Morale, 1912, p. 623.

肯定其聯立的關係或選立的關係而已。

將代數式的邏輯擴大,羅素(Russell)之著作實有大功。古士阿(Couturat)於晚年依據羅素之著作,採取一種立場,卻很奇怪的,漸與舊邏輯相接近。他開端即謂邏輯應採取舊邏輯之意義,(即視邏輯爲規範科學以研究思想正確之規範爲目的)。此意義已被近代邏輯之進步證實之。

不過邏輯如爲形式之學,即當表現於一種代數的形式中,始可免除普通語言曖昧歧誤之弊。但邏輯亦不應因此即變爲一種應用數學,因邏輯有其自身之法則也。

第五章　新邏輯及邏輯的運算

(La logistique et le calcul logique)

由前章所述之理由，可知新邏輯是以命題爲其運算之基本材料，而命題者乃判斷之表述於語言文字中者，換言之，乃眞的或妄的思想之一種地位表示於語言文字中者。

但思想之地位，如何能精密的確定？新邏輯初以爲只須假定『類』是實在的並審察這些類的外延中所容之元素卽足，但到後來又漸棄此說。

其初期之野心，係欲用適當的符號去表述事實。『一切判斷皆可歸到其事實的內容，皆可歸到具體事實的肯定與否定。一切抽象的推理皆附屬於一種以具體事實爲據的推理』(註一)。

(註一)參看 R. Feys, Le raisonnement en termes de faits dans la logistique russellienne, p. 5, Louvain, 1928.

此页无页码

故似謂一切判斷，應當分析至最後時，皆可歸到事實，因事實始爲最後之元素。

不過命題不僅表示一簡單事實（如云此樹是青綠的），且可表示未定的或未必有的事實，因爲命題之主詞或表詞不必是完全確定的。

概稱的命題 (proposition générale) 與陳述單獨事實之命題 (proposition singulière) 有別，但概稱命題係以陳述單純事實之命題爲據，且可分爲兩種，如下：

(1)或者命題之主詞 (sujet) 爲未定，僅其表詞 (prédicats) 爲既定者。例如云『凡樹皆是青綠色的』，『有些法國人是詩人』是。『凡樹』是何樹，未曾指定。有些法國人爲誰，亦未指定。此可譯爲『任何 x 是一樹之事卽必牽連到此 x 是青綠色之事』，『任何 x 是法國人之事，卽有時牽連到 x 是詩人之事』。

(2)或者命題之主詞是既定的，惟其表詞爲未定。例如云，『拿破崙有爲一大將的一切資格』，此處所謂『一切資格』含義極複雜，可指大將凱撒(César)所有的一切資格，可指亞歷山大爲大將所有的一切資格，亦可指……。吾人暫將此問題擱在一邊。且專述新邏輯所研究之對象。

1⁰/爲單稱命題 (proposition singulière) 係表述一單獨既

定之事實者。

2⁰/命題函數(Les fonctions propositionnelles)。

3⁰/概稱命題(Propositions générales)之表詞爲既定,但主詞爲未定者。

4⁰/概稱命題之主詞爲既定,但表詞爲未定者。

5⁰/關係的推算(Calcul des relations)。

在上述每一區分中,邏輯所注意者爲命題陳述事實之結構,及由此結構得出之邏輯法則(註一)。

實則新邏輯對於事實之本身性質特點,毫不注意,而此等性質特點,則爲物理學家博物學家所研究。新邏輯全不管所研究者爲木石抑爲蛇鼠 其所注意之事,僅爲『如任何一物 x 有某屬性時卽當有某其他之屬性』。

故其所注意者僅爲兩事,(一)注意命題之結構爲何,及一羣命題之結構爲何?(二)注意純由此結構得出之眞理(卽邏輯法則)爲何?

第一節　單稱命題及命題之運算

單稱命題係表述經驗中的特殊事實,其結構極簡單,不含絲

(註一)參看R. Feys, ouvrages cité, p. 8.

毫概推作用游移意義或主詞表詞之分。因其陳述是看成一整個的。其所表述之事實有時縱複雜，但必爲特殊的事實，其價値亦卽在此。此等事實，僅被肯定其存在與否，或相合與否而已。

但如此看法，卽將有一困難點，如 R. Feys 所述者，卽：細觀一切命題，皆有概括作用，除僅表述空間某地時間某刻之知覺不計外。但邏輯是不管這些，邏輯係立於陳述事實者之立場，而由其態度以抽取結論。欲問此態度是否正當，則爲應用邏輯之所事，純粹邏輯不與焉。純粹邏輯家常視由複雜經驗中取得之命題爲事實。如云『此是一樹』『某君是法國人』，其意謂在其上下文中，吾人視之爲最簡單，且只須此等事實之陳述不含有弊病，此等手續卽不會有錯誤的演繹』(註一)。

既然如此，則各種單稱命題中其結構之不同，純由於各種邏輯演式而來，如否定式，聯立式及選立式是。

命題之邏輯推算，在建立兩個或多個命題之關係。但至此突發生一難題與吾人所研究之思想三律有關。卽邏輯推算取以爲基本之原始觀念與原始論式當爲何種是也。

在古士阿則視否定爲一種論式，並選取眞與妄之觀念及包攝(implication)之觀念爲出發點。

(註一)參看 R. Feys, ouvrage cité, p. 11.

羅素及懷特赫德在『數學原理』中及約翰孫(Johnson)在其『邏輯』中，皆取否定式爲原始觀念，認爲必用以定『妄』之特質，並用以解說包攝之觀念。不過吾人以爲用否定以定『妄』之特質似不必要，因『妄』與否定顯然不同，一否定命題如『此人不是完人』一語即可爲眞理。據他們之意，眞與妄之別，乃在與眞相應者只有一個思想的函數位置，而與妄相應者，則可有多種思想的函數位置，如 2+2 不爲 1, 不爲 3, 不爲 5,（除 4 以外）不爲任何數是。

試進一步分析此問題。

眞與妄須就命題之全體看，吾人於論眞理問題時已述之。

一妄的命題，其構成之因素，雖是由事實中取得（如云人爲魚類），但就其綜合得之全體觀之，則不合於事實。其特點，即所綜合者與事實無關。（如人與魚類是事實，但綜合成爲「人爲魚類」即不合事實）。

如是，則思想自能直覺的見到事實與表述事實之命題，兩者之間有無關係，古士阿之意見大約如是。

他視眞與妄可直覺的由事實中證明。不過既得事實之證明後，人心又可造一串演式以證其眞妄，如云『此人是完人』我可直覺其爲妄，且可述其故曰『完人之態度與此人不合，故此人不

是完人』。

但人可追問是否有一點爲邏輯與心理活動互相融洽不可加以分別者。在此時卽一個知覺亦不是被動的，而人心並不完全是如照相，其中實含有心的創造活動在。此點羅素與約翰孫言之甚當。

故自然的直覺其『妄』，亦需要心之活動及最簡之否定式，此最簡之否定式，在否定綜合命題之爲妄者。在此原始單純之否定式上，始附上古士阿所說的複雜否定式。

至命題間的包攝 (Implication) 可有一不近情的結果，卽『妄』可包攝有一切且包攝有眞，而反之，眞可被妄包攝着。

欲明此點，須記着新邏輯之最簡包攝式，係肯定宇宙中有許多事實可產生眞的命題(肯定眞實存在的事實)及妄的命題(誤肯定實際不存在的事實)。

旣然如此，卽可用 P 命題表示任何一事，且用 q 命題表示他任何一事，縱此兩命題各有眞妄，其彼此間可有包攝關係。因一妄的命題，並非空無所指者，不然卽决不能成立命題，其空無所有之點，乃就整個命題與事實之關係言之。

因妄的命題中，主詞表詞所指者仍是事實。如上述『人爲魚

類』之例是。命題中之因素（卽主詞表詞所指者），不能空無所有：空無所有，卽不能成立命題。故一妄的命題之構成元素，必有所據。此時元素可以互相配合，以成立眞或妄的命題。

如『人爲魚類』一語，卽包攝有『人是脊椎動物』之意在。邏輯的說，由『人爲魚類』一語是推不出何種結論，因此命題是錯的，但由魚的觀念，可喚起脊椎動物之觀念，而由脊椎動物之觀念是可聯想到人，於是得『人是脊椎動物』一語卽甚正確。不過由魚的觀念，又可想到其他觀念，如想到鱗甲，卽謂『人有鱗甲』卽爲錯誤。此可知妄中可包攝有眞或妄，而眞可被妄包攝。

且可知妄者乃眞之否定，一朝明定其妄，則妄亦是眞理（如『2+2 爲 5 是妄』之說則爲眞）。

旣明此，則包攝式之記號可定爲 $\supset$，而 $p \supset q$ 可讀爲『非 p 或 q』卽是說『或則 p 是妄，或則 q 爲眞』。亦卽是說『若不是 p 妄，就是 q 眞』，隨 p 與 q 各爲眞或爲妄，由理論上可得四種包攝如下：

1. p 眞 $\supset$ q 眞。　　2. p 眞 $\supset$ q 妄。

3. p 妄 $\supset$ q 眞。　　4. p 妄 $\supset$ q 妄。

須知一命題可用肯定式表之，亦可用否定式表之。故『眞』可用肯定式表之，亦可用否定式表之，『妄』亦然。

由是，設其中之命題皆眞則下列之包攝式，卽可列入第一類：

『巴黎存在』是與『2+2不爲5』之眞相同。
『巴黎存在』之眞是與『2+2爲5』之妄相同。

『雪是黑的』之妄，是與『2+2不爲5』之眞相同。
『雪是黑的』之妄是與『2+2爲5』之妄相同。

在『2+2爲5或不爲5』及『巴黎之存在』或雪之顏色之間，並無直接的關係，亦無眞正的演繹。不過須注意下事：

卽『非 p 或 q』之包攝式在其普遍之形式下僅謂在 q 命題之場合及在 p 命題之場合中，事實之證明，皆能成立。例如巴黎存在，可是直接證知，一羣元素 a, b, c,……及 a', b', 和 c', d' 羣中之元素有一一對應 (une correspondance univoque et réciproque) 之情形，亦可直接證知。(按此爲總集論的例)。如 p 之證實是有錯，則 q 亦然。

第二類的包攝爲『p 眞 $\supset$ q 妄』，依定義是當取消的，因眞決不能包攝妄。

如 p 眞而實妄，則不能卽推斷 q 卽必爲妄。如『太陽存在與月光照地是同一眞確』一語，在月滿（望日）時之光，由於日光之照射則眞，但如在朔日『月光照地』之說爲妄，不過太陽存在

仍是眞的。

但如 p 是妄，無可取譬時，則 q 可爲眞或妄。依羅素的奇想(註一)。p 與 q 命題，可造成一長串推理，此時的包攝是用 q 等於 p 或小於 p 表之。但如 p 是妄仍無從決定 q 之眞妄。

故結果如 p 是妄，則可得

『p 妄 $\supset$ q 眞』或『p 妄 $\supset$ q 妄』。

此卽第二種及第三種包攝。

例云『甲偸一百佛郎，與 2+2 爲 5 之眞相同』。如證得 2+2 不爲 5，則甲偸一百佛郎之事卽可懷疑也。

總之，在理論上，四種可能的包攝，除第二種不計外其餘三種皆可存在，但惟第一種能推得精確。

如 p 是妄，則無從推定 q 爲何值，因欲推斷 q，必 p 爲眞始可。如 q 是被認爲眞，則無須加以推證。

故推理之正當，必爲『非 p 或 q』，無須預知抑 p 是錯抑 q 結論爲眞。其次所需要者，爲推測之實施而已。

包攝式之觀念，原爲新邏輯取爲原始觀念，顧以後又放棄之，另取否定式爲原始觀念，吾人前已述之。但因同一律矛盾律及排中律，是隨所採之原始觀念而異，故述兩種出發點皆有益。

(註一)參看 Principles of Mathematics, p. 34.

吾人卽先述古士阿如何以包攝式爲出發點去列其命題之演算，以後再略述羅素之改正，及最近的新邏輯家對此項演算之情況。

既將眞，妄，及包攝三者定出，卽可開始解說同一律爲『$p \supset p$』。

『$p \supset p$』者卽謂 p 不能同時爲眞又爲妄。

其次卽可界說兩命題之加式（卽和）與乘式（卽積）。

p, q 兩命題之邏輯和可寫爲 $p+q$，此和之本身亦是一命題係包攝有『p, q 兩命題至少有一爲眞』卽『或 p 命題是眞或 q 命題是眞』，但兩者又可同時眞，而不能同時俱妄。例云

『黎莽湖(Léman)中可行帆船』

『黎莽湖中可行汽船』

此兩命題爲交替式(l' alternative)，可同時眞，無二者必居其一之選立形式(La disjonction)。

兩命題中 p, q 之邏輯積可寫爲 $p \times q$，或 $p.q$ 或 pq。

此邏輯積亦是一命題，係同時肯定 p 命題與 q 命題爲眞者。例如『$2\times2=4$』，『$20:5=4$』是，或者如云：

『此人是畫家』，

『此人是義大利人』

其積卽無異云『此人是義大利畫家』。至其和則爲交替式。

邏輯演式與數學運算之相似極顯明，因如算術中乘式之一因子爲零，則乘積卽無意義，而在加式中縱有一項爲零所得之值仍爲眞。

至兩命題全相等或兩命題有等值可界說如下：

$$(p=q)=(p\supset q)\ (q\supset p)$$

等值並未含有全等全同之意。如云『此三角形有兩角等』，『此三角形有兩邊等』兩命題是有等值的，但並不全同。

如吾人用1代表眞，用0代表妄，則據理吾人可得下列之包攝式。

$$1\supset 1,\qquad 1\supset 0,\qquad 0\supset 1,\qquad 0\supset 0。$$

第二種，依定義應當排除，其餘三種可以成立，卽謂眞只包攝眞而妄包攝一切，且可包攝眞，反之眞可包攝於妄中。

如是則否定式可界說爲 p'（卽 p 之否定），p 與 p' 可有下列兩種關係：

$$p+p'=1\qquad\qquad p\times p'=0$$

第一種關係謂或 p 命題是眞，或者『非 p』是眞。第二種關係謂 p 及『非 p』二者不能同時皆眞。

否定式應先假定是存在的，因否定不能由肯定推出，肯定乃是另一種式子。其次可證明兩重否定卽等於一肯定。

由於假定有否定式之存在，卽可先立出矛盾律爲

$$p.\ p'=0$$

（卽命題 p 與命題『非－P』兩者不能同時皆眞）。次卽立出排中律爲

$$p+p'=1$$

（卽或命題 p 是眞，或非 p 是眞）

由是則邏輯的思想三律卽係獨立，欲解說同一律，只須包攝式，無須否定式。反之矛盾律則要乘式，排中律則要加式，且兩者皆用到否定式。

吾人暫將三律獨立有何意義之問題擱置，俟至下章再述之。

此時吾人只限於證明三律之獨立是極合邏輯的，並無竊取論點之弊 (sans pétition de principe)，而此則純由演繹之秩序得來。不過是要假定『妄』的證明（卽命題與事實之間無關係者爲妄）並不包含有否定在。

不過爲建立合法的推理，思想三律是不夠的。尙須加上其他獨立自足的原理，其中最要者爲三段論式之原理，其式爲

$$(p \supset q)\ (q \supset r)\ \supset (p \supset r)$$

卽同時肯定『p 包攝 q 且 q 包攝 r』則包攝有『p 包攝 r』。

不過此處所論者，僅是單稱命題間的包攝關係。單稱命題是指述一定的個體事實（如云此棒比手杖大，此手杖又比刀大，則此棒是比刀大）。至概稱命題與單稱命題間之包攝關係（如凡人皆有死，某甲是人，故某甲有死）則尙未論到。

故三段論式之舊理論此處不能再提，須至命題函數及『常常』與『有時』之分別已成立始可加以研究。

古士阿又視結論的眞理已經成立後，如欲視此結論的眞理，是可本身獨立與包攝式之第一項無關，則當加上『演繹的原理』於三段論式之上。此演繹的原理，卽『肯定所立出之假說，在事實上是眞』是也。如無此條原理，則三段論式，只能在大前提爲眞之時，始可得出離前提而獨立之結論。

但自吾人觀之，如此的演繹原理似不必要。因此原理已在包攝之概念中。依此包攝式，推斷之有效，在應用中需要所包攝之命題有一定眞或妄之值也。

應用吾人上述的各種界說，演式，及原理，卽可證出下列邏輯和與邏輯積之各種定則。

交換定則：

$$pq=qp \qquad p+q=q+p$$

聯合定則：

$$(pq)r=p(qr) \qquad (p+q)+r=p+(q+r)$$

分配定則：

$$(p+q)r=pr+qr \qquad pq+r=(p+r)\ (q+r)$$

最後兩等式，第一係謂認定 r 或與 p 聯合或與 q 聯合是等於或 pr 聯合，或 qr 聯合。第二等式謂『認定或 pq 同時是眞或 r 是眞，無異謂或 p 爲眞或 r 爲眞及或 q 爲眞或 r 爲眞。

此最後之等式在普通代數中找不出相同者。套套邏輯之法則(La loi de tautologie)亦然：

$$pp=p \qquad p+p=p$$

如在普通代數則 $xx=x^2 \qquad x+x=2x$ 矣。

其他尙有吸收律(loi de l'absorption)簡化律(de simplification)等。

簡化律可表示爲：

$$pq\supset p \qquad p\supset p+q$$

第一式謂 pq 同時是眞，無異謂 p 可單獨認爲眞。

第二式謂 p 是眞，卽包攝 p 本身是眞或其他任何一事 q 是眞。

由這些定律卽可變包攝式爲等式且可對眞與妄之包攝得到界說。

例如云：

$p \supset q = (p \text{ 非 } p = 0)$

$p \supset q = (\text{非 } p + q = 1)$

其意謂 p 包攝 q 無異是否定 p 及「非 q」是同時眞或者是肯定或「非 p」是眞或 q 是眞。

故由運算之擴展，則包攝之界說卽得證實。在邏輯的演繹中，亦如一切用公理爲出發點之演繹同，一切基本界說，是就其所推得之結論及演式以證明之。

再研究如何由命題之運算，以推得出舊邏輯所講的各種三段論式等之變化，實一有趣之問題。不過因所涉過遠，此書範圍不能述及之。

以上爲古士阿採包攝式爲原始觀念所得演式之概要。

但羅素視包攝式尙非最好的原始觀念，其說如下(註一)。

對一堆旣定之事實言，吾人可見到其中某一事實是存在(爲肯定式)與否（爲否定式）。其中許多事是相聯合（爲聯立式）

(註一)譯者按　對此問題讀者可再參看傅鍾孫張銘兩君合譯之『羅素之算理哲學』第十四章，此書由商務印書館出版。

或爲選立式（指一種非絕對的交替式）。

由見到種種不同的事實，卽可得出種種不同的陳述形式，(énoncés différents) 每種陳述形式之結構，是與每一邏輯演式(une opération logique)相關的，而每一邏輯演式，是當用具有一定結構之命題，以構造他一結構不同之命題。『除簡單的肯定外，因事實之陳述有三種不同的結構，故亦有三種不同的邏輯演式，卽否定式(la négation)，聯立式(la conjonction) 選立式(la disjonction)是也。……』

『如此，任何事實之肯定，可以『p』表之，其否定可以『非p』或『$\bar{p}$』表之，其邏輯積（卽見到兩事q與p是聯合的）爲pq，其邏輯和（卽指p與q之選立式）爲『$p\vee q$』(註一)。

由否定式，聯立式，選立式三者相配合，卽可得出無數結構不同之演式，其中卽以不兩立式 (l'incompatibilité) 及包攝式爲最重要者。

由是得來之一切演式及一切構造，有互相成爲函數的關係。最簡之函數式卽否定式『非p』(註二)。當p是妄，而其意如云『2+2 爲 5』或『2+2 不爲 4』之時，則p（肯定或否定）之

(註一)參看 Feys, p. 13 et 14.

(註二)參看 Russell, Introduction, p. 146.

函數式爲眞;當 p（否定或肯定）是眞,而其意如云『2+2 爲 4』或 2+2 不爲 5』時,則其函數式是妄。故『非 p』之值,恰與 p 之值相反。

在聯立式『p 及 q』中,p 與 q 兩者皆眞,則其值爲眞。例如對一方形,說『此形是一長方形』且『此形是一菱形』是。當 p 與 q 或二者之一是妄時則其值爲妄。

選立式『p 或 q』是一函數,當 p 或 q 是眞時，則函數之值爲眞。(由這個的假,可推定那個的眞)。但如 p 及 q 皆妄時,則函數之值是妄。

不兩立式謂『p 與 q 不能兩者同時爲眞』。此爲聯立式之否定,或非 p 與 q 之選立式。當 p 或 q 是妄時。則其函數式之值爲眞。當 p 與 q 兩者皆認爲眞時,其函數之値爲妄。例如『此動物是脊椎動物』及『此動物無骨骼』二語是。

包攝式則可寫爲:

$$p \supset q. = .\sim p \vee q$$

此式謂若不是 p 妄就是 q 眞。

此五種函數式並非彼此孤立毫不相關。『不難將五種化爲二種。在羅素的數學原理中所選定者爲否定式及選立式。至包攝

式則界說爲『非 p 或 q』，不兩立式界說爲『非 p 或非 q』，聯立式界說爲不兩立式之否定。但徐浮(Sheffer) 以爲吾人可以僅用一個原始式，不必用到五個，而尼哥 (Nicod) 在演繹之理論中，又將必要的原始命題，化爲兩個非形式的原理及一個形式的原理。欲達此結果，吾人可取不兩立式爲無可界說之原始命題（但Wittgenstein 則取 p 及 q『皆妄』爲出發點）。

故吾人所採的原始觀念，爲『不兩立』一種，可以 p/q 表之。否定式可直接界說爲一命題與其本身不兩立，故『非 p』可寫爲 p/p。選立式爲非 p 與非 q 之不兩立式，可寫爲 $(p/p)/(q/q)$。包攝式爲 p 及非 $-q$ 之不兩立式即 $p/(q/q)$。聯立式爲不兩立式之否定，即 $(p/q)/(p/q)$。由此即可用不兩立式將其他四者界說出(註一)。

可見陳述一事實之一切命題，可對一羣事實用一否定，或用重覆否定，即可構成(註二)。

至尼哥用否定及肯定兩者去將原始命題之數目減少，可如下述：

1^0/一事之肯定及其否定是互相排除的，

(註一)參看 Ressell, Introduction, p. 148.

(註二)參看 Feys, Ouvrage cité, p. 21.

2^0/如 p 事包攝 q 事，則任何一事 s 排除 q 時，亦被 p 排除。

此兩條原理又可併爲一個。

即『如 p 事包攝 q 事及其他任何一事，則 t 事自相包攝，且 s 事排除 q 時，亦被 p 排除』。

故『尼哥之兩原理（已併爲一）第一原理等於矛盾律，第二個等於三段論式第二格，於是吾人復歸到亞氏原理及其邏輯』(註一)。

由上所述之基礎，即可演繹推出一切邏輯法則。此演繹之符號式子，雖極複雜，只用到些基本論式：如符號與其解說之記號相等，論式之代替，由 p 爲眞以演繹 q……是。

依維特根斯坦(Wittgenstein)，並不須立出一個或多個原始命題，去推出其他邏輯法則。一切邏輯法則是可由所論之事實證明之。

例如由 $p=q$ 之等式，即可肯定有『p 和 q』或『非 p 和非 q』，反之可否定『p 與非 q』，及『非 q 與 q』。亦如在 p 及 q 之關係中，除上述四種外，已無其他。

此處所引起之問題甚難解決。邏輯的眞理與心理的確知，是

(註一)參看 Feys, Ouvrage cité, p. 24.

彼此相關的，其在某一點上是密切連合的，故一切邏輯法則應有同等的明白。

米兒莽氏 (M. Milman) 在其『邏輯理論與判斷之心理』一文中，謂凡一陳述，應有一意義，換言之，應能引起心上的一種了解。但在邏輯，具有一定意義之詞，並不是 x, y, s, p, a, b, 等可以代表任何一事之記號，而是加式或選立式（+），否定式（一）包攝式（⊃） 全等式（=）。此等論式及其他始構成邏輯的意義。

柏拉圖(註一)曾謂思想與判斷之性質，並不是在實物之意像中，而是在化異爲同，區別異同，分類，比較……等之活動中。此爲邏輯之精髓，亦爲邏輯所以異於心理學之處，因惟此種活動，始足超過主觀的，時間的及空間的情境。

如然，則一切邏輯論式與其所處理之事實，應同樣的明白，維特根斯坦之立場已於此證實。

不過吾人並不覺得邏輯論式皆有同等之價值，皆各有其獨立自足的意義，可與實物無關的。尤其是講到物之數量時，邏輯論式，安能與實物無關？此點卽爲問題中之最難者，吾人將來再述之。

(註一)參看 Théètete, (186 b, c, d).

故新邏輯的基本法則，可解爲一切用符號寫出的命題，由事實之特殊內容抽象得來，而只論事實陳述的抽象構造形式。因此，此等基本法則遂爲抽象的，普遍的，必然的。

第二節　命題函數的研究

以上所述者爲陳述任何一既定事實之命題的結構。

現在則研究另一類命題：或其主詞爲未定者，或其表詞爲未定者。其未定之內容，雖現時未定，但實是『常常』可能實現的，或爲『有時』可能實現的。

茲以(φ, ψ, X, 代表已定之物性 (prédicat déterminés)即表詞之有所指定者，以 ξ, η, ζ, 代表未定之物性（即表詞之未有所指定者），以 a, b, c 代表旣定之物(即主詞曾指述一定之物）以 x, y, z 代表未定之物（即主詞未指述一定之物）。

如以 φ 代表『是一樹』，則 $\varphi!a$ 即指『a 物是一樹』。$\varphi!x$ 即指『某物 x 是一樹』。

在 φ 之後有一『!』記號，即指 φ『有斷定的』(prédicative) 特性。如φ之後無!記號，即謂φ是『非斷定的』(non-prédicative) 特性。

所謂有斷定的特性者，爲構造一物必要之特性，如云『舜乃

是一個有重瞳子的人』是。但如謂『舜是像一個猴子，是軀幹偉大……等』則表詞卽爲非斷定的特性，因其所指者，不是將舜之特點指出，而只述些泛無邊際的關係。故凡命題中，述到非斷定的特質時，其所論者卽是泛指一羣事實，並非專指一事，此等命題中，卽可插入以『常常』，『有時』，『一切』，『有些』等詞。

由是，則未定事實之陳述可有：

1°/陳述任何一物之有某特性者（卽主詞未定，僅表詞旣定之命題），如 $\varphi!x$ 卽指『某物 x 是一樹』是。表詞 φ 係代表一公性，爲 a, b, c……等物所公有者，可寫爲 $\varphi!a, \varphi!b, \varphi!c$……式。至 $\varphi!x$ 則爲 $\varphi!a, \varphi!b$……等式之模式。

$\varphi!(x, y)$ 則表述一種關係，爲兩個未定之物所公有。至 $\varphi!(a, y)$ 則表述某物 a 與未定之物 y 共有之關係，$\varphi!(x, b)$ 則表述未定物 x 與某旣知物 b 共有之關係。

2°/$\xi!a$ 則陳述一物之性質爲未定的，（卽主詞確爲某物 a，但表詞未有所指定者），此可爲 $\varphi!a, \psi!a$……等式之公共模式。

3°/$\xi!x$ 則代表一切命題中主詞與表詞皆未有所指定者。爲 $\varphi!a, \psi!a$……，$\varphi!b, \psi!b$……，$\varphi!c, \psi!c$，……之公共結構模式。

如分析上述各式，卽可發見各式中有『常項』或『不變的

原素』(如 a, b, c 爲指定之物,φ ψ 爲指定之物性)及『變項』或『可變的原素』(如 x, y, z 代表未定之物,ξ, η, ζ 代表未定之物性)。

此等論式,眞是些函數式,爲羅素所發明,特稱爲命題的函數。

在數學中,變數爲函數之主 (argument),函數則隨變數而變。同理在命題函數之符號式中亦然。如:

在 $\varphi ! x$ 中,x 爲變項,

在 $\xi ! a$ 中,ξ 卽爲變項。

在 $\xi ! x$ 中,ξ 與 x 卽同爲變項。

在數學中,如給變數以一定之値,則函數亦卽隨之得出一定之値。例如在含一個變數 x 之方程式中,如將方程式之根代入 x,則方程式之解卽眞,如用入其他之數代入 x,則方程式之解卽妄。

同理,在 $\varphi ! x$ 之命題函數中,設 φ 是指『爲一希臘人』,則在『x 是希臘人』式中,用蘇格拉底代 x,則所得之命題卽爲眞。(因蘇氏爲希臘人)。如以凱撒(Jules César)或牛或馬代入 x,則所得之命題卽妄。

不過一命題的函數,不僅是如此簡單的命題,尙有複雜之構

造,可由包含許多命題而成者。有些命題函數,無論用任何值代入變數中,結果是常眞。如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$之恆等式是。邏輯公式亦然,如簡化原理: $pq \supset q$ 是。(此原理係謂『如p與q兩命題是同時眞,即可獨立肯定q爲眞』)。

尙可分出似變項(les variables apparentes)與實變項(les variables réelles)之別,及形式包攝的眞或妄(la vérité d'implication formells)及實質包攝的眞或妄(la vérité d'implication matériell)之別。

一個似變項,無論其值爲何,是不改變形式包攝的眞或妄之值的。

一個實變項則反之,用各種不同之值代入一命題函數時,則其實質包攝會有時眞,會有時妄。

依古士阿引述班洛例(註一)可指出此兩種包攝之關係如下。

設 a, b, c, d 是些實數,且設a大於b, c大於d,則得包攝式爲:

$$a>b.\ c>d. \supset.\quad ac+bd>ad+bc.$$

a, b, c, d 是變項,此爲一形式的包攝,對於此等變項爲任

(註一)參考 Revue de Mét. et de Morale, 1917, p. 22.

何值時皆眞。

今設：

$$a=c=2. \qquad b=d=1.$$

則得 $2>1.\ 2>1. \supset .5>4$

此實質的包攝卽眞，因爲假設與結論兩者皆眞。

次設：

$$a=c=1. \qquad b=d=2.$$

則得 $1>2.\ 1>2. \supset .5>4$

此實質的包攝式中，結論尙眞，假設則妄。

再設：

$$a=d=1. \qquad b=c=2.$$

則得 $1>2.\ 2>1. \supset .4>5$

此則結論與假設俱妄，因前提中有 $1>2$ 也。

總之上述各種實質的包攝式，只排除一種，卽假設雖妄而結論爲眞者。

不過自吾人觀之，形式的眞或妄，與實質的眞或妄之區別，只在命題函數中有點意義，因命題函數須變爲命題時，可有常常眞或常常妄，及有時眞或有時妄之情形。例如下三段論式『凡 a 是 b，此 x 是 a，故此 x 是 b』，則包攝式有一種形式上的眞，且

將定値代 $x, a, b,$ 中則有一種實質的眞或妄。

如專就命題言，則此區分卽無用，因在命題中，只有一種眞或妄可言，拿郎德於1929年之哲學雜誌(Revue philosophique tome CVII, p. 165)中已述之。如下列之三段論式云『凡魚是動物，此人是魚，故此人是動物』卽爲妄的三段論式，雖其結論是眞。

旣然如此，又將如何用符號去表述一命題函數之能得一串常常眞的命題，或一串有時是眞有時是妄的命題乎?

