算學小叢書

幾何圓錐曲線論

A. Cockshott
F. B. Walters 著
徐韞知 譯

國立自貢工業專科學校
五週年紀念
劉文之贈
卅六.十一.三

商務印書館發行

70.60

算學小叢書

幾何圓錐曲線論

A. Cockshott
F. B. Walters 著
徐聲知 譯

商務印書館發行

中華民國二十六年三月初版

算學小叢書 幾何圓錐曲線論一冊 (52268)

A Treatise on Geometrical Conics

每冊實價國幣柒角

外埠酌加運費匯費

原著者 A. Cockshott F. B. Walters

譯述者 徐韞知

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者陳忠杰)

周

四一四上

-01314 414
2345

序

全部高級幾何學(解析幾何學,投影幾何學等)中,“圓錐曲線(conic sections)研究可以說佔了最重要的地位。其次,如微積學,天文學,物理學……等也有不少的部分,需要到關於“圓錐曲線”的學識.在近世數學研究上,“圓錐曲線”的種種問題固然都可用解析方法,由二次普遍式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

的推求而獲得解決(參看譯者所譯的 Whitehead 的算學導論,商務出版).但是在應用解析方法推求的時候,卻處處離不開由純幾何方法而得的一些結果.這兩種方式的研究本是互相聯繫的.

所以,學習“解析幾何學”,“微積學”,“投影幾何學”等與“圓錐曲線”有關的科目之先”,“圓錐曲線”幾何方面的研究是不可少的準備.要不然,對於這種曲線形象的特性尚未能完全認識,即一知半解地來運用解析方法,結果必致發生觀念含糊,理解淩亂,或事倍功半等缺點.這大概讀者都已經感到!

A. Cockshott, F. B. Walter 兩氏的這本書正就是針對上述的需要所編成。這本書所有的材料全以英國幾何教學改進會 (The Association for the Improvement of Geometrical Teaching) 所議決的綱要爲基幹，直到現在仍是各校風行的重要讀物。現在爲適合我國讀者，閱讀和修習起見，譯者除加以編列外，並將所引證到的幾何學定理摘要記入(原書僅列歐幾里得原書篇名節名，一般讀者不易得歐氏書卽無從參證)；此外在解題和定義兩方面也根據下列各參考書稍有增改。第六章雜題多半採錄劍橋大學各種試題，頗有演習的價值，故仍全數譯出。

我相信這本書定能給讀者相當的幫助！

徐韞知二四，九，五。

參考材料：

G. A. Wentworth: Plane and Solid Geometry (商務張彝譯本，又原本).

W. P. Milen: Projective Geometry (商務郭善潮譯本，又原本).

F S. Macaulay: Geometrical Conics.

M. Chasles: Traite des Sections Coniques.

L. Cremona: Pure Geometry (英譯本).

A. N. Whitehead: Introduction to Mathematics (商務徐韞知譯本,又原本).

A. Clebsch: Vorlesungen über Geometrie.

G. Salmon: A Treatise on Conic Sections.

W. Lietzmann: Kegelschnittlehre.

目　次

幾何圓錐曲線論

第一章　拋物線(parabola)

§1. **定義**　設一移動點到一個定點和到一條定直線永爲等距離，則這個移動點的軌跡所成的曲線即稱爲"拋物線". 如用 P 表移動點，S 表定點，XM 表定直線，就有如下的關係

$$SP = PM.$$

§2. **定義**　這個定點 (S) 稱爲"焦點" (focus).

§3. **定義**　這條定直線 (XM) 稱爲"準線" (directrix).

§4. **定義**　如果在一直線一側的曲線上有點，和在另一側的曲線上的點相應，如此聯這兩點的弦被這條直線垂直平分，我們就說：這個曲線是對這條直線對稱。

§5. **定義**　這條直線稱爲這個曲線之一"軸" (axis).

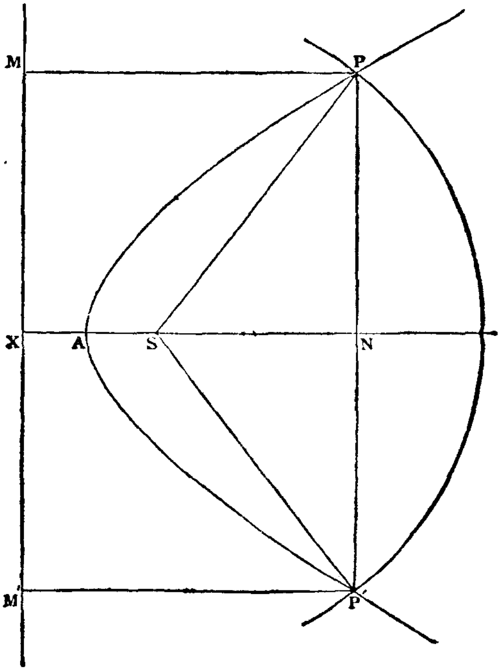
§6. **定義**　軸和曲線相遇的點稱爲"頂點" (vertex), 簡稱爲"頂".

解題一 作圖題

§ 7 抛物線上諸點作法 過焦點垂直於準線的直線是一對稱軸 (axis of symmetry).

設 S 爲焦點, MXM' 爲準線. 過 S 作一直線 SX 垂直於準線, 並使它順 XS 方向任意延長.

平分 SX 於 A; 因爲 $SA=AX$, 所以 A 是抛物線上的一點.



在 XS 或 XS 延長線上取任意點 N; 過 N 作一直線 PNP' 垂直於 XN; 用 S 作圓心和 XN 長作半徑畫弧, 截 PNP', 設截點爲 P 和 P'; 更作 PM 和 $P'M'$ 垂直於準線.

在此因 $$SP=NX=PM,$$

所以P是拋物線上的一點.

依同樣理由, P' 是拋物線上的一點。

因爲 $NP=NP'$ [弦被垂直於其上的直徑平分]

PP' 是被 XS 垂直平分,並且這個曲線是對 XS 對稱.

(1) 如果 N 和 S 位在 A 的同側, SN 較NX 爲短,所作弧就會截 PNP' 線.

(2) 如果 N 和 S 位在 A 的兩側,所作弧就不會截 PNP' 直線.

所以拋物線的範圍是無限的, 不過全在過 A 垂直於 AS 的一條直線的一側. Q. E. F.

本題可看成有已知的"焦點"和"準線"而求聯諸點作一"拋物線"的作圖題. 參看問題一.

§8. 定義 "一個拋物線的軸 (SX)" 是過"焦點"垂直於"準線"的一條直線.

§ 9 **定義** "一個拋物線的頂 (A)" 是軸與拋物線相遇的點.

§ 10. **定義** 一個"拋物線"上一點的"縱線"(ordinate, PN) 是從這個點 (P) 引到軸上的垂線.

§ 11. **定義** "橫線"(abscissa) 就是"頂點"和"縱線"中間的這部分的軸長,

§ 12. **定義** 一個"拋物線"上一點的"焦點距"(focal distance)—或作"焦點半徑"(focal radius)—是從它到"焦點"的距離.

解題二 定理

§ 13. 如果弦 PP' 與準線相交於 K 則 SK 平分 SP 和 SP' 間所含的外角.

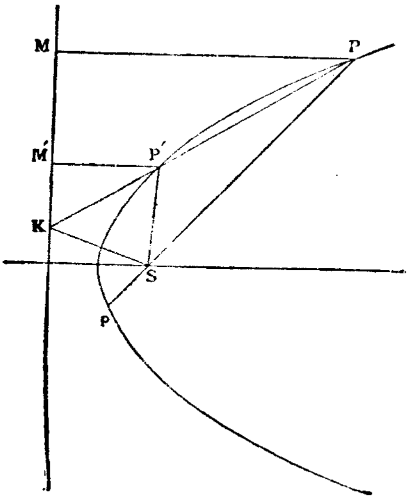
聯 SP, SP'.

作 $PM, P'M'$ 垂直於準線, 並延長 PS 到 p.

應用相似三角形的理解, 在 $\triangle$ $PKM, P'KM'$ 內,

$$PK : P'K = PM : P'M' = SP : SP';$$

$$\therefore \quad SK \text{ 平分外角 } P'SP.$$



[三角形一外角的平分線外分其對邊成兩線分，與其兩鄰邊爲比例.]

Q. E. D.

圖內 Pp 有時也稱爲"焦點弦" (focal chord).

解題三 定理

§ **14**. 如果 PN 是拋物線一條在 P 點的縱線，則

$$PN^2 = 4AS \cdot AN.$$

聯 SP, 並作 PM 垂直於準線. 則

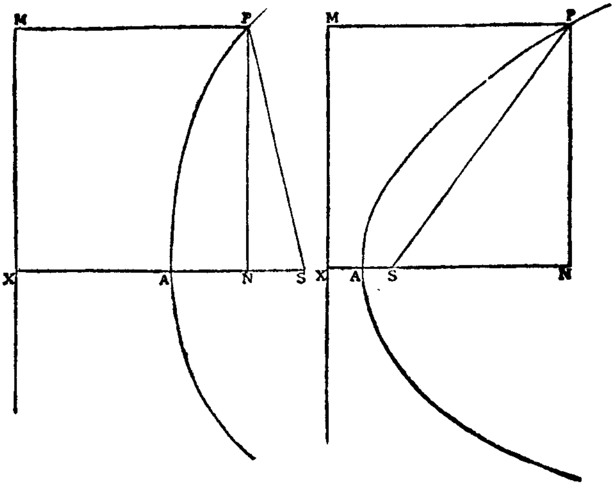
$$NX^2 = XA^2 + AN^2 + 2XA \cdot AN$$

[兩直線的和的平方等於各線的平方和加二倍兩線的相乘積.]

$$= AS^2 + AN^2 + 2AS\cdot AN$$

$$= 2AS\cdot AN + SN^2 + 2AS\cdot AN$$

[兩直線的差的平方等於各線的平方和減二倍兩線的相乘積.]



$$= 4AS\cdot AN + SN^2.$$

但是　$NX^2 = PM^2 = SP^2 = PN^2 + SN^2;$

$$\therefore\ PN^2 + SN^2 = SN^2 + 4AS\cdot AN,$$

$$\therefore\ PN^2 = 4AS\cdot AN. \qquad Q.E.D.$$

[別證]　$PN^2 = SP^2 - SN^2 = PM^2 - SN^2 = NX^2 - SN^2$

[定義]

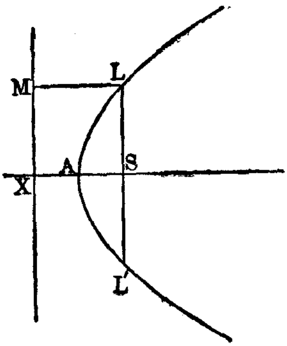
$$= (NX - SN)(NX + SN) = (2AS)(2AN).$$

所以 $PN^2=4AS\cdot AN.$ *Q. E. D.*

§ 15. **定義** 過"焦點"的倍縱線(the double ordinate) 稱爲"通徑" (latus rectum 或 parameter).

解題四

§ 16. "通徑" $LL'=4AS.$



$SL^2=4AS\cdot AS.$ [解題三]

$\therefore\ SL=2AS;$

$\therefore\ LL'=4AS.$ *Q. E. D.*

[別證] 設作 LM 垂直於準線,則

$LS=LM$ 和 $LM=XS.$

[定義]

$\therefore\ LS=XS=2AS.$

依同理, $L'S=XS=2AS.$

所以, $LL'=4AS.$ *Q. E. D*

問題一

(解題一之部)

1. 試應用等腰三角形的理解，聯各點畫成拋物線．

2. PP', QQ' 都是拋物線的倍縱線．求證 PQ, $P'Q'$ 和軸交於一點。

3. 設 SM 和過 A 平行於準線的直線相交於 Y. 求證 SM 在 Y 處被平分．

4. 又證 PY 垂直於 SM, 且平分角 SPM.

5. 設作 SZ 垂直於 SP, 和準線相遇於 Z. 求證 PZ 平分角 SPM.

6. 設一個拋物線的兩條焦點弦 (focal chord) 相等，則聯兩弦中點的直線垂直於拋物線的軸．

7. 求過一已知點且切一已知直線的一個圓的圓心軌跡。

8. 求與一已知圓和一已知直線相切的一個圓的圓心軌跡．

9. 平行於軸的一條直線與拋物線只交於一點。

（解題二之部）

1. Pp 是一拋物線的一條焦點弦,Q 是曲線上另一點設 PQ, pQ 分別與準線相遇於 K 和 K', KSK' 是一直角。

2. PQ, pq 都是焦點弦．求證 Pp Qq 在準線上相遇．

又證 Pq, pQ 也在準線上相遇.

3. 如果 PQ, pq 與準線相遇於 K 和 K', 則 KSK' 是一直角.

4. 應用本解題的理解, 試聯 A 至準線上各點畫成拋物線.

5. P 是拋物線上任意點. 設 PA 延長線與準線相交於 K, MSK 是一直角.

6. 已知一拋物線和它的焦點, 求準線.

7. PQ 是拋物線的一條倍縱線, $P'X$ 截曲線於 P'; 求證 $P'Q$ 經過焦點.

(解題三之部)

1. 求證拋物線兩縱線平方的比等於相應的兩橫線的比.

2. PP' 是拋物線的一條倍縱線. 如果環繞 PAP' 的圓重截軸於 Q, 求證 NQ 一定, 並求它的長.

3. PNP' 是拋物線的一條倍縱線. 過拋物線上另一點 Q 作兩直線, 一條經過頂點, 一條與軸平行, 截 PP' 於 L 和 L'. 求證 $NL \cdot NL' = PN^2$.

(解題四之部)

1. 試求拋物線內等於兩倍通徑的一條倍縱線.

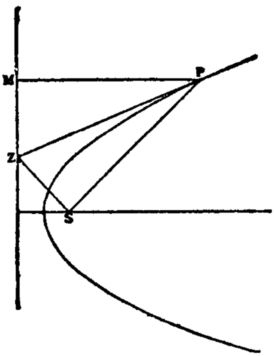
2. 設一點的縱橫線相等,求證這兩條線各等於通徑.

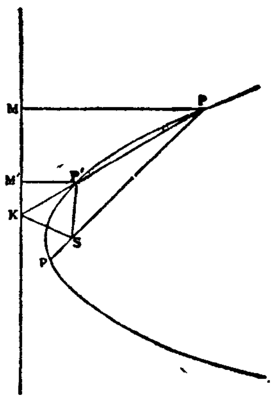
3. 求證三角形 LAL' 的外接圓半徑的長等於通徑長的八分之五.

§ 17. **定義** 設 PP' 是任意曲線的弦. 現在如 P' 向 P 移近,到 P' 與 P 相合時,在極限位置的弦 PP' 即稱爲 P 點上的"切線"(tangent). 切線是與曲線相切,而不是相截. 所切曲線的一點稱爲"切點"(point of contact).

解題五 定理

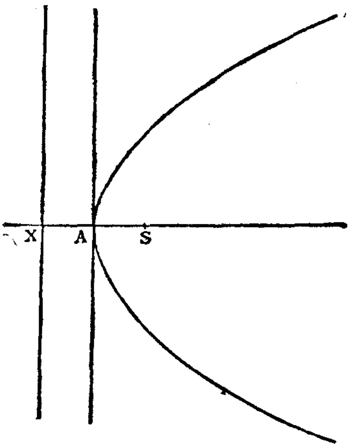
§ 18. 設 P 點上的切線與準線相遇於 Z, PSZ 是一





直角，並且 P 點上的切線平分焦點距 SP 和準線上垂線 PM 間的角；又頂點上的切線與軸成直角.

在解題二圖內，設因使點 P' 向 P 移近，而弦 $PP'K$ 變成切線 PZ，則結果 SK 就與 SZ 相合，SP' 就與 SP 相合，而角 $P'Sp$ 變成兩直角；但 $P'SK$ 常是角 $P'Sp$ 之半（解題二），所以 PSZ 是兩直角之半，或即 PSZ 是一個直角.



作 PM 垂直於準線，

$$PM^2+MZ^2=PZ^2$$

［畢達哥拉士定理］

$$=SP^2+SZ^2;$$

$$\therefore\quad MZ^2=SZ^2;$$

因 $PM=PS$， ［定義］

$$\therefore\quad MZ=SZ;$$

∴ 在三角形 ZPM，ZPS 內，PM, MZ 各與 PS, SZ 相等，而 PZ 是兩個三角形所共同的；

$$\therefore\quad \angle MPZ=\angle SPZ.$$

［全等三角形的對應角相等］

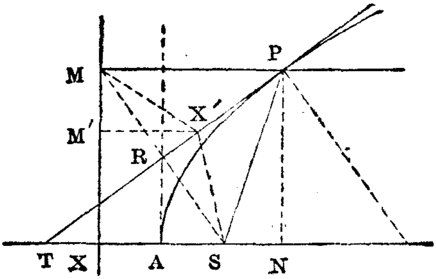
如點 P 是在頂點 A，角 SPM 等於兩直角，而與平角

SAX 相合. 所以, 平分這個角的切線和軸成垂直.

Q. E. D.

解題五(交迭定理)

§ 19. 設由拋物線任一點 P, 作一直線 PT, 平分在 PS 和由 P 到準線的垂線中間的角, 則這條直線上的點, 除 P 外, 都在拋物線外. 換言之, 即 PT 是拋物線的切線.



設 X' 是 PT 上除 P 以外的任一點. 作 $X'M$ 垂直於準線, 並作 MX', SX', MS.

設 MS 遇 PT 於 R.

在等腰三角形 SPM 內, $MR = RS$,

[平分等腰三角形頂角的直線, 必垂直平分其底]

$$MX' = SX'.$$

[一已知線的垂直平分線是與二條線兩端有等距離的點的軌跡]

但　　$M'X' < MX'$,

〔垂線是由一點到一直線距離最短的線〕

$\therefore\ M'X' < SX'$.

所以，X' 必定不在曲線內.〔定義〕　Q. E. D.

§ 20. 系一　因 $\angle SPT = \angle STP$, $ST = PS$.

§ 21. 系二　頂點 A 上的切線垂直於軸.

〔因爲它平分平角 SAX〕

解題六　定理

§ 22. 在一焦點弦兩端的二切線垂直相交於準線上.

設 PSp 是一焦點弦，又設 P 點上的切線與準線相交於 Z.

聯 ZS, Zp, 並作 PM, pm 垂直於準線.

則　$\because$ PZ 是 P 點上的切線，

$\therefore$ SZ 是與 PSp 成垂直；　〔解題五〕

$\therefore$ pZ 是 p 點上的切線。

再則　$\because$ $\triangle SPZ = \triangle MPZ$,

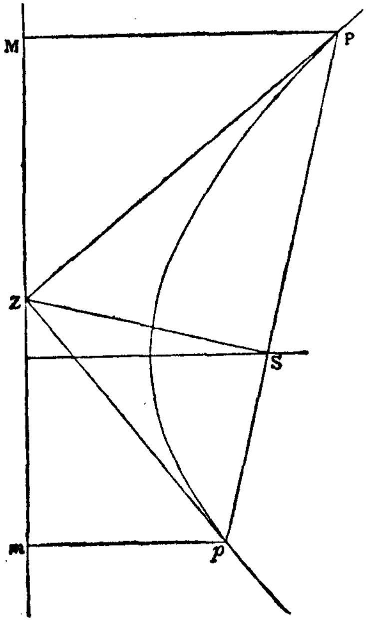
〔兩直角三角形如有一腰和弦彼此相等，此兩形必等〕

$\therefore\ \angle SZP = \angle PZM$;

$\therefore\ \angle SZP$ 是 $\angle SZM$ 之半.

依同理， $\angle SZp$ 是 $\angle SZm$ 之半，

$\therefore$ PZp 是 SZM 與 SZm 的和之半，即兩直角之半；



$\therefore$ $\angle PZp$ 是一直角. *Q. E. D.*

問題二

(解題五之部)

1. 通徑兩端上的切線與準線相遇於點 X.

2. 設拋物線 P 點上和 P 點上的切線相遇於 O, 而

$PM, P'M'$ 是由 P 和由 P' 到準線的垂線，求證 OM, OS, OM' 全相等.

試應用本題的理解，求從曲線外一點 O 作兩切線.

3. 設在一拋物線上作兩條切線 OQ, OQ', V 爲聯兩切點線 QQ' 的中點，求證 OV 與軸平行.

4. 由是，設已知一個拋物線的二切線，和它們的切點，求焦點.

5. 設 P 點上的切線遇通徑的延長線於 K, 遇準線於 Z, 求證 $SK=SZ$.

（解題六之部）

1. 設焦點弦 PP_1 兩端上的切線相遇於 Z, 又 PM, P_1M_1 爲到準線的垂線，求證 MM_1 在 Z 被平分. 由是，求證用 PP_1 作直徑所作的圓在 Z 和準線相切.

2. PSQ 是一條焦點弦. QG 垂直於 Q 點上的切線，截軸於 G. GZ 是到 P 點上的切線的一條垂線. 求證 Z 在通徑上.

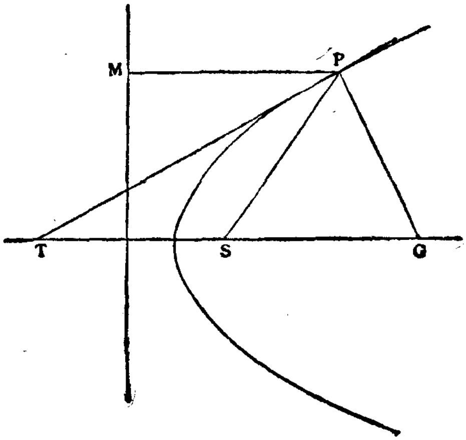
3. 在一焦點弦兩端的切線在通徑上所截"截距" (intercept) 相等.

§ 23 定義 過曲線上任一點所作與在這點上的切線

垂直的直線稱爲這點上的"法線"(normal).

解題七 定理

§ 24. 設 P 點上的切線和法線分別與軸相遇於 T 和 G, 則 $SG=SP=ST$.



作 PM 垂直於準線,則

$$\angle STP=\angle MPT \qquad \text{[內錯角相等]}$$

$$=\angle SPT, \qquad \text{[解題五]}$$

$$\therefore \quad SP=ST. \qquad \text{[對等角的邊必等]}$$

又因 $\angle TPG$ 是一直角,圓心 S 半徑 SP 或 ST 的一個圓必過 G; [半圓的內切角必爲直角]

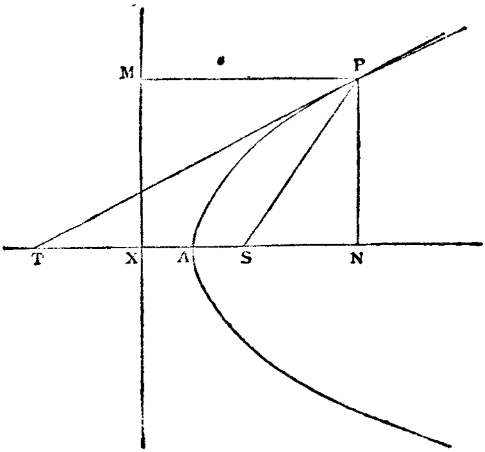
$$\therefore \quad SG = SP = ST. \qquad Q.\,E.\,D.$$

§ 25. **定義** 設點 P 上的切線和縱線分別與軸相遇於 T 和 N. NT 稱爲點 P 的"切下線" (subtangent), 或"次切線".

按：這個名詞向來多沿用日籍舊譯"次切線"三字. 爲使讀者能夠望文會意,譯者認爲用"切下線""法下線"來代替"次切線","次法線",或許還較恰當一些.

解題八 定理

§ 26. 切下線 $NT = 2AN$. 換言之，切下線被頂點平分.



作 PM 垂直於準線，則

$$ST = SP \qquad \text{[解題七]}$$

$$= PM \qquad \text{[定義]}$$

$$= XN; \qquad \text{[矩形對邊相等]}$$

又 $$AS = AX,$$

$$\therefore \quad AT = AN;$$

$$\therefore \quad NT = 2AN.$$

§ 27. **定義** 設點 P 上的法線和縱線分別與軸相遇於G和N，NG 就稱為點 P 的 "法下線" (subnormal)，或 "次法線".

解題九 定理

§ 28. 法下線 $NG = 2AS$. 換言之，法下線等於通徑之半.

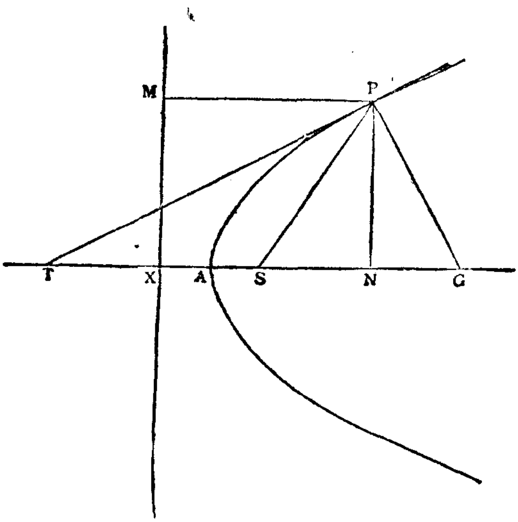
作 PM 垂直於準線，則

$$SG = SP \qquad \text{[解題七]}$$

$$= PM \qquad \text{[定義]}$$

$$= XN; \qquad \text{[矩形對邊]}$$

$\therefore \quad NG = SX = 2AS$, 即通徑之半. *Q. E. D.*



解題十 定理

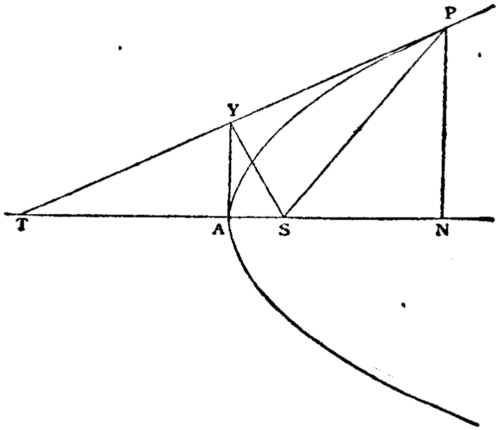
§ 29. 設任一點 P 上的切線與頂點上的切線相交於 Y, 則 SY 垂直平分 PT, 並且是 SA 和 SP 的比例中項 (卽, $SY^2=AS \cdot SP$).

聯 SP, 並作 PN 與軸垂直.

則, 因 TN 在頂點 A 被平分, 而且 AY 平行於 PN,

$\therefore$ PT 在 Y 被平分.

SYT, SYP 兩角相等 [(s. s. s.); 兩全等三角形對應角相等];



$\therefore$ SY 垂直於 PT.

又因 YA 是作成在直角三角形 SYT 內, 由直角頂垂直到斜邊 ST 上,

$$\therefore \quad SY^2 = SA \cdot ST$$

[直角三角形內每個腰是弦 (卽斜邊) 和其鄰線分的比例中項]

$= SA \cdot SP.$ [解題七] **Q. E. D.**

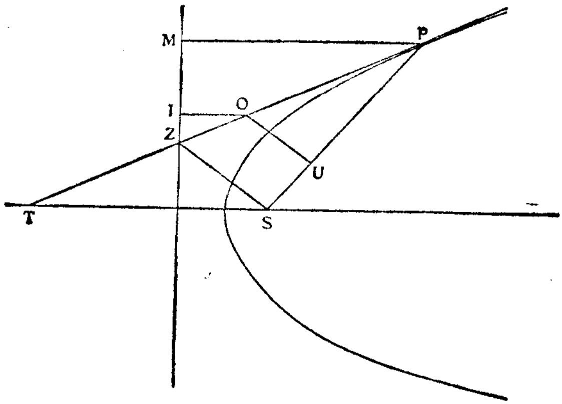
解題十一 定理

亞丹姆士性質 (Adams's property)

§ 30. 設從在點 P 的切線上任一點 O, 作 OI 與準線垂直, OU 與 SP 垂直, 則 $SU = OI$.

聯 SZ 並作 PM 垂直於準線

則因 $\angle ZSP$ 是一直角，　[解題五]



$\therefore$　ZS 是與 OU 平行.

$\therefore$　$SU : SP = ZO : PZ$

[過三角形兩邊與第三邊平行的線必分這兩邊成比例]

$= OI : PM.$　[同前，相似定理]

但是　$SP = PM$;　[定義]

$\therefore$　$SU = OI.$　*Q. E. D.*

問題三

(解題七之部)

1　求證 SM 和 PT 彼此垂直平分.

2. 設 T 是 AX 的中點，則 N 是 AS 的中點.

3. 設 SPG 是一等邊三角形，求證 $\angle TMG$ 是一直角.

4. 過四邊形 $SPMZ$ 可作一外接圓，並且這個圓切 PG 於 P.

5. 設這個圓的半徑等於 MZ，則 SPG 爲等邊三角形.

6. 拋物線任兩切線間所夾的角等於它們的切點弦所對在焦點的角之半.

7. 已知一個三角形 ABC 的底 AB 和角 C. 求分別切 CA, CB 於 A 和 B 的一個拋物線的焦點的軌跡.

8. 兩拋物線共焦點，並且它們的軸在同一直線上，不過方向相反. 求證它們相交成直角.

(解題八之部)

1. 設 R 是三角形 PNT 的外接圓半徑，求證 $R^2 = SP \cdot AN$.

2. 自 S 作一直線 SQ，與 P 點上的切線平行，遇平行於軸的直線 PE 於 E. 求證 E 的軌跡是頂點 S 而通徑等於原拋物線通徑之半的一個拋物線.

(解題九之部)

1. 設三角形 SPG 等邊，則 $SP =$ 通徑長.

2. 試從解題八和九推出解題四.

3. 求在拋物線任一已知點上作法線.

4. 設 Q 的縱線 QM 平分 NG, 求證 $QM=PG$.

5. TP, TQ 是一已知圓的切線. 求作一用 TQ 做軸而切 TP 於 P 的拋物線.

(解題十之部)

1. SP 作直徑的圓切頂點上的切線於 Y.

2. 求證 $PY\cdot PZ=SP^2$.

3. 求證 $PY\cdot YZ=AS\cdot SP$.

4. SY 延長線遇準線於 M.

5. 設用通徑作直徑畫一圓, PQ 爲拋物線和圓的一條公切線, 分別與它們相切於 P 和 Q, 求證 SP, SQ 各與通徑成 30° 的傾角.

6. 已知一個拋物線的兩條切線和焦點, 求作頂點上的切線, 又試求這個拋物線的軸和準線.

解題十二 作圖題

§31. 求從拋物線外一點 O, 作這個拋物線的兩條切線 (求作一條切線亦同).

［分析］

設 OQ, OQ' 是這兩條切線. 作準線上的垂線 QM, $Q'M'$；並聯 OS, OM, OM'.

則因 SQM 角被 OQ 平分［解題五］, 故三角形 SQO, MQO 相等［s. a. s.］, 而 $OM=OS$［相當邊相等］.

依同理, $OM'=OS$. 由是求得 M 和 M' 兩點.

［作法］

用 O 爲圓心而 OS 爲半徑畫弧, 截準線於 M 和 M'.

自 M 和 M' 作準線的兩條垂線 MQ, $M'Q'$, 分別遇已知拋物線於 Q 和 Q'.

聯 OQ, OQ'. 則 OQ, OQ' 就是所求的切線.

［證明］

聯 OS, OM, OM', SQ, SQ'.

則在三角形 SQO, MQO 內,

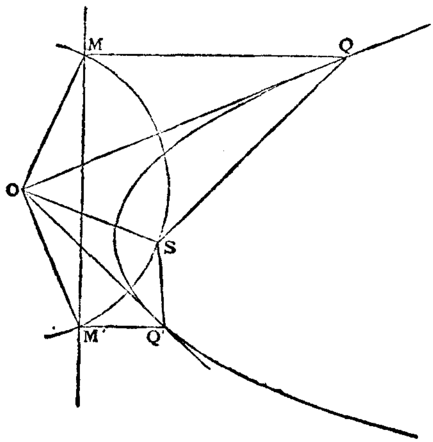
$$SQ=MQ, \qquad \text{［定義］}$$

$$QO=QO, \qquad \text{［共同］}$$

又 $$\text{底 } OM=\text{底 } OS; \qquad \text{［所作］}$$

$$\therefore \quad \angle SQO=\angle MQO;$$

［兩全等三角形的相當角相等



$\therefore$ OQ 是 Q 點上的切線. [解題五]

依同理，OQ' 是 Q' 點上的切線. *Q. E. D.*

[附註] 本題可根據"解題十"或"解題十一"內證明的原理作出. 附題見"問題四".

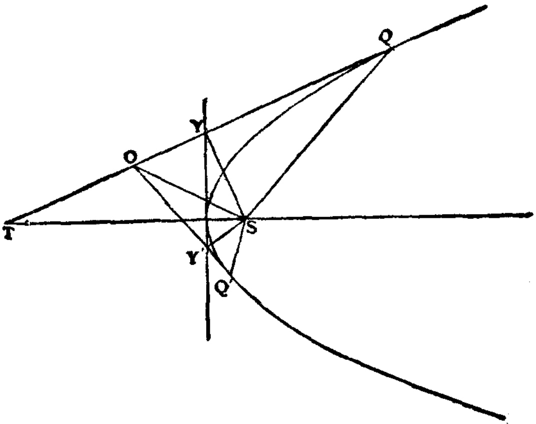
解題十三 定理

§ **32**. 兩相交切線 OQ, OQ' 所對焦點角相等，又三角形 SOQ, $SQ'O$ 相似.

作頂點上的切線，遇 OQ, OQ' 於 Y 和 Y'.

聯 SQ, SQ', SY, SY'.

延長 QO 遇軸於 T.



則因爲在 Y 和 Y' 的角都是直角， [解題十]

用 OS 做直徑的圓必過 Y 和 Y'.

[設四邊形兩對角之和等於兩直角，則可作一外接圓]

所以 $\angle SOQ' = \angle SYY'$

[同圓分或等圓分的內切角必等]

$= \angle STY$ [由直角三角形的直角頂到弦（卽斜邊）作垂線，所成兩三角形與原三角形相似，且彼此相似]

$= \angle SQO.$

[解題七；等腰三角形的兩底角必等]

依同理， $\angle SOQ = \angle SQ'O$;

∴ 其餘兩角 OSQ, OSQ' 相等，而且三角形 SOQ, $SQ'O$ 相似． [a. a a.] Q. E. D.

§ **33**. 系 OS和過 O 平行於軸的一條直線與切線所成角相等. [證明用直角三角形及同圓分內切角必等的理解]

附題見"問題四".

解題十四 定理

§ **34**. 設作一對切線 OQ OQ' 到一拋物線，並作 OV 與軸平行，遇切點弦 QQ' 於 V, 則 QQ' 必在 V 被平分.

設 OV 截準線於 R.

作 QM, $Q'M'$ 垂直於準線.

聯 OM, OS, OM', SQ, SQ'.

則在三角形 SQO, MQO 內,

$$SQ=MQ, \qquad \text{[定義]}$$

$$QO=QO, \qquad \text{[共用]}$$

又 $$\angle SQO=\angle MQO; \qquad \text{[解題五]}$$

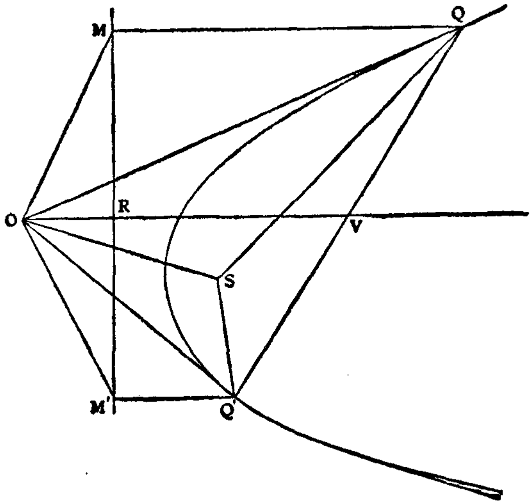
$$\therefore \quad OM=OS.$$

[兩全等三角形的相當邊必等]

依同理, $$OM'=OS;$$

$$\therefore \quad OM=OM',$$

而作成垂直於等腰三角形 OMM' 的底的 OR 必平分此



底； $\therefore\quad MR=M'R.$

但是 $QV:Q'V=MR:M'R;$

[平行線所截兩線的線分成比例]

$\therefore\quad QV=Q'V$，或 QQ' 在 V 被平分. Q. E. D.

解題十五 定理

§ 35. 拋物線任一組平行弦的中點的軌跡是一條經過與這些弦平行的切線切點而平行於軸的直線.

設 RPR' 是與這組平行弦平行的切線，P 是它的切點，而 QQ' 是平行弦之一.

過 P 作 OPV 與軸平行，遇 QQ' 於 V，遇切線 QRO 於 O.

聯 PQ 並作 RW 與軸平行，遇 PQ 於 W. 則 PQ 在 W 被 RW 所平分. ［解題十四］

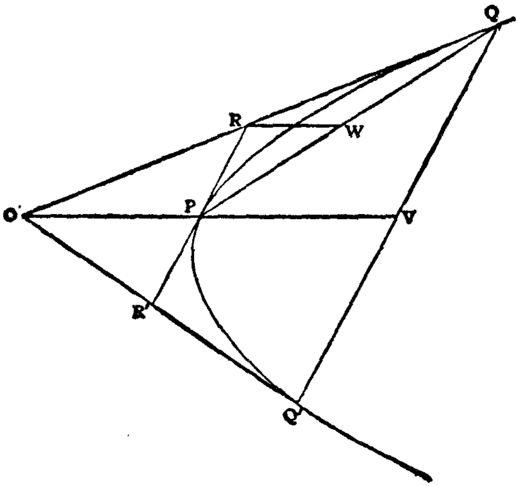
由是因 $RW \parallel OP$, $\therefore$ $OR=RQ$;

［平行於三角形底邊的直線如平分一邊必平分他邊］

又因 $PR \parallel QV$, $\therefore$ $OP=PV$. ［依前理解］

依同理，設作一切線 $Q'R'O'$，遇 OPV 於 O'，則 $O'P=PV$，故 O 和 O' 兩點相合.

因爲 OQ, OQ' 是由一點作到拋物線上的兩條切線，而



OV 是與軸平行，切點弦 QQ' 被平分於 V. [解題十四]

設想 O 沿 OV 向曲線移動，則因切點 P 和切線 RPR' 方向始終不變，弦 QQ' 必始終與 RPR' 平行，同時它的中點 V 必沿 VO 向 P 移動；最後，O, V, Q, Q' 必全在 P 處重合.

所以，所有與 RPR' 平行的弦的中點在經過 P 平行於軸的一條直線上. 換言之，任一組平行弦的中點即在過與這組弦平行的切線切點且平行於軸的一條直線上.

Q. E. D.

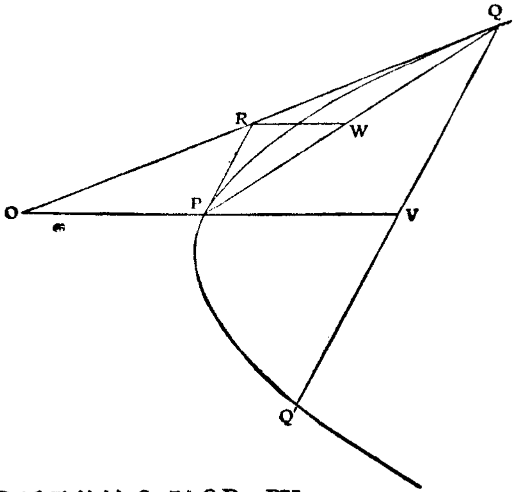
§ 36. 定義 在一曲線內所作任一組平行弦的中點的軌跡稱"徑" (diameter), 或"直徑".

[附註] 一條"徑"不一定在所有曲線內都是一條直線. 剛纔證明"徑"是直線，係就拋物線而言.

§ 37. 定義 "徑"和曲線間所含的半弦 (QV) 稱爲"徑的縱線" (ordinates to the diameter). 這個定義通行於歐洲各國. 美國數學家如 Wentworth 一流則係以這些平行弦爲"徑的縱線"，相當本書定義中所謂縱線的兩倍.

解題十六 定理

§ 38. 設 QV 是一條徑 PV 的縱線，而 Q 點上的切線



遇 VP 延長線於 O, 則 $OP=PV$.

作 PR 切拋物線於 P, 又遇 OQ 於 R; 過 R 作 RW 與軸平行.

因為 RP, RQ 是一對切線, PQ 在 W 被平分, [解題十四]

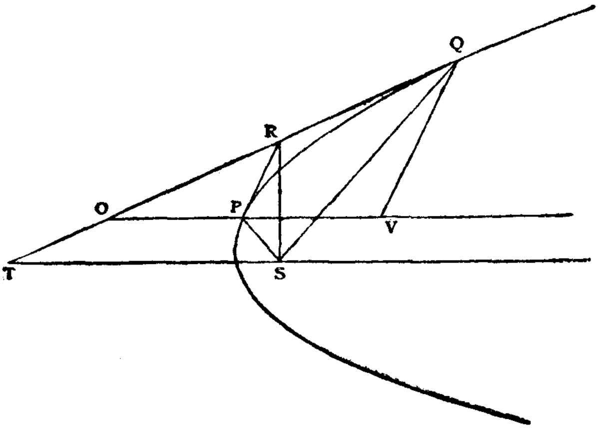
而且 PR 與 QV 平行; [解題十五]

$$\therefore \quad OP:PV=OR:RQ=PW:WQ.$$

但是 $PW=WQ, \quad \therefore \quad OP=PV.$ Q. E. D

解題十七 定理

§ 39. 設 QV 是徑 PV 的一條縱線, 則



$QV^2 = 4SP \cdot PV$.

設徑 PV 遇拋物線於 P.

作 Q 點上的切線，遇徑於 O, 遇軸於 T.

作 P 點上的切線，遇 OQ 於 R.

聯 SP, SR, SQ.

則因爲 RP, RQ 是兩條切線，

$\therefore$ SRP, SQR 兩三角形相似； 〔解題十三〕

$$\therefore \angle SRP = \angle SQR$$

$$= \angle STR \qquad \text{〔解題七〕}$$

$$= \angle POR; \qquad \text{〔同位角相等〕}$$

又因爲 P 點上的切線平分角 SPO, 〔解題五〕

$$\angle SPR = \angle OPR,$$

$\therefore$ SRP, POR 兩三角形相似. [a. a. a.]

$$PR : PO = SP : PR,$$

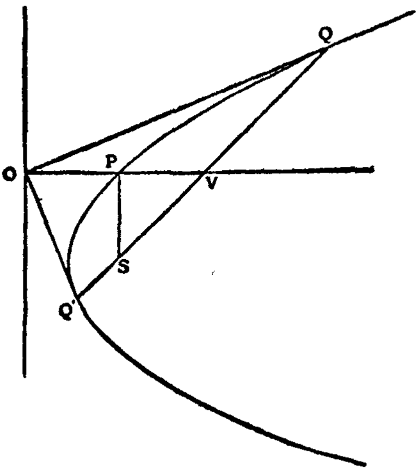
$$\therefore \quad SP \cdot PO = PR^2.$$

現在 OV 是在 P 被平分 [解題十六], $\therefore$ $QV = 2PR$.

$$\therefore \quad QV^2 = 4PR^2 = 4SP \cdot PO = 4SP \cdot PV. \qquad \text{Q. E. D.}$$

解題十八 定理

§ 40. 設徑 PV 平分焦點弦 QSQ', 遇曲線於 P, 則 $QQ' = 4SP$.



作垂直相交於準線上的切線 OQ, OQ'. [解題六]

作徑 OV. 並且聯 SP.

則因為 OV 平分直角三角形 QOQ' 的底邊, [解題十四]

$$\therefore \quad QV = OV;$$

[由直角三角形的直角頂到其弦的中點作直線, 必分此形為兩等腰三角形]

$$\therefore \quad QQ' = 2OV.$$

但是 $OP = SP$, [拋物線定義]

$$\therefore \quad OV = 2SP;$$ [解題十六]

$$\therefore \quad QQ' = 4SP.$$ Q. E. D.

解題十九　定理

§ 41. 設一個拋物線的兩弦 QQ', qq' 彼此相交, 其兩線分的積與平行焦點弦成比例; 或

$$QO \cdot Q'O : qO \cdot q'O = 4SP : 4Sp.$$

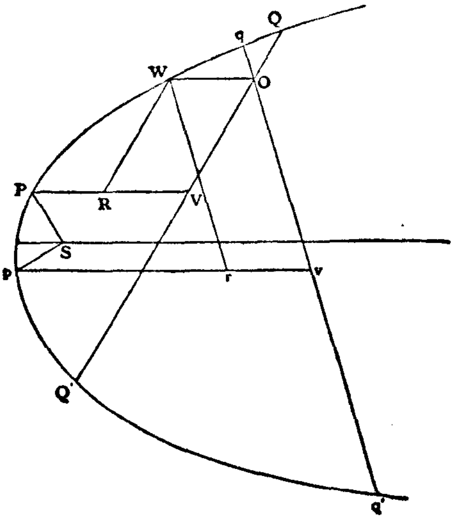
作徑 PV 平分 QQ' 於 V.

作 OW 與軸平行, 遇拋物線於 W

作徑 PV 的縱線 WR. 聯 SP.

