Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 19

Die Garbe der Kähler-Differentiale auf einem Schema

Es sei X ein Schema über einem Basisschema S. Wir möchten eine Garbenversion des Moduls der Kählerdifferentiale definieren.

Lemma 19.1. *Es sei A eine kommutative R-Algebra über einem kommutativen Ring R. Dann