

航空委員會
航空研究院

研究報告第十九號

正向質圓筒之彈性穩定問題

林致平 王培生
張壽寶 施以仁

三十四年六月

目 錄

第一節 引言

第二節 筒殼中面之應力及其平衡方程式

第三節 放射向位移波型與總蓄能

第四節 壓應力與放射向位移波幅及圓筒端縮之關係

第五節 釋例

附錄一 標註

附錄二 參考文獻

V:17.3
6/1

正向質圓筒之彈性穩定問題

著者： 林致平 王培生
張壽寶 施以仁

第一節 導言

最近關於薄殼圓筒或薄殼球體彈性穩定 (Elastic stability) 問題之研討，風起雲湧，然就諸理論所得，查其皺褶載荷 (Buckling load) 之值，輒有超過實際試驗結果之三倍至五倍者，且皺褶時所呈之波型 (Wave pattern)，與前述者，恆迥不相侔。Karman 與錢學森二氏曾指出該項問題癥結之所在，而認為一般曲殼體之彈性穩定問題，僅可以大位移波型理論 (Non-linear large deflection theory) 探討之。按以往之典式理論 (Classical theory)，係根據波幅 (Wave amplitude) 趨於極小之假定，實與此新論有別焉。

由實際之觀察，殼體於彈性平衡時，常呈菱形或鑽石狀波型，且其皺褶載荷之值，亦遠較典式理論所導得者為小。於波幅為殼厚之數倍時，由大位移波型理論，所導得之波型與皺褶載荷，均與試驗時所呈者甚為相似，故大位移波型理論，實為研討薄殼體彈性穩定問題較完滿之理論也。

本文係引用上述之大位移波型理論，研討正向質 (Orthotropic) 圓筒受軸向 (Axial direction) 壓力時之彈性穩定問題。首論筒殼中面任意點之應力 (Stress) 與應變 (Strain)，導得平衡方程式 (Equation of equilibrium)。然此方程式之確解，不易求得，故進而求其近似解 (Approximate solution)。先設一合理之放射向 (Radial direction) 位移波型，內含若干待定係數，繼求筒殼每整波間 (One complete wave panel) 內所儲之總蓄能值 (Total elastic energy)，而以總蓄能值應為最小值之條件，確定波型之待定係數，而導得應力與放射向位移波幅及圓筒端縮 (End shortening) 之關係。未膠樺木層板 (Plywood) 圓筒為釋例，就其結果，繪成圖表，並討論之。文中所用之標註，



列於附錄中。



3 2168 1972 6

第二節 筒殼中面之應力及其平衡方程式

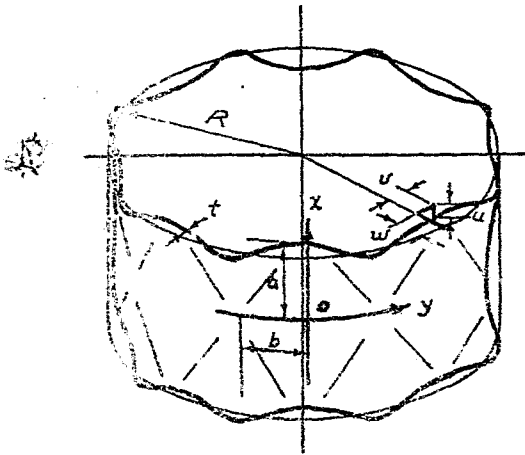
設一正向質薄殼圓筒，於未變形時，筒殼中面之半徑為 R ，殼之厚度為 t 。今於其中面 (Median surface) 上，令軸向之量度為 x ，週向 (Circumferential direction) 之量度為 y ，而以 u, v 及 w 各表沿 x, y 及放射向之分位移 (Components of displacement)，(見第一圖)。則此中面上任意點之單位應變 e_x, e_y 及剪應變 γ_{xy} ，可以包含分位移之二次項式，分別書之如下：

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

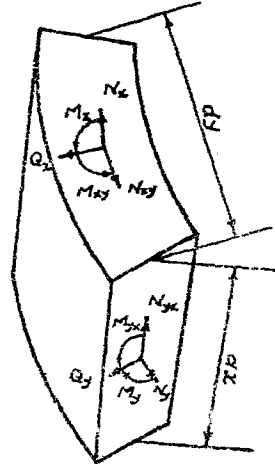
由通化之霍克氏定律 (Generalized Hooke's law)，正向質筒殼中面上應力與應變之關係，可以下式表示之：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} (e_x + \nu_{yx} e_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} (e_y + \nu_{xy} e_x) \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 E_x 與 E_y 係 x 與 y 向之彈性模數， ν_{xy} 為 y 向應變由於 x 向應力之柏松比 (Poisson's ratio)，而 G_{xy} 為此二向之剪力模數。



第一圖



第二圖 筒殼局部之週界断面各為單位長度時所受之外力及力矩

茲將(1)式代入(2)式,則得筒殼中面上之分應力與分位移之關係如下式:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu_{yx} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} \right\} \right] \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} + \nu_{xy} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \quad (3) \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