則 $QO \cdot Q'O = QV^2 - OV^2$ [兩數平方差公式]

$= QV^2 - WR^2$ [平行四邊形的相對邊相等]



$= 4SP \cdot PV - 4SP \cdot PR$ 　　[解題十七]

$= 4SP \cdot RV$

$= 4SP \cdot OW.$ 　　[平行四邊形對邊相等]

依同理，　$qO \cdot q'O = 4Sp \cdot OW;$

$\therefore \quad QO \cdot Q'O : qO \cdot q'O = 4SP : 4Sp.$ 　Q. E. D.

解題二十　定理

§ 42. 一條弦與拋物線所成拋物線分 (parabolic segment) 的面積等於這條弦與過這條弦的兩端的切線所成

三角形的面積三分之二.

作徑 OV, 遇曲線於 P; 更在 P 點上作一切線, 遇 OQ 於 R, 遇 OQ' 於 r.

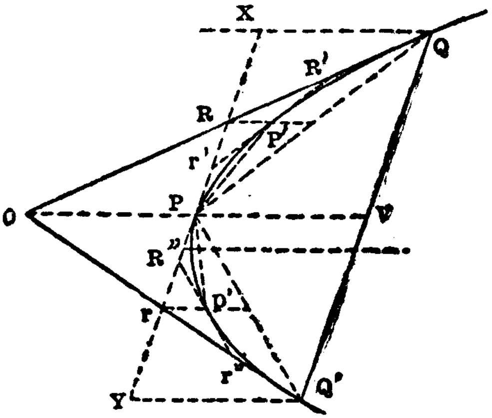
作 PQ, PQ'.

因為 $QR=RO,\ Q'r=rO.$ 〔解題十五〕

Rr 與 QQ' 平行,

而且 $QQ'=2\times Rr.$

〔聯三角形兩邊中點的線必與第三邊平行, 且等於第三邊的長之半〕



$\therefore\ \triangle PQQ' \backsim 2\triangle ORr.$

〔等高兩三角形的比等於其底的比〕

設過 R, r 作徑 $RP'\ rp'$, 並且過 P', p' 作切線 $R'P'r'$, $R''p'r''$, 我們可以照上法證明

$$\triangle P'QP \backsim 2\triangle RR'r'$$

以及 $$\triangle p'Q'P \backsim 2\triangle rr''R''$$

繼續過 R', r', R'', r'' 作徑，並且在這些徑與曲線相遇的點上作切線，我們可以證明聯一個切點和一條弦的兩端所成的每個內切三角形等於由過這些點的切線所成的外切三角形的兩倍；所以全體內切三角形的和是等於相當的外切三角形的和的兩倍。

如果繼續用此法不已，結果這些內切三角形的和的極限值將為拋物線分 QPQ'，而這些外切三角形的和的極限值將為切線 OQ, OQ' 和曲線間所包的這個平面形。

但是這些內切三角形的和總是等於這些外切三角形的和的兩倍；換言之，即等於全面積的三分之二，或 $\frac{2}{3}\triangle QOQ'$.

$$\therefore \text{ 拋物線分 } QPQ' \backsim \frac{2}{3}\triangle QOQ'.$$

［如果兩變量常相等，並且各漸近於一個極限值，這兩個極限值必相等］

Q. E. D.

問 題 四

（解題十二之部）

1. 設點 O 在準線上，試由作圖證明兩切線垂直相交。

2. 求可使 $OQSQ'$ 成一平行四邊形的點 O.

(解題十三之部)

1. 設作一第三切線，截 OQ, OQ' 於 R 和 T, 求證三角形 ORT 的外切圓必過 S.

2. 求與三已知直線相觸的一個拋物線的焦點的軌跡.

3. 一拋物線與四已知直線每條相觸，試用幾何作圖法求焦點.

4. 求證 OS 是 OQ 和 OQ' 的比例中項.前面那一個解題是現在的一個特例?

5. 已知一個拋物線的兩條切線和其中一條的切點.求證拋物線焦點的軌跡是一圓，過已知切點和兩條切線的交點,且和一條切線相觸.

6. 平分兩切線間的角 QOQ' 的直線遇軸於 R. 求證 $SO=SR$.

(解題十四之部)

1. 用焦點弦作直徑的圓必觸準線.

2. 在一焦弦兩端上的法線交於平分這條弦的徑上.

3. 已知兩切線和它們的切點，求焦點和準線.

(解題十五之部)

1. 在所有平行弦兩端上的切線必遇於同一直線上.

2. 已知一個拋物線,求軸和準線.

3. 設各弦與軸都成 $45°$ 的傾角,則過它們的中點的線必過通徑的一端.

(解題十七之部)

1. 設作 QD 垂直於 OV, 則 $QD^2=4AS\cdot PV$.

2. 設 TPV 是 P 點上的徑, QV 是一條縱線, QT 是 Q 點上的切線, 並設 $QV=TV$, 求證 T 在準線上.

3. 設過 V 作任一弦 LVL', LM 和 $L'M'$ 同是由 LL' 作到徑 PV 上的縱線. 求證 $LM\cdot L'M'=QV^2$.

4. 設在拋物線上, 從一切線的切點作一弦, 另作一直線與軸平行,遇切線, 曲線及弦, 則這條線在這三個交點間的線分與它弦成的線分等比.

5. 求過一已知點作一拋物線的一條弦, 被此已知點分成與一已知比相等的兩線分.

(解題十八之部)

1. 求作 $SP=3SQ$ 的一條焦點弦 (或作"焦弦") PSQ.

2. 設一徑在 O 與準線相遇, 求證 OS 垂直於被這條

徑所平分的諸弦.

（解題十九之部）

1. 半通徑是任一焦點弦兩線分的一個調和中項 (harmonic mean).

2. 設 QV 是徑 PV 的一條縱線，而 pv 遇 PQ 於 v，是 PQ 的共軛徑，則 $pv=\frac{1}{4}PV$.

（解題二十之部）

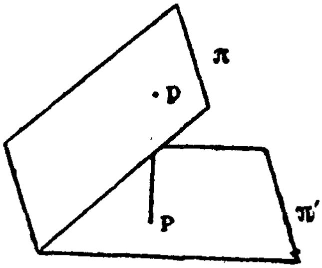
設過 Q 和 Q' 作兩直線，與 PV 平行，遇切線 Rr 的延長線於點 Y 和 Y'，則

$$\text{拋物線分 } PQQ' \backsim \frac{2}{3}\square YQQ'Y'.$$

第 二 章

正投影 (orthogonal projections)

§ 43. 定義 設 p 爲 π 平面內任意一點. 從 p 到 π' 平面作垂線 pP. 則垂線 pP 的垂足 P 即稱爲 π' 平面內 "點 p 的正投影" (the orthogonal projection of the point p), 簡稱 "點 p 的投影"; 同時 π' 平面稱爲 "投影面" (the plane of projection). 在 "正投影" 中間, π 和 π' 兩個平面常假定是不相垂直的.



§ 44. 定義 "一條線 (直線或曲線) 的投影" (projection of a line) 就是它各點的 "投影" 的總和; 換言之, 就是從線上各點作到 "投影面" 的垂線的足的軌跡.

§ 45. 定義 "一個面積的投影" (projection of an area)

就是包含這已知面積的線的"投影"所含的面積.

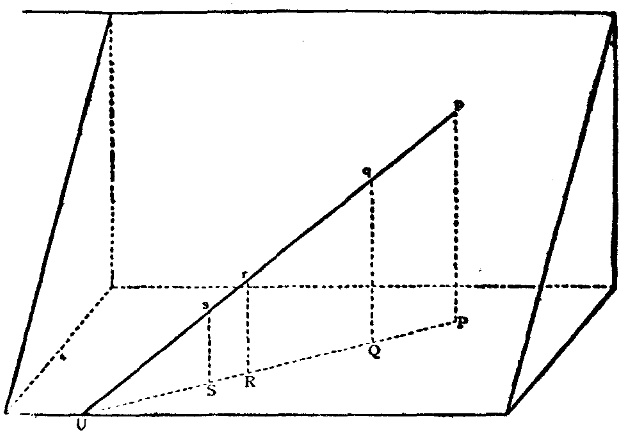
§ 46. **定義** 包含一已知曲線的平面與投影面相交的交直線稱爲"原線"(base line).

解題一 定理

§ 47. 一條直線的正投影是一條直線.

設 $pqrsU$ 是這條已知直線,與"原線"相遇於 U;並設 P, Q, R, S 是 p, q, r, s 的"投影".

則 pP, qQ, rR, sS 等垂線必在與"投影面"相交於一條直線 UP 上的一個平面 pPU 內. [過不垂直於一平面的一條已知直線,可作一平面,且僅可作一平面垂直於此已知平面]



所以 Up 的投影是直線 UP, 並且它們相交於"原線"上一點 U.

〔別證〕 設 qp 是 π 平面內的直線，引垂線 qQ 到 π' 平面。

作平面 λ，包含 qQ, 交 π' 平面於 QP 線.

在 λ 內引直線 pP 垂直於 QP.

因為 λ 含有垂直於 π' 的法線 qQ, $\therefore$ λ 垂直於 π'.

〔設一直線垂直於一平面,則通過此線的平面也必垂直於此平面〕

因為 pP 在 λ 內，而且垂直於 λ 與 π' 的公交線 QP, $\therefore$ pP 垂直於 π'.

依同理，可以證明從已知直線 qp 上各點到 π' 垂線足的軌跡是 QP.

故 QP 直線是 qp 直線的"正投影". Q. E. D.

解題二 定理

§ 48. 一有限直線線分之比不因投影而變.

設 $pqrsU$ 是這條已知直線，$PQRSU$ 是它的投影。

則因 pP, qQ, rR, sS 全垂直於"投影面",而且全在同一平面 PUp 內，它們必彼此平行；所以線分 PQ, QR, RS

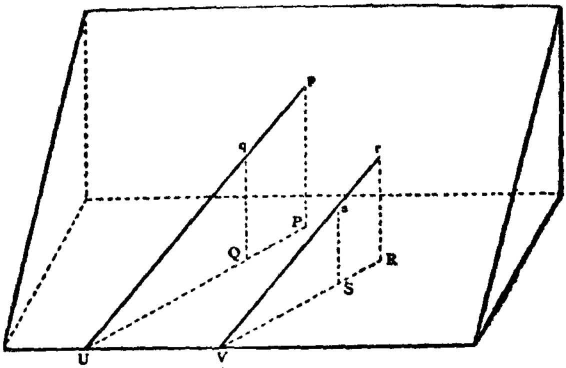
和 pq, qr, rs 成等比.

[設兩線爲數平行線所截，則其諸相當線分成比例] Q. E. D.

解題三 定理

§ 49. 二平行直線仍投影成二平行直線，其長度之比並不因投影而改變.

設 pqU, rsV 是兩條平行直線，遇"原線"於 U 和 V，又設 PQU, RSV 是它們的"投影".



pP 和 rR 平行， [垂直於一平面的兩直線必平行]

pq 和 rs 平行； [所設]

∴ 平面 UpP 和平面 VrR 平行.

[如兩角不在一平面內，每角的兩邊與另一角的相當兩邊平行，且在聯兩角頂直線的一側，則兩角必等，而所在的兩平面必平行]

依同理，兩直角三角形 pUP, rVR 的相當角相等，

$$\therefore\quad PQ : pq = PU : pU$$

［平行線所截線分成比例］

$$= RV : rV$$

［相似三角形的相當邊成比例］

$$= RS : rs.$$

［平行線所截線分成比例］　*Q. E. D.*

［注意］　$PU : pU = \cos pUP$

§ 50. **系**　在正投影中，二等分線投爲二等分線。

解題四　定理

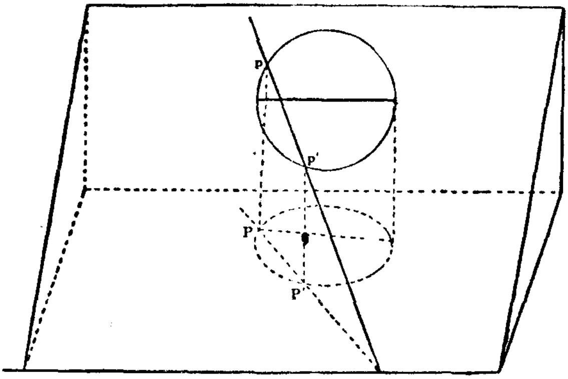
§ 51. 一條切線仍投影成一條切線，截原線於同一點.

設 p, p' 是一曲線上相鄰的兩點，則它們的"投影" P, P' 就在已知曲線的"投影"上.

設 p' 向前移動而與 p 重合，結果到 pp' 變成這個已知曲線的一條切線.

則 P' 也向前移動而與 P 重合，並且 PP' 變成已知曲線的"投影"的一條切線.

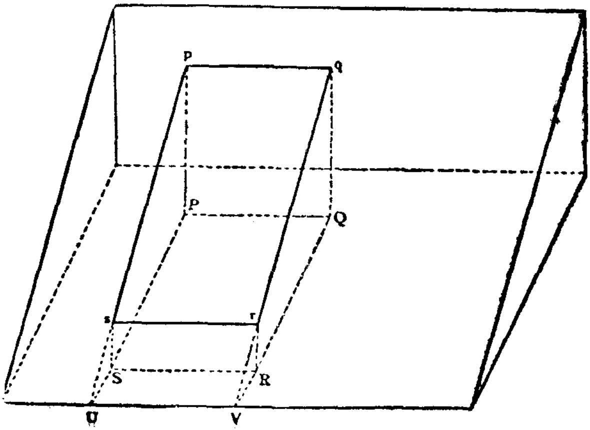
並且由"解題一"，這兩條直線與"原線"相遇於相同的一點。　*Q. E. D.*



解題五　定理

§ 52. 兩面積之比不因投影而改變.

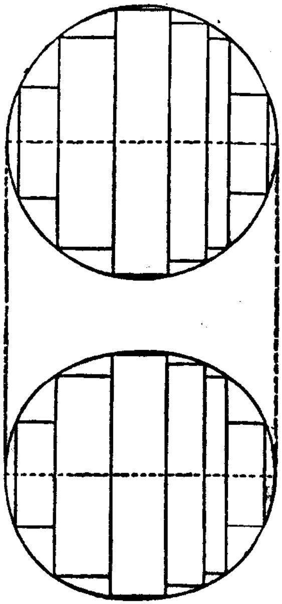
解一　設 $pqrs$ 是一矩形,有兩邊 pq, rs 與"原線"平行;又設 $PQRS$ 是它的"投影". 延長 ps, qr 遇"原線"於 U, V.



$$\text{面積 } PQRS : \text{面積 } pqrs = PQ \times PS : pq \times ps = PS : ps$$

$$= PU : pU. \qquad \text{〔兩平行線所截線分成比例〕}$$

現在,這個比(設 α 是 π, π' 兩平面間的角,卽等於 $\cos\alpha$)與矩形的長和闊無關;所以所有這些矩形在投影中有同比例的減少,同時所有這些作在 π 平面內的矩形彼此間之比也恰與它們的投影彼此間之比相同.　*Q. E. D.*



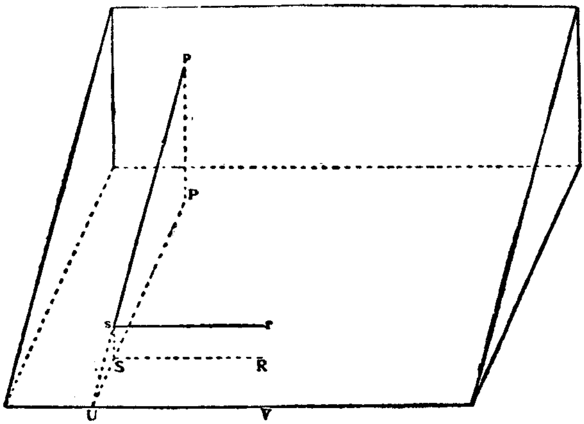
解二　但是任何形狀的圖形都可以用許多垂直於"原線"的直線分成若干狹條,每條將成爲有兩個小面積在兩端的一種矩形.現在這些矩形的和與它們的投影的和之比一定,更使矩形的數目增加而它們的闊減少,它們和已知面積的差可以減到無限小;所以任何形狀的一個面積在投影中有同比例(卽 $1 : \cos\alpha$)的減少,同時所有在 π 平面的面積彼此間之比與它們的投影彼此間之比相同.

Q. E. D.

解題六　定理

§ 53. 兩條互相垂直的直線如有一條與原線平行,則投影仍是互相垂直的直線.

設 ps sr 是互相垂直的兩條直線,內中 sr 是與"原線"



UV 平行.

設 PS, SR 是它們的"投影".

因爲 sr 與 UV 平行,它就不會與 π' 平面(卽"投影面")相遇,所以 sr 不會與 SR 相遇;又 sr, SR 是在同一平面內,所以它們彼此平行. [平行定義]

但是 SR 與 Ss 成垂直,

所以 sr 和 Ss 也必定成垂直;

[垂直於兩平行線中的一條的直線必垂直於他一條]

又 sr 與 ps 成垂直, [所設]

∴ sr 與平面 $psUSP$ 成垂直; [空間中垂直線定義]

$\therefore$ SR 垂直於平面 $psUSP$,

〔設兩平行線有一線垂直於一平面,則另一線也垂直於此平面〕

而 $\angle PSR$ 是一直角. Q. E. D.

〔注意〕 一個直角如非有一腰與"原線"平行,則它的投影卽不是一直角.

第 三 章

橢 圓 (ellipse)

§ 54. **定義** 設一移動點到一個定點和到一條定直線距離之比永爲小於1的常數，這個移動點的軌跡所成的曲線卽稱爲"橢圓". 如用 P 表移動點，S 表定點，XM 表定直線，就有如下的關係

$$SP=e\cdot PM;\qquad e<1.$$

§ 55. **定義** 這個定點 (S) 稱爲"焦點".

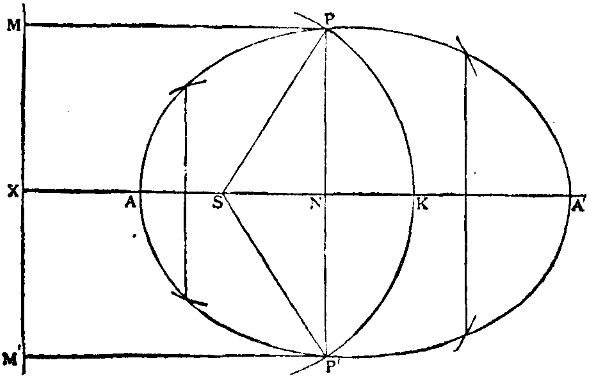
§ 56. **定義** 這條定直線 (XM) 稱爲"準線".

§ 57. **定義** 這個定比 (e) 稱爲"離心率" (eccentricity).

解題一 作圖題

§ 58. 橢圓上諸點作法. 過焦點至準線的垂線是一"對稱軸". 求頂點 A 和 A'.

由焦點 S 作 SX 垂直於準線. 在 XS 上取 A 點, 使



$$SA = e \cdot AX;$$

又在 XS 延長線上取 A' 點，使

$$SA' = eA'X.$$

則 A 和 A' 就是曲線上的點.

在直線 AA' 上取任意點 N. 用 S 作圓心，和 $e \cdot XN$ 長作半徑畫一圓；過 N 作 PNP' 垂直 AA' 並設截所作圓於 P 和 P'，則 P 和 P' 即是橢圓上的點. 作 PM, PM' 與準線垂直，

$$SP = e \cdot XN = e \cdot PM,$$

$$SP' = e \cdot XN = e \cdot P'M'.$$

對應 AA' 線上任何一點 N, 我們如上在 AA' 兩側等距離處得到兩點 P 和 P'；所以“橢圓”是對 AA' 軸對稱.

換言之,AA' 是一條對稱軸,而 A 和 A' 兩點是頂點.

〔附註〕照下方式可以證明,本題所作圓須當 N 位於 A 和 A' 中間時纔與垂線 NP 相交,如位在 AA' 部分外時則否;所以"橢圓"全部位於過 A 和 A' 垂直於軸的兩條線中間.

在 SN 或 SN 延長線上,截取 $SK=e\cdot XN$.

在此應該研究 N 在甚麼位置,NP 與圓心 S 而半徑 $e\cdot XN$ 的圓相遇;換言之,卽注意究竟 SK 是大於抑或是小於 SN.

解一 如果 N 是在 S 和 A 之間:

$$SK=e\cdot NX>e\cdot XA \text{ 或 } SA;$$

$$\therefore\quad SK<SN.$$

解二 如果 N 是在 S 和 A' 之間:

$$SK=e\cdot XN \quad \text{及} \quad SA'=e\cdot XA';$$

$$\therefore\quad \text{相減得 } KA'=e\cdot NA'<NA';$$

$$\therefore\quad SK>SN.$$

解三 如果 N 是在 SA' 延長線內:

$$SK=e\cdot XN \quad \text{及} \quad SA'=e\cdot XA';$$

$\therefore$ 相減得 $A'K=e\cdot A'N<A'N$;

$$\therefore\quad SK<SN.$$

<u>解四</u> 如果 N 是在 A 和 X 之間:

$$SK=e\cdot NX<e\cdot AX \text{ 或 } SA;$$

$$\therefore\quad SK<SN.$$

<u>解五</u> 如果 N 是在 SX 延長線內:

$$SK=e\cdot XN<XN<SN.$$

由此得證明, N 在 A 和 A' 間 AA' 軸的任何部分內, NP 都和所作圓相交,如在 AA' 部分以外卽否, 所以"橢圓"完全在過 A 和 A' 與軸垂直的兩線中間. *Q. E. D.*

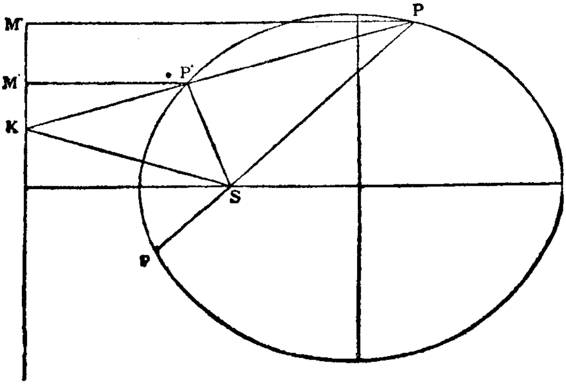
解題二 定理

§ 59. <u>設弦 PP' 交準線於 K, 則 SK 平分 SP 和 SP' 間的外角.</u>

聯 SP, SP', SK; 延長 PS 到 p 並作 $PM, P'M'$ 與準線垂直.

則 $\qquad SP=e\cdot PM \qquad$ [定義]

和 $\qquad SP'=e\cdot P'M'$; $\qquad$ [定義]



$$\therefore \quad SP : SP' = PM : P'M' = PK : P'K,$$

[PKM, $P'KM'$ 兩三角形相似，故對應邊成比例]

所以 SK 平分 $P'Sp$

[三角形的一個外角的平分線外分其對邊成兩線分，與其兩鄰邊為比例]

Q. E. D.

§ **60.** **定義** 如過"焦點"(S)的軸遇"橢圓"於 A 和 A'，AA' 就稱為"長軸"(major axis)；通常將 AA' 表成 $2a$.

§ **61** **定義** AA' 的平分點 (C) 稱為"橢圓的中心" (centre of the ellipse).

§ **62.** **定義** 引過中心 (C) 的倍縱線稱為"短軸"(minor axis)，通常用 $B'CB$ 或 BB' 表示；而命 $2b = BB'$.

解題三 定理

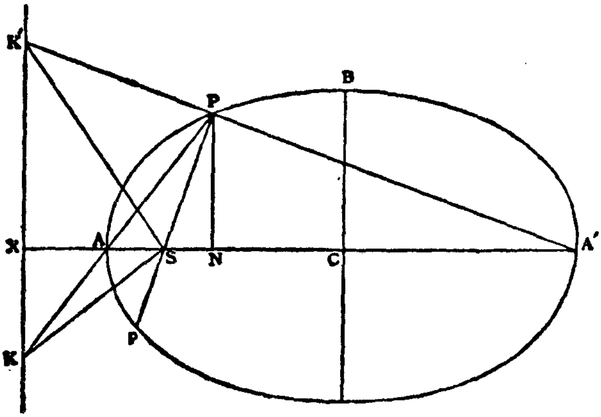
§ 63. 設 PN 是橢圓上一點 P 的縱線，

$$PN^2 : AN \cdot A'N = CB^2 : CA^2,$$

而且 CB 小於 CA.

聯 PA, $A'P$, 並且延長它們，遇準線於 K 和 K'.

聯 SP, SK, SK', 並且延長 PS 至 p.



由相似三角形 PAN, KAX, $PN : AN = KX : AX$.

由相似三角形 $PA'N$, $K'A'X$ $PN : A'N = K'X : A'X$;

$$\therefore \quad PN^2 : AN \cdot A'N = KX \cdot K'X : AX \cdot A'X.$$

但是 SK 平分 $\angle ASp$, [解題二]

而 SK' 平分 $\angle ASP$, [解題二]

$\therefore$ KSK' 是一直角; [兩補角的和之半]

$\therefore$ $KX\cdot K'X=SX^2$;

[自直角三角形直角項至弦的垂線是它在弦所截兩線分的比例中項]

$$\therefore \quad PN^2 = AN\cdot A'N = SX^2 : AX\cdot A'X.$$

依同理，因為 P 可以與 B 重合，而 X, A, A', S 各點都是固定的，

$$BC^2 : AC^2 = SX^2 : AX\cdot A'X,$$

$$\therefore \quad PN^2 : AN\cdot A'N = BC^2 : AC^2. \qquad Q.\ E.\ D.$$

再則，因為 $BC^2 : AC^2 = SX^2 : AX\cdot A'X$,

現在 $SX = AX + SA = AX(1+e)$ [定義]

以及 $SX = A'X - SA' = A'X(1-e)$, [定義]

$$\therefore \quad SX^2 = (1-e^2)AX\cdot A'X < AX\cdot A'X;$$

$$\therefore \quad BC < AC. \qquad Q.\ E.\ D.$$

[附註] 本題也可以運用下一解題（卽解題四）的理解得到證明：

設"輔圓"（定義見下）與縱線 PN 延長線的交點之一為 p,

$$PN^2 : pN^2 = CB^2 : CA^2,$$

但是，因為 pN 是垂直於輔圓直徑 AA' 的半徑，

$$pN^2 = AN\cdot A'N,$$

所以 $PN^2 : AN\cdot A'N = CB^2 : CA^2.$ $Q.\ E.\ D.$

問 題 五

(解題一之部)

1. 設一個拋物線和一個橢圓有相同焦點和準線，則這個拋物線必完全在這個橢圓外面.

2. 一個點 P 在橢圓內，或在橢圓上，或在橢圓外，因 $SP:PM$ 一比的值小於，等於或大於離心率爲別，在此 PM 是準線上的垂線.

3. 橢圓的任意弦 PQ 遇準線於 R. 求證

$$SP:PR=SQ:QR.$$

4. 一直線遇橢圓於 P, 遇準線於 R. 由 PR 內任意點 K, 作 KU 與 SR 平行，遇 SP 於 U, 又作 KI 垂直於準線. 求證 $SU=e\cdot KI$.

(解題二之部)

1. PSP_1 是一條焦弦 (即焦點弦). 求證 XP 和 XP_1 對軸所成的兩個傾角相等.

2. PSP_1 是一條焦弦. 延長 PA, P_1A 分別與準線相遇於 K 和 K_1. 求證 KSK_1 是一直角.

3. PQ, $P'Q$ 二弦分別遇準線於 p 和 p'. 求證角 pSp'

等於角 PSP' 之半.

4. 設已知一橢圓的焦點和曲線上兩點，求證準線必過一個定點.

（解題三之部）

1. 設作 PM 垂直於 BCB'，求證

$$PM^2 : BM \cdot B'M = CA^2 : CB^2.$$

2. P, Q 是一橢圓上的兩點. $AQ, A'Q$ 截 PN 或 PN 延長線於 L 和 M. 求證 $PN^2 = LN \cdot MN$.

解題四 定理

§ 64. 設將 AA' 作直徑的圓的縱線一律較原長縮短成 CA 與 CB 之比，它們的端點的軌跡就是橢圓.

$$(PN : pN = CB : CA).$$

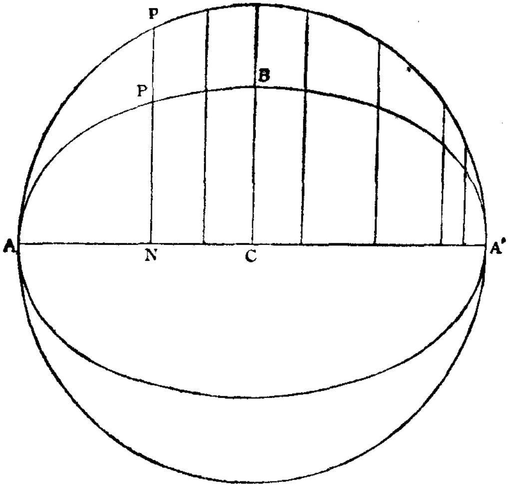
設 ApA' 是用 AA' 做直徑畫成的圓；NPp 是 p 的縱線，遇橢圓於 P.

$$PN^2 : AN \cdot A'N = CB^2 : CA^2. \qquad \text{[解題三]}$$

但是 $$pN^2 = AN \cdot A'N; \qquad \text{[垂}$$

直於直徑的半弦分直徑爲兩線分，半弦的長爲此兩線分的長的比例中項]

$$\therefore \quad PN^2 : pN^2 = CB^2 : CA^2,$$



$$PN : pN = CB : CA.$$ **Q. E. D.**

§ 65. **定義** 用 AA' 作直徑畫成的圓稱為"輔圓",或"輔助圓" (auxiliary circle).

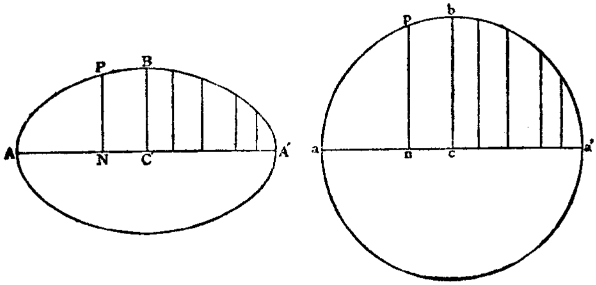
§ 66. **定義** 同在"橢圓"和"輔圓"的一條公縱線上的點 p 和點 P 稱為"對應點"或"相當點" (corresponding points).

§ 67. **定義** "橢圓"的一條弦和"輔圓"的一條弦各端為"對應點"時就稱為"對應弦" (corresponding chords).

解題五　定理

§ 68　一個圓的投影是一橢圓．

設 apa' 是一個圓，直徑 aa' 與"基線平行，cb 是垂直於 aa' 的半徑，pn 是從任意點 p 到 aa' 的垂線．



設 $APBA'$ 是圓 $apba'$ 的投影，又設點 A, A', B, C, P, N 是 a, a', b, c, p, n 諸點的投影．

則　　$pn^2 = an \cdot na'$；　　［見前］

$$\therefore \quad pn^2 : cb^2 = an \cdot na' : ca^2.$$

但是　　$pn^2 : cb^2 = PN^2 : CB^2$，　　［第二章解題三］

又　　$an \cdot na' : ca^2 = AN \cdot NA' : CA^2$；

$$\therefore \quad PN^2 : CB^2 = AN \cdot NA' : CA^2.$$

再則 PN 和 CB 都必垂直於 AA'；　　［第二章解題六］

所以 P 的軌跡是兩軸爲 CA, CB 的一個橢圓．　　［解題三］

Q. E. D.

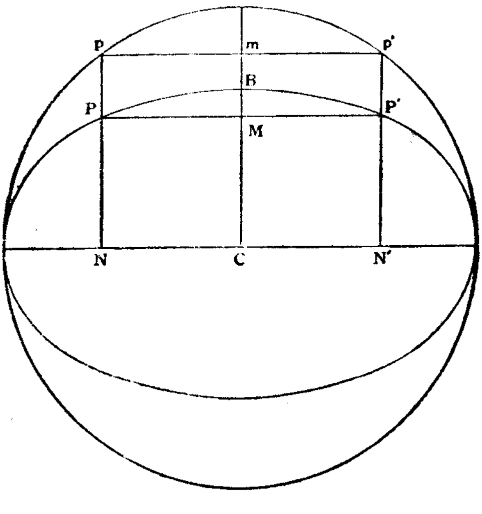
［注意］ 圓 aba' 等於"輔圓". 設 a 是"投影角" (the angle of projection), $CB : CA$ 這個比就等於 $\cos a$.

橢圓面積 $= \pi AC \cdot BC$. 餘見後.

解題六. 定理

§ 69. 橢圓對於短軸爲對稱，並且有一第二焦點 (S') 和準線

設 pmp' 是輔圓的一條弦，在 m 與"短軸"垂直相交. 在橢圓上取 P, P' 兩點和 p, p' 相應，並作公縱線 pPN,



$p'P'N'$；又聯 PP' 截短軸於 M.

則 $$pN = p'N';$$ [矩形的對邊必等]

$$\therefore \quad PN = P'N';$$ [解題四]

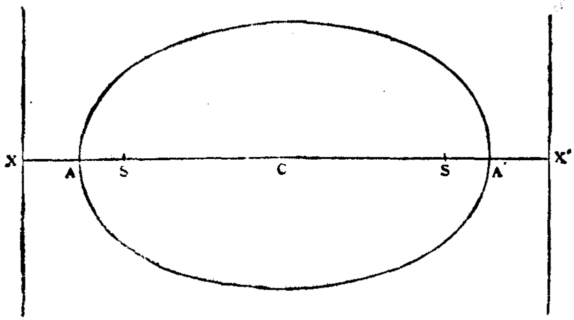
所以 PP' 平行於 NN' 且垂直於 CB.

又 $$pm = p'm;$$

[垂直於弦的直徑必平分其弦]

$$\therefore \quad PM = P'M.$$ [矩形的對邊必等]

所以，對應橢圓上任一點 P，有另一點 P' 在橢圓上，能使弦 PP' 被"短軸"垂直平分；換言之，卽橢圓對"短軸"爲對稱.



設取 CS' 等於 CS，而 CX' 等於 CX 並且過 X' 作一條直線垂直於 AA'，我們可以用這條線做"準線"，S' 做"焦點"照以前的"離心率"畫成這個橢圓.

[因爲對短軸對稱之故] Q. E. D.

[別證]

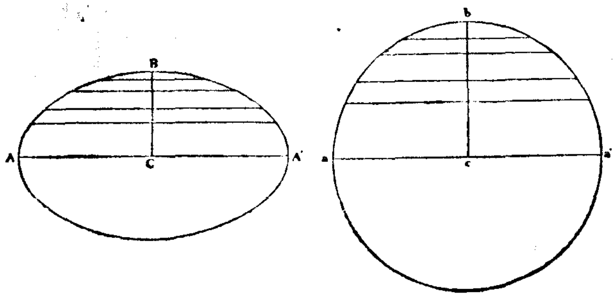
設 abc' 是一圓，而 ABA' 是它的投影.

所有在圓內與 aa' 平行的弦被 cb 所平分.

[弦被垂直其上的直徑所平分]

所以，所有橢圓內與 AA' 平行的弦被 CB 所平分.

[第二章解題三]



而且 CB 垂直於它所平分的弦. [第二章解題六]

所以橢圓是對短軸對稱.

並且可以根據在橢圓中心另一側的一第二焦點和準線作出橢圓. *Q. E. D.*

解題七 定理

§ 70. $CA = e \cdot CX$; $CS = e \cdot CA$; $CS \cdot CX = CA^2$.

$$SA = e \cdot AX,$$ [定義]

$$SA' = e \cdot A'X \qquad \text{[定義]}$$

相加，得

$$AA' = e(AX + A'X) = e(AX + AX') = e \cdot XX';$$

$$\therefore \quad CA = e \cdot CX \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

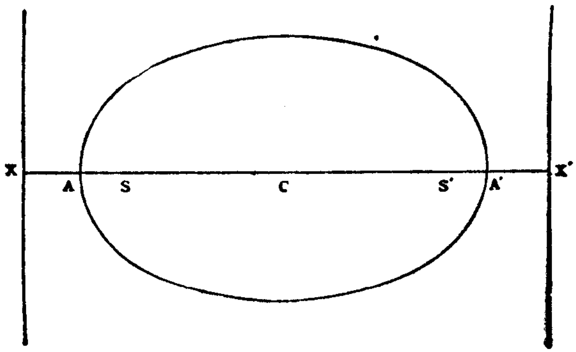
相減，得

$$SS' = e \cdot AA';$$

$$\therefore \quad CS = e \cdot CA, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\therefore \quad CS \cdot CX = CA^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Q. E. D.



問題六

(解題四之部)

1. 一條直線與橢圓相遇不能多過兩點.

2. 在橢圓內，由橢圓中心到曲線上的直線中以 CA 爲最長，而 CB 爲最短.

3. P 和 Q 是橢圓和輔圓上兩個對應點；過 P 作 KPL 與兩軸傾成和 CQ 相同的角，並且截兩軸於 K 和 L. 求證 KL 的長是一常數.

4. 引到 BB' 上的垂線 PM 遇用短軸作直徑的圓於 p'. 求證

$$PM : p'M = CA : CB.$$

5. 設一條滑棒的兩端沿兩條互相垂直的定直線移動，則棒上任一定點都可以畫成一個橢圓.

（解題五之部）

一個橢圓自己也可以投影成一個圓.

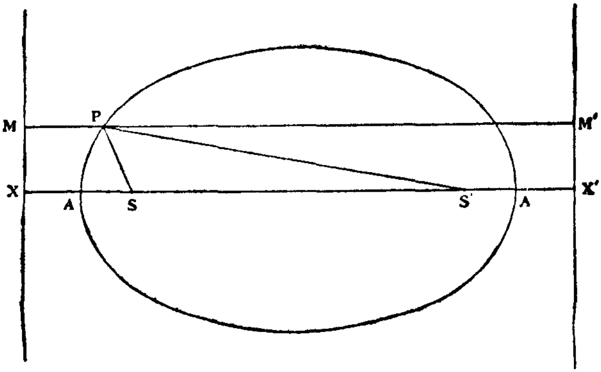
（解題七之部）

已知橢圓和一個焦點，求中心和離心率.

解題八 作圖題

§ 71 $SP+S'P=AA'$.

橢圓的機械作圖法



作 MPM' 和兩條準線垂直.

則 $$SP=e\cdot PM,$$ [定義]

以及 $$S'P=e\cdot PM';$$ [定義]

$$\therefore\quad SP+S'P=e\cdot MM'$$

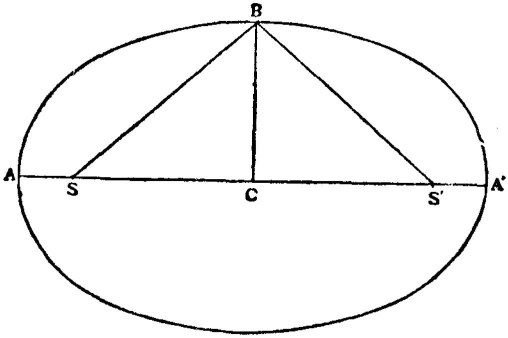
$$=e\cdot XX'$$

$$=AA'.$$ [解題七]

設將任意長的一段線兩端纏在 S 和 S' 的畫釘上,另用一鉛筆尖.在 P 引這條線使緊張,則鉛筆尖畫成 S, S' 爲焦點的一個橢圓. Q. E. F.

解題九 定理

§ 72 $\underline{CB^2=CA^2-CS^2=SA\cdot SA'}$.



$$SB+S'B=AA'.$$ [解題八]

但是 $$SB=S'B;$$

[由已知線的垂線內一點作兩直線，如它截已知線的兩點至垂線足的距離彼此相等，則這兩條線必等]

$$\therefore\quad SB=CA,$$

$$CB^2=SB^2-CS^2$$ [畢達哥拉士定理]

$$=CA^2-CS^2$$

$$=SA\cdot SA'.$$ [二數平方差定理]

Q. E. D.

§ **73**. **定義** 經過焦點的倍縱線稱爲"通徑" (latus rectum, 或 parameter), 通常用 LL' 表示。

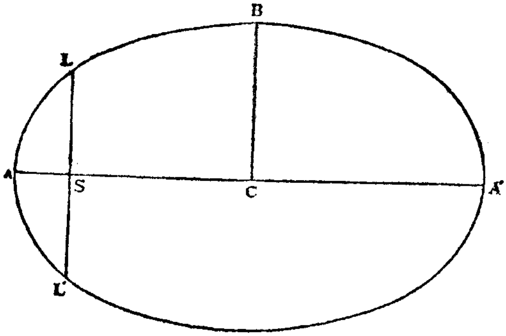
解題十 定理

§ **74** 半通徑 SL 是 CA 和 CB 的第三比例項。

即 $$SL \cdot CA = CB^2$$

因 $$SL^2 : AS \cdot A'S = CB^2 : CA^2.$$ [解題三]

但是 $$AS \cdot A'S = CB^2;$$ [解題九]



$$\therefore \quad SL^2 : CB^2 = CB^2 : CA^2;$$

$$\therefore \quad SL : CB = CB : CA;$$

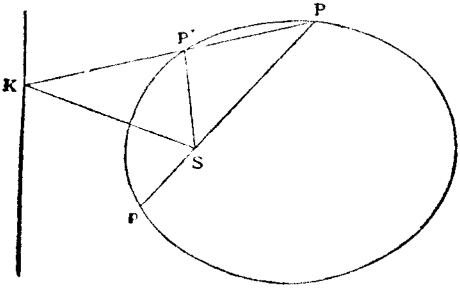
$$\therefore \quad SL \cdot CA = CB^2.$$ **Q. E. D.**

解題十一 定理

§ **75**. 設 P 點上的切線遇準線於 Z, $\angle PSZ$ 是一直角. 又焦弦兩端上的切線相交在準線上.

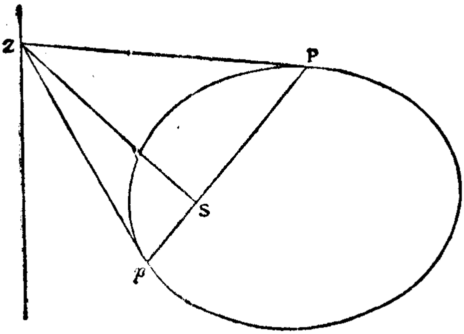
在橢圓上 P 附近取一點 P', 設聯這兩點的弦 PP' 遇準線於 K, 並延長 PS 至 p. 則 KS 平分 $\angle P'Sp$. [解題二]

設想 P' 沿 $P'P$ 向 P 移近，到 P' 與 P 重合時，$PP'K$



變成切線 PZ, $P'Sp$ 就變成兩個直角; 所以 $\angle PSZ$ 是一直角.

因此 $\angle ZSp$ 是一直角, 而 Zp 是 p 點上的切線[本解題前段之逆定理], 或 P 和 p 兩點上的切線相交在準線上. *Q. E. D.*

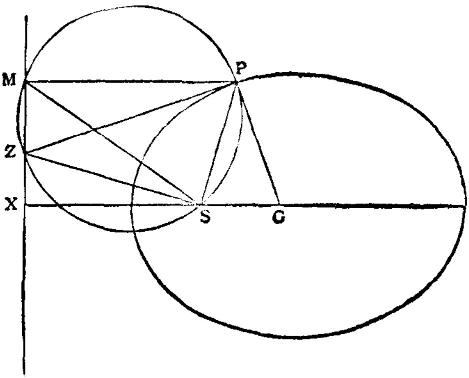


附題見"問題七".

解題十二 定理

§ 76 設 P 點上的法線與長軸相交於 G,

$$SG = e \cdot SP.$$



作切線 PZ, 聯 SZ, 作 PM 垂直於準線，並聯 SM.

$\angle ZMP$ 和 $\angle ZSP$ 都是直角； [解題十一]

所以用 ZP 作直徑的圓必過 M 和 S 兩點.

[四邊形的兩對角的和如等於兩直角，則可作一外切圓]

因 $\angle ZPG$ 是一直角 [所作]，PG 與現所作的外切圓相觸. [垂直於半徑端的直線必為圓周的切線]

所以，角 SPG 與對同圓分的角 SMP 相等.

[切線和由切點所作弦所成的角可用所截弧之半來度量]

又　$\angle PSG = \angle SPM$.　[內錯角相等]

所以 SPG, PMS 兩三角形相似；［a. a a.］

$$\therefore\quad SG : SP = SP : PM;$$

$$\therefore\quad SG = e \cdot SP.$$　Q. E. D.

解題十三　定理

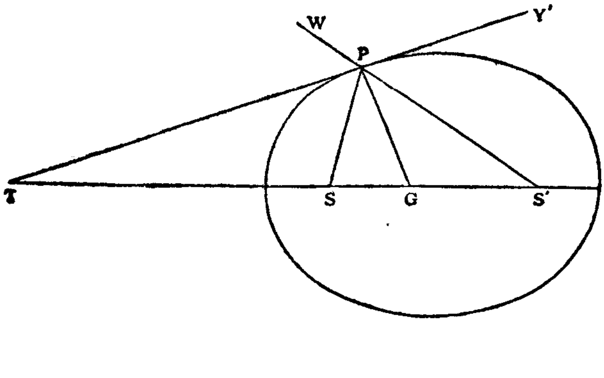
§ 77. 橢圓任一點上的切線和法線必分別平分兩焦點距間的外角和內角.

設 TPY' 和 PG 是橢圓任一點 P 上的切線和法線,

$$SG = e \cdot SP,$$　[解題十二]

$$S'G = e \cdot S'P;$$　[解題十二]

$$\therefore\quad SG : S'G = SP : S'P;$$



所以 PG (卽法線) 平分角 SPS'.