其法如下：卽在記未定之物之前，用一括弧於其中，註明常常發生之某一事或其全部之事。

例如用 φ 代表『是有死』則 $\varphi!x$ 卽謂無論 x 爲何，此『x 是有死』一語常常眞。

如欲指出 x 只有時是眞，則在括弧中加一$\exists$記號。

$(\exists x).\ \varphi!x$, 卽表示謂，設 φ 代表『善人』，則『只有某某 x 是善人』。

在符號表示的命題中，用(x)表示『常常』，用$(\exists x)$表示『有時』，可稱之爲前置記號(préfixe)，至其後部 $\varphi!x, \varphi!x$ 等則稱爲模式(matrice)。

在舊邏輯中，全稱命題卽爲表示『常常眞』之一例，其特稱命題，卽爲『有時眞』之一例。

試就『凡 S 是 P』一全稱肯定觀之，設 S 代表『人』P 代表『是有死』，則可用 $\varphi!x$（卽 x 是人）代表 S，可用 $\psi!x$（卽 x 有死）代表 P.

如是，則『凡 S 是 P』，可用『$\varphi!x$ 包攝 $\psi!x$ 是常常眞』之形式的包攝表之。

同理，『有 S 是 P』，可以『$\varphi!x$ 及 $\psi!x$ 有時眞』一式表之。

『無 S 是 P』，可以『$\varphi!x$ 包攝非 $-\psi!x$ 是常常眞』一式表之。

『有 S 非 P』可以『$\varphi!x$ 及非 $-\psi!x$ 是有時眞』一式表之

可見『凡 S 是 P』，並不是如舊邏輯家之所想，以爲卽是『x 是 P』如『蘇格拉底是有死』之例。此全稱肯定，乃是一種包攝，可用『$\varphi!x$ 包攝 $\psi!x$』表之。此種包攝式，不必要有 x 存在，因其意義是『如 x 是人，則 x 必有死』，縱無人時，此包攝式亦永爲眞。

反之『蘇格拉底是有死』可用唯一的命題函數 $\psi!x$ 表之。$\psi!x$ 中，ψ 代表『是有死』，x 可如任何一物，可用蘇格拉底代

入 x,而得『蘇格拉底是有死』。

由是舊邏輯中所謂限量換位及等差命題並不是有價值。由『凡 s 是 p』只可得出『有 s 是 p』, 因此兩個命題之價值並不同,第一命題是一個有待命題,第二命題則爲直言命題也。結果如 Darapti 三段論式卽有誤。

第三節　概稱命題之主詞爲未定者(概念論)

當 $\varphi!$ 只述及一個對象 x 時,則只有兩種可能的陳述, 一述 $\varphi!x$ 是常常發生的,一述 $\varphi!x$ 只有時發生。

如述到兩個對象 $x.y$ 時,則 $\varphi!(x.y)$ 不僅在性質上有『常常』發生,與『有時』發生之別,且價値意義亦不同。

設 φ 代表『相似』的關係。則:

A^0/對兩未定之物 x, y, 而得 $\varphi!(x.y)$, 卽謂『x 與 y 相似』可以證實『其恆常如此或只有時是如此』。今如以『鳥』代入 x, 以『一有翼之物』代 y, 則得『鳥常似一有翼之物』。如反之以『有翼之物』代入 x, 以『鳥』代入 y, 則得『一有翼之物有時似鳥』。

B^0/對 $\varphi!(x.a)$ 及 $\varphi!(a.y)$ 式,雖 a 爲一旣定之物亦有『常常相似』與『有時相似』之事,試就 $\varphi!(a.y)$ 言,其意卽謂『無

論 y 爲如何物，a 總與之有相似之關係』。可舉例云『y 爲任何一球形，地球 a 總常與之相似』。

此類命題，尤可表出關係的邏輯。因其中包有一未定之物爲 x 或 y，故此類命題是屬於概稱的命題，但因其中亦包含有一既定之物 a，故同時又是單稱命題。

C^0/對惟一未定之物如$(\exists y)$亦有『常相似』或『有時相似』之關係。$\varphi!(x.y)$可譯爲『有一 x 是與某物 y 相似。』

概稱命題如 $\varphi!x$ 之性質，是不能化爲個別事實之陳述；因不能盡舉完全 $\varphi!a, \varphi!b, \varphi!c$ ……等單稱命題。如 $\varphi!x$ 是講『x 是有死』則吾人不能盡舉柏拉圖死，『孔子死』，『孟子死』……。因此等單稱命題，爲數不定（無論其爲有限或無限），吾人不能盡將古往今來之人類一一述其死也。

如是，假使概稱命題，可爲肯定式，或否定式，可爲聯立式或選立式，或可相連成包攝式，則此等論式仍爲無可界說者。

不過因一概稱命題含有『常常發生』或「有時發生』之意，則對於肯定、否定、聯立、選立等式亦可插入『常常』與『有時』之意於其中。

例如『$\varphi!x$ 是常常眞』之否定，則可變爲『$\varphi!x$ 有時妄』。設 φ 代表『是善』，而 x 代表『人性』，則『人性是善可常常眞』

之否定，卽爲『人性是善可有時妄』。

故費斯(Feys)說得好，單稱命題(陳述特殊事實)之規則，不過是些接續詞，『假如』『或者』『並且』等之造句法，不過至今更加上『常常』與『有時』等副詞之變化耳(註一)。

此種造句法，含有許多規則，不過此等規則，應是些不能證明的界說。

可知單稱命題之論式與概稱命題之論式並不全同，但有相類似之結果。

不過如取特殊事實陳述之邏輯法則爲出發點，而細觀此等法則又不過是些模式，則可知概稱命題之邏輯法則，亦有同樣必然與普遍之特質。尤以概稱命題（主詞爲未定者）之邏輯法則，是對一切性質與一切事物皆有價值的。

所以據上述之法，一面可顧到概稱命題之本質，他方面又可將概稱命題之法則，引到事實陳述之法則去。

且因概稱命題在認識物之特性，可知此等命題是以概念爲對象。可知在單稱命題之推算，與視爲類(classes)的概念之推算兩者之間，有平行相似之處。因前述類可視爲許多事物之集合，

(註一)參看 Feys, Ouvrage cité, p. 46.

將此集合中之事物代入 x，卽可將命題函數化爲命題。此事可免除吾人去做類的推算(註一)。

不過須注意者，單稱命題之論式與概稱命題之論式並不雷同。只有相似之點。因此，所謂命題的演算與類的演算間之平行兩種推算之差異處，由於事實上『命題只有眞妄兩值，而類則在『一切』與『無有』之間可有無數中介之值』(註二)。

類的演算，是在對於某類事物之全部或局部求出其特質，幷就此等事物之本身去研究其關係。

羅素用一記號加於模式之上，以表示表詞之爲類者，如 $\varphi ! x$ 原指『某一物是一馬』，則 $\hat{\varphi} ! x$ 指某一物是馬類。

第四節 概稱命題之表詞爲未定者

新邏輯派除研究含未定主詞之命題外，又研究含未定表詞之命題。其研究係先由斷定的函數 (fonction prédicative) 着手，然後研究到非斷定的函數 (fonction non-prédicative)，以期尋出其結構法則及其形式特質。

表詞之意不僅指實物之表詞言，且指『表詞之表詞』(Les

(註一)參看 Voir Couturat, Encyclopaedie, p. 158.

(註二)參看 Rev. d. Mét. et de Mor., 1917, p. 43.

prédicats de prédicats）言，因一個表詞，亦可爲研究之對象，爲一命題之主詞，以論定其性質。故主詞與表詞之分，是相對的。設云『此樹是靑色』，用 $\varphi!a$ 表之（a = 此樹，φ = 是靑色）。此事可以肯定，可以否定，可與他物列成交替式，可以成爲包攝式。此等論式構成 $\varphi!a$ 之一特性。換言之，可構成一表詞，而以 f 表之。且述此特性之命題，卽爲 $f!\varphi!a$ 之形，或簡寫爲 $f!\varphi$。

因爲主詞與表詞之觀念是相對的，則表述主詞之記號的同樣構造，亦可用以述表詞。如將 $f!\varphi!a$ 之形式推廣，卽可得 $(\xi)\ \xi!a$，（謂 $\xi!a$ 對於一切表詞皆可證實）。同理 $(\exists\xi)\xi!a$ 係謂『$\xi!a$ 對某種表詞始可證實』。

旣可用推廣的形式表述事實，$\xi!a$ 卽可爲肯定，可爲否定，可與其他事實爲交替式或聯立式，則命題由表詞去變化推廣，卽可達於極複雜之境。

由推廣命題之表述等值（卽 a 物與 b 物之表詞相合），卽可進而指明 a 物與 b 物相同。

當語句中包含有許多個重疊的表詞時，則概稱命題可有一切不同的價値，吾人於研究命題 $\varphi!(x.y)$ 時已述之，玆將其分類如下：

1°/ 斷定的概稱命題 (Proposition générale prédicative)

此等命題表述一種必然的關係，如云『表詞之表詞 φ 恆常牽連發生表詞之表詞 ψ』，此與『無論 x 為何，如 x 有 φ 為表詞，卽必有 ψ 為表詞』相同。（此為含兩個表詞的形式包攝）。

同理可表述全等的關係如下『對表詞 φ 為眞之表詞，亦常常同樣的對表詞 ψ 為眞』。

由此類命題，無論何種表詞，皆可用為表詞，或為主詞，而數學卽可邏輯的研究之，因數學所論者常是些表詞之表詞，換言之，常是些類之類(Classe de classes)也。例如 12 是一類，其中可講到十二使徒之類，一年十二個月之類……等。故 12 之為類，乃是一個類之類云。

2°/單稱命題與非斷定的特性(Propositions singuliéres et non-prédicatives)。例如『拿破崙有為一大將的一切資格（一切表詞）』。此命題之對象，是指定『一個大將』說，但其表詞則泛無所指。雖此等表詞中有適於指述對象之公性，如云『若果表詞（指為大將）對於一切 x 物，會連帶產生有一 ξ 表詞 則拿破崙卽常有此表詞 ξ』。可知『有 ξ 為表詞之表詞乃是 a 對象（此指拿破崙）之一特質，但非 a 對象之表詞』，因表詞 ξ 並非直接述拿破崙，乃直接述其資格之可有一公共表詞者，只須對象與表詞之分是相對的卽可。

3^0/概稱命題及非斷定的特性（Proposition générale et non-prédicative）此可將關於述拿破崙之例推廣之卽得，如云『有許多人有爲一大將之一切資格』。

由上述之區分，卽可得命題之分類如下，卽一命題無概稱的表詞而僅指述特殊事實者，卽是說不含有似變項（Variable apparentes）而爲原子命題者，則爲第一級命題(註一)。如一命題含有概稱的表詞者，則爲第二級命題。如一命題含有概稱的表詞之表詞者，則爲第三級命題。

如現在吾人將事實邏輯之法則，擴展至含有未定表詞之命題上，吾人卽發見上述含有未定主詞之命題所遇見之同樣困難。卽『命題之屬於某一級者，不能用邏輯論式化爲低級的命題；此所以邏輯論式適用於某一級命題者，卽不能化爲適用於低級命題之邏輯論式』(註二)。

故對每一級卽不能不立出些無可界說之詞爲出發點，構造相類的演式，以備由此一級推至他一級。人決不能立出一規則對於各種觀念及各種命題皆是有效的，故在應用規則之前，必將各

(註一)參看 Russell, Introduction, p. 189.

(註二)參看 Feys, Ouvrage cité, p. 64.

級命題分別。

羅素以爲如此卽可避免一切疵謬，例如下列著名之包攝式云：

『耶彼門尼德(Epiménide)說凡克勒托人(Crétois)皆是說謊者』（按 Crétois 係地中海一島國,其國人,名 Crétois。Epiménide 係 Crétois 人）。

從一方面看,如此語是眞,則耶彼門尼德說了一句眞話。然耶彼門尼德是克勒托人,可見克勒托人不盡是說謊者,『克勒托都是說謊』一語，卽不能成立。但從另一方面看，『克勒托人是說謊話』一語,旣不能成立,而耶彼門尼德竟說『克勒托人都是說謊的』可見耶彼門尼德是說謊的,而『克勒托都是說謊的』一語仍得成立,此便成了嚴重的矛盾。

由級次之理論,卽足將此語之疵謬免除。卽一陳述之語式,應與其所陳述之內容分淸。如『耶彼門尼德說』乃是一原子命題（卽單稱命題）,可以 p 表之,其值可有實際的眞或妄。至此語陳述之內容謂『凡克勒托人皆說謊者』卽爲另一級命題，可以命題函數『$\varphi!x$ 包攝 $\psi!x$』表之,蓋謂『如 x 是克勒托人,則 x 卽是說謊者』。如將兩個級次不同之命題相混，卽將陷於疵謬。

據羅素說,依同理可解決其他的矛盾,尤其是最大超有限序

數之矛盾(L'antinomie du plus grand ordinal transfini)。

由上述即可指出設言推理的邏輯法則，是可連續對於各級命題皆有價值的，且對主詞關係之法則，及最抽象的『表詞之表詞』之法則皆宜。

尤以全等的法則與普遍命題的法則相似，皆對於敍述的函數(fonctions descriptives)是不可少的，吾人將於第六節中述之。

第五節 關係的運算

舊邏輯並非不知關係之意義，因下一判斷時即包含有關係在。不過舊邏輯並未將關係之意義發揮，表之於一命題中另究其主詞與屬性。

至發見關係之重要，及可將之成邏輯的運算者，則為皮兒斯(Peirce)及徐裸德(Schroerder)之功。至羅素則更發揮關係運算之價值，指出其在秩序觀念方面之功用。

設 R 代表親子的關係，x 與 y 為關係之兩端，則 xRy 式中 x 為關係界(le domaine de la relation)或子輩，y 為同關係界(co-domaine)或父輩，兩方連合，即構成關係之場合。

在 xRy 式中，x 與 y 是可倒置的，不過須用其他的關係，如

P(＝爲之父)，則得 yPx（y 爲 x 之父輩）。

關係之變化雖無窮，但可分爲數類，或述質的性質或述量的性質。

其述質的性質者，如對稱的關係（例如 $a=b$，則 $b=a$），偏稱的關係（例如 a 爲 b 之夫，b 就不能爲 a 之夫，或如 $a>b$，則 $b<a$，其他如居前，居後，在左在右等關係是），傳達的關係（爲類的包含關係如甲大於乙乙大丙，故甲大於丙），不傳達的關係（如附屬的關係是）。

至述量的性質者，則有多對一的關係，一對多的關係及一對一的關係，可分述如下：

1°/多對一的關係，如西藏之多夫對一妻，或如多因一果之事。

2°/一對多的關係，如一父對多子，或函數對多變數之關係是。

3°/一對一的關係，如父與長子的關係，或一夫對一妻之關係是。

表述關係之命題是屬於表詞未定之命題，用適當之界說，卽可將邏輯法則與運算應用之。

第六節　敍述與類(Les descriptions et les classes)

此兩者爲羅素邏輯中之重要部分，不能不敍列之。

一個敍述可有兩種；一爲『專指的』敍述，『如云』『這個某某』。一爲『泛指的敍述』，如云『一個某某』。

在泛指的敍述中，如『我遇着某某』，此命題是以一個概念爲構成的要素，如無之則將如『我遇着一獨角馬』一命題，爲毫無意義，因其所述者乃一不存在之物也。

今試將『我遇着張君』及『我遇着一人』兩命題比而觀之，則見第一語爲一句單稱命題，可眞可妄。第二語則爲一句命題函數，其意謂『我曾遇着 x，而是人』。

同理『我遇着一獨角馬』一語，可譯爲『我遇着 x，而 x 是一獨角馬』。但此命題函數是無意義的，其故如下。

在命題之分析中勿容將幻想之物，如『獨角馬』之類，討論其爲眞實與否。所幻想之物，本身卽不眞實，因其離主觀卽不存在也。

不眞實之所以異於眞實處，如依羅素所說，可釋如下：羅素謂不眞實是以一命題函數之妄值構成。例如謂『我遇着 x，而 x

是人』，但我所遇着之 x 亦可不是人。若然，則我所說者，則爲妄，而與一不眞實之事相當。但我所說之話亦可爲眞，而可記述一眞實之事。

反之，如命題函數中之 x，是指一獨角馬，則以獨角馬代入此函數中之 x 即得妄的命題，因世間實無獨角馬在，無論所敍述者爲專指，抑爲泛指，皆不着眞實。

如用 φ 代表這樣或那樣特性，用 ψ 代表我所遇見的特性，則眞實與不眞實之相反，可界說爲：

『謂有 ψ 特性之物，亦有 φ 特性，無異謂 φ 與 ψ 相連合並不常妄』(註一)。

今再研究『這個』(le)之意義。

例如云『司馬遷是史紀的作者』一語，其中即有兩事可比較，一爲司馬遷之名係指定一個人，一爲『史記作者』的敍述，係由幾個字合成一定的意義。

此兩者是不能任意用其一代替其他的，如依同一律說只可得『司馬遷是司馬遷』，不能得史記的作者是史記的作者，因『這個某某即是這個某某』一語中，如以一種敍述代入『這個某某』，

(註一)參看 Introduction, p. 171.

不能常得眞的命題。例如云『當今之法國的皇帝卽是法國當今的皇帝』一語卽無所敍述因法國現在並無皇帝也。

故吾人可將含有敍述的命題界說如下:『命題中有入一名詞,如$1°/\varphi(x)$是常等於『x是c』; $2°/\varphi(x)$是眞』。例如『史記的作者』是『漢朝人』一語可界說爲 $1°$『x作史記』是常等於『x是c』; $2°c$ 並是漢朝人。

當幾種敍述相合於命題中時,卽當分出初遇的 (Première occurrence)敍述,與次遇的(deuxième occurrence)敍述兩種。當在 $\varphi(x)$ 中,已用此敍述代入 x 後,而此敍述僅屬於命題中之一部分,則此敍述爲次遇的。

例如說『法國當今的皇帝是禿頭者』,此語中『法國當今的皇帝』是一敍述,且爲初遇的敍述,至此命題則爲妄的。因法國現時並無皇帝也。

又如云『法國當今的皇帝不是禿頭者』,此語中之敍述爲初遇抑爲次遇,則尙未定,因此命題可解爲『非(x是禿頭者)』亦可解爲『x 是非禿頭者』。

在第二解中,否定是藏在命題之中,則其敍述是爲初遇,於是所得之命題卽爲妄,因『假定有法國當今皇帝是妄的。而又謂其非禿頭者,卽無意義矣』。

至對於類(classes),則常用『這些』(les)等冠詞，將多數指出,如云『這些倫敦的居民,這些富家子弟』是類。類不是一原始觀念，因無一可經驗事實與之相應。類又不能視爲一集合體,因如視爲一集合體,則不能有空類(classe nulle)可言。

解決此問題之最善法,在視類與命題函數相同。不過一類可有多種命題函數,例如『x人有三角相等』與『x有三邊相等』兩命題函數,乃指同一類的三角形,卽等邊三角形是也。

且只能視類爲一象徵的虛構(une fiction symbolique)可符於下列條件者:

1°/一類，宜用命題函數變爲一眞的命題時所需之値定之。例如『希臘人』類,是用蘇格拉底,柏拉圖……等代入『x 是一希臘人』之x而得。

2°/兩命題函數在形式上相等時卽表示是同樣。

3°/類之類(les classes de classes)應能加以界說的。

4°/在一切場合中,假定一類是或不是其本身之一員實爲無意義。

5°/構造一些命題,陳述由個體組成之一切類或由任何邏輯式子構成的一切類,是可能的。

上述各條件，尤其是最末一條件，是不容易達到的。應當注意不要墜入類的實在論(le réalisme de la classe)，而須將個體事實中相應於類所代表的實在方面指明之。

第一，似乎類所代表者，可用形式上相等的敍述函數定之，顧因所謂形式相等的敍述函數，並不是全同。故不能彼此互相替代。

例如，在一命題中，用『人』一字與用『理性的動物』一詞是相等的，我可以任意說『我信凡人皆有死』或『我信凡理性的動物皆有死』。但如我信鳳凰(Phénix)是一有理性的鳥，且會有死，則用此代彼而得之命題卽妄。

故吾人應將形式上等值的函數，別其孰重外延與孰重內包。

例如『x有三角等』與『x有三邊等』之兩函數命題，在外延方面是相等，故可以此代彼而無傷於其所表示之類的絕對值『等邊三角形』之性質。反之如命題函數中有『人』與『理性的動物』，則指內包方面的相等，卽不能同樣的以此代彼。

不過對於一外延函數或內包函數，尙能看出一誘導的外延函數(une fonction extensive dérivée)而改變之，如『我信凡人皆有死』可變爲『有一形式函數等於x是人，且凡滿足此函數之值皆有死』。如在『x是人』之函數中，換以『x是一理性動

物』即得『一形式函數等於 x 是一理性動物且凡滿足之者皆有死』。如此則所求形式上等值的函數,只能是『x 是人』,因其亦須滿足『x 是死』,如是則將鳳凰排除去。

由於應用誘導的外延函數，則『類』所當依從的四種條件卽可滿足。

至於第五條件講到『一切的類』之用法，卽當分出各級函數,如前述未定表詞之命題時所分者是。

如前述例云『拿破崙有爲一大將之一切資格』，此語所指之一切資格（如謹慎大膽……等），是屬於第一基型的斷定函數 (des fonction prédicative a du premier type)，至此等函數 a 所公有之特性則爲第二級,且在此等斷定的函數(ces fonction prédicative) a 之中,則爲主變項。

此種函數之重疊係假定有『還原公理(Principe de réductibilité) 在，卽一切外延函數對於 n^e 級函數皆佳者，則對於任何函數 a 皆佳；換言之,如 Feys 所說『一物之一性質，用比喻言之或用一比較複雜命題表之，可常爲一形容詞之形式。』(註一)。

羅素視此公理常爲可疑,且不必要，但如接受之，僅爲方便

(註一)參看 Feys, ouvrage cité, p. 81.

之用，卽可將類之理論，化到唯一的公理及唯一的界說(註一)。

以上所述，爲新邏輯的原理與技術方法之概要。其重要不可忽視，因其爲分析精確的最好工具。

實則新邏輯注重陳述其所稱的事實，指出思想活動與實在兩者間之密切關係，比之舊邏輯尤爲明確，關於此點，新邏輯可近於斯多噶派的邏輯。

斯多噶派的邏輯，亦重視單稱命題或個別事件，且於分析思想之程序時，亦如新邏輯係採取些幾乎同樣的基本論式作出發點，如包攝式（如天明則發亮）聯立式（天旣明，且發亮），選立式，（或爲晝或爲夜）。

不過斯多噶派未能超脫唯名論所遇之困難，以建立概稱命題。而新邏輯則能用命題函數以建立之，命題函數中之一 x 可以代表個體，又不將個體限於某時某地。

且新邏輯因用『常常』與『有時』之分，可將全稱命題與特稱命題區別。不過此種區別欲有意義，須假定能將有某種公性之個體完全枚舉，因惟此始能將 $\varphi(x)$ 與『常常』或『有時』附一起。

如個體之數是有限，則無何困難，如個體爲數無限或不定，

(註一)參看 Introduction, p. 193.

則困難卽增。

在思想上固可構造一組未定而級次漸高之命題(如 1, 2, 3, ……n, $n+1$……)，但此事亦未能將問題解決，因此一串重疊的命題，並不注重到所思之物之數目，而是注重到演式之複雜關係，由此而來的『未定』，將與潘嘉烈 (Poincaré) 所說的『無限』無異。

據吾人之意，欲通過此難關，卽當如吾人所述視概念爲函數的不變式。邏輯首當由質的方面去研究函數的不變式，然後用羅素發明的符號以研究其關係。至不變式所由實現的事實或事變，只可視爲單獨的個別的(如一個，幾個)；或視爲未定的雜多(如多數，許多)或未定的全體(一切或全數)三種形式。

至數的研究及數的秩序之研究，則爲邏輯之另一部分，屬於多少帶有應用性質的邏輯，因此種研究，是論到數學的或量的不變式的。

欲明此事，吾人將繼續討論布魯耶 (Brouwer) 羅素及希爾柏(Hilbert)三人所論排中律在數學中之功用。

第六章　排中律及數學的實證法

數學中用到排中律之問題，乃是最近的事。此問題純由數學的無限引起邏輯上的困難所發生。不過在昔亞里士多德已覺應當將邏輯法則應用之範圍縮小，曾特別指出對陳述未來事變之命題，邏輯法則之應用尤爲無效，因爲未來事變之原因，全未在定之列也。惟亞氏對此觀點，未將同一律，矛盾律與排中律之不同，加以區別。故吾人在未入數學問題之先，應先研究符號邏輯在其發展過程中當用何種意義以分解此三律。

第一節　排中律及其在符號邏輯中之意義

符號邏輯之初期，是擇用自明公理爲出發點之演繹形式，換言之，係取一羣原始觀念，一羣演式及原理爲出發點。

吾人在此種用公理爲出發點之演繹形式中所感覺有興趣者

爲邏輯的代數 (l'algèbre de la logique) 與新邏輯 (Logistique)所採不同的途徑。

在邏輯的代數中，妄與眞不是同時可以立界說的，首先係將詞(terme)之觀念與其包攝式立出，然後去將等式，同一律及三段論式之原理等之界說立出，並同樣去解說積稱式（乘式）與和稱式（加式），由此二式始得出簡化律及組合律等，且惟由此建立此等原理定律及演式，然後引出0與1兩詞，在命題中0代表妄，1代表眞；在類中0代表無有或空類，1代表一切或全體。

0與1兩詞旣成立，卽可進而解說否定式，由否定式卽可進而將矛盾律及排中律之界說立出，此二律在舊邏輯中，原視爲密切附屬於同一律者。

初看似覺此種分解法，稍帶武斷；很遲遲的將眞與妄之觀念引入邏輯中，殊覺奇異，且將同一律與矛盾律及排中律分開，亦覺可異。

不過邏輯的說，其進展之途徑，是可理解的。當其在未引入0與1兩詞之前，其所解說之各式是可以獨立自足的，因各式僅按命題或類之法則以組合。『眞』卽與此等演式合成一體，只因不與『妄』相對，故『眞』亦無機會顯出。由是故可獨立的解說同一律矛盾律及排中律，且可邏輯的將三律分開。

在第五章第一節中吾人已述同一律可用包攝式解之。矛盾律則用否定式及積稱式解之，排中律則用否定式及和稱式解之。

自心理方面觀之，思想如是的進程，亦可得而說明，只須假定世上有一個心，其思想活動時之論式，是決不有誤，而能直達到眞理。如此的心思，卽可直接攝取物之異同性相，無須借助否定式，矛盾律及排中律以爲用。

但據第四章及第五章所述之理由，邏輯的代數，是不夠的，因當其努力由數量方面去表述邏輯的關係時，總將此種關係，視爲一種由內包到外延的關係，由是卽僅能由外延觀點去論概念。卽是說僅能注視到構成『類』之個體。如是，卽不能說明空類 (la classe nulle)之存在，因空類概是空無一個原素，卽僅能由其內包解之。

由此點困難及其他類似之困難，(例如由形式的觀點，概念的運算與命題之運算不能化爲全同)，於是新邏輯家卽將邏輯的代數，用公理爲出發點之演繹程序，逐漸修解之。他們視概念綜合成爲命題，卽可能得出眞或妄，而此點可能性，卽可爲邏輯出發之原始件。由是，則概念之基本性質，不在其外延，而在其可達於眞或妄之特性。

不過在此復歸舊邏輯之運動中，應當分出兩階段。

第一爲古士阿所循之途徑爲吾人前章所述者。

眞與妄是與兩命題之包攝式 $p \supset q$ 同時立出，而命題是可解說爲自身包攝如 $p \supset p$。換言之，命題之觀念，是以同一律爲其界說

其次卽解說和稱式，積稱式及否定式，而自此起，卽與邏輯的代數所採之秩序同。

由是，同一律，矛盾律與排中律仍可分開，其分開之理亦同上，是極合邏輯的，且極合心理的觀念，因旣有眞與妄之界說，一個能直接卽達眞理的心思，遇到一命題卽可說『此命題是眞，是與事實相符合，或此命題是妄，不與事實相合』。如是卽當假定『妄』是可直接看出的事實，無須思考而得。

但吾人知道人的心思是會錯誤的，實不能不用到同一律矛盾律及排中律，以指導思想，使達眞理。如是，則將三律分解，卽爲不可能。實則吾人在徘徊於眞與妄之間無可解決之時，此三律卽呈其作用，不能放棄的。

羅素看到此點，故稍將其原來所選爲出發點之原理修改。取否定式及不兩立式爲自明公理之本，此點遂使新邏輯愈與思想活動之心理條件和諧，且使其發展得進到一新局面。

思想之本性，在追求眞理，致常將眞理與其所確信者混而爲

一。一命題在未經證出其妄時，亦可將所確信者視爲眞理，因吾人不能直接證明一命題之本身，是能離邏輯所稱『討論之宇宙』而獨立。例如一公理，謂其本身明白，以不能發見其不明白之點爲據，換言之，其眞理不能直接證出，尙有待於其他條件。故眞理之包攝式，除用 $p \supset q$ 外，不能再有其他，即『不是 p 妄，就是 q 眞』。故包攝式是以否定式及不兩立式爲本，此羅素與威金斯丁(Wittgenstein)所以取否定式及不兩立式爲原始觀念也。

命題函數之觀念，爲羅素的美妙發明，實可能確定眞理的問題，而顯出其可能的妄謬。

顧有些命題函數是常常眞，無論其變項之値爲何，如同一律 $p \supset p$，無論 p 爲何値皆眞。反之，同一律之否定式即常常妄。

故眞理之品位有種種，可如下述：

就單稱命題言，眞與妄是就思想所表現之意義符於事實與否而定。

就命題函數言，則有幾種可能：

第一如『常常眞』，係指邏輯法則之永久不變性，表示思想各種論式（如肯定式，否定式等）中與其自身之連貫關係，並肯定當思想與事實相通連貫時，此種思想自身之連貫關係仍不變。

至『無眞無妄』可言，則指命題函數中之原素暫時認爲未

定者，或被思想認爲謬誤而被排除於函數之外者。

至『有時眞及有時妄』係指可能的錯誤，如思想欲確定一未定之物性時，卽能陷於謬誤是。

由此等分別，新邏輯派遂建立出形式包攝的眞理，及實質包攝的眞理之重要區分，此區分不是關於一命題之陳述事實，乃是指一命題與命題函數之關係（參看第五章第二節）。

最後，可視『概算』(probable)在命題函數中，亦有其基礎，因爲命題函數，隨代入變項之值而變爲一眞或妄之命題。此時之概算，可視爲眞理之一係數（coefficient）指述一命題函數可變爲一眞命題之比例情形。此係數亦如在數學中，可由0變至1，當命題函數變爲常常眞或常常妄時，其值卽達到。

吾人上述之區別，似可完全確定眞理問題，在思想攝取同化一事物之地位。

一切邏輯法則（排中律亦在內）在形式上是常常眞的。不過略有困難發生，於是新直觀的數學派(l'école mathématique néo-intuitioniste)，卽據經驗主義之名，宣言邏輯法則並不常常眞，且謂排中律不當用『$p+p'=1$ 恆常眞』之命題函數表示之，而當用『$p+p'=x$』表示之。蓋謂用一命題函數，惟在 p 僅論到事物之有限集合體時始眞。如論到無限的集合體，則 p 與非

$-p$ 之不兩立式，卽失其意義，而命題函數卽僅具 $p+p'=x$ 之未定形式，換言之，在無限的集合體中，此命題函數卽無眞或妄可言也。如是，則排中律之形式價値，卽當加限制，其結果是舊邏輯之基本法則，卽不似舊時學者所述之具有普遍價値也。

第二節　邏輯的詭論及布魯維(Brouwer)之立場

動搖近代數學的邏輯基礎之一切矛盾，皆起於康托(Cantor)引入超有限總集之觀念 (La notion d'ensemble transfini)。(註一) 此觀念激起現代重提到古代詭辯派喜弄的邏輯詭論，爲亞里士多德所曾努力攻擊者。

此等詭論係起於語言之不精確乎？抑起於事實之本質中確具有此等矛盾乎？吾人能否將之尋出一公共根源？在數學中能否對此觀點另有其解說？

在求答此等問題之前，可先簡述詭論所引起之困難問題何在。

1°/當超有限總集引入研究到『無限』時，不視無限比定量更大或更小，乃視爲旣知原素的一總集，卽可見發生更大的超有限

(註一)關於總集論，中文中有開明書店出版劉董宇君編數學之園地一四節曾略述之。

序數之矛盾。因依界說，一超有限序數，並不屬於無限級數之以一超有限序數爲極限者。例如，第一個超有限序數 ω. 可直列於 $1, 2, 3, \cdots\cdots n \cdots\cdots$ 自然數總集之後，但 ω 則不屬於此總集。同理最大的超有限序數，是不能屬於一切超有限序數之總集。不過最大超有限序數，是應當屬於一切超有限序數之總集的，不然此總集卽不是一切超有限序數之總集。

此問題可立成一普遍之形式。

設 Ka, Pa, 等爲具有 a 特性之總集，而不將其自身包含爲其原素之一。例如在一室中多人之總集。設 $M=E\ (Ka,\ Pa\cdots\cdots)$ 爲具有 a 特性之一切總集之總集。

設問如是解說得來之總集 M，其本身是否卽自包含爲一原素？

如其本身是自包含爲一原素，卽當表現於等號之前後兩端，而可得 $M=E(Ka,\ Pa, \cdots\cdots Ma\cdots\cdots)$。但此是不可能的，因爲括弧中，只當包有具有 a 特性而不將其自身包含爲一原素之總集。且如 M 不將自身包爲一原素，則當具有 a 特性，而當現於括弧中。可見似當立出一總集如 M。但又覺其矛盾。

照羅素之意想，包含有一切事物之類，應當將其本身包含爲項數之一，因類是包有一切事物的。

2°/空類(La classe nulle)之矛盾，亦可引起同樣的問題。似乎任何一類 K 僅當至少有一 x 對『x 是一 K』之命題函數爲眞時是存在。如問其關係爲何此問題之難，亦如新邏輯所謂不含一原素之類爲空類之說法。

3°/非斷定的界說(La definition non-prédicative)亦爲同樣的觀念。此界說是使一總集之原素可爲該總集之界說者，又可被其與總集所有之關係所界說。如是，假使總集爲無限時，吾人即不能知道是否某不可枚舉的原素，眞有指定之特性。

例如一連續函數 $f(x)$ 之最小限非他，即函數在一定範圍內（由 0 至 1 以爲限）所取可能有之值。但如構成此類值之總集是無限亦可有一數能代表最小值乎(註一)?