今自筒殼中割取一小部份,其週界為兩相鄰之含軸断面,與兩垂直於筒軸之断面。此局部筒殼,設其各邊為單位長度時,所受之外力及力矩如第二圖所示。依照 Donnell 氏之擬議,其中面之曲變 (Change of curvature) 與單位扭轉 (Unit twist), 可簡書如下:

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

則該局部受外力作用時之平衡條件 (Condition of equilibrium)，約若下列各式所示：

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{N_y}{R} + q &= 0 \quad (5) \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y &= 0 \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x &= 0 \end{aligned}$$

式中 q 為作用於殼面之外壓力，在本文內， $q=0$ ，故可略去之。式中之首二式，可用 Airy 氏應力函數 $F(x, y)$ 適合之，即

$$\begin{aligned} N_x = t \sigma_x = t \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad N_y = t \sigma_y = t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ N_{xy} = t \tau_{xy} = -t \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (6)$$

又式中之力矩，可以下式表之：

$$\begin{aligned} M_x &= -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E_x t^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \quad D_2 = \frac{E_y t^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \\ D_3 &= \frac{t^3}{6} G_{xy} \end{aligned}$$

引用正向質材料之特性， $\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}$ ，消除 (3) 式與 (6) 式內之變數 u, v ，則得 Airy 氏應力函數 $F(x, y)$ 與放射向分位移 w 之關係如下式：

$$\alpha \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\beta \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E_x \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \quad (8)$$

上式係示應力與應變之符合條件 (Condition of compatibility)，式中

$$\alpha = E_x/E_y \quad \beta = \frac{1}{2} \lambda - \nu_{xy}$$

$$\text{又} \quad \lambda = E_x/G_{xy} \quad (9)$$

由 (5) 式之後三式，消除 Q_x 與 Q_y ，並用 (6) 式之 Airy 氏應力函數及 (7) 式之力矩公式，導得 F 與 w 之另一關係如下式：

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\beta' \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ = \frac{12(\alpha - \nu_{xy}^2)}{E_x R^2} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{式中} \quad \beta' = \frac{2}{\lambda} (\beta \nu_{xy} + \alpha)$$

當 $R \rightarrow \infty$ 時，則 (8), (10) 兩式，表 F, w 在正向質平板內之關係。又如該兩式中之 $\alpha=1, \nu_{xy}=\nu_{yx}=\nu$ ，及 $\lambda=2(1+\nu)$ ，即 $\alpha=1, \beta=1$ ，與 $\beta'=1$ 時，則該兩式簡化為 F, w 在均勻質 (Isotropic) 圓筒內之關係式。

由 (8), (10) 兩式，與所須適合之邊界條件 (Boundary condition)，可求得 F 及 w ，以之分別代入 (4), (7) 兩式，則筒殼中面上之應力及力矩，均可求得矣。然在一般情況下， F 及 w 之確解，輒不易求得，故降而求其近似解。首設一合理之 w 函數，內含若干待定係數，以之代入 (8) 式，求得 F 與筒殼中面之分應力；繼求筒殼每整波間內所儲之總若能量，而以總若能量為最小值之條件下，確定 w 函數內之待定係數。本文即採用此法，以求 F 及 w 之最近似解答，從而導得應力與放射向位移波幅及圓筒端縮之關係。

第三節 放射向位移波型與總蓄能

今設正向質圓筒受軸向之壓力後，所呈之放射向位移波型，與 Karman 及錢學森二氏討論與向質圓筒彈性穩定問題時所擬用者相似，即

$$\begin{aligned} \frac{w}{R} = & \left(f_0 + \frac{f_1}{4} \right) + \frac{f_1}{2} \left(\cos \frac{mz}{R} \cos \frac{ny}{R} + \frac{1}{2} \cos \frac{2mz}{R} + \frac{1}{2} \cos \frac{2ny}{R} \right) \\ & + \frac{f_2}{4} \left(\cos \frac{2mz}{R} + \cos \frac{2ny}{R} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

式中 f_0, f_1, f_2 諸待定係數，如前章所論，以筒內每整波間內總蓄能值為最小值之條件確定之。 f_0 之介入，在使薄殼有放射向擴展之可能性。 f_1 為波幅，即位移 w 在放射向之最大間差。軸向與週向之波長 (Wave length)，各為 $\frac{2\pi R}{m}$ 與 $\frac{2\pi R}{n}$ ，而圓筒週圍之波數為 n 明矣。若令 (11) 式中之 $f_0 = f_2 = 0$ ，則

$$\frac{w}{R} = f_1 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{mz}{R} \cos \frac{ny}{R} + \frac{1}{2} \cos \frac{2mz}{R} + \frac{1}{2} \cos \frac{2ny}{R} \right) \right\} \quad (12)$$