［三角形一角的平分線分其對邊成兩線分,與其兩鄰邊爲比例］

所以它們的補角 SPT, $S'PY'$ 也是相等,但是

$$\angle S'PY' = \angle WPT;$$ ［對頂角相等］

所以,PT (卽切線) 平分 SPS' 角的外角 SPW.

Q. E. D.

問題七

(解題八之部)

1. 設 P 是任意點,$SP+S'P$ 大於,等於或小於 AA',因 P 在橢圓外,橢圓上或橢圓內而別.

2. 一圓完全作在另一圓內.求證與這兩個圓的圓周等距離的一點的軌跡是一個橢圓.

3. 兩個橢圓有一公焦點,並且它們的長軸相等.求證它們相交不能多過兩點.

4. 求證平分 PS 和 PS' 間外角的直線不能再與橢圓相交.

(解題十一之部)

1. 通徑兩端點上的切線相交於 X.

2. 設過一個橢圓的任一點 P, 作 QPN 與軸垂直，遇 L 點上切線於 Q, 遇軸於 N, 則 $QN=SP$.

3. 求作在橢圓一已知點 P 上的切線.

4. 作 B 點上的切線，試證 $CS\cdot CX=CA^2$.

(解題十二之部)

1. P 是橢圓上任一點，M 是長軸上一個定點. 由 M 作一條垂線到 P 點上的切線. 求這條垂線和"動徑"(radius vector) SP 的交點的軌跡.

2. 設作 GL 垂直於 SP, 則 $PN:GL$ 比的值一定，並且 $PL=$ 通徑之半.

3. 設使 PG 延長遇短軸於 g, 則 gS 延長線遇準線於從 P 所作垂線之足 M.

(解題十三之部)

1. 設 P 點上切線的垂線 SY 遇 $S'P$ 延長線於 s, 求證 (1) $sY=SY$, (2) $SP=Ps$, (3) $S's=AA'$.

設 P 繞橢圓運動, 則 s 的軌跡是甚麼?

[注意] 在 (1) 問中, s 稱爲焦點在切線上的"影"(image).

2. 設切線和法線分別遇短軸於 t 和 g, 則以 gt 作直徑的圓必過 P 和兩個焦點.

3. 設 P 點上的法線遇長短軸於 G 和 g, 求證 SPG, gPS' 兩三角形相似.

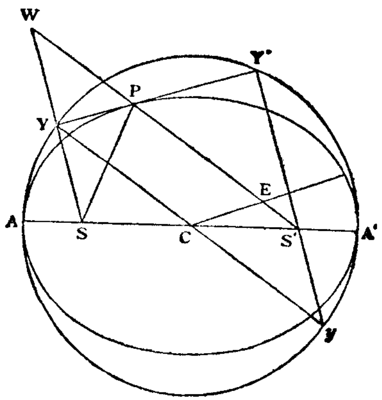
4. $$SP \cdot S'P = PG \cdot Pg.$$

5. 除掉兩軸兩端上的法線外，沒有一條法線能夠經過中心.

6. 設過一橢圓的兩個焦點畫一圓，與短軸相交於兩點，由這兩點之一作到圓和橢圓的交點的一條直線必觸橢圓(即與橢圓相切).

解題十四 定理

§ **78**. 由焦點作到 P 點上切線的兩條垂線 ($SY, S'Y'$) 的足都在輔圓上.



又設 CE 與 P 點上的切線平行，交 $S'P$ 於 E, $PE=CA$.

又 $$SY\cdot S'Y'=CB^2.$$

延長 $S'P$, SY 使相遇於 W. 聯 CY. 在 YPS, YPW 兩三角形內，YP 是共同的，PYS, PYW 兩個直角是相等的，

$$\angle YPS=\angle YPW;$$ [解題十三]

$$\therefore\quad SP=PW,\ SY=YW;$$ [兩直角三角形各有一邊和一銳角相等兩形全等；兩全等三角形的相當邊相等]

又 $SC=CS'$, $\therefore$ $S'W$ 與 CY 平行；

[聯三角形兩邊中點的線，必與第三邊平行；且等於第三邊之半]

$$\therefore\quad CY=\frac{1}{2}S'W$$

$$=\frac{1}{2}(S'P+PS)=\frac{1}{2}AA'$$ [解題八]

$$=CA;$$

所以 Y 是在輔圓上.

依同理，Y' 是在輔圓上.……………………………(1)

又 $YCEP$ 是一平行四邊形；所以

$$PE=CY=CA.\text{……………………}(2)$$

延長 $Y'S'$ 使遇圓於 y, 並聯 Yy.

則因為 $\angle YY'y$ 是一直角， [假設]

Yy 必過圓心 C, [含一直角的弧必爲半圓]

$$SY=S'y,$$

[$(a.\ s.\ a.)$, 兩全等三角形的相當邊相等]

$$SY\cdot S'Y'=S'y\cdot S'Y'$$

$$=AS'\cdot S'A'$$

[設兩弦相交，其兩線分的積彼此相等]

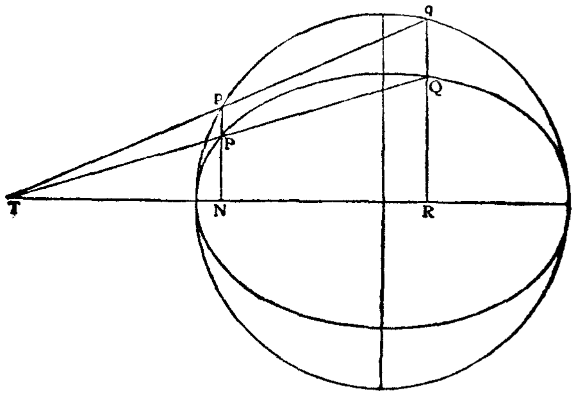
$$=CB^2.$$ [解題九]······(3)

Q. E. D.

附題參看"問題八"。

解題十五 定理

§ 79. 橢圓和輔圓的對應弦相交於長軸上。



又對應點上的切線也相交於長軸上.

設 PQ 是橢圓的一條弦,遇長軸於 T.

設 p 是輔圓對應 P 的點.聯 Tp,並且延長它使與縱線 RQ 的延長線相遇於 q.

則 $$qR : pN = RT : NT$$

[兩相似三角形的對應邊成比例]

$$= QR : PN,$$ [對應邊成比例]

$$\therefore \quad qR : QR = pN : PN$$

$$= AC : BC;$$ [解題四]

$\therefore$ q 是 Q 的對應點,而對應弦 PQ, pq 與軸相遇於同一點 T. ……………………………………………(1)

設 Q 向前移動直到和 P 重合,則 q 也必定向前移動而至與 p 重合,並且 PT, pT 變成橢圓和圓的切線,換言之,即對應點上的切線相交於長軸上. ……………………(2)

Q. E. D.

解題十六 定理

§ 80. 設 P 點上的切線遇長軸延長線於 T,

$$CN \cdot CT = CA^2.$$

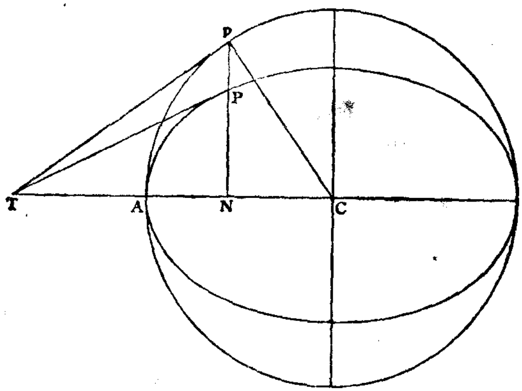
延長 NP 使與輔圓相遇於 p, 並聯 pT, pC.

pT 與圓相切; [解題十五]

所以 $\angle CpT$ 是一直角; [圓的切線必垂直於到切點的半徑]

$$\therefore \quad CN \cdot CT = Cp^2$$ [由直角三角形的直角頂到斜邊的垂線分斜邊爲兩線分, 而自爲這兩線分的比例中項]

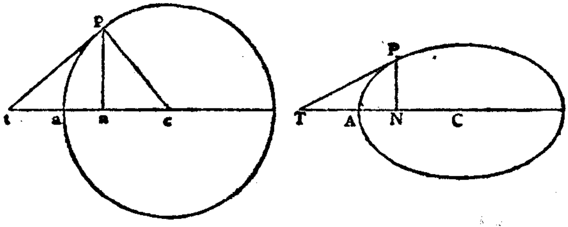
$$= CA^2. \qquad Q. E. D.$$



[別證] 作出投影是橢圓的這個圓, 並設 C, P, T, N, A 是

$$c, p, t, n, a$$

的投影.



則 pt 與圓相觸； [第二章解題四]

所以 $\angle cpt$ 是一直角， [圓的切線必垂直於到切點的半徑]

以及 $\angle cnp$ 是一直角； [第二章解題六]

$$\therefore \quad cn \cdot ct = cp^2;$$

[由直角頂到斜邊的垂線爲斜邊上兩線分的比例中項]

$$\therefore \quad CN \cdot CT = CA^2.$$ [第二章解題二]

Q. E. D.

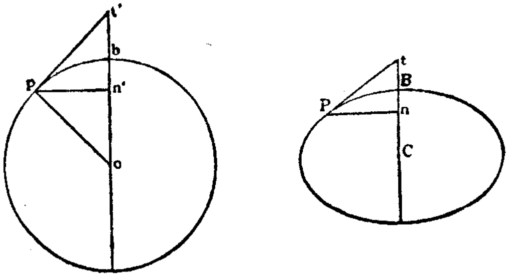
解題十七 定理

§ **81**. 設 P 點上的切線遇短軸延長線於 t, Pn 是由 P 到短軸的垂線，則

$$Cn \cdot Ct = CB^2.$$

作出投影是橢圓的這個圓.

並設 c, p, t', b, n' 是投影爲 C, P, t, B, n 的各點.



聯 cp. 則 pt' 與圓相切; [第二章解題四]

所以 $\angle cpt'$ 是一直角. [圓的切線必垂直於到切點的半徑]

又 $\angle cnp$ 是一直角; [第二章解題六]

$$\therefore \quad cn' \cdot ct' = cp^2$$

[由直角頂到斜邊的垂線爲斜邊上兩線分的比例中項

$$= ab^2;$$ [同爲半徑]

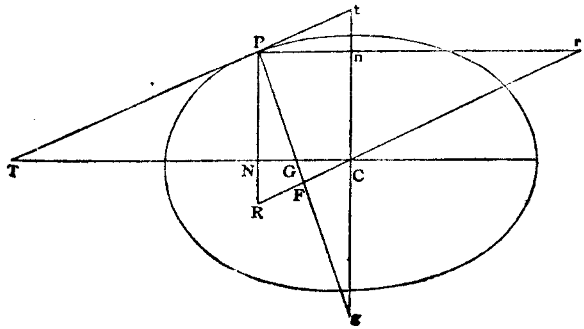
$$\therefore \quad Cn \cdot Ct = CB^2.$$ [第二章解題二]

Q. E. D.

解題十八 定理

§ 82 設 P 點上的法線遇過 C 與 P 點上切線平行的一條線於 F, 遇短軸於 g, 則

$$PF \cdot PG = CB^2 \text{ 又 } PF \cdot Pg = CA^2.$$



作 PNR Pnr 垂直於長短軸，遇 CF 於 R 和 r；並設 P 點上的切線遇長軸和短軸於 T 和 t.

因爲在 N 和 F 的角都是直角，過 G, N, R 和 F 能够作一個外切圓；［對角互爲補角的一個四邊形可作一外切圓］

$$\therefore\quad PF\cdot PG = PN\cdot PR$$

［圓外一點所作兩割線各自的長乘各自的圓外線分，所得積相等］

$= Cn\cdot Ct$ ［平行四邊形的對邊相等］

$= CB^2$. ［解題十七］……………(1)

依同理，$PF\cdot Pg = Pn\cdot Pr$

［$\triangle$s FP , nPg 相似 (a. a. a), 相當邊成比例］

$= CN\cdot CT$ ［平行四邊形的對邊相等］

$= CA^2$. ……………………………(2)

Q. E. D.

解題十九 定理

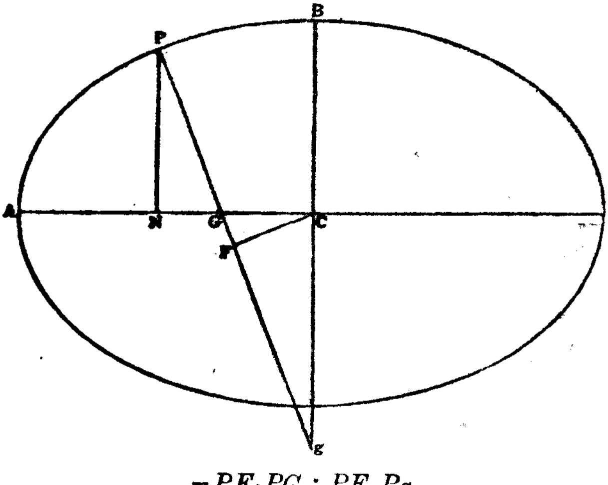
§ 88. $\underline{GN : CN = CB^2 : CA^2}$.

又 $\underline{CG = e^2 \cdot CN}$.

延長 PG 使遇短軸於 g, 作 CF 平行於 P 點上的切線, 遇 Pg 於 F.

則 $GN : CN = PG : Pg$

[$\triangle PGN$, gGC 相似 (a. a. a.), 相當邊成比例]



$=PF \cdot PG : PF \cdot Pg$

$=CB^2 : CA^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$ [解題十八]

又 $(CN - GN) : CN = (CA^2 - CB^2) : CA^2$;

$$\therefore \quad CG : CN = CS^2 : CA^2;$$ [解題九]

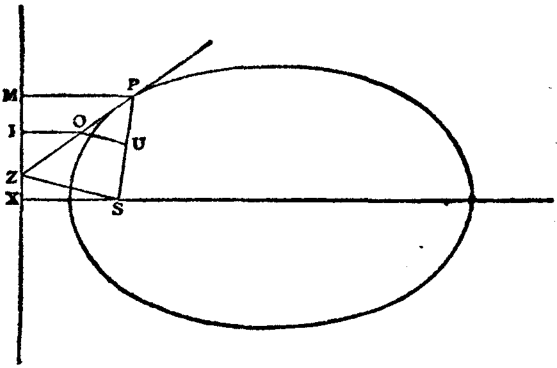
$$\therefore \quad CG = e^2 \cdot CN \cdots\cdots (2)$$ [解題七]

Q. E. D.

解題二十 定理

亞丹姆士性質 (參看 § 30)

§ 84 設從在點 P 的切線上任一點 O, 作 OI 垂直於準線, OU 垂直於 SP, 則 $SU = e \cdot OI$.



聯 SZ 並作 PM 垂直於準線.

$\angle ZSP$ 是一直角; [解題九]

ZS 與 OU 平行;

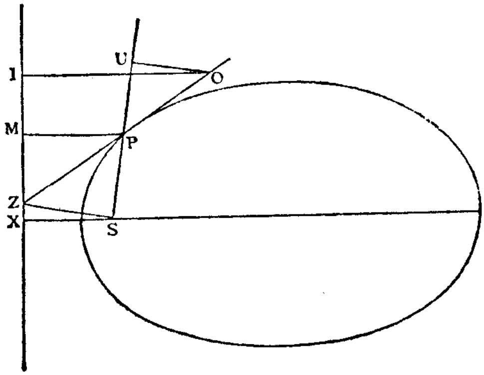
$$\therefore \quad SU : SP = ZO : ZP$$

[st△ZPS, OPU 相似 (a. R. a.)]

$= OI : PM$ [rt△s PZM, OZI 相似]

但是 $SP = e \cdot PM$; [定義]

$\therefore \quad SU = e \cdot OI.$ Q. E. D.



問題八

(解題十四之部)

1. 求作橢圓的一條切線，須與一已知直線平行.

2. 設一條過 C 平行於切線的直線交 $SP, S'P$ 兩焦點距於 E, E'，求證 $PE = PE'$.

3 又證 $SE = S'E'$.

4. SP 作直徑畫成的圓與輔圓相切.

5. SK 平行於 $S'P$, YK 垂直於 SK. 求證 S 作焦點而

K 作頂點的拋物線與本題的橢圓相切。

6 已知一個焦點和切線的位置,以及短軸的長,求另一焦點的軌跡。

7. 對一直角於一定點的一條圓的弦包成一圓錐曲線,焦點即是這個定點和圓的圓心.

8. 設第二條切線與 YPY' 垂直相交於 O, 求證

$$OY\cdot OY'=BC^2.$$

並由是證明 $CO^2=CA^2+CB^2$.

[互成垂直的切線的交點的軌跡稱為"準圓" (director circle)]

(解題十五之部)

1. P, p 是對應點. p 點上的切線遇 CB 延長線於K. 求證 $CK\cdot PN=AC\cdot BC$.

2. OQ, OQ' 是一個橢圓的兩條切線. 作 ON 垂直於軸.

求證輔圓對應點上的切線相遇於 ON.

又設 QQ' 延長線遇長軸於 T, 試證 $CN\cdot CT=CA^2$.

(解題十六之部)

1. p 是輔圓上對應 P 的點. 作 Sy 與 p 點上的切線成垂直. 求證 $Sy=SP$.

2. 任何過 N, T 的圓都截輔圓成直角.

3. 設 CY, AZ 是由橢圓中心和由長軸一端到任一點 P 上切線的垂線，求證

$$CA\cdot AZ=CY\cdot AN.$$

(解題十八之部)

1. 設由 g 作一垂線 gK 至 SP 或 $S'P$, 求證

$$PK=CA.$$

2. 設 P 點上的切線，遇長軸於 T, $CF\cdot PT$ 等於由兩焦點到 P 點上法線的兩垂線長之積。

(解題十九之部)

1. 設 P 點上的切線和法線分別遇長短軸於 T, t, G, g 等點，求證

(a) $$CG\cdot CT=CS^2,$$

(b) $$Cg\cdot Ct=CS^2,$$

(c) Tg 與 tG 成垂直。

2. 求證 $$NG\cdot CT=CB^2.$$

3. 試從本解題推出拋物線方面相當的解題，即

$$NG=2AS.$$

4. 試在橢圓上求一點 P. PG 平分 CP 和 PN 間的角。

(解題二十之部)

設 P 點上的切線遇橢圓兩準線於 Z Z'. 求證由 Z 和由 Z' 至 SP 的兩條垂線間所截長等於 AA'.

解題二十一 作圖題

§ 85. 求自橢圓外一點，作一對這個曲線的切線.

作 OI 垂直於準線.

用 S 爲圓心，$e.OI$ 爲半徑畫一圓，並作切線 OU, OU'.

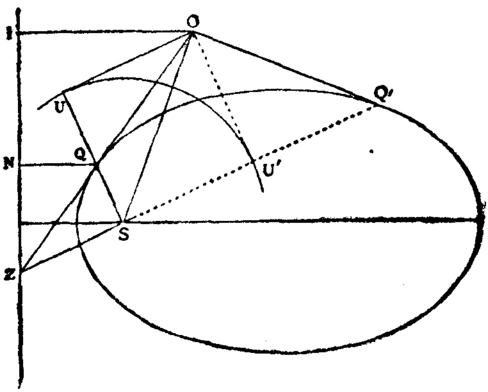
[應用相似形之理]

作 SZ 垂直於 SU，遇準線於 Z. 聯 ZO，遇 SU 於 Q. 作 QN 垂直於準線.

[應用作圓的切線之理]

則 $$SQ : SU = QZ : OZ$$

[$rt\triangle ZQS, OQU$ 相似]



$$= QN : OI;$$

[$rt\triangle QZN$, OZI 相似]

$$\therefore \quad SQ : QN = SU : OI = e : 1;$$

所以 Q 是在橢圓上. [橢圓定義]

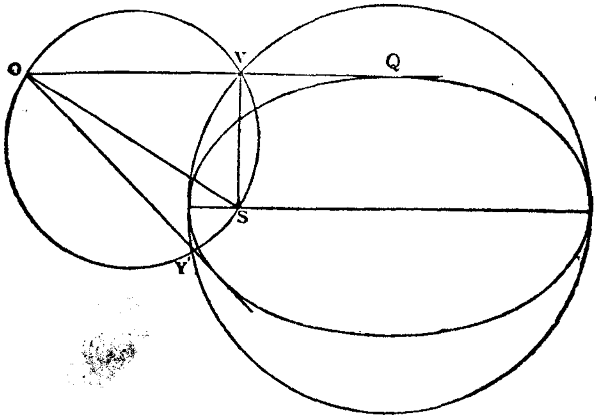
又因 $\angle QSZ$ 是一直角, OQ 必與橢圓相觸. [解題十一]

依同理,可以作出第二條切線 OQ'. Q. E. F.

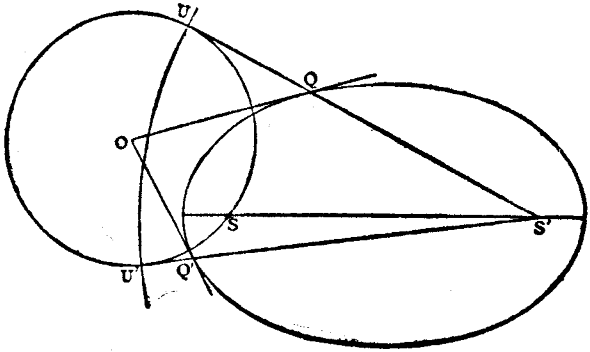
[第二法] 取 OS 作直徑,在上畫一圓,遇輔圓於 Y 和 Y'. 則 $\angle SYO$ 是一直角, [半圓所含的角必爲直角]

而 OY 觸橢圓. [解題十四]

依同理,得證 OY' 也必定與橢圓相切. Q. E. D.



[第三法] 用 O 作圓心, OS 作半徑,畫一圓;又用 S'



作圓心，AA' 作半徑，畫第二圓，交第一圓於 U 和 U'. 聯 $S'U$, $S'U'$ 遇橢圓於 Q 和 Q'. 則因 S, U 都在 $\odot O$ 上，OS, OU 相等，

又 $$QS+QS'=S'U(\text{即 } AA'),$$ [解題八]

$$QS=QU;$$

$$\therefore\quad \angle OQU=\angle OQS,$$

[OQU, OQS 兩全等三角形 (s. s. s.) 的對應角相等]

而 OQ 爲橢圓的切線。 [解題十三

依同理，得證 OQ' 也必定與橢圓相切。 Q. E. D.

解題二十二 定理

§ 86. 切線 OQ, OQ' 對等角 OSQ, OSQ' 於焦點 S.

作 OU, OU', OI 分別垂直於 SQ, SQ' 以及準線.

聯 OS. 則

$$SU = e \cdot OI \qquad \text{[解題二十]}$$

$$= SU'; \qquad \text{[解題二十]}$$

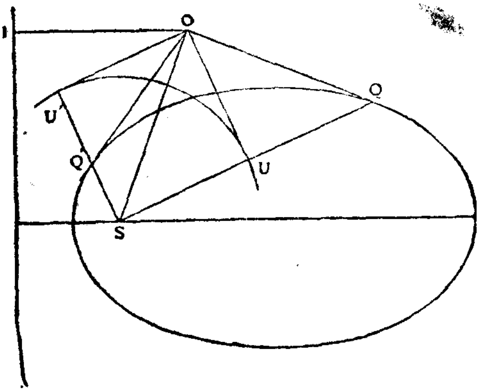
$$\therefore \quad OU = OU';$$

[四邊形有兩鄰邊相等, 則其他兩鄰邊也必定相等]

$$\therefore \quad \angle OSU = \angle OSU',$$

[因 $\triangle OSU$, OSU' 全等, 對應角必等]

即 $\angle OSQ = \angle OSQ'$.　　Q. E. D.



解題二十三　定理

§ **87**. 切線 OQ, OQ' 與 OS, OS' 傾成等角.

聯 $SQ, SQ', S'Q, S'Q'$ 並延長 $S'Q'$ 到 W, 另設 SQ' 遇 $S'Q$ 於 K.

則 $\angle S'OQ' = \angle OQ'W - \angle OSQ'$

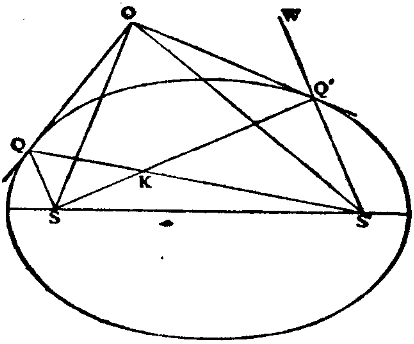
[三角形一角的外角等於兩內對角之和]

$$= \frac{1}{2}\angle SQ'W - \frac{1}{2}\angle QS'Q'$$

[解題十三, 二十二]

$$= \frac{1}{2}\angle S'KQ'.$$

[三角形一角的外角等於兩內對角之和]



依同理，得證 $\angle SOQ = \frac{1}{2}\angle SKQ;$

$\therefore \quad \angle SOQ = \angle S'OQ'.$ [對頂角相等]

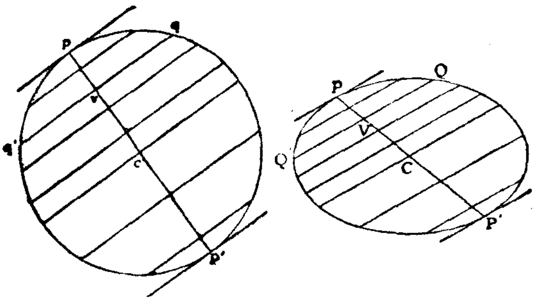
Q. E. D.

解題二十四 定理

§ 88. 橢圓內任一組平行弦的中點的軌跡是過橢圓中心的一條直線；而且在這條直線每端的切線必平行於諸弦.

作出投影是已知橢圓的這個圓. 橢圓的這組平行弦的中點就是這個圓的一組平行弦的中點的投影.

[第二章解題二，三]



在圓內，所有這些中點都在經過圓心 c 的一條直線 cv 上.

[垂直於弦的直徑必平分其弦]

而 cv 的投影正就是經過橢圓中心 C 的一條直線 CV.

[第二章解題一]

在圓上，因為所有這組平行弦都垂直於 cv.

[過弦的中點的直徑必垂直於其弦]

在 cv 每端的切線必與這組弦平行.

[圓的切線與過切點的直徑成垂直；二直線同與一直線垂直必彼此平行]

所以在橢圓內，有同一情形. [第二章解題三 四]

Q. E. D.

§ 89. **定義** 一組平行弦的中點的軌跡稱爲"直徑"(diameter)，簡稱"徑"

[注意] 通常用"徑"，"軸"兩字，都係指曲線截下的這部分"徑"或"軸".

§ 90. **定義** 被一條"徑"(CP) 所平分的一條"弦"(QQ') 之半稱爲"這個徑的一條縱線"(an ordinate to the diameter).

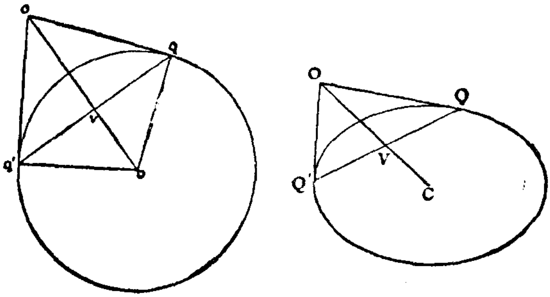
解題二十五 定理

§ 91. 任一弦兩端點上的切線相遇於平分這條弦的徑上.

設 OQ, OQ' 是切線，聯 CO，遇 QQ' 於 V.

作出投影是這個橢圓的圓。並設 O, Q, Q', C, V 是 o, q, q', c, v 的投影。聯 cq, cq'.

則 oq, oq' 與圓相切； [第二章解題四]



$$\therefore \quad oq = oq';$$

[由圓外一點至圓所作的切線相等]

$$\therefore \quad \angle ocq = \angle ocq',$$

[兩全等三角形 (s. s. s.) 的相當角相等]

$$\therefore \quad qv = q'v;$$

[兩全等三角形 (s. a. s.) 的相當邊相等]

$$\therefore \quad QV = QV'.$$ [第二章解題二]

Q. E. D.

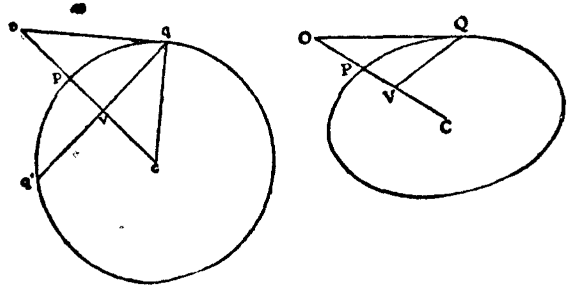
解題二十六 定理

§ 92. QV 是徑 CP 的一條縱線；設 Q 點上的切線遇徑 CP 延長線於 O, 則

$$CV \cdot CO = CP^2.$$

作出投影是這個橢圓的圓。設 c, q, o, p, v 是 $C, Q, O, P,$

V 的投影. 聯 cq, 並延長 qv 遇圓於 q'.



則 oq 是一條切線, [第二章解題四]

qq' 在 v 被平分, [第二章解題二]

∴ $\angle cvq$ 是一直角, [平分弦的直徑必垂直此弦]

又 $\angle cqo$ 是一直角, [切線必與過切點的圓的直徑成垂直]

∴ $cv\cdot co = cq^2$, [直角三角形的一腰為斜邊和由直角頂作到斜邊的垂線所成的鄰線分的比例中項]

∴ $cv\cdot co = cp^2$,

∴ $CV\cdot CO = CP^2$. [第二章解題二]

Q. E. D.

[別證] 作 P 點上的切線遇 QO 於 R.

作 PW 與 OQ 平行, 遇 QV 於 W.

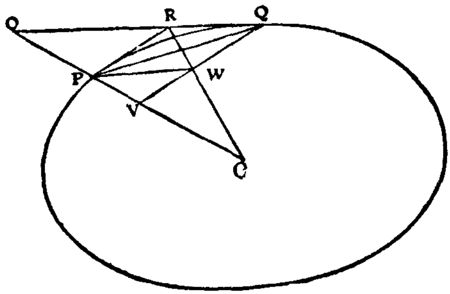
聯 PQ, RW.

則因 $PRQW$ 是一平行四邊形， [解題二十四]

$\therefore \quad RW$ 平分 PQ,

[平行四邊形的對角線必彼此平分]

$\therefore \quad RW$ 經過中心。 [解題二十五]



在 PCR, VCW 兩相似三角形內 [$VW \parallel PR$],

$$CV : CP = CW : CR;$$

又在 OCR, PCW 兩相似三角形內 [$PW \parallel OR$],

$$CW : CR = CP : CO;$$

$$\therefore \quad CV : CP = CP : CO,$$

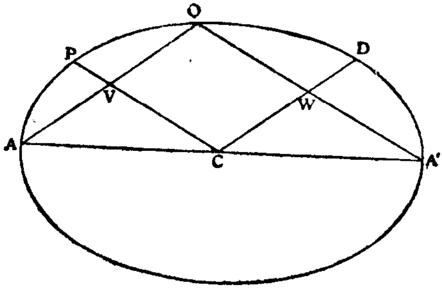
$$\therefore \quad CV \cdot CO = CP^2. \qquad Q. E. D.$$

解題二十七 定理

§ 93. 設 CP 平分與 CD 平行的各弦，則 CD 也必定

平分與 CP 平行的各弦.

作 AQ 平行於 CD, 遇 CP 於 V;



則 AQ 是被平分於 V.

聯 $A'Q$ 截 CD 於 W.

因爲 AQ 被平分於 V.

又 AA' 被平分於 C.

$$\therefore \quad A'Q \parallel CP.$$

[聯三角形任兩邊的中點的線必與第三邊平行]

又因 $CD \parallel AQ$,

AA' 被平分於 W,

$\therefore$ $A'Q$ 被平分於 W, [依前理]

$\therefore$ CD 平分與 CP 平行的 $A'Q$ 弦,

$\therefore$ CD 平分所有與 CP 平行的弦. [解題二十四]

Q. E. D.

§ 94. **定義**　設甲"徑"平分與乙"徑"平行的各弦，而乙"徑"也平分與甲"徑"平行的各弦，具有這種相互關係的甲乙兩"徑"稱爲"共軛徑" (conjugate diameters).

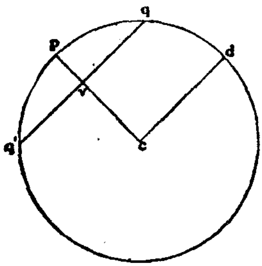
[注意]　如圖，P 點上的切線係與 CD 平行，而 D 點上也與 CP 平行.

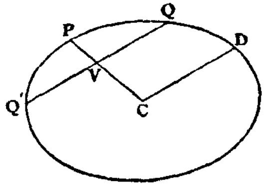
[解題二十四]

解題二十八　定理

§ 95. 橢圓內的共軛徑是圓內互爲垂直的直徑的投影.

設 CP, CD 是兩共軛徑. 作一條弦 QVQ' 平行於 CD, 且





被平分於 V. 作投影是已知橢圓的圓，並設 D, Q, P, Q', V, C, 是 d, q, p, q', v, c 的投影.

cd 與 qq' 平行，　　[第二章解題三]

又 qq' 被平分於 v,　　[第二章解題二]

$\therefore\quad cv$ 垂直於 qq',

[平分弦的直徑必垂直於此弦]

$\therefore\quad cp$ 垂直於 cd.

[垂直於兩平行線之一的直線必也垂直於其餘一線] Q. E. D.

[附註] 共軛徑的許多"可度性質"(metrical properties) 可運用後面"解題三十"所用的方法由本解題推出,詳見"問題九"中關本解題之部.

§ 96. **定義** 聯橢圓上任意點(設爲 Q)至一徑(設爲 PCP')的兩端的弦(QP, QP')稱爲"補弦"(supplemental chords).

解題二十九 定理

§ 97. 補弦與共軛徑平行.

作徑 CL, CM 與"補弦" $P'Q, QP$ 平行,並相截於 V 和 W.

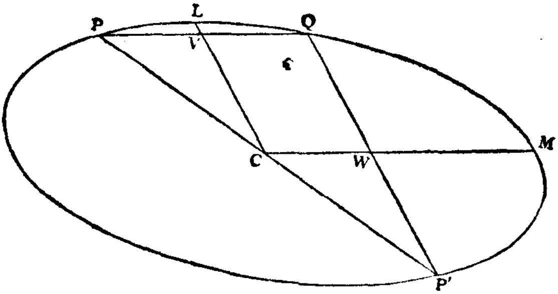
則 $$PV : VQ = PC : CP',$$

[$\triangle CPV, P'PQ$ 相似 (a. a. a.)]

$$\therefore\quad PV = VQ,$$

$\therefore\quad CL$ 平分與 PQ 平行的各弦, [解題二十四]

即平分與 CM 平行的各弦.



依同理，CM 平分與 CL 平行的各弦.

$\therefore$ CL, CM 是"共軛徑". [定義]

Q. E. D.

解題三十 定理

§ 98. QV 是徑 PCP' 的一條縱線，CD 是平行於 QV 的徑，則

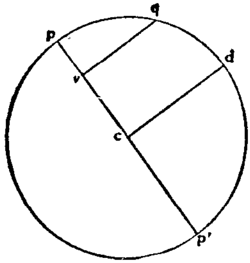
$$QV^2 : PV \cdot P'V = CD^2 : CP^2.$$

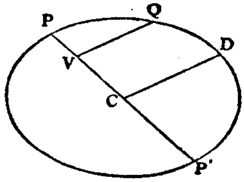
作出投影是橢圓的圓，並設 $P, V, C, P'\ Q, D$ 是 p, v, c, p', q, d 的投影.

因爲 CP, CD 是共軛徑. [定義]

$\angle pcd$ 是一直角. [解題二十八]

但是 qv 平行於 cd. [第二章解題三]





所以 qv 垂直於 cp,

[垂直於兩平行線之一的直線必也垂直於其餘一線]

$$\therefore \quad qv^2 = pv \cdot p'v,$$

[半圓所含的角必為直角;自直角三角形直角頂到弦的垂線分弦為兩線分,而自為這兩線分的比例中項]

$$\therefore \quad qv^2 : pv \cdot p'v = cd^2 : cp^2.$$

但是 $qv^2 : cd^2 = QV^2 : CD^2$, [第二章解題三]

$pv \cdot p'v : cp^2 = PV \cdot P'V : CP^2$, [第二章解題三]

$$\therefore \quad QV^2 : PV \cdot P'V = CD^2 : CP^2. \qquad Q. E. D.$$

問 題 九

(解題二十二之部)

1. QQ' 延長線遇準線於 K, 求證 $\angle OSK$ 是一直角.

2. 設一焦點弦兩端點上的切線分別與頂點上的切線相遇於 T_1 和 T_2. 求證 $AT_1 \cdot AT_2 = AS^2$.

3. OQ, OQ' 是一橢圓的兩條定切線，一條不定切線與它們相交於 q 和 q'．求證角 qSq' 一定．

4 設一條焦點弦兩端點上的法線相遇於 W，而對應切線相遇於 Z．求證 ZW 經過另一焦點．

5. OQ, OQ' 是由 O 作到橢圓的兩條切線，OS 遇 QQ' 於 R．RZ 平行於軸，遇準線於 Z．求證 $QZ, Q'Z$ 與軸傾成等角．

（解題二十三之部）

1. 已知一橢圓的兩條切線和一個焦點．求橢圓中心的軌跡．

2. 在 OQ, OQ' 上截取 OR, OR' 長，分別等於 OS, OS'．求證 RR' 等於橢圓的長軸之長．

（解題二十五之部）

1. 設一橢圓的一點 P 上的切線遇頂點 A 上的切線於 Y．求證 CY 平行於 $A'P$．

2. 設 CP 遇準線於 Z．求證 ZS 垂直於 QQ'．

（解題二十六之部）

1. VR 平行於 PQ，遇 CQ 於 R．求證 PR 與 Q 點上的切線平行．

2. 設橢圓任一點 P 上的切線遇"等共軛徑"(equi-conjugate diameters) 於 T 和 T'. 求證 TCP, $T'CP$ 兩三角形之比等於 $CT^2 : CT'^2$.

3. 拋物線方面與本解題相當的是怎樣的定理呢? 試照本解題別證所用方法來作證明.

(解題二十七之部)

1. 求作橢圓的等共軛徑.

2. 焦點是由兩共軛徑和準線所成三角形的頂垂線中心.

(解題二十八之部)

1. $P'CP$, CD 是兩條共軛徑, R 是橢圓上另一點. PR, $P'R$ 遇 CD 或 CD 延長線於 T, t. 求證 $CT \cdot Ct = CD^2$.

2. 設 CP, CD, CQ, CR 是兩對共軛徑, 又設 P 點上切線遇 CQ, CR 延長線於 T, t; 則 $PT \cdot Pt = CD^2$.

(解題二十九之部)

橢圓的外切平行四邊形的對角線必是共軛徑.

(解題三十之部)

在 QV 或 QV 延長線上取一點 R, 使 $VR : VQ = CP : CD$. 求證 R 的軌跡是一橢圓, 並求長短軸的

位置.

解題三十一 定理

§ 99. 在 CPN, CDR 兩三角形內, $CR:PN=CA:CB$; 又 $CN:DR=CA:CB$(CP, CD 是共軛徑).

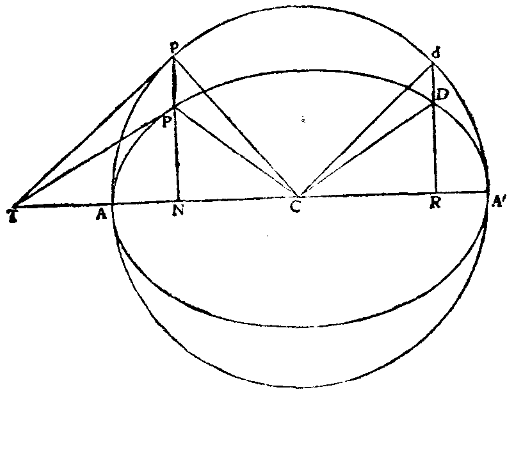
作輔圓.

延長 NP, RD 遇輔圓於 p 和 d.

聯 Cp, Cd, 並在圓和橢圓上各作切線 pT, PT, 相交於軸上. [解題十五]

則 PT 與 CD 平行, [解題二十四]

$\therefore$ TNP, CRD 兩三角形相似. [$a.\ a.\ a.$]



$$\therefore \quad TN : CR = NP : RD = Np : Rd$$ [解題四]

以及 $$\angle TNp = \angle CRd,$$

$\therefore$ TNp, CRd 兩三角形相似，

[兩三角形彼此有一角相等且兩夾邊成比例，則兩三角形必相似]

$\therefore$ pT 平行於 Cd, [同位角相等]

$\therefore$ $\angle pCd = \angle CpT =$ 一直角，

所以 $\angle$s NpC, dCR 相等，同與 $\angle pCN$ 互爲餘角，

$\therefore$ rt. $\triangle$s pNC, CRd 完全相等， [a. s. a.]

$$\therefore \quad pN = CR.$$

但是 $$pN : PN = CA : CB,$$ [解題四]

$$\therefore \quad CR : PN = CA : CB.$$

依同理 $$CN : DR = CA : CB.$$ Q. E. D.

解題三十二　定理

§ 100. 設 CP, CD 是共軛徑，

$$CP^2 + CD^2 = CA^2 + CB^2.$$

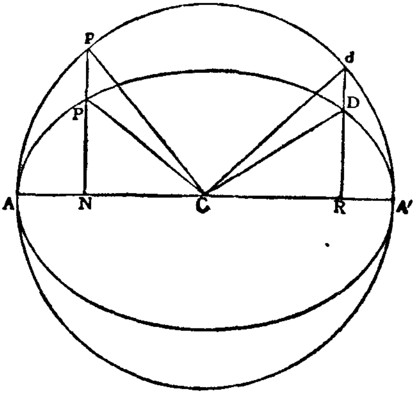
作輔圓.

延長 NP, RD, 遇輔圓於 p 和 d.

聯 Cp, Cd.

則 $$DR^2 : CN^2 = CB^2 : CA^2, \qquad \text{[解題三十一]}$$

又 $$PN^2 : CR^2 = CB^2 : CA^2, \qquad \text{[解題三十一]}$$



$$\therefore \quad (DR^2 + PN^2) : (CN^2 + CR^2) = CB^2 : CA^2.$$

但是 $$CN^2 + CR^2 = CN^2 + pN^2 = CA^2, \qquad \text{[解題三十一]}$$

$$\therefore \quad DR^2 + PN^2 = CB^2.$$

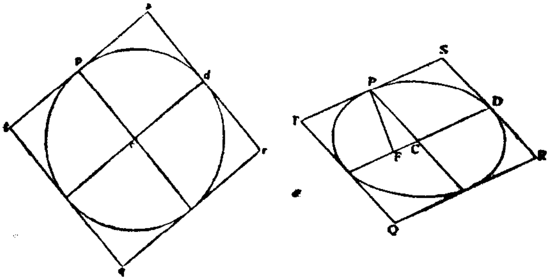
現在 $$CP^2 + CD^2 = CR^2 + CN^2 + DR^2 + PN^2$$

$$= CA^2 + CB^2. \qquad \textit{Q. E. D.}$$

解題三十三 定理

§ **101**. 兩共軛徑兩端點上切線所成的平行四邊形面積一定.

又 $$PF \cdot CD = CA \cdot CB.$$



設 $QRST$ 是切線所成的外切四邊形，

則四邊形的各邊與 CP 或 CD 平行. [解題二十四]

作出投影是這個已知橢圓的圓，並設 p, c, d, q, r 等是投影爲 P, C, D, Q, R 等的各點.

因爲 CP, CD 是互爲共軛，$\angle pcd$ 是一直角，

[解題二十八]

$qrst$ 外切於現所作的圓， [第二章解題四]

並且它的各邊與 cp 或 cd 平行， [第二章解題三]

所以 $qrst$ 是一個正方形，等於直徑作邊的正方形，即面積一定.

因此 $QRST$ 也是一定. [第二章解題五]

再則，因爲這個平行四邊形的面積等於 $4PF \cdot CD$，但是如 CP, CD 即是長短兩軸，它的面積就成 $4CA \cdot CB$，

$$\therefore \quad PF \cdot CD = CA \cdot CB. \qquad \text{Q. E. D.}$$

解題三十四　定理

§ 102. 設一個橢圓的兩弦相交，它們的線分相乘積之比等於平行的"半直徑" (semi-diameter) 的平方之比.

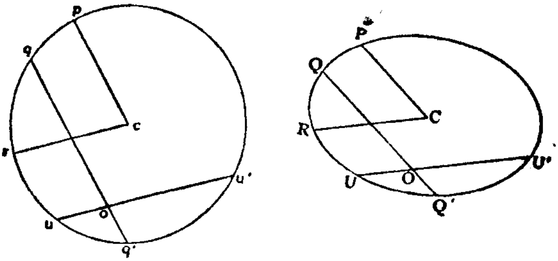
設 QOQ', UOU' 是這兩條弦，而 CP, CR 是與兩弦平行的"半直徑".

作出投影是橢圓的圓，並設 q, o, q' 等是投影爲 Q, O, Q' 等的各點.