再舉一例，如偶數之總集，可界說爲一切整數之能被 2 除盡者。此總集之界說初看是斷定的。

但如就整數之構成法看，則大不同，波耶兒(Borel)曾說，加 1 於 1 之上而得 2，與加 1 於一極大之數上所得者即不同。

試舉一數與其前一位之數所生之關係言，如 $\frac{n+1}{n}$ 可變成 $1+\frac{1}{n}$。當 n 等於 1 時，則此式之值爲 2。但如 n 爲無限大時，則其值可變成 1；由是則 $n+1=n$。

(註一)參看 A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, p. 249

故當整數之纚(La série des nombres entiers)爲無限時，則此纚數末端之各項，用基數看法觀之(au point de vue cardinal)，可彼此相等，且此末端各項相連續時，即漸失卻可以被2除盡之特性，因其已彼此不可分。不過用序數的看法觀之(ordinalement)，各項仍是彼此各別的。

故在用連續加法以產生整數纚之式子中，單位即有兩種權，一種是定基數之權 (Le pouvoir de cardination) 至最大限時此權即消滅，一種是定序數之權，. (Le pouvoir d'ordination) 是常常有效的。

既然如此，故用被2除盡之特性以爲偶數之界說，乃是一非斷定的界說，『偶數的眞界說，應爲偶數所占某一行列之特性』。如兩連續整數，縱其大至無限，自基數看法觀之是彼此難分，吾人仍可斷言曰此兩連續整數如其一爲奇數，則其他必爲偶數。

4°/尙有其他一難點，已被用已知總集演繹出來的新總集之演式所闡明。冉門羅 (Zermelo) 曾研究須有何種條件，一總集爲無限時，所述之演式始可成立。他立出一原則如下，『如有一無限的總集，其中無一總集含一與他總集公有之原素，則可選出一總集含有一原素屬各總集者。此原理是相當明白的，如在每總集中可由一定特性分別出一原素。例如，有無窮對靴子，可在每雙靴

子中選出右邊一隻，構成一總集(註一)』。在素數的無窮總集中，同樣可分別出其能用複數分解者及不能用複數分解者。『但如不用成雙的靴子而改用襪子無左右之分卽不能構造一總集之單有左隻或右隻之襪者。不過按選擇原理，如此的總集仍存在的』。(註二)同理可說吾人應當進行一如選擇之總集是存在然，因爲無人能證其存在是矛盾也。但此卽爲一充足理由乎?

5°/除上述之矛盾外，尙有其他不屬於數學之性質者，而依羅素之說，仍有同樣的矛盾性，如前述耶彼門尼德(Epiménide)之例是。

依布魯維觀之，此種矛盾 (antinomies) 由於數學是隸屬於尋常語言之形式及結構中，受一種與其性質不合的邏輯所支配。由此種邏輯的法則構成之語言，自可確定思想，俾便傳達於他人，但此等語言，是有危險性的，易將文字的關係，去代替事實之關係，常引起一種口舌論辯，而無關於眞實的數學。因眞實的數學，是在思想中發展，與人爲的語言無關係也。

如是，則視邏輯的法則具無限的權威，欲以確立語言論說之

(註一)參看 A Fraenkel, "Der Streit um das Unendliche," Scientia, 1925, Vol. XXXVIII.

(註二) Idem.

連貫關係，其結果按之事實將無意義。故在數學中，惟可能的構造作用，始爲眞理之保障。

今由總集論所引出之詭論，並不由構造而來，因其純是文字的連貫，縱其依邏輯的法則以成立，數學家亦不宜取之。嚴正的數學家，係漸漸成立其所推論的總集，而注意免除其中有神祕不可解之處。如構造總集時需要到特性的話，亦僅應用由良好構造得來之特性，而力避免將之與由排中律所排除之原素發生關係（註一）。

依布魯維，數學的構造，欲自由自主的，須滿足兩要求，一爲消極的，一爲積極的，一方面數學的構造，須放棄存在的證明，縱是間接的證明，亦不適於構造的。他方面數學的構造，係取自然數的概念(1, 2, 3,……)爲原始的直覺的基礎，此自然數的觀念由單位的剖分及可推至無窮的演算得知。

既然如此，排中律之用，卽當以經驗的立場而定，不是以純粹邏輯的觀點爲據。設有一堆粉筆於此，布魯維亦如亞里士多德，以爲可以成立一選言命題云『在此堆粉筆中，無一枝粉筆是白的，或者至少有一是白的』。依布魯維，此判斷不宜用排中律定之，僅由一種事實的存在以證之。可按顏色選取粉筆一枝，然後

（註一）參看 H. Scholz, Literaturzeitung, 1927, Heft 49.

據經驗再就此堆粉筆中求之，惟經驗始足保證此選言判斷之眞確。實則『至少有一條粉筆是白的』之命題，實等於一邏輯和云：『有一粉筆是白的；或爲這一枝粉筆；或者爲那一枝粉筆；或者爲他一枝粉筆……』。

按原理，此種推論態度是正當的，如其係論到一總集，如太陽系中原子之總集，祇爲有一公性者。實際上此演式是無窮盡的，但據理論此演式在思想上是可能的。

故在思想上，可能實證的要求，似是基本的，無一邏輯法則能取而代之。故惟在無思維反省之時，始用到排中律於無窮的總集上，而此無窮總集之中，因缺乏一構造的充足原理，常爲不定的。

例如 $\pi=3.14159\cdots\cdots$ 在小數以下繼續發展，卽可發生一問題曰，在小數以下繼續求去，可否會有一纜數 0123……9 發生。似可說此自然纜數或者決不會發生，或者至少要遇着一次。但依布魯耶此選立式是不能成立的，因爲 0123……9 之纜數，並未眞實的構造成，則『0123……9 之纜數至少有一次在 π 之小數下發展中遇見之』一語，卽爲無意義，換言之，卽爲謬論。故結果全稱命題『無 0123……9 纜數可發生……等語』卽不能加以否定，因如否定之卽將承認一謬的特稱命題爲正當。

欲反駁此結論，有人提議作如下之特稱問題云『0123……9纔數在實際運算至第 n^e 個小數位時發見之』。此時之選言命題，是就運算之數目言。但在此時，布魯維卽不否認用排中律之正當。不過此問題與前面所述者之意義不同，而爲另一事。

布魯維所極力反對者，乃在否定一切全稱命題，至使此否定之結果，得一特稱肯定。例如上述 π 之選言判斷，至現時仍可爲完全有價值，因爲或者在其小數發展下並無一纔數與所設者相合，或者由排中律可決定其至少有一纔數，而此種選言判斷之存在，與他日能由實際運算發見否無關。

依布魯維如此的推理，是不能證明的，因在科學現狀中，無一例能證明所選擇之級數或者是決不會遇見的，或者在 n 進位以後會遇見。結果此種二者必居其一之事，雖在文字上有意義，而在數學上是毫無意義的，因其毫不能增進關於 π 之知識也。

同理，對於 2^n+1 在上述五種條件外，是否有一個素數 (le nombre premier) 之選立問題，亦可作同樣的論斷。

故自然數之原始直覺，應當爲唯一的基礎，數學卽用以爲出發點，憑思想去自由的構造。僅因人類記憶力與智慧力之薄弱，遂使人們不能不將其思想所構造之關係，譯成於文字連合成之語言中，而將此等文字連合之規則，稱爲邏輯的法則。故此等邏

輯的法則，並不是原始的，而爲後來成立的，具有相對之性質。

特別是一個無限的總集，可有一串不可預測而任意選定的自然數爲原素，因此在無限之中，可超過枚舉，而能構造不可枚舉的無限，如連續(Le continu) 是。故與康托主張『連續』爲不可枚舉其原素的一總集相反，又與魏爾(Weyl)視連續爲枚舉無定之原素之總體相反，布魯維是主張連續爲一自由變化之場所，其性質不在原素而在其無限可分的部分。蓋視連續爲一種全體與部分之關係，並非是總集與可分原素之關係也。

如此引起之問題，乃由最精微的邏輯觀點而來，因其將思想活動與由直覺同時構成的事件發生關係。在此問題中，其最使吾人發生興趣者如次。當在一對矛盾命題之中，不能證明特稱命題爲眞，亦不能證明全稱命題爲眞時，因有一個『無限』之情形在，則依布魯維以爲此所設立之矛盾命題爲不合理，而失卻邏輯的意義，因所討論者不能證明其有效，且爲排中律所不能應用者。

但矛盾之所以不能成立，係起於吾人所考察之事件之最後性質乎？抑起於指導思想活動的邏輯法則之缺點乎？吾人以爲此爲未決問題癥結之所在。

第三節　先決之點及總集之概念

在未入辯論中心之前吾人似當先注意幾種重要點。

無論由何方面以考查此問題，不能於立公理之開端，卽立出一完全本身自足毫無含混的原始命題。

邏輯的公理亦不能例外，而其所取爲出發點之一切觀念是很複雜的，除肯定式及否定式兩者不計外。尤以包攝式，如不用聯立詞（並且，或者，除非）是不能了解的。

故在一切思想活動之中，卽藏有些不變原素在，稱爲邏輯常值(Constantes logiques)。

邏輯常值，大部分是有一顯明的外延性，雖無確定的數量意義(註一)。故邏輯常值視其是否涉及數學之範圍而異其價值，有時是在邏輯意義中作解，而不顯示數量的意義，有時又在確切的數學意義中作解。例如『一』的概念，在邏輯中用之，則視爲『個體』，指一個含有許多異質單元的統一體。如吾人設『一個人』，『一隻羊』吾人卽知其個體是彼此各別的。此由許多性質的總集以構成其統一的個體，且使人與羊彼此區分。故此統一的個體，是很複雜的。而在數學中的『一』則反是，是無性質上的差別。許多有同一基數值之單位，除由序數觀點去區別其位置不同

(註一) Cf. M. Winter, La Méthode dans la Philosophie des Mathématiques, p. 57. Alcan.

外，卽無其他品質差異處。

同理『多數』的觀念，在邏輯中用之，並未指出確切的數量，例如說『湖上有許多波濤』『林中有很多黃葉』，此時所指的多數是無定量的，只略言其多寡，並不欲將之枚舉或計算淸楚。

『全體』之觀念亦然，經近數年來許多人討論之結果，可有三種略異的見解，如吾人常說『全體的人皆有死』或『凡人皆有死』，此命題係盡指過去現在及未來的人而言。如是，則所表示人與死的關係，乃是概念的，其意謂『如有一人存在，則此人必有死』。此時所述全體人類皆有死一語中之『全體』無形中純爲未定，旣不是有限，亦不是無限。

如具體的說『此島上全體居民皆是野蠻人』，此時所用的『全體』，亦爲未定的，但是可以枚舉計數的。

最後例如說『全體的整數』一語，此時所講的全體，是不可計數的且是無限的，不過由數的眼光觀之，是可無形中按產生整數之承續律(loi de succession)決定之。

如不將『全體』的三種意義分淸，而視『全體的數』與『全體的人』爲理解相同，則將遇着許多困難，此等困難不起於思想的形式法則，而起於所用名詞的涵義不淸。因『全體的人』，乃指一總集的單元之能彼此有別（如身軀之形式，面容之各異等）。

『全體的數』則不然,係指一總集的原素,僅在數目方面彼此不同。故用『全體』二字,須視所講的原素爲何而定(註一)。

『局部』之觀念,『總集』之觀念,皆與邏輯常值有關,亦有邏輯的與數學的兩層意義。

例如『局部』一詞,自邏輯觀之,則指少對多的關係,而此關係,無須有確定的數目。此時之『局部』,形成一邏輯的『全體』,與更大的『全體』相對。如有一直角三角形爲一更大的直三角形之一部是。

但『局部』亦可視爲無窮單元構成者。於是一方面可將『局部』剖分,他方面又可將其所屬之『全體』剖分,且剖分至無窮之時,則結果即可於局部當中每一個單元,都可從全體中取一個來和牠成對,且可對於『全體』當中每一個單元都從『局部』中取一個來和牠成對(une correspondance univoque et réciproque)。

『總集』之觀念(La notion d'ensemble)亦有同樣的情形。

自邏輯觀之,總集者,指可思想的任何一堆東西所構成一未定的集體,只要此一堆東西可用任一記號將其彼此區別即可。

(註一)參看 A. Reymond: Logique et mathématiques Alcan, p. 151.

如自數學觀之，總集者乃指一堆有一定數量性的一堆東西，而所謂數量性，乃指能將此總集分類或指產生總集之法則是。

在此條件中，邏輯觀點下的總集，不能視爲同於數學的總集。

龔賽(Gonseth)在其數學的基礎一書(P. 86)中，對此有趣之研究，曾發如下之問題曰，『是否有些總集能自相包含如一些單元？似乎現時所有數學觀念的總體，是構成與康托界說相應的總集，而惟使吾人宣言此總集卽是此種觀念中之一。如是則總集卽能自身包含。

但吾人覺得設出此問題及解決此問題之態度，似有錯誤。數學觀念的總集，其本身並不是一個數學的觀念，亦如烹調觀念的總集，並不卽是一個烹調的觀念。

自邏輯觀之，總集之意義，是比自數學觀點所得者較爲含混不淸，且較爲普汎。如將兩種意義混合，卽將不免於謬誤。

暫將自相包含的數的總集，置而不論，且看此普遍的總集論中，所分邏輯的觀念與數學的觀念是否可以成立。

普遍的總集論，是與存在論有密切之關係，因總集者乃指並存之物，所以此種觀念是難於下界設，因存在之觀念，在吾人之意識中，並未能與存在分開也。

此卽謂『總集』乃同時指稱並存之事及吾人知此事時之覺

識。不過如果事實之並存是對於思想常包攝點東西，而思想並不純是被動的去接受之。例如在知覺中，思想即常自然的滲入活動，以辨識自成一總集之感覺原素（例如在一風景線內辨識房屋與其周圍樹林是）。當意識在一大羣事物中分別具有相同性質之物時，自由選擇之力卽活躍表現。當思想取其所有之概念而反省之，使集成一定之關係時，自由選擇之力亦然。故就簡單的並存事實觀之，一總集在一定事件中，常爲自由選擇之結果。

故吾人所獲共存事實之意義，比存在之觀念，更爲複雜，因其包含有一與多之相對在；但在一或多之兩種情況下，皆不宜將存在的一總集，與吾人由是所得之觀念相混，雖兩者可同時表現於意識中。

總集之觀念，於是可確定如下：一總集無論是知覺見其如此，或由思想在感覺中或概念中選擇構成，其表現在思想上，則常稱爲一件事實。此時總集中之原素卽成一個雜多體，因就其性質上看，是彼此各別的（如空間地位特殊的記號等），使思想不能不加以區別。如一總集的蘋果，或梨子，或一總集的數目（97, 5,……150, 2）是。一總集之數量，只能用數字表之，且僅有一種特別的思想方式去表之（如：此處有這麼多……；總集是有限或是無限……等）。

與辨識性質的知覺相應者，則爲一個總集（無限各別的原素構成的總集）的邏輯觀念，僅在知覺的事實表現爲數量時，總集的數學觀念始插入，而問『共存的原素有多少』。且惟此時始可答覆此問。依吾之意，此種觀念是不全等的，不然，即將視共存的觀念爲數學的而得出不快的混亂。

再講到數學觀念的總集，如承認有上列的區分，則詭論卽可免除，因爲『一切數學觀念的總集』之觀念，縱是邏輯的，無補於由種到類(D'une espèce à son genre)之關係的數學觀念也。

然而縱視『一切數學觀念的總集』之觀念爲數學的，仍可將詭論免除，其推理如下：無論如何，知覺的事實之總集，是異於由其中抽象而得之邏輯觀念或數學觀念，而此抽象得之數學觀念或邏輯觀念，是與事實同時現於意識中，爲一未定的雜多之形，或爲一有定數的雜多之形。

能然如此，試用 a', b'……等字代表數學觀念，用 E 代表知覺的數學事實之總集，則此總集之觀念可以 e' 代表之即可得

$$E\ (a',\ b',\cdots\cdots e')$$

由此，則前述之謬誤卽可消釋，因此總集包含其觀念爲 n^e 單元，仍有事實的一雜多，與此雜多之觀念有別。且 e' 觀念及 E 事實，同時現於意識中，此 e' 觀念並不是一單元突然加於 E 上

以構成一新總集 E'，發生一新觀念 e' 如此推至無窮。

同樣的推理，可應用至更普遍的詭論如下：『一切邏輯觀念的總集自包含如一單元』。此語應解為『一切邏輯觀念（或概念）的總集，僅指已經構成的一切邏輯觀念或將來可被吾心構成一切邏輯觀念，共存於此心中。如是說法卽無謬誤。

冉郎伯(Zaremba)由另一方面亦得同樣的結論。他發表兩命題如下(註一)。

x 是一無負值的整數。

x 是一命題。

他卽考查適於兩例中 x 之值，而發覺應當將範疇的觀念(La notion de catégorie)及總集成類(classe)之觀念分別，卽可得如下之命題曰：

『並無總集可為一切總集之總集，而只有些總集之總集』。

『總集之範圍，其本身並不是一總集』。

在吾人上列所分析各問題中，排中律之形式價值是不生問題的，因如名詞之含意曖昧時，用此律卽無效。

在其應用中，排中之效，惟在名詞之意義是極嚴格的規定，只表正反兩面之意義。

(註一)參看 Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. XV, 1926.

在數學中,論到正負二者必居其一之情形時,一切問題僅在問此條件是否滿足。

吾人前面曾述如偶數是解爲占有一定的行列,則在二連續整數中,其一必爲偶數或奇數,縱在實際上吾人不能運算之。此時之奇數卽可嚴格的界說爲非偶數。

當界說其他之數時,亦當同樣的嚴格,尤其界說有理數與無理數之相對,或代數數與超越數之相對是。

例如超越數是嚴格的爲代數數之反面,則一數如是界說後,如不爲代數數卽必爲超越數,縱吾人未能實證之。

但如事實之關係極複雜,至包含有無限在,則問題之性質卽不同,正反二者必居其一之情形卽消失。

第四節　數學事實之性質

由前所說,吾人卽引到布魯維之立場,他以爲欲克服一切數學上的矛盾(或二律相背性),應放棄舊邏輯及舊邏輯之眞理論,視眞理係連於排中律者。

依布魯維之意見,事實不是僅僅無眞無妄,如吾人所說之意,僅爲眞的或妄的判斷之條件。事實可產生些命題在理論上亦如在事實上,是無眞無妄可言,而又不是些命題函數,此等命題

是用不到排中律的。

在舊邏輯中,視『妄』可包攝『眞』,則思想時所獲者僅有眞或妄兩種可能,而在布魯維之新邏輯中,則可有三種:卽眞,妄,與無眞妄可言之謬論(l'absurdē)是。

依瓦扶兒(Wavre)所定之公式『眞者指可能證明者言』,『謬者指可實證其矛盾而言』。

則無眞無妄,在眞理論中另形成一界域,係列於眞與妄之外。

不過『眞』與『謬』之公式尙須細加解釋,因其涵義曖昧。

此公式之意係指或者在事實上曾經證明其然且將來亦常能證其然,或者事實上尙未證其然而將來可有一日能證其然。

如在第一層意義中吾人視爲毫無可議,此公式是一很好的實用規則,卽在數學範圍中,僅用到曾經一次證明過而確知其常可證明的眞理。

但在第二層意義中,此公式卽曖昧,因從未證明其爲眞,而又肯定其本身將來可以證明,則試問將來有何人能證明之?待一個未來的數學家證之乎?抑待一個賦有神智的人證之乎?

布魯維是據第一層意義以構成一新邏輯,旣異於舊邏輯,又異於前述新邏輯派如羅素等所修正成功的邏輯。至對於數學與

邏輯之關係，他是推翻羅素之貢獻。

在其新邏輯中，第一事最驚人者，爲其『謬』的界說，似亦常用到排中律的。

如龔賽(Gonseth)所述之界說云：

R的『謬』係指謂『或者無所知於A爲妄，或者無所知於人所不知者』(註一)。

此時所立正反二者必居其一之例，是絕對的，並無中立其間之第三者在。

他方面於數學之外，去選取證明『謬論』之例，不見得有大意義，因爲此種例是詭辯的，或是本身未定的。

潘嘉烈述及斷定的分類 (classifications prédicatives) 與非斷定的分類(des classifications non prédicatives)時，余亦知其所指之意。

所謂一斷定的分類，其構成如次，即凡物之屬於斷定的分類者，應當有某種屬性，結果引入新物體，亦不會將已成之分類動搖，因新物體欲加入其中，必須具有所定之屬性也。一非斷定的分類則不然，是可常時改動的，任何一物皆可加入其中。

但余實不解所謂適用的形容詞(les adjectifs prédicables)

(註一)參看 Les Fondements des mathématiques, p. 225.

與非適用的形容詞(imprédicable)之分類。

因形容詞就是可適用的，惟不適用的形容詞，始爲不適用的。

如是推理，卽將一字用作形容詞與用作一實物相混。一形容詞係指一特性，但惟實物始有此特性。

故不當於形容詞『適用』與『不適用』之間去分類，而當於『適用者』與『不適用者』之間去分類。

不過在此情境，分類又不可能。因凡存在之物當有一特性以爲思想所攝取，無論其特性爲邏輯的存在或事實的存在均可。卽『虛無』(Le néant)亦不能例外，至少亦有一邏輯的存在，而爲概念之形，其內包可界說爲空無所有。

如承認一字用爲形容詞與用爲名詞可以相混，卽可有無限際的說法。例如『一切』二字不能視爲一未定的形容詞，因旣是一切，卽不能再入於何項名詞之分類中。『無限』二字之意亦然。

至用巨人之例以證明『謬』之合法亦不見佳。

其說設許多巨人生於一島上，凡外人之來此島者，皆被處死，或用以祭眞理之神像，或用以祭謊語之神像，視其對於所發之問題答得正確或謬誤而定。一日諸巨人審問一外來之人曰『子之命運將如何』？此外人答曰『余將死於謊語之神座上』。

由是諸巨人卽爲所難，一面不能將之犧牲於謊語之神像前，因在此光景內，則此外人所答者將爲眞，而應當犧牲於眞理之神像前，但他方面又不能將之犧牲於眞理之神像前，因在此光景內，此外人所答者將爲一謊語。

此取譬眞奇。但如其可以證明『謬論』之可成立，此由於問題之性質爲未定，致眞或妄皆不能用以解決之。欲此問題有一意義，卽須諸巨人在未審訊此外人之前，祕密決定如何處決此外人之命運，毋使有徘徊歧義之可能。

如是，吾人卽漸更逼近眞與妄之關係。

布魯維將『謬』解爲『眞』之矛盾，已如吾人前述。他且謂一全稱命題(爲肯定或否定)，講到一未定的或一無限的總集時，惟有『謬』值可以成立，且係間接的用一特稱命題之被證爲眞者以明之，因在此情景內，排中律始可合法的應用。在此點上，布魯維是與新邏輯派相合，視全稱命題是一有待命題（或設言命題），僅可藉一特稱命題以證事實之眞或妄。

不過新邏輯仍保留對立命題之形式價值。如『無一是』與『有某些是』相對，『全體是……』與『有某不是……』相對。而布魯維則視特稱命題未經證明爲眞之前，此二者必有一眞之對立命題卽毫無意義，而且是錯誤的。因其假定惟簡單命題始有眞與

妄之值，不知簡單命題尙有無眞無妄可言之值，而用不到排中律也。依布魯維，舊邏輯中著名的對立命題表（矛盾的，全反或偏反的；差等的）卽甚昧於此點，故無價值。所謂『眞』者非他，乃是已經證實之假說，或可能證實之假說是。一尙未經證實之假說，卽可視其爲非眞亦非妄。

眞與妄之觀念，至是卽縮小其外延。自舊邏輯（新邏輯亦包含在內），眞者，乃表示判斷與某一事件所生之關係。事件常是極複雜的，對事件取得之判斷，是可能錯妄的，但亦可包攝一部分眞理。此所以妄能包攝眞。在此情境中，單稱命題，卽不會在眞與妄兩值外另有第三種值，而對當命題表之形式價值，仍存在的。（但新邏輯對等差之價值則保留）。

非眞非妄者，僅能指思想用命題函數去暫時期時未發生過之事。因未發生的事，是思想不着的，與思想發生不着何種可能的關係，故結果是無眞無妄可言。在此情境中，自無何種邏輯法則（排中律亦在內）可以應用的。

但如有一事件能爲思想所攝取，能產生一判斷，卽可成立眞或妄的關係，且此已成立之眞或妄的關係，是可離一切可能的證實而獨立存在的。如已知凱撒曾征服高陸 (Gaule) 而回羅馬，則『凱撒曾坐一小艇渡龍河 (Rhône 河在高陸境）』一語卽必有

眞或妄可言。凡一未經證實的假說，或無可證實的假說，其本身仍有其眞或妄之値。例如科學或許有一日能證實走到火星上爲不可能，或火星上有如吾輩之居民爲不可能，但火星上有居民一假說，其本身仍可有眞或妄之値。

總之一眞理之證明法(Dêmonstration)，是與眞理之本身有別，眞理之證法，是依於吾人用以成立證法之工具而定。

一命題可依各種實證之工具，而成爲眞，爲可疑，爲大概近似，或爲妄（卽證其爲矛盾，毫不含有眞理）。

如一命題中表現之名詞，毫無可能接觸之點，則據尋常說法，此命題卽爲謬，如云『餘弦之角比天還大』之語是。

由前區分，吾人以爲卽足確定眞理之問題矣。

在應用排中律於數學中時，一切問題，係集中問是否有一數學事實，可與攝取此事實之智慧活動分開。

如果數學家用其界說與算式，去將數學事實之領域全部的創造出，且如果此創造純依自由選定之規則以表現，則超越此被創造出之領域外，卽不能加以肯定或否定，因思想不能思維尙未發生之事，及尙未確定其將來存在之可能爲何之事。排中律在此是不能施用。對於各種推理皆然。

不過視一種數學的觀念，純爲由心構造者，今日已無同調之

入，雖過去時代曾有之，因無中生有的創造，是不可思議的。縱對構造符號邏輯之原理言，亦不能不先選定些不變原素（如『或者』『並且』等常值），此等原素係超越純粹的符號作用，而僅能由直觀取得的。

此在數學中尤爲必要。當數學家尋求數學之自明公理以爲推理之出發點時，卽不能不選定一直覺之理，以說明如何擇定某種公理之故(註一)。

可見實有『一種數學的實在』在。不過如何認識此數學的實在？尤其是數的關係與連續的關係，當如何認識？關於此點，布魯維則訴之於一種直覺之以自然數纏爲目的者，且此直覺之活動是外於排中律的。

既然如此，一實數可解爲一『十進數發展的 f 法則』（此處是參照 Wavre 之著作）。

但欲構造『連續』，卽當能取一發生的法則 g。此法則 g 不再就某某數之十進數發展之數字言，乃就實數本身之級次而言。此法則 g 卽爲 f 法則的發生法則。不過如此一法則，是不能證明白的，因一將此法則成立，又將『連續』破壞矣。

故 f 法則應當絕對爲任何一種，不能將選擇之自由，加以限

(註一)參看 F. Gonseth, Les Fondements……, p. 115.

制。

其構造需要絕對自由去任意選擇十進數(此選擇之十進數，係續於他一十進數之後者)。如此的發展，乃是一自由的級數。

『於是連續之觀念，卽與自由選擇之一級數相混。換言之，在 n 選擇之後，應當選擇何種，亦無一定之成見也』。

『數學的連續卽爲十進數之自由發展』(註一)。

如此的說法，吾人似覺含義曖昧不清。

豈自由變化，是屬於數學之事，而數學家卽當限於記述曲折離奇之私見乎？抑或者此自由變化，乃數學家之成績，在某十進數後，卽任意偶取一新十進數乎？

換言之，豈自由級數，乃是一種自然發生不能預知之事，緊接於數學事實之性質乎？抑或者此級數爲人心任意構造成之成績乎？

自吾觀之，此中有曖昧之意義在，應當加以肅淸。

且吾人覺此問題亦欠重要。數學的變化，無論是由心構造，抑由事物性質使然，自布魯維觀之，皆是絕對不可預知的。且其變化亦不含各種可能，以便說明如何由隱至顯，如萊不尼慈(Leibniz)所述者。

(註一)參看 R. Wavre, Revue de Mét. et de Morale. 1924, p 453.