此即所謂菱形或鑽石狀波型者，其形與試驗時所見之大位移波型，甚為相似。

如使 (11) 式中 $\frac{f_1}{4} + \frac{f_2}{2} = 0$ ，及 $f_0 + \frac{f_1}{4} = 0$ ，則

$$\frac{w}{R} = \frac{f_1}{2} \cos \frac{mz}{R} \cos \frac{ny}{R} \quad (13)$$

即為典式理論中所採用者。若係數為其他數值時，則所呈之波型，乃界乎此兩極限之間。

茲將 (11) 式代入 (8) 式，則得 Airy 氏應力函數 $F(\alpha, \psi)$ 之微分方程式為：

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\beta \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ = -E_x \mu^2 \left(\frac{n}{R}\right)^2 \left\{ A \cos \frac{2mx}{R} + B \cos \frac{2ny}{R} \right. \\ \quad + C \cos \frac{mx}{R} \cos \frac{ny}{R} + D \cos \frac{3mx}{R} \cos \frac{ny}{R} \\ \quad \left. + G \cos \frac{mx}{R} \cos \frac{3ny}{R} + H \cos \frac{2mx}{R} \cos \frac{2ny}{R} \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

式中 $\mu = m/n$ 為週向與軸向之波長比。如 $\mu > 1$ 時，週向波長較軸向者為大；反之，若 $\mu < 1$ ，則週向波長較短。(14) 式中之係數，茲分誌如下：

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} f_1^2 n^2 - \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2\right) \\ B &= \frac{1}{2} f_1^2 n^2 \\ C &= \frac{1}{2} f_1 n^2 \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2\right) = \frac{1}{2} f_1 \\ D &= \frac{1}{2} f_1 n^2 \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2\right) \\ G &= \frac{1}{2} f_1 n^2 \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2\right) \\ \text{及} \quad E &= n^2 \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2\right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

解此微分方程式，得 Airy 氏應力函數如下：

$$\begin{aligned} F(x, y) = -E_x \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{R}{n}\right)^2 \left\{ \frac{A}{16\alpha} \cos \frac{2mx}{R} + \frac{\mu^4 B}{16} \cos \frac{2ny}{R} \right. \\ \quad + IC \cos \frac{mx}{R} \cos \frac{ny}{R} + JD \cos \frac{3mx}{R} \cos \frac{ny}{R} \\ \quad + KG \cos \frac{mx}{R} \cos \frac{3ny}{R} + \frac{IH}{16} \cos \frac{2mx}{R} \cos \frac{2ny}{R} \left. \right\} \\ \quad + \frac{k_1}{2} x^2 + \frac{k_2}{2} y^2 \end{aligned} \quad (16)$$

式中 k_1 與 k_2 為常數，而

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mu^4}{\alpha\mu^4 + 2\beta\mu^2 + 1} & J &= \frac{\mu^4}{81\alpha\mu^4 + 18\beta\mu^2 + 1} \\ K &= \frac{\mu^4}{\alpha\mu^4 + 18\beta\mu^2 + 81} \end{aligned}$$

由 (6) 式得筒殼中面上各分應力為：

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_x \frac{1}{\mu^2} \left\{ \frac{\mu^2 B}{4} \cos \frac{2ny}{R} + IC \cos \frac{ms}{R} \cos \frac{ny}{R} + JD \cos \frac{3ms}{R} \cos \frac{ny}{R} \right. \\ &\quad \left. + 9KG \cos \frac{ms}{R} \cos \frac{3ny}{R} + \frac{IH}{4} \cos \frac{2ms}{R} \cos \frac{2ny}{R} \right\} + k_2 \\ \sigma_y &= E_x \left\{ \frac{A}{4\alpha} \cos \frac{2ms}{R} + IC \cos \frac{ms}{R} \cos \frac{ny}{R} + 9JD \cos \frac{3ms}{R} \cos \frac{ny}{R} \right. \\ &\quad \left. + KG \cos \frac{ms}{R} \cos \frac{3ny}{R} + \frac{IH}{4} \cos \frac{2ms}{R} \cos \frac{2ny}{R} \right\} + k_1 \\ \tau_{xy} &= E_x \frac{1}{\mu} \left\{ IC \sin \frac{ms}{R} \sin \frac{ny}{R} + 3JD \sin \frac{3ms}{R} \sin \frac{ny}{R} \right. \\ &\quad \left. + 3KG \sin \frac{ms}{R} \sin \frac{3ny}{R} + \frac{IH}{4} \sin \frac{2ms}{R} \sin \frac{2ny}{R} \right\} \quad (17)\end{aligned}$$

在實際試驗中，所得之結果，俱以軸向之平均應力 σ 為依據。由 (17) 式之首式，可知：

$$k_2 = -\sigma \quad (18)$$

由 (3) 式可導得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E_x} (\sigma_x - \nu_{xy} \sigma_y) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E_x} (\alpha \sigma_y - \nu_{xy} \sigma_x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \quad (19)\end{aligned}$$