在所作圓內，$$qo \cdot oq' = uo \cdot ou',$$

[兩弦在圓內相交，其兩線分之積彼此相等]

又 $$cp^2 = cr^2,$$



$$\therefore \quad qo \cdot oq' : uo \cdot ou' = cp^2 : cr^2.$$

但是 $$qo \cdot oq' : cp^2 = QO \cdot OQ' : CP^2,$$

[第二章解題三]

又　　$uo\cdot ou' : cr^2 = UO\cdot OU' : CR^2$,

[第二章解題三]

∴　$QO\cdot OQ' : UO\cdot OU' = CP^2 : CR^2$.

Q. E. D.

解題三十五　定理

§ 103.　橢圓的面積等於 $\pi\cdot CA\cdot CB$ (即 πab).

設 PN, QR 是橢圓的兩條縱線, p, q 是輔圓上的對應點.

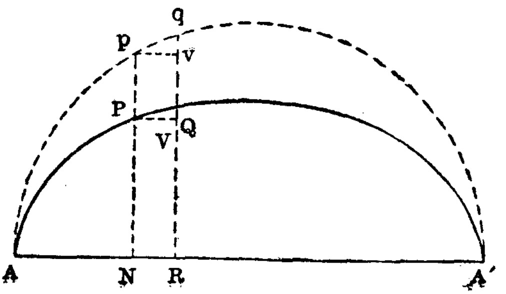
作 PV, pv 平行於長軸, 遇 RS 於 V, v.

則 $PNRV$ 的面積等於 $PN\times NR$,

[矩形的面積等於兩鄰邊的積]

又 $pNRv$ 的面積等於 $pN\times NR$,

[矩形的面積等於兩鄰邊的積]



所以 $$\frac{PNRV}{pNRv}=\frac{PN\times NR}{pN\times NR}=\frac{PN}{pN}=\frac{CB}{CA}.$$ [解題四]

因爲橢圓和輔圓內所有的矩形都能作成相似，所以這個矩形可適用於兩曲線內的所有矩形.

因此,得 橢圓內所有矩形之和:輔圓內所有矩形之和

$$=CB:CA.$$

無論矩形數目的多寡,這個關係都必定成立.

但是橢圓內所有矩形之和的"極限値"(limit) 就是橢圓的面積,而輔圓內所有矩形之和的"極限値"也就是輔圓的面積.

故得

橢圓的面積:輔圓的面積 $=CB:CA.$

現在輔圓的面積已知等於 $\pi\cdot CA^2$,

所以 橢圓的面積 $=\dfrac{CB}{CA}\times\pi\cdot CA^2=\pi\cdot CB\cdot CA.$

Q. E. D.

問題十

(解題三十一之部)

1. 設 P 點上的切線遇長軸於 T,並設 Q 是由 C 到這

條切線的垂線足，求證

$$CQ \cdot QT : CT^2 = CN \cdot PN : CD^2.$$

2. 求證 (i) $PG : CD = CB : CA$;

(ii) $Pg : CD = CA : CB$;

(iii) $PG \cdot Pg = CD^2$.

(解題三十二之部)

1. 求一對共軛徑的和的最大同最小值.

2. CP, CD 是共軛徑. 設 PG, DH 是 P 和 D 兩點上的法線. 求證 $PG^2 + DH^2$ 一定.

(解題三十三之部)

1. $PG \cdot Pg = CD^2$ [參看解題十八].

2. $SP \cdot S'P = CD^2$.

3. $CD \cdot SY = BC \cdot SP$.

4. CD 是共軛於 CP. 設作 DQ 平行於 SP, CQ 垂直於 DQ. 求證 CQ 等於"半短軸" (semi-axis minor) 之長.

5. 由 D 引切線到用短軸做直徑所作的圓上. 求證這些切線與 P 的兩焦點距平行.

(解題三十四之部)

1. 由橢圓外一點所引的切線與平行的半直徑成比例.

2. 設一個圓交一個橢圓於四點，則各交點弦與軸傾成等角.

3. 設一圓切一橢圓於 P, Q 兩點. 求證 PQ 與長短軸之一平行.

4. 試由"解題三十四"推出"解題三"和"解題三十".

5. 設 PQ, PQ' 是與軸傾成等角的弦. 求證外切於 PQQ' 的圓與這個圓錐曲線相觸於 P.

第四章

雙曲線(hyperbola)

§ 104. **定義** 設一移動點到一個定點和到一條定直線距離之比永爲大於 1 的常數，這個移動點的軌跡所成的曲線即稱爲"雙曲線". 如用 P 表移動點，S 表定點，XM 表定直線，就有如下的關係

$$SP=e\cdot PM;\qquad e>1.$$

§ 105. **定義** 這個定點 (S) 稱爲"焦點".

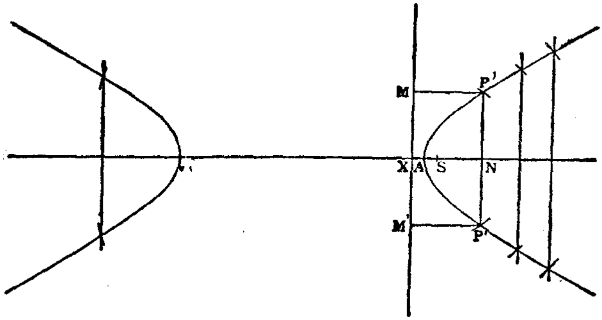
§ 106 **定義** 這條定直條 (XM) 稱爲"準線'.

§ 107. **定義** 這個定比 (e) 稱爲"離心率".

解題一 作圖題

§ 108. 雙曲線上諸點作法. 過焦點到準線的垂線是一"對稱軸. 求頂點 A 和 A'.

由焦點 S 作 SX 垂直於準線. 在 XS 上取 A 點，使



$$SA = e \cdot AX;$$

又在 SX 延長線上取 A' 點，使

$$SA' = e \cdot A'X.$$

則 A 和 A' 是曲線上的點。　　[定義]

在直線 AA' 上取任意點 N, 用圓心 S 和半徑 $e \cdot NX$ 畫一圓，過 N 作 PNP' 垂直於 AA', 設截圓於 P 和 P', 則 P 和 P' 就是雙曲線上的兩點。作 PM, $P'M'$ 垂直於準線，

$$SP = e \cdot NX = e \cdot PM,$$

$$SP' = e \cdot NX = e \cdot P'M'.$$

對應 AA' 線上任一點 N, 我們如上在 AA' 的兩側等距離處得到兩點 P 和 P'；所以"雙曲線"對於 AA' 為對稱，即 AA' 是一條軸，而 A 和 A' 兩點都是頂點。　*Q. E. D.*

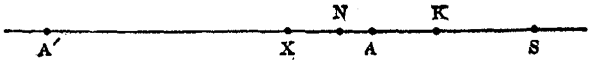
〔附註〕 照下方式可以證明，除掉 A 和 A' 中間一段外，無論 N 在 AA' 軸的任何部分，圓心 S 而半徑 $e \cdot NX$ 的圓都必與 NP 相交，所以"雙曲

線"全部位於過 A 和 A' 垂直於軸的兩條線以外，不過它卻向兩方延伸到無窮遠.

在 SN 或 SN 延長線上，截取 $SK=e\cdot NX$.

在此應該研究 N 在甚麼位置，圓心 S 而半徑 $e\cdot NX$ 的圓與 NP 相遇；換言之，即注意究竟 SK 大於抑或是小於 SN.

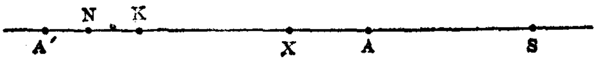
解一 如果 N 是在 A 和 X 之間:



$$SK=e\cdot NX<e\cdot AX \text{ 或 } SA;$$

$$\therefore\quad SK<SN.$$

解二 如果 N 是在 X 和 A' 之間:



$$SK=e\cdot XN \quad \text{及} \quad SA'=e\cdot XA';$$

$$\therefore\quad \text{相減得 } KA'=e\cdot NA'>NA',$$

$$\therefore\quad SK<SN.$$

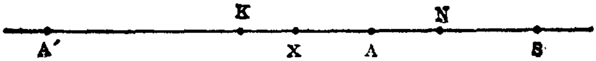
解三 如果 N 是在 SA' 延長線上:

$$SK=e\cdot XN \quad \text{及} \quad SA'=e\cdot XA';$$

$$\therefore\quad \text{相減得 } A'K=e\cdot A'N>A'N,$$

$$\therefore\quad SK>SN$$

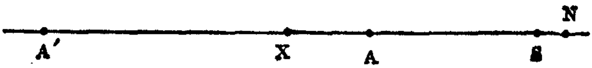
解四 如果 N 是在 A 和 S 之間:



$$SK = e \cdot NX > e \cdot AX \text{ 或 } SA;$$

$$\therefore \quad SK > SN.$$

解五 如果 N 在 AS 延長線上：



$$SK = e \cdot XN > XN > SN.$$

由此得證明，N 在軸 AA' 的 A 和 A' 中間一段內時，所作圓與垂線 NP 不能相交，而在 AA' 一段以外則否，所以"雙曲線"完全在過 A 和 A' 與軸垂直的兩線之外． Q. E. D.

解題二 定理

§ 109. 設弦 PP' 交準線於 K, SK 平分 SP 和 SP' 間的一個夾角.

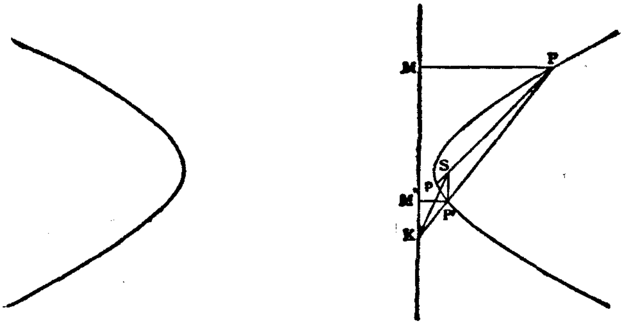
聯 SP, SP', SK; 延長 PS 至 p, 並作 $PM, P'M'$ 垂直於準線.

則 $$SP = e \cdot PM \qquad \text{[定義]}$$

以及 $$SP' = e \cdot P'M'; \qquad \text{[定義]}$$

$$\therefore \quad SP : SP' = PM : P'M' = PK : P'K,$$

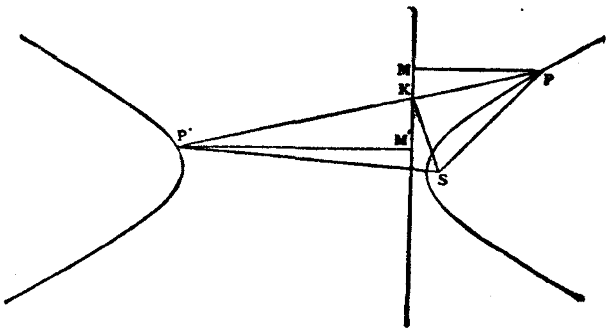
即由 $PKM, P'KM'$ 兩三角形的相似關係而得.



所以 SK 平分 $\angle P'Sp$. [三角形任一外角的平分線，外分對邊成兩線分，與它們的兩鄰邊成比例；或 P 為 A, B, C 三共線點的線外一點，如 $PA : PB = AB : BC$，則 PC 平分 PA 和 PB 的一個交角]

依同理，如 P 和 P' 不在雙曲線的同"支"(branch) 上，SK 也一樣平分 PS 和 $P'S$ 間所夾的 PSP' 角. Q. E. D.

試證一條直線只截雙曲線於兩點.



解題三　定理

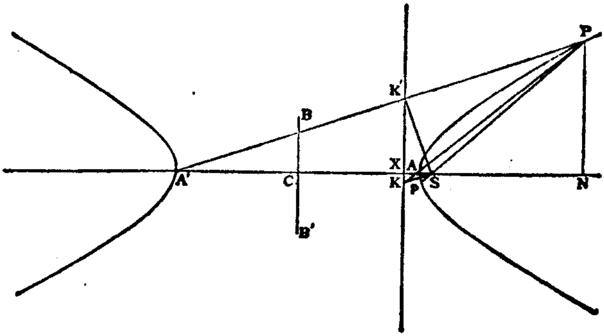
§ 110　設 PN 是雙曲線上一點 P 的縱線，則

$$PN^2 : AN \cdot A'N$$

是一定比.

聯 PA, PA', 並設它們，或延長線，遇準線於 K 和 K'.

聯 SP, SK, SK', 並延長 PS 到 p.



由相似三角形 PAN, KAX,

$$PN : AN = KX : AX;$$

由相似三角形 $PA'N, K'A'X$,

$$PN : A'N = K'X : A'X,$$

$$\therefore \quad PN^2 : AN \cdot A'N = KX \cdot K'X : AX \cdot A'X.$$

但是　　SK 平分 $\angle ASp$,　　[解題二]

又　　SK' 平分 $\angle ASP$,　　[解題二]

$\therefore$　KSK' 是一直角;　　[平角之半]

$\therefore$　$KX \cdot K'X = SX^2$;

[直角頂垂線是弦上兩線分的比例中項]

$$\therefore \quad PN^2 : AN \cdot A'N = SX^2 : AX \cdot A'X,$$

這是一個定比.　　*Q. E. D.*

§ 111.　定義　設作 CB 垂直於 AA', 而定 CB 的值使 $CB^2 : CA^2$ 代替定比 $SX^2 : AX \cdot A'X$, 則上面的比例式卽變成

$$PN^2 : AN \cdot A'N = CB^2 : CA^2;$$

如此 (一) AA' 稱爲"橫軸" (transverse axis), 或"截軸".

(二) C 稱爲雙曲線的"中心" (centre), 簡稱爲"心".

(三) CB 稱爲"半共軛軸" (semi-conjugate axis).

而 (四) 用 AA' 作直徑所作的圓稱爲"輔圓" (auxiliary circle).

問題十一

(解題一之部)

1. 在任意圓錐曲線中，設平行於一條定直線，作 RP 到準線，則 $SP:PR$ 是一定比．

2 設一個橢圓，一個拋物線和一個雙曲線有同一焦點和準線，則橢圓必全在拋物線的一側，而雙曲線必全在拋物線的另一側．

3. 在任意圓錐曲線中，過焦點的一條弦都必被焦點和準線分成調和比．

(解題二之部)

1. 求證一條直線只能截一個圓錐曲線於兩點．

2. 在任意圓錐曲線中，設將曲線上兩定點 P, P' 與一移動點 Q 相聯，並且 $PQ, P'Q$ 遇準線於 p, p'，則角 pSp' 一定．

(解題三之部)

1. PNP' 是一橢圓的一條倍縱線．求 AP 和 $A'P'$ 的交點的軌跡．

2. 求證在"正雙曲線"內 (§ 115), $PN^2 = AN \cdot A'N$.

3. PNP' 是一"正雙曲線"的一條倍縱線．求證 PAP', $PA'P'$ 互爲補角．

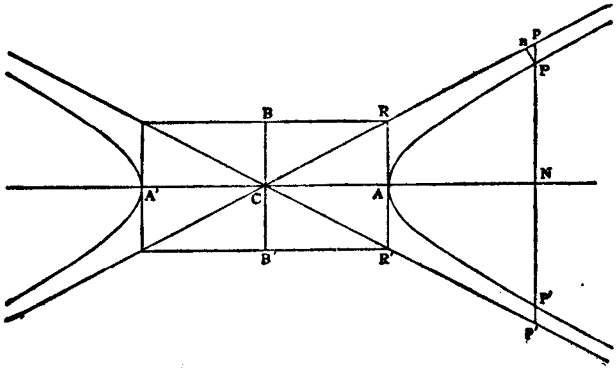
4. 設一圓的任意點 P 上的切線遇一條定直徑 AB 的延長線於 T. 求證過 T 垂直於這條直徑的直線與 AP, BP 延長線的交點都在一"正雙曲線"上。

解題四 定理

§ 112. 過 ACA', BCB' 二軸兩端的垂線圍成一個矩形，設延長這個矩形的兩對角線，並向上下兩方延長縱線 NP, 遇兩對角線延長線於 p, p', 則 $Pp \cdot Pp' = CB^2$.

又曲線漸與每條對角線貼近但永不相遇，而且兩者間的距離最終卻小於任何有限長度。

設過 A 和 B 的兩軸的平行線相遇於 R, 並設 Pp' 遇曲線於 P'.



則 PP', pp' 二者都被平分於 N; [解題一]

$$\therefore \quad pP' = p'P.$$

但是 $$pP \cdot pP' = Np^2 - PN^2;$$

[兩數平方差等於兩數和與兩數差之積]

$$\therefore \quad pP \cdot p'P = pN^2 - PN^2.$$

現在 $$pN^2 : CN^2 = AR^2 : CA^2$$

$$= CB^2 : CA^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

再則 $$PN^2 : AN \cdot A'N = CB^2 : CA^2,$$

或 $$PN^2 : (CN^2 - CA^2) = CB^2 : CA^2. \quad \cdots\cdots\cdots(b)$$

[應用兩數平方差之理]

$(a), (b)$ 兩等式相減，得

$$(pN^2 - PN^2) : CA^2 = CB^2 : CA^2;$$

$$\therefore \quad pN^2 - PN^2 = CB^2;$$

$$\therefore \quad pP \cdot p'P = CB^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因爲 $pP \cdot p'P$ 乘積一定，所以當一個因子 $p'P$ 漸漸增大時，另一個因子 pP 就漸漸減小，最終直變成較任何有限數量爲小.又設作 Pn 垂直於 CR, $Pn : Pp = \cos\frac{1}{2}\theta$ (θ 表兩對角線的交角) 爲一常數，所以 Pn 也漸漸減小，而最終變到較任何有限長度爲小. *Q. E. D.*

§ **113** **定義** 當一個曲線漸漸和一條定直線貼近，雖

然永不相遇，但最後兩者間的距離卻能變到較任何有限長度爲小，在這種情形下，這條定直線就稱爲這個曲線的一條“直漸近線” (rectilinear asymptote)，簡稱“漸近線”.

§ 114. 定義 當一個雙曲線的“漸近線”互成直角時，這種曲線稱爲“正雙曲線” (rectangular hyperbola)，或“直角雙曲線”. 在“正雙曲線”中，兩個軸顯見是相等的. 因此，這種曲線有時也稱爲“等軸雙曲線” (equilateral hyperbola).

解題五 定理

§ 115. 雙曲線對於共軛軸對稱，並且有一第二焦點和準線.

又所有過 C 的弦必被平分於 C.

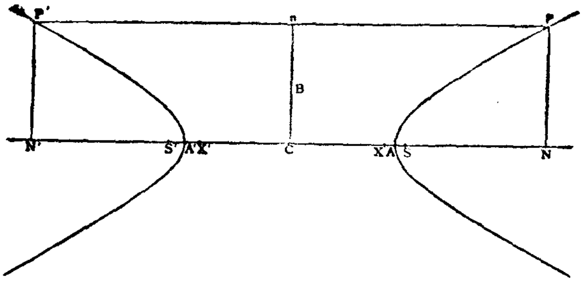
作縱線 PN, 並取 $CN' = CN$.

因爲 P 是在雙曲線上，$CN > CA$;

$$\therefore \quad CN' > CA';$$

所以過 N' 的一條垂線必截雙曲線.

設相截於 P'.



則　$P'N'^2 : AN' \cdot A'N' = PN^2 : AN \cdot A'N.$　　[解題三]

但是　　$A'N' = AN$ 而 $AN' = A'N$;

$$\therefore \quad AN' \cdot A'N' = AN \cdot A'N;$$

$$\therefore \quad P'N'^2 = PN^2;$$

$$\therefore \quad P'N' = PN.$$

聯 PP', 截 CB 或 CB 延長線於 n.

由前得知 $P'nP$ 應平行於 '橫軸", 所以垂直於 BC, 而且 $Pn = P'n$.

所以, 對應雙曲線上任一點 P, 在 CB 另一側的雙曲線上有另一點 P', 能使 PP' 被 CB 垂直平分; 即, 雙曲線是對於共軛軸對稱.

設取 CS' 等於 CS, CX' 等於 CX, 而且過 X' 作一條直線垂直於 AA'; 則用這條線作準線, S' 作焦點, 同前的離心率, 也能够作成這個雙曲線.　　Q. E. D.

解題六 定理

§ **116**. $SA=e\cdot AX$; $CA=e\cdot CX$; $CS=e\cdot CA$; $CA^2=CS\cdot CX$.

因爲 A 和 A' 都是雙曲線上的點;

$$\therefore \quad SA=e\cdot AX, \qquad \text{[定義]}$$

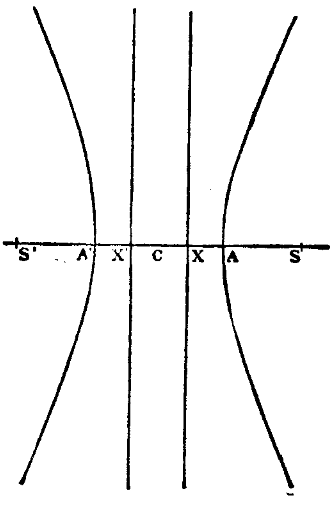
$$SA'=e\cdot A'X \qquad \text{[定義]}$$

$$=e\cdot AX'.$$

相減,得 $AA'=e\cdot XX'$,

$$\therefore \quad CA=e\cdot CX \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

相加,得 $SS'=e\cdot AA'$,



$$\therefore \quad CS = e \cdot CA. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\therefore \quad CA^2 = CS \cdot CX. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

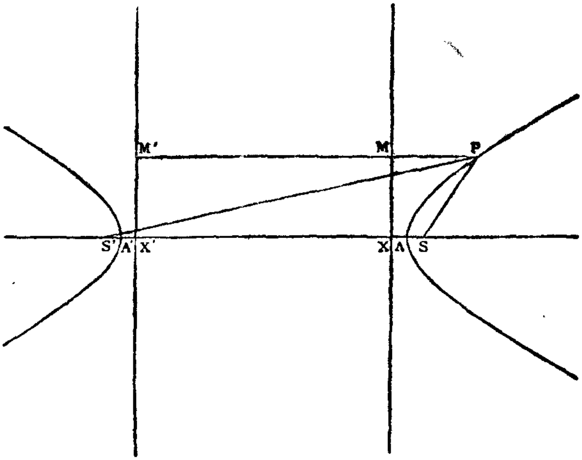
Q. E. D.

〔附註〕 本圖離心率約爲 2·2，前圖約爲 1·1．讀者應注意離心率對於 S, A, X 的相對位置，以及對於曲線的一般形狀的影響．本圖內，$CB = 2 \cdot CA$；前圖內，$CA = 2 \cdot CB$.

解題七　定理

§ 117. $S'P \sim SP = AA'$．雙曲線的機械作圖法.

作 PMM' 垂直於兩準線.



則　　$SP = e \cdot PM$,　　〔定義〕

又　　$S'P = e \cdot PM'$,　　〔定義〕

$$\therefore \quad S'P \sim SP = e \cdot MM'$$
$$= e \cdot XX'$$
$$= AA'.$$

[解題六]

Q. E. D.

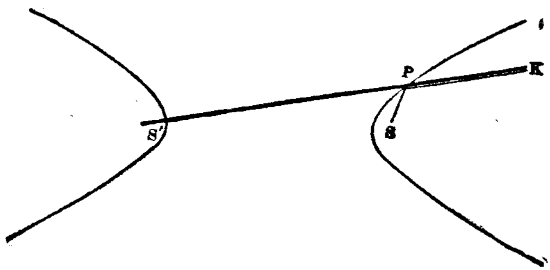
解題七 作圖法

由是得機械的作圖法如下:

$S'K$ 是一端釘牢在 S 的一條木棒，SPK 是在 S 和 K 兩處釘牢而在 P 處拉緊的一條繩。

$$S'P + PK = \text{常數},$$

又 $$SP + PK = \text{常數}.$$



$$\therefore \quad S'P - SP = \text{常數}.$$

餘可參看第五章"解題三".

解題八 定理

§ 118. $CB^2 = CS^2 - CA^2 = SA \cdot SA'$.

$$CS : CA = SA : AX, \qquad \text{[解題六]}$$

$$\therefore \quad (CS + CA) : CA = (SA + AX) : AX$$

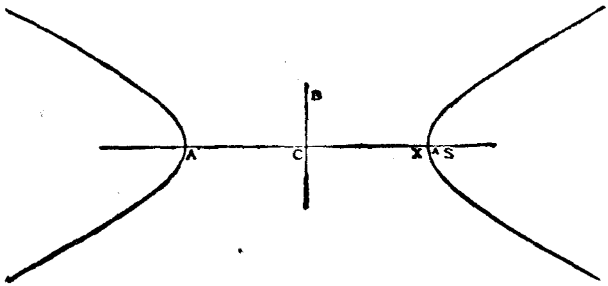
$$= SX : AX \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$CS : CA = SA' : A'X, \qquad \text{[解題六]}$$

$$\therefore \quad (CS - CA) : CA = (SA' - A'X) : A'X$$

$$= SX : A'X \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

所以，(1), (2) 兩等式相乘，得



$$(CS^2 - CA^2) : CA^2 = SX^2 : AX \cdot A'X$$

$$= CB^2 : CA^2; \qquad \text{[解題三]}$$

$$\therefore \quad CS^2 - CA^2 = CB^2 = AS \cdot A'S.$$

[應用二數平方差之理] *Q. E. D.*

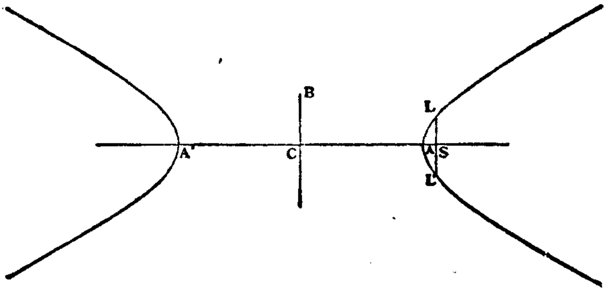
§ 119. **定義**　"通徑"(LL')就是經過焦點的倍縱線.

解題九　定理

§ 120.
$$SL \cdot CA = CB^2.$$

$$SL^2 : AS \cdot A'S = CB^2 : CA^2. \qquad \text{[解題三]}$$

但是
$$AS \cdot A'S = CB^2, \qquad \text{[解題八]}$$



$$\therefore \quad SL^2 : CB^2 = CB^2 : CA^2;$$

$$\therefore \quad SL : CB = CB : CA;$$

$$\therefore \quad SL \cdot CA = CB^2. \qquad Q.E.D.$$

問題十二

(解題六之部)

1.　設一條漸近線遇準線於E,則$CE=CA$,而$\angle CES$

是一直角.

2. 設作 Pp 與一條漸近線平行,遇準線於 p, 則 $Pp=SP$.

3. 已知橫軸和共軛軸,求焦點和準線.

4. 用 AA' 作直徑所作的圓和漸近線截準線於同一點.

(解題七之部)

1. 與兩定圓相觸的一個圓的中心的軌跡是一橢圓或雙曲線.

2. 已知一個橢圓的一個焦點和橢圓上的兩點,求證另一焦點的軌跡是一雙曲線.

(解題八之部)

1. 在正雙曲線中,$e=\sqrt{2}$, $CS^2=2AC^2$ 以及 $CS=2CX$.

2. 設漸近線遇準線於 E, 遇頂點上的切線於 H, 則 $SE=BC$, 而 SH 平行於 AE.

(解題九之部)

1. 試用解題六和解題八證本解題.

2. 在正雙曲線中,$SL=CA$.

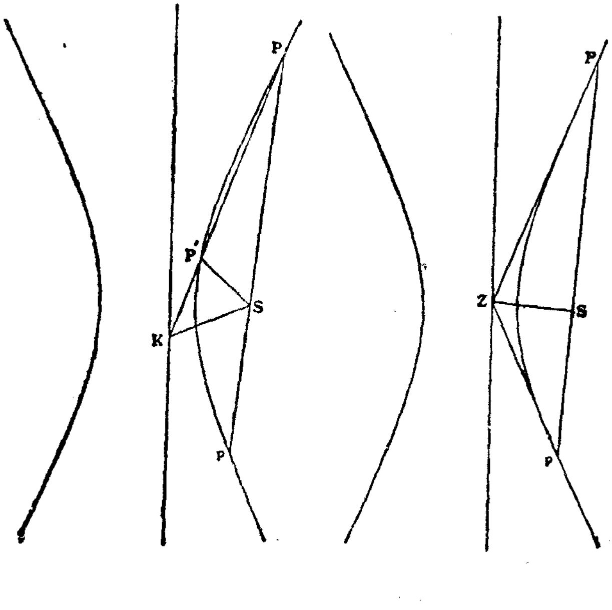
解題十 定理

§ **121**. 設 P 點上的切線遇準線於 Z, 則 $\angle PSZ$ 是一直角.

又在一焦點弦兩端點上的切線必交於準線上.

在雙曲線上 P 點附近另取一點 P', 並設弦 PP' 遇準線於 K, 又延長 PS 到 p. 則 KS 平分角 $P'Sp$. [解題二]

設 P' 漸向 P 移近, 到兩點重合時 (如第二圖內), 則 $PP'K$ 變成切線 PZ, 而 SK 與 SZ 重合, 所以 $\angle P'Sp$ 就



變成二直角；即 PSZ 角是一直角.

因此 ZSp 角也是一直角，而 Zp 是 p 點上的切線；換言之，即 P 和 p 兩點上的切線交於準線上.　　Q. E. D.

解題十一　定理

§ **122**　設 P 點上的法線交橫軸於 G, 則

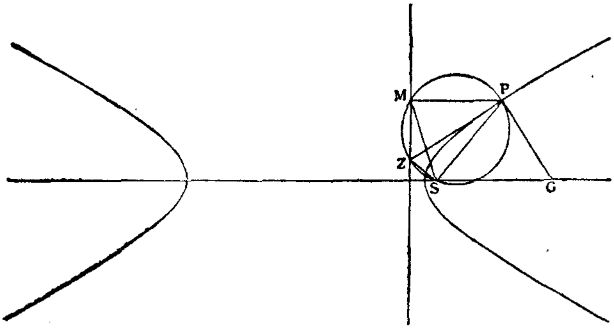
$$SG = e \cdot SP.$$

作切線 PZ, 聯 SZ; 作 PM 垂直於準線，聯 SM.

ZMP 和 ZSP 兩角都是直角；　　[解題十]

所以用 ZP 作直徑的圓過 M 和 S 兩點。

[設四邊形兩對角的和等於兩直角，則可作一外切圓]



因爲 ZPG 角是一直角[題設]，PG 與現所作圓相觸。

[過切點的直徑與切線成垂直]

所以，同以 SP 弧之半來度的角 SPG 和角 SMP 相等.

[切線和由切點所作弦所成的角可用所截弧之半來度]

又角 GSP = 角 SPM.　　[內錯角相等]

所以 SPG, PMS 兩三角形相似；　[$a.\ a.\ a.$]

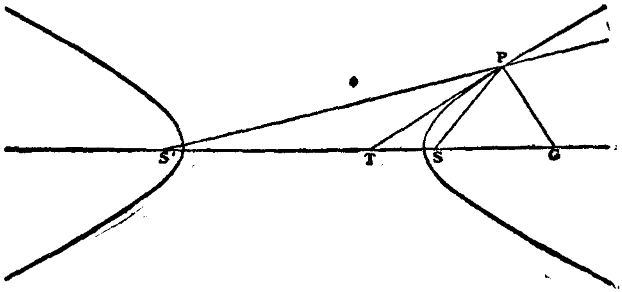
$$\therefore\quad SG : SP = SP : PM;$$

[兩三角形相似，其對應邊成比例]

$$\therefore\quad SG = e \cdot SP.$$　　Q. E. D.

解題十二　定理

§ 123　雙曲線任一點 P 上的切線和法線各爲兩焦點距間內外角的平分線.



設 TP 是切線而 PG 是法線，各遇橫軸於 T 和 G.

$$SG = e \cdot SP$$　　[解題十一]

以及

$$S'G = e \cdot S'P;$$　　[解題十一]

$$\therefore \quad SG : S'G = SP : S'P;$$

所以，PG 外分角 SPS'.

[三角形任一外角的平分線外分其對邊成兩線分，與其鄰邊成比例]

所以，它們的補角 SPT, $S'PT$ 也必定相等，而且 PT 內分角 SPS'. Q. E. D.

[附註] 讀者可取本解題來和第三章"解題十三"對照參看.

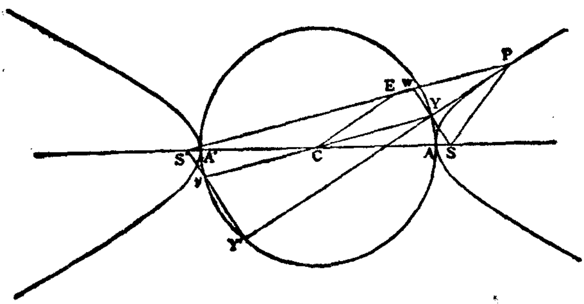
解題十三 定理

§ 124. 由焦點到 P 點上切線的垂線 (SY, $S'Y'$) 足在用 AA' 作直徑所畫圓上.

又如 CE 平行 P 點上的切線，交 $S'P$ 於 E，則 $PE = CA$

又 $$SY \cdot S'Y' = CB^2.$$

延長 SY 遇 $S'P$ 於 W，聯 CY.



在 YPS, YPW 兩三角形內，YP 共同，而 $\angle s$ PYS, PYW 相等，又 $\angle YPS = \angle YPW$； [解題十二]

$$\therefore \quad SY = YW,\ SP = PW;$$

[兩全等三角形的相當邊相等]

所以 $S'W$ 與 CY 平行；

[一四邊形如有兩對邊 $(WY,\ S'y)$ 平行，而且相等，則此形爲一平行四邊形]

$$\therefore \quad CY = \frac{1}{2}S'W$$

$$= \frac{1}{2}(S'P - SP)$$

$$= \frac{1}{2}AA' \qquad \text{[解題七]}$$

$$= CA;$$

所以 Y' 是在輔圓上（卽用 AA' 作直徑的圓上）.

依同理，得證明 Y 在輔圓上 ……………………(1)

又，$YCEP$ 是一個平行四邊形；所以

$PE = CY = CA$. ……………………(2)

設 $Y'S'$ 遇圓於 y，並聯 Yy.

則因爲 $\angle YY'y$ 是一直角，Yy 過圓心 C,

[直角是半圓所含的角]

$$SY=S'y,$$

［兩全等三角形的對應邊相等及平行四邊形的對邊相等］

$$SY\cdot S'Y'=S'y\cdot S'Y'$$

$$=AS'\cdot S'A'$$ ［自圓外一點作兩割線，則此割線與其圓外線分之積等於彼割線與其圓外線分之積］

$$=CB^2.$$ ［解題八］

Q. E. D.

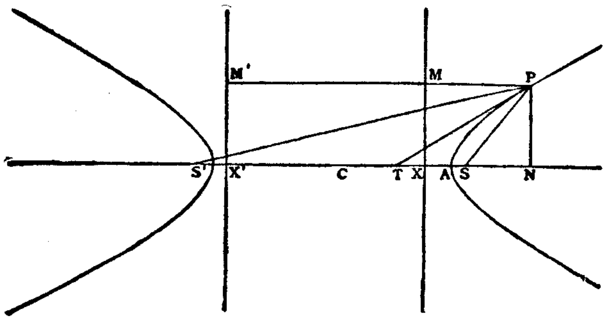
解題十四　定理

§ 125. 設 P 點上的切線遇橫軸於 T，則

$$CN\cdot CT=CA^2.$$

作 PMM' 垂直於兩準線.

聯 SP, $S'P$.



則因為 PT 平分 $\angle SPS'$; [解題十二]

$$\therefore \quad ST : S'T = SP : S'P$$

[三角形一角的平分線分其對邊成兩線分,與兩鄰邊成比例]

$$= PM : P'M \qquad \text{[定義]}$$

$$= NX : NX';$$

$$\therefore \quad ST + S'T : S'T \sim ST$$

$$= NX + NX' : NX \sim NX';$$

$$\therefore \quad 2CS : 2CT = 2CN : 2CX;$$

$$\therefore \quad CN \cdot CT = CS \cdot CX$$

$$= CA^2. \text{ [解題六]} \qquad Q.\ E.\ D.$$

解題十五 定理

§ 126. 設 P 點上的切線遇共軛軸的延長線於 t, Pn 是由 P 到共軛軸的垂線,則

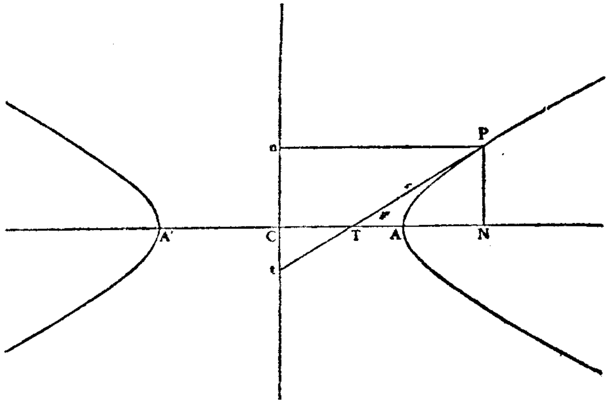
$$Cn \cdot Ct = CB^2.$$

作縱線 PN.

則由相似三角形,

$$TN : CT = PN : Ct.$$

$$\therefore \quad TN \cdot CN : CN \cdot CT = PN^2 : Ct \cdot PN;$$



$$\therefore\quad TN\cdot CN : CA^2 = PN^2 : Ct\cdot Cn.$$

[解題十四]

但是 $TN\cdot CN = CN^2 - CT\cdot CN$

$= CN^2 - CA^2$ [解題十四

$= AN\cdot A'N$; [應用兩數平方差之理]

$$\therefore\quad AN\cdot A'N : CA^2 = PN^2 : Ct\cdot Cn.$$

所以互換中項，得

$$AN\cdot A'N : PN^2 = CA^2 : Ct\cdot Cn.$$

但是 $AN\cdot A'N : PN^2 = CA^2 : CB^2$, [解題三]

$\therefore\quad Ct\cdot Cn = CB^2.$ Q. E. D

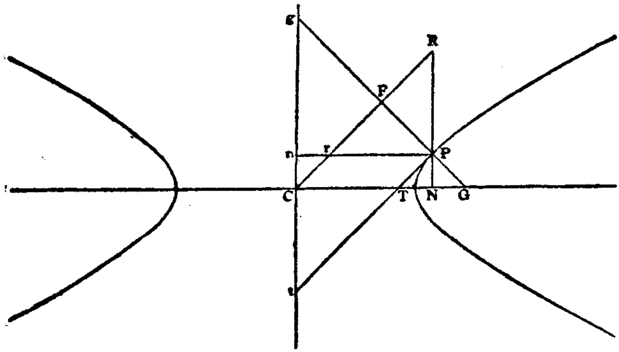
解題十六 定理

§ 127. 設過 C 作一直線，與 P 點上的切線平行，PF

是由 P 到這條直線的垂線，又設 P 點上的法線遇共軛軸於 g，則

$$PF \cdot PG = CB^2 \text{ 和 } PF \cdot Pg = CA^2.$$

作 RPN, Prn 垂直於兩軸，遇 CF 於 R 和 r，又設 P 點上的切線遇兩軸於 T 和 t.



則因在 N 和 F 兩點的角都是直角，所以一個圓可過 $GNFR$.　　[同包含在 RG 作直徑的半圓內]

所以　$PG \cdot PF = PN \cdot PR$

[兩弦於圓內相交，其兩線分的積，彼此相等]

$$= Cn \cdot Ct = CB^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

[解題十五]

其次，因爲在 F 和 n 兩點的角都是直角，所以一個圓可過 $gFrn$，

$$\therefore \quad PF \cdot Pg = Pn \cdot Pr$$

［自圓外一點作兩割線，則割線與各自圓外線分之積彼此相等］

$$= CN \cdot CT = CA^2. \cdots\cdots\cdots (2)$$

［解題十四］ Q. E. D.

［附註］ 本解題證明中所用的 CFR 線，就是以後所說的共軛於 CP 的 CD 徑.

解題十七 定理

§ **128**. $NG : CN = CB^2 : CA^2$, 又 $CG = e^2 \cdot CN$.

延長 GP, 遇共軛軸於 g,

則 $NG : CN = PG : Pg$

［過三角形兩邊與第三邊平行的線必分此兩邊成比例］

$$= PG \cdot PF : Pg \cdot PF$$

$$= CB^2 : CA^2. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

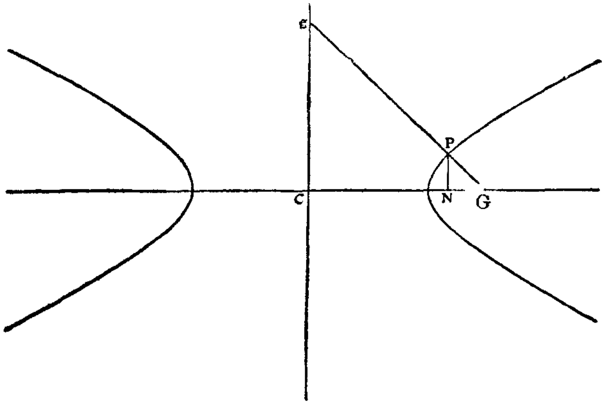
［解題十六］

其次，因爲 $NG : CN = CB^2 : CA^2$;

$$\therefore \quad CN + NG : CN = CA^2 + CB^2 : CA^2;$$

$$\therefore \quad CG : CN = CS^2 : CA^2 \qquad \text{［解題八］}$$

$$= e^2 : 1. \qquad \text{［解題六］}$$



$$\therefore \quad CG = e^2 \cdot CN. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Q. E. D.

解題十八　定理

亞丹姆士性質 (叅看 §§ 30, 85)

§ 129. 設從在點 P 的切線上任一點 O, 作 OI 垂直於準線, OU 垂直於 SP, 則 $SU = e \cdot OI$.

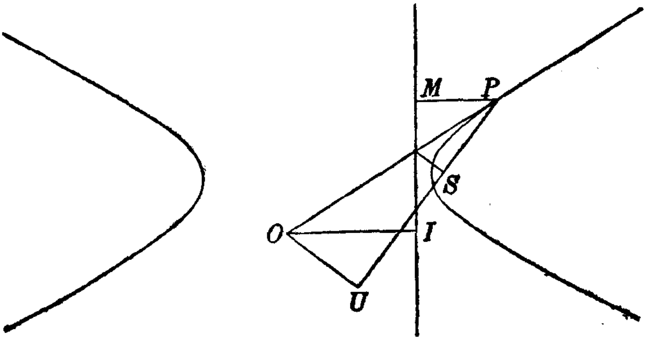
聯 SZ, 並作 PM 垂直於準線.

則因 $\angle ZSP$ 是一直角, [解題十]

ZS 與 OU 平行.

$$\therefore \quad SU : SP = ZO : ZP$$

[過三角形兩邊與第三邊平行的線必分此兩邊成比例]



$$=OI : MP.$$

[兩相似三角形 (PZM, OZI) 的對應邊成比例]

$$\therefore \quad SU : OI = SP : MP$$

$$= e : 1. \qquad \text{[定義]}$$

$$\therefore \quad SU = e \cdot OI. \qquad \text{Q. E. D.}$$

問題十三

（解題十之部）

設 ZP, Zp 遇通徑延長線於 D 和 d, 求證 $SD = Sd$.

（解題十二之部）

1. 已知一個雙曲線的一個焦點，某一點以及這點上的切線，求另一焦點的軌跡.

2. 設一個橢圓和雙曲線有相同的焦點，求證兩個曲

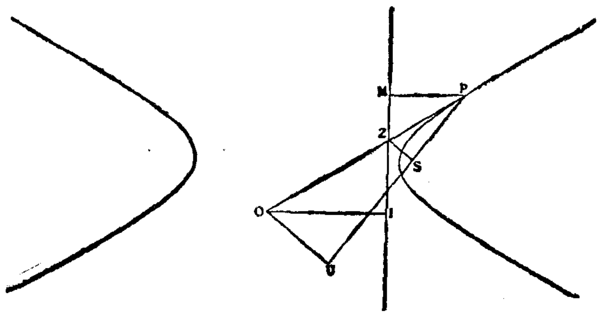
線垂直相交.

(解題十三之部)

1. 求作一切線到雙曲線,與一已知直線平行.

2. 設過 C 平行於切線的一條直線交 $SP, S'P$ 兩焦點距於 E, E', 求證 $PE = PE'$.

3. 又證 $SE = S'E'$.



4. SP 作直徑畫成的圓必觸輔圓.

5. SK 平行於 $S'P$, YK 垂直於 SK. 求證焦點 S 和頂點 K 的拋物線與本題雙曲線相觸.

6. 已知一焦點和切線的位置,以及共軛軸的長,求另一焦點的軌跡.

(解題十四之部)

1. 試用本解題的方法,證明 § 81.

2. 設作 Tp 與軸垂直，遇輔圓於 p，求證 Np 是輔圓的一條切線.

3. 求證 $CN \cdot NT = AN \cdot NA'$.

(解題十七之部)

1. 求證 $CG \cdot Cn : Cg \cdot CN = BC^2 : AC^2$.

2. 求證，在正雙曲線中，

(i) $CN = NG$,

(ii) $PG = Pg = CP$.