如果布魯維所說的數學之變化，純粹是不定的，則人類思想，顯然不能將之攝取。因思想不能斷言隨人心所欲的未來變化爲何也。在此情況中，『甲是或甲不是』二者必居其一之事，將是不可思議，因爲欲說甲當爲如此之時，而甲由其本性之富於變化，可變爲不是甲，換言之，而爲任何非甲。而反過來，對於非甲，亦不能加以理解。故對於一未來之變化，不能產生一眞或妄之命題，亦不能產生一與此命題相矛盾者。

欲二者必居其一之『甲是或甲不是』有一意義，卽當使甲有一部分爲旣定，而惟其他一二屬性爲未定，則得『甲將是某樣或甲將不是某樣』。

如吾人由此觀點以分析布魯維之立場，卽可得出下列之考察。一方面布魯維肯定數學的變化爲一絕對偶然的未來的變化，但他方面此肯定是不能成立的，因他賦予此變化以少許確定性，則此變化亦只在某限度中是不可預知的，結果卽含有二者必居其一之形式價値。

例如他說連續的特質是級數，是十進數的級數，換言之，只是由 0 到 9 之數字合成之級數。合成此級數之原素，並不是未知的，僅級數之秩序，是不可預知者。旣然如此，吾人卽可說『某數字將出現於級數中之某處，或者將不出現於級數中之某處』。吾

人可由概算(Probabilité)以尋其出現之機會，因爲一數字總有十分之一之機會以出現也。

關於π之問題，其有定的關係，亦是同樣顯明的。π之小數，可以精密連接算出，直至內接於一圓之多邊形面積與外切於此圓之多邊形面積之差至最小時，此運算仍是有效的。結果即可立出二者必居其一之相對命題曰『在π之小數發展中，0,1,2,……9之級數，至少必有一次遇見，或者一次都不遇見』。如上述之差數，小至不能再用數量表示時，則關於十進數的一切問題皆消失，而所謂 0, 1, 2, 3……9 之級數至少必遇見一次，或一次都不遇見之相對命題，亦失意義。

對於『2^n+1 是一素數或者不是一素數』此二者必居其一之問題，亦可用同樣的推理。此例是完全合法的，只要在各項相連之級數中，指數 $n+1$ 與指數n之差不是比定量爲小。而至此時，二者必居其一之相對命題，又將無意義，因 2^n+1 變爲不定的。

可見重要之點，乃係數學事實，是由人心與一種對象接觸而造成。此接觸之對象或爲觀念之形，或爲經驗之物。其餘則無大關係。但無論其起源爲何，及其造作之方式爲何，數學的實在，在此等條件中，具有本身存在之一定形態，且其存在之形態係常存

於法則或公式中，由法則與公式去思想，始能將之攝取了解。故結果，對數學事實成立之命題，是必有眞或妄可言，決不能爲無眞無妄之形，除非思想故意對一種關係認爲不定，或者因毫無意義致不能成立一選言判斷。

自然由吾人前面所述之證理程序，吾人自覺此等命題是有可懷疑之點，或多少有點大概近似之形。如然，且如一數只可爲有理與無理之分，則吾人即可極合理的如婁冴(Lévy)所說『此數是有理數，或者不是有理數，因此數不是其一必爲其他，不過我尙不知其在二者之中究爲何種』(註一)。

至論到數的關係與空間連續的關係，此問題之性質雖不變，但愈更複雜。因吾人不確知必能將『連續』列於一極雜複數之系統中也。

在此等條件中，坐標系之基點，將變爲算術的零而又不與之全同。因不如此，即將一旣定之連續，失其接觸。而關於此基點之性質，韋爾(Weyl)曾有些懷疑，即將得局部證實。

但如是的懷疑，亦不足令人放棄常用的邏輯及排中律，不過僅證明應將連續，及將零號之觀念更加詳細的研究，且如有可能之處，應重新使此等觀念適於數學的進步。

(註一)參看 Revue de Mét. et de Morale, 1926, p. 546.

且須知由於忽略排中律之功用，至將此律限於『有限』之範圍中。

當將連續偶數之纙，與連續整數之纙，使成一一相對的關係後，卽可見連續偶數之纙，與連續整數之纙，是有等值，且在此等值，與其非等值之間，並不能看出有中立的第三者在，但此已就無限級數而言。

反之，在一複雜事實之前，而此複雜事實，是屬於有限之範圍，排中律亦有不好應用之處。如對一有機體，其健康狀態，與不健康狀態，是很難於區別的。故在思想適於攝取或了解之實在中，常隨處包含有許多不可理解之處，足以阻止科學一時之進步，此已爲滿演生 (Meyerson) 布朗雪維克 (Brunschvicget) 及拿郎德(Lalande)諸先生揭出之。

用吾人精鍊的概念去重新適應實在，或者創造新概念去適應實在，則此等不可理解之處，仍是可克服的，而數學亦不會例外。

無論所遇之困難爲何，如卽視爲無法對付，實爲錯誤。斐羽 (Lévy) 說得好，『應有赫爾米特(Hermite)之天才去發見 π 數爲無理數』。故可謂數學的危機，卽爲引入新進步之希望，不過吾人決不以爲新的進步，卽足將邏輯的基本法則消滅。關於此點，

吾人之意全同於哈達瑪先生(M. Hadamard, 詳見 Préface du livre de Gonseth, Les fondements des mathématiques p. XI)。

誠然布魯維先生在數學舉出一種自主的經驗之重要，及舉此種經驗摸索嘗試之情形，實有大功。但他似乎有點錯誤，去將同一的數學存在的判斷，有時視爲絕對的不定，有時視爲在某限度中有一定。且由於此種曖昧歧義處，他並宣布排中律之死刑。實則排中律之本身是完全合法的。

自吾人觀之；如欲在眞理之觀念中，給『謬誤』以一位置，當將其意義附於命題函數之上。舊邏輯常視命題在形式上是有定的，而在此情形中，一命題卽只含眞與妄兩種可能的值。而在妄的命題中，卽列入謬誤。反之，命題函數 $\varphi(x)$，則細說到一羣認爲可能的事實或事變。旣然如此，『眞』則指一可能實現之事，『妄』則指一可不實現之事，『謬』(非眞非妄) 則指一件不可實現不可能之事，因其對於被 φ 解說的事實範圍，減削其意義也。例如 $\varphi(x)$ 是爲『x 是一希臘人』，而謂『蘇格拉底爲一希臘人』則眞，謂『凱撒爲一希臘人』則妄，謂『此石塊是希臘人』則謬。

故眞理之品位有三，可完全指示出，而其三種反面，亦可完

全劃出，卽妄者乃眞之否定，（如蘇格拉底不是希臘人），眞者乃妄之否定，（如云凱撒(César)）不是一希臘人）；謬者，乃謬中之謬（如云此塊鐵不是一希臘人）。在最後一例中，肯定一謬的命題或否定一謬的命題，皆同爲謬，因爲命題中所立兩詞之關係。是不可理解，毫無意義也。可見如一命題是眞或是謬，此命題並不是必然的在事實上爲不謬，因一不謬的命題可眞亦可妄也，不過由此事實，排中律之用，並不卽發生問題，因此律第一在定一命題是謬與否，次則此命題不謬時，卽定其爲眞抑爲妄。

他方面如欲前述之例有一意義，卽當謂並非是『妄包攝一切，且包攝眞』乃謂『妄包攝一切且包攝眞的可能性』。

下一章中吾人將分析前述對當命題之結果。現時吾人只講命題函數之插入『常常』與『有時』者。換言之，插入時間的因素，卽重視到變化。不過在數學中，變數 x 之範圍可以推至無窮，故欲定 x 所歷之全程，甚爲困難。不過前面已述過，其範圍雖無窮，但仍完全有定，只要變數所歷各項之差，不至比旣知量爲更小或更大。如是則數學與邏輯可以不分。

第七章　邏輯與數學

第一節　羅素的數之界說

自其書第一次出版以來以至現在，羅素先生仍視純正數學與邏輯並無區別，且視數學不過爲邏輯之擴張引伸，因其結構無一不是可以邏輯演算及邏輯常值釋明之。

但欲得此，卽當放棄哲學對於數的傳統舊說，而當採用數的邏輯界說。如弗勒格(Frege)及康托(Cantor)所提倡者是。其說謂：數並不是一種物性的表詞，可用以狀述一類物件，如用黃色以狀述金蓮花然。但數並不因此卽是一種純粹主觀的看法，因數能與客觀一種事件相應。故數並不是感覺經驗的物，亦不是唯心任意構造的觀念。數乃是屬於邏輯界的。

故數只能用到一些概稱名詞(termes généraux)上，或用到

一些概指的敍述，如『人，地之衞星，金星之衞星……等』是。例如『一』總是指一概稱名詞之統一體，如『一人』是。同理，如說某一人是『一個陶淵明』，乃謂此人是屬於以陶淵明爲代表的詩人之羣。此推理是永遠存在的，不管是否有一對象能置於此概稱名詞下。例如 0，卽是『金星的衞星』一概稱名詞之一特性，因金星本無衞星也。

故數者，乃是概稱名詞或概指敍述的一些特性，並不是外界的物或心中的觀念。

不必就概稱名詞論，最好考察此概稱名詞所述事物之類(classe)或其集合體(collection)。因爲同一集合體，是可用數種概稱名詞表述的。例如『人，獸，政治……等』概稱名詞，可以指述同一類之物。故數是倚附類，並不倚附於選擇敍述類的某概稱名詞，雖然類是常需要一概稱名詞以表達意義的。『縱然此等名詞是枚舉出，如在這個在那個……或在其他之中』，此集合體總是由這個或那個或其他之物的普通特性構成，而由此僅可得到說來卽如說一集合之統一體。且在一無窮的類中，枚舉是不可能，於是僅可舉類中各員所有之公性以敍述之』(註一)。

既然如此，卽可研究兩集合體中可有同一之數，如此兩集合

(註一)參看 Russell, Méthod scientifique en philosophie, p. 162, 1929.

體間之單元，有一一相對之關係。例如英國男子結婚爲數若干，固不可知，但由英國之憲法，可知男子結婚之數，必等於女子結婚之數，因英國憲法只許一夫一妻制也。

數的邏輯界說，卽自然的由前所述者產出，卽『一類中各項之數，乃是與該類相似的一切類之類』(註一)。

0數者，爲與空類 (la classe nulle) 相似的一切類之類。而所謂空類者，乃使一命題函數 $\varphi(x)$ 常爲妄之一切 x 之類是也。

一之爲數，乃是與一個單一之類相似的一切類之類，而所謂單一之類者，旣不是空的，且如其包含有兩個體，亦必爲完全相同之兩個體。例如用一分鐘以測時間，所得之一分鐘，仍同於其他之另一分鐘。而一分鐘又可分爲六十秒，可知雖一個單一的類，亦可由許多分子合成。

2之爲數，可同樣的界說爲成雙成對的類，3之爲數，可界說爲成三之類，4之爲數可界說爲成四之類……如此類推。

如此進展，卽可不僅看出物之兩類，可有同一之類，且可說是否其一類可比其他類爲大。在類之原素中，例如十二使徒之類

(註一)此語之原文爲 "Le nombre de termes d'une clsse donnée est la classe de toutes les classe semblables à la classe donnée."

及每週日數之類，每類中各取出一原素使一一相對，即見使徒一類比每週日數一類中之原素爲多。

反對者謂與其用多類之類的觀念去解說數，不如用實際計算較爲簡單，不知其實爲誤解。因計算手續實際極複雜，而須認定先有數的觀念爲多類之類，然後可以計算。且由實際計算之手續，是不能得出無限數的觀念。

實則新邏輯派所採數之界說，是與原始人類之計算手續相合的。如野蠻人常不知計算超過 4 或 5 以上的數目。但如他有一羣爲數五百的獸，果缺少一個，他是能算得出的，其法是將全獸羣列隊過去，就眼前經過之獸與其所記憶此獸之印象。一一相對，以察知之。

不過依吾人之界說所得者，不是數之自然級數，僅是些孤立的數。例如觀察『使徒數，月份數，黃道記號數等』集合體，即可解說出 12 之數。但此界說，並不包含有比 12 更少（即11）及比 12 更多（即 13）之兩數。

故論數爲諸類之類，純是就基數而言，尚須要一序數之理論以補足之。

欲造序數之理論，羅素係取班洛（Peano）所立之原始觀念與原始命題爲出發點，但羅素並未即取此等原始觀念與命題爲

數學的基本要旨，乃是努力將此等觀念與命題化爲普遍的邏輯觀念與演式。其說如下：

I. 0 是一數。

II. 任何一數之繼數是一數。

III. 兩數不能有同一繼數。

IV. 0 不爲任何之繼數。

V. 一種特性，0 具有之，任何具此特性之數之繼數亦具有之，則一切數俱具有之。

斑洛努力將數化歸到最簡單的要素，固極卓越，但自羅素觀之，仍有未盡之觀點在。

第一，其所選定的三種原始觀念，不足以確立整數之自然纙數，不過此三原始觀念，尙能適用於可有各種解釋的而又可滿足五種原始命題的一無限數。

例如取級數 100, 101, 102……等而觀之，100 之項與 0 之功用同，因其亦爲首項。

試看他一級數如 0, 2, 4, 6……，在此級數中，0 之意義亦與常用者同，不過其後各項係逐漸加 2 而得。

此兩級數是可滿足斑洛所選定之三原始觀念及五原始命題

的，但仍不能解說出整數之自然數繩。

可見此原始命題，是可指出一個進級數之特質，換言之，可指其一級數並不一定是數字的，如上所舉之二例，而可爲一些物，如空間的點是。

再則此五命題，不足以解說三原始觀念（卽 0, 數，繼數），此所以吾人不能不視之爲一些獨立無倚的項。人自可視三觀念爲一些簡單假說，以其能滿足五原始命題爲斷，但此種看法，理論上固可通，但仍不能確立自然數繩之存在，且不能令吾人可將此自然數繩應用於實際方面。

有此種困難，故羅素將班洛之第五命題化爲原始界說，以爲數學歸納之特質，且引入遺傳之觀念(La notion d'hérédité)。

『一種特性在自然數繩中，如果每次 n 數皆具有之。則 n 之繼數 $n+1$ 亦具有之。卽可稱此特性爲遺傳特性。同理設有一類，每次 n 皆爲一員，則 $n+1$ 亦必爲其一員者，卽可稱之爲遺傳類』(註一)。

其次『一特性如果是屬於 0 的一種遺傳特性時，則稱爲歸納性。同理，一類如果是有 0 爲一員之一遺傳類卽稱爲歸納類』。

於是吾人卽可立出界說如下：『自然數乃是 0 之後裔，直由

(註一) Introduction to, p 21.

其前鄰數之關係而產生』。（此前鄰數爲繼數之逆關係）。

由此則班洛的三原始觀念之一卽「數」之觀念，可解爲其他二者(0及繼數)之函數。而其他二者，亦可用數的邏輯界說，用『諸類之類』以解明之。

卽『0數者，乃一空無一物之類，呼爲空類中之項數也』。或更確切言之，『零者，乃等於諸空類之類，換言之，其各員是空無所有之類也』。一切空類，可有不同之內包，因空無所指之範圍甚多，（如此樹上無果，火星無衞星……等是）。但如空類之內包雖不同，而其外延則全同，故就外延觀之，諸空類皆同爲一類。結果，零如就類之類作解，則只包含一空類，卽可得其純粹邏輯的界說曰『0者以空類爲其唯一之項之類也』。

至於『繼數』可界說爲『設有一數 n，命 a 爲含有 n 項之類，又命 x 爲 a 以外之項，則附加 x 於 a 上而成之類，卽將爲 $n+a$ 項，故得界說如下：

『a 類之項數之繼數，卽附加 x 於 a 上而成之類之項數，只須 x 不爲原始類之一項』(註一)。

於是班洛的三個原始命題，卽可化爲純粹的邏輯觀念。至於五個原始命題。第一個（爲0是一數）及第五個（卽數學的歸

(註一)參看 Introduction to, p. 23.

納),即爲前述自然數之界說之結果。第四(0不是任何數之繼數)及第二(一數之繼數是一數),是極易證明的。至第三命題(兩數不能有同一繼數)欲成立,則須存於宇宙中的個體原素不是一有限的總體。假定此等原素之數爲 10 卽不會有 11 之數。11 之數卽爲一空類。對於 12 亦然。如此,卽可得出 11=12,11 與 12 雖不同,但其爲繼數,卻是一樣(註一)。

故設『宇宙間個體事物非有窮,則吾人不僅能解說班洛之三原始觀念,且能用屬於邏輯的觀念與命題,證明出其五個原始命題。其結果是可由自然數之理論推出之一切純正數學,皆是邏輯的一種引伸了』(註二)。

由是,吾人不僅能將唯一性(l'unicité)確立,且能確定整數之自然數纔之存在性,吾人可用存在的定理(Théorème d'existence)述之如下:

世只有一種空類,卽與一常常妄的命題函數 $\varphi(x)$ 相應,無論其 x 爲何值。所謂零數,卽與此空類相應之數。於是吾人可得如下之推理:

0 類解說爲空類,是存在的,因其包含有一個原素,卽惟一

(註一)參看 Introduction to, p. 24.

(註二)參看 idem. p. 24–25.

的空類是。1 之類，解說爲單一的類之類，是存在的，因其包含有一原素，卽單一的 0 類是。二之類亦存在的，因世有含兩個原素之類，如由 0 及一構成之類是。同理 $(n+1)$ 之類是存在的，因 $n+1$ 乃是由 0 數至 n 數之數(註一)。

第二節 批評羅素數的界說

依羅素由前所述卽足由邏輯之立場，建立有限數與無限數之區別。

茲在未入此題之先，試觀自然數之纜，是否眞能建立於羅素所擬定之基礎上。

第一，遺傳之觀念，似很能滿足所定的邏輯功用，因此觀念無數學的特別性質，只述及適於生物的一種降生的現象，如謂某一種特性屬於某一生物，則亦必屬於其所由出之祖先。

故遺傳似有一種普遍的邏輯價值，且在某種條件下，是適於任何物類的。不過吾人覺如此推論有曖昧之意義在，因遺傳之觀念，應用在數上，另具有一種必然性，爲在他方面所無。講到數，一提出 n，則 $n+1$ 卽必然的續出。而在生物則不然，其遺傳性是可改變的，或會消失的，以至會變出新種。反對者謂生物中至

(註一)參看 Russell, Principles, of mathematics, p. 497.

少有一種遺傳性，是可不變的傳之一切有生之物，即種性之遺傳是。實則除首現於地球上之第一個有機細胞外，一切生物，是必有一祖先的。但並不即必有一後裔，且不能說『一生物之後必再有他一生物』。反之如吾人所居之地再冷下去則地球上之生物或有滅亡之一日也。

故單是遺傳之普通觀念。尙不足以立出自然數之纚，欲達目的，此觀念尙須具有一特殊意義，具有由數學歸納產生一種數的面影，則用遺傳之觀念以解說歸納數，卽犯竊取論據之弊。遺傳之觀念，自然會認定一級數之各項（除首項外）皆有一先輩存在，但在普通解釋，卽不必包含說各項之級次是可推至無窮，且每項是必有一後裔。惟數的遺傳之觀念，始含有級數每項必有一後裔之意。與普通生物遺傳之意有別。如是則數學與邏輯之分仍永存不變。

零之研究，亦可得出同樣的結論。第一，零之存在，如視爲諸類之類，只包含有一空類，（因與空類相似之一切空類仍同爲空類），則零對其他之數，卽占一特殊之位置。例如『一』之數乃是一類之包含有各種單一之類者（如一人，一馬，一果……等）。二之數，乃是一類之包含有一成對成雙之量（一對歌者，一雙馬……等）。今如依羅素所下零的界說，則可有許多空類具有一種

公性，此公性可用零數表之。即可用空類表之。

余覺可用例說明羅素之思想如下：假定有一桌於此，其上空無所有，即可任意說『桌上無墨水瓶，無書無貓……等』。此等命題，彼此完全相同，對於實在完全爲妄。設反之，桌上有一物在，即有一個單一之類存在，而此單一之類，亦可用數種命題表之云『桌上有一墨水瓶，一書……等』，但惟有一命題是眞。故各單一之類對實在之品位，即不相同。

此即羅素之唯實論所以視空類爲零時只含有一員之故。

但細觀之，此觀點甚難維持。縱在數的範圍中，亦不能不區分出各種零類，如整數之零，有正負號之零，有理數之零……等。即羅素本人，亦似贊成有此種區分，如他說 $+m$ 與 m 有別，又與 $-m$ 有別。故結果如正負號之零（± 0）是異於整數之零（註一）。且羅素謂在有理數（分數）中，如$\frac{0}{m}$中之零，與基數之 0，完全不同，因前者爲一對多的關係，（m 是任一有限整數），後者則不如是（註二）。如然，且因羅素的邏輯，係承認關係的實在性，吾人即可總結謂各種空類與數學事實相對，並不是相同的。在此種條件中，即不能將零解爲諸空類之類，僅包含一員，即空類是。

（註一）參看 Introduction to……, p. 64.

（註二）參看 Introduction to……, p. 64—65

豈謂各種空類之內包雖不同，但其外延相同，即可混視爲唯一之空類乎？但如此又將遇着其他困難。

實則應用於零數之理論，亦可用至其他之數。例如許多單一的類（如一人，一馬……等），並無相同之內包，但就外延觀之則相同，而人即可謂 1 者，亦如零數，即以單一之類爲其唯一之內部之類是也。

既然如此，則關於自然數纔存在之定理，已不能成立，因此定理完全是以零爲一單一之類爲據。（0 類是存在的，因 0 類包含有空類一原素。1類解說爲諸單一類之類，是存在的，因其包含有一原素即單一的 0 數是）。

如吾人任取一數爲出發點，如取 15 而論之，亦如研究零數然，而謂 15 之數是存在的，因其包含有一原數即唯一成 15 之類（就外延觀之）。1 之數，解說爲諸單一類之類是存在的，因其包含一原素，即單一成 15 之數。

如此，則羅素所倡之界說，亦如班洛之三原始觀念，是可對數作許多未定的解說，不能確立一定數之存在及其唯一性。

此失敗之理由，可由其建立空類之存在中尋之。

依羅素空類之存在，係由命題函數 $\varphi(x)$ 中代入 x 之各值皆成爲妄的命題構成。但試問這樣的類，如何能確證其成立。

如就質的類而言，卽易證實，因質的類係按其內包作解，至其所含之個體爲數不定，可與其界說無涉。所視爲重要者，爲每個體應具有公共的性質。如是，則證實 $\varphi(x)$ 是否常常爲妄，只須偶取其類中一兩個原素作例卽可。如取孔子蘇格拉底或福祿特爾以證人類是。此一二原素能證實，則全類亦可證實。

但如就數量的類而言（如整數之類，偶數之類……等）此問題卽改觀。因欲證實 $\varphi(x)$ 對於數量的類是常常妄，卽不能持數之界說爲諸類之類。此界說固可證實 $\varphi(x)$ 是否對某數爲妄，如對 12 爲妄。但除用實驗去一一實證外，此界說是不能令人斷言 $\varphi(x)$ 對於任何整數皆爲妄。

欲斷言其然，吾人當就整數之類之本身觀之，與產生此等整數之集合體無關。在整數的類中，就數量觀，每一數是與其前一數異，又與其後一數異，不過各數之差，是可用同一的承續律 (loi de succession) 重覆應用而得。

因在整數之類中，相連兩數之差爲 1 單位。在偶數之類中，相連兩數之差爲 2 單位。惟由承續律始可斷言如 $\varphi(x)$ 對於某數爲妄，則對於其餘一切數皆妄。

可見欲在量的立場建立空類之存在，卽當先有可計數之類，由承續律得出其各項之級數，故不能用一個邏輯界說的零數，以

建立此級數。

故空類可分爲兩種，一爲質類的空類，由其內包作解，且其中之原素，爲數是不定的。其他爲量的空類，包含多量的原素，但此多量的原素，可按承續律確定之。故『質的無』不能視爲與『量的無』全同。其異處可於尋常語言中見之，如云『無，並非毫無所有』，卽謂數量的無，並不是論理的無。因數量的無，是代表一概念在性質上是可與他概念有別的(註一)。

再者如再分析『無存』(néant)之觀念，卽可見此觀念係由存在之觀念，轉化而來。如謂某物現時不在，卽係認某物曾經存在過，或認其係有存在的可能，然後『某物現時不在』之言始有意義。

由是，故與其視 0 爲一切空類之類。不如解爲等於數量的可能類之類，或解爲數的可能之類。至論理的無，則爲存在的可能之類(La classe de possibilité existentielle)。

而零之觀念，實爲一件數學事實的函數，故不能用零去解數學的事實。至文明人講自然數纚，卽擧零數爲起點，亦無影響零數對於他數之相倚關係。例如在 3004 中之兩零數，一則指十位數之存在，一則指百位數之存在。故無論在何處，零數總是表述

(註一)參看 A. Reymond: Logique et mathematique, p. 171.

有數的存在之可能。

如此看法，吾人卽可免除許多困難，因視零數與其他之數有同一的實在性，卽不得不視零爲空無外延；但實含有一定之內包。

由是眞與妄之間的包攝式，亦可消失其謬處，如新邏輯派所述者。此式並非解爲『妄包攝一切且包攝眞』，乃謂『妄包攝一切，且包攝眞的可能』。

總之羅素之誤，在想能將整數下一純粹基數之界說，然後用基數界說，去構造一序數之理論。不知基數解爲諸類之類是不完全的。雖由此界說，可察出『一年中之月數，耶穌之門徒數，黃道十二宮……等』之類，具有一公同特性（卽含等量的原素），但欲由此公同特性產生出數之觀念，尙須加上答覆有多寡之分配額。如是卽須假定所欲計數之原素，係排列成秩序的。

如僅注意到由一一相對的關係所形成多數之觀念，將僅覺得 $A.B.C.$……等各種集合體有等量的原素，而其他集合體如 $M.\ N.\ P.$……等亦有等量的原素。不過前者與後者不同。欲得出基數之觀念，卽當將各種多數按由小至大之秩序排列之。

斯伯(Spaier)分析得好，求出一一相對的關係，亦是一很複雜的手續，須假定組成集合之各項是有一定序列的。若無一定的序列，則一一相對的關係，卽將爲不可思議，且不可控制。『不可

思議，因不能指出各項之先後而思維之；不可控制，因不知能否將其全部攝取』(註一)。

反之，秩序之觀念，則包含有集合體或總集之意。故說到序數，即不能不想到基數的評定。

如是，如能注意到原素之分配額，或其排列之位序，而有時從其基數方面觀之，有時又從其序數方面觀之，則『數即是一複雜觀念，同時包含有序數的原素及基數的原素在』(註二)。

故數學知識之最簡單的基礎，不是一單純的自由的事件之總集，而是許多複合概念綜合而成，由複雜經驗中引導得之。

收集活動（同時含有選擇及聚積之意）及列序活動，皆先假定有已聚積及序列之事件在。基數與序數皆同時包含有經驗的事實，及思想的法則在。

在此條件中，即不能接受弗勒格(Frege)的界說，謂『基數F 即是概念之外延，等於 F 之數目』。例如基數 2，不能即謂爲『成雙成對』一概念之外延。羅素說得好，邏輯的組成一概念的外延之物，例如成雙成對之概念，乃是一切成雙成對之無數總集，並非由其特性『二』構成。

(註一)參看 Spaier, La penseé et la quantitè, p. 79 et p. 180.

(註二)參看 Id. ibid., p. 89.