將 (11) 與 (17) 兩式代入 (19) 式，則得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{E_x} (\sigma + \nu_{xy} k_1) - \frac{1}{2} n^2 \mu^2 \left(\frac{3}{32} f_1^2 + \frac{1}{8} f_1 f_2 + \frac{1}{8} f_2^2 \right) + \left[\text{週期性函數項} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E_x} (\nu_{xy} \sigma + \alpha k_1) - \frac{1}{2} n^2 \left(\frac{3}{32} f_1^2 + \frac{1}{8} f_1 f_2 + \frac{1}{8} f_2^2 \right) + \left(f_0 + \frac{f_1}{4} \right) \\ &\quad + \left[\text{週期性函數項} \right] \quad (20)\end{aligned}$$

因 y 係沿筒殼之週向量度，而 v 為含 y 之週期性函數，故 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 式內之常數項應等於零，即

$$\frac{1}{E_x}(\nu_{xy}\sigma + \alpha k_1) - \frac{1}{2}n^2\left(\frac{3}{32}f_1^2 + \frac{f_1 f_2}{8} + \frac{f_2^2}{8}\right) + \left(f_0 + \frac{f_1}{4}\right) = 0 \quad (21)$$

由是可得 k_1 之值。

筒殼每整波間內所儲之總蓄能，等於下列三者之代數和：

(一) 引展蓄能 (Extensional elastic energy)：筒殼每整波間內，由中面上諸應力導得之引展蓄能為：

$$W_1 = \frac{2t}{E_x} \int_0^a \int_0^b (\sigma_x^2 + \alpha \sigma_y^2 - 2\nu_{xy} \sigma_x \sigma_y + \lambda \tau_{xy}^2) dx dy \quad (22)$$

式中 $2a$, $2b$ 各為軸向與週向之波長。以 (17) 與 (21) 兩式代入 (22) 式，則得：

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{\frac{1}{2}E_x tab} &= \frac{4}{\alpha} \left\{ (\alpha - \nu_{xy}^2) \left(\frac{\sigma}{E_x}\right)^2 + n^4 \left(\frac{3}{64}f_1^2 + \frac{1}{16}f_1 f_2 + \frac{1}{16}f_2^2\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(f_0 + \frac{f_1}{4}\right)^2 - 2n^2 \left(\frac{3}{64}f_1^2 + \frac{1}{16}f_1 f_2 + \frac{1}{16}f_2^2\right) \left(f_0 + \frac{f_1}{4}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{A^2}{8\alpha} + \frac{\mu^4 B^2}{8} + IC^2 + JD^2 + KG^2 + \frac{I}{16}H^2 \end{aligned} \quad (23)$$

(二) 撓折蓄能 (Bending energy)：引用 (*) 式之曲變及單位撓轉公式，筒殼每整波間內所儲之撓折蓄能為：

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{E_x t^3}{6(\alpha - \nu_{xy}^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(\alpha - \nu_{xy}^2)}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (24)$$

將 (11) 式代入 (24) 式，則得

$$\frac{W_2}{\frac{1}{2} E_x t a b} = \frac{1}{G(\alpha - \nu_{xp}^2)} \left(\frac{t}{R} \right)^2 n^4 \left[f_1^2 \left\{ \frac{1}{2} (\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) + \frac{1}{2} (\alpha \mu^4 + 1) \right\} \right. \\ \left. + (\alpha \mu^4 + 1) f_1 f_2 + (\alpha \mu^4 + 1) f_2^2 \right] \quad (25)$$

(三) 筒端外力虛功值 (Virtual work)：加諸圓筒端界之外力，所作之虛功，等於外力與伸展長度之相乘積。故每整波間內之虛功值為：

$$W_3 = 4t \int_0^b [\sigma_x]_{x=a} dy \int_0^a \frac{\delta u}{\delta x} dx \quad (26)$$

將 (17), (20) 及 (21) 三式代入 (26) 式，則得：

$$\frac{W_3}{\frac{1}{2} E_x t a b} = \frac{4}{\alpha} \frac{\sigma}{E_x} \left\{ \frac{2\sigma}{E_x} (\alpha - \nu_{xp}^2) - 2\nu_{xp} \left(f_0 + \frac{f_1}{4} \right) \right. \\ \left. + n^2 (\alpha \mu^2 + \nu_{xp}) \left(\frac{3}{32} f_1^2 + \frac{f_1 f_2}{8} + \frac{f_2^2}{8} \right) \right\} \quad (27)$$

故筒殼每整波間內之總蓄能 W ，為三者之代數和，

$$W = W_1 + W_2 - W_3.$$

第四節 壓應力與放射向位移波幅及圓筒端縮之關係

欲求平均壓應力與放射向位移波幅之關係，須先得總蓄能 W 為最小值之條件，即

$$\frac{\partial W}{\partial f_0} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial f_2} = 0 \quad (28)$$

由 (28) 式之第一式，可導得 f_0 , f_1 及 f_2 之關係如下：

$$f_0 + \frac{f_1}{4} = \frac{1}{2} n^2 \left(\frac{3}{32} f_1^2 + \frac{f_1 f_2}{8} + \frac{f_2^2}{8} \right) \frac{\sigma}{E_x} \nu_{xp} \quad (29)$$