(解題十八之部)

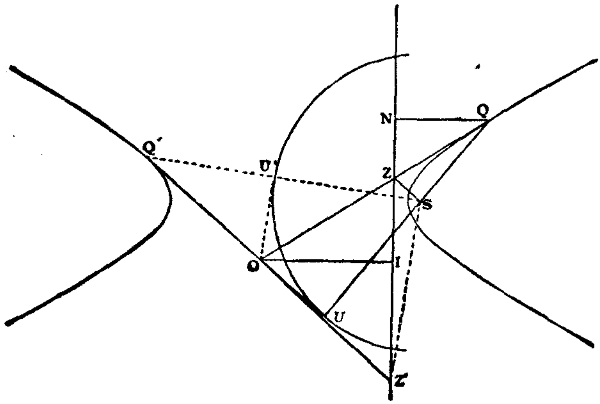
設 O 是切線上一點，作垂線 OQQ' 至橫軸，遇雙曲線於 Q 和 Q'，求 $SU = SQ$ 及 $OU^2 = OQ \cdot OQ'$ (參看 § 85 第二圖)

解題十九 作圖題

§ 130. 求由雙曲線外凸側 (convex side) 一點 P，作這個雙曲線的切線兩條.

作 OI 垂直於準線. 用圓心 S 和半徑 $e \cdot OI$ 畫一圓，並由 O 作這個圓的切線 OU, OU'.

作 SZ 垂直於 SU，遇準線於 Z. 聯 ZO，並延長它遇 SU 於 Q. 作 QN 垂直於準線.



則　　$SQ : SU = QZ : OZ$

[過三角形兩邊與第三邊平行的線分此兩邊成比例]

$$= QN : OI;$$

[兩三角形 (NZQ, OZI) 相似,則對應邊成比例]

$\therefore\quad SQ : QN = SU : OI = e : 1;$　[解題十八]

所以 Q 是在雙曲線上.　[定義]

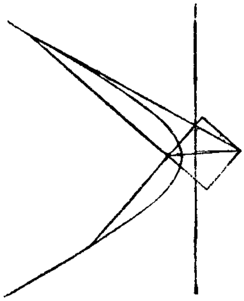
又因 QSZ 角是一直角,所以 OQ 是雙曲線 Q 點上的切線.　[解題十]

同樣,作 SZ' 垂直於 SU',截準線於 Z',聯 OZ' 並且延長它遇 SU' 於 Q', OQ' 就是另一條切線.　*Q. E. D.*

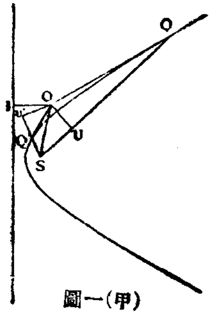
[附註]　現在所用方法係根據"解題十八"的理解,除此以外,運用"解題十二"或"解題十三"的理解,也可以得到本解題所需要的作圖法.

解題二十 定理

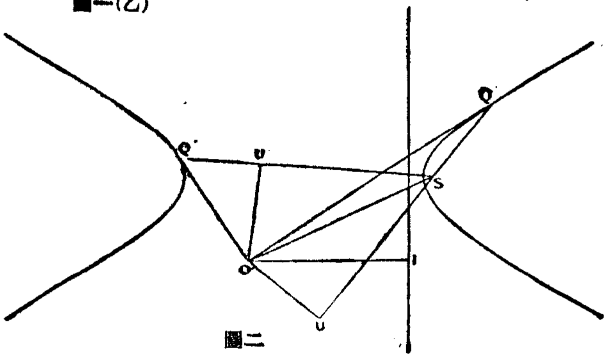
§ 131. 切線 OQ, OQ' 視 Q, Q' 在雙曲線同支或異支，而對等角或補角 OSQ, OSQ' 於焦點 S.



圖一(乙)



圖一(甲)



圖二

作 OI 垂直於準線，

聯 OS, SQ, SQ', 並作 OU, OU' 垂直於 SQ, SQ'.

則 $$SU = e \cdot OI = SU'.$$ [解題十八]

所以 OSU, OSU' 兩直角三角形完全相等.　[*R. s. s.*]

所以　$\angle OSU = \angle OSU'$.　[對應角相等]

所以，於第一圖內，$\angle OSQ = \angle OSQ'$；……………(1)

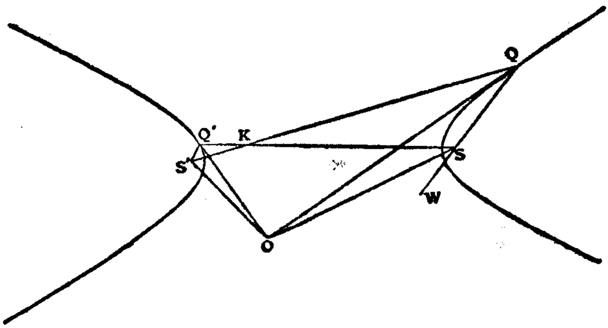
而在第二圖內，$\angle OSQ + \angle OSQ' = 2rt\angle s$. ……………(2)

［附註］如 O 位置在兩準線間時，則用"圖一(乙)".　*Q. E. D.*

解題二十一　定理

§ 132. Q, Q' 在雙曲線異支，OQ, OQ' 與 OS, OS' 傾斜成等角；Q, Q' 在同支，OQ, OQ' 與 OS, OS' 傾斜成補角.

解一　聯 $SQ, SQ', S'Q, S'Q'$，並延長 QS 到 W，又設 SQ' 遇 $S'Q$ 於 K.



則　$\angle SOQ = \angle OSW - \angle OQS$

［三角形任一外角等於兩內對角的和］

$= \frac{1}{2}\angle Q'SW - \frac{1}{2}\angle S'QS$　［解題二十，十二］

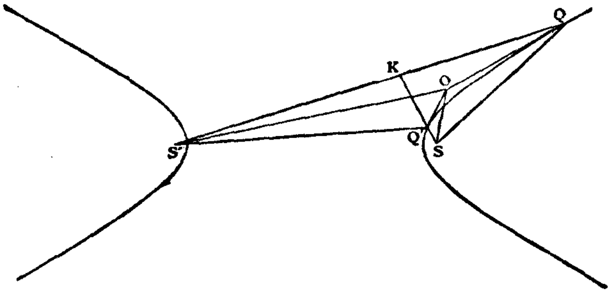
$$=\frac{1}{2}\angle SKQ.$$ [外角等於兩內對角的和]

依同理，得證明 $\angle S'OQ'=\frac{1}{2}\angle S'KQ'$;

$\therefore\ \angle SOQ=\angle S'OQ'.$ [同位角相等]

Q. E. D.

解二 聯 $SQ, SQ', S'Q, S'Q'$，又設 SQ' 遇 $S'Q$ 於 K.



則 $\angle SOQ=180^\circ-\angle OSQ-\angle OQS$

[三角形三內角的和等於兩直角]

$$=180^\circ-\frac{1}{2}\angle QSQ'-\frac{1}{2}\angle SQS'$$

[解題二十，十二]

$$=180^\circ-\frac{1}{2}\angle SKS'.$$

[外角等於兩內對角的和]

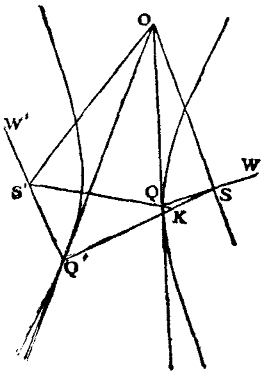
其次， $\angle S'OQ'=180^\circ-\angle OQ'S'-\angle OS'Q'$

[三內角的和等於兩直角]

$$=\frac{1}{2}\angle SQ'S'-\frac{1}{2}\angle QS'Q'$$ [解題十二，二十]

$$=\frac{1}{2}\angle SKS';$$　　[外角等於兩內對角的和]

$$\therefore\quad \angle SOQ=180^\circ-\angle S'OQ'$$　　Q. E. D.



在"解二"內，O 點在含有雙曲線的兩支的漸近線的一個交角中間；在"解一"內，則在漸近線的另兩個交角之一的中間.

又證法與 O 點的位置在兩準線中間與否有相當關係．如"圖一"，O 點是在兩準線中間；"圖三"則否，而 K 的位置也改變在 $S'Q$ 的延長線上．這是關於"解一"方面的兩種情形.

其次，關於"解二"方面，可由"圖二"和解題二十"圖一"看出 O 點的這兩種位置的差別.

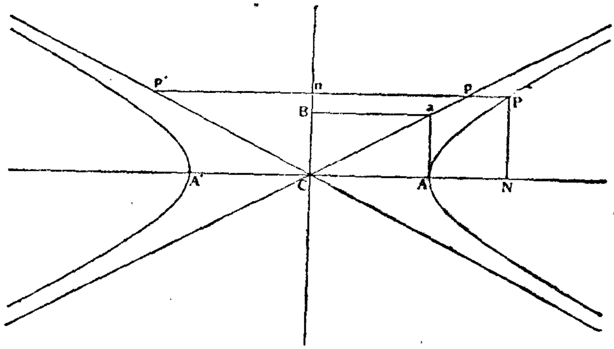
§ 133. 定義　用 CB 做"橫軸"而 CA 做"共軛軸"的一種雙曲線稱為"共軛雙曲線"(conjugate hyperbola).

[附註]"共軛雙曲線"和原雙曲線有相同的漸近線，因為由"解題四"，漸近線是同一矩形的兩條對角線.

解題二十二　定理

§ 134. 設過雙曲線上任意點 P，作一條直線與 CA 或 CB 平行，遇兩漸近線於 p, p'，則矩形 $Pp\cdot Pp'$ 等於 CA 或 CB 的平方．如 P 在共軛雙曲線上，亦同.

解一　作 Ppp' 平行於 CA，遇 CB 於 n.



則 $PN^2 : N^2 - CA^2 = CB^2 : CA^2$; [解題三]

∴ $Cn^2 : Pn^2 - CA^2 = CB^2 : CA^2$.

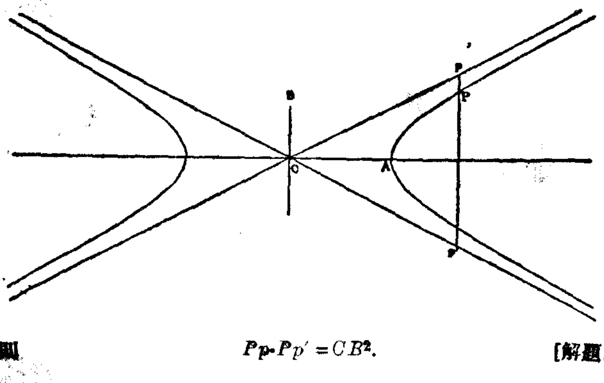
又 $Cn^2 : pn^2 = CB^2 : Ba^2 = CB^2 : CA^2$;

∴ $Pn^2 - CA^2 = pn^2$;

∴ $Pn^2 - pn^2 = CA^2$;

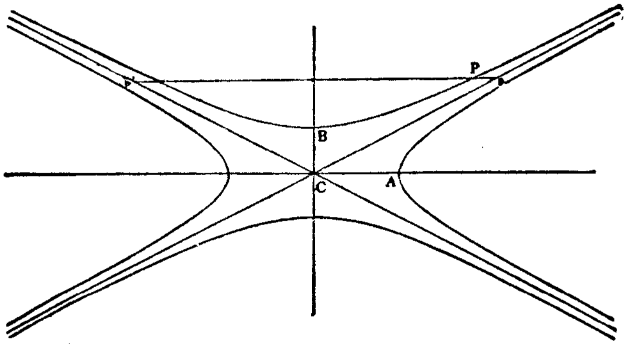
或 $Pp \cdot Pp' = CA^2$. Q. E. D.

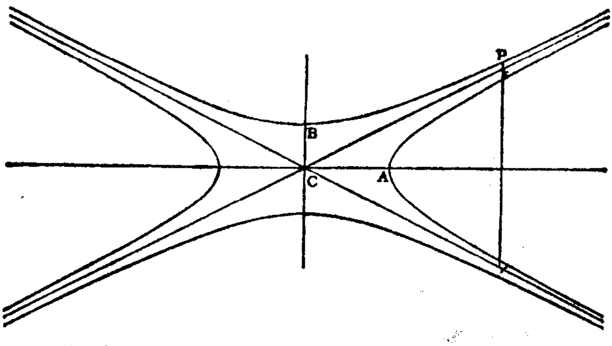
解二 作 pPp' 平行於 CB.



則 $Pp \cdot Pp' = CB^2$. [解題四]

解三和解四





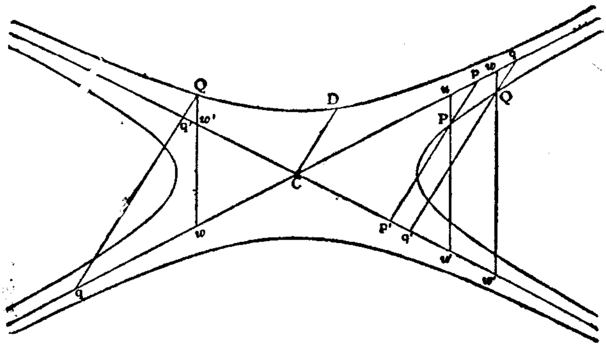
因為適纔已經證明過，在雙曲線的兩種軸方面，$Pp \cdot Pp'$ 的乘積分別等於 CA^2 或 CB^2；所以如 P 點在共軛雙曲線上，則如上面圖形所示，也有和原雙曲線相同的關係存在． *Q. E. D.*

解題二十三　定理

§ 135　設過雙曲線或它的共軛曲線上任兩點 P, Q，作

兩平行直線，分別遇漸近線於 p, p' 和 q, q'；則

$$Pp\cdot Pp'=Qq\cdot Qq'.$$



先設 P 和 Q 在雙曲線同一支上。

過 P 和 Q 作線與共軛軸 CB 平行，遇漸近線於 u, u' 和 w, w'.

由相似三角形關係，得

$$Pp : Pu = Qq : Qw \text{ 和 } Pp' : Pu' = Qq' : Qw'.$$

所以，兩式相乘，得

$$Pp\cdot Pp' : Pu\cdot Pu' = Qq\cdot Qq' : Qw\cdot Qw'.$$

但是 $\quad Pu\cdot Pu' = CB^2 = Qw\cdot Qw'$； 〔解題二十二〕

$$\therefore\quad Pp\cdot Pp' = Qq\cdot Qq'.$$

復次，無論 Q 在雙曲線的另一支或在它的共軛曲線上，則纔所用證法仍舊成立；這兩種情形如圖所示.

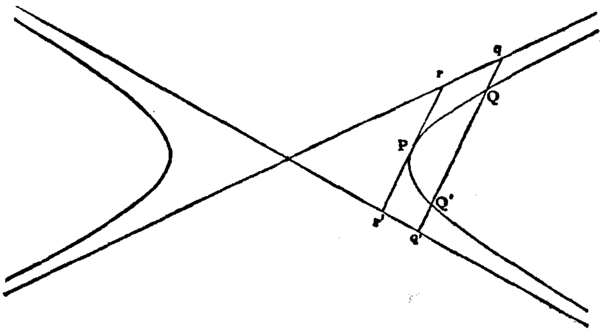
Q. E. D.

〔提要〕 過雙曲線中心作 CD 平行於 Qq 或 Pp，遇曲線或它的共軛曲線於 D，然後應用本解題至 Q, D 兩點，得證

$$Qq \cdot Qq' = DC \cdot DC = DC^2$$

解題二十四 定理

§ 136. 設任一直線交雙曲線和漸近線順次於 q, Q, Q', q' 四點，則 $Qq = Q'q'$.



由"解題二十三", P 可視爲與本題的 Q' 相當，而得

$$Qq \cdot Qq' = Q'q' \cdot Q'q;$$

$$\therefore \quad Qq \cdot QQ' + Qq \cdot Q'q' = Q'q' \cdot QQ' + Q'q' \cdot Qq;$$

$$\therefore \quad Qq \cdot QQ' = Q'q' \cdot QQ';$$

$$\therefore \quad Qq = Q'q' \qquad\qquad Q.E.D.$$

§ 137. 系　雙曲線切線在兩漸近線的部分必被平分於切點.

設 QQ' 向與本身平行的方向移動，直到 Q, Q' 重合，qQq' 變成雙曲線 P 點上的切線 rPr'.

因爲 Qq 常等於 $Q'q'$;

$$\therefore \quad Pr = Pr';$$

即 rPr' 被平分於切點 P. 　　Q. E. D.

[附註] QQ' 可以在雙曲線的兩支上，在這種情形，雙曲線就沒有一條切線與 QQ' 平行.

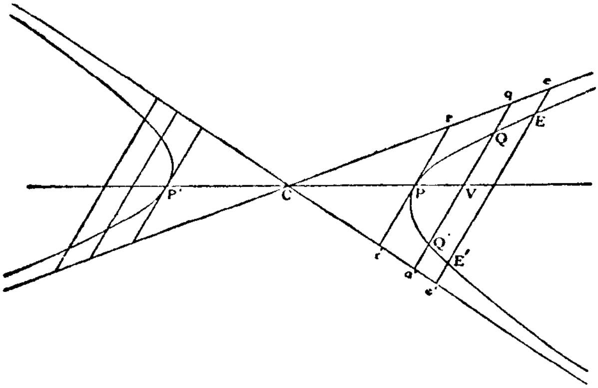
解題二十五　定理

§ 138. 一組平行弦的中點的軌跡是經過中心的一條直線.

又這條直線每端點上的切線必與諸弦平行.

設 QQ', EE' 等是一組平行弦，遇漸近線於 q, q' e, e' 等等.

作 CV 平分 QQ' 於 V.



則 CV 也平分 qq'，因 $Qq=Q'q'$. 〔解題二十四〕

所以，由相似三角形，CV 平分 ee'.

所以它平分 EE'；因 $eE=E'e'$. 〔解題二十四〕

所以 CV 平分與 QQ' 平行的各弦.

設 CV 遇雙曲線於 P，及 QQ' 以和本身平行方向向 P 移動.

則因為 QQ' 永遠是被 CPV 所平分，Q 和 Q' 最終與 P 重合；所以 P 點上的切線與被 CPV 所平分的這組平行弦平行. *Q. E. D.*

§ 139. **定義** 經過一組平行弦的中點的一條直線 (CP) 稱為 '徑'，或稱 "直徑".

§ 140. **定義** 由曲線上任一點所作與徑 (PCP') 端點

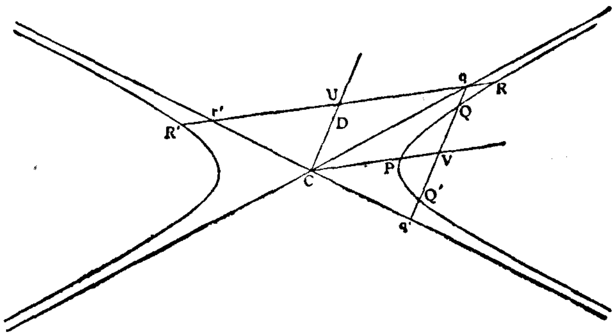
上的切線平行的一條直線(QV)稱爲"這條徑的縱線".

通常所謂的"縱線"即指徑爲橫軸時而言.

[附註] 雙曲線或它的共軛線所截的一條"徑"的那段長度有時就稱爲"徑".

解題二十六　定理

§ 141. 設甲徑平分與乙徑平行的各弦,則乙徑也必定平分與甲徑平行的各弦.



設 CP 平分 QQ' 於 V, 並作 CD 平行於 QQ'.

延長 QQ' 遇漸近線於 q, q'.

過 q 作 $RqUr'R'$ 平行於 CP, 遇曲線於 R 和 R', 遇漸近線於 q, r', 遇 CD 於 U.

則因爲 $Qq=Q'q'$, 所以qq' 被平分於 V; 又 CV 平行

於 qr',

$$\therefore\quad Cr'=Cq';$$

[過三角形兩邊與第三邊平行的線分此兩邊成比例]

$$\therefore\quad r'U=Uq;$$

[過三角形兩邊與第三邊平行的線分此兩邊成比例]

又　$$Rq=R'r',$$ [解題二十四]

$$\therefore\quad R'U=RU;$$

所以 CD 平分與 CP 平行的各弦. [解題二十五]

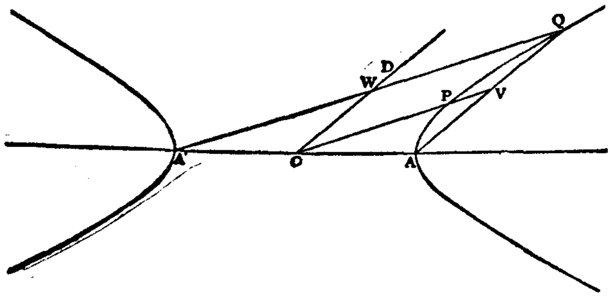
Q. E. D.

[別證]　作 AQ 平行於 CD, 遇 CP 於 V.

聯 $A'Q$ 截 CD 於 W.

因爲 AQ 被平分於 V, 而 AA' 被平分於 C; 所以 $A'Q$ 是與 CP 平行. [聯三角形任兩邊的中點的線必與第三邊平行]

又因 CD 平行於 AQ, 所以 $A'Q$ 在 W 被平分.



［聯三角形 兩邊的中點的線必與第三邊平行］

所以 CD 平分與 CP 平行的弦 $A'Q$.

所以 CD 平分與 CP 平行的各弦. ［應用相似形的理解］

Q. E. D.

§ **142**. **定義** 設甲徑平分與乙徑平行的各弦，而乙徑也平分與甲徑平行的各弦，具有這種相互關係的兩條"徑"稱爲"共軛徑"，或稱"共軛直徑".

［附註］ 在兩條"共軛徑"中間，一條與雙曲線相遇，而另一條則與共軛雙曲線相遇.

§ **143** **定義** 聯雙曲線上任一點(Q)及一條徑(PCP')的兩個端點的弦 (QP, QP') 稱爲"補弦".

解題二十七 定理

§ **144**. 補弦平行於兩共軛徑.

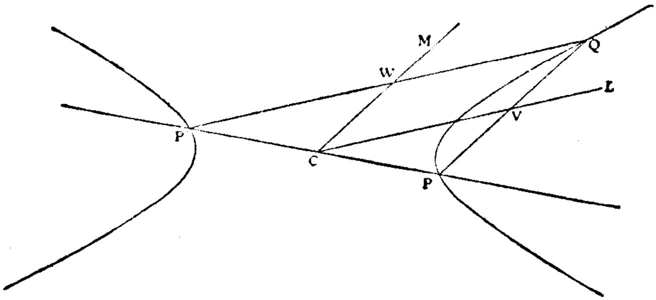
作徑 CL, CM 與補弦 $P'Q, PQ$ 平行，遇這兩條補弦於 W 和 V.

則 $$PV : VQ = PC : CP';$$

［聯三角形兩邊平行於第三邊的線分此兩邊成比例］

$$\therefore \quad PV = VQ.$$

$\therefore$ CL 平分 PQ, 以及所有與 CM 平行的弦.



[解題二十五]

依同理，得證明 CM 也平分所有與 CL 平行的弦；所以 CL, CM 是兩共軛徑. [定義，§ 142]

Q. E. D.

問題十四

(解題二十之部)

1. 兩頂點上的切線中間所截任一切線部分所對兩焦點處的角都是直角.

2. 三角形 SPS' 的內切圓圓心的軌跡是一直線.

3. 在任一圓錐曲線內，切點弦 QQ' 被 SO 和準線分成調和比.

(解題二十三之部)

QQ' 是雙曲線內平行於 P 點上的切線的一條弦．作 $Pp, Qq, Q'q'$ 與一條漸近線平行而至另一條漸近線上．

求證 $Cq\cdot Cq'=Cp^2$.

(解題二十四之部)

1. 設 q, q' 在共軛雙曲線上，求證本解題仍舊眞實．

2. 設 P 點上的法線遇兩軸於 G, g；G, g, r, r' 在過雙曲線中心的一個圓上．

3. 設 U, V 是雙曲線上兩定點，P 是曲線上任一點，延長 PU, PV 各交一漸近線於 u, v，則 uv 的長一定．

解題二十八　定理

§ **145**　設共軛徑 (PCP', DCD') 與雙曲線，共軛雙曲線共交於四點 $(P, P'; D, D')$．這四點上的切線形成一平行四邊形，角頂都在漸近線上．

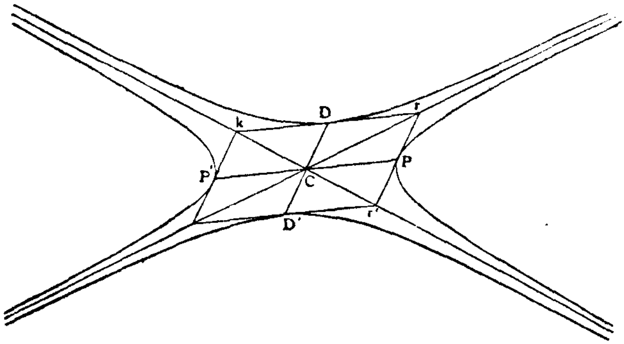
作切線 rPr' 遇漸近線於 r 和 r'.

聯 CD.

則因 CD 共軛於 CP,

$\therefore\quad CD$ 平行於 rr'.　　[解題二十五]

所以，由"解題二十三"，注意 DC 遇兩條漸近線都在 C 點．



$$DC^2 = Pr \cdot Pr' = Pr^2;$$ [解題二十四]

$\therefore\quad DC = Pr$, 並且平行於 Pr;

$\therefore\quad rD$ 平行於 CP;

[四邊形有兩對邊平行而且相等，則其他兩對邊也必平行而且相等]

$\therefore\quad rD$ 是 D 點上的切線. [解題二十五]

依同理，得證明 D 和 P', P' 和 D', D' 和 P 每兩點上的切線相遇在漸近線上，而這四條切線形成角頂在漸近線上的一個平行四邊形. *Q. E. D.*

§ 146. 系 聯共軛徑每兩端點的線(PD)為一漸近線所平分，而平行於另一漸近線.

聯 PD, 並設 rD 遇另一漸近線於 K.

則 $\qquad rP = Pr'$ [解題二十五]

和 $rD=DK$; [解題二十五]

$\therefore$ PD 平行於 kr',

[聯三角形兩邊的中點的線必與第三邊平行]

又 $CPrD$ 是一平行四邊形,

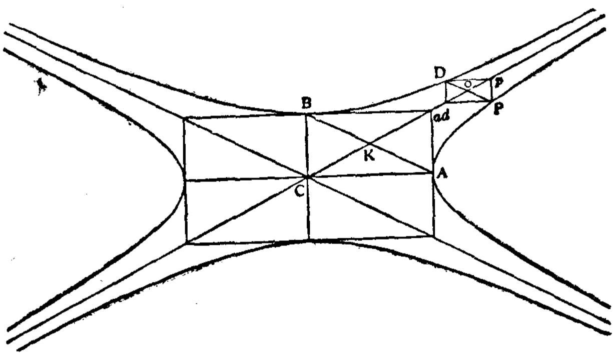
$\therefore$ PD 被漸近線 Cr 所平分.

[平行四邊形的對角線必彼此平分]

依同理,得證明 PD', $D'P'$, $P'D$ 等線. *Q. E. D.*

解題二十九 定理

§ **147**. 過 P 和 D 與兩軸平行的直線形成一矩形,有兩個角點在一條漸近線上.



作 Pp 平行於 CB, 遇漸近線於 p; 聯 pD.

設 AB, PD 交漸近線於 K 和 O, 則 AB 和 PD 同被漸近

線所平分,並且它們彼此平行 [解題二十八]

因此,poP, aKA 是相似三角形. [兩三角形對應邊都平行]

$$\therefore \quad Pp : Aa = Po : AK$$

$$= PD : AD \quad \text{[解題二十八]}$$

以及 $\angle pPD = \angle aAB.$

[兩相似形的對應角相等]

所以 $\triangle pPD$. aAB 也是相似形.

[兩三角形如有一角彼此相等而夾邊成比例,則兩形相似]

所以 pD 平行於 aB, 卽,平行於 CA.

依同理,設作 Dd 平行於 CB,

則 Pd 也必平行於 CA. **Q. E. D.**

解題三十 定理

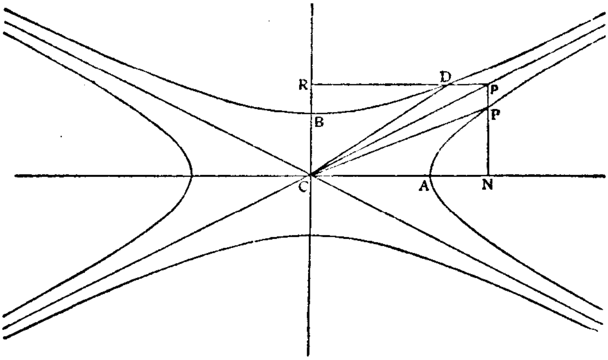
§ 148. $CP^2 \sim CD^2 = CA^2 \sim CB^2.$

作兩軸上的縱線 PN, DR, 並延長它們使相遇於 p, 則 p 在漸近線上. [解題二十九]

因此 $CB^2 = pN^2 - PN^2$ [解題二十四]

$$= Cp^2 - CP^2. \quad \text{[畢達哥拉士定理]}$$

又 $CA^2 = pR^2 - DR^2$ [解題二十四]



$$=Cp^2-CD^2;$$ [畢達哥拉士定理]

$$\therefore\quad CA^2\sim CB^2=CP^2\sim CD^2.$$ *Q. E. D.*

解題三十一　定理

§ 149　設雙曲線任一切線 rPr' 遇漸近線於 r 和 r'，則平行四邊形 $CPrD$ 的面積一定，

(或 $PF\cdot CD=AC\cdot BC$).

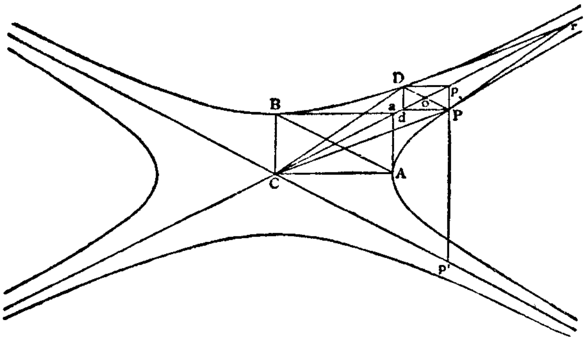
作 Aa, Ba 與兩條軸平行，遇漸近線於 a.

過 P 作倍縱線遇漸近線於 p 和 p'.

完成平行四邊形 $DpPd$. 聯 DP, 截漸近線於 o. 聯 AB.

則　　$\triangle DCP:\triangle DpP=Co:op$

[等底或共底的兩三角形面積之比等於它們的高之比；又兩三角形相似 ($a.\ R.\ a.$), 對應邊成比例]



$$= Pp' : Pp.$$

[§ 146; 聯三角形兩邊而與第三邊平行的線分此兩邊成比例]

其次， $\triangle BCA : \triangle DpP = BC^2 : Pp^2$ [兩三角形的各邊彼此各平行，則兩形相似；兩相似三角形面積之比等於任兩對應邊之比]

$$= Pp \cdot Pp' : Pp^2$$

[解題二十二]

$$= Pp' : Pp;$$

$$\therefore \quad \triangle DCP \backsim \triangle BCA.$$

$\therefore$ 平行四邊形 $CPrD \backsim$ 平行四邊形 $CAaB$.

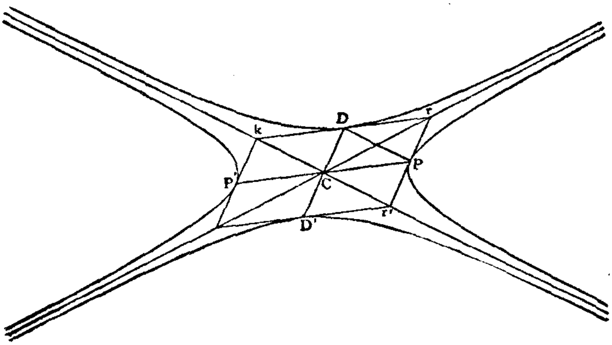
但平行四邊形 $CAaB$ 的面積一定，

所以平行四邊形 $CPrD$ 的面積一定.

或即 $PF \cdot CD = AC \cdot BC$

[F 點的位置參看"解題十六"的附圖] Q. E. D

§150 系 雙曲線任一切線與兩漸近線所成的三角形的面積一定.



設 rPr' 是雙曲線的任一切線, CP 和 CD 是兩共軛徑.

則因 $\triangle rCr'$, $\square CPrD$ 的面積都是等於 P, D, P', D 等四點上的切線所成的平行四邊形面積的四分之一,

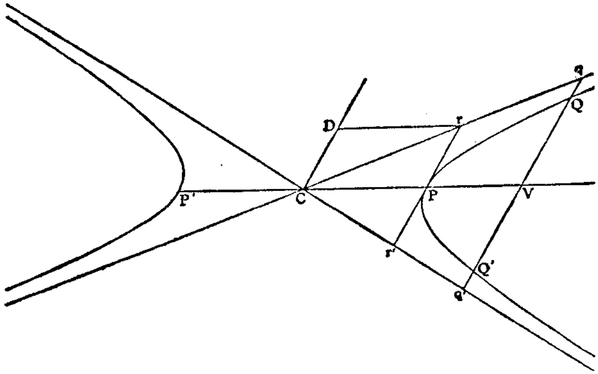
$$\triangle rCr' \backsimeq \square CPrD.$$

所以, 由 §149, 三角形 rCr' 的面積一定. *Q. E. D.*

解題三十二 定理

§151. QV 是徑 PCP' 的一條縱線, CD 是平行於 QV 的徑. 則

$$QV^2 : PV \cdot P'V = CD^2 : CP^2.$$



設 QV 遇漸近線於 q, q'. 作 P, D 兩點上的切線，遇漸近線於 r. [解題二十八]

則 $$CD^2 = Qq \cdot Qq'$$ [解題二十三]

$$= qV^2 - QV^2;$$

[應用兩數平方差之理]

$$\therefore \quad QV^2 = qV^2 - CD^2.$$ [移項]

又 $$PV \cdot P'V = CV^2 - CP^2.$$

[應用兩數平方差之理]

但是，由相似三角形 CPr, CVq, [解題二十五; (a. a. a.)]

$$CV^2 - CP^2 : CP^2 = qV^2 - Pr^2 : Pr^2$$

[兩相似三角形的對應邊成比例]

$$= qV^2 - CD^2 : CD^2;$$

$$\therefore \quad PV \cdot P'V : CP^2 = QV^2 : CD^2.$$

內外項互換，得

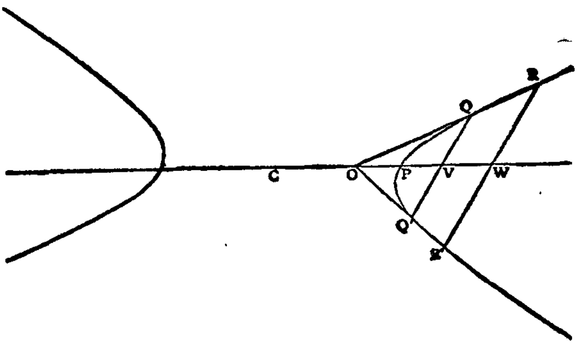
$$QV^2 : PV \cdot P'V = CD^2 : CP^2. \qquad \text{Q. E. D}$$

§ 152　系　在正雙曲線內，$QV^2 = PV \cdot P'V$.

因在此，　　$CD^2 : CP^2 = 1$.

解題三十三　定理

§ 153. 任一弦兩端點上的切線相遇於平分此弦的徑上.



設 QQ', RR' 是兩平行弦，聯 RQ, $R'Q'$ 並延長它們使相遇於 O.

平分 QQ' 於 V, 並設 OV 延長線遇 RR 於 W.

由相似三角形，[a. a. a.]

$$QV : RW = OV : OW$$

[兩三角形相似,對應邊成比例]

$$= Q'V : R'W.$$

[兩三角形相似,對應邊成比例]

但是　$QV = Q'V,$　[所作]

$$\therefore\quad RW = R'W.$$

因爲 VW 平分平行弦 QQ', RR', 它即是經過雙曲線中心 C 的一條徑。　[解題二十五]

設 R, R' 漸向 Q, Q' 移近，最終彼此重合，則 OQR, $OQ'R'$ 就變成 Q, Q' 兩點上的兩條切線，並且它們必定仍舊相交於徑 CV 上。　Q. E. D.

解題三十四　定理

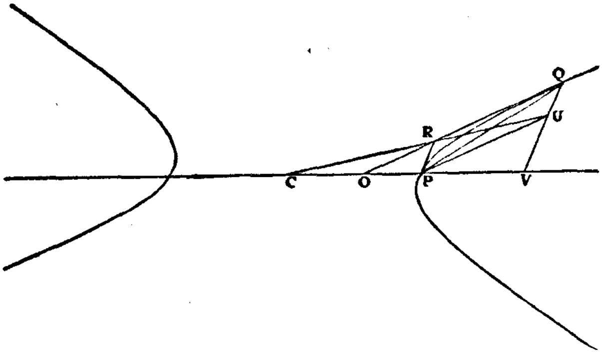
§ 154. QV 是徑 CP 的一條縱線；設 Q 點上的切線遇 CP 於 O, 則

$$CV \cdot CO = CP^2.$$

作 PU 平行於 OQ, PR 平行於 QV, 並聯 PQ.

則 PR 切雙曲線.　[解題二十五]

$RPUQ$ 是一平行四邊形；所以 RU 平分 PQ,



[平行四邊形兩對角線必彼此平分]

所以 RU 經過雙曲線中心 C. [解題三十三]

現在 $$CO : CP = CR : CU$$

[兩相似三角形 ($a.\ a.\ a.$) 的對應邊成比例]

$$= CP : CV,$$

[兩相似三角形 ($a.\ a.\ a.$) 的對應邊成比例]

所以 $$CP^2 = CO \cdot CV.$$ *Q. E. D.*

解題三十五 定理

§ 155. 設一雙曲線的兩弦相交，則彼此的線分之積的比等於平行的半直徑之平方的比.

設弦 POP', QOQ' 遇漸近線於 p, p' 和 q, q'. 平分 PP' 於 V. 作 kQk' 平行於 pp'.

則　　$pO \cdot Op' = pV^2 - OV^2$,

[應用兩數平方差之理]

$$PO \cdot OP' = PV^2 - OV^2,$$

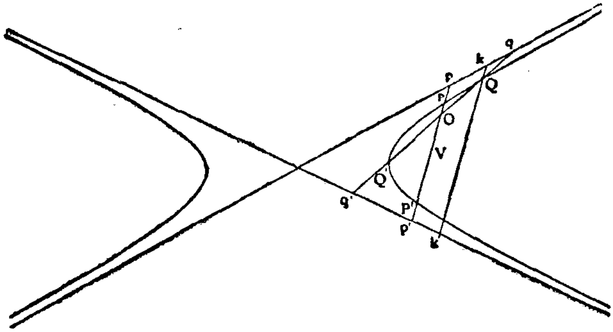
[應用兩數平方差之理]

$$\therefore\ pO \cdot Op' - PO \cdot OP' = pV^2 - PV^2$$

$$= pP \cdot Pp';$$

[應用兩數平方差之理]

$$\therefore\ pO \cdot Op' - pP \cdot Pp' = PO \cdot OP'.$$ [移項]



依同理，得證明　$qO \cdot Oq' - qQ \cdot Qq' = QO \cdot OQ'$,

由相似三角形，

$$pO : qO = kQ : qQ$$

[$\triangle qOp$, qQk 相似 (a. a. a)]

又　　$Op' : Oq' = Qk' : Qq'$;

[$\triangle Oq'p'$, $Qq'k'$ 相似 $(a.\ a.\ a)$]

$$\therefore\quad pO\cdot Op' : qO\cdot Oq' = kQ\cdot Qk' : qQ\cdot Qq'$$
$$= pP\cdot Pp' : qQ\cdot Qq';$$

[解題二十三]

$$\therefore\quad pO\cdot Op' - pP\cdot Pp' : qO\cdot Oq' - qQ\cdot Qq'$$
$$= pP\cdot Pp' : qQ\cdot Qq';$$

或 $$PO\cdot OP' : QO\cdot OQ' = pP\cdot Pp' : qQ\cdot Qq'$$

$=$平行的半直徑之平方的比。

[解題二十三] *Q. E. D.*

問題十五

(解題二十八之部)

在正雙曲線內，試證

1. $CP=CD$ 而且漸近線平分任一對共軛徑的交角。
2. CP, CD 與軸傾斜成補角.
3. 垂直的徑相等.
4. 任兩徑間的交角等於它們的共軛徑間的交角.
5. 任一弦所對在一條徑 PP' 的兩端點的角相等或相補.

6. 設一正雙曲線外切一三角形，則曲線中心的軌跡是一"九點圓"(nine-point circle).

(解題三十一之部)

1. 設作 Po, Po' 各與一條漸近線平行而至另一條上，求證 $Po\cdot Po'=\frac{1}{4}CS^2$.

2. 設已知兩漸近線和曲線上一點的位置，求兩軸和兩焦點.

3. 一個雙曲線的兩條切線分別遇漸近線於 R, r 和 T, t. 求證 Rt 與 rT 平行.

4. 在正雙曲線內，設作 CZ 垂直於 P 點上的切線，求證 $CZ\cdot CP=CA^2$.

(解題三十三之部)

在任一圓錐曲線內，設一條徑遇準線於 Z, 則 SZ 垂直於這條徑所平分的各弦.

(解題三十五之部)

1. 設一正雙曲線外切一三角形，則此曲線也必過"垂心"(orthocentre).

2. 設作 OR 與一條漸近線平行，遇雙曲線於 R 和另一條漸近線於 r; 又作 OPP' 與一條定直線平行，遇雙曲

線於 P 和 P'；則無論 O 在何位置, $OP \cdot OP'$ 總與 $OR \cdot Cr$ 成比例.

正雙曲線特有的幾種性質—定理

1. $CS^2 = 2CA^2$, $CS = 2CX$, $e = \sqrt{2}$.

2. $PN^2 = AN \cdot NA'$.

3. 通徑 $= AA'$.

4. $CN = NG$.

5. 圓心是雙曲線上任一點 P 而半徑是 PC 的一個圓交法線於兩軸上，交切線於兩漸近線上，則

$$PC = PG = Pg = Pr = Pr'.$$

6. 兩共軛徑相等,而兩者間的交角被漸近線所平分.

7. 兩共軛徑對每一軸都傾斜成相補的兩角.

8. 互相垂直的徑必相等.

9. 任兩徑間的角與它們的共軛徑間的角相等.

10. 任一弦所對在一條徑 PP' 兩端點的角必相等或相補.

11. 設作 CZ 垂直於 P 點上的切線,

$$CZ \cdot CP = CA^2.$$

12. 設一正雙曲線外切一三角形,則此雙曲線必過垂心.

13. 設一正雙曲線外切一三角形,則此雙曲線的中心的軌跡是一九點圓.

餘參看"投影幾何學"以及"位標幾何學"(即"解析幾何學")關於"正雙曲線"部分.

第 五 章

圓柱面 (cylindrical surface)

與圓錐面 (conical surface)

§ 156　定義　一條直線移動，永遠與一個圓相觸，並且永遠與過這個圓的圓心而垂直於圓的平面的一條定直線平行，則所生曲面是一 "正圓柱面" (right circular cylindrical surface).

§ 157.　定義　這條定直線稱爲 "圓柱" (cylinder) 的 "軸" (axis).

§ 158.　定義　這條移動線稱爲 "母線" (generatrix, 或 generating line). 在任何位置的 "母線" 稱爲 "圓柱面的元素" (element of the cylindrical surface), 或作 "基線".

§ 159　定義　"母線" 所觸的定曲線，如 "正圓柱面" 定義 (§ 156) 內的圓是, 稱爲 "準線" (directrix).

設一個矩形繞其一邊旋轉, 與此邊相對的另一邊卽描出一 "正圓柱面".

這個矩形的邊長可隨題意伸縮.

又這個矩形環繞旋轉的固定的一邊就是所生的"正圓柱"的"軸".

[附註] 與軸平行的一個平面所作的一個圓柱截面是圓柱的兩條"母線"

垂直於軸的一個平面所作的一個圓柱截面是一圓.

§ **160**　**定義**　一個圓柱體被一平面所截時,過圓柱的軸而垂直於此截面的平面稱為"軸面"(axial plane).

[附註] "軸面"和"截面"(cutting plane)的交線即是截面曲線的一條"軸";它和圓柱體的交線是兩條"母線".

§ **161**　**定義**　內切在一個圓柱體內,而與此圓柱體相觸於一圓,與截面相觸於一點的一個球稱為"焦點球"(focal sphere).

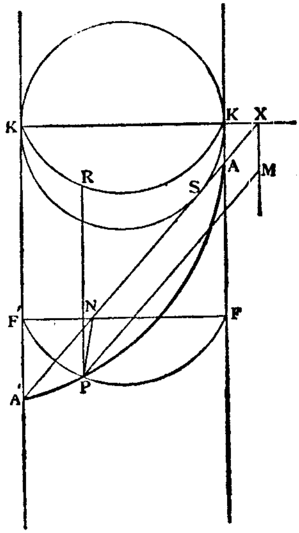
解題一　定理

§ **162**. 傾斜於軸的一個平面所作的一個正圓柱截面是一個橢圓.

設 APA' 是截面曲線.假定紙面代表"軸面",並設這個"軸面"遇截面於直線 $A'AX$, 遇圓柱體於"母線" KAF, $K'F'A'$.

作一個"焦點球",觸圓柱體於圓 KRK', 觸截面於 S.

設平面 $K'RK$, $A'PA$ 相遇於直線 XM



過曲線 APA' 上任一點 P, 作一平面 $F'PFN$ 垂直於圓柱體的軸,遇截面於直線PN, 遇"軸面"於直線 FNF' 和遇圓柱體於圓 FPF'.