不過羅素所擬之界說，亦不完全，已如前述。毋寧如斯伯之主張謂『凡數乃是許多等量的類之基形(type)可由枚舉計算諸等量類中之一類所含之項數而定之』(註一)，

或謂欲得數之觀念，不必借助於由枚舉其各項以成立之一標準類(une classe-étalon)。例如在英國吾人可斷定爲丈夫之數，適等於爲妻子之數，無須枚舉夫與婦之數爲若干。實則此說尚未見適當。如數的知識僅如此，吾人亦僅得知其相等，並不知其基數之多寡。故數學與邏輯實有區別。

且似乎數學與邏輯之分，質的類與量的類之分，又可連續解決對立命題之問題。

卽在一切質的類中(如人，巨象……等類)只有多寡之量(如一個，幾個，多數……全體……)，而無一定之數時，則全稱命題 A. E 卽是些設言命題(如前述『凡人皆死』一命題，應爲「如 x 是人，則 x 有死」)。此兩全稱命題之價值與 I,O 兩特稱命題不同。因 I,O 二者，在斷定一事實是可能加以證實或否是也。而一事實只能證實一眞的假說，但不能無謬誤的去證實一錯的假說。結果在對立命題表中，如矛盾命題 AO 與 EI，及等差命題 AI 與 EO，將含有『眞』值及『謬』值。而全反與偏反

(註一)參看 Spaier: La pensée et la quantitè, p. 186

（AE 與 IO）則僅有眞值及妄值，因其同指述同類的事實（全反命題 AE 是假說，偏反命題 IO 則指述可證實的事實）。

至數量的類則更複雜。當數量的類有一爲有限總集的項數，則『全體』與『毫無』，及『有幾種』與『無幾種』之相對亦永存在，如舊邏輯中所述者。例如云『由 1 到 20 之一切整數皆是素數』及『由 1 到 20 中有幾種整數不是素數』之相對是。但當項數爲無限時，舊邏輯中的對當關係，亦能同樣的存在。因縱在此情形中，全稱命題亦與特稱有同等之價值，只須在構成『一切全體』之各項所成之級數中，一項與其次一項之差，不小於 $\varepsilon(<\varepsilon)$ 或不大於 $N(>N)$ 卽可。

如連續兩項之差消失則突然出現之新項，卽改變特性，而對立關係對此等新項，除『謬』值外，將不含其他，如布魯維所述者是。例如有時許多整數與原始單位相比，見其彼此不分，此時之整數卽失其爲素數與否之特質，因其可被任何數劈分也。於是卽不能應用二者居一之輪選式以定何數是素數或不是素數。

故在應用對立命題表時，應分三種不同之範圍去研究。卽在眞，妄及謬三種值中，每一種範圍，皆含有兩值，但無論在何種範圍，排中律及矛盾律皆不可少。

第三節　數的無限

數學的無限是一極困難問題。假設有自然數之纚於此，或由直覺得之，或由羅素所說類的觀念及邏輯演式成立之。

論理，如將自然數纚 0, 1, 2, 3……等之首幾項立出，則其餘各項亦卽隨之列出，而事實上能否用枚舉法達到目的，可以不管，因爲此級數是能成立的。似此級數應有一末項，不過此末項是不能得到，因爲沒有 N 爲末項，尙可加 1 於 N 上而得出另一新項，此新項亦能合理的存在。此種矛盾，可以下式表之，一方表出自然數纚構成之全體，一方又見每一數之後卽常有一繼數在：

$$(0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots\cdots N\cdots\cdots)$$

依羅素，此式不僅可容一數，卽容無限之數，亦無矛盾，只須在無限總集之場合中，有眞實的存在。此存在之說法，卽構成無限之公理(l'Axiome de l'infini)，其有效不能由邏輯觀點證明之或否定之。現設自然數（或整數）卽爲歸納數，且設無限之公理是眞的，則吾人之假說，卽無異謂如 n 爲一任何歸納數，而 N 不等於 $n+1$，因按班洛之說，兩歸納數無相同之繼數。

旣然如此，試看一切歸納數之類，依基數之普通界說，謂數者乃是與歸納之類相似之一切類之類。但此數並非歸納數之一，

因如 n 是任何一個歸納數，則由 0 數至n數之數目(包含 0 與 n) 爲 $n+1$。結果是歸納數之總和大於 N，而無論此歸納數N 爲何，且只要此總和是無限，則此總和卽有反射之特性（Proprieté d'etre reflectif），換言之，與其任何一部分有相同之冪數。例如在無限時，偶數之總集與整數之總集，有相同之冪數。

依羅素如不用無限之公設，卽不能證明反射是無限總集之特性。凡關於一總集之數，常假定有無數個體之存在，以構造此總集。羅素謂初看此種似不顯明，且由 n 數之個體起，卽可隨意構造任何大之數，甚至達到無限大。

設如世界只有一員個體，此存在之個體，我可用思想假定其不存在，於是卽有兩類（0 類與 1 類）爲思想之對象。先分觀此兩種類，然後又再合視其全體，於是又得四個新的類之類，卽：0;1;0,1;1,0; 卽可得 $4=2^2$。用產生 4 之同樣手續，又可得出 16 類之類（卽 16 之數），且可如此推下去。但實言之 2, 4, 16,⋯⋯等數是不存在的，是與零數相當，因依所假設，只有一員個體在。

如是則羅素所說無限數之問題可如下。如宇宙含有一個由許多原素合成的歸納數 N，吾人可用之構成無數類之類之類⋯⋯，而得出隨心所欲大的數。但由此法所得者，僅是數學的不定，並非是無限數。故吾人無權說到一切歸納數的類，如欲論之，卽

當假定有無限個體之存在。

大家知道羅素『算理』一書中，其原始命題確定後，各定理卽可連絡如貫珠的推出。吾人之注意點，不在批評其演繹之謹嚴性，僅在問是否此種數學邏輯建築物之結構，眞以羅素繼承康托所宣傳數的無限實在論(Le réalisme arithométiquement infiniste)爲基礎。

吾人以爲如此的實在論，不惟不必要，反引出許多晦塞難解之處，而吾人卽欲指出羅素認爲可以證明無理數爲合法之原理，卽足以建立超限數(les nombres transfinis)；不過有一條件，卽單位之功用，應視爲有時是可劈分的，有時是不可劈分的，而他方面又視爲與其他之數同，同時有定序數與基數之功能。

康托欲建立出超限數，遂利用兩原理，一爲造形原理(formation)，一爲超越原理(transcendance)。

用第一原理及連接加上單位，卽可造出整數之自然數纙，其有機的總集，再用第二原理，卽被一新數（卽第一超限數）超越過。此第一超限數之基數形，可用 $\aleph$（讀爲阿爾發 Aleph)表之，而序數形則用 w 表之。在有限數中，基數之特性與序數之特性，是連合爲一的，而在超限數中，則基數與序數分開，因得:

$$1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots n\cdots\cdots\begin{cases}\aleph\ (\text{基數})\\ w\ (\text{序數})\end{cases}$$

在此超限基數$\aleph$上加 1 或減 1，或加任何一有限數 n，$\aleph$仍不變，即

$$\aleph-1=\aleph+1=\aleph+n=\aleph$$

且凡一切總集之有 $\aleph$ 數者，其部分與其全體可有相同之冪數，即是說，其部分中之原素與其全體中之原素，有一一相對的關係(La correspondance unique et reciproque)。故部分與全體有同一之 $\aleph$ 數，例如偶數之總集，與整數之總集相等，自基數觀之，毫無區別。

至於序數 w，卽不能有 $w-1$. 不過由造形原理可以得出 $w+1, w+2\cdots\cdots w+r\cdots\cdots$一級數，再由第二原理（超越原理）卽可得出 $2w$。

如此不停的構造下去，自基數觀點，卽可得出一串的冪數，(尤其是第二次冪數爲有趣，因其可代表連續)。而自序數觀點，卽得出超限序數(ordinanx transfinis) 的一連續不斷之級數。

不過在超限序數之研究中，余曾由純粹算術的立場，批評康托所立超限數說，謂其誤解單位在其造形作用中之功用。爲闡明此功用，余曾指出在整數之構造中，單位同時有定序數及定基

數之能力(註一)。

實則下列級數

$$1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots n,\ n+1\cdots\cdots$$

如研究一數與其前一數之比例，即可得出

$$\frac{2}{1}=2\qquad \frac{3}{2}=1\frac{1}{2};\qquad \frac{4}{3}=1\frac{1}{3}\cdots\cdots$$

卽可見選出的原始單位的加和能力，比所構造的連續數，是逐漸減少的。且如考察下式

$$\frac{N+1}{N}=1\qquad \text{或}\ N+1=N$$

此 N 數可視爲單位的一新基形，卽超限單位(l'unité transfinie)。此單位是可劈分的，因其由未劈分的原始單位重複增加而成。但此未劈分的原始單位，比之超限單位，卽失其定基數之能力，而備有零數的功用。不過原始單位尙保存一序數的意義，而 $w+1,\ w+2\cdots\cdots$ 等，可解爲在自然數纙中指示第一原素，第二原素等曾被移至末尾者，且視爲代表序數不同的級數。

$$2,\ 3,\ 4\cdots\cdots\cdots\cdots w,\ 1$$

$$1,\ 3,\ 4\cdots\cdots\cdots\cdots w,\ 2$$

反之，繼續立出 $w+1,\ w+2\cdots\cdots$ 等，吾人不能達到第二超

(註一)參看 Revue de Metap. et de Morale, 1917, p. 693

限序數($2w$)，因為原始單位不再具有定基數之能力。

此種理論，在昔似覺正確，現則不能全令人滿意。欲其有效，須$\frac{1}{n}$眞等於零。今如原始單位看為不可劈分，即保有一定量的絕對值，則阻止達於極限者，即可用以得到新的超越單位，而此新超越單位，仍為一不可終達之理想。在此等條件中，w 僅是一符號，可總成下式：

$$(1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\cdots\cdots \mathrm{n},\ n+1\cdots\cdots)$$

不過我相信尙可由另任一立場以觀此問題，而證超限數之合法。但須視算術的單位，在某一比例下，為不可劈分，但在他一比例下則可分。即自序數觀之，單位常視為一不可分之全體，但自基數觀之，有時觀其本身則為不可分，有時視為某種評價手續之結果，則為可分。

在此點上，吾人全贊同斯拍之見，謂『一切觀念，如能代入以一與此觀念相等之總集，則為可分』。既然如此『謂數的單位(或1)為可分，即謂可代入以等量的數值』(註一)。如例將$\frac{1}{4}$連加四次之和，仍等於1是也。

如由此觀點考察吾人所稱被選出的原始單位定基數的能力之手續，即可見到此種手續，無異在每一階段創造一單位，此單

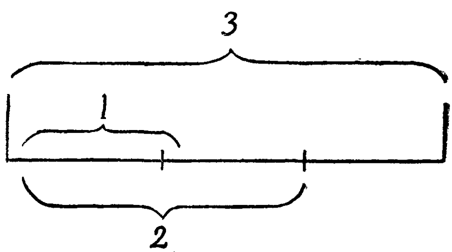
(註一) A. Spaier, Pensée et quantité, p. 139.

位之本身是不可分，而爲造成此單位之原始單位之函數時，則爲可分。

實則下列的連續比例：

$$\frac{2}{1}=2,\quad \frac{3}{2}=1\frac{1}{2}\cdots\cdots\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\cdots\cdots$$

係謂 2 可看爲含有兩原始單位之單位，3 爲含有三原始單位之單位，但如視 2 爲單位，則 3 僅爲含一個半原始單位之單位，同理可推下去，可用圖表之。



當 n 愈大，則由 $\frac{n+1}{n}$ 所得之單位，亦比之原始單位漸漸加大，且變爲超限單位時，則原始單位卽變爲量的極限節 (Segment-limite de grandeur)，卽是說變爲最小量。但此極限節亦是相對的，而爲超限單位之函數，故不能包含一絕對量在。

如觀察原始單位，不再由其所產生之繼數與其和加的關係中看，而僅視其本身爲可分，卽可一見而知，此爲吾人所能做者。

因此單位具有一種定基數之能力，且必有一定之量。故結果吾人爲建立整數，因而賦之以不可分之性質，僅是相對的，不能有一絕對的特性。

如單位是可劈分，吾人卽可將$\frac{1}{n}$之除法，直推至最小量，且比ε爲最小，且可反過來得出下列級數：

$\varepsilon,\ 2\varepsilon\cdots\cdots n\varepsilon\cdots\cdots 1$

至 ε 之數量，可得界說如下：

$\cdots\cdots\frac{1}{n}\cdots\cdots>\varepsilon>0$

ε 並不等於0，因其尙是最小量，不似零數，爲純粹數的可能之符號。他方面，ε 又不等於$\frac{1}{n}$，因在$\frac{1}{n}$以後，總常有一數如$\frac{1}{n+1}$是。故 ε 是可能的數與實現的數之間的極限，縱不能賦予之以一絕對的量。

故構造整數之基礎的單位，可視爲級數之極限：

$\varepsilon,\ 2\varepsilon\cdots\cdots n\varepsilon\cdots\cdots 1$。

而可見到ε對此單位所表現之功用，與此單位對於第一超限單位所表現之功用同。

因爲 ε 爲現實的數及可能的數兩者間之極限，一有限數 n 乘 ε，仍不將 1 改變，而可得出下表：

$1+\varepsilon=1 \qquad \aleph+1=\aleph$

$1+n\varepsilon=1 \qquad \aleph+n=\aleph$

（當 n 爲任何一有限數）

$1^2=1 \qquad \aleph^2=\aleph$

$2^1>1 \qquad 2^{\aleph}>\aleph$

故用1以造出序數之纙，亦如用超限單位然，實顯而易見。實則 ε 既係量的極限，即具有數的實在性，不停的與 1 相加，其極限即爲 2。如

$1+\varepsilon,\ 1+2\varepsilon\cdots\cdots1+n\varepsilon,\cdots\cdots2$

同理吾人可得出：

$w+1,\ w+2,\cdots\cdots w+v.\cdots\cdots2w$

人可對於整數之纙作同樣的推理與運算，與超限數同。

例如單位 1 爲可劈分，包含有一總集的項數。此總集可分爲與其本身等值（即有同樣次數）的部分，如

$\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\cdots\cdots n\varepsilon\cdots\cdots$

$2\varepsilon,\ 4\varepsilon,\ 6\varepsilon,\cdots\cdots2n\varepsilon\cdots\cdots$

$3\varepsilon,\ 5\varepsilon,\ 7\varepsilon,\cdots\cdots(2n+1)\varepsilon\cdots\cdots$

可見自然數有自反性質(Reflectif)，其推理恰與超限數同。

他方面，超限數不僅可由 $w+1,\ w+2\cdots\cdots$等佈式得出，並可直接由超限單位之連續加上而得。此時之超限單位，是看成一

整個的，而此演式之結果則爲 w, $2w$……等。故超限數卽是歸納數，與自然數同，無論羅素如何想法，實不能否認。因歸納之特性，是與數之觀念不可分開的。蓋數之觀念，同時是基數又是序數的。眞的，如 $2w$, $3w$……等不是指示一原素之位次，及總集之整數 2.3……等，卽毫無意義。

故自反性與歸納性，不是可以分開的特性，不能分開去狀述某種數而不狀述其他，如果一切單位在某種關係下爲不可分，而在旁的關係爲可分。由是超限單位與整數單位，並無一絕對性，蓋謂此兩種單位分開來看，並無一絕對量可離演式而獨立者。量極限 ε 亦然，就其相對之性質言，亦看爲一可分的單位。反之所謂是嚴格的確定者，乃演算之格式也。

吾人已屢述過，個體，單位，總集，部分……等觀念，都是些函數觀念，其意義常視在一命題中所表現之功用而定。

數之觀念，亦是同樣的複雜，因其係指示不是可以唯一特性釋明的一有機全體。例如初看似覺可能將數分出基數性及序數性，而用一一相對的次數相當關係去解釋基數；但實在此種分別是不可能的。因一一相對的互合關係，是一種演式，須先集合排列始可。若然，數（非是基數）卽不能界說爲一個諸相等類之

類；因此界說一方完全立於一一相對之手續上，他方面又緊將每特殊數之存在，與物類之數相連合。

吾人已述過，羅素以爲類之本身僅有一空幻的存在，類僅指示一特性之爲多數個體原素所公有者，且可用一羣不同的命題函數表示之。而還原公理 (L'axiome de réductibilité) 卽足以將此羣命題函數，化爲唯一最簡而又最明顯之公式。於是類卽表示具有此公式所述特性之一切個體之總集。但還原公理，尙有可疑議之處。惟可確知者，卽在吾人所研究之問題中，等量之性質，不足以明數卽爲諸相等類之類。其故如下。

構成數之總集，有一實在性，爲其本身所固有，足與其所由來一羣不調和之物有別。此卽是些有機的函數的總集，可以增長，成羣，能離現實的或想像的集合體而自劈分。

依此標準，整數卽可見能由單位繼續加上而成，其手續如次。由思想考察一羣含有無限的單位，此等單位用基數觀之，是彼此相等，但用序數觀之，則彼此各別的。由人心將此等單位排爲 1 1 1 1……，成一集合體，然後由此集合體用加法構成一串數，使其各項是相連續的，如 1, 1+1=2, 2+1=3,……是。

如此推下去，可推至所選取的原始單位，已竭其定基數之能力爲止。至此時則一新單位插入（卽超限單位），卽可造成一新

纜數，且可如此不停的推下去，用一相反之法，如吾人所述，所選取之原始單位可分解爲無限的總集。蓋用低級之單位組成之也。

第四節　論連續

此最後之推論式，能推至康托所稱爲連續之冪數，可以 2ℵ 表之乎？依羅素，此結果可以得到。如承認實有無限的原素在。實則由 n 員構成之類，含有下級類(sous-classes 或譯爲附類) 2^n，卽是說有 2^n 種手續以選取各員。（包有選取一切或無有兩極端在），(註一) 因 2^n 總常比 n 大，且如 n 爲無限大，其結果卽得 2ℵ 代表一冪數高於 ℵ 之冪數，此最高之冪數，卽爲連續之冪數。

但此豈卽爲連續之最後推法乎？須知除羅素所採之法外，尚有他法可以達到。

試取 1 單位爲出發點，將 1 單位自身相加卽得 2。現又視 2 爲一新單位，使其自身再相加，卽得 4。又再將 4 自身相加，如此下去……吾人卽得：

$$1,\ 1+1,\ 2+2,\ 4+4,\ 8+8\cdots\cdots$$

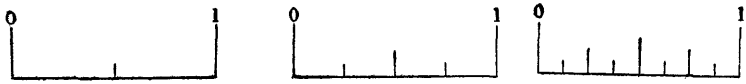
此卽謂：

(註一)參看 Introduction to……, p. 85.

$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4.\cdots\cdots 2^n,\cdots\cdots 2^{\aleph}$

吾人可將之解釋如下。

所選取之原始單位，可分解爲一羣逐漸小的單位，而其總和仍常相等如下圖



於是 2^n 代表多數單位之總和，是常與原始單位 0 1 相等。由此法，連續之羃數卽可表示很好，因 n 無論如何大，其定基數之能力，在下列級數中是常相等。

$1^2,\ 2^2,\cdots\cdots\ 2^n,\ 2^{n+1}\cdots\cdots$

至 $\frac{2^{n+1}}{2^n}$ 之比例數亦常等於 2.

如不將原始單位分爲 2, 4, 8……等單位，而將之分爲 3, 9, 27……，或用普遍的形式，將之分爲 $m,\ m^2,\ m^3$ ……等新單位，其總和仍與原始單位等，卽得下列級數，

$3,\ 3^2,\ \cdots\cdots 3^n\cdots\cdots 3^{\aleph}$

$m,\ m^2,\cdots\cdots m^n\cdots\cdots m^{\aleph}$

於是定基數者，卽各爲 $3,\cdots\cdots m,$ 但不關重要。其重要者，在其常相等。實則對超限單位言，無論 m 爲何數，皆無關係，只須 m 爲有限數卽可。

現在如吾人用 x 代表一變的線節，使在每一次劈分時，代表一新的單位，無論此劈分法爲二分，三分，四分……均可，吾人總常得 $2^n x=1$; $3^n x=1, \cdots\cdots m^n x=1$

由是則得

$$x=\frac{1}{2^n},\quad x=\frac{1}{3^n}\cdots\cdots x=\frac{1}{m^n}$$

如 n 變至與超限單位與 $\aleph$ 相等時，吾人卽可在任何情境下得 $x=\varepsilon$。

故不是只有唯一的方法去表示連續，因有多種劈分法，以達此目的。只須由一級數之一項到他項，此各種劈分法，有一種定基數的權能卽可。此或者卽爲康托不能證出 $2^{\aleph}$ 代表連續的最高冪數之理由。康托畢生求此證法，且因用功過度，損及其健康。

由前推理，卽可考察數學的總集，能自身包含爲原素之問題。

如接受前述僅用冪數之觀念。由一一相對的互合成立者，不足以解一數之基數性質，且在一切數中，無論爲有限數或超限數，基數與序數是常相包攝的，則此問題卽化爲簡單。故同一數可有時自序數方面觀之，可有時自基數方面觀之。

現在如視以數爲原素的一總集，卽可見數在其總數中指示

之總集是基數，可知其爲數『若干』，而取此同一之數當總集之原素看，則爲序數，其意係指第 n 個原素。

例如

總集 $5=(1, 2, 3, 4, 5)$

在括弧中之 5，乃指第五個原素。如無序數之意，則可立出：

總集 $5=(13, 17, 19, 25, 31)$。

此卽謂總集 5 包含有比更大的許多總集。

故問一切超限序數，是否包含其自身爲一原素，是失了意義。因指示總集之數是基數，而括弧中包含原素之數，則爲序數，爲第 n 個原素。

同理，不能說一切超限基數之總集，是本身自包含爲原素。

不過尙可追問是否卽爲不必要而且是矛盾去同時講『一切超限數之總集』。依吾人之意『一切超限數之總集』一語是合法的，只須『總集』一詞，是指由一定造形原理產生出連續項之總體，而不是指與此造形原理無關一堆物之總體。所謂一切超限數之總集，係用以指一種由一定原則產生，而又能聚集於爲數雖無限際，但係有一定的總集中之項數。

此仍忠於數學技術之要求，但並不因此卽認爲有一種無限的唯實論。

對此看法，人固可反對謂尙有一種幾何定量的無限，如許多直線的比例關係（例如正切）可以證之，而與此幾何的無窮相應者則爲數的無限。但此反對，亦僅證實吾人所述數學單位之複雜功用。

實則在幾何的無限中之可決定者，爲一種方向，不是一絕對的位置，可以一次定其數後即可永無變更者。其理由是當在直線之性質中求之。

直線欲在其連續中完全相同不變，須自身包攝，不然，則在直線兩端之點，將成爲例外。直線兩端之點，只有一點相接，而直線上其他各點，則有兩相接點。

於是一直線卽成爲一個圓周。其直徑爲無窮大。在此直線圓周上，一點 A 與其正相反的一點B相對應。而 B 因與 A 相對，卽可在其方向中明白確定。至其位置則不能絕對的確定，因其是變的，是所選定去量圓周長度之單位之函數（註一）。此種單位的功用，卽足以明何以會有各級的無窮小與無窮大，而可證實吾人所說的超限數。

第五節　套套邏輯 (tautologie)

（註一）參看 Reymond, L'infini geometrique et l'intuition.

初看似覺視純粹邏輯所構成的一串命題有套套邏輯的性質為謬誤。但如將肯定，否定，和稱……等式立出，且視眞與妄為不能加以界說的觀念，即可看一切邏輯法則，是具有套套邏輯的特性的。妄是可以眞的否定代替的。例如『2加2為5是妄』一語，恰可以『2加2為5並不是眞』一語表之。

邏輯論式，無論如何雜多，常是述唯一事件：即眞理是，而由諸論式所產生之法則，即可稱為套套邏輯，雖說各式有一不同的意義，由於眞與妄，係按各種不同的論式組織成的。

惟欲如此，即須眞與妄（眞之否定）為兩無可界說之值，視為一不可分析的命題之值。

結果，命題函數之主變項，並不是些實物，如在『x 是一個……』一語中，可以 $\varphi(x)$ 表之，乃是些原子命題 (Proposition atomique) p, q, 如 $f(p,q)$ 中所表示者。在 $f(p, q)$中，函數之值，與變的命題之內容無關，僅依賴於命題眞與妄，此所以此類命題，是稱為眞理的函數 (fonction de Vérité) (註一)。例如命題函數 $f(p, q)$『p與q兩者不是皆眞』，如吾人設 p,q 兩者皆為眞，則此眞理函數將為妄；但如 p 與 q 皆為妄，或有其一為妄，則此眞理函數為眞，可見 f 函數之眞或妄，僅依於p與q之值，

(註一)參看 R. Carnap, Abriss der Logistik. p 5.

與 p,q 之具體意義無關。

既然如此,卽易計算有 n 個變項,或 n 命題眞理函數之數目。如m個物之重複排列數,取2到2排列之則得 m^2; 如取 3 到 3 排列之則得 m^3, 如此下去。如吾人所論之數爲 2, 卽 V (眞)及 F (妄)兩者; 試取 2 至 2, 3 至 3,……排列之卽得出排列數爲 2^2, 3^2……等。例如兩命題 p 與 q 可得四種排列法如下:

p	q
眞	眞
眞	妄
妄	眞
妄	妄

吾人可記其號數爲:

	p.	q
1.	眞	眞
2.	眞	妄
3.	妄	眞
4.	妄	妄

對 n 個命題, 其排列數卽爲 2^n。現在如視用 n 命題爲變項構成可能的眞理函數之排列數爲若干, 卽可見到其數是等於 22^n。

實則用於命題之推理。亦可重複用到函數去。如有眞與妄兩者於此,欲按用n命題以構成眞理函數之重覆法以構成可能的排列,卽當取 2^n 至 2^n, (2^n 者乃 n 命題重複排列之數)。結果眞理函數的可能數,卽爲22^n。

例如僅取一命題 p 爲主變項,此 p 係含2排列數,(爲 2) 卽

p 與 $-p$。

則可能的眞理函數，卽爲 2^{2^1}（卽4）而可表示之如下：

如以 p 表示眞值 $\begin{cases} p\text{爲眞是眞的} \\ -p\text{爲妄亦是眞的} \\ p\text{與}-p\text{皆眞爲妄} \\ p\text{或}-p\text{爲眞是眞的。} \end{cases}$

如取兩命題 p, q，吾人卽得出 2^2 排列數，結果卽得 2^{2^2}，卽16個可能眞理函數。此16函數中，試取$f(-pq)$，$f(p.-q)$等函數觀之，每函數中所含命題之前，有『－』記號者，卽對於一切排列皆爲妄，至命題之前無記號者，可輪流表示眞或妄的功用。將構成此函數之排列與 p, q 命題之基型排列比較之，以 V 代表排列相同的函數值，以 F 代表排列不相同的函數值，卽可得下表：

	p	q	$f(-p,q)$		值	$f(p.-q)$		值	$f(-p,-q)$		值
1	V	V	F	V	F	V	F	F	F	F	F
2	V	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F
3	F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	F
4	F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V

故在函數$(-p, q)$中，第三及第四始眞，至在函數$(p,-q)$中，第二及第四始眞，函數$(-p\ -q)$中，惟第四始眞。

再看函數(p 或 q)表示二者必有一眞，並非是選立式則得下列三者爲眞：

1. VV　2. VF.　3. FV.

惟第四種是妄，且與假說相反。

最後再考察更複雜之交替函數（卽二者必有一眞之函數）

f〔($-p$及$-q$)或(p或q)〕.

卽得下表：

1. VV　2. VF.　3. FV.　4. FF.

此處四者皆眞，且可見函數亦有常常眞之特性，無論其變項之值爲何。在此類套套邏輯中，函數的眞，不依於命題之意義，亦不依於命題眞或妄。

試用卡拉勃 (R. Carnap)（註一）所舉之例以明之。設有命題之一集合之，『此時此地天雨或天降雪』此陳述中確告吾人以少許事實，因其排除某事，僅容他一事可以發生。在理論上則有四種可能。1. 天下雨又降雪。2. 天雨但不降雪。3. 天不雨但降雪。4.天不雨又不降雪。由此四者中，而上列之陳述，則排除第四種，僅視其他三者有可能性。反之，如仍注意第四種，則必發表一套套邏輯，因吾人對於事實方面毫無所知，又不能說『此時此地

（註一）參看 Erkenntniss, I, p. 22.

天雨或天不雨』。故套套邏輯是空無內容的，對於事實是毫無所指，其結果依卡拉勃一切邏輯化的玄學，皆應當拋棄，因無一演繹由形式邏輯推出者，能告吾人以事實當爲何種也。

由是，如視邏輯與數學相同，則一切數學命題將化爲一純粹套套邏輯的連貫，而物理科學與博物學等之具有一種數學形式者，亦將同化爲一套套邏輯的連貫。

如數學邏輯之法則及演式，皆由配合簡單命題而成，此等簡單命題，每個都是一不可分析的整個，且其惟一特性，只是眞或妄，則數學與邏輯之相同，卽甚明顯。但此等法則與演式，卽能說明構成數學所需要之物乎？依吾人上面所述者，卽見其不可能也。

且可追問：一切邏輯的結構，欲令人能理解之，是否卽不先假定有一事實之存在？或至少亦能不假定有如布朗雪維克所述外界的判斷（jugements d'extériorité）及內界的判斷（jugements d'intériorité）之相對乎？

實則一切邏輯演式（如和，積，選立式……等），皆假定其所組合之原素（卽命題），都是些性質各別的原素。所謂許多原素，如 p,q,r……等命題，謂其性質各別者，卽謂此等命題所陳述

者，彼此不同，或係陳述性質各別之物，或係陳述同一物體之不同方面。故命題的某種內蘊意義，卽當由邏輯演式假定其存在，此點卽禁止將眞與妄視爲無可界說者，視爲與一命題陳述之內容無關者。故吾人覺得套套邏輯之價值，應加以限制。

對此嚴重問題，亦如對化數學入邏輯之問題，羅素之主張，似略有改進。在其初之著述中，是極肯定的。及至其『數理哲學導論』之結論，則肯定之語氣已減輕。他認爲問題之所在，在集中於形式之分析。

就此觀點看，原子命題 (Proposition atomigue)，卽可加以分析。原子命題，只表述一單獨之事，但一單獨之事，亦是爲極複雜的，或爲一主題與其特性之關係，（如云：拿破崙是個野心家），或爲二三位主題之彼此關係，（如云：拿破崙娶若瑟弗爲妻，甲因爲乙女之事而嫉妬丙）。旣然如此，卽可用一形式去表述一原子命題所描述的事實之結構。

當許多原子命題是用許多接續詞如『或，及，除非，如果……等』。將之集合，卽成爲分子命題 (Proposition moleculaire)。例如云『如天雨，我卽帶傘』吾人於此卽得一種關係，可以本身獨立存在，與所說之事實能實現與否無關。此種關係，可用本身有內在的眞理之式子表之（如 p. 則 q），此式是異於

一原子命題的。

三段論式者，則代表一種本身明白的形式在邏輯方面與在數學方面皆宜，而其眞確性與現實世界中之事實無關。其式爲『如某事具有某特性，且如具有此特性之事又具他特性，則某事亦必具他特性』。

人亦能更推遠些去構造一科學爲純粹數學邏輯之形式，如吾人所直接證知爲常常眞或有時眞之形式，而可將『常常』及『有時』二者任意掉換乎？

依羅素之意，欲達此，即當構造一堆符號，可將思想之結合關係表明，而與尋常詳述思想的語言文字無關，有類乎代數之記號與演式。例如解一個二次方程式之公式，是與用中文，用英文或用法文無關。此公式又與其應用之對象，爲連續的量（直線，平面），抑爲其他之物（如兵數，酒瓶數等）皆無關係。純正數學家，可不知其所發明之公式可以用至何處。同理，邏輯家對其所闡明表述思想形式的結構圖案，只知其自身有永久價值，不問其可應用之實在爲何。因此形式或邏輯常値，可以完全解明數學，故數學即帶有附於純正邏輯法則的套套邏輯特性，且使數學可離其應用而獨立存在。

羅素之辯雖似可以服人，但他對於其全部效力仍存懷疑。他

說『雖然一切邏輯命題（或數學命題）可完全用邏輯常項及變項表述之，但並不是反之如此表示的一切命題，皆是合邏輯的。吾人於此對數學命題只得到一種必要的準繩但並不是充足的準繩』（註一）

無限的公理，即爲數學命題之一例，此公理雖是可以用邏輯名詞表之，但對邏輯並不卽認爲眞。實則單用矛盾律，並不能卽可解決宇宙中之個體是爲一有限數或爲一無限數之問題，因無一種邏輯的必然，可主張宇宙應有一位個體，且主張任何一世界是應該是存在的。欲斷言『n 爲任何大，宇宙中總有一數（個體之數）比n更大』，卽當證明出宇宙中有一有限數之命題爲妄，而此爲吾人尙未做到的。

普遍的說，欲確定此事存在或彼事存在，卽當承認某命題函數是有時眞。例如在上述之情形中，如x代表宇宙中個體的任何一類，而 φ 表示附屬於超限 $\aleph$ 之類，則宇宙中個體之數卽爲無限如 $\varphi(x)$是有時眞。但斷言一個 $\varphi(x)$ 是有時眞，卽係由假設或由諸假說之結論宣言不要求有如下恆常眞的命題函數在『設 p 包攝 q，設 q 包攝 r. 則 p 包攝 r』吾人前已述過，如此同類的命題函數，是離宇宙之存在而獨立的。其結果是，如無宇宙，一

(註一)參看 Introduction to……, p. 202.