自上式及 (21) 式，可推知 $k_1 = 0$ 。其意即筒殼之放射向擴展，可使平均週向應力 σ_D 之值等於零。今以 (29) 式代入 (23), (25), (27) 各式，並應用 (15) 式所列之係數，則筒殼每整波間內之總蓄能值可簡書為：

$$\begin{aligned}
 \frac{W}{\frac{3}{8} E_x t a b} = & -4 \left(\frac{\sigma}{E_x} \right)^2 - n^2 \mu^2 \frac{\sigma}{E_x} \left(\frac{3}{8} f_1^2 + \frac{1}{2} f_1 f_2 + \frac{1}{2} f_2^2 \right) \\
 & + \frac{n^4}{6(\alpha - \nu_{xy}^2)} \left(\frac{t}{R} \right)^2 \left[\left\{ \frac{1}{2}(\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) + \frac{1}{2}(\alpha \mu^4 + 1) \right\} f_1^2 \right. \\
 & \quad \left. + (\alpha \mu^4 + 1) f_1 f_2 + (\alpha \mu^4 + 1) f_2^2 \right] \\
 & + n^4 \left[\frac{f_1^4}{64} \left(\mu^4 + \frac{1}{\alpha} + 34I + 8J + 8K \right) + \frac{f_1^2 f_2^2}{32} (9I + 2J + 2K) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{f_1^2 f_2^2}{32} (11I + 2J + 2K) + \frac{I}{8} f_1 f_2^2 + \frac{I}{16} f_2^4 \right] \\
 & - n^2 \left[\frac{f_1^2}{64} \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) + \frac{f_1^2 f_2^2}{32} \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) \right] \\
 & + \frac{f_1^2}{32} \left(\frac{1}{\alpha} + 8I \right) + \frac{f_1 f_2}{8\alpha} + \frac{f_2^2}{8\alpha} \quad (30)
 \end{aligned}$$

茲爲便於計算及書寫起見，取

$$\rho = \frac{f_2}{f_1}, \quad \eta = n^2 \frac{t}{R}, \quad \xi = f_1 \frac{R}{t} = \frac{\delta}{t} \quad (31)$$

式中 δ 爲筒殼皺褶時所呈之波幅，再由 (28) 式之後兩式，得平衡條件如下

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma R}{E_x t} \eta \mu^2 (\rho + \frac{1}{2}) = & (\eta \xi)^2 \left[\frac{1}{4} \rho^2 + \frac{1}{2} (11I + 2J + 2K) \rho^2 \right. \\
 & \left. + \frac{3}{16} (9I + 2J + 2K) \rho + \frac{1}{64} \left(\mu^4 + \frac{1}{\alpha} + 34I + 8J + 8K \right) \right] \\
 & - (\eta \xi) \left[\frac{1}{8} \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) \rho + \frac{3}{32} \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) \right] + \frac{1}{4\alpha} \rho + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\alpha} + 8I \right) \\
 & + \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xy}^2)} \left[(\alpha \mu^4 + 1) \rho + \frac{1}{2} (\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) + \frac{1}{2} (\alpha \mu^4 + 1) \right]
 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma R}{E_x t} \eta \mu^2 (\rho + \frac{1}{2}) = & (\eta \xi)^2 \left[\frac{1}{4} \rho^2 + \frac{3}{8} \rho^2 + \frac{1}{16} (11I + 2J + 2K) \rho \right. \\
 & \left. + \frac{1}{32} (9I + 2J + 2K) \right] - \frac{\eta \xi}{32} \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) + \frac{1}{4\alpha} \rho + \frac{1}{8\alpha} \\
 & + \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xy}^2)} \left[(\alpha \mu^4 + 1) \rho + \frac{1}{2} (\alpha \mu^4 + 1) \right] \quad (32)
 \end{aligned}$$

由上兩式消去 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ ，得 ρ 之三次方程式爲：

$$A_3 \rho^3 + A_2 \rho^2 + A_1 \rho + A_0 = 0 \quad (33)$$

式中之係數如下：

$$\begin{aligned} A_3 &= (\eta \xi)^2 (3I + J + K) \\ A_2 &= \frac{1}{2} (\eta \xi)^2 (3I + J + K) - \frac{1}{2} (\eta \xi)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) \\ A_1 &= \frac{1}{16} (\eta \xi)^2 \left(\mu^4 + \frac{1}{\alpha} + 4I + 4J + 4K \right) - \frac{1}{2} (\eta \xi)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) \\ &\quad + \left(4I - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xp}^2)} \left[4(\alpha \mu^4 + 1) - (\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) \right] \\ A_0 &= \frac{1}{32} (\eta \xi)^2 \left(\mu^4 + \frac{1}{\alpha} - 20I - 4J - 4K \right) + \frac{1}{2} \left(4I - \frac{1}{\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xp}^2)} \left[2(\alpha \mu^4 + 1) - \frac{1}{2}(\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

若 $\xi = 0$ 時，即波幅極小而近於零時，由 (34) 式，得 $A_3 = A_2 = 0$ ，及

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(4I - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xp}^2)} \left[4(\alpha \mu^4 + 1) - (\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) \right] \\ A_0 &= \frac{1}{2} \left(4I - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xp}^2)} \left[2(\alpha \mu^4 + 1) - \frac{1}{2}(\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) \right] = \frac{A_1}{2} \end{aligned}$$