過 P 作"母線" PR, 觸"焦點球"於 R; 又作 PM 平行於 NX.

假設聯 SP.

因爲平面 APA', FPF' 同垂直於"軸面", PN 垂直於軸面 [如兩相交平面各垂直於第三平面,則其交線也必垂直於第三平面]; 所以 PN 同時垂直於 AA' 和 FF'.

由同一點到一個球上的切線必相等 [Euc. III. 36];

$$\therefore\ SP = PR = FK,$$

又 $$SA = AK \text{ 和 } PM = NX.$$

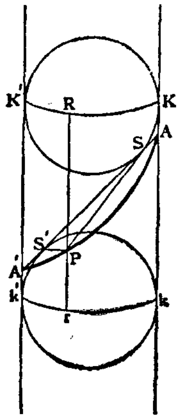
但是 $$FK : NX = AK : AX; \quad [\triangle NAF, XAK \text{ 相似}]$$

$$\therefore\ SP : PM = SA : AX.$$

現在 AK 小於 AX [對大角的邊必大], 所以 $SA : AX$ 是一

個小於1的定比，而曲線 APA' 就是焦點 S 而準線 XM 的一個橢圓。 *Q. E. D.*

[第二證　設 APA' 是截面曲線.取紙面代表"軸面"，並設"軸面"遇"截面"於直線 AA', 遇圓柱體於"母線" KAk, $K'A'k'$.



作兩"焦點球",觸圓柱體於圓 KRK', krk', 觸截面於 S 和 S'.

過曲線 APA' 上任一點 P 作一條"母線" RPr,觸兩"焦點球"於 R, r. 聯 PS, PS', 因為兩條線都是在"焦點球"切面內過切點，必各與"焦點球"相觸。

則因由球外一點到球所作的切線必相等，$SP=PR$; 又 $S'P=Pr$.

$$\therefore \quad SP+S'P=PR+Pr=Rr=Kk.$$

所以，截面曲線是焦點為 S, S' 而長軸等於 Kk 的一個橢圓。[§ 72] *Q. E. D.*

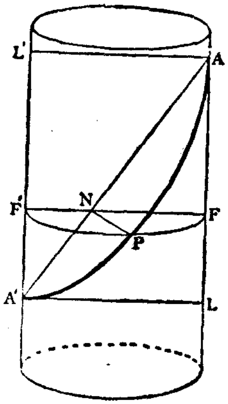
[第三證]　設 APA' 是截面曲線.取紙面代表"軸面"，設"軸面"遇截面於直線 AA', 遇圓柱體於"母線" AFL $A'F'L'$.

過截面曲線上任一點 P 作一平面 $F'PFN$ 垂直於圓柱體的"軸"遇"截面"於直線 PN, 遇"軸面"於直線 FNF', 和遇圓柱體於圓 FPF'.

作 AL', $A'L$ 平行於 FF'.

因爲平面 FNF', APA' 同垂直於"軸面", 它們的交線 PN 也必定垂直於"軸面", 所以 PN 同時垂直於 FF' 和 AA'.

[空間內垂線定義]



由相似三角形,

$$AN : NF = AA' : A'L,$$

[$rt\triangle ANF$, $AA'L$ 相似 (a. R.)]

和 $A'N : NF' = A'A : AL'$;

[$rt\triangle A'NF'$, $A'AL'$ 相似 (a. R.)]

$$\therefore \quad AN \cdot A'N : NF \cdot NF' = AA'^2 : A'L\ AL';$$

$$\therefore \quad AN \cdot NA' : PN^2 = AA'^2 : AL'^2.$$

[由直角三角形的直角頂到斜邊 (弦) 的垂線爲所分成的線分的比例中項; 兩平行線間所截其他兩平行線的線分相等]

所以截面曲線是長軸等於 AA' 而等於 AL' 的一個橢圓. [§ 64] *Q. E. D.*

§ 163. **定義** 過一定直線上一定點的一條直線移動,

如永遠與圓心在此定直線上而所在平面和定直線垂直的一個圓相觸，則所生曲面是一"正圓錐面" (right circular conical surface).

§ 164. **定義** 這條定直線稱爲"圓錐" (cone) 的"軸" (axis).

§ 165. **定義** 這個定點稱爲"圓錐" 的"頂點" (vertex), 或稱"頂".

§ 166. **定義** 這條移動線稱爲"母線". 在任何位置的"母線"稱爲"圓錐面的基線" (element of the conical surface), 或"元素".

§ 167. **定義** "母線"所觸的定曲線，如"正圓錐面"定義 (§ 163) 內的圓是，稱爲'準線'.

設一個直角三角形繞直角的一個鄰邊旋轉，斜邊 (即弦) 即描出一"正圓錐面".

斜邊的長可隨題意任向兩面伸縮，以至無窮遠.

三角形環繞旋轉的固定的一邊就是所生的"正圓錐"的"軸".

斜邊和此固定邊相交處的三角形的一個角就是圓錐的"頂點".

設斜邊兩面都無限延長，得出完全的"圓錐面"，共有兩個相等而且相似的錐面，各在"頂點"的一側.這兩個錐面有時稱爲"上,下錐面"(upper, lower nappe).

〔附註〕 過頂點的一個平面所作的一個圓錐截面是一點，或是兩條"母

線".

垂直於軸而不經過頂點的一個平面所作的一個圓錐截面是一個圓.

§ 168. **定義** 一個圓錐體被一平面所截時，過圓錐的軸而垂直於此截面的平面稱爲"軸面"。

附註] "軸面"和"截面"的交線卽是截面曲線的一條軸，它和圓錐體的交線是兩條"母線"

§ 169. **定義** 內切在一個圓錐體內，而觸此圓錐體於一圓，和觸截面於一點的一個球稱爲"焦點球"。

解題二 定理

§ 170. 不經過頂點且不垂直於軸的一個平面所作的圓錐截面必滿足圓錐曲線定義 ($SP = ePM$).

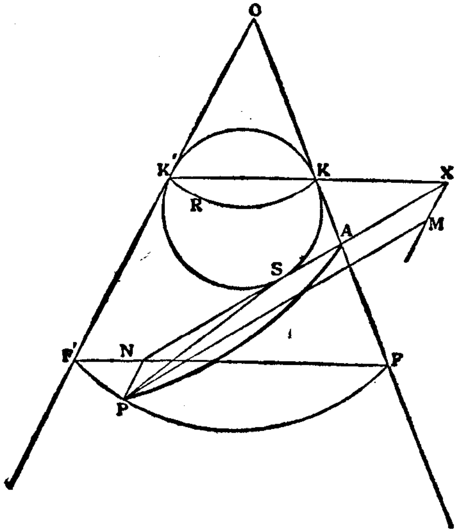
設 AP 是截面曲線。取紙面代表"軸面"，並設"軸面"遇"截面"於直線 NAX, 遇圓錐於"母線" $OKAF$, $OK'F'$.

作一"焦點球"觸圓錐於圓 KRK', 觸截面於 S.

設平面 $K'RK$, PA 相交於直線 XM.

過曲線 AP 上任一點 P, 作一平面 $F'PFN$ 垂直於圓錐的"軸"，遇"截面"於直線 PN, 遇"軸面"於直線 FNF' 和遇圓錐於圓 FPF'.

假設作"母線" PRO, 觸"焦點球"於 R; 又作 PM 平行



於 NX.

因爲平面 AP, FPF' 同垂直於"軸面", 它們的交線 PN 必垂直於"軸面"; 所以 PN, 同時垂直於 AN 和 FF'.

[空間內垂線定義]

由球外一點作到球上的切線都相等.

所以 $SP=PR=FK$, $SA=AK$ 以及 $PM=NX$.

但是 $$FK:NX=AK:AX;$$

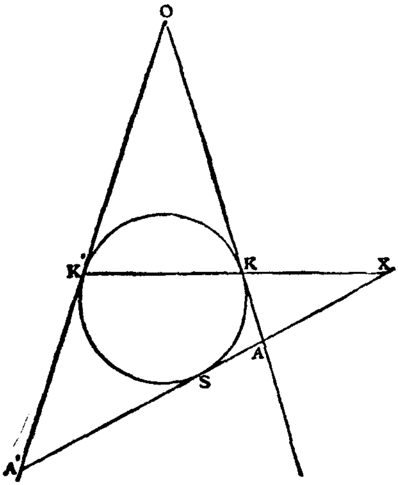
[$\triangle NAF$, XAK 相似 (a. a. a.)]

$$\therefore\quad SP:PM=SA:AX.$$

在此，$SA:AX$ 是一個定比，所以 APA' 是用 S 作焦點而 XM 作準線的一個圓錐曲線. *Q. E. D.*

解題三 定理

§ **171** 一個圓錐被一個平面所截，設它的"焦點軸"(focal axis) 與軸面內的兩條母線相遇於同一錐面上，則截面曲線是一橢圓；設"焦點軸"平行於這兩條母線之一，則截面曲線是一拋物線；設"焦點軸"與這兩條母線相遇於不同錐面上，則截面曲線是一雙曲線.



設"軸面"遇"截面"於 AX, 遇"焦點球"於圓 $KK'S$ 和遇圓錐於"母線" OKA, OK'. 延長 $K'K$ 和 SA, 使相遇於 X, 即準線的足上.

解一 延長 AS 遇 OK' 於 A'.

$$\angle OKX > \angle K'XA'.$$

[三角形任一外角等於兩內對角的和]

但是 $\angle OK'X = \angle OKK'$

[設三角形有兩邊相等, 則它對等邊的兩角必等]

$= \angle AKX$; [對頂角相等]

$\therefore \angle AKX > \angle K'XA'$ 或 $\angle KXA$,

$\therefore AK < AX$, [對大角者必對大邊]

$\therefore SA < AX$,

[由圓外一點所作的切線相等]

而這種曲線即是一橢圓. *Q. E. D.*

解二 設 AS 平行於 OK'.

$\angle AKX = \angle OKK'$ [對頂角相等]

$= \angle OK'K$

[三角形內對等邊的角相等]

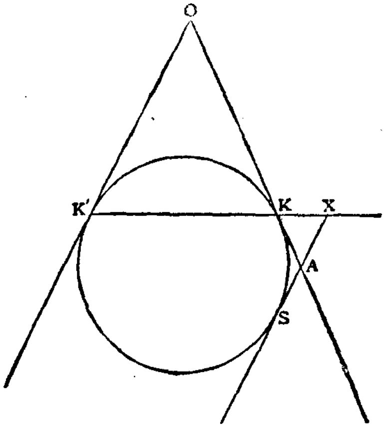
$= \angle KXA$; [內錯角相等]

$\therefore AK = AX$, [三角形內對等角的邊相等]

$\therefore SA = AX$,

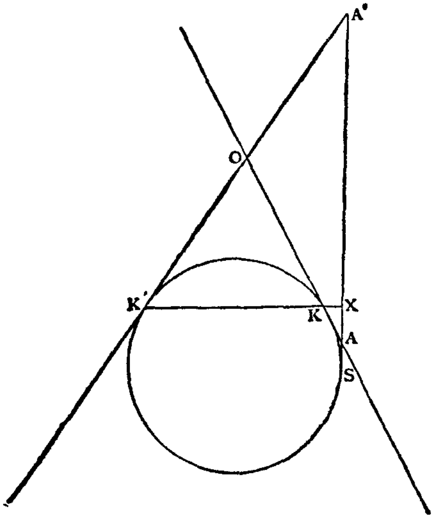
[由圓外一點所作的切線相等]

而這種曲線即是一拋物線. *Q. E. D.*



解三 延長 AS 遇 $K'O$ 延長線於 A'.

$$\angle OK'X < \angle K'XA.$$



[三角形一外角必大於兩內對角之一]

但是　$\angle OK'X = \angle OKK'$

[三角形內對等邊的角相等]

$= \angle AKX$;　[對頂角相等]

$\therefore \quad \angle AKX < \angle K'XA$ 或 $\angle KXA$,

$\therefore \quad AK > AX$,

[三角形內對大角者對大邊]

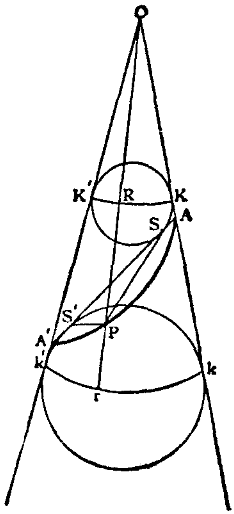
$\therefore \quad SA > AX$,

[由圓外一點所作的切線相等]

而這種曲線即是一雙曲線.　*Q. E. D.*

解題四　定理

§ **172**. 在一個圓錐的橢圓截面中,長軸等於沿圓錐的一條母線來量的兩焦點球間的距離.



設 APA' 是截面曲線.取紙面代表"軸面",並設"軸面"遇"截面"於直線 AA',遇圓錐於"母線" KAk $K'A'k'$.

作兩"焦點球"觸圓錐於圓 KRK', krk',觸"截面"於 S 和 S'.

過曲線 APA' 上任一點 P,作一

條母線 RPr, 觸兩"焦點球"於 R, r.

聯 PS, PS', 這兩條線各在切點平面內經過切點，所以也必定分別與"焦點球"之一相觸.

則 $SP=PR$, 因爲兩者都是一個球的切線；又 $S'P=Pr$.

$$\therefore \quad SP+S'P=PR+Pr=Rr=Kk.$$

所以，這個曲線是焦點爲 S, S' 而長軸等於 Kk 的一個橢圓. [§ 72] Q. E. D.

解題五 定理

§ 173. 在一個圓錐的雙曲線截面中，橫軸等於沿圓錐的一條母線來量的兩焦點球間的距離.

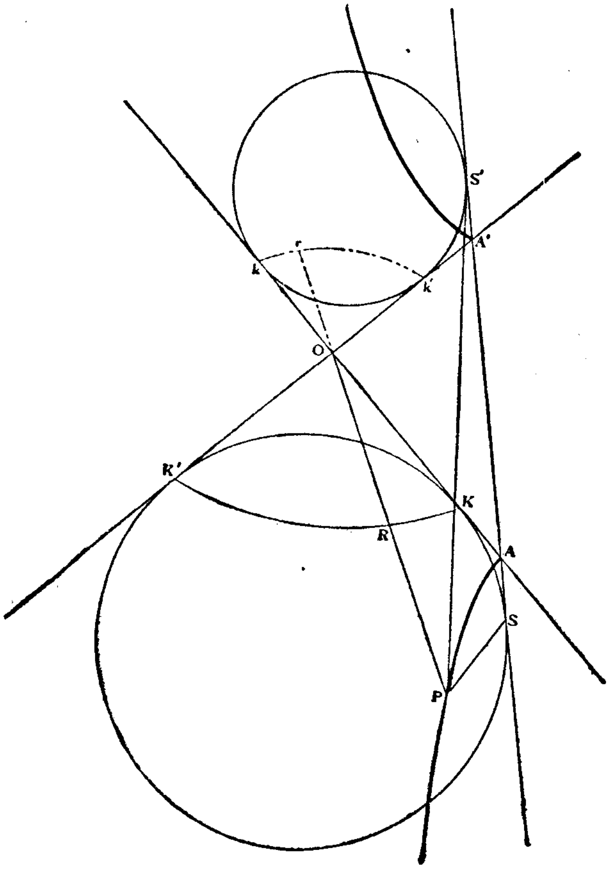
設 APA' 是截面曲線.

取紙面代表"軸面", 並設"軸面"遇"截面"於直線 AA', 遇圓錐於母線 KAk, $K'A'k'$.

作兩"焦點圓"觸圓錐於圓 KRK', krk', 遇"截面"於 S 和 S'.

過曲線 APA' 上任一點 P, 作一條"母線" RPr, 觸兩"焦點球"於 R, r.

聯 PS, PS', 這兩條線各在切點平面內經過切點，所以



也必定分別與"焦點球"之一相觸.

則 $SP=PR$, 因為兩者都是一個球的切線;又 $S'P=Pr$

$$\therefore\quad S'P\sim SP=Pr\sim PR$$

$$= Rr = Kk.$$

所以，這個曲線是焦點爲 S, S' 而橫軸等於 Kk 的一個雙曲線 [§ 118]. **Q. E. D**

習題 (與本題和前題都有關係).

軸圓在直徑是兩焦點球的聯心線的球面上.

解題六 定理

§ 174. 在一個圓錐的拋物線截面中，通徑是由圓錐頂到拋物線頂的距離，和過拋物線頂的圓錐圓截面的直徑兩數的第三比例項.

設 AP 是截面曲線.

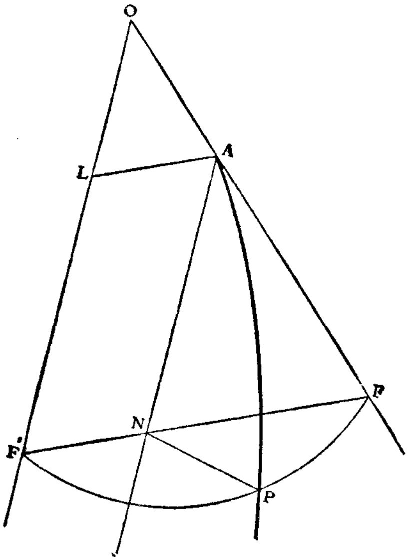
取紙面代表"軸面",並設"軸面"遇"截面"於直線 AN, 遇圓錐於"母線" OAF, OLF'

過截面曲線上任一點 P, 作一平面 $F'PFN$ 垂直於圓錐的"軸"，遇"截面"於直線 PN, 遇"軸面"於直線 FNF' 和遇圓錐於圓 FPF'.

作 AL 平行於 FF'.

因爲平面 FPF', APN 同垂直於"軸面"，它們的交線 PN 也必垂直於"軸面"，所以 PN 垂直於 FF' 和 AN.

[空間內垂線定義]



命 $4AS$ 作爲 OL, LA 的第三比例項.

由相似三角形

$$AN : NF = OL : LA \quad [\triangle OLA,\ ANF \text{ 相似 } (S \parallel S)]$$

$$= LA : 4AS; \quad [\text{所設}]$$

$$\therefore \quad 4AS \cdot AN = NF \cdot LA$$

$$= NF \cdot NF'$$

$$= PN^2.$$

[由圓周上一點到直徑的垂線是直徑上兩線分的比例中項]

所以，曲線 AP 是通徑爲 $4AS$ 的一個拋物線. [§ 14]

而且 $4AS$ 是 OL, LA 的第三比例項. *Q. E. D.*

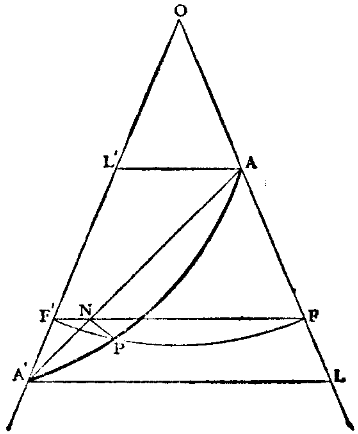
解題七 定理

§ 175. 在一個圓錐的橢圓截面中，短軸是過長軸兩端的二圓錐圓截面的直徑的比例中項.

設 APA' 是截面曲線.

取紙面代表"軸面"，並設"軸面"遇"截面"於直線 AA'，遇圓錐於母線 $OAFL, OA'F'L'$.

過截面曲線上任一點 P，作一平面 $F'PFN$ 垂直於圓錐的"軸"，遇"截面"於直線 PN，遇"軸面"於直線



FNF' 和遇圓錐於圓 FPF'.

作 AL', $A'L$ 與 FF' 平行.

因爲平面 FPF', APA' 同垂直於"軸面", PN, 即兩個平面的交線, 必也垂直於"軸面", 所以 PN 同時垂直於 FF' 和 AA' [空間內垂線定義]

由相似三角形

$$AN : NF = AA' : A'L,$$

[$\triangle ANF$, $A'AL$ 相似 $(S \parallel S)$]

又 $$A'N : NF' = AA' : AL';$$

[$\triangle A'NF$, $A'AL'$ 相似 $(S \parallel S)$]

$$\therefore \quad AN \cdot A'N : NF \cdot NF' = AA'^2 : A'L \cdot AL';$$

$$\therefore \quad AN \cdot NA' : PN^2 = AA'^2 : A'L \cdot AL'$$ [由圓周上一點到直徑作垂線, 分直徑爲兩線分, 則垂線的長爲這兩線分的比例中項]

所以, 這種截面是 AA' 爲長軸而短軸爲 AL' 和 $A'L$ 的比例中項的一個橢圓. [§ 64] *Q. E. D.*

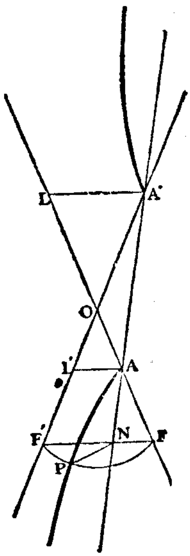
解題八 定理

§ 176. 在一個圓錐的雙曲線截面中, 共軛軸是過雙曲線兩頂點的圓錐兩圓截面的直徑的比例中項.

設 AP 是截面曲線的一隻，A' 是另一隻的頂點.

取紙面代表"軸面"，並設"軸面"遇"截面"於直線 AA'，遇圓錐於"母線" $LOAF$, $A'OL'F'$.

過截面曲線上任一點 P, 作一平面 $F'PFN$ 垂直於圓錐的"軸"，遇"截面"於直線 PN, 遇"軸面"於直線 FNF' 和遇圓錐於圓 FPF'.



作 AL', AL 平行於 FF'.

因為平面 FNF', APA' 同垂直於"軸面"，它們的交線 PN 必也垂直於"軸面"，所以 PN 垂直於 FF' 和 AA'.

[空間內垂線定義]

由相似三角形

$$AN : NF = AA' : A'L$$

[$\triangle A'AL$, NAF 相似 ($S \parallel S$)]

以及 $$A'N : NF' = AA' : AL';$$

[$\triangle A'L'A$, $A'F'N$ 相似 (a. a. a.)]

$$\therefore\ AN \cdot A'N : NF \cdot NF' = AA'^2 : A'L \cdot AL';$$

$$\therefore\ AN \cdot A'N : PN^2 = AA'^2 : A'L \cdot AL',$$ [由圓周上一點到直徑作垂線，分直徑為兩線分，則垂線的長是這兩線分的比例中項]

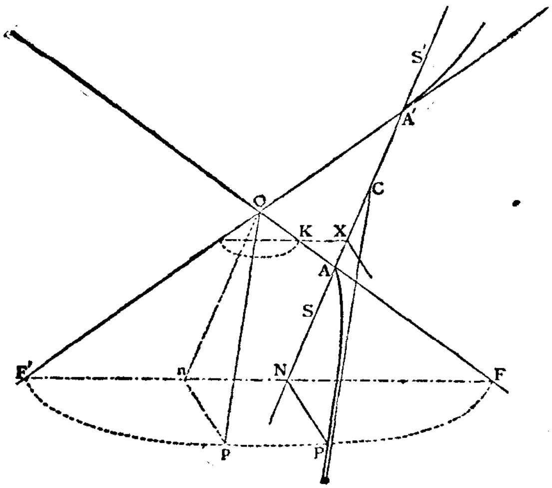
所以，這種截面是 AA' 為橫軸而共軛軸為 AL' 和 $A'L$ 兩數的比例中項的一個雙曲線。[§ 111] *Q. E. D*

解題九 定理

§ 177. 一個圓錐的雙曲線截面的漸近線必與在過圓錐頂點的一個平行面內的兩條母線平行。

取紙面代表"軸面"。

設 P 是雙曲線上任一點，PN 是一條縱線，S', S 是雙



曲線的兩焦點，A, A' 是它的兩頂點，C 是曲線中心，而 X 是對應焦點 S 的準線的足。

設 OF, OF' 是"軸面"內的兩條"母線", $FPF'N$ 是垂直於軸的一個平面。

設"焦點球"觸 OF 於 K, 則 KX 平行於 FF', [解題二]

和 SA 等於 AK. [由球外一點所作的切線相等]

設 Opn 是平行於"截面"的一個平面, 遇圓錐於一條"母線" Op, 遇"軸面"於 On 和遇平面 FPF' 於 pn.

三角形 OnF, AXK 相似, 因為 On 平行於 AX, 而 nF 平行於 XK.

$$\therefore \quad On : OF = AX : AK$$

[兩相似形的對應邊成比例]

$$= AX : AS,$$

$$\therefore \quad OF = e \cdot On.$$

但是"母線" OF, Op 相等,

$$\therefore \quad Op = e \cdot On.$$

在 § 113 圖內,

$$CR^2 = CA^2 + AR^2$$

$$= CA^2 + CB^2$$

$$= CS^2; \qquad [§ 119]$$

$$\therefore \quad CR = CS = e \cdot CA. \qquad [§ 117]$$

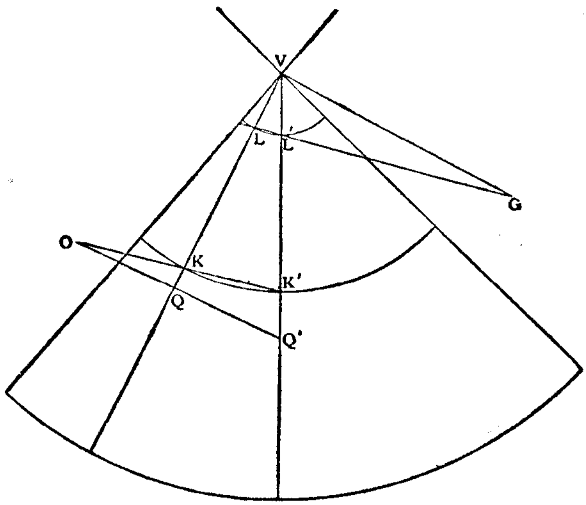
所以 pOn 是相當於兩漸近線間的角之半 [§ 113], 但是 On

平行於"橫軸"；所以 Op 平行於漸近線之一。

Q. E. D.

解題十　定理

§ 178. 設過任一點作兩條直線，與兩條定直線平行，交一已知圓錐，則兩條線的線分之積之比無論點的位置如何必爲一定。



設 OQQ', ORR' 是由 O 所作平行於兩定直線的兩條線，遇圓錐於 QQ', RR'.

過頂點 V, 作 VG, VH 與這兩條定直線平行；遇垂直

於圓錐的軸的一個定平面於 G 和 H.

ORR' 和 VH 並不在圖內表出.

先只就 $OQ\cdot OQ'$ 的積來推究.

設過 G 和 H 的定平面遇平面 VQQ' 於直線 $GL'L$ 和遇圓錐於圓 LL'.

又設一個平面，過 O 平行於定平面 GH, 遇平面 VQQ' 於 OKK', 遇圓錐於圓 KK'.

三角形 OKQ, GLV 在一個平面內而且它們的對應邊互相平行;

$$\therefore\quad OQ : OK = GV : GL.$$

依同理 $\quad OQ' : OK' = GV : GL'$;

$$\therefore\quad OQ\cdot OQ' : OK\cdot OK' = GV^2 : GL\cdot GL'.$$

現在無論 O 的位置如何，GV 總是一定而且 $GL\cdot GL'$ 的積也總是一定，

[由圓外一點作割線,則割線與其圓外線分的積常爲定值]

$$\therefore\quad OQ\cdot OQ' = \lambda OK\cdot OK'.$$

依同理，得證明

$$OR\cdot OR' = \mu OM\cdot OM',$$

在此 λ 和 μ 都是常數，M 和 M' 是 VR, VR' 和圓 KK'

的交點。

$$\therefore \quad OK \cdot OK' = OM \cdot OM',$$

［由圓外一點作割線，則割線與其圓外線分的積常爲定值］

$$\therefore \quad OQ \cdot OQ' : OR \cdot OR' = \lambda : \mu. \qquad Q.\ E.\ D.$$

第六章

習題與雜題

關於"圓錐曲線"的各種重要性質和問題,前數章差不多都已詳細證明過.只有極少的幾個性質和問題,因爲可從以前已有證明的解題誘導出來,所以特別留到本章,等待讀者自行證明.在這幾個待證的重要解題內,除掉極容易證明的外,大半都提示證法要點,以便初學.

習題一(拋物線)

定理

1. 設 POp 是一拋物線的一條弦,遇軸於 O, PN 和 pn 是兩條縱線,求證 $AN \cdot An = AO^2$.

參看 §14.

2 設 POp 是拋物線的一條弦,遇任一徑 ANn 於 O, PN 和 pn 是那條徑的縱線,則 $AN \cdot An = AO$.

參看前題證法.

3. 由一拋物線的三條切線所成的三角形的外切圓必過焦點.

參看 § 32.

4 設 OQ, OQ' 是兩條切線，而 OV 是一條徑，求證 $\angle QOV = \angle Q'OS$.

參看 §§ 24, 32.

5. 設 P 是平分弦 QQ' 的徑的端點，R 是遇 QQ' 於 M 的另一條徑的端點，求證

$$QM \cdot MQ' = 4SP \cdot RM.$$

參看 § 38.

6. 設過曲線上任一點 R 的徑遇弦 QQ' 於 M，遇切線 QT 於 T，求證

$$TR : RM = QM : MQ'.$$

參看 §§ 38, 39 和 § 41 的證法.

7. 設 OP 觸拋物線於 P，OQR 遇拋物線於 QR，又過 P 的徑遇弦 QR 於 U，求證

$$OU^2 = OQ \cdot OR.$$

參看 § 41.

8.　設一圓遇一拋物線於 A, B, C, D 四點，則公弦 AB, CD 與拋物線軸的傾角彼此相等.

參看 § 41.

9.　設一圓截一拋物線於四點，則這四點的縱線的和必等於零.

參看§§ 35, 41.

10.　設 P, Q, R 三點上的法線相遇於一點，則 P, Q, R 的縱線的和爲零，又三角形 PQR 的外切圓必過頂點.

參考普通解析幾何學內證法.

11.　設 OQ, OQ' 是一個拋物線的兩條切線，則弦 QQ 所截的拋物線線分面積爲三角形 OQQ' 面積三分之二.

本題在 § 42 已有詳細證明，讀者試另由 § 38 推證.

12.　在 § 39 圖內，設作 QD 垂直於 PV，則 $QD^2 = 4AS \cdot PV$.

參看"問題四"解題十七之部 $Ex.1$.

13.　任兩切線被第三切線所截，所成線分必成比例.

參看雜題 (11).

14.　設在兩定直線 OP, OP' 上截取 Y, Y'，使 OY, OY' 兩值間有 $\lambda \cdot OY + \mu \cdot OY' = 1$ (在此 λ, μ 都是常數) 的

一種固定的一次關係連系；則 YY' 包成 OP, OP' 作切線的一個拋物線.

由前解題，

$$\frac{PY}{OY}=\frac{OY'}{Y'P'}, \text{ 即 } \frac{OP-OY}{OY}=\frac{OY'}{OP'-OY'},$$

所以
$$\frac{OY}{OP}+\frac{OY'}{OP'}=1,$$

或 $\lambda \cdot OY+\mu \cdot OY'=1$, 在此 $\lambda=1/OP$, $\mu=1/OP'$, 由是本題得證.

15. S 是一個定點，Y 是定直線 AY 上任一點，作 YP 與 SY 成垂直；則 YP 包成一拋物線，S 爲焦點，而 AY 爲頂點上的切線.

§ 29 的逆定理.

16. S 是一個定點，O 是定直線 OQ 上任一點，作 OQ' 與 OS 傾斜成等於一已知角 (α) 的角；則 OQ' 包成一拋物線，S 爲焦點，OQ 在一個定點 Q 觸拋物線，而 $\angle SQO = \angle \alpha$.

本題是前題的普遍定理，即 § 32 的逆定理.

17. OQ, OQ' 是兩條定直線，S 是它們中間的一個定點，作 QQ' 使 $\angle QSQ'=\pi-\angle QOQ'$, 則 QQ' 包成一拋物

線，S 爲焦點，而 OQ, OQ' 爲兩條切線。

本題爲第三題的逆定理.

18. 一個切線三角形的垂心必在準線上。

參看雜題 (14).

習題二(圓錐曲線)

本習題內所有解題大都可適用於三種圓錐曲線.

定理

1. 任一直線與一圓錐曲線相遇不能多於兩點。

參看 §§ 13, 60, 110 (卽第一, 三, 四等章解題二).

2. 設一圓與一圓錐曲線相遇於四點，聯任何兩點的弦與軸所成之角等於聯其餘兩點的弦與軸所成之角。

參看 § 103.

3. 半通徑是任一焦點弦的兩線分的調和中項，

卽
$$\frac{1}{SP}+\frac{1}{SP'}=\frac{2}{SL}.$$

$$SP:SP'=SN:SN'$$

$$=NX-SX:SX-N'X$$

$$=SP-SL:SL-SP'.$$

4. 焦點弦線分之積與弦長成比例。

5. 任意兩相交弦的線分之積之比等於和它們平行的焦點弦之長之比。

參看 § 103.

6. 一個橢圓或雙曲線的互成垂直的切線交於一個稱爲"標圓"的定圓上。

參看 § 79, "問題八" 解題十四之部.

7. 求證 $PG : CD = CB : CA$

和 $Pg : CD = CA : CB$.

參看 §§ 83, 102.

8. 求證 $SP \cdot S'P = CD^2 = PG \cdot Pg$.

參看 §§ 78, 83.

9. 設 QQ' 是一焦點弦，與一條半直徑 CD 平行，則

$$QQ' \cdot CA = 2CD^2.$$

10. 設一圓錐曲線的一條徑遇準線於 Z, ZS 垂直於被這條徑所平分的諸弦。

參看 §§ 76, 92.

11. 設 OQ, OQ' 是一個圓錐曲線的切線，QQ' 遇準線於 K, 則 OSK 是一直角。

參看 § 87.

12. 設 P 點上的切線遇任意一對共軛徑於 T 和 t,則

$$PT \cdot Pt = CD^2.$$

參看 § 96

13. 法線 PG 在焦點距 SP 上的投影等於通徑之半。

參看 § 77, "問題七" 解題十二之部.

14. 設 OQ, OQ' 是一個橢圓的兩條切線,由 O 作一直線遇橢圓於 K M, 遇 QQ' 於 L, 則 O, K, L, M 四點成調和比,即

$$\frac{2}{OL}=\frac{1}{OK}+\frac{1}{OM}.$$

應用第二章,即投影,的理解.

15. 設 CP, CP' 是一個圓錐曲線垂直的兩條半直徑,求證 $\frac{1}{CP^2}+\frac{1}{CP'^2}$ 的值一定.

參看 "問題八" 解題十四之部 和 § 102.

16. 設直線 A 經過直線 B 的 "極點",求證直線 B 也必定經過直線 A 的 "極點" (pole).

應用第二章 "投影" 的理解.

17. 設 P 點上的切線遇準線於 Z, 遇通徑於 K, 則

$$SK : SZ = e.$$

看參 "問題十三" 解題十之部 (§ 122)

18. AA' 是一已知圓的一條定直徑, S 和 S' 同爲與圓心等距離的點, SY, $S'Y$ 是兩條平行直線,遇圓於

Y, Y'；則

(一) 如 S, S' 在圓內，YY' 的"包形" (envelope) 是一橢圓；

(二) 如 S, S' 在圓外，YY' 的"包形"是一雙曲線，而已知圓是這個雙曲線的輔圓.

(或，設 S, S' 是定點，$SY, S'Y'$ 是有 $SY \cdot S'Y'$ 一定的關係的平行直線；則 YY' 的"包形"是一橢圓或雙曲線依 $SY, S'Y'$ 作在 SS' 的一側或兩側而異.)

參看 §§ 79, 125.

19. Cr, Cr' 是兩條定直線，作 rr' 須使 $\triangle Crr'$ 的面積一定；則 rr' 的"包形"是 Cr, Cr' 爲漸近線的一個雙曲線.

參看 § 150.

20. 已知一個三角形的底和兩底角的差，求證三角形的頂的軌跡是一雙曲線.

當已知差是一直角時，則這個軌跡是一正雙曲線.

參看雜題 (335).

21. 一條定直線遇一組"共焦(點)圓錐曲線" (confocal conics) 之一於兩點；求證在這兩點上的法線的交點的軌跡是一條直線.

參看雜題 (420).

22. 一已知直線對於一組"共焦圓錐曲線"的極點的軌跡是一直線.

設 AB 是已知直線;作觸 AB 於 P 的這個共焦圓錐曲線;作 PG 垂直於 AB. AB 對於這個共焦曲線的極點是 P, 即在 PG 上. 作切線 PT, PT' 到任意另一共焦曲線. AB. PG 平分 $\angle SPS'$, 因此它們卽平分 $\angle TPT'$ 卽 AB, PG 與 PT, PT' 成調和比,也就是與切線爲 PT, PT' 的圓錐曲線互爲共軛, ∴ AB 對於這個圓錐曲線的極點在 PG 上.

23. 由一圓錐曲線上任一點和其上四定點相聯而成的"不調和比" (anharmonic ratio) 一定.

應用第二章"投影"的理解.

或,將準線看成一條截線 (transversal), 而將線束的頂點改變至 S; 由第一,三,四等章"解題二",這個線束的角都是一定,等於由 S 到各定點的這線束的角之半.

24. 又如在四定點上作曲線的切線,並設另一切線與四線相遇於四點,則這列點的"不調和比"爲一定,且等於各線束的"不調和比".

本題爲前題的互定理.

25. 設一六邊形內切於一圓錐曲線,則三對對邊相交的三交點必在一直線上.——巴斯加定理 (Pascal's theorem).

先投圓錐曲線，使兩對對邊平行，然後再正投成一圓.

26. 設一六邊形外切於一圓錐曲線，則三對角必交於一點.——白里安深定理 (Brianchon's theorem).

本題爲前題的互定理.

27. 一個圓 (圓心 O) 對於任一點 (S) 的"反極形" (polar reciprocal) 是有一焦點爲 S 的一個圓錐曲線，對應的準線就是 O 的"反極形"，離心率就是 SO 和圓半徑的比.

28. 任一組有相同"根軸" (radical axis) 的圓對於本組一個"極限點" (limiting point) 的"反極形"是一組"共焦圓錐曲線".

軌跡題

29. 已知一圓錐曲線的焦點，準線和離心率，求與軸平行的一條直線遇曲線之處.

設這條線遇準線於 M. 用圓心 X 和半徑 $e \cdot SX$ 作一圓. 聯 SM 遇這個圓於 p, p'. 作 SP, SP' 平行於 Xp, Xp'. PP' 就是所求的諸點.

習題三(圓柱截面和圓錐截面)

定理

1. 在一個平面截面的任一點，切線與焦點距以及與

母線均成等角.

2. 截面的半短軸是兩焦點球半徑的比例中項.

3. 凡圓錐截面,通徑都與由圓錐頂到截面的垂線成比例.

4. 任何離心率的橢圓都可由一正圓錐體截成,並且都可正投影爲一圓.

雜 題

(拋 物 線)

(1) QSq 是拋物線的一條焦點弦,與 P 點上的切線平行;PG是一條法線.求證 $QS\cdot Sq=PG^2$.

(2) 兩拋物線有一公焦點,並且它們的軸在同一方向;過焦點作一直線截兩曲線於四點.求證在這四點上的切線形成一個矩形,有一條對角線通過公焦點.

(3) 已知一拋物線的準線和拋物線上兩點,求焦點.又求作一切線,平行於聯兩已知點的直線.

(4) PNQ 是一個拋物線的一條倍縱線,APQ 是一等邊三角形;求證 $AN=3\times$ 通徑.

(5) 在一拋物線內,兩切線間的外角等於它們的切

點弦所對在焦點的角之半.

(6) OQ, OQ' 是一拋物線的切線，弦 QQ' 遇軸於 R, 並作 OM 垂直於軸，求證 $AM=AR$.

(7) 設將一拋物線任一點上的法線 PG 分成 $PQ:QG$ 爲定値，求證 Q 的軌跡是一拋物線.

(8) 兩拋物線有一公準線，求證它們的兩條公切線彼此垂直.

(9) 已知一個拋物線的準線和兩條切線；求這個拋物線的焦點，和這兩條切線的切點.

(10) 拋物線的一條弦與由平分它的徑的端點到它的中點的距離之四倍等長；求證這條弦必過焦點.

(11) 設 OP, OP' 是一拋物線的兩條切線，遇頂點 A 上的切線於 Y 和 Y', 又 PP' 截軸於 K, 求證 KY, KY' 平行於切線 OP, OP' (本題不僅在軸方面成立，即在任何徑連同其端點上的切線方面也眞).

(12) 設 PY 是一個拋物線 P 點上的切線，遇頂點上的切線於 Y, 又以 PY 作直徑的一個圓遇軸於 K 和 K', 求證 PK, PK' 延長線都是拋物線的法線.

(13) 一個拋物線的兩條弦 AB, CD 延長相遇於 O, 在 AB 和 CD 上取 E 和 F 點，使 $OE^2=OA\cdot OB$ 而 OF'^2

$=OC\cdot OD$, 求證 EF 平行於軸.

(14) 設一個拋物線與一三角形的三邊相觸，它的準線必過"垂心".

(15) 設過一圓上四已知點作兩拋物線，它們的軸交於這四點的"重心" (centroid) 上.

(16) QOQ', ROR' 是一拋物線的兩弦，向兩端延長 ROR' 遇 Q, Q' 兩點上的切線於 r 和 r'; 設 $Rr=R'r'$, 求證 $OR=OR'$.

(17) 設 AR, SY 是由拋物線的頂點和焦點到切線的垂線，求證 $SY^2=SY\cdot AR+SA^2$. (I. C. S.)

(18) P 是拋物線上任一點，作 SR 垂直於 AP 遇頂點上的切線於 R, 求證 AR 是由 P 到軸的垂線 PN 的四分之一長. (Clare)

(19) 一拋物線觸一等邊三角形 ABC 三角的對邊於 A', B', C'. 求證 AA', BB', CC' 遇於拋物線的焦點. (Trinity)

(20) 一拋物線在一相等的拋物線上滾動，但最初兩頂點係彼此重合；求證在滾動的拋物線頂點上的切線常觸一個定圓. (Trinity)

(21) P, Q 是一個拋物線上的兩點，過焦點 S 用 P, Q

爲圓心作兩圓正交於 S 和 R. 設聯 Q 到兩圓的交點的線遇準線於 T 和 T', 求證 $\angle TPT'=\frac{1}{2}\angle RPS$. (Pemb.)

(22) 在拋物線內，如 $\angle ASP$ 等於一直角的三分之四，求證 P 點上的縱線和通徑端點上的法線交於軸上. (Magd.)

(23) 已知一拋物線的兩條切線和它們的切點的位置，求焦點和準線. (Queen's)

(24) OP, OQ 是一拋物線 P, Q 兩點上的切線，S 是焦點；設 OS 復遇過 OPQ 的圓於 T, 則 S 平分 OT. (Queen's)

(25) 設 PG 是 P 點上的法線，求證由拋物線上任一點到圓心 G 而半徑 GP 的一個圓的切線等於由那一點到 P 的縱線的垂線長. (Jesus)

(26) H 是三角形 ABC 的外角 A 的平分線上一個定點；取 HA 爲弦作一圓截 AB, AC 兩線於 P 和 Q；求證 PQ 包成一拋物線，H 是它的焦點，而聯由 H 到 AB 和 AC 的垂線足的直線是頂點上的切線. (Jesus 等)

(27) 在頂點上的切線上取 Y 和 Y' 點，使 $SY\cdot SY'$ 一定，又過 Y 和 Y' 作兩切線相遇於 Q；求證 Q 的軌跡是一圓. (St. John's)

(28) 過焦點作一圓與拋物線相切於一點 P. 設 K 是它重行截軸的點，A 是拋物線的頂點，求證 AK 等於 P 的橫線的四倍長. (Sal.)

(29) 在拋物線的一條切線上取兩點 P, Q 與焦點等距，求證由 P, Q 所引另兩條切線必遇於軸上.

(Peterhouse)

(30) P, Q, R 是拋物線上的幾點，弦 PR 交經過 Q 的徑於 S. 弦 PQ 交經過 R 的徑於 T. 求證 ST 與 P 點上的切線平行. (Clare 等)

(31) S 是頂點為 A 的拋物線的焦點，而 SL 是通徑. P 和 Q 是在經過 A 點上的切線和過 L 的徑的交點 O 的任一直線上的任意兩點. 求證由 P 所作兩切線的切點弦與由 Q 所作兩切線的切點弦交於平分 $\angle OAS$ 的直線上. (Trin.)

(32) 設 P 是焦點 S 而頂點 A 的一個拋物線的軸上一點，A 點上的切線截 PS 作直徑的圓於 Q 和 R, 求證 PQ, PR 必觸此圓.

設任一切線截此圓於 Q' 和 R', 則由 Q', R' 作到拋物線的切線必交於圓上. (Trinity.)

(33)　一點移動，如由一已知點和由一已知直線到它的距離之和爲一定，則此點畫成一拋物線並求它的通徑長．　(Queens 等)

(34)　求作過四已知點 A, B, C, D 而且 AB 平行於 CD 的一個拋物線的軸．　(Jesus)

(35)　A 和 P 是兩定點．作若干拋物線，全體的頂點都在 A 且全體都經過 P. 求證 P 點上的切線與 A 點上的切線和法線的交點在兩定圓上，且一圓爲他圓的兩倍．　(St. Johns)

(36)　設 PN, PL 是由 P 到軸和到頂點上切線的垂線，求證 LN 通常必觸一拋物線．　(Peterhouse)

(37)　一個拋物線的一條不定切線交兩條定切線於點 T 和 T'；求證 $ST : ST'$ 的值一定．　(Trinity)

(38)　設作 QD 垂直於一拋物線的 PV 徑，則

$$QD^2 : QV^2 = SA : SP.$$　(Trinity)

(39)　過由焦點 S 到拋物線 P 點上的切線的垂直線足 Y，作 YK 與拋物線的軸平行，遇法線 PG 於 K，聯 SK. 求證三角形 SKG 和 SKP 各與三角形 SPY 相等．

(T. H.)