切普遍命題亦存在的，至其矛盾命題（即特稱命題）則常爲妄。

試問如此看問題之法，當作何感想？吾人前述套套邏輯之問題時已述過，考察原子命題 p, q, r·····等之惟一事，在假定有某事具多方面的存在，或至少假定有如布朗雪維克所述外界的判斷與內界的判斷之對立在。

更進一層言當考察此等命題不僅在其眞或妄之特性，乃在其具有一種結構，此結構可隨其表述一主題與其特性之關係，或表述諸主題彼此之關係而異。賦予原子命題以同樣的結構，即是宣述事實之存在而視之非是一無定形的連續，乃視爲由不連續的原素組合成，在此等不連續原素中，有各種性質不同之關係在。

試考察分子命題之純粹的結合形式，縱是全稱命題，亦不能由某一定事實抽出，因全稱者，係假設有無數各別的原素組成之一總體在，其結果即假定有一事實之存在是異於一連續的。於是即不能謂無宇宙，一切全稱命題仍是眞的，至稱其矛盾命題爲妄。因在此假說中，一切全稱命題，將與特稱命題，同爲無意義也。

如不欲由存在中加以抽象，（此是不可能），而由宇宙中某一定局去抽象，即無權去討論全稱命題或特稱命題，只能視命題

為不可分析，而命題僅是眞或妄。於是純粹邏輯的惟一公設是如下：『有一個宇宙，人可對之發表一些眞或妄的命題，此等命題係用各種演式（如肯定，否定，……等）組成之。如此公設是必要的，因為眞或妄之觀念，僅就思想的職能地位與某一事件相對而有意義。此思想的職能地位，是含有一定條件的，且在思想中，是含有不可變的形式原理在。(指思想三律言)。不過此種形式原理是無眞無妄可言，僅為一切判斷之條件，而由是又為命題的眞或妄之條件。

人亦欲超越存在而謂命題之一形式是能『常常』眞或『有時』眞(卽是說全稱或特稱)者乎？如是，卽要講到宇宙的結構，而謂宇宙在時間中，是同時具有一與多之性質，及各種各樣之物。則問題乃在問對此雜多現象，能否知其為有限抑為無限，於是數學與邏輯之分，卽可避免。

依吾人之意，不能視邏輯法則有一種套套邏輯的價值，而不將其應用之範圍加以區分。因為套套邏輯之問題，是與眞理問題相混的。對此觀點，羅素曾區分出些範圍之係在互相重疊，且在其內部，同一邏輯法則是常有效的。不過欲達此境，須每次立出一公理，俾邏輯法則在新範圍能夠使用。（詳第五章第三節）

關於套套邏輯亦然。如由命題之結構去抽象以看命題。且僅視爲眞或妄，即可按一定演式而將之配合，此配合得之關係，即指示思想對於未定而又雜多事實的一種職能地位，不然，則立出各種不同的命題如 $p.\ q.\ r$，……等，即爲不可思議。

當命題不再視爲一不可分析的整個，僅視爲有彼此互異的結構，其眞值與妄值卽包攝有變化的事實之存在，即是說此等事實是一堆性質各別的原素而又彼此之間，有些特定關係維繫之。

第一，可看到所謂雜多 (Pluralité)，並無特定的數量，卽由數量的觀點看之，亦僅名詞上略有分別，如『一個，幾個，……全體』等詞是。而他方面又可立出各種質的關係之基型。一朝用此法，將眞實之範圍圈定，可用命題形式表述的眞或妄，卽可分明的定出，且可插入『有時假』『眞』及『恆常假』之觀念。但決不會有『有時眞』，因一永無眞無妄可言的命題函數，卽無異謂此函數是有時眞或有時妄也。

旣然如此，且如以 V 代表眞，以 f 代表有時妄，以 F 代表常常妄，卽可以 V, f, F 值用重覆法構成些排列，且適當的確定眞理之函數，如前對於 V, 與 F 兩值所設的排列一樣，則對 n 個命題函數而成之函數之數，卽將等於。3^{3^n} 欲發見可應用的眞理之

函數，即可用邏輯演式如否定，聯立……等式，而假定在每一演式中有一命題函數是眞，或有時妄，或常常妄，而其他的命題函數則可輪替的接受此等值。由此法，一切邏輯的法則與演式，即保留套套邏輯之特質，但亦惟因思想之職能位置，與一完密決定的事實相對，是曾經解明故也。

吾人尙可推而廣之，考察在此實在中之分子方面及連續方面；即將要用數與演式，去確定雜多之觀念。並將確定數學命題爲眞之限度，即是說不使數學命題成爲無意義，而吾人即能將此等命題造成一串組合，具有套套邏輯之特質，因爲此組合是按同樣的邏輯架格構成的。而排中律，即永是有效的，因只須在數學推理中之各項，不會比定量更大或更小即可。

可見套套邏輯在理論上是對的，因爲邏輯法則與演式，僅注重在將所謂眞，有時妄，及常常妄三者，施以可能的排列。套套邏輯，只在用各種不同的形式去表述同一之事，即表明眞是也。但因所謂『眞』者非他，乃是思想對一定事實所表現的職能位置，如指出命題可確定對象事實至何限度及達於何點，則套套邏輯並未述到。

在此關係下，經驗派及布魯維即很有理由談到數學中的變，因此變是包攝於產生無窮數之演式中。至布魯維之錯，則在視此

變是不可預測的，是任意的，而不知其實被所由出發的數學事實規定也。

他方面，此變不能用如羅素所述的單純邏輯常項之結合闡發之，雖此點在羅素思想中亦曾浮動過。

第八章　自明公理及證理

(Axiomatique et démonstration)

第一節　史的敍述

尋求自明公理及精嚴證法，是數學之要務。吾人研究此問題，先由幾何學着手。其理由有二。其一，由於歷史的次第，其二，由於事實上算術公理，是與數之觀念及邏輯之論式可以相混。

關於幾何學世皆知直至十九世紀之末，始將其所依據的基本觀念之性質確定。

在古代，幾何公理，是與歐克立德所定的命題與定理之陳述法無異。

歐氏開手卽立出許多基本命題，由此等命題，一切幾何結構，始得證明。

此页无页码

此等基本命題有三種，卽名詞或界說，(termes or définitions)公設(postulats)，與公理(axiomes)是也。此三者無論如何求精嚴。終仍未能令人滿意。

其一切界說。總是晦塞不清，因其總在力求不背經驗的原料。例如直線之界說，爲『一線平行臥於其點上』，此界說如不用磨石匠之法說明之，卽爲不可解。因磨石匠欲知所磨之石面平否，法以塗紅粉之尺置於石上，往來試之，如紅粉之迹是連續不斷，則石面卽平，於是所謂直線者，卽爲尺上紅粉所留之迹也。

至於公設與公理之區別尤難明。

謂公理爲本身明白之眞理，但此所謂明白，如何知之，係由感官直覺知之乎？抑係由柏拉圖所講回憶的直覺知之乎？關於此點，歐氏以後之學者，仍思之不輟。

關於公設之性質與公理之性質亦然，布羅克魯(Proclus)欲將其區別，謂公設與公理之分，亦如定理與問題之分。他並謂公理可適用於一切科學，(如相等之公理)，至公設則僅爲幾何學的特殊原理。其他幾何學家，亦欲硏究此兩者之區別，而同奉亞里士多德之說，謂公理者爲本身明白之眞理，公設則僅是經驗的明白。

可知在此情境下，自古卽有人欲將公理旁邊的公設所引起

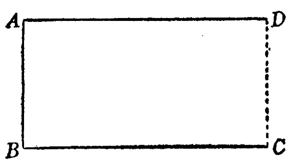
之惡評取消，尤以平行公設爲一大障礙物。

平行公設，僅見歐氏原著第一册第二十九命題中，並不似其他公設公理之重要，似應能加以證明的。

但歐氏之後，繼之者欲證明此公設，皆歸失敗。至近代又有人重新努力於此公設之證明，此因古人已視爲不能加以證明，故近代人欲起而證之，其結果遂引出非歐派幾何學之產生。

吾人於此，僅能歷舉非歐派幾何歷史的概要，以闡明幾何公理之意義。

古代學者，是用直接法以證平行公設而告失敗。薩克利(Saccheri 1732) 則欲用歸謬法 (Par l'absurde) 以證之。他用一個四邊形，使 A D 及 B C 相等，而且平行垂直於 AB，他即研究



如假定 D 及C 角不爲直角，而爲鈍角或銳角，即將有何結果。他指出在此情形中，一個三角形各內角之和，即將大於或小於二直角。以後不久，郎伯 (Lambert) 於一七八六年，研究三角形之面積，亦發見同一樣的結論。他特別指出，如三角形各角之和是小於二直角的；則與球形幾何體之半徑爲虛數時相當。

十九世紀之初，此問題愈普遍的引起世人之注意，但已不

再用直接證法及歸謬法，而欲構造一不用平行公設的幾何學。

羅巴虔維斯基（Lobatschewsky）及波里（Bolyai）與高斯（Gauss），同時指出此種構造爲可能。羅氏特別另用『由直線外一點可引多直線平行於該直線』去代替歐氏的平行公設，於是此俄國幾何學家，卽證出可能由是立出一串完全正確的定理，不過此串定理是異於歐氏幾何的。例如證得三角形各內角之和是小於二直角，其差度適與三角形之面積成正比例。此結果是毫不足異，因爲平行公設已棄而不用了。

一八五一年黎莽(Riemann)又在一著名論文中，將此問題推廣，他視空間爲特別的一種量，而在此空間中研究各種不同的量，須視距離的界說而定。

欲達此目的，黎氏引用兩概念，一爲乘積的概念(Le concept de multiplicité)一爲曲率的概念（Le concept de courbure）。

所謂乘積者，乃一組可以測定的空間原素，此等原素是可用微分形式表示的。例如對一個兩度的空間，此原素之普遍形式卽爲 $ds=\sqrt{dx^2+ay^2}$。加上一度空間，卽加上一微分原素而已。

既然如此，卽可按空間之度數，將可以測量的種種空間之形分類之。

至此卽插入曲率之觀念。欲明此觀念，先研究一線之情形。

除圓以外，如橢圓形，雙曲線等曲線，各在其點上，並無同樣的曲率。在一橢圓形上，在長軸端上之曲率，是比在短軸之端上者爲強。欲計算此等曲率，宜取圓之曲率之愈近於一定點者爲便。

如現在不就一線論而就一面(surface)論，即當如下:

在此面上之一點，而垂直於面切於此點，引出無數之平面(Plans)，此平面在原面上，即定出無限的曲率。在此曲率中，必有其一爲最強，其一爲最弱。此強弱兩曲率之積，即爲原面在某定點上之曲率。

此界說是由高斯(Gauss)立的，黎芬將之由面擴至空間，而考得在三度四度五度…· 等空間中，將遇着有曲率爲常數之空間。在此等空間中之面，即有下列之特點，即一部分可移至他部分上，而無折缺或重疊之處。在一個三度的變化中，只有三種空間有此特質，即爲空間其兩點間之距離如下之公式者。

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{1+\frac{a}{4}(x^2+y^2+z^2)}$$

如 $a=o$，則爲歐克立德。

如 $a=-a$，則爲羅巴庋維斯基。

如 $a=+a$，則爲黎芬。

人或反對羅巴庋維斯基及黎芬之觀點，謂其純爲理論的構

造,並無幾何的直覺關係在。

而在一八六八年,伯屈拉米(Beltrami)指出有歐氏幾何面,(surfaces euclidiennes)(如橢圓的面與雙曲線的面),在其上,非歐派幾何的定理亦可以解釋,而無矛盾之處。

不過在思想上,仍有不便之處。在第一曲率之觀念,如歐努維耶(Renonvier)所述,將引入歐氏圓形及歐氏直線。次則伯屈拉米之解釋,似將非歐派幾何附屬於歐氏幾何,蓋視歐氏幾何為最普遍者。

自是以後,此問題為各方所研究,但所得之結果則相同。

赫門哈慈(Helmholz)首先研究運動之問題,(不問距離之問題),他問空間當如何構造,以使一物體能在其間自由運動,不會自起屈摺,和自起裂縫;換言之不會變形。其研究所得之結果,與黎莽同,即在一個三度空間中僅有三種可能的度量(歐克立德,羅巴虔維斯基及黎莽)。

沙浮李(Sophus Lie)擴充赫門哈慈所研究之範圍,將移位之問題(probleme de deplacement),附屬於換形之問題(probleme de transformation),且他對此問題之研究,極其完全。

勿庸詳其細處,茲且略述其梗概如下。

人可由各種方式,將一幾何形體,變換成他一幾何形體。但

無論所講之換形如何，欲其可能，必保留有一個或多個不變式(invariant)在。

故如將一個三角形變換爲另一個相似三角形，所保留不變者爲其相應角及相應邊長之比$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$。在此對稱式中，是指兩形之角度與長度而言，並非指其方向意義言。

所講之不變式，足爲一羣換形式之特質，而人即可見換形是隨此等不變式之性質而與一移位相當或等值(註一)。例如角度與長度是不變之時。

旣然如此，沙浮李因追問在一定之空間區域中，一切可能移動的基型爲何，而他在此問題上，即發見赫門哈慈與黎莽二人所得之結論。

沙浮李之研究，對於幾何公理，尤特別有意義，因其研究可解明一種幾何學乃在研究一些特性，對於某一羣換形，此等性質即是些不變式。

在沙浮李不久之前，英國數學家克黎(Cayley)由另一方而指出度量幾何學(La géométrie métrigue)，可由投影幾何學誘導而得，對此只須視兩點間之距離爲一種投影特性，是與所稱爲絕對的某一種圓錐形相連的。

(註一)看參 L. Rougier, Ph. geometrigue de Poincaré, p. 70.

克來因(Klein)深感於於沙浮李及克黎之著作，最後更進一步研究出可由增加不變式之數，以構造空間。結果在將換形的可能之羣，加以限制，由是卽創出一漸更完善的幾何學(註一)。

由此等幾何學，於是位置分析學 (L'analyis situs) 卽更簡單。此種分析學在研究一種不定形的連續體 (un continnum amorphe)，在其中惟一切秩序的關係(Les relations de ordre)，及連續的關係，是不改變的。且在其中，是可不顧慮及線之形式或長度。今假設有一線自身摺疊起來，並且無秩序的捲起來，成一不規則之線團，吾人可將此線團，改變形式或將之加長，或將之縮小，只要不將之切斷或接長卽可。由是所得之各種形，對於位置分析學是相等的，因一切連續的關係，及一切鄰接 (contiguïté)的關係，在變換形式之過程中，皆已顧到。

如加新的不變式，卽可得出投影幾何學，在其中有許多直線但並不平行的，且無不變之角度。其中只有一圓錐切線，因爲一種投影換形，可將一橢圓形變成爲抛物線形或雙曲線形。

在連結幾何(La géométrie affine)中，一直線段(un segment rectiligne) 可變成他一直線段，一角可變爲他一角，但線段之長度及角之大小，不是保留不變的。所保留不變者，乃是平

(註一)看參 Rougier, La Philos. geometrique de Poincareé, p. 77.

面之平行關係，及直線之平行關係。他方面圓與橢圓之間，並無差別，不過橢圓形拋物線形及雙曲線形，仍各有別。

最後如在一移位之中，一切圖形，仍毫不改變其形式（如保留角度及長度），卽得出度量幾何學(La géometrie métrique)最能代表構造的空間。

克來因說得好，欲構造一度量幾何學，只須引入克黎所稱的絕對值於投影幾何中，作爲一新的不變式卽可。推廣言之，此不過視爲任何二次式之一面積，堪爲投影空間之限，於是此空間的度量特性，卽變爲一種投影特性，可用此面積或二次有理齊函數(quadrigue)解之。

依所賦予二次有理齊函數之性質，卽可得出各種度量基型，與歐氏羅氏黎氏三種幾何學相應。

當此三種幾何，可由一公同普遍之形式引出時，其相互獨立之情形，卽確能成立。歐氏幾何對於構成二種幾何，已不是必要。於是歐努維耶(Renonvier)之抗議，卽不攻自破。

最後尙有一進步，爲饒龔(Gergonne)於一八一八年發明之成雙原理(principe de dualité)所促成。

依此原理，任取點或取直線爲產生空間之原素皆可，因由兩者所得之命題，皆可彼此互相引伸的。例如

點	直線
由一點可引無窮直線。	在一直線上可引無窮之點。
兩點間可決定一直線。	兩直線可決定一點。

上述各種命題是可相對的離其內容而獨立的。可在最後一例中將命題發表爲函數之形如次:

兩 x 可定一 y,且可任意將點或直線代入 x 與 y 中。

此即爲等量原理(Le principe de equivalence),可隨所選之出發點,由各方面作同一邏輯關係的解釋。

此原理卽被勃普克(Plücker)推廣,他用坐標不僅代表一切點一切直線一切平面,且可代表一切圖形之可隨連續而變爲通弦之函數(fonction des paramètres)。此時所成立之公式,即可用點之關係,直線之關係,平面之關係,或圓之關係以譯成等量的形式。

在此條件後,卽可知用歐氏幾何之語言,以譯釋非歐派幾何之命題,是可能的。反之亦然。

實則可立出兩距離相等之公理,及移位而不變形之公理,然後再用三種不同的線,面,體積,與諸公理相對。每一種之定理,卽可譯成與他二種之定理相當。

至是吾人卽可知一個幾何公理成立之形式及意義矣。

第二節　幾何學公理(L'Axiomatique géométrigue)

幾何公理之研究，在闡明幾何學所需要以構成及發展爲一科學之一切概念之邏輯組織。此在一八八二年莫里慈巴赫 (Moritz Pasch)已明白的立出適於設立此類公理之種種規則，茲約述如下。

(1)先明白的立出一切原始概念。用此等原始概念，卽可邏輯的解說其他。

(2)明白的立出一切基本命題(或公設)。用此等基本命題，卽可邏輯的證明出其他命題(或定理)。此等基本命題，應表述原始概念間的純粹邏輯關係，且應當是能離此等原始概念之具體意義而獨立存在。

下列盎利格斯(Enriquez) 所述之例，卽可明白此兩規則如何應用(註一)。

設已知點線面之一切概念，卽可在平面幾何中立一公設如下：

(註一) Evolution de la logique, p. 117.

『平面上任意兩點，是被一直線連結之者，卽全包含於此平面中』。

現在如視直線與平面爲一些點之類 (classes de points)，吾人卽可將此公設譯成純粹邏輯的附屬 (appartenance) 關係，及包含(inclusion) 關係，而謂『包含在唯一的直線『類』之兩點亦包含在平面『類中』，於是此直線的一切點原素，亦爲平面的原素。

於是點，直線，平面等詞，卽失其幾何直覺的特性，而僅指示些關係界說得之物的類。由此卽可闡明在一張純粹邏輯的上，可繪出各種幾何的圖形。

此卽依巴赫(Pasch)之說而得出的公設與原始概念之意義。

此等公設，尤應滿足下列兩條件：

卽各公設應是相容的(compatible)，不至互相矛盾。例如欲構造歐氏幾何，卽當接受平行公設，不能同時又假定有一公設謂『無有直線合成之圖形』，因此條是與前條不相容的。

其次，不僅各公設應是相容的，且應各自獨立，不能彼此重複兩用。例如旣接受直線之同等一公設，則平行直線之公設卽無用，因後者可由前者推出。

希爾伯(Hilbert) 卽循此法，而將構造幾何學必需之一切公

理，極系統的收集之。

他視此等公理，可分爲五羣：(1)附屬，(2)秩序，(3)長度，(4)平行公設，(5)連續。

在此等公理中，不能視誰比誰更爲根本，因此等公理所要的概念，如分別觀之，是很複雜的。僅能在此五羣公理中選取數種，以構成一系統。且隨所選擇之公理，即可構成各種不同的幾何學，在邏輯上看來皆同一有效。

例如研究由複數$(a+bi)$解說得的量，即可以否認亞幾默得的連續公理，此公理謂一量自身加上無數倍，即可使等於一定量$nA>B$。如吾人否認此公設，而保留其他，即可構成一種非亞幾默得的幾何學。

依希爾伯各種幾何學之能和諧構成，乃由於一切幾何關係，可用分析解之。即是說可用數的關係解之。由推廣算術演式之不矛盾，即可保證幾何關係之不矛盾。

由前所述，可知幾何學取得公理作證之形式，是表現於一寬泛的假設演繹之系統中。(un vaste systeme hypothetico-déductif)

故即無須如古希臘之幾何學家，去將公理與公設分開，而謂公理係本身明白之眞理。只有一些基本命題，視之爲公理或公設，

皆無關係。此等基本命題，實卽是些名詞的界說（Définitions nominales）。這些基本命題中，自有些無可加以界說的原始概念。但基本命題之重要點，不在概念具體的內容，僅在概念間所成立的邏輯關係。

再則此等基本命題，或名詞的界說，是可由其演繹的廣大結論證實之。

在如此一個假設的演繹系統中，形式的眞理，卽得保證。實則在希爾伯的公理羣中，任選取爲數有限的公理，只須其能相容而又能互相獨立，卽可構成一串極和諧的定理。

尙有眞理問題關於構造得的各種幾何學之最後意義亟待研究。

此問題似可歸爲兩項：

(1)在何種意義上，始可謂此等基本命題是眞能獨立的？

(2)如此等基本命題不是各自獨立的，則將其連接之關係，是具有何種性質？此連接關係之基礎，是在一超越感官之直覺中乎？抑是在經驗之事實中？

第一，講到各基本命題之獨立問題，凡邏輯所能爲者，僅在指明一基本命題不是由他一基本命題推出，亦不與他一命題矛

盾。但邏輯則不能指導吾人以應選何種基本命題去構造某種幾何之羣而不構造其他。

此種選擇,則取決於吾人所欲赴之目的,惟目的始能在一切公理間,去建立一種彼善於此的適當關係。

例如希爾伯所定的五羣公理,用以構造歐氏幾何學,這些公理雖有其邏輯的獨立性,仍不免有一底層的結構,爲各公理之公共始源,即歐氏幾何是也。希爾伯將此種幾何之基本分析,看成一整個,始能成立公理之分類, 此種分類一朝闡明, 即能邏輯的本身自足。

同樣, 當克來因在投影幾何之不變式上, 加一新的不變式, 成爲二次有理齊函數之形時,其目的卽在解說空間度量的特性。

至關於幾何基本命題之眞理問題,則是在邏輯眞理之外。

直至上世紀之末,對此問題得出三種解法:

(1)經驗論者,視幾何眞理之直接保證,是在實物之經驗中。

(2)觀念論則反是,謂一切幾何形體的存在是隸屬於一個超感官的世界。一切幾何形體的存在所包含的關係,自可應用到實物世界,但其本身是具有永久眞理的價值。

(3)康德之批評主義, 則謂幾何眞理, 是建基於先驗綜合判斷之上,由空間直覺的一種先驗型式,保證其穩固。

非歐派幾何之成功，即將上三說擲棄，視爲過於簡單。幾何眞理之問題，遂轉向他方面去研究。

許多思想家如羅巴庱維斯基，羅素等，即將此問題分解。

他們以爲有一種普遍的幾何學，其公理是爲一切特殊的幾何學所公用。此項公理，是具有邏輯的眞理，並無直覺的始源。

至於構造一種特殊幾何學所需要補充的公理，是可直接由經驗取得的。

但密羅(G. Milhaud)及其他學者，則謂羅素等所說的普遍幾何學，其構成仍不能不需要些邏輯外的觀念 (notions extra-logigues)，如角，向……等。潘嘉烈(Poincaré)亦謂在實物界中，無一經驗不是能夠將幾何公設直接證明，例如平行公設是。

因有此種困難，故潘嘉烈另倡一解決之說法，謂一切基本命題，僅是些人爲方便(commodité) 而採用的公認規約 (conventions)，其說頗爲一時學者所宗。

視基本命題爲一些公認規約，則一切基本命題，彼此皆是眞實的，於是歐氏公理，即不是一種特殊的眞理。

如吾人採用歐氏幾何，而不採用其他者，則因在實用上，歐氏幾何較爲方便。其理由有二。一、歐氏幾何之理論較爲簡單，二、歐氏幾何對於吾人由感官所知於實際物體之特性，很相適

合。

但此說法雖佳，仍不能令吾人完全滿意。

實則規約與方便等名詞，是由自由選擇之意借來用的，其意極曖昧不清。

例如對公認規約說，人可任意採取某種圖解符號以代表一種聲音如『a』之音，設有 a, α, ℵ 等記號於此，在數種記號中，吾人可選取最方便者，即選取寫與讀皆爲最易者，顧無論所選取之記號爲何，在寫的符號，與符號所代表之音聲兩者之間，並無一種有機的關係。規約與方便，是與所指稱的事物無直接關係的，故不能用以論定眞理之問題。

在幾何學中，知欲以一種空間的質料，去裝飾邏輯的底子上，眞理之問題，即另自不同。

如謂採用歐氏幾何學，是因爲理智的方便，及實驗的方便，此由於在歐氏幾何學中，關於判斷與實在(réel) 之關係，是有一種特殊的位置。如此則規約即不比吾人對一羣稍複雜事實所有之判斷爲更自由。

自吾人觀之，在幾何學中，感覺的事實，與理智的構造，兩者之融合貫通，實比潘嘉烈所說者更爲密切。

吾人視歐氏幾何，爲由感覺界所啓示的一切空間關係之一

種邏輯整理，其整理之法如下：

如潘嘉烈所指的一種變相界說如下：

直線是由一點至他一點之最短徑。

此判斷並不是康德所說的先驗綜合判斷，乃是以用力最小之原則爲據的一全同判斷(Jugement d'identité)。

吾人所呼之直線，乃是在視覺之範圍內，由一點至他一點所需要視力最小之視線。所謂『短徑』乃以最小筋肉所努之力，將手或足，由一點移至他一點之徑。

由此同用最小力之原則，直線與短徑兩者，即在人心中結合不分。於是『直線乃是由一點至他一點之最短徑』一語，即成爲眞理。因爲適合此種需要，於是卽造出歐氏的幾何學。

至欲問物理世界是否卽與此種幾何相合，卽當要同時研究物體的幾何特性，力學特性，及物理特性。

如是，卽可如愛因斯坦(Einstein)所示，謂物理世界之幾何性，是異於歐氏幾何所預測者。而此，則由於構成物理世界內部結構之力場使然。

不過在如此的宇宙中，一切物體之動，常係向阻力最小之線移動。此線卽測地學之線。而此測地學之線，除在某種有限情境外，卽不是歐氏幾何的直線。

故論到歐派與非歐派幾何，和物理世界之關係，其邏輯整理作用之程序，係按尋求同樣不變式之程序，卽用力最小之觀念是，而具體眞理之位置，在各種場合中相同。

如是，則惟吾人所有在物理界中一切經驗之總體，始足指導吾人以此不變式是如何實現，且係用何種形式去實現也。

第三節　幾何的證理 (La Démonstration géométrigue).

附於公理問題之後，卽有數學證理之問題，此問題在近數年，研究愈見困難。此兩問題有相連之關係，是一見而知，因爲證明者（尤其是數學的證明），在證一命題是眞。其法是將此命題附於其他已證爲眞或公認爲眞之命題之後，顯其可由已知爲眞或公認爲眞之命題推出。因此，最後卽尋到一些基本命題（如公理界說等）。

在古代，視此等基本命題係由純淨的空間直覺取得。

此所以數學的證理，總是歸到能用圓規直尺構造之圖形以作證。如此的構造，卽可指出某圖形，或一圖形之某種特性，是可合於直覺的。

例如能證一個兩等邊三角形有兩角相等，卽在將此三角形

剖為兩直角三角形，以明其相等。

故一切新的界說，必定附帶有一問題的討論，以指出所解之對象，是可以構造的。如欲立一個有兩直角的三角形之界說，此界說即毫無價值，因決不能構造出具有兩直角之三角形也。

用直尺圓規以構圖，能使吾人確知在一個定理中，假說是可以成立。即是說所下界說之對象，是眞實的存在。構圖又能指出結論之有效，即是說結論是可能實際構造。

一切幾何的問題，由是遂歸到一問題之討論，即由某旣知圖形，即可構造一新圖形，以符合某旣定條件。

欲達此目的，古時之學者曾用過各種推理方法，約可分為三：

(1)綜合的推理法（即通常的推理法）係由旣知件出發，以推出所求之結論。例如證『凡二等邊三角形有二角等』，即由二等邊三角形出發，直證出其有二等角。

(2)分析的推理法(La raisonnement analytique)則反是，係取所欲證之結論為出發點，以反去追求足以證其為眞之一旣知定理。此法係假定所求之問題，是已解決。如求證二圓至少可有一公切線之例是。

此切線係假定已經求出，僅在指明構圖之目的，在歸到一可

以解決之問題上，即由一旣知點，可引一切線切於一圓是也。

(3)歸謬的推理法(Le raisonnement par l'absurde)，係想像命題所需要之條件是不具足。如由此假說推出謬誤之結論，即可斷言假說之不當，結果所需之條件即得滿足。

設有 T 及 T' 兩三角形，有一邊相等，而接於此等邊之共軛角亦相等，（即兩三角形有二角及二角所夾之一邊相等），今將 T' 置 T 上使相疊合，即可斷言其他各邊亦必相等。不然則與共軛角相等之假設不符，而流入謬誤。

無須再多述，可知古代幾何學家之證題是在用圓規直尺，憑理想去構圖以為證。

自十七世紀後，常有數學的新思想發見，遂將數學證理之範圍，擴充無限。

第一，由於笛冉兒格(Desarques)將幾何學中之點，直線，及平面之看法，投之無限(infini)，於是用圓規直尺構圖之法，即不能用。由此新觀點，遂產生許多新方法。至十九世紀，更增完備，而開出一新局面為古人所未曾夢見。

他方面由笛卡兒(Descartes)創解析幾何，在數與形之關係中，應用變換位置(transposition)之法，如古希臘人所擬想者。於是一幾何圖形，可用一方程式代表之，此方程式可表質與量的

特性。至是即可如布圖阿(P. Boutroux)所述，『由方程式之組合及運算，即可定出曲線之切線及其交切點等。簡言之，凡古代幾何學所研究者，皆能用方程式定出。在古人是用構圖及已知定理以解題，至是則純用代數式處理之』(註一)。

且由解析幾何帶入函數之觀念，後來因微積分之進步，函數之研究，更有驚人之進步。

因此幾何之證理，遂與高等解析法及代數解法相混，證理因是愈難。故潘嘉烈說，在數學中，不能再有所謂可解的題，及不可解的題。『只有多可解或少可解之題，即是說，只有許多解題，產生出多少簡單的計算法，使吾人能多少直接知道所研究之對象，是多少完全而已』。

可知希臘人以爲很好之解題法，在用圓規直尺。後來則以爲很好的解題法，在求出代數式之根。最後則用代數的函數法，或對數的函數法，爲解題之最善法。

而微積分之應用，又將上述各法推翻。不過在定一微分方程式應有之解時，又有其他新困難發生。

潘嘉烈亦曾說，昔人以爲用已知函數之一有限數，去表述解法時，即將視一微分方程式爲已解。不過此僅有百分之一的可

(註一) P. Boutroux: Idéal scientifique des mathematiciens, p. 129.