以之代入 (33) 式，得 $\rho = -\frac{1}{2}$ ，或 $f_2 = -\frac{1}{2} f_1$ 。再以此 f_1 與 f_2 之關係代入 (11) 式，則導得之波型，簡化如 (13) 式所示者，亦即典式理論中所採用之小波幅波型是也。

欲求相當壓應力 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 之值，首應慎擇 μ ， η 兩數，繼變波幅 ξ ，求得 (34) 式內之各係數，然後解 (33) 式 ρ 之三次方程式，再以 ρ 之實根數值代入 (32) 式，即可得 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 。如 ρ 之三根，均爲實數，則 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 之值，

應取其最小者。又為計算便捷計，可由 (32) 式中消除 ρ 之三次項，而得

$$\begin{aligned} \frac{\sigma R}{E_x \xi} = \frac{1}{\eta \mu^2} & \left[\frac{1}{3} (\eta \xi)^2 (4I + J + K) \rho^2 + \left\{ \frac{1}{3} (\eta \xi)^2 (4I + J + K) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} (\eta \xi) \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) \right\} \rho + \frac{1}{64} (\eta \xi)^2 \left(\mu^4 + \frac{1}{\alpha} + 16I + 4J + 4K \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{16} (\eta \xi) \left(\frac{1}{\alpha} + 16I \right) + I + \frac{\eta^2}{12(\alpha - \nu_{xp}^2)} (\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

若 $\xi \rightarrow 0$ ，即波幅趨於極小時，得

$$\left[\frac{\sigma R}{E_x \xi} \right]_{\xi \rightarrow 0} = \frac{1}{\eta \mu^2} \left[I + \frac{\eta^2}{12(\alpha - \nu_{xp}^2)} (\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1) \right] \quad (36)$$

又當 $\eta = \sqrt{\frac{12I(\alpha - \nu_{xp}^2)}{\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1}}$ 時，平均壓應力 σ 之值為最小，即：

$$\text{Min.} \left[\frac{\sigma R}{E_x \xi} \right]_{\xi \rightarrow 0} = \frac{1}{\mu^2} \sqrt{\frac{I(\alpha \mu^4 + 2\beta' \mu^2 + 1)}{3(\alpha - \nu_{xp}^2)}} \quad (37)$$

此結果與典式理論所求得者相符。

吾人知實際試驗時，所能操縱者，僅為試驗機兩端夾間之距離，亦即試驗標本所受之惟一幾何限制，可資利用於測度者也。而 (35) 式僅示壓應力與位移波幅之可能平衡關係，故為配合實際起見，須使平均壓應力展為端縮之函數。由 (20) 式，得單位端縮 σ ，即每整波間內之軸向端縮除以軸向波長，為：

$$\frac{\sigma R}{\xi} = \frac{\sigma R}{E_x \xi} + \frac{\mu^2}{16} \xi (\eta \xi) (\rho^2 + \rho + \frac{1}{3}) \quad (38)$$

上式表平均壓應力與圓筒端縮之關係。

第五節 釋例

今設樺木三層板為正向質材料，其彈性常數假定如下：

$$E_x = 2.0 \times 10^6 \text{ 磅 / 平方吋} \quad \nu_{xp} = 0.3$$

$$E_p = 0.2 \times 10^6 \text{ 磅 / 平方吋} \quad \nu_{px} = 0.03$$

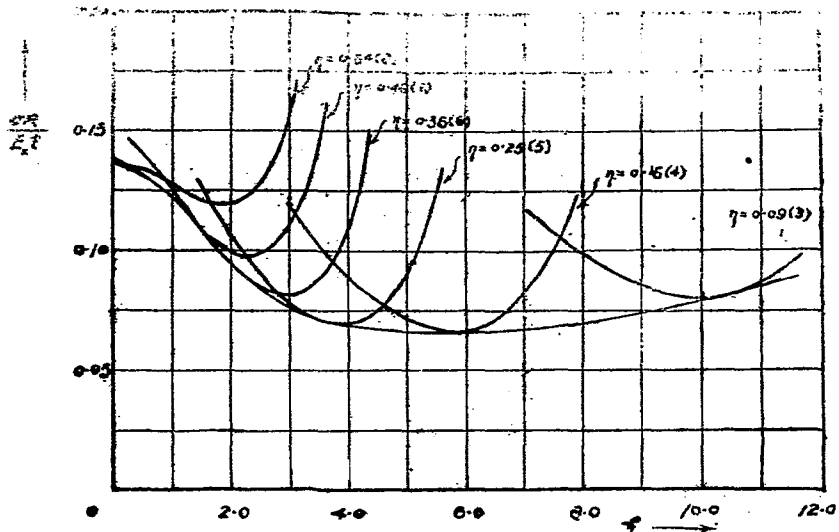
$$G_{xp} = 0.125 \times 10^6 \text{ 磅 / 平方吋}$$