(40) 設 O 是一個定點，MM' 是不經過 O 的一條定直線，Q 是 MM' 上任一點，又設用 OQ 作底，在 OQ 距 MM' 較遠的一側作一等腰三角形，使頂角 OPQ 常爲 OQ 和 MM' 所成的銳角的兩倍，求證 P 的軌跡是一拋物線. (T. H.)

(41) 設 ABC 是一拋物線的內切三角形，求證由與三角形各邊平行的切線的交點所成的三角形之邊長爲現三角形之邊長的四分之一. (I. C. S.)

(42) 頂點爲 A 的拋物線 P_1, P_2 兩點上的切線與軸 AN_1N_2 相交於 P, 又 N_1, N_2, N 是 P_1, P_2, P 等點的縱線之足. 求證

$$P_1N_1 : P_2N_2 = AN : AN_2 = AN_1 : AN.$$

(I. C. S.)

(43) OQ, OQ' 是一拋物線的切線，OV 是一條徑. 設 OV 遇準線於 K, 而 QQ' 遇軸於 N, 求證 $OK = SN$; S 爲焦點. (I. C. S.)

(44) 設在一焦點弦 PSQ 兩端的切線交於 D, SD 必爲 AS 和 PQ 的比例中項. (I. C. S.)

(45) 求在一已知圓的一個已知圓分內所作的圓圓心軌跡. (Peterhouse)

(46)　PSP', QSQ', RSR' 是過一已知拋物線的焦點 S 的三條弦．求證三角形 PQR 和 $P'Q'R'$ 面積之比等於 P, Q, R 和 P', Q', R' 每三點縱線之積之比．(Peterhouse)

(47)　作一組拋物線與兩已知直線相觸，且係與已知直線之一觸於一已知點；求證所有的焦點在一個定圓上，且所有的準線必過一個定點．(Trinity)

(48)　有一條公軸的兩相等拋物線以凹面在相反方面旋轉．求證切於此拋物線而爲彼拋物線的一條弦的中點的軌跡是一拋物線，因次爲原拋物線的三分之一．

(Trinity)

(49)　P 點上的法線遇頂點上的切線於 F，又遇曲線於 f．設此拋物線的軸遇 P 點上的切線和法線於 T 和 G，求證

$$PF \cdot Pf = TG^2.$$ (T. H.)

(50)　拋物線任一點 P 上的法線重遇拋物線於 Q；T 是弦 PQ 的極點，聯 T 和焦點 S 的線遇由 P 作到 SP 的垂線於點 O．求證 $TS=SO$，以及 TOQ 是一直角．

(St. Johns)

(51)　V 是一個拋物線的一條焦點弦 QQ' 的中點，Q 和 Q' 兩點上的切線相遇於 T；求證三角形 TQQ' 的外

切圓和直線 TV 的交點的軌跡是一拋物線. (Peterhouse)

(52) 由拋物線上任一點作 P_1, P_2 兩點上的法線；求證弦 P_1P_2 過一個定點. (Clare)

(53) 兩相等而且有相似位置的拋物線有一條公軸；作一條切線到兩拋物線之一，遇另一拋物線於 P 和 Q；求證由 Q 到過 P 的徑的垂直距離一定，且弦 PQ 所截線分的面積也是一定. (Pembroke)

(54) 求定拋物線上法線等於一已知直線的點.

(T. H.)

(55) 設一個拋物線的三條切線圍成一等腰三角形，求證聯兩等邊的交點到焦點的線必過對邊與拋物線相切之點. (St. Catherine)

(56) 兩共焦拋物線相截成直角.求證聯它們的頂點的線必過焦點，且等於它們的交點的焦半徑. (St. Johns)

(57) 設 PN 是一條縱線，過 N 作一弦 QNQ' 截拋物線於 Q 和 Q'，則由 Q 和 Q' 的縱線所成矩形等於 PN 上的正方形. (Sel.)

(58) 兩定直線相交於 A，而 B 爲一個定點；設過 A 和 B 作一圓截這兩條線於 C 和 D，則 CD 必常與一拋物

線相觸. (Sel.)

(59) 在拋物線上縱橫線相等的點的法線弦必於焦點對一直角. (Peterhouse)

(60) 設過焦點的一個圓觸拋物線於 P, 截拋物線於 L 和 M, 截軸於 N, 求證 LP 等於 MN. (Clare)

(61) 求作過兩已知點,與過兩點之一的一條已知線相觸,且軸與一已知線平行的一個拋物線的準線. (Clare)

(62) 設無論 T 的位置如何,拋物線的 TP, TQ 切線都對定角於焦點,求證 SPT, STQ 兩三角形的外切圓的圓心距離與 ST^2 成比例. (Clare)

(63) 設 PQ 是一個拋物線的一條焦點弦,R 是過 Q 的徑上任一點;求證平行於 PR 的焦點弦 $=\frac{PR^2}{PQ}$. (Clare)

(64) 在一個三角形 ABC 的三邊上取 D, E, F 三點,並作三共焦拋物線;一個觸 BF, FE 和 EC, 其餘兩個則與其餘兩組的每三條直線相觸; S 是公焦點,而準線相交於 G, H, K. 求證三角形 DSG, ESH, FSK 與 SD, SE, SF 上的正方形成比例. (Trinity)

(65) 兩抛物線有一公焦點；由兩抛物線外一點 T 作兩個曲線的兩條切線 TP, TQ 和 TR, TS. 設 PTQ 和 RTS 互爲補角，求證 PR, QS 平行或相遇於焦點. 設爲平行，求證它們也和兩抛物線的公切線平行. (Pembroke)

(66) 由兩定點 A, B, 作垂直線 AP, BQ 到一條不定線上；求證在四邊形 $ABQP$ 的面積一定時，這條不定線的包形是一抛物線. (Caius)

(67) 抛物線通徑一端 L 點上的法線重遇抛物線於 P, P 點上的切線截通徑延長線於 M 截軸於 T; 求證 LM, NT 爲通徑的 $\frac{4}{3}$ 倍和 $\frac{9}{2}$ 倍, 在此 PN 是由 P 到軸的垂直線. (King's)

(68) A 是頂點，S 是焦點，P 是抛物線上任一點；PN 是 P 點上的縱線，過 S 作到 SP 的垂線遇 P 點上的法線於 L; 設 LM 是 L 的縱線，求證 $SM=2AN$. (Queen's)

(69) P, Q 是一個抛物線上的任意兩點，R 是聯它們的弦的中點，RM 是作到軸的 R 的垂直縱線，而作到 PQ 的垂直線 RG 遇軸於 G; 求證 MG 等於抛物線通徑之半. (Queen's)

(70) 求證通徑是抛物線內可作的最短的焦點弦.

(St Catherine)

(71)　求作一拋物線，與三已知直線相觸，且焦點在另一直線上。 (Peterhouse)

(72)　由拋物線的焦點 S, 作一直線與 P 點上的切線平行，遇曲線於 Q; P 點上的徑遇 SQ 於 E. 求證 E 的軌跡是一拋物線，通徑爲原通徑之半。 (Jesus)

(73)　由拋物線一點 P 上的法線足作 GR, 垂直於 SP, 截以 SP 作直徑的圓於 L LS 延長線遇 P 點上的切線於 O, 求證 $OS : OP$ 的値一定。 (Sidney)

(74)　作過兩定點 A, B 且軸在一已知方向的各拋物線；求諸拋物線的焦點的軌跡。 (St. Johns)

(75)　作一組拋物線，與一已知拋物線有相同的頂點切線，並且它們的焦點都在此已知拋物線上。求證它們交於此已知拋物線的焦點。 (Peterhouse)

(76)　在一拋物線任一點 P 上的切線遇圓心是焦點的一個定圓於 Q, R. 設過 Q, R 的拋物線的其他兩切線相遇於 T, 並設在 Q, R 的圓的切線相遇於 U, 求證 TU 平行於準線。 (Peterhouse)

(77)　在一拋物線的一條焦點弦的中點，作一直線垂

直於準線且等於弦之半；求它的端點的軌跡。 (Clare)

(78) 由 P 作 PM 垂直於一拋物線頂點上的切線，MQ 垂直於 AP; 求證 Q 的軌跡是一圓. (T. H.)

(79) 過一拋物線軸上一個定點，作一條弦 PQ, 又過 P 和 Q 的縱線足作已知半徑的一個圓. 求證它的圓心的軌跡是一圓. (Jesus)

(80) 一圓與一已知圓垂直相交，並在一已知直線上截一已知長；求證它的圓心的軌跡是一拋物線，又它與已知圓的交點弦的包形是一圓錐曲線. (Jesus)

(81) PSP' 是拋物線的一條焦點弦. 過 P, P' 的徑分別遇 P', P 上的法線於 V, V'. 求證 $PVV'P'$ 是一平行四邊形. (Jesus)

(82) ACP 是圓心 C 而半徑 CA 固定的一圓的一個扇形. 又作一圓在 AP 弧外相觸，並觸 CA 和 CP 兩者的延長線；求證這個圓圓心的軌跡是一拋物線. (St. Johns)

(83) 設已知內切於一三角形的一個拋物線的軸的方向，求證焦點的作法如下：過三角形的一個角頂 A, 作 AD, 垂直於已知方向，截圓於 D; 過 D 作 DS, 垂直於對邊，截圓於 S; 則 S 就是焦點. (Peterhouse)

(84) P, Q, R 是焦點 S 的一個拋物線上三點．過 R，分別作 RU, RV 平行於 P, Q 上的切線．求用幾何學的理解證明 $RU^2=4SP\cdot QV$.

試更用這個結果，作下題的證明：

TQ 和 TR 爲一拋物線的兩條切線，遇 P 點上的切線於 X 和 Y. 過 T 的徑端點上的切線遇 P 上的切線於 O. 則如 S 是焦點，$SP\cdot QR=2SO\cdot XY$. (St. Johns)

(85) 兩同焦共軸而凹面在反對方向的拋物線與平行於軸的任一直線相遇於 P 和 P'，又它們的公弦 QQ' 遇 PP' 於 R，求證 $RQ\cdot RQ':PP'$ 是一個定比． (Peterhouse)

(86) 一個拋物線三條切線所成三角形的外切圓經過焦點；求證焦點上這個圓的切線與拋物線的軸所成的角等於拋物線的三條直線與軸所成之角的代數和．

(Peterhouse)

(87) PQ 是拋物線 P 點上的法線，T 是它的極點；求證 PS 必過經過 T 的徑的頂點． (Peterhouse)

(88) 一條直線移動時，兩定圓常能在它上面截取相等長的弦．求證此移動直線常觸焦點平分兩圓的聯心線的一個定拋物線． (Peterhouse)

(89) 設在一個拋物線每一點的縱線向軸下延長，直到與由此點到焦點的距離相等；求證它的端點的軌跡另成一拋物線，又這兩個曲線的軸成等於半直角的一個角。

(Clare)

(90) 一個拋物線的兩條定切線 TQ, TR 與一條不定切線相遇於 X 和 Y. 設作一條弦平行於 XY 且等於 XY, 則這個弦包成一相等的拋物線. (Trinity)

(91) 過拋物線任一點 P, 作一直線垂直於聯 P 到頂點的線.這條線遇軸於 K, 又 P 點上的法線遇軸於 G; 求證 GK 等於通徑之半.

(92) 過拋物線上任一點，作兩弦與點上切線成相等角. 求證兩弦的長與在它們和曲線中間所截的各自的徑成比例. (Trinity)

(93) PSp 是拋物線的一條焦點弦，用 PS 和 pS 作直徑，作兩圓；求證它們公切線任一條的長必為 AS 和 Pp 的比例中項. (Trinity)

(94) 一條直線 PQ 截兩條互成直角的定直線 Ox, Oy 於點 P, Q, 而 PQ 的中點又在一條定直線 AB 上.求證直線 PQ 常為一個定拋物線的一條切線, (Trinity)

(95) 設 P 上的法線 PG 遇軸於 G; 又設 GQ 是從 G 作起的一條縱線; 求證 PG 和 QG 兩值的平方差是一常量. (Pembroke)

(96) 在一個"有心圓錐曲線"(central conic) 內, 設一條徑 CT 截它的弦之一, QQ', 於 V, 截曲線於 P, 和截 Q 點上的切線於 T, 則 $CV \cdot CT = CP^2$; 又拋物線方面與此相當的解題如何?

(97) 設 PSQ 是一拋物線的一條焦點弦, PG 是 P 點上的法線, PN 是半縱線, 又設 PN 延長線遇經過 Q 的徑於 H; 則 HG 必垂直於 PG. (T. H.)

(98) 由拋物線的準線上一點 O 作兩條切線, 又過焦點 S, 作兩直線與這兩條切線平行; 則這兩條平行線間所截的準線部分必被平分於 O. (Christ)

(99) 在 O 縛一條極長的線 OPQ, 線上有兩球 P, Q 在滑動; 設線被拉緊, 而兩球移動時總使 OP 和 OQ 相等以及 PQ 的方向一定; 求證 P 和 Q 的軌跡是有一公焦點在 O 的兩拋物線的弧. (Queen's)

(100) O 是一定圓上的一個定點; 用圓上任一點 S 作焦點, 而 O 上的切線作準線, 作一拋物線; 求證由 O

到這個拋物線的切線的切點是一圓. (Queen's)

(101) 由一個拋物線上任一點,作數弦與點上的切線都成等角;求證各弦之比與平行的各焦點弦之比相等. (St. Catherine)

(102) C 是一個已知圓的圓心, D 是圓周上一個定點, M 是與 DC 平行的任意弦 RS 的中點. 求證 CR, CS 與 DM 相交於一拋物線上. (Jesus)

(103) 一點 O 對於一拋物線的極線遇軸於 U, 又過 U 垂直於極線的一條直線遇 OS 於 R; 求證 $OS=SR$ (Jesus)

(104) 三拋物線有一公切線. 求證它們別幾對公切線的交點是共線點. (St. Johns)

(105) 設作兩切線至一拋物線,由焦點到它們的切點弦的垂直線過它們在頂點上的切線上的截距的中點. (St. Johns)

(106) 作幾雙相等的拋物線,用一已知點 S 做焦點,一個曲線與一已知線 AB, 另一觸其他已知線 AC. 求證它們幾條公切線的包形是一拋物線, 準線過 S, 而與 AB, AC 相切的點必在過 S 的直線上. (St. Johns)

(107) OXP, OYQ, XRY 是分別在 P, Q, R 等點的一

個拋物線（焦點 S）的三條切線；求切線 XY 位置變動時，SXP, SYQ 兩圓其餘的交點的軌跡。　(Peterhouse)

(108)　設兩拋物線有一公焦點，則聯它和兩準線的交點的線必與兩拋物線的公切線成垂直。　(Clare)

(109)　作三拋物線，共一公焦點和軸，且通徑成幾何級數；設 PQ 是由外拋物線的一點作到中拋物線的一對切線的切點弦，求證 PQ 必觸內拋物線。　(Clare)

(110)　設作任一拋物線觸一個定三角形的各邊，則每條切點弦必過一定點。　(Trinity)

(111)　用一個拋物線的焦點作圓心的一個圓截一點 P 上的切線於準線和一點 T. 作 TM 垂直於 SP, 或 SP 延長線。求證 SM 等於通徑之半。　(Pembroke)

(112)　由拋物線外一點 O 作兩條切線 OQ, OQ' 到拋物線上，由 O 到軸的垂線截軸於 N; 求證 NQ, NQ' 與軸成相等角。　(Caius)

(113)　兩拋物線有相同焦點和軸，一個拋物線一點 P 上的切線與另一拋物線一點 Q 上的切線垂直相交於 T; 求證由 T 到過 P, Q 的兩徑的距離相等。　(Christ's)

(114)　一個拋物線任一點 P 上的切線被一焦點弦兩

端點上的切線所截，所截部分必對一直角於過 P 的徑過焦點弦的點。 (Caius)

(115) 過一個定點，作一直線，這條直線在這個定點與一條直線垂直；再過這條垂線與一條定直線相遇的點，作一條直線垂直於定直線；求證這條線和第一條線的交點的軌跡是一拋物線。 (Clare)

(116) 一組平行線任一條截兩個定拋物線於 P, P' 和 Q, Q'；過 P, P' 和過 Q, Q' 作直線平行於各點所在的拋物線的軸；求證這樣作成的平行四邊形的角頂在一個定圓錐曲線上。 (Christ

(117) A 是一個拋物線的頂點，P 是曲線上任一點，延長 AP 到 Q，使 $PQ = AP$；又過 Q 作一條直線 MQL 垂直於 AQ，遇軸於 M；設 QL 等於 QM，求證 L 的軌跡是一拋物線，並求 L 點上的法線。 (Queen's)

(118) 設 P 上的法線遇軸於 G，則 APG 三點所成三角形的外切圓圓心的軌跡是一拋物線。 (Queen's)

(119) 已知一個拋物線的三條切線，和其中之一的切點，求焦點並作拋物線。 (St. Catherine)

(120) 一等腰三角形外切於一拋物線；求證三邊和三

切點弦交準線於五點，如是在任聯屬兩點間的距離均對等角於焦點 (Trinity)

(121) 設 PP' 是一拋物線內垂直於軸的任一點，又設過 P' 的徑遇 P 上的切線和法線於 Q 和 R, 則 QR 的中點必在一個定拋物線上。 (Jesus)

(122) 在一拋物線上 P, Q 兩點的切線相交於 T, 又這兩點的法線相交於 O. 設作 TL ON 垂直於軸，遇軸於 L 和 N, 求證 $TL \cdot AL = ON \cdot AS$. (Jesus)

(123) 一個拋物線 Q, P 兩點上的切線相交於 T, 作兩徑三等分 PQ. 設它們的端點上的切線之一垂直於 TP, 則 PTQ 必爲一等腰三角形。 (St. Johns)

(124) 設一拋物線的 PQ 弦垂直於 PT, T 是它的極點，又設 QP 延長線遇準線於 R, 求證 $\angle RTQ$ 是一直角。

(St. Johns)

(125) 由一拋物線 P 點上法線 PG 的中點 R, 作另外兩條法線到曲線上，求證 $QS, Q'S$ 與軸傾斜成等角。

(St. Johns)

(楕 圓)

(126) POQ 是一銳角，兩夾邊是一楕圓的一條焦點

弦 PQ 兩端點上的切線；求兩焦點.

(127) 設一圓錐曲線的外切四邊形的對角線交於一焦點，它們必彼此垂直.

(128) 求在一橢圓內，作兩共軛徑，所夾角須等於一已知角.

(129) P 和 Q 是橢圓和它的輔圓上的對應點，S 是焦點；求證 $SP=$ 由 S 到 Q 點上的圓的切線的垂線長.

(130) 一個橢圓上 P 點的法線截短軸於 g；Pn 是到短軸上的縱線. 求證 $Cg:Cn=CS^2:CB^2$.

(131) S 是一已知圓錐曲線的一個焦點，由軸上一個定點作一條垂線到曲線上任一點上的切線. 求證這條垂線和 SP 的交點在一個定圓上.

(132) 由一已知點作一條法線，到(一)一拋物線的軸上，(二)一個橢圓的長軸上.

(133) 由兩個有一公焦點 S 的橢圓的一條公切線上任一點 P，作切線到這兩個橢圓，交另一公切線於 Q, R. 求證角 QSR 一定.

(134) 已知一個圓錐曲線的一個弧，求定這個曲線的種類(拋物線，橢圓還是雙曲線).

(135)　已知一個橢圓的兩條切線和一個焦點，求曲線中心的軌跡.

(136)　作一條切線到一圓錐曲線，遇兩準線於 L, M. 設 S, H 是焦點，而 LS, MH 相交於 N, 求證 $LN=MN$.

(137)　PQ 是一圓錐曲線的一條倍縱線，又聯 P 到準線足的直線截曲線於 R. 求證 QR 必過焦點。

(138)　設將一個橢圓內的 AP, BQ 兩弦延長，相遇於 O; QC, PD 是和它們平行的弦，相交於 R, 求證 AOB, CRD 兩三角形相似，而 AB 平行於 CD.

(139)　設兩圓錐曲線有一公焦點，且在彼此只交於兩點的位置，則它們的公弦必過對應準線的交點.

(140)　一組平行四邊形內切於一橢圓，四邊形的邊與等共軛徑平行；求證各邊的平方和一定.

(141)　求證下面是作一個圓錐曲線的法線的方法：作縱線 PN; 在軸上，截取 NK, NL 各等於 NP; 延長 PK, PL 重與曲線相遇於 Q, Q'; 平分 QQ' 於 V, 則 PV 卽是 P 點上的法線.

(142)　一個橢圓內切於一四邊形 $ABCD$, S 是橢圓的一個焦點；求證 ASB, CSD 兩角之和等於 BSC, DSA 兩

角之和.

(143)　由橢圓兩個焦點到任一點上的法線的垂直線之比等於由兩焦點到那個點上的切線的垂直線之比.

(144)　已知一個圓錐曲線的兩條切線和它的中心;求證它的焦點的軌跡是一正雙曲線.

(145)　設一個橢圓 P 點上的縱線 PN 延長遇通徑端點上的切線於 Q, 求證 $QN=SP$.

(146)　在與軸成垂直的一個平面上,作一正圓錐的一個橢圓截面的投影, 求證投影曲線的焦點在圓錐軸與投影面相遇之點.

(147)　設 OP, OQ 是由一個橢圓的輔圓上一點 O 所作的切線, PCP' 是這個橢圓的一條徑,求證 QP' 必過一焦點.

(148)　在任一圓錐曲線內,設 PQ PQ' 與軸傾斜成等角, 求證 PQQ' 的外切圓觸這個曲線於 P.

(149)　設內切於一橢圓的兩個四邊形有三邊彼此平行,則第四邊也必定平行.試說明用一平行規作在一橢圓任一點上的一條切線的方法.(參看第二章)

(150)　設 RP 是一已知橢圓 P 點上的任意切線,

SRP 是一定角，求證 R 的軌跡是一圓.

(151)　在一橢圓上 Q, Q' 兩點，OQ, OQ' 是切線；QG $Q'G'$ 是法線，遇長軸於 G, G'；求證 $OQG, CQ'G'$ 是兩相似三角形.

(152)　切線 OQ, OQ' 對等角於過 O 的縱線足.

(153)　一個橢圓觸一三角形於其各邊的中點，求證橢圓的中心卽是這個三角形的重心.(參看第二章)

(154)　互相垂直的兩條線，AB 和 AC，觸中心爲 O 的一個橢圓，並又截圓心 O 而半徑 OA 的圓於點 B 和點 C. 求證 BC 和 OA 與橢圓的一雙共軛徑重合.　(I. C. S.)

(155)　設一個橢圓上一點 P 上的法線遇軸於 G，過焦點 S 作 PSK 遇互軛於 CP 的徑於 K；求證 CG 和 SK 的比必等於離心率.　(I. C. S.)

(156)　已知兩焦點和一條切線，求作一個橢圓.

(I. C. S.)

(157)　求證聯一個橢圓的中心 C 和一雙共軛半直徑 CP, CD 端點 P, D 上的法線的交點的直線垂直於直線 PD.　(I. C. S.)

(158)　設 X, X' 是對應焦點 S, S' 的一個橢圓的兩條

準線的足，$SY, S'Y'$ 是任一切線上的垂直線，$XY, X'Y'$ 兩線必交於短軸上。 (I. C. S)

(159) CL 是由橢圓中心到 P 點上切線的垂線在短軸上的投影；設 PQ 是 SPS' 三角形的外切圓直徑，求證

$$PQ \cdot CL = AC^2.$$ (Peterhouse)

(160) 由橢圓內一點 O 所作到橢圓上的兩條法線 OA, OB 互成直角。這兩條法線又分別遇橢圓於 C 和 D. 求證 $$OA : OB = OC : OD.$$ (Peterhouse)

(161) 在一橢圓內，一個弦 P_1P_2 的垂直平分線遇長軸於 K, 求證 $CK = e^2CN$, 在此 CN 是由中心 C 度量的 P_1P_2 的中點的縱線，而 e 是離心率。

(Peterhouse, Pembroke 等)

(162) 在兩條定直線上取平方和爲一定的兩段長 CA, CB, 完成平行四邊形 $ABPC$；求證 P 的軌跡是一橢圓，在這兩條線上有相等的截距。 (Clare 等)

(163) 聯橢圓上任一點 P 和兩條半直徑 CA, CB 的端點；PA, PB 分別遇 CB, CA 於 B', A'；求證

$$AA' \cdot BB' = 2CA \cdot CB.$$ (Clare 等)

(164) 一橢圓全部包一同心圓；求證圓的切線在橢圓

上所截的面積只有在切線和橢圓的一條軸平行時爲極大或極小，試分別舉證. (Clare 等)

(165) 設 P, Q, R, S 是一橢圓上四點，PQ, RS 兩弦所截一條軸的一段被曲線中心所平分，則 PR, QS 和 PS, QR 等弦中間的那兩段軸亦必被中心平分. (Trinity)

(166) 由在輔圓一條直徑兩端的兩點，作切線到橢圓；求證交點都在兩準線上. (Trinity)

(167) Q 爲直角的一個不定直角三角形內切於圓心爲 C 的一個已知圓.設 QR 邊繼續過圓內一個定點 S, 求證 PQ 觸一橢圓；又如 QC 和 PS 相交於 O, 試證 RO 和 PQ 的交點是 PQ 觸橢圓的切點.

(168) 求證一個橢圓有一對"等共軛徑". 設將橢圓長軸的一端和"等共軛徑"之一的一端相聯，由短軸兩端所作平行於這條聯線的線必遇橢圓在另一條"等共軛徑"的端點上.

(169) 一橢圓內切於一已知三角形.設已知焦點之一的位置，求作橢圓和它與三角形各邊的切點. (T. H.)

(170) 設在一橢圓內切四邊形 $PQRS$ 內，PQ 和 SR 平行；又設作切線到這個橢圓，與 QR, PS 平行；求證聯

切點的線必與 PQ 和 SR 平行。 (Magdalene)

(171) PQ 是一拋物線的一條弦，T 是它的極點；作中心在 PQ 上的一個橢圓，外切 PTQ, K 是橢圓 T 點上的切線對於拋物線的極點；求證 TK 平行於橢圓內與 PQ 成共軛的徑。 (King's)

(172) P, Q 是在兩個共焦橢圓內的點,聯兩橢圓的公焦點的線對等角於這兩點；求證 P, Q 兩點上的切線傾斜成一個角,等於 PQ 對在每個焦點的角。 (King's)

(173) 由一個圓的任一點 P, 作 PM 垂直於圓上一定點 A 上的切線；求證 PM 的中點的軌跡是一橢圓，並求中心和兩軸。 (Queen's)

(174) 用一拋物線的焦點作中心,和過通徑兩端的拋物線的兩徑作準線,作一橢圓.求證這個橢圓必觸拋物線於兩點。 (Queen's)

(175) 設一橢圓一點 P 上的縱線 NP 延長，遇由 C 到 P 點上的切線的垂直線於 R；求證 R 的軌跡是一橢圓，又已知橢圓 P, Q, R 等點上的切線，輔圓，以及 R 的軌跡完全相遇於一點。 (St. Catherine)

(176) 作兩圓，分別觸橢圓於共軛點 P 和 D, 且各通

過 C；求證它們的半徑之比等於 CP 和 CD 之比。

(St. Catherine)

(177) 作一拋物線，過一已知橢圓的兩焦點，且焦點在這個橢圓上.求證它的準線常觸這個橢圓的輔圓.又證橢圓兩焦點上的切線的交點在一圓上. (Jesus 等)

(178) 過一個定點 O, 作一已知橢圓的任一弦 PQ；過 P 和 Q 作一已知大小相似且位置相似於已知橢圓的橢圓，求證它的中心的軌跡是一橢圓. (Jesus 等)

(179) 在一個橢圓短軸兩端點上的切線中間，一條遇一通徑於 E, 而另一條遇對應準線於 F; 求證 EF 是橢圓的一條切線， (Jesus, 等)

(180) 由一個橢圓上任一點 P,作一條切線到短輔圓，遇標圓於 Q, R; 求證 PQ, PR 等於 P 的兩個焦距.

(Jesus 等)

(181) 已知一個橢圓的兩軸，求證曲線上諸點的定法如下：用兩軸作直徑各作一圓，更由中心 O 作一直線遇兩圓於 P 和 Q；過 P 平行於橫軸的直線與過 Q 平行於共軛軸的直線彼此相交於橢圓的一點 R.

設作一同心圓，半徑等於兩半軸之和，又設 OPQ 直線

遇這個圓於 V, 求證 VR 是橢圓 R 點上的法線.

(St. Johns)

(182) PSQ 和 $PS'Q$ 是一個橢圓的焦點弦；求證 P 點上的切線和弦 QR 在長軸上由中心的截距彼此相等.

(St Johns)

(183) 一平行四邊形外切於一橢圓；求證所有過平行四邊形一邊的端點而且過一個焦點的圓都相等.

(Christ)

(184) 已知一個橢圓的中心，一條切線，長軸的長和一條準線上一點. 求作兩準線. 在甚麼情形，這個作圖不能?

(Peterhouse)

(185) PP' 是一個橢圓的一條徑，求證聯焦點到 P 點上的切線遇對應準線的各點的線交於 P' 的縱線上.

(Clare)

(186) 作兩切線 TP 和 TQ 到一橢圓，並作任一弦 TRS, V 是所截部分的中點；QV 遇橢圓於 P'；求證 PP' 平行於 ST.

(Trinity)

(187) 在有一條徑是 DD' 的一個橢圓上取兩點 Q 和 R, 又 QD 和 RD' 相遇於 P. 求證與已知橢圓相似且在相似位置，又 D 爲中心且過 P 點的一個橢圓從 $D'P$ 截 DR

爲徑的一條弦，和從 $D'Q$ 截 DQ 爲徑的一條弦.

(188)　一個橢圓任一點 P 上的切線交短軸於 T，作 TM 垂直於 SP 延長線；求證 M 的軌跡是一圓.

(189)　O 是一個橢圓外任一點，作 OS, OS' 到焦點 S 和 S'，截曲線於點 P 和 Q，又聯 SQ 和 $S'P$ 交於點 R；則一個圓可內切於四邊形 $OPRQ$.　(T. H.)

(190)　設一個橢圓 P, P' 兩點上的切線遇於輔圓上，求證 SP 和 $S'P'$ 平行.　(T. H.)

(191)　設 Y 和 Y' 是由兩焦點到一個橢圓 P 點上的切線的垂線足，PN 是 P 的縱線，求證 PN 平分角 YNY'.

(Magdalene)

(192)　設 CP, CD 是一個橢圓的共軛半直徑，PG 是 P 點上的法線，CZ 是由 C 到 P 上切線的垂直線，GM 是過 G 平行於 CD 且遇由 P 到每個焦點的直線於 M 的線，求證 PM 是 CZ, CB, CD 的第四比例項.　(Magdalene)

(193)　設 P 和 Q 是焦點爲 S 和 H 的一個橢圓上的點，SP, SQ, HP, HQ 四直線，或它們的延長線是到同圓上的切線.　(Queen's)

(194)　由一組共焦橢圓軸上一定點到此組的切線的

切點在一個圓上. (Queen's)

(195) 設 Y 和 Z 是由橢圓兩焦點到 P 點上切線的垂線足，求證 Y 和 Z 上輔圓的切線遇於 P 的縱線上，又它們的交點的軌跡是一橢圓. (St. Catherine)

(196) 一個橢圓 P, P' 兩點上的切線相遇於 T, 又兩點上的法線分別遇軸於 G 和 G'; 求證 $PG, P'G'$ 對等角於 T. (Jesus)

(197) 求證通過在一已知圓的一條徑上且與圓心等距離的兩定點，而準線爲圓的一條切線的一個拋物線的焦點的軌跡是一橢圓，兩焦點即這兩個定點. (Jesus)

(198) 求證由橢圓一徑的端到短軸作直徑的圓的切線與共軛徑每端的兩焦距成一平行四邊形，兩鄰邊之差等於長軸之半. (Jesus)

(199) 求在一橢圓內，作一內切三角形，與一已知三角形相似. (Clare)

(200) 一個橢圓的兩條共軛徑遇輔圓於 P 和 Q. 設 P' 和 Q' 是橢圓上對應 P 和 Q 的點，求 P' 和 Q' 上的切線彼此垂直. (Jesus)

(201) CA, CB 是一個橢圓的兩條定共軛徑，又

CP, CQ 是橢圓的兩條不定共軛徑；AP, BQ 相遇於 L；求證 L 的軌跡是一相似且在相似位置的橢圓。 (Jesus)

(202) 設 TP, TP' 是一個橢圓的兩條切線，而 $PG, P'G'$ 是 P 和 P' 上的法線，又設在 TP 和 TP' 上取 Q, Q' 兩點，使 $TQ=TG$ 而 $TQ'=TG'$；求證當 U 是 GG' 的中點時，$QQ'=2PU$. (St. Johns)

(203) 設一矩形外切於一橢圓，求證兩對角線與共軛徑同向。 (St. Johns)

(204) TP 和 TQ 是有一焦點為 S 的一個橢圓的兩條切線。PQ 和 ST 相交於 X，又從 PQ 的中點 V，作一條垂直線 VY 到 ST；求證

$$PV^2 : PX \cdot XQ = SY : SX.$$ (St. Johns)

(205) T, T' 各在橢圓的兩條半軸 CA, CB 上，而 TT' 平行於 AB. 求證一條由 T，另一條由 T'，作到橢圓的兩鄰"象限" (quadrant) 的切線必與共軛徑平行。

(Peterhouse)

(206) 設 SY 是由焦點 S 到一橢圓 P 點上切線的垂直線，求證 SY, CP 相遇在準線上。 (Peterhouse)

(207) PP' 是一個橢圓的一條徑，P 和 Q 上的切線彼

此垂直；求證橢圓 Q 點上的法線平分角 PQP'.　(Clare)

(208)　橢圓內垂直於 AC 的一條弦 Pp 延長遇輔圓於 P' 和 p', 又 P 點上的法線交 CP' 和 Cp' 於 Q 和 q；求證

$$PQ=Pq=CD \text{ 和 } P'Q=BC.\qquad \text{(Clare)}$$

(209)　橢圓 P 點上的一條切線截長軸於 T, CD 是與 PT 平行的徑；求證

$$TP^2+CD^2=ST\cdot TH.\qquad \text{(Clare)}$$

(210)　設 P 是橢圓上一點，而焦點距 SP 遇共軛徑於 E, 則 CP 和 SE 的平方差必為一定.　(Trinity)

(211)　在一個橢圓上取兩定點 Q 和 R, 和一不定點 P; 求證三角形 PQR 的垂心是一相似的橢圓.　(Trinity)

(212)　兩橢圓有一公焦點和相等長軸；設一個橢圓在自己的平面內繞自己的焦點旋轉，求證它和另一橢圓的交弦包成一個與這個橢圓共焦的圓錐曲線.　(Trinity)

(213)　由橢圓上一點 R, 作兩弦 RQ, RQ' 平行於兩共軛徑 CP 和 CD; R 上的切線遇 QQ' 延長線於 T. 求證

$$\frac{RQ^2}{QT}:\frac{RQ'^2}{Q'T}=CP^2:CD^2.\qquad \text{(Trinity)}$$

(214)　兩個同心橢圓有同一長軸，而它們的半短軸為 CB 和 Cb; 第一個橢圓上任一點 P 的縱線遇第二個橢

圓於 p; 求證 $CP^2-CB^2 : Cp^2-Cb^2$

$$=CA^2-CB^2 : CA^2-Cb^2.$$ (Trinity)

(215) 一組橢圓有相等長軸，一個固定的公焦點以及一個固定的公點. 求證兩接連橢圓相交均在過定公點的移動的焦點弦上. 又證交點的軌跡是一橢圓，兩個焦點卽是這個固定的公焦點和公點. Pembroke)

(216) TP, TQ 是橢圓兩共軛徑端點上的切線，S 是焦點，TR 是 SP 上的垂直線. 求證 TR 等於短軸之半. (Caius)

(217) 已知橢圓的一個焦點，一條切線的位置和短軸之長; 求證它的中心的軌跡是一條直線. (Caius)

(218) 一已知直線移動時，一端在半徑和它相等的一個圓的圓周上，另一端在這個圓的一條定直線上. 求證這條直線各點都作成一橢圓. 又證每個橢圓兩條半軸之和等於這個圓的直徑. (T. H.)

(219) 設 PQ 是橢圓的一條弦，R 是平分 PQ 的 CR 徑的端點，P', Q', R' 是輔圓上的對應 P, Q, R 的點; 求證 R' 是 $P'Q'$ 弧的中點. 設 CR' 截橢圓於 T, 而 T' 是輔圓上的對應點; 求證 CT' 垂直於 PQ. (King's)

(220) 由一個橢圓的輔圓上一點 T, 作一條縱線 $TPP'N$ 到長軸，遇橢圓於 P, 遇由 T 所作兩切線的切點弦於 P', 以及遇長軸於 N; 求證

$$NP^2 = NP' \cdot NT.$$ (Queen's)

(221) A, B 是兩已知點。過 A 作有已知離心率而 AB 爲 A 上的法線的許多橢圓；求焦點的軌跡。 (St. Catherine)

(222) 在一個橢圓的一條定徑的任一縱線 PN, 或 PN 的延長線上，取一點 Q, 使 NQ 和 NP 之比等於共軛於 PN 的徑和平行於 PN 的徑之比；求證 Q 的軌跡是一橢圓並求定兩軸的位置。 (Peterhouse)

(223) 設 P, Q 是在橢圓上橫線和爲一定的兩點，則 P, Q 兩點上的切線的交點的軌跡是過此橢圓的中心的一個相似且在相似位置的橢圓。 (Caius)

(224) $TYLZ$ 是通徑一端 L 點上的一條切線，遇長軸於 T, 遇輔圓於 YZ. 求證 YL 和 YZ 之比等於通徑和兩倍長軸之比。 (Jesus)

(225) TP, TQ 是橢圓 P, Q 兩點上的切線；TV 是一個共焦橢圓 T 點上的切線，遇 PQ 延長線於 V; 求證

$$VP : VQ = TP : TQ.$$ (Trinity)

(226) 設橢圓兩軸之一在法線上的截距等於這條法線所由作的點的焦點“動徑” (radius vector) 之一，則另一條軸所作的截軸必與另一條焦點“動徑”相等.

(Peterhouse)

(227) 由拋物線上一點 P, 作一條線垂直於準線，而相遇於 M; 求證 AP 和 SM 的交點的軌跡是一橢圓; A 爲拋物線的頂點，而 S 爲焦點. (Clare)

(228) 兩橢圓有相等的短軸和一個焦點共同. 試用幾何證明在每個橢圓內與聯公切線的切點的直線共軛的徑與長軸成比例. (Clare)

(229) 設 S, S' 是焦點，而 P Q 是橢圓上任兩點; P', Q' 是 SP, SQ 延長線分別遇由 S' 到 P 點上和到 Q 點上的垂直線的點; R 是直線 $PQ, P'Q'$ 的交點; 則 $S'R$ 必平分三角形 $PS'Q$ 的外角.

(230) 由中心爲 C 的橢圓的焦點 S, H, 作 SY, HZ 垂直於 P 點上的切線; SP, HZ 延長線相遇於 T; TC, YS 延長線相遇於 Q, 而 TS 延長線遇 TQY 的外切圓於 R. 求證 R 的軌跡是一圓. (Jesus)

(231) 設由一個橢圓任一點 P, 作弦 PQ, PQ' 與兩軸

平行，則 P 點上的法線截 QQ' 成一個定比. (Jesus)

(232) 由一點 T, 作切線 TP, TQ 到一橢圓. 設角 PTQ 的平分線過這個曲線長軸上一個定點 O, T 的軌跡是一圓. (Jesus)

(233) 設 TP, TQ 是由輔圓上一點 T 到一個橢圓的一雙切線，求證聯 $SS'PQ$ 而成的四邊形有兩邊平行. 設 O 是兩對角線的交點，又證角 CTP, OTQ 相等. (Jesus)

(234) 一個橢圓 P, Q 兩點上的切線交於一同心圓上. 求證直線 PQ 觸兩軸與先一橢圓成倍比的一個同心共軸橢圓，又證 PQ 與它的包形相觸之點除當 PQ 垂直於兩橢圓之一軸時外，決不平分 PQ. (Jesus)

(235) P 是一個定圓上任一點，作 PL 在一已知方向且有定長，PL 作直徑的圓重截已知圓於 Q; 求證 PQ 常觸一定橢圓. (Jesus)

(236) 求證橢圓任一焦點弦必為長軸和平行於長徑的徑之第三比例項. (Jesus)

(237) PSQ 是橢圓的一條焦點弦，P 和 Q 兩點上的切線相遇於 Z 求證

$$SZ^2 + BC^2 : 2SZ^2 = CA : PQ. \qquad \text{(Jesus)}$$

(238)　設一個橢圓 P, D 兩共軛點上的法線相遇於 E, 求證 CE 垂直於 PD. (St. Johns)

(239)　設過一橢圓兩焦點和短軸一端的圓遇曲線於 P 和 Q, 求證由中心到 P 和 Q 兩點上切線的距離各等於由中心到一個焦點的距離. (St. Johns)

(240)　設一個圓沿兩倍半徑的一個圓的圓周內滾動，求證滾動圓面積內任一點都成一橢圓. 求證一個半徑的中點所成的橢圓，和半徑延長線上離滾動圓圓心的距離等於直徑長的點所成的橢圓爲相似曲線. (St Johns)

(241)　一個橢圓的兩條平行切線觸橢圓於 P 和 Q. 另一在 R 點上的切線截它們於 T 和 T', 又 PT' 和 QT 相交於 V. 求證 RV 平行於 PT 和 QT', 且等於它們的調和中項之半. (St. Johns)

(242)　求證一個橢圓必有一標圓，並證橢圓的準線就是標圓以及在對應焦點的一個"點圓" (point circle) 的"根軸" (radical axis). (St. Johns)

(243)　設由中心 C 作 CK 垂直於橢圓 P 點上的切線，又 PKB 的外切圓遇長軸於 M, 用 M 作圓心而 CB 作半徑畫一圓截短軸於 N 和 N', 求證 $MNGN'$ 可被一

圓所外切。 (Peterhouse)

(244) 作一橢圓，過兩定點 A 和 B 並截一相似且在相似位置的定橢圓於 C 和 D. AC, AD 重截定橢圓於 E 和 F. 求證直線 CD, EF 各過一個定點。 (Peterhouse)

(245) 設 S 和 H 是一個橢圓的焦點，TP, TQ 是互相垂直的兩條切線，而 TM 垂直於 SP; 求證

$$ST \cdot HT = 2TM \cdot AC.$$ (Peterhouse)

(246) 兩橢圓有相同兩焦點，由外橢圓上諸點作切線到內橢圓；求切點弦的包形。 (Clare)

(247) 在過長軸上一定點的橢圓任一弦上，用這條弦作直徑畫一圓；求證聯橢圓和圓的其他兩交點的線通過長軸上第二個定點。 (Clare)

(248) AA' 是 S, S' 爲焦點的橢圓長軸，作 AR, $A'R'$ 平行於 SP 和 $S'P$, 遇 P 點上的切線於 R 和 R'; 求證

$$AR + A'R' = AA'.$$ (Clare)

(249) 設橢圓一點 P 上的切線和法線分別遇長軸於 T 和 G; 求證作在 GT 一類截距上的圓有一條公根軸。 (Clare)

(250) 在同一平面上的兩已知橢圓有一公焦點，一個

繞這個公焦點旋轉，而另一個仍舊固定；求證它們的公切線的交點的軌跡是一圓.　(Trinity)

(251)　設由一個橢圓的頂點之一作 AQ 垂直於任一點 P 上的切線，求證 PS 和 QA 延長線的交點的軌跡是一圓，S 為焦點之一.　(Trinity)

(252)　過焦點為 S, S' 的一個橢圓的中心，作兩條固定的等直線，與 SP, PS' 平行，在此 P 是橢圓上一點；求證這兩條等直線作鄰邊的平行四邊形的第四角點的軌跡是一圓.　(Trinity)

(253)　S 和 H 是一個橢圓的焦點，T 是長軸延長線上的一點. 用 SH 作直徑，在上畫一圓. 作另一圓截第一圓成直角，又與長軸垂直相交於 T. 求證後一圓遇橢圓在 T 對於橢圓的極線上.　(Pembroke)

(254)　橢圓一點 P 上的法線遇兩軸於 G, G'. 求證如 CK 是由中心到 P 點上切線的垂直線，O 是 CG 的中點，而 O' 是 CG' 的中點，則 $OB=OK=OP$ 和 $O'A=O'K=O'P$.　(Trinity)

(255)　SY 和 HY 是由橢圓焦點 S, H 到一條切線的垂直線，X 和 X' 是對應兩準線的足；求證 XY 和 $X'Y'$

交於短軸上. (Trinity)

(256) 試就紙上所繪的橢圓，定它的兩軸. (Trinity)

(257) 設 P 是橢圓長軸 A 端的切線上任一點，又設 PT 是由 P 到橢圓的其他切線，求證 PT 較 PA 長.