能。

欲問題少複雜些,數學家即當有步驟,一爲質的步驟,一爲量的步驟。

在質的步驟中,當努力構造出由微分方程式所得出之曲線,且記出其具有特性之一切原素。

至量的步驗,則更困難,未知量是不能用一有限微積分定之,必藉助於一無限斂級數。但一無限斂級數縱在理論上能成立,亦不夠將此問題解決,尙須一收斂性極速級數(une convergence rapide)之具有調和律之特質者。

此兩條件未達到時,數學家是不滿足的,視問題只有多少解決而已。

對數學的各特殊部分亦然,可知數學證理之問題,就其全部而言,至現時實愈趨複雜也。

不過在紛歧之派別中,仍有同一的邏輯程序在。蓋證明者,總常是由立爲假說的某一旣知件,用推理方法,以證明一結論。

因是提出一問題。爲近二十年來討論不息者,吾人欲略述之。

卽三段論式曾被古人視爲數學證理的唯一利器。但在一個

三段論式中，結論是不能超過前提之範圍中的。

而用以構造一種數學之基本命題，爲數是相對的有限。此等有限的基本命題，又必爲三段論式推理之前提。試問三段論式的推理，以有限的基本命題爲大前提，如何能推出各派各支的數學。人不能由精嚴的辨證，即可推得超過前提的結論。

依潘嘉烈，數學之能逐步推陳出新，由於有一種特別的推理呼爲循環的推理(raisonnement par récurrence)。此項推理非他，乃是心力的肯定，知道第一次可由此動作以實現，以後即能將同一動作重覆之，而得出明白的結論。數學家之努力與物理家無異，都是不停的用歸納法，由特例以推出公例。不過數學的歸納法，是稍特別，因其是具有必然性的，是建基於一種思想恆常可能的活動上。

但潘嘉烈之說雖宏深，而其說法仍未能令人滿意。無窮的三段論式，不足以明數學推概之廣博與複雜。例如算術中整數之後，何以即有分數，令人不解。

關於此點，近代邏輯家曾對於潘嘉烈之見，有許多補充。

例如都夫米耶(H. Dufumier)指出數的觀念之推廣，純是機械的，以求維持一切算法(opérations)的絕對普遍意義。

設有整數之纚 1 2 3 4 5 6 7……。

在此纚數上，定出一堆算法（加法減法乘法除法）。

欲將此等算法成立一羣，即當求得一整數以爲結果。

此即如加法與乘法。

$$a+b=c \qquad a\times b=d$$

無論 a 與 b 如何皆可。

但減法則不同。

如 $a<b$ 則不能得 $a-b$。對於除法亦然，必 b 能爲 a 因子，始能得出$\frac{a}{b}=n$ 。

欲減法與除法能推廣，即不能不創出負數與分數。

同樣，由解二次方程式，遂引到創造虛數及複數。

可見純在求維持推廣各種算法，於是算術產生出豐富的原素。

但此種看法，亦可應用於幾何乎？此處即覺有許多意見。

果不羅(Goblot)在現代邏輯家中，爲指出數學證理的舊說爲不充足之第一人。他於一八九八年曾述數學的推理，並不純是由公例推特例。數學之豐富，純由於思想之創造力。蓋『證明者構造之謂』，而『人所構造者，即其所求證之結論』。

此種構造，縱是觀念的，仍可爲實際構造之代替。『邏輯家常是視構圖，僅爲預備推理的補助手續，實則構圖亦是推理。

『因推理並不是可離所推究之對象而獨立的，形式邏輯是絕對的空而無益』(註一)。

魯以耶(Rougier)則反對此看法。他除同意果不羅之說謂演繹法並不是空無結果，乃是能構造新知外，則謂推理常是可離所應用之對象而獨立的。推理之有效，不依於所應用之材料如何，而是依於所取之法式(註二)。

魯以耶欲明其說，以確定新邏輯(La logistique)之意義爲入手。

依其所說，命題之運算，關係之運算，及數之演算所立出之陳述，包含有各種原素如下：

(1)爲存在的公設(postulats d'existence)，肯定所論之對象是存在的。

(2)爲造形原理(principes formateurs)，用一些演式，卽可將所論的對象，變爲新對象。(如乘積的原理，設言三段論式等)。

(3)爲關係的公理(Axiomes de relation)。表示些形式的特性，如對稱傳達性等。

(註一) Goblot: Logique, p. XXIII.

(註二) Rougier: La Structure des théories déductives, p. 14.

可知在此等條件中，是可以用其他觀念去定新觀念的界說。

例如平方，可用乘積原理解說之爲二類（即菱形與矩形）之交截形。此爲一新類，與所由以成立之二類不同。

不過在一切演繹理論中，應當接受一些基本觀念與基本命題，視爲無可界說者。其選定純是規約式的，純是對此或對彼而言，然後判定一命題或一觀念，爲基本不變的。

故一切演繹理論，皆包含有一些無可證明的基本命題，稱爲公理或公設，並包含有一些引伸命題或定理。

一切公式亦如公理，是些存在原理，造形原理，及關係的原理。

如此研究，即是將希爾伯所倡幾何證理之機構闡明。

例如欲證明過一直線及此直線外之一點可引出一平面，但僅能引出一平面。

第一步，卽當視假說爲不矛盾，卽是說一直線 a 與 a 外之一點 C，能極邏輯的存在，此爲假說之一切條件。

欲證此說之成立，可立出一串三段論式，俾可由邏輯構造得之新條件，可附加於假說之條件上。

在上述之例中，其第一個三段論式卽爲：

沒有一直線 a，至少有兩點 A 與 B 是在此直線上。今此直

線 a 是存在的，則有兩點 A 與 B 是在 a 直線上。

可見此三段論式之大前提，爲希爾伯的附屬公理之一，其小前提爲假說之條件，而其結論則爲兩個新條件。

由此最後之結論，與假說的其他條件，又可造出一新三段論式，其大前提將是希爾伯公理的一個，於是結論又可得出新條件。

如此推下去，卽可得出完全的證明。

故在一切證理歷程之中，可分出兩段：

(1)確立假說的邏輯健全性，而發揮出假說所包含的條件。

(2)證明其結論，要用設言三段論式，其大前提是一個造形原理或一個關係的公理，其小前提是由假說所述的條件所得之命題。

由此等情形，最後之結論，卽有新知出現。而果不羅之抗議卽無效。且欲用直覺以明數學演繹之豐富，亦覺不必要。

且依魯以耶之說，足將數學證理之問題，發揮極其明切。但尙未能絕對令人心服。

因關於基本命題之規約特性，其說仍含有曖昧之意，亦如吾人批評規約主義時所述者。

魯以耶之立場，可代表一種演繹理論所向之趨勢與限度，並顯出數學證理之理想基型，其眼光係與希爾伯之於數而上學

(métamathematique)相近。

實則在一數學證理中，決無完全抽去所述內容材料，而僅研究一形式之事。因心中需要多少內容材料以指導演繹推理之活動，始知向某目的前進而不向其他之目的也。

且僅研究形式及造形原理，卽易造出一些假的概推(pseudo-généralisation)。如上述康托的超限數之理論是。

第四節 算術的證理 (La démonstration arithmétigue)

希爾伯之建立幾何公理，係借助於算術，故此再論證明數的各種算法，如何會不矛盾。因在算術上，除邏輯外，卽無其他科學，故惟有借助於邏輯，以立算術之證理。數中之不矛盾，應與在邏輯演式與邏輯觀念中之不矛盾相同。

其理論邏輯大綱(Grundzüge der theoretischen Logik)，卽指示吾人以理論邏輯應當如何，然後能盡其被指定之任務。希爾伯視此種邏輯，是建基於羅素與懷特赫德二人所倡之方法上。

其書第一章，卽陳列簡單命題之演算。卽是說，專論僅含眞或妄之命題。此項演算，是以一組獨立的和諧的無矛盾性的公理爲據。

第二章，卽陳述狹義的函數之演算，在此演算中，一方分出命題與邏輯函數之別，他方面卽指出在此等函數中，可爲變項之事物。此等事物，常爲一可計數的總集。狹義函數之演算，亦如命題之演算，是以一組本身自足毫無矛盾的公理爲依據條件。

第四章，卽論廣義函數之演算，視一切表詞與一切命題，如一些適於表現某特性之物，且在其中存有許多關係。如是，卽可引到研究表詞之表詞，(或稱爲類之類)。數者卽是諸類之一類。於是又引到總集之觀念。總集(l'ensemble)者，可枚舉其原素以定之，或可賦予每一原素以一定表詞以定之。第二種解說總集之法，是較佳，但又引起許多困難。卽同一羣事物可有許多種不同之表詞是。例如相似三角形，可指其爲各角相等，亦可指其爲各邊之比係一定。旣然如此，欲兩表詞係指述同一之總集，須兩表詞有同値(equivalent)。同樣的推理，是可應用於表詞之表詞，與總集之總集。於是所謂數者非他，乃是一旣定總集有同値之一切總集之總集。

但如欲避免一切邏輯的謬誤，卽當確定所稱之事物特性與關係之意義。理想上自以不將之區分爲便，因爲將之區分，卽可無差別的任取一切個體，一切命題，一切函數，或一切函數之函數爲演式之原素。一切表詞將是適於此等原素之一切特性。而此

等特性之本身，又可以爲表詞。可如是再推下去，由是成立之規則，即可有一種普遍的價值。

但依此法做去，即將碰着羅素所述之謬誤，且爲希爾伯曾經明白的陳述之者。此等謬誤由於擴大函數演算之價值時，吾人毫不加分別的應用之於任何思想之對象上，即不分淸個體，特性，關係……等。

如欲免於某種推理的謬誤結論，即須先構造出一基型的等級(une hiérarchie des types)。且在某種情況中，要硏究此等基型分化之級次。

旣然如此，屬於個體的一切原素，即爲 0 級基型。一切特性之屬於此等個體的原素者，則爲第一級基型。且因一類可解說爲一特性之外延，一類即常屬於第一級基型，其原素即屬於 0 級基型。第二級基型，則包含表詞之表詞（即類之類）。如此下推。

同樣的等級，可用至一切函數及一切命題上。類的第一級基型，即與命題函數的第一級相當。即是說與以個體爲變項之函數相當。與第二級基型（即類之類）相當者，則爲第二級命題函數，即是說其變項爲第一級命題函數之函數，（換言之爲第一級之類）……如此下推(註一)。

(註一) R. Carnap. Abriss, p. 21.

如取一切『物體』代表個體，以『四角形』『紅色』代表第一級特性，則『空間性』與『顏色』兩者，即爲第二級特性。

可見『此物體是紅色』與『此物體是四角形』即有一意義在，即是說可爲眞或妄。下數命題云『四角形是有空間性』，及『紅色是顏色』，亦有眞或妄可言。反之，『某物是一空間特性』。及『四角形是紅色』即無意義，即無眞無妄可言。

故在一命題函數 $\varphi!x$ 中，如 φ 代表之特性是屬於第一級(例如紅色)，即只能取一些個體（如棹子樹……等物體）爲變項，如 φ 代表之特性爲第二級，則其變項當爲第一級（如紅色）特性，不能爲個體。不然，即將成一虛空的命題。

不過在同一基型之內部，亦可發生謬誤。此謬誤由於用字，如用『全體』及『世間有』等字，及由於一特性之隨全體原素而變者。例如命題云『一切命題是眞或妄』，試問如何判定此命題之眞值。因其眞或妄是不能離『一切命題』而獨立的。在此『一切命題』中，其眞或妄是列爲一特例，且問題正在研究是否此等命題包含眞或妄兩值也。旣然如此，如 $\varphi(x)$ 係指：x 有『眞或妄』之特性，且如 $\varphi(\hat{x})$ 係指『一切命題是眞或妄』，用此式代入 $\varphi(x)$ 中之 x，即得出 $\varphi\{\varphi(\hat{x})\}$ 一矛盾語，此因未注意在一未定物之總數中，將所應當狀述之一羣劃分淸楚故也。

欲免除此困難,羅素提議用實變項(variables réellss) 與似變項(variables apparentes)之分，將基型之理論加緊密。其說如下（參看第五章第二節）。

在一語如『x是死』之中,x是一實變項,代入以一定之值,卽得出眞命題,（如云:蘇格拉底是死）,或妄的命題,（如云:5是死）。此乃是一低級的命題函數,如其僅指一既定事實之存在與不存在。而他方面此函數又屬於第一級因其僅能包含一員個體或許多個體爲似變項。

再看『x是死是對於x是屬於人類時爲眞』一語，此語可譯爲$\varphi(z)$，或φ代表『有死』。而z代表『人』。此處z卽爲似變項。因爲可能代入z之一切個體，僅爲人類，且在此情形中命題函數可得出常常眞的命題，且表現一簡單命題之功用，與『凡人皆有死』相當。

且可直接用(x)及$(\exists x)$，將x變爲似變項。於是卽得出$(x)\varphi!x$及$(\exists x)\varphi!x$，其意卽謂『一切x皆有φ特性』，及『除一以外，無x有φ特性』或更簡言之爲『凡一切x皆無x特性』因此處講的是總數(totalité)，故赫布郎(Herbrand)提議用$(+x)$及$(-x)$符號，而不用(x)及$(\exists x)$。(參看第五章第二節)。

於是特性φ卽可推廣，而可論到一羣個體之局部或全體。

此種推廣，對同一基型的一切命題函數，是極有法度的，如下。

卽由第一級之模式(matrice)出發，以至一個二個及二個以上之變項。如 $\varphi\hat{x}$, $\psi(\hat{x}, \hat{y})$；由是卽可在一個變項之情形中，如 $\varphi!a$, $\varphi!b\cdots\cdots\varphi!x$ 中取出斷定的命題 (propostions predicative)。

次則爲x換成似變項，以定至少有一個 x 可滿足 $\varphi!x$，於是卽可得出$(\exists x)\varphi!x$ 或$(-x)\varphi!x$。當模式含有兩眞變項 x, y，卽可得一個第一級非斷定的函數 (fonction non prédicative)。若眞變項之一換成似變項，例如$(y)\varphi!(x, y)$及$(\exists y)\varphi!(x, y)$是。此爲非斷定函數，因其肯定有一事是局部的未定。

最後完全的推廣，卽得命題$(x)\varphi!x$。在如是推廣之式子中，x 卽爲似變項；所論者爲個體的總數之屬性，卽一類之屬性。吾人用 $\varphi!\hat{z}$ 指述可能變爲一命題函數之變項之事。不過此一命題函數，將屬於第二級的，因其所有之變項，並不是一切個體，而是屬第一級的一命題函數。

旣然如此，同一基型的一切命題函數，是排列於似變項出現之後，且係按下列規則：『凡講述一總數之命題，是比講構成總數每一員之命題爲高一級。』

在此等條件中，第一級的命題函數，在其一切變項中，不能有一命題函數爲似變項，僅能有指述個體的一切變項。而在此等變項中，其一必爲實變項其餘則可爲似變項，屬於第二級的命題函數，其性質必包含一函數至少屬於第一級，〔（即是說附帶有（……）記號者，或有（$\exists$……）記號者〕爲似變項，其餘之變項中，又必至少有一爲實變項，屬於第一級函數或第二級函數者。

例如 $\varphi!x$ 是屬於第一級的一個函數，則 $(\varphi)f!(\varphi'\hat{z}, x)$ 則爲第二級之一函數帶有實變項 x 者。因第一級函數是似變項也。試取感覺界的具體事物作爲個體，（即普通名詞 x），以爲例，在此等感覺事物中，吾人首先可區別出一總數，例如云一切動物 $(\varphi!\hat{z})$；次在動物中，又區別出含 f 特性（如脊椎）之函數之動物總數；又在脊椎動物中，區別出新的總數爲一切具有 K 特性（如有理性）之脊椎動物，即人類之總數是。

希爾伯謂由級次運算之手續，即可一方取人所遇見的每一命題特性或關係爲判斷之對象，而他方面吾人又可確知不會誤用在『一切命題』之總集或『一切函數』之總集上，因此等語句僅對於用繼續構造而成的級次爲可接受（註一）。

如此看法，即可免除運用『一切』『此間有』等字所引起之

（註一）參考 Grundzüge, p. 100.

謬誤。如『我是說謊者』一語，可解爲『我在 t 時所發表的一切皆爲妄的，但我用以發表此事之基本命題則可爲眞，因其不列入所發的一切命題之範疇中也』。

似乎一切困難，皆可由是解決而實則不然。

例如『全同』(identité)，當解說爲『對於 x 之一切值言，如 $\varphi!x$ 包攝 $\varphi!y$，則 x 與 y 爲全同』。但基型分級之理論，使吾人去研究連續區別出的總數，並不是一切 x 之值的總集。如是，將如何去肯定 x 與 y 之全同，及其全同至何限度。

且由級次運算之選擇，有妨吾人用邏輯運算去表示數學中普通結論之弊。

試舉實數爲例，實數仍形成一有定之範圍，因可分析出存在的命題及總數的命題。故實數當用第一級的表詞解之。此等表詞是彼此等值的，且表示其特性爲笛迭根(Dedekind)的一截痕，在此基礎上，即可定出兩實數之和與積之界說。但如何利用之以證實『對實數之有限總集是有一上限，即是說一實數 a 使屬於有限總集之一切數是 $\leqslant a$，且如其是 $<a$，即至少被所說總集之數超過？吾人不能發表同樣的陳述而不用第一級表詞的存在符號 $(\exists x)$ 及總數符號 (x) 於代表一限之表詞界說中，此即引吾人達到屬於第二級一個表詞，而此表詞已不再代表一實數。

欲避開此難關，卽當引用還原公理(Axiome de réductibilité)，視表詞的任一組合式或任一選立式是常與唯一的表詞爲同值。卽是說一切函數之可表示於級次之運算中者，能用與之相當的一表詞的函數構成之，致屬於第 n 級的一表詞，可歸到與之相當的屬於第一級的一表詞。例如上述之例，將上限解說的表詞，是屬於第二級，但此表詞是可化到第一級的一個表詞。而表示一實數。同理『全同』卽可解說爲『x的每一特性應爲 y 的特性，換言之，如 $\varphi!x$ 是眞，則 $\varphi!y$ 亦爲眞』。

但希爾伯亦謂還原公理，並無用符號運算所發表的其他演繹規則之明白。且其應用並不完全眞確的證明其正當。因爲一切特性與關係之堪爲演式之出發點者，是可自由選擇的。欲認其爲正當，應在每既定之場合中，將原始函數之系統補完全。而如此的結果，卽不能用構造法達到的因。按定義，在第一級中除加式，乘式，包攝式，否定式，總和式及存在之肯定外，並無其他可能的演式。

惟一可能之點，乃是假定第一級的基本表詞，可構成一整個的旣知件，其雜多性(diversité)不依於其界說，亦不依於有將其解說之可能性。在此情境中，只須注意到第一級函數之同一基型，而其次的區分卽消失。由羅素的觀念，只可注意取其基型之

分法,(如一切個體,一切個體之特性,一切特性之特性……等)。此種區分,是以意義之行列爲基礎的。

依希爾伯寧將還原之公理放棄,且因欲得精嚴的獨立自足的一種公式,即當僅取原素之爲個體者及其表詞,或總和之演式及存在之演式。如此,即無一新表詞插入,因求總和須限於闡明一表詞之與個體的一切表詞有關係者。

如是,即不再去研究語言形式上之謬誤,及語言造句結構之謬誤。

希爾伯由是構造其數而上學 (métamathématique), 卽是說專研究數學推理之本身。此種研究,在建立一『陰影的王國』,卽是說在尋一羣未定之物,其特性亦爲未定者。既得之後,卽可在其上產生許多命題。但全用符號表示之。其出發點及運算之手續是任意定的。但一朝既定之後,卽可得出一切形式。此時純爲一種符號的游戲。因爲由原始既知件,只研究其可以構成某種形式之能力。而人所構成之新形式非他,僅是由他一觀點研究的原始關係。故其系統是如同形的結晶體。使其規則完全無誤,其結果毫不矛盾。

現在如應用此運算於講有定物之命題上,(如數學之公理),卽可見到在已知公理之一體系中命題是否矛盾。

今試據赫布郎（Herbrand）之著述，以更進一步分析此問題。依他說邏輯的理論或純正數學，乃是一種嚴格實證及完全精確的方法，不過此方法是禁談知識論的（此或即其哲學上的缺點處）(註一)。

所謂某命題在具有某種公理之理論中，能得證明之問題，乃是用一種符號語言之一切記號研究之，且可用數學的形式研究之，此爲決裁問題，(Entscheidungsproblem)。（法文爲 Probleme de determination，決定眞妄之意）爲數學中最普遍問題，而希爾伯已指明其在某特殊情形中爲可能完全解決者。

布魯維學派，則力隔開一切理論之帶有無限元素，及不絕對講事物或函數之爲一有限數者。希爾伯完全接受此哨令，視其在證理問題中，必可得出形式的結論。但此結果是爲布魯維所拋棄。

例如就算術之一切公理觀之，由此等公理出發，按照羅素的推理規則，即可得出布魯維所拋棄的推理。但如憑直覺能精嚴的證明，不至引出矛盾，（即是說不可同時證得一定理及與此定理相反之結論），則布魯維之批評，即陷於妄。如是即引到研究算術公理的不矛盾，分析學公理的不矛盾，以至總集論的公理的不

(註一) Annales de l'université de Paris, 1931. p 186.

矛盾。（在總集論中可研究選擇的公理之不矛盾）……，這些都是一定的數學問題。

此等問題，當能在不矛盾之立場上得解決，因爲數學的存在非他，卽不矛盾是。

由是決裁問題 (l'Entscheidungsproblem) 之最普遍情形，卽可常常歸到一系公理的不矛盾問題。如在一理論中，能同時證出一命題 P 之眞及妄，則此理論卽爲矛盾。如能證出 P 是眞或 P 是妄，則此理論卽稱爲完全。如不能決定 P 是眞或是妄，則此理論卽爲不完全。

旣然如此，欲證明一理論不是矛盾，卽當發見一特性 A，在所說之理論中，爲一切眞的命題之特幟，且其存在能在每特例中，指明出來。且此特性，應當是：如 P 具有之，則非 P 卽不能具有之。『如是卽不能構造出推理是可同時證出一命題 P 及其否定非 P。因決不能 P 與非 P 同時具有此特性 A，這是可以證實的』(註一)。

反之，如吾人欲證明一理論是矛盾，卽當尋出一命題 P，可於其中同時證出 P 與非 P。至欲證明一理論是完全的，卽當尋出一法，足以證出 P，或證出非 P。

(註一) Revue de Metaphysiques et de Morale, 1930, p. 250.

吾人於是又有許多方法，足以使吾人確知一定理爲矛盾與否，及爲完全與否。

既然如此，茲將赫布郎確定此問題之方式列述如下(註一)。

一切數學命題，可用少數符號之配合以譯述之。此等符號之配合，係按少數簡單規則（推理之法則）去實施。

所用之符號(signes)，可約分爲三類。即 $\vee$,$-$,$(\exists x)$三者是。『$\vee$』爲或者之意，『$-$』爲否定之意，$(\exists x)$爲有一x存在之意。

此等記號配合之法則 (les lois de combinaison) 約有二種，其一種指述某幾種配合是些命題，其他一種則指述由已知成爲命題的某幾種符號之配合出發，即可造成其他亦成爲命題之配合。

至推理之法則(lois du raisonnement),在一切數學理論之內部，可化爲少數簡單之法則，亦約分爲兩種。

其一種，指述某些命題被視爲眞。

其他一種，則指述可由某被認爲眞之命題，演繹出其他亦被視爲眞之命題。

今假定由這些記號的規則，及推理的規則，即可譯出一切命

(註一) Recherches sur la théorie de la démonstration, Introduction, p. 1–7.

題，及一切數學證理，於是卽可就記號之系統本身研究之，且利用之以尋求在一定理論中，是否一旣知件可爲眞，卽易見惟一適用之法，乃是迴環法(La méthade de récurrence)。所謂迴環法者，乃指推理的一種方式，可以一步一步的確切進展是也。

例如在一理論中，欲證一命題是眞，卽是說欲證其有特性A，卽須確知開始被視爲眞之一切命題，皆具有所說之特性；次則指出符號每一新的配合（或命題）由此等原始命題演繹出者，亦具有所述之特性。

『此迴環法停在有限之中，可有一種直覺的眞確，卽最嚴密的心思，亦不能加以否認。因一推理係以迴環法爲據者，僅是敍述在每一特例中之演式，用手推演，亦可證實特性A，對於一切證理之結論，係譯述於吾人所構造的符號中者，皆具有之。

如是看法，迴環法卽可由三方面去應用之。

(1)用在命題之構造上。

(2)用在命題之證明上。

(3)用在以一命題爲據，而此一命題係屬於一串命題，其中每個係用一定演式，由其前一個推演而得者。

在此種普遍的觀察之後，赫布郎卽進而陳述其論文中之主題，約可分爲三部分。

在第一部分中，他發表一組應用的符號，及造成符號的一切規則。繼則指出一命題常可列爲選立式之形，（簡單命題之積之和）。或爲聯立式之形（簡單命題之和之積）。最後則指出他所採用的規則之系統，是與羅素的系統相當。

第二部分則指出如何構造符號的系統，與一數學理論相應，並附述對於一特別簡單理論（即與舊算術之開端相應之理論）之應用。

第三部分，則考察建立一命題爲眞之必需的而且是充足的條件，且研究推廣或詳分一命題函數之進展的一切規則。繼則述到赫布郎所視爲基本定理之證法，即『考察在某種對象上建立的一系公理，假定能造出一種實現此系公理之法，即是說能造出表現此系公理爲眞之一總集事物，利用由各種關係及各種函數得出之適當界說以爲助。則前論之定理，即可指出此系公理無一處會矛盾。但須將之譯成能滿足推理的直覺規則之一形式中，且僅能用語言記號的一切特性』（註一）。

此定理有許多的應用。稍加以限制。即可證出算術的一切公理之不矛盾，且可指出『推理的一切規則之系統，是可澈底改變的，但仍與其本身等值。此所以三段論式之規則，爲亞氏邏輯之

（註一）J. Herbrand: Annales……, p. 189.

基礎，在任何種數學推理中，卽爲無用』。此定理最後又可將『決裁問題』化入一卓越之形式中，卽『在算術函數上之一問題，僅是梯荷坊德方程式(Équations diophantiennes)之解法問題之一推廣。由是數而上學上的一切問題皆可算術化』。

『故一定理在一理論中是否爲眞』一問題，是等於純粹算術的一問題。於是卽有下列之疑問，『或者一無限推廣之問題可包含一答案，或者有不可解的算術問題在』，例如有梯荷坊德方程式，人不能證明其爲無解，而當每次欲證實是否整數之一系統可爲其一解，卻又發覺一否定之答案。許多數學卽頗爲此種輪選式所困擾。最近硏究之結果，似乎可想惟第二種有實現之可能，卽將是一個非常廣播的觀念之破產』。

在此等條件中，名詞的數學意義，及其數而上學意義間的區別，依赫布郎卽可解爲『當從事做(faire)一種數學推理時，卽可用第一種。當講(parler)數學推理時，卽可用第二種。如是卽易將關於迴環推理之問題闡明，如排中之問題，(在數學之意義中，排中者乃在一推理中，能用以證一命題是眞或是妄。在數而上學之意義中，則指在一理論中能常常證得，如不用此定理時，卽得出此定理之反面)。如可能構造的對象之問題，(問設有一總集在，能否將其排列是，此爲一數而上學的問題；如問『有一排列

成序之活動在』一命題是否爲眞，則屬於數學問題）。如鮑萊兒(Borel)在可用有定數的字，去解說事物上所發表的謬誤問題，(此謬誤由於在一數而上學問題中，應用數學推理之不正當)。……且須記取數而上學推理之研究，可供給吾人以一新理論。且各種基型的數而上學之次第，又可推至無窮的』(註一)。

可見希爾伯及赫布郎之努力，在將數學推理離其對象而獨立發展，以期更看得清是否某特性是適於某對象。或由其對象引出不能忽視其所用方法之積極價值，如其極富於變化性，而又同時極其精嚴是也。

在使用此法中，最著目之處，爲其將三段論式略去不用。不過如此略去是可以解說的，因三段論式如建基於包攝式上，而依羅素及尼哥之所見(前第五章第一節)，包攝式是能由作爲原始式的不相容式推出，故包攝式對一切推理，並非是不可少的，且可用選立式及聯立式代替之。例如吾人可不必說『凡人皆有死，彼得是人，故彼得有死』，而說或者蘇格拉底柏拉圖之死是妄；或者，不是妄，則彼得是有死』。

故欲證明一眞的命題具有特性 A 時，包攝式之規則卽爲無用。此時可用之推理規則，約爲：過渡的一切規則(Les règles de

(註一) J. Herbrand Recherches sur……, p. 6.

passage)，用此規則可立出二者居一之論式，且可斷言謂如『一切 x 滿足 φ』爲妄，卽至少有一 x 在，不會滿足 φ。且反之亦然。次爲概推的兩規則 (les deux règles de généralisation)（爲關於將實變項改成似變項者）。再次爲廣義的簡化規則（La règle de simplification gènéralisée)，按此規則，在一命題之內部，用 P 代替 $P \vee P$，卽可得出一新的眞命題。

如是則包攝式之規則卽消失，而無此類時，且可避免許多困難，而爲在用迴環法作證時所遇見者。不過此規則在有假說的一切數學理論中尙是必要。

至對於無限域(le champs infinis)，吾人卽不必討論其合法性，因其用於純正數學之理論中，僅講到可計數的無限（Des infinités dénombrables)。『赫布郎會說，可見吾人在無限域中所述之一切推理，能用可計數的總集上所有之推理以譯述之於數學中』。

不過對此問題，排中之使用法，似有保留之點在。赫爾布郎說，『排中律謂設有一命題 P 於此，或 P 爲眞，或 P 是妄；卽是說『P 或非 P』在一切理論中是一眞的命題……，但其結果並不卽是 P 爲可證明的或非 P 爲可證明的，此理論可是不完全的。換言之，P 及非 P 皆不是眞，亦是可能的，不過在一理論中，可繼

續假定 P 爲眞，及 P 爲妄。吾人於是可得出兩種極明白的排中意義，其一純爲數學的，可以『P 或非 P』是全等以譯述之。其他則爲數而上學的，在追問一理論是否是完全的』。

此種區分，令吾人感覺不便，因爲『其結果並不卽是 P 爲可證明的，或非 P 爲可證明的』一語，含有曖昧不清之意義。

所謂可證明的，係指『直至現在尙未能證明，但將來會有一日能將之證明乎』？抑謂『就問題之本性論，是永不能加以證明乎』？在第一種情形中，P 及非 P 二者必居其一之勢是整個存在的，但不能假定可能有 P 旣不是眞，非 P 亦不是眞。在第二種情形中，P 實在是未定。但於是卽不能必謂或 P 是眞，或非 P 是眞，因 P 及非 P 二者必居其一之勢，是不可思議的。吾人於前討論未來變化之性質時已見之。

排中律之眞義，似應如下：當缺乏實際的證理時，吾人常有不能決定眞與妄二者孰當屬於 P。不過吾人尙能宣稱二者居一之情形，仍保有其眞理，且當維持至使命題 P 在理論中，仍有一定之意義。試再取上述之例（第六章第四節），如命題是講數的項數，而各項又極分別淸楚，則命題卽有眞或有假，縱然未能實際加以證明。但如各項之差比一旣知量爲尤小，則命題卽失其意義，而流爲謬(absurde)，因其無眞亦無妄可言，故不能假定其爲

眞或爲假。

在此等條件中，排中律在數而上學中之用法，似當作如下解：當一命題 P 不能實際的證出，則其問題可表述爲：或者『P 謬』，或者『P 眞或妄』。不僅此二者居一之邏輯價值仍保留，且可決定此兩種假說孰可成立。因爲命題 P 爲謬之範圍，是可技術的劃淸，而數學家可將 $<\varepsilon$ 及 $>N$ 指示出數之位置也。

『P 謬』及『P 眞或妄』二者必居其一之情形如解決，則設『P 不謬』，卽可斷定出『P 眞或妄』，縱吾人不能尋出一證法（如布魯維所說者）以證出是 P 爲眞，抑是非 P 爲眞。

吾人不相信數學推理的邏輯，是能與數學家所用之符號技術完全分開，且能與此技術所研究之對象分開，因一技術的作用，是與其所作用之材料密切相連的。故一切數學的理論，如包含論到數量的一命題，而又不在 $<\varepsilon$ 及 $>N$ 之兩極限間，則依界說，此理論是不完全的。但此點並無妨於接受在數而上學中布魯維所拋棄的推理云：2^n+1 對 n 爲某價時是一素數或不是一素數，只須 $n+1$ 及 n 之差不比 ε 爲小卽可。（參觀第六章第四節）

第九章　結論

亞氏邏輯之構成，在將詭辯的推理所喜弄的曖昧名詞解決。此邏輯初受斯多噶派之攻擊，文藝復興後，又爲學者斥爲無用的遊戲，有礙思想的發明創新。至近代始愈將理智活動之進展過程闡明。至是，問題之要點，乃在追問是否有永久不變之原理，足以確定理智進展之結構，而無傷於其發展之一切形式。

由研究判斷之性質，吾人得到下列之結論：即一方旣知各判斷之相倚關係(interdépendance)，他方旣知由於不絕的與一種有效經驗接觸，可將判斷修改，則可知決無一種眞理，其公式是不可加以觸犯的；至多，在判斷之範圍，亦能述其趨向(Orientation)。如無命題能絕對離其他命題之關係而獨立，則眞理的一切條件，即永爲相對的。