又設該層板製成之圓筒，其中面半徑與殼厚之比為 $\frac{R}{t} = 100$ ，並取兩種週向與軸向之波長比為例，即 $\mu = 1$ ，與 $\mu = 0.5$ 是也。 $\mu = 1$ ，係示等邊之鑽石狀波型，而 $\mu = 0.5$ ，則為狹長之菱形波型。

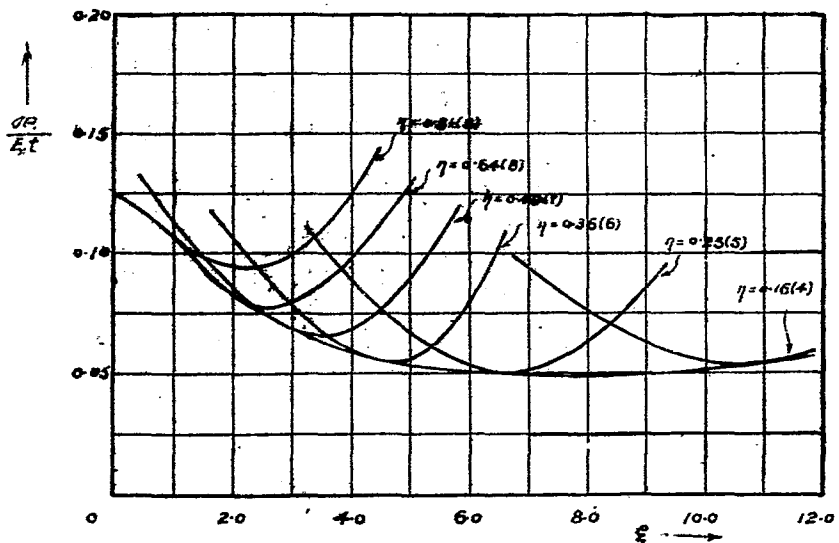
計算步驟，甚為繁複，茲僅將其結果，示於第三圖至第六圖。其第三圖與第四圖，係示應壓力 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 與波幅 ξ 之關係。其第五圖與第六圖，則係示應壓力 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 與圓筒單位端縮 $\frac{eR}{t}$ 之關係。圖中之變數為 η ，括號內之數值為 $\frac{R}{t} = 100$ 時之週圈波數 n 。

由第三圖與第四圖，知 η 與 μ 為定值時，即波型為定型時，圓筒所受之應壓力 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ ，當波幅漸增時，首漸低減，及達最小值後，則漸增大。又如波型擴大，即週圈波數較少，其開始之皺褶載荷 (Initial buckling load)，亦即 $\xi = 0$ 時之 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 值較高，然其最小值，除 $\mu = 1.0$ ， $\eta < 0.16$ 與 $\mu = 0.5$ ， $\eta < 0.25$ 以外，均趨低落。

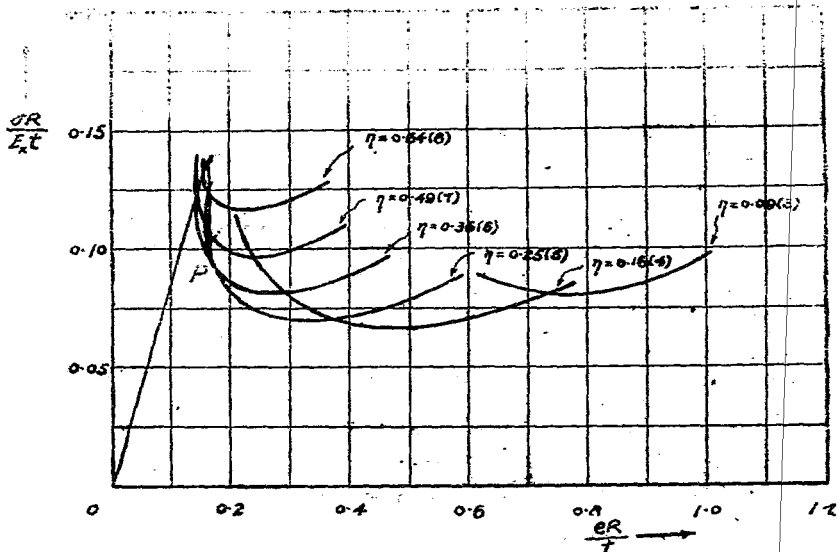
由第五圖與第六圖，知圓筒之皺褶步驟 (Buckling process)，如依照圖中曲線所示，則圓筒開始皺褶後，其端縮漸減，換言之，即試機之兩端板，必須分開以適應之，此時之皺褶，呈極不穩定現象。於實際試驗時，皺褶之進展甚速，在試驗者能使兩端板分開之前，圓筒已呈 P 點 (見第五與第六圖) 所示之現象。其端縮與開始皺褶時相等，而應壓力則低落甚巨。由此可解釋試驗所得之 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 值，遠較典式理論所示者為小，而由本文諸式，當可求得與試驗值甚為近似之 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 值也。