(Pembroke)

(258) 中心 C, C' 的兩個相似且在相似位置的橢圓彼此相觸於一個頂點 A; 過 A 作一條弦，分別遇兩個橢圓於 P, Q; PC, QC' 相交於 R. 求 R 的軌跡. (Pembroke)

(259) 由一個橢圓的輔圓上任一點 T, 作兩切線，切橢圓於 P 和 Q. 設 Pp, Qq 是過這兩點的徑，求證 Tp, Qq 必是兩條焦點弦. (Pembroke)

(260) 一已知橢圓上一點，橢圓中心和橢圓的一個焦點合成一個三角形的角頂; 求證這個三角形的重心的軌跡是一相似的橢圓. (T. H.)

(261) 設一個橢圓任一點上的切線交長軸兩端點上的切線於 R 和 R', 則 RR' 作直徑的圓必過兩焦點.

(T. H.)

(262) 在一橢圓的長軸上取任兩定點; 過一個定點作一條線平行於 $S'P$ 過他一定點作線與 YS, YS' 平行; 求

證後者遇前者於一個定圓的一條直徑的兩端點上。

(T. H.)

(263)　橢圓 P 點上的法線 PGg 遇兩軸於 G 和 g. 用 Gg 作直徑，在上畫一圓；又用 P 作圓心另畫一圓，與前圓相截成直角，交 PGg 於 Q, Q'；求證 $SPQ, S'PQ'$ 兩三角形相似. (Christ)

(264)　由一已知圓的任一點 Q, 作 QR 垂直於一條定切線，並且在 P 被分成 $QP:PR$ 等於一已知比；求證 P 的軌跡是一橢圓. (Queen's)

(265)　設過一橢圓各通徑的兩端的徑都是共軛徑，則聯兩焦點的線對一直角於短軸兩端. (Queen's)

(266)　設橢圓 P 點上的法線過短軸的端點，則用聯兩焦點的線作直徑的圓必觸 P 點上橢圓的切線.

(Queen's)

(267)　作一圓，觸一橢圓於位置對於軸為對稱的兩點 P, Q, 且過焦點 S. 求證 $SP=SQ=$ 通徑. (St. Catherine)

(268)　試證下列定理：— 設 OA 和 OB 是互成垂直的兩條圓半徑，P 和 Q 是分別在 OA 和 OB 延長線上的點；設 $AP\cdot BQ$ 的積等於圓半徑的平方的兩倍，則 PB 和 QA

必遇於圓上。 (St. Johns)

(269) CA, CB 是一個橢圓的兩條半軸. 設完成矩形 $ACBV$, 而 SV 被曲線所平分, 求證

$$AC^2+BC^2=2AC\cdot CS.$$ (Peterhouse)

(270) 由過焦點垂直於軸的線上任一點作切線到橢圓上; 求證它們在對應準線上所截的長被軸所平分.

(Peterhouse)

(271) PSQ, PHR 是一橢圓的焦點弦, QT, RT 是 Q, R 等點上的切線. 求證 PT 是 P 點上的法線.

(Peterhouse)

(272) TP, TQ 是一橢圓 P, Q 點上的切線; Cp, Cq 是相關的平行半直徑; Tp, PC (或延長線) 相遇於 L, 而 Tq, QC 相遇於 M; PM, QL 延長相遇於 V. 求證 TCV 是一直線. (Peterhouse)

(273) 一圓和一橢圓有一公直徑, 由這條徑上任一點, 作切線到橢圓和圓, 求證聯切點的線都與一條定直線平行. (Clare)

(274) 一組橢圓有一公中心, 且已知兩共軛徑的方向和它們的兩軸的平方和; 求證它們全體都觸四直線.

(Clare)

(275)　過一已知點 O 作一弦 OPQ 到一已知橢圓；求 $OP \cdot OQ$ 的不變值，並分別舉出極大值和極小值。

(Trinity)

(276)　P, Q, R 是中心 C 的一個橢圓上三點；RP, RQ 遇平分 PQ 的徑 ACA' 於 N 和 T. 求證

$$CN \cdot CT = CA^2.$$

(Trinity)

(277)　平行於橢圓任一焦點弦的徑與聯輔圓上對應這條焦點弦的端點的點的弦相等.　(Trinity)

(278)　求在一已知橢圓內，作一條等於已知長的焦點弦；設這樣作成的兩條弦是 PQ 和 $P'Q'$，求證過 $PP'QQ'$ 可作一圓.　(Trinity)

(279)　設在一橢圓內可作一內切三角形，重心在橢圓的中心點上；則此三角形必爲可被內切的最大三角形。

(Trinity)

(280)　設一個橢圓的法線 PG 過 B，求證 BG 等於兩焦點間的距離之半.　(Pembroke)

(281)　設已知一個橢圓的一條切線，它的切點和一個焦點，求它的中心的軌跡.　(Caius)

(282)　在一橢圓（焦點 S, H）的一雙切線 TQ, TQ' 上，取 TR, TR' 分別等於 TS 和 TH；求證 RR' 等於長

軸，又設 TS 截 RR' 於 W，則 TW 等於 TQ. (Caius)

(283) 一已知直線移動，一端在半徑等於已知直線的一圓圓周上，而另一端在這個圓的一條定直徑上，求證這條直線各點都作成一橢圓．又證每個橢圓兩半軸的和等於這個圓的直徑． (Magdalene)

(284) 設橢圓一點 P 上的切線遇頂點 A 上的切線於 T，S' 是離 A 較遠的焦點，則 TA 與由 T 到 $S'P$ 的垂線相等． (Queen's)

(285) 設作 CY，CZ 垂直於橢圓兩共軛點 P 和 D 上的切線，D' 是 CD 徑的另一端，求證 PD' 是三角形 YCZ 的外切圓直徑． (Queen's)

(286) 已知一個橢圓的輔圓，和觸橢圓於一已知點的一條切線，求這個橢圓的焦點． (St. Catherine)

(287) 設 AA' 是一橢圓的橫軸，又設 Y，Y' 是由兩焦點作到曲線任一點上的切線的垂線足，求證 AY 和 $A'Y'$ 的交點的軌跡是一橢圓． (Trinity)

(288) 由 C 到 QQ' 的垂線遇輔圓於 R；過 C 作一條線平行於 PR，遇過 V 垂直於 QQ' 的直線於 O，QVQ' 是 CP 徑的一條倍縱線．設過 Q 和 Q'，用中心 O 以及和已

知橢圓相等的長軸，求證這個橢圓的短軸等於 DCD'.

(Trinity)

(289) 過一個橢圓的兩焦點 S, H, 作兩條線 PSP', QHQ' 遇 PQ, $P'Q'$ 兩條切線且使 PP', QQ' 分別被平分於 S, H. 求證過四邊形 $PQQ'P'$ 可作一外切圓.

(Jesus)

(290) 在橢圓內，設由 G 和 C 到 CP 和 P 點上的切線的垂線相遇於 H, 又 CH 作直徑的圓遇 P 點上的切線於 L. 求證 CL 等於由 P 作到短軸作直徑的圓上的切線長. (Jesus)

(291) 互成直角的橢圓切線的交點的軌跡是一圓. 設 P 點上的切線截這個圓於 T, 求證 TP 所對在兩焦點的角彼此相補. (Jesus)

(292) 過橢圓兩焦點的一個圓交橢圓於不同在軸的一側的 P 和 Q. 求證由中心到 P 和 Q 兩點上的切線的垂線的平方和等於 AC 的平方. (St. Johns)

(293) 由焦點 S, H 作 SO, HO' 垂直於 SP, HP, 遇 P 點上的法線於 O, O'. 求證 OO' 被短軸所平分.

(Peterhouse)

(雙曲線)

(294) 已知一個雙曲線兩條軸 ACA', BCB' 的大小和位置，求作一對共軛徑 PCP', DCD' 所夾角須等於一已知角。 (I. C. S.)

(295) 一條直線截一對共軛徑於 P 和 D, 截另一對於 P' 和 D'；設 O 是兩漸近線間所截線的中點，求證

$$OP\cdot OD = OP'\cdot OD'.$$ (I. C. S.)

(296) 已知一個雙曲線的一個焦點，一條切線和短軸的長，求證中心的軌跡是一條直線。 (I. C. S.)

(297) 設一個雙曲線的兩切線交於共軛雙曲線的一支上，求證它們的切點弦觸其他一支。 (I. C. S.)

(298) 過雙曲線上一點 P 的縱線足 N, 作 NQ 平行於 AP, 遇 CP 於 Q. 求證 AQ 與 P 點上的切線平行。(I. C. S.)

(299) 一個等邊形有兩個角頂也即是一雙曲線的中心和一焦點，一邊是一條漸近線，其他兩邊被曲線所截之處。 (I. C. S.)

(300) 設一三角形的兩邊方向一定，而第三邊過一定點，則此三角形的外切圓圓心的軌跡即是一雙曲線。

(I. C. S.)

(301) 用兩端在異支上的正雙曲線的一條弦做直徑作一圓．求證由圓和雙曲線其他各交點作到這條弦的垂直線都是雙曲線的切線． (Peterhouse)

(302) 已知一雙曲線的漸近線和一條切線的位置，求作曲線． (Peterhouse)

(303) 一圓和一正雙曲線相交於在一已知拋物線上的四點；求證雙曲線的一條軸與拋物線的軸平行；又證不論雙曲線(或圓)中心所作曲線爲何，圓(或雙曲線)的中心必作成一相等曲線，這兩個中心沿相反方向在它們各自的曲線內運動． (Peterhouse)

(304) 一拋物線和拋物線的軸爲一條漸近線的正雙曲線各外切於三邊截拋物線的軸於 p, q, r 的三角形 PQR. 設 A 是拋物線的頂點，而 PN 是 P 的縱線，求證

$$Aq + Ar = AN.$$

(Peterhouse, Pembroke 等)

(305) 用三已知點的每兩個作焦點，作一雙曲線過第三點；求證這樣作成的三個雙曲線交於一點．

(Trinity)

(306) 求證所有過一三角形的三頂點和三頂垂線的

交點的圓錐曲線都是正雙曲線；並定這些雙曲線的中心的軌跡。

(307) 在一雙曲線上取兩點 P, Q, 使 P 點上的切線與一條漸近線的過 Q 的一條平行線交於另一條漸近線上；求證 Q 點上的切線與第二條漸近線的過 P 的一條平行線交於第一條漸近線上。 (Trinity)

(308) 已知一雙曲線，求它的橫軸，共軛軸和它的漸近線。 (T. H.)

(309) 已知一雙曲線的漸近線和曲線上一點，求焦點，準線和頂點。 (C. C. C.)

(310) C 是一正雙曲線的中心，作一條直線 LQ 與一條漸近線 CM 平行，遇另一條於 L, 又一直線平分角 QCM 遇雙曲線於 P; 求證 CQ 與 CP^2 成比例，Q 是 LQ 線上任一點。 (St. Catherine)

(311) 由一正雙曲線兩焦點作到任一點上的切線的垂直線遇曲線於 K, L, M 和 N. 求證 $KLMN$ 是一平行四邊形，有四邊與過 P 的徑成垂直。 (Jesus 等)

(312) 已知一雙曲線的一條漸近線和三點，求作另一條漸近線。 (Jesus 等)

(313) 設 P 是一雙曲線的任一點，AA' 是它的橫軸，又設 $A'P$ 和 AP 遇一條準線於 E 和 F, 求證 EF 對一直角在對應的焦點. (St. Johns

(314) 用一個正方形的兩邊作漸近線，對點作焦點，作一正雙曲線；求證它必平分其他兩邊. (St.Johns)

(315) 作一橢圓，使它的兩軸和一雙曲線的兩軸大小方向都重合；由漸近線上任一點 T, 作切線 TQ, TQ' 到橢圓；求證 TQQ' 的外切圓過雙曲線中心. (Clare)

(316) $ABCD$ 是一矩形. 兩正雙曲線的漸近線分別與過 A 和 C, 過 B 和 D 的這個矩形的幾條邊平行. 求證一個雙曲線對於另一個的中心的極線與後者對於前者的中心的極線相合. (Trinity)

(317) P 是三角形 ABC 的平面內一點，由 A, B, C 等點到 PB, PC, PA 的垂直線相遇於一點. 求證 P 的軌跡是三角形 ABC 的一個雙曲線，且通過由 A, B, C 到三角形對邊的垂直線和由 B, C, A 等點作到 BA, CB, AC 的垂直線的所有交點. (Trinity)

(318) 求證共軛雙曲線的平行焦點弦之比等於兩雙曲線離心率之比. (Trinity)

(319) 求切線和由焦點所作與切線成一定角的一條直線的交點的軌跡。 (Trinity)

(320) P 是頂點為 A 的一支雙曲線上的一點，LPL' 是兩漸近線間的 P 點上的切線一段，$MPAM'$ 是過另一頂點平行於兩漸近線的直線間的一條直線；求證 LM 和 $L'M'$ 相等。 (Magdalene)

(321) 設 P 和 Q 是一正雙曲線上任意兩點，C 是軸的交點，PT 是 P 點上的切線，QM 和 QN 是由 Q 各到 CP 和 PT 的垂直線，求證 CM 和 CN 相等。 (Magdalene)

(322) 設 P 點上的一條切線遇兩漸近線於 L 和 M，三角形 LCM 的外切圓圓心的軌跡是一雙曲線，漸近線與原漸近線成垂直。 (Queen's)

(323) Ox, Oy 是任意兩定直線；A 在 Ox 上而 B 在 Oy 上，$OA=OB$. 過 A, B 作任意兩條平行線 AM, BN, 遇 Oy, Ox 分別於 M, N；求證 MN 的中點的軌跡是一雙曲線。 (St. Catherine)

(324) 過兩定點 S, S' 的一個圓截垂直於 SS' 而和它的中點等距離的兩條定直線於 P, Q 和 P', Q'. 求證設 PP' 與 SS' 不平行，這個圓必觸焦點為 S, S' 的一定圓錐曲

線. (Jesus 等)

(325) 作一正雙曲線，過一定圓錐曲線上兩定點 P, Q，且有一漸近線平行於一已知直線；求證設這個雙曲線重截已知圓錐曲線於 R 和 S，PR 和 QS 兩直線必交於一定圓錐曲線上. (Jesus)

(326) OX, OY 是兩定直線；A 是 OX 上一定點，P 是 OY 上一不定點；作 PM 垂直於 AX，並在 PM 上取 Q，使 $AQ=PM$；求 Q 的軌跡. (Jesus)

(327) P 是 AB 爲一條定直徑的一圓上任一點.過 B 作一條線遇 PA 延長線於 Q，使 BP, BQ 與 AB 成等角.求 Q 的軌跡. (Jesus)

(328) 設三角形 ABC 內切於一正雙曲線，求證它的垂心在雙曲線上.

設過 P 作弦 PA', PB', PC' 平行於三角形的各邊，求證 AA', BB', CC' 平行. (St. Johns)

(329) A 和 C 各在正雙曲線的一支上，AC 作直徑的圓重遇曲線於 B 和 D. 求證由雙曲線上任一點到 $ABCD$ 四邊形各邊距離之比一定. (St. Johns)

(330) 一三角形的底 AA' 大小和位置一定；求證設兩

底角之差是一直角，頂點的軌跡即是一正雙曲線.

設 PN 是由 N 到 AA' 的垂直線，NQ, NQ' 是由 N 到 AA' 作直徑的圓的切線，求證 PQ 過 A' 而 PQ' 過 A；又證，設 QQ' 交 AA' 於 M, PM 是 P 點上的切線. (St. Johns)

(331) 設外切於一三角形作一正雙曲線系，它們的中心必在一九點圓上.

設這個三角形是直角三角形，所有雙曲線必有一公切線在直角頂上. (Peterhouse)

(332) 求證切線與一已知線平行的一組共焦橢圓上的這些點的軌跡是一正雙曲線. (Clare)

(333) 設一橢圓的共軛徑 PCp, DCd 是一雙曲線的漸近線，QQ' 是公弦之一，$Q'R'$, QR 是分別與 CD 和 CP 平行的橢圓的弦，求證 $Q'R':QR=CD:CP$. (Clare)

(334) 求證一雙曲線和圓的公弦可集合成幾對，每對遇兩漸近線於"共圓點" (concyclic points)；又這些圓全和原來的圓同心. (Trinity)

(335) 已知一三角形的底和兩底角之差，求證頂角的軌跡是一正雙曲線.又底爲橫軸在甚麼時候? (Caius)

(336) 設兩同心正雙曲線有一公切線，它們的橫軸間

的角等於由中心到兩切點的直線間的角之半 (T. H)

(337) 在一雙曲線內,設已知兩漸近線和曲線一點的位置,求兩頂點的位置. (T. H.)

(338) 一雙曲線的四條切線形成一矩形.設矩形的一邊 AB 截雙曲線的一條準線於 X, 而 S 是對應點,求證 XSA, XSB 兩三角形相似. (Christ 等)

(339) 在正雙曲線內,一條弦 PQ 和一條 P 點上的切線間的角等於弦 PQ 對在過 P 的徑另一端點的角.

(340) 兩正雙曲線相觸於 P 而相交於 R 和 S. 求證 RS 作直徑的圓過 P 和過 P 的兩條徑的端. (Christ 等)

(341) 設一等邊三角形內切於一正雙曲線,求它的外切圓圓心的軌跡. (Queen's)

(342) 在正雙曲線內,求證任一點上的法線在這個點和軸間的截距等於垂直於法線的共軛雙曲線的那條半直徑. (St. Johns)

(343) 作拋物線過兩定點 A 和 B, 並使它們的軸與一已知直線平行; 設作一切線與 AB 成垂直,求證它的切點的軌跡是一雙曲線. (St. Johns)

(344) 一直線在互成垂直的兩直線間移動,而永遠對

135° 於直角平分線上的一個定點;求證它常觸一正雙曲線。 (St. Johns)

(345) 求證與一已知橢圓共焦的一個正雙曲線交橢圓於它的等共軛徑的兩端。 (Peterhouse)

(346) 一拋物線 P 點上的切線遇頂點上的切線於 Y. 延長縱線 PN 到 R, 使 $RN=PY$. 求證 R 的軌跡是一正雙曲線。 (Jesus)

(347) A 和 B 是一已知圓上定點, CD 是有已知長的任意弦. 設 CE 是與 AB 平行的一條弦, 並設 AE, BD 相遇於 O, 則 O 的軌跡是一正雙曲線。 (Jesus)

(348) 已知一雙曲線的輔圓和曲線上一點, 求證焦點的軌跡是一雙曲線。 (Jesus)

(349) 求證觸兩已知平行直線於已知點 A 和 B, 且圓心同在 AB 的一側的兩個等圓的交點的軌跡是一雙曲線。 (Jesus)

(350) 求證一正雙曲線兩切線間的角和它們的切點弦所對在中心的角相等或相補, 又這些角的平分線遇於切點弦上。 (Jesus)

(351) 正雙曲線一點 P 上的切線遇漸近線於 K 和

L, 又 P 點上的法線遇軸於 G; 求四邊形 $CKGL$ 的外切圓的圓心。 (St. Johns)

(352)　兩雙曲線有同一橫軸，而垂直於它的一條線遇兩曲線於點 P 和 P'. 求證 P 和 P' 上的切線遇於橫軸上。 (Peterhouse)

(353)　雙曲線 P 點上的一條切線遇一條漸近線於 T. 作一條線 $R'PR$ 與這條漸近線平行，遇一條準線於 R' 而遇 ST 線於 R, 在此 S 是對應這條準線的焦點; 求證 $R'P=RP=SP$. (Clare)

(354)　求證設雙曲線一點 P 上的切線遇一條漸近線於 T, 則 CT 和 HP 間的角為角 STP 的兩倍; 在此 C 是曲線的中心，而 S 和 H 是曲線的焦點。 (Trinity)

(355)　求證設 CP, CD 是焦點為 S 和 H 的一雙曲線的共軛半直徑，則 D 和過 C 平行於 HP 的一條線的距離等於短軸之半。 (Trinity)

(356)　雙曲線一點 P 上的切線遇漸近線於 Q,q; QM, qm 是 Q, q 的縱線，而 CT 是由中心到 P 點上的切線的垂直線。

設 TM, Tm 分別遇 P 點上的法線於 K, L, 求證 $QKqL$

是一個菱形。 (Pembroke)

(357)　設雙曲線的定義是與兩定線截成一定面積的一個三角形的線的包形，求證這個雙曲線有兩條漸近線，又這條線觸曲線於它的中點。 (Cambridge)

(358)　求證兩同心正雙曲線一個交點上的兩切線間的角是它們的橫軸間的角的兩倍。 (T. H.)

(359)　設 PQ 是一正雙曲線的任一徑，又設用圓心 P 和半徑 PQ 作一圓；設 A B, C 是圓截雙曲線的另外幾點，則 ABC 是一等邊三角形。 (King's)

(360)　一圓遇一已知正雙曲線於 A, A', P, P'，求證 P, P' 兩點上雙曲線的切線的交點在垂直於 AA' 的雙曲線的徑上。 (Christ)

(361)　S 是頂點為 A 的一個拋物線的焦點，SA 遇準線於 X；SXH 是一 $60°$ 的角，而 SH 垂直於 SX；求證用 S 和 H 作焦點可作一雙曲線，觸拋物線於焦點距等於通徑的一點 P. (Queen's)

(362)　過一已知點 P 作任一直線，遇兩定直線於 P' 和 Q'；在 $PP'Q'$ 上取一點 Q, 使 $QQ'=PP'$；求證 Q 的軌跡是一雙曲線。 (St. Catherine)

(363) 一雙曲線任一點上的切線和法線分別交兩漸近線於四點，這四點都在過雙曲線中心的一個圓上；又這個圓的半徑與由圓心至切線的垂直線成反比. (St. Johns)

(364) 設一雙曲線的漸近線彼此傾斜成半直角的角度，求(並作)三角形 CHK 的垂心的軌跡，在此 H 和 K 是過 P 與一條漸近線平行的線各與另一條漸近線相遇之點. (Peterhouse)

(365) 設一點 L 上的切線遇一條漸近線於 T，又聯 L 到其他兩點 M 和 N 的弦遇這條漸近線於 A 和 O；求證 $TA=A'O$，在此 A' 是 MN 遇漸近線的點. (Clare)

(366) $ABCD$ 是一平行四邊形；由 BC 內任一點 E 作一條垂線 EF 到 AD，並作 EG 與 AE 成垂直，而 F 和 G 兩點在 AD 上；在 AB 上取一點 K 使 $AK=FG$，求證 FK 常觸一定雙曲線. (Trinity)

(367) 由雙曲線任一點 P，作垂線 PM, PN 到兩漸近線，PN 重遇曲線於 P' 求證 PM 和 $P'N$ 之比無論 P 的位置如何都是相同. (Pembroke)

(368) 作平行切線到過兩定點的一組圓系；求證切點

的軌跡是一正雙曲線. (Christ)

(369) A, B, C, D 等點在一雙曲線上，而 AB, CD 兩線交於一漸近線上；求另一漸近線. (Peterhouse)

(370) 由橫軸上一點 T 作切線到一正雙曲線，遇兩頂點上的切線於 Q 和 Q'. 求證 QQ' 觸輔圓於一點 R, RT 平分角 QTQ'. (Trinity)

(371) 作一條直線與三角形 ABC 的邊 AC 平行，分別遇 AB 和三角形 ABC 的外切圓 C 點上的切線於 P 和 Q. 求證 CP, BQ 的交點的軌跡是一正雙曲線. (Jesus)

(372) 已知一漸近線和雙曲線上兩點，求證軸的包形是一拋物線. (Jesus)

(373) 過一定點作一雙曲線的各弦. 求證它們的中點的軌跡是一雙曲線，與原雙曲線或與它的共軛曲線相似. (St. Johns)

(374) 在一平面原野上，來復鎗圻裂作響和彈丸中鵠的大聲砰磅同時聽到；求聽者的軌跡. (St. Johns 等)

(375) 在一正雙曲線內，設 PQ 是一弦，CV 是共軛於 PQ 的徑，PQ 和 P 點上的切線間的角等於角 VCP. (Sel.)

(376) 由共軛雙曲線上一點 K, 作 $KQPpq$ 遇雙曲線

於 P, p 和漸近線於 Q, q；求證 $KP \cdot Kp = 2KQ \cdot Kq$.

(Peterhouse)

(377)　P, Q 是一雙曲線上兩點，過 P 作一漸近線的一條平行線，過 Q 作另一漸近線的一條平行線，遇前一條平行線於 T, P 和 Q 點上的切線分別遇 TQ, TP 於 p, q；求證 pq 平行於 PQ.

(378)　設 S, S' 是一雙曲線的焦點，X, X' 是對應準線遇 SS' 的點，$SY, S'Y'$ 是一條切線上的垂直線；則設 $XY, X'Y'$ 重遇輔圓於 y, y', 求證 yy' 也是雙曲線的一條切線.　(Peterhouse)

(379)　設過一正雙曲線的兩弦的中點每一點作一線和彼弦平行，它們的交點，中心以及這兩個中點必在一圓.　(Clare)

(380)　設過一雙曲線的內切三角形的兩頂點，作兩線與漸近線平行，遇兩對邊，則聯交點的線必與第三頂點上的切線平行.　(Clare)

(381)　設 QV 是一正雙曲線的 PCp 徑的一條縱線，求證 QV 是 Q 點上三角形 PQp 的外切圓的切線.

(T. H.)

(一般的圓錐曲線)

(382) S 和 H 是對應一圓錐曲線的兩條準線的焦點,這兩條準線交曲線的一條切線於點 L 和 M. 設 N 是 LS 和 MH (或延長線) 的交點, 求證 $LN=MN$.

(I. C. S.)

(383) 已知一圓錐曲線的焦點和兩點,求證準線的足的軌跡是一圓. (I. C. S.)

(384) 在一中心圓錐曲線內, 設 PK, PL 是 P 點上曲線的切線和法線,又設作 KSL 與 $S'P$ 平行, 在此 S 和 S' 是焦點. 求證 $KS=SL$. (Peterhouse)

(385) P 點上的切線遇長軸於 T, 由過焦點垂直於切線的垂線足到軸的垂直線分別遇曲線於 L, L'; 求證 TLL' 是一直線. (Clare 等)

(386) 一直線移動,在它上面由兩定直線所成的截距永遠對一固定角於一定點, 求證它與這個定點作一焦點的一個圓錐曲線相觸. (Trinity)

(387) 設 A, B 是一中心圓錐曲線的任一徑的兩點, C, D 是共軛徑上兩點, 求證設 AC 的極點在 BD 上, 則

AD 的極點也在 BC 上.

(388) 求證設兩三角形外切於一圓錐曲線,它們必也內切於另一圓錐曲線.

(389) 設若干個圓觸一圓錐曲線於同一點,求證聯交點的弦必全體平行.

(390) 一組圓錐曲線有一公焦點和準線.與準線作成垂直的任一直線遇圓錐曲線於 $P, Q, R \cdots\cdots$ 求證由公焦點作到 $P, Q, R \cdots\cdots$ 等點上的切線的垂線足全體在過準線足的一條直線上. (Jesus 等)

(391) 一橢圓內切於底和長軸平行的一個等腰三角形,求證橢圓長軸每個端點的軌跡是一拋物線,頂點在由三角形頂點到底的垂線的中點. (Jesus 等)

(392) 兩圓錐曲線有一焦點和準線共同, P, Q 是各在一曲線上的兩點, 而角 PSQ 為一定且等於 α. 求證 P 和 Q 點上的切線交於一有相同焦點和準線的圓錐曲線上. (St. Johns)

(393) 求證, 設聯一圓錐曲線上任一點 P 到兩焦點的線重遇曲線於 Q 和 R, QR 線常觸一同心共軸圓錐曲線.

(St. Johns)

(394) 一圓錐曲線一移動點 P 上的切線交一條定切線於 Q, 又由焦點 S 作一直線垂直於 SQ, 遇 P 上的切線於 R; 求證 R 的軌跡是一直線. (St. Johns)

(395) 一圓錐曲線任一點 P 上的切線截橫軸於 T, S 是焦點;求證這種曲線是一橢圓,一拋物線,或一雙曲線,視 ST 大於,等於,或小於 ST 而異. (Trinity)

(396) C 是一巳知圓錐曲線的中心,O 是一巳知點,而 CO 遇曲線於 C 和 O 中間一點;一直線 $OPRQ$ 遇曲線於 P 和 Q, 又遇共軛於 CO 的徑於 P 和 Q 中間一點 R; 求證 $\frac{RP}{PO}+\frac{RQ}{QO}$ 不因 $OPRQ$ 的方向變更。 (Trinity)

(397) 一圓錐曲線有一巳知焦點 S, 和一巳知焦點弦 PSQ. 設 P 點上的法線截軸於 G, 求 G 的軌跡.

(Pembroke)

(398) 作一圓錐曲線,過一巳知點 P, 且在此點有一定切線 PT. 長軸垂直於一定線 PU, 且等於一巳知線.求證中心在漸近線卽 PU, PT 的一個雙曲線上.

(399) 設 P 是一圓錐曲線上任一點,PK 是準線上的垂直線,並延長 KP 到 PQ 等於 P 的焦點距,則 Q 的軌跡另是一圓錐曲線. (St. Catherine)

(400)　求在一平面內,作至少有兩個實交點的兩圓錐曲線的公切線.　(St. Johns)

(401)　作數球過一定點,並觸兩已知平面.求證切點在兩圓上,又球心的軌跡是一橢圓.

設兩平面間的角即是一等邊三角形的角,求證這個橢圓的兩焦點間距離是長軸之半.　(St. Johns)

(402)　TP, TQ 是焦點 S 的一個圓錐曲線的兩條切線,截對應準線於 L, M; 求證 TS 平分角 LSM.

(Peterhouse)

(403)　已知一三角形內切圓錐曲線的焦點之一,求另一焦點.解法能夠不只一種嗎?　(Peterhouse)

(404)　求證一圓錐曲線焦點弦的中點的軌跡是一相似的圓錐曲線.　(Peterhouse)

(405)　兩相似而且在相似位置的圓錐曲線相交於 A, B. 一條公切線遇它們於 P, Q, 延長 PQ 至一點 R, 使 $QR=PQ$. 設 RA, RB 遇過 P 的圓錐曲線於 H, K, 又設 HK 遇 QP 延長線於 S, 求證 $PS=PQ$.　(Peterhouse)

(406)　一圓錐曲線外切於一三角形 ABC, 且有一焦點在 BC 上,求對應準線的包形.設 A 是一直角,求證包

形是一拋物線。 (Trinity)

(407) 求證設 A B C 是三已知點，則過 A B 而用 C 作焦點可作兩拋物線；又這兩個拋物線的軸平行於過 C 而焦點在 A 和 B 的雙曲線的漸近線。 (Trinity)

(408) 設兩圓錐曲線有一公準線，它們的四個交點在一圓上。 (Caius)

(409) 求證分別與長短軸成等角而不等於直角的橢圓切線的交點的軌跡是一正雙曲線，兩頂點卽橢圓的焦點。 (Christ 等)

(410) 一雙曲線的 CP 漸近線交長短軸卽共軛軸和橫軸的一個橢圓於點 P；求證設延長 CP 至 P'，使 $PP'=CP$；並作 PM, $P'QM'$ 與 CA 垂直相交於 M, M', Q 為 $P'QM'$ 和雙曲線的交點，則 QM 是 Q 點上的切線。

(Sidney)

(411) 兩相似而且在相似位置的兩對切線相交於 S, S'，被每一橢圓的一條切線截在 VT, $V'T'$ 和 vt, $v't'$. 求證設 $V't'$ 過 S，則 $T'v'$ 也必過 S. (Trinity)

(412) 一拋物線和一中心圓錐曲線交於 A, B, C, D 四點；求證拋物線的軸與聯平行於 AB 和 CD 的圓錐曲

線兩條徑的端點的線之一平行。 (St. Johns)

(413) 一圓錐曲線 $P.Q$ 兩點上的切線相遇於 O. 由 O 作兩直線截圓錐曲線，且與橫軸成相等角。設它們遇 PQ 於 $M.N$ 而這兩條弦的中點是 R, S, 求證 $RMNS$ 在一圓上。 (Peterhouse)

(414) 兩相似圓錐曲線有同一焦點 S, 及準線平行；設任一過 S 的直線遇兩曲線於 P 和 Q, 求 PQ 的中點的軌跡。 (Christ)

(415) $A.B.C$, 是任意三定點；過 A 作任一直線截一已知圓錐曲線於點 P, Q. 求證 PB 和 QC 的交點的軌跡是一圓錐曲線。 (Jesus)

(416) O 是一定點，而 P 是一已知直線上任一點。在線上取 PQ 使與 OP 常成一定比。求證聯 P 到 OQ 的中點的線常觸一焦點爲 O 的圓錐曲線。 (Jesus)

(417) 求證設一橢圓和一雙曲線爲共焦，則彼此相交成直角；又雙曲線的漸近線過對應交點的橢圓輔圓上的諸點。 (St. Johns)

(418) 由一定點 A 作一直線 AB 遇一定圓於 B; 過 B 作一直線 BC 垂直於 AB 遇一同心圓於 C. 求證過 C

平行於 AB 的一條線觸一圓錐曲線. (Peterhouse)

(419) 由準線上一點作兩切線至一中心圓錐曲線,並聯切點. 求證這樣作成的三角形的垂心的軌跡是一圓錐曲線,與原曲線相似. (Peterhouse)

(420) 一定直線遇一共焦圓錐曲線系之一於兩點. 求證這兩點上的法線的交點的軌跡是一直線. (Peterhouse)

(421) 用一已知拋物線準線上任一點作焦點,而拋物線的焦點作另一焦點,作一橢圓或雙曲線,求證它和準線的交點上的切線和法線也是已知拋物線的切線.

(Peterhouse)

(422) 一圓錐曲線一定弦 PQ 遇任一徑於 N, 過 N 作到這條徑的縱線遇 P 和 Q 點上的切線於 H, K. 求證 HK 被平分於 N (Caius)

(423) 設過圓錐曲線一點 P 作任意兩弦 PQ PQ', 又過 Q 和 Q' 的弦的垂線分別遇 P 點上的法線於 N, N'; 求證 PN 和 PN' 之比等於圓錐曲線與 PQ, PQ' 平行的徑的平方比. (Peterhouse)

(424) 設 A, B, C, D 是法線相遇於一點的圓錐曲線上四點, 求證與 AB 和 CD 平行的徑的平方和等於與

AC 和 BD 平行的徑的平方和。 (Clare)

(425) 一拋物線過相距 $2a$ 遠的兩定點 A, B, 且有距 AB 的中點 c 遠的一條直線作準線. 求證拋物線的焦點的軌跡是一圓錐曲線, 爲橢圓或爲雙曲線視 c 大於或小於 a 而定. (Trinity)

(426) 在一幅紙上作一圓,並摺疊這幅紙使一角落在圓周上.求證當這個角沿圓上移動時,紙上的摺痕包成一圓錐曲線. (Trinity)

(427) 摺疊一張半圓形的紙, 使直徑界上一定點 P_2 落在圓周界上; 求證摺線觸一定圓錐曲線. (Trinity)

(428) 設一圓和一圓錐曲線交於 B, C, D, E 等點,則平分 BC 和 DE 間, BD 和 CE 間, BE 和 CD 間的角的線各與兩已知線之一平行. (Caius)

(429) TP, TP' 是一圓錐曲線的切線; $PG, P'G'$ 是 P, P' 點上的法線; 求證 $TP : TP' = PG : P'G'$. 又證設作 $GL, G'L'$ 垂直於 PP', 則 $PL = P'L'$. (Christ)

(430) 由任一點 T 作兩切線到一圓錐曲線, 觸曲線於 P 和 Q; 作任一直線與 TP 平行, 遇 TQ 於 L, 遇 PQ 於 O, 遇曲線於 R, S; 求證 $LO^2 = LR \cdot LS$. (Queen's)

(431) P, Q 是焦點爲 S H 的橢圓上任意兩點；SP, HQ 相交於 M；SQ, HP 相交於 N；以及角 QSP, QHP 的平分線相交於 R. 求證 RP, RQ 是橢圓的切線，而 M, N 是 RM 和 RN 爲切線的一個共焦雙曲線上的點。 (Jesus)

(432) 已知一線，一有圓心 O 的圓和一點 S；線上一不定點 R 由遇圓於 U, V 的一條線聯到 S, 又由 S 作與 OU, OV 平行的線，遇 RO 於點 P 和 Q: 求證這兩點的軌跡是一圓錐曲線，S 爲焦點，而已知線爲準線。

試由此推廣，證明由任一點到一圓錐曲線的切線對等角於一個焦點。 (St. Johns)

(433) 求證由兩共焦橢圓和兩共焦雙曲線相交所成的曲線四邊形的對角線相等。

求證在一同焦共軸的拋物線系方面，這些結果也眞。

(St. Johns)

(434) 用一橢圓的一個焦點作焦點，而對應頂點上的切線作準線，作一雙曲線。求證由雙曲線截橢圓短軸的點到橢圓的切線與雙曲線的漸近線平行。 (St. Johns)

(435) 一橢圓和一雙曲線有相同焦點，且相遇於 P

PYZ 是雙曲線 P 點上的切線; SY, HZ 是焦點垂線. 求證 $$PY\cdot PZ=BC^2,$$

在此 BCB' 是橢圓短軸. (Peterhouse)

(436) 一橢圓遇以橢圓兩軸爲漸近線的一正雙曲線於 P 和 Q. PM, QN 是作到軸 CA 的縱線; PR, QT 是作到軸 CB 的縱線. 求證 $CM^2+CN^2=CA^2$,

又 $$CN:CR=CA:CB.$$ (Peterhouse)

(437) 由一圓圓周上一定點 O 作一弦 OA, 並延長至 B 使 OB 和 OA 的平方差一定; 求證過 B 垂直於 OB 的線必觸一圓錐曲線, O 爲它的中心, 而過 O 的圓的直徑另一端是一焦點. (Clare)

(438) 已知一圓錐曲線的一個焦點 S 和兩條切線, 求證短軸的包形是焦點爲 S 的一個拋物線. (Trinity)

(439) 已知一個圓錐曲線的一條焦點弦 PSQ 的位置, 以及軸的位置. 試畫出這個曲線. (Pembroke)

(440) 試用投影法證明, 設 ACA' 是一橢圓的長軸, 而 PNP' 是平分 CA' 於 N 的一條倍縱線, P 點上的切線平行於 AP'. (Pembroke)

(441) 一橢圓和一雙曲線同心共軸, 又一點 P 是本

身對於兩曲線的極線成垂直並且相交於 Q；求證 P 的軌跡是兩條過中心 C 的直線，而 Q 的軌跡是另兩條過中心的直線；但如兩曲線爲共焦，求證 C, Q 和 P 在一直線上而 $CP \cdot CQ$ 爲一定。 (Christ)

(442) 已知焦點，準線和離心率，求作過焦點的一已知直線截曲線的諸點。 (Queen's)

(443) 設焦點和橢圓焦點之一重合的一個拋物線觸橢圓共軛軸，則橢圓和拋物線的一條公切線必對一直角於焦點。 (Trinity)

(444) ACA' 和 BCB' 是 S, S' 爲焦點的一個橢圓的兩軸，P 是這個橢圓和一共焦雙曲線的交點之一，而 aCa' 是雙曲線的橫軸。求證

$$SP = Aa,\ S'P = A'a \text{ 和 } aB = CP.$$ (Trinity)

(445) 在一已知圓的平面內取兩定點 P, Q, 並作圓的一條弦 RS 平行於 PQ, 求證對於 RS 不同的各種位置，RP 和 SQ 的交點的軌跡是一圓錐曲線。 (Trinity)

(446) 一圓過一定點並截一已知直線於一定角度。求證圓心的軌跡是一圓錐曲線。 (Jesus)

(447) 一圓錐曲線的一條弦對一已知角於焦點。求證

它的端點上的切線必交於一圓錐曲線上，與原曲線有相同的焦點和準線. (St. Johns)

(448) 一橢圓和雙曲線有相同橫軸，而且它們的離心率互爲倒數；求證過這個的焦點到他一曲線的切線垂直相交於兩點，且遇共軛軸於輔圓上. (St. Johns)

(449) 由一中心圓錐曲線上任一點 Q, 作 QS, QH 至焦點 S, H, 重遇曲線於 P, P'; 求證設 P, P' 點上的切線相遇於 T, QT 被短軸所平分，而且 T 的軌跡是一圓錐曲線. (Peterhouse)

(450) 過一中心圓錐曲線上兩點，求證可作兩圓與曲線相觸；又證切點在一條直徑的兩端. (Caius)

(圓 錐)

(451) 設 S 是圓錐內一點；A 是它的頂點，而 AB 是它的軸；求由有 S 爲一焦點的數截面所成的銳角的差是角 SAB 的兩倍. (I. C. S.)

(452) 求由一已知圓錐，作一截面能有最大的離心率. (I. C. S.)

(453) 在甚麼情形，一個平面所作的圓錐曲線能夠是

一正雙曲線? 在這一種情形，求定截面必需的‘傾度’(inclination). (I. C. S.)

(454) 求定一圓錐的一個雙曲線截面的中心和漸近線.又求由一已知圓錐，作一雙曲線截面，使兩漸近線能含一最大的角度. (I. C. S.)

(455) 求證一個正圓錐的橢圓截面的短軸是由過橢圓長軸兩端點的平面所作的圓錐兩圓截面的直徑的比例中項.

設將橢圓投影到垂直於圓錐軸的一個平面，求證投影曲線兩焦點間的距離等於同樣兩圓截面的半徑之差.

(456) 由一已知正圓錐，截成一組軸與過頂點 O 的一已知直線 OM 相交的拋物線.設任一截面交 OM 於 N, 求證 ON^2 和 $AN \cdot CL$ 之比在所有拋物線都爲一定，在此 A 是截面的頂點，C 是它的焦點球的中心，而 L 是截面交圓錐軸 OL 的點. (Pembroke)

(457) 設一圓錐的兩個截面有一公準線，則兩截面的通徑之比等於它們的離心率之比. (Jesus 等)

(458) 求證焦點間距離相同的所有平面截面的中心的軌跡是一正圓柱體. (St. Johns)

(459) 求證短軸的長相同的所有截面的中心都在由一雙曲線旋繞它的橫軸而成的面上。 (Peterhouse)

(460) 問過不在同平面內的兩已知圓,作一橢圓圓錐(elliptical cone),要甚麼條件? (Trinity)

(461) 求證能作一已知大小和位置的橢圓的所有正圓錐的頂點的軌跡是一通過橢圓兩焦點的雙曲線。 (Jesus)

(462) 求作一平面,截一已知正圓錐成一橢圓截面,有已知的離心率且長軸等於一已知長。 (St. Catherine)

(463) 設一個圓錐的頂角是一直角,求證一平面所作截面的兩切點球半徑的和的平方等於截面的軸的平方和。 (Peterhouse)

(464) 頂角是直角的兩正圓錐有頂點和一條母線都相重合;求證當兩個圓錐被同一平面所截時,這個的截面的短軸與那個的截面的共軛軸相等。 (Clare)

(465) 求證一個圓錐的拋物線截面的通徑與由圓錐頂點到它們的頂點的距離成比例。 (Trinity)

(466) 過一固定正雙曲線,作一組正圓錐。求證它們的頂點的軌跡是離心率 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的一個橢圓。 (Pembroke)

(467) 設 P 是一正圓錐的兩個相交的內切球的一個共同點,求證 P 點上的各切面必與由 P 作到圓錐頂的直線成等角. (T. H.)

(468) 一正圓柱由一不平行或垂直於軸的平面所作的任一截面是一橢圓. (Queen's)

(469) 在一正圓錐上,作軸相等(長軸全體都在一平面內)的各橢圓截面. 求證它們的中心的軌跡是一雙曲線. (St. Catherine)

(470) 求在一已知圓錐上,作通徑等於一已知長的拋物線截面. (T. H.)

(471) 求證一正圓錐的一個橢圓截面的半短軸是由橢圓兩頂點作到圓錐軸的垂直線的一個比例中項. 設 V 是圓錐頂點, R 是圓錐軸截 AA', 即截面的長軸, 的點; 求證 $$CR:CA=CS:AV+CS.$$ (Trinity)

(472) 一正圓錐的一組橢圓截面由平行面作成;求證輔圓都在底爲一與各已知橢圓相似的橢圓的一個正圓錐上. (T. H.)

(473) 兩圓錐的頂角互爲補角;求證由平截面截它們而得的圓錐曲線的最大離心率的倒數的平方和爲一. (Trinity)

(474) 求用一已知直線作準線，作一截面，這條已知直線係垂直於圓錐的軸. (Queen's)

(475) 已知一橢圓和一正圓錐，試安放橢圓使它可為圓錐的一個平面截面. (Trinity)

(476) 求證一個圓錐截面的通徑與由圓錐頂到截面的垂直線成比例. (Trinity)

(477) 設一圓錐的兩個不同的平面截面有一公準線，則聯它們的焦點的線必過圓錐的頂.

(478) 設一圓錐的角是一直角，求證一個截面的半通徑是由圓錐頂到長軸的一條垂直線在長軸上所成線分的一個比例中項. (St. Catherine)

(479) 有一公頂點，而軸彼此垂直，且頂角互為補角的兩個圓錐與一垂直於它們的軸的平面相交. 求證橢圓截面每個焦點和雙曲線截面兩焦點的距離各等於由頂到每個的橫軸端的距離，又半共軛軸的平方和等於這兩個距離的相乘積. (Trinity)

(480) 設一圓錐截面的短軸為一定，求證它的中心在一"雙曲線旋轉體" (hyperboloid of revolution) 上. (Jesus)

譯名對照表(附索引)

L

M

N

O

P

R