所謂眞者，僅用判斷之活動，且僅在判斷之活動中。對於人

類始有意義。判斷係常假定在作判斷的思想，及刺激思想的事象之間，常有一種區別。刺激思想的事實，無論係先由思想無意中產生，然後由思想將之顯現，抑或爲思想以外之物，不過能爲思想融化，但兩者皆表現與致思的『我』稍有別。

既然如此，則眞理之位置，係包含一種心理歷程，先爲判斷之起草，繼爲一種斷定的態度，表現於一稱爲眞的命題中，以陳述是與非。所謂一命題之本身爲眞，並非謂此命題過去曾存在，且將來無論何時皆存在於宇宙中，僅謂一切有思想之人類遇見事象當前，其理性能強之視爲眞理。

故眞理之條件，在此立場中，可有兩種，一方面爲思想之基本，他方面則爲實在。此等條件，僅爲眞理之源泉，其本身並無眞或妄可言。因惟兩種條件相連合，始足以產生出判斷，然後發表出一眞或妄的判斷。眞理之本性，乃是兩種條件互合而成的。

思想之一切基本，一方面爲價值，及價值之對立性(opposition)，他方面則爲同一律，矛盾律及排中律。

故一切判斷，皆是同時是存在的判斷，與價值的判斷。而由此觀點，始可將吾人所述將一價判斷與兩價判斷分淸，兩種皆是存在的。不消說如果價值之辨識，與價值之對立性，構成思想活動非此不可的一種條件，則評價所依據之一切規範，即將隨思想

擴大其範圍時而變形。

例如在有史以前，一價的東西，如幾何形，係以各種感覺印像（如圓角度大或小……等）爲惟一的規範。而笛卡兒則反之，視幾何形與代數式合一。此所以一曲線如小鏈條（Chaînette）卽不能列入幾何之中。此種對立，至萊不尼慈創出微積分，始將之消除。同理，如果眞與妄之對立，善與惡之對立，美與醜之對立，在一切民族初有意識時卽覺察之，則指述此種對立之規範，卽會隨時代而改變。

至就思想律言，如同一律則要求一名詞一命題或一推理，在用思想分析其與其他名詞其他命題或其他推理如何相通連貫時，須能與其本身前後相同。

此種相通連貫之可能性，係假定所比較的一切原素，在某幾點上是相同，但同時在其他關係上又相異。其結果是科學的智慧所尋求之同一，是帶有空間性的。此點已爲滿演生闡明之。如時間之概念，運動之概念，及變數之概念是。如然，則科學所努力的異中求同，卽越過純粹的空間性，而解爲一種函數的求同，係用數量以表述性質不同之變化位置。

不矛盾律，可規定最簡單的思想活動。尋常之語言雖不連貫，但思想則力求避免矛盾，以達連貫。不過思想所活動之範圍是

極差異的（如個人的情緒，感觸，神秘的啓示，科學的事實等）。

至講到排中律，吾人希望其表現之形式價值，能與其他兩律相同。如講到謬與妄之別，（第六章第四節已講到此問題吾人將再述之）用排中律以分開『謬的範圍』，及『不謬之範圍』實爲必要。

故人類思想活動之本身，實賦有同一律，矛盾律及排中律，與生俱來，不能視爲一種規約。各律是互相規定的，不能分開。惟對於一個毫不會錯的智慧，其一切思維活動皆可確能得到一種毫無差誤的直覺，庶可不要此三律。但就人類的思想言，是常易發生錯誤的，故思想三律，缺一不可。

既然如此，眞理即可解說爲思想對一定事象取得的一種函數位置，即是說，眞理是包攝兩重的相通連貫，即一方包攝思想自身之連貫，他方包攝思想與事實相通連貫，換言之即眞理爲思想與事實之一種參照融合也。

一朝證實此兩重函數關係後，苟欲再追問其存在之理由，換言之，苟欲再問何以含有如此作用的思想，及能如此融化於思想之事實，此則惟有歸之於神造。

但無論如何，人類之精神活動，是賦有自由的，而又能發生錯誤。則所謂『眞』即不能視爲實際存在之物，而當視爲此實際

存在物之函數。因其不僅包含有不實際存在者，作為一種負的條件，以達於一眞判斷，且包含有可能之範圍，為正的條件。

故眞，妄，及可能，三者，皆可列入眞理之範圍，但名義不同。『眞』指述思想對一旣知件所得的惟一函數位置，而對此同一旣知件，尙有各種的思想函數位置，與妄及可能相應，（『妄，』例如 2×2 不為 5, 6, 7……；『可能』，例如 $2\times x$ 為 4 或為 6 或為 8……視 x 為何值而定）。

舊邏輯並未忽視關係之存在，惟偏重事實現象之靜的方面，及概念的不連續功用。新邏輯則能恰如其分的指明事實的相倚關係，及判斷的相倚關係。

其結果，不當取概念為邏輯演式之出發點。而當以簡單的基本命題為出發點，此基本命題係表述一有定事實，事實之形雖簡單，但係由複雜環境產生者。一概念實不能獨立自足立於其所產生之判斷之外，反之一判斷亦不能離其所連合之概念而能自表現。

為記述此種複雜性質，吾人曾提議將概念解為在質與量兩重關係下，是一函數的不變式。且為符此名義，概念是具外延及內包之特性。不過尙須注意者，量可有兩方面：一方面，量可指未定的數，而可用些邏輯常項表示之，如：一個，幾個，許多，全體等

詞是。或反之，量是指一定的數，或顯明的確定，或是暗中確定。故可將類分爲量的類及質的類兩種。例如 2 之爲數，解爲諸類之類時，則與其他概念同，是以一未定的多數爲外延，即一切成雙成對者是。反之『整數』之類，則暗中有一定之數爲其外延。又如黃道之記號，耶穌門徒，其爲數皆係明白的確定（明白確定爲十二）。

普通的說，一概念視其所伴隨之名詞爲何種，及所列之語句爲意如何，而異其功用。故一概念不能專指抽象，亦不能專指具體，更不能專指一個體，一類，或一關係。其功用之變化多方，由於其特性是一函數的不變式，同時表示量與質兩面。如在『蘇格拉底有弟子爲柏拉圖』一語中，蘇格拉底指一實有的個體，即是說指一函數的不變式其外延爲唯一之個體，且係見於某時某地者。但如『歷代以來如蘇格拉底一流人則甚少』一語中之蘇格拉底則代表一類，蓋指與蘇格拉底之道德思想相同之一流人也。再如云『蘇格拉底之卓絕處，在其能與各種不同之人類作哲學的對話』，此時之蘇格拉底一概念，則指一特殊關係。一切個體，類，及關係之概念，對於實在之了解認識皆爲不可少。且對於同一事實，其類，個體，與關係，皆是必要，只看其所研究者爲何方面而定，

故自實體學 (ontologie) 觀之，在實在之中，實有少許特性能與吾人所稱之個體，種類，或關係相應。不過此非吾人思想之力，能在每一特殊事實中，定其絕對一定之位置。例如一位先知，譬如猶太先知伊塞 (Isaïe)，自有一顯著的人格。但在此人格之中，如何將其眞自有者，與受之於外圍影響者，加以區別？且此對於邏輯，亦少重要，只須將思想所取爲個體，種，類，或關係之一切原素，立爲演式卽足。邏輯在每特例中，是不管包攝於概念與判斷之函數性質中之最後實體眞義之區分爲何也。

由前所述，似可將三段論式之意義闡明。勿庸再述其功用是可爲控制詭辯之工具，或爲證法之簡式，今只研究其是否爲一切推理之必要法式。

滿演生歷述許多新邏輯家對此問題作否定之答覆後（註一），指出無論何種三段論式，如同時就內包與外延兩面作解，仍爲思想之一工具。因思想不能不用三段論式以別實在之異與同也。不過在滿演生之證明中，尙可分別出兩原素，卽一種使三段論式成爲可能之公設，一爲三段論式推理之本身。

此兩種原素中，惟公設一種爲必要。因無論如何，一切推理，係同時假定在所研究之一切事實間，必有一種異與同之點存在。

（註一）Du cheminement de la Pensée, p. 734.

如無之，則思想卽不能展其論式，縱極簡之論式，如兩命題p與q之聯立或選立，亦不能實施。（蓋兩命題p與q之聯立或選立，卽謂考察兩事是否同時發生；卽是說在時間中是否有關係是也）。

故滿演生謂三段論式，不能不用思想肯定物之公性(Propriétés communes)是存在的，實有至理。大前提者，卽無差別的將一切表現有兩種公性互相包攝的事實包含有之，於是如果一事實具有此兩公性之一種（卽小前提），則亦必具有其他之一公性（結論）。

至謂三段論式之推理爲思想惟一可能之論式則大誤，尙可用更簡之論式代替之。如名詞之聯合與枚舉是。滿演生所闡明的必要處，仍可永存。如名詞之枚舉，最後得出一結論，乃因此等名詞具一種公性，可供思想將之結成一羣視爲在某一關係下是相同。卽 $\varphi(x)$ 一語，亦須假定有一特性，可爲許多個體所公有也。

雖然，新邏輯在邏輯範圍中，指出思想的函數方面，有其偉績，但其所受之批評仍未消散。滿演生說得好，此等批評頗有根據，比新邏輯派於方法旣無公同之見，於其邏輯之眞義亦無一致之結論者，尤爲有據（註一）不過滿演生又說，雖批評者甚多，但

（註一） Du cheminement de la Pensée, p. 735.

並不因此卽謂新邏輯爲空幻，吾人應贊成其觀點立場。

自吾人觀之，欲明此派邏輯之眞義，須將其結構與其用法分淸。用法者，在將數學變爲邏輯的基本概念與簡式，吾人則以爲其結構之價值是可離其用法而獨立的。其結構之價值，是表現在所選立之出發點中，（所選者爲命題並非概念），又表現於羅素所引用之一切觀念中，如關係之運算，及命題函數是。

關係之運算，可將一顯著之缺點彌縫，因其可將一切表詞判斷(les jugements prédicatifs)與關係判斷分別。表詞判斷者，在明一孤立事實賦有之一切特性。關係判斷 (les jugements de relations) 則指述兩個以上事實之一切公性。不過此種分別並不是絕對的，因一切判斷是表詞判斷，同時又是關係判斷。如云『彼得是善人』此乃指明屬於彼得的一種態度，但同時亦假定有一種公性爲他人所同有，因尙有具此公性之他人在，吾人始能得出『好人』之觀念也。至無條件性僅可啓示出純屬表詞的判斷，因未將無條件性與其他事物或與其本身發生關係，此等判斷卽顯出其爲自成原因，但此項表詞，則非吾人思想力所能發表者。

尙有許多判斷，帶出具有一種特別性質之關係，卽謂明白的指出在所述主題之外，另有一主題在，若無之則判斷卽爲不完全

者。例如『彼得是比保羅大』在彼得與保羅間的大小關係一旦定出。余卽並知彼得有若干大，保羅有若干大。既然如此，則關係的判斷，（此卽其所以異於表詞的判斷之處）常可以用換位法變成其他之關係命題。例如『彼得是比保羅大』可變爲『保羅是比彼得小』。一種關係，常能倒換，乃一甚重要之事，尤其在數學中。而新邏輯發明此種判斷，實將邏輯領域加豐不少。

至命題函數，用以確定邏輯中的程式(modalité)問題，尤有大用。因其一方面可別出『眞』與『妄』，指出與眞相對應者爲實在；他方面又可區別出空虛的或『謬的』，指其係在『實在』與『可能』之外者。羅素說，依舊邏輯之觀點在一切眞的命題之間，一部分命題是必然的，而其他則爲偶然的。又在一切妄的命題之間，有一部分是不可能的，（卽其必爲矛盾者），其他則僅爲不眞的。但仍不能看出必然之觀念所加於眞理觀念之上者爲何。

而在命題函數之中，此三分法卽甚明白。設(x)是某一命題函數中之一未定値，如函數是常常眞的，則(x)卽爲必然的。如函數是有時眞，則(x)爲可能的。如函數是永不爲眞，則(x)爲不可能的（註一）。故函數可確定出變項之一定範圍。與此範圍相對，

（註一）Introduction to……, p. 165.

且視 x 之值爲何，即可得出上述三種例之一。

如是則討論排中律之用法，即有一確定之意義。如在『謬』的意義所述之非眞亦非妄，可證明如下：設『x 是山東省內之一山』一命題，如以『泰山』代入 x 則所得之命題卽眞。但如以『華山』代入x，卽得一妄的命題。因山東境內並無『華山』，但此命題仍不是『謬』，因華山確是一山。至如云『我的鉛筆是山東境內之山』卽爲謬的命題，完全無眞無妄可言，因其已越出函數所定之範圍毫無意義可言也。

至舊邏輯，則仍用同一之名詞以指述妄，如謂妄爲一可能實現而實際又不實現者，且爲永不實現的一種不可能者，因其爲謬故。新邏輯則將此兩觀念分得極清楚，能指出兩者之範圍。可見問題之全部皆歸到界說之一問題，且上面所述之看法是正當的，如視無眞無妄乃是指尙未判斷過之事，或指因其爲謬永不會判斷到之事。

但吾人已說過，排中律之形式價值，是不能因爲有此種區分而動搖的。因此在兩相續之時間中，此律首先在決定一命題是謬與否，如其不謬，卽進而判定其爲眞或爲妄。

命題函數與符號邏輯之其他好處，在能將附麗於語句上的曖昧之意理淸。如『法國現時的皇帝不是禿頭者』一語，其曖昧

不淸，卽由於其否定之意，可就命題之全體言，亦可就其主詞與表詞之關係言。就第一層說，此語是眞。就第二層說此語是毫無意義，因爲現時法國並無皇帝也。新邏輯派用一種適當的符號卽能將此兩層意義分得淸楚。

由前述各點，吾人卽可起草一本邏輯概論之綱要如次。

第一，如果在一切邏輯演式中，將述有定的數量與述無定的數量之論式加以區別，視爲合法，則採函數邏輯 (logique fonctionnelle) 之名詞，是比新邏輯 (Logistique) 之名詞爲佳。因 Logistique 一名詞，太過於令人想到一種數目的原素之運算觀念，而依其近來所用之符號計算看來，Logistique 之演式，實論一些不似數目一樣精確的問題。

且如吾人所論套套邏輯之眞義倘確切，則思想在活動時，是決不能離卻一定對象的。結果是與其將邏輯分爲形式邏輯與應用邏輯，不如稱之爲普遍的函數邏輯，及特殊的函數邏輯之爲佳（詳第七章第五節）。

如是，則邏輯之開端，卽當確定眞理問題，與心理學及形而上學之關係，由此始可引到闡明眞理之兩項條件。

次則由不相容式出發，卽可取一切簡單命題 p. r. q……

（不取概念）爲出發點，以解說一切基本的邏輯演式在此等演式中，即可指出由簡單命題構成之三段論式。

在解說命題函數之先，應將概念深加研究，尤當注重個體的，類的，及關係的一切觀念，對於某一事件所表現之功用。

繼則研究命題函數之常常眞與有時眞者。並研究三段論式之解釋，指出其大前提中『全體』二字之意。依全體二字之各種意義，即可指出大前提之眞義與小前提不同。以後即可解釋對立命題表。

此後即可論到主詞及表詞爲未定之命題。而在級次之等差中，只須注意到：如一命題函數是以個體原素爲變項者，則此函數即不能取與個體相對之類爲變項。

至新邏輯(Logistique)可僅在將數學化爲一些邏輯演式及邏輯常項，則已是一種特殊的函數邏輯。此應用的新範圍，並不至將排中律棄而不用。

實則關於『無限』與『連續』之討論，吾人以爲完全由於不知數學中單位之複雜功用所致。

如果數學之最後根本，是純粹不連續的，則單位以及一切有限的整數，即能合於弗勒格及羅素之界說，而視爲一種簡單的特性，爲一切不連續原素所賦有，且無論各不連續原素，貌似彼

此不同，而實則全同。但連續之性質，是可任意將其剖分，在每選定之剖分法中，能使單位仍具有一定之量，能使單位成爲不可剖分者。

由是，則必須引用既定的最小量及最大量，以合於數學家技術上的要求。此技術自然要一最後原素定爲絕對值，但是永不能將此絕對值顯示之。因爲此絕對原素（最後之單位）之量，是隨所選定剖分之方式而變者。

此或者即爲新邏輯派不能化數學歸於邏輯之一種最深理由，至少在此派發展至現時之情況中，是有如此之限制。

此页空白

重要參考書目

DES PRINCIPAUX OUVRAGES

A CONSULTER (1)

I. Histoire de la logique et problème de vérité.

C. Prantl: *Geschichte der Logik im Abendlande*, 4 vol. 1850-70.—Th. Ziehen: *Lehrbuch der Logik*, VIII-866, Bonn,1920 (voir pages 1-240).—J. Jörgensen: *A treatise of formal logic*······Copenhague et Londres, 3 vol, 1931 (voir pages 1-145 du vol. I).- F. Enriquez: *Evolution de la logique*, Chiron, 1926.— A. -T. Shearman: *The development of symbolic logics.* University of London, 1906.- C. -I. Lewis: *Survey of symbolic Logic.* Berkeley, 1918 (avec bibliographie complète jusqu'en 1917).- P. Her-

(1)Sauf indication contraire ces ouvrages ont été publies à Paris —Abréviations: RMM *Revue de Metaphysique et de Morale*; RP *Revue philosophique.*

此页无页码

mant et A. van de Waele: *Les principales theories de la logique contemporaine*, Alcan, 1909.

L. Robin: *La pensée grecque*, Bibl. de synthèse hist., 1923.—E. Bréhier: *Histoire de la philosophie* Alcan, tomes I et II, 1926-32.—D. Parodi: *La philosophie contemporaine en France.* Alcan, 3e édition.—Platon: édition "les Belles Lettres", *Théétète* et *Parménide.* par A Diès, Le Banquet, par L. Robin (voir également G. Rodier: *Les mathématiques et la dialectique de Platon* dans *"Etudes de philosophie grecque"* Vrin, 1926.—L. Brunschvicg: *Le progrès de la conscience……*, p. 17-46, Alcan, 1927).—Aristote: *organon*, éd. Waitz, 1844-46 (voir aussi O. Hamelin: *Le système d'aristote.* Alcan, 1920.—L. Robin: *La théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote.* Alcan: 1908).—J. von Arnim: *Stoicorum veterum fragmenta*, 3 vol. 1905-1913 (Consulter E. Bréhier: *Chrysippe*, Alcan, 1910.—G. Radier, *Etudes de philosophie grecque*, p. 219-269.—V. Brochard: *Etudes de philosophie ancienne et de philosophie moderne*, Vrin).—H. Hasse und H. Scholz: *Die Grundlagekrisis der griechischen Mathematik.* Metzner, Berlin, 1928.

E. Gilson: *L'esprit de la philosophie médiévale.* Vrin, 1932.—F. Bacon: *Novum organon* (voir A. Lalande: *Theories de l'induction et de l'expérimentation.* Boivin et Cie, 1930).

Descartes: *Discours de la méthode*, texte et commentaire par E. Gilson, Vrin (voir aussi E. Husserl: *Méditations cartésiennes*, Colin, 1931.—Ar. Reymond: *Le "cogito" vérification d'une hypothèse métaphysique.* RMM, 1923, p. 539-562.—H. Scholz: *Ueber das cogito, ergo sum*, Kantstudien XXXVI, p. 126-147).

E. Poutroux: *La philosophie de Kant,* Vrin, 1926. —L. Brunschvicg: *Le problème de la conscience*, p. 295-364 (Kant).—M. Souriau: *Le jugement réfléchissant dans la philosophie critique de Kant*, Alcan, 1926.

G. Noël: *La logique de Hegel*, Alcan, 1897.—RMM, 1931: Centenaire de Hegel, p. 277-510.

G. Milhaud: *Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique*, 1894; *Le rationnel*, 1898.—A. Lalande: *Du parallélisme formel des sciences normatives*, RMM, 1911, p. 527-532; *Raison constituée et raisin constituante*, "Revue des Cours et conférences", 15 et 30 avril 1925; *Qu'est-ce que la verité*? "Revue de théologie et de philosophie", Lausanne, 1927, p. 5-27; *Logique normative et vérités de fait*, RP, 1929 (tome CVII, p. 161-173); *Les illusions evolutionnistes*, Alcan, 1930. J. Geyser: *Das Princip vom zureichenden Grunde*, Regensburg, 1930.

II. Psychologisme, sociologisme, pragmatisme.

F.-C. Schiller: *Formal Logic*, Macmillan, Londres, 1912 Ouvrages de W. James (spécialement: *Idée de vérité*, Alcan, 1913: *Le pragmatisme*, Flammarion, 1911), de J. Dewey (*Comment nous pensons*, Flammarion, 1925; RMM, 1922, p. 411-430: *Le développement du pragmatisme américain*); de Th. Ribot (surtout *La logique du sentiment*, Alcan, 1912); de L. Lévy-Bruhl (spécialement: *Les fonction mentales dans les sociétés inférieures*, Alcan, 1918; *La mentalité primitive*, Alcan, 1922); de J. Piaget (spécialement: *Le langage et la pensée chez l'enfant*, Neuchâtel, 1923, *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Neuchâtel, 1924; RP, 1928, p. 167-205: *Logique génétique et sociologie*). de R.

Allier (*Le non-civilisé et nous*, Payot, 1927).

E. Rignano: *Psychologie du raisonnement*, Alcan, 1920.—H. Delacroix: *Le langage et la pensée*, Alcan, 1930.—R. Berthelot: *Unromantisme utilitaire*, 3 vol. Alcan, 1911-1922.—J. de la Harpe: *L'Idée de la raison*, Université de Neuchâtel, 1930.

III. Logique générale et induction

J. Maritain: *Petite Logique*, 2e édit. Téqui, 1923,—G. H. Luquet: *Logique formelle*, Alcan, 1925; *Essai d'une logique systématique et simplifiée*, Alcan, 1913.—J. Tricot: *Traité de logique formelle*, Vrin, 1930.—E. Goblot: *Traité de logique*. Colin, 1918; *La logique et les jugements de valeur*, Colin, 1927.—C. Sigwart: *Logik*, 2 vol. 4e édit. Tubingue, 1911. E. Meyerson: *Du cheminement de la pensée*, 3 vol. Alcan, 1931.—W. E. Johnson: *Logic* (vol. I à III), Cambridge, 1921-24. Encyclopädie der philosophischen Wissenschaften, *Logik*, Mohr, Tubingen, 1912 (W. Windelband: *Die Principien der Logik*.—J. Royce: *Princinpien der Logik*. —L. Couturat: *Die Principien der Logik*.—B. Croce: *Die Aufgabe der Logik*.—F. Enriquez: *Diè Probleme der Logik*).

I. -M. Keynes: *A treatise on probability*. Macmillan, Londres, 1921.—J. Nicod: *Le problème logique de l'induction*, Alcan, 1924.—R. Poirier: *Remarques sur la probabilité des inductions*, Vain, 1931.—A. Lalande: *Les théories de l'induction et de l'expérimentation*, Boivin, 1930

IV. Logique algorithmique.

G. Boole's collected logical Works, réimpression, Londres, 1916, Vol II: *The Laws of thought.*—A. Macfarlane: *Principles of the Algebra of Logic,* Edimbourg, 1879 (avec de nombreux exemples et exercices).- L. Liard: *Les logiciens anglais contemporains,* Alcan, 1878.—E. Schrœder: *Vorlesungen über die Algebra der Logik,* 3 vol., Leipzig, 1890; *Abriss der Algebra der Logik.* Leipzig, 1909.—L. Couturat: *Encyolopaedie der phil. Wissensch.* (dèjà citée); *L'algèbre de la logique,* Gauthier-Villars, 1905; *La logique et la philosophie contemporaine,* RMM, 1906, p. 318-341; *Sur les rapports logique des concepts et des propositions,* RMM, 1917, p. 15-58. (Cf. A. Lalande: *L'œuvre de Louis Couturat,* RMM, 1915, p. 644-688).—H. Dufumier: *La logique des classes et la théorie des ensembles,* RMM, 1916, p. 623-631.—R. Feys: *Le raisonnement en termes de faits dans la logique russellienne,* Louvain, 1928 (excellente mise au point des positions logiques essentielles prises par B. Russell).—A. Padoa: *La logique déductive,* Gauthier-Villars, 1912.—B. Russell: *Analyse de l'espirt,* Payot, 1926; *Le mysticisme et la logique,* Payot, 1922; *Méthode scientifique en philosophie,* Vrin, 1929; *The Theory of implication,* American Journal of math., vol. XXVIII, nº 2; *Les paradoxes de la logique,* RMM, 1906, p. 627-645; *Mathematical Logic as based on the theory of Types,* Amer. Journal of Math., XXX, nº 3.—A.-T. Shearman: *The Scope of Formal Logic,* Londres, 1911. C.-I. Lewis: *A survey of symbolic logic,* Berkeley, 1918; *La logique et la méthode mathématique,* RMM, 1922, p. 455-474— J. Milman: *La théorie psychologique et logique du jugement,* RMM, 1922, p. 455-474.—J. Milman: *La théorie psychologique et logique du jugement,* RMM 1930, p. 223-241.—L. Wittgenstein: *Tractatus logicophilosophicus.* Londres, 1922.—R. Carnap: *Abriss der Logistik.* VI-114,

J. Springer, Wien, 1929. Exposé très clair et très succinct en même temps qui comprend deux parties: système de logistique, logistique applequée (avec exemples et problèmes). L'auteur adopte en général les vues de Russell. Il dêfinit toutefois la classe comme l'extension d'une propriété, tout en conservant la définition russellienne du nombre ce qui me paraît difficile; car dire qu'une classe est l'extension d'une propriété, c'est admettre pour elle-même l'existence de la propriété independamment des objets ou collections d'objets auxquels elle peut convenir; *Die alte und die neue Logik*, Erkenntnis I. p. 12-26, Meiner, Leipzig, 1930.

V. Logique et Mathematiques. Le principe du tiers exclu.

G. Peano: *Formulaire de mathematiques*, 4e édit. Turin, 1908.—G. Burali-Forti: *Logica mathematica*, 2e édit. Hoepli, Milan, 1919.—A. N. Whitehead and B. Russell: *Principia Mathematica*. vol. I (2e édit. 1925), vol. II et III (2e édit. inchangée, 1927). Cambridge, University Press. —B. Russell: *The Principles of mathematics*, I. Cambridge, 1903; *Introduction to mathematical philosophy*, Londres, 1919 (traduction française par G. Moreau, Payot, 1928).—J. Jörgensen: *A treatise of formal logic, its evolution and main branches, with its relations to Mathematics and philosophy*, 3 vol., Copenhague et Londres, 1931.—A. de Morgan: *A budget of paradoxes*, 2e édit., 2 vol., Londres, 1915.

G. Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884.—G. Cantor: *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis* (traduction F. Marotte), Hermann, 1899.— L. E.-J. Brouwer: *Begründung der*

Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz uom ausgeschlossen Dritten. J. Müller, Amsterdam (I^re^ partie, 1918. II^e^ partie, 1919) — H. Weyl: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Berlin, 1927.— D. Hilbert und W. Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik.* Berlin, 1928.—A. Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre*, 3e édition, Berlin, 1928 (renferme une bibliographie complète du sujet et un exposé très riche de la théorie des ensembles dans ses rapports avec la logique et la philosophie); *Les discussions sur l'infini mathématique,* Scientia, sept.—oct. 1925; Die Entstehung der Mengenlehre, Scientia, déc. 1930; *Das Problem des Unendlichen in der neueren Mathematik*, Blätter für Deutsche Philosophie, 1930. p. 279-297; *Die heutingen Gegensätze in der Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis, 1930, p. 286-302. —H. Dingler: *Philosophie der Logik und Arithmetik* Munich, 1931.

L. Couturat: *Les principes des mathématiques*, Alcan, 1905; *Pour la logistique*, RMM, 1906, p. 208-250; *De l'infini mathématique*, Alcan, 1896. —F. Gonseth: *Les fondements des mathématiques*, Blanchard, 1926. —R. Wavre: *Ya-t-il une crise des mathématiques?* RMM, 1924, p. 435-470; *Logique formelle et logique empiriste*, RMM, 1926, p. 65-75; *Sur le principe du tiers exclu*, RMM, 1926, p. 425-430.—P. Lévy: *Sur le principe du tiers exclu*, RMM, 1926, p. 253-258; *Critique de la logique empirique*, RMM, 1926, p. 545-551.—W. Rivier: *L'empirisme dans les Sciences exactes*, Archives Soc. belge Phil. Bruxelles, 1930. — St Zaremba: *La logique des mathématiques*, Memorial des sci. math., fasc. XV, 1926.—A. Spaier: *La pensée concrète*, Alcon, 1927; *La pensée et la quantité*, Alcan, 1927.—R. Poirier: *Essai sur quelques caractères*

此页破损

des notions d'espace et de temps, Vrin, 1932.

VI. Axiomatique et Démonstration.

N.-I. Lobatschewsky: *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles* (traduction J. Houël), Hermann, 1900.— B. Riemann: *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* édité et expliqué par H. Weyl, 3e édit. J. Springer, Berlin, 1922. —F. Klein: *Vorlesungen über nicht-euclidische Geometrie*, édition revue par W. Rosemann, J. Springer, Berlin, 1928.—O. Hölder: *Die mathematische Methode*, J. Springer, Berlin, 1924. —Œuvres de H. Poincaré, spécialement: *Les fondements de la géométrie*, Chiron (voir aussi H. Poincaré, *Son œuvre scientifique et philosophique*, par V. Volterra, J. Hadamard, P. Langevin, P. Boutroux, Alcan, 1914).—A. Einstein: *Die grundlage der allgemeinen Relativittätheorie*, Barth, Leipzig, 1916; *La géométrie et l'expérience*, Gauthier-Villars, 1921.—P. Langevin: *Le principe de relativité*, Chiron, 1922.—D. Hilbert: *Les principes fondamentaux de la géométrie* (traduction L. Laugel), Gauthier-Villars, 1900; *Pensée axiomatique*, L'enseignement mathématique, XX, 1918-19, p. 122-136; *La connaissance de la nature et la logique*, même Revue, 1931, p. 22-23.—P. Boutroux: *Les principes de l'analyse mathématique, exposé historique et critique*, 2 vol., Hermann, 1914; *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Alcan, 1920.—L. Brunschvicg: *Les étapes de la philosophie mathématique*. Alcan, 1912; *L'expérience humaine et la causalité physique*, Alcan, 1922 —E. Meyerson: *De l'explication dans les sciences*, Payot; *La déduction relativiste*, Payot.—L. Rougier: *Les paralogismes du rationalisme*, Alcan, 1920; *La structure* *des théories déductives*, Alcan, 1921; *La philosophie géométrique de Henri Poincaré* Alcan, 1920.—M. Winter: *La méthode dans la philosophie des mathémathiques*, Alcan, 1911; *Les axiomes de la physique différentielle*, RMM, 1924, p. 71-102.—J. Herbrand: *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Dziewulski, Varsovie, 1930; *Les bases de la logique hilbertienne*, RMM, 1930, p. 243-255.—W. Dubislav: *Ueber den sogenannten Gegenstand der Mathematik*, Erkenntnis, 1930, p. 27-48; *Les recherches sur la philosophie des mathématiques en Allemagne*, Recherches philosophiques. Boivin, 1932, p. 299-311.

此页破损