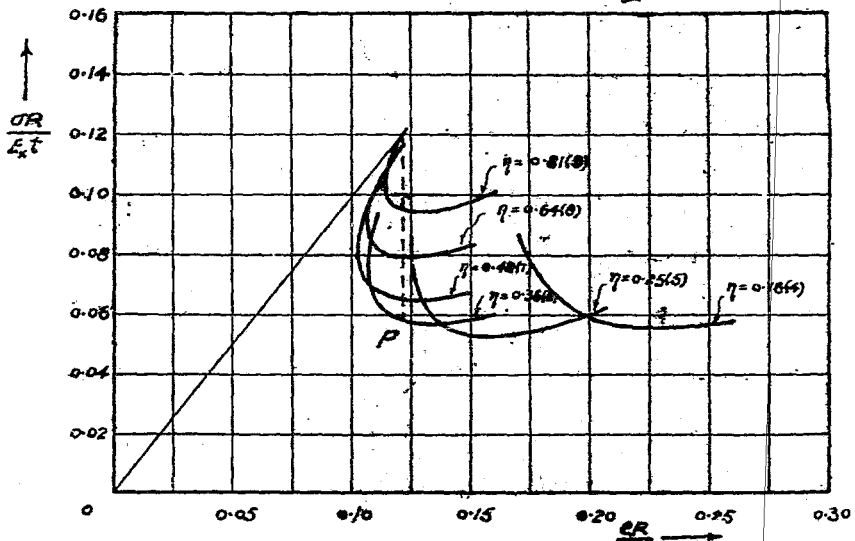
第三圖 假定各種不同之週圍波數， $u=1.00$ 時，壓應力與波幅之關係。



第四圖 假定各種不同之週圍波數，當 $u=0.50$ 時，壓應力與波幅之關係。



第五圖 假定各種不同之週圍波數，當 $u=1.00$ 時，壓應力與單位距離之關係



第六圖 假定各種不同之週圍波數，當 $u=0.50$ 時，壓應力與單位距離之關係。

附 錄 一 標 註

R	圓筒中面之半徑
t	筒殼之厚度
σ	軸向之平均壓應力
e	圓筒之單位端縮 (Unit end shortening)
u, y	未變形筒殼中面上，軸向與週向之量度
u, v, w	x, y 及放射向之分位移 (Components of displacement)
e_x, e_y, γ_{xy}	x, y 向之單位應變與剪應變
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	x, y 向之正應力與剪應力
E_x, E_y	x, y 向之彈性模數
ν_{xy}	y 向應變由於 x 向應力之帕松比 (Poisson's ratio associated with contraction parallel to y -axis and stress parallel to x -axis)
G_{xy}	x, y 向之剪力模數
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	圓筒中面 x, y 向之曲變 (Change of curvature) 及單位扭轉 (Unit twist)
N_x, N_y, N_{xy}	筒殼局部之週界斷面，各為單位長度時，所受之外力及力矩 (見第二圖)
Q_x, Q_y, Q_{xy}	
M_x, M_y, M_{xy}	
$F(x, y)$	Airy 氏應力函數，由 (6) 與 (16) 兩式定之
D_1, D_2, D_3	見 (7) 式
α, β, λ	見 (9) 式
β'	見 (10) 式
f_0, f_1, f_2	波型之待定係數
n	圓筒週圈之波數
$2a, 2b$	圓筒軸向與週向之波長
μ	週向與軸向之波長比
A, B, C, D, G, H	係數，見 (15) 式

I, J, K	見 (16) 式
$k_1 = 0$	積分常數，由 (21) 與 (29) 兩式定之
$k_2 = -\sigma$	積分常數，由 (18) 式定之
W_1, W_2, W_3	每整波間內之引展蓄能，撓折蓄能，與外力之虛功值
W	每整波間內之總蓄能 (Total energy)
ρ, η, ξ	見 (31) 式
δ	筒殼皺褶時所呈之幅波 (Amplitude of wave)
A_0, A_1, A_2, A_3	係數，見 (34) 式

附 錄 二 參 考 文 獻

1. T. von Karman & Tsien Hsu-Shen : *The Buckling of Spherical Shells by External Pressure*. J. of Aero. Sc., Vol. 7, No. 2, p. 43, 1939.
2. T. von Karman, L. G. Dunn & Tsien Hsu-Shen : *The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures*. J. of Aero. Sc., Vol. 7, No. 7, p. 276, 1940.
3. T. von Karman & Tsien Hsu-Shen : *The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression*. J. of Aero. Sc., Vol. 8, No. 8, 1941.
4. L. A. Donnell : *A New Theory for Buckling of Thin Cylinder under Axial Compression & Bending*. A.S.M.E. Trans. Vol. 56, p. 795-806, 1934.
5. L. H. Donnell : *Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion*. N.A.C.A. T. R. No. 479, 1934.
6. S. Timoshenko : *Theory of Plates and Shells*. 1940.
7. S. Timoshenko : *Theory of Elastic Stability*. 1936.
8. 林致平，談鏡生：正向荷薄板之彈性穩定問題。航空研究院研究報告第三號，民國三十年出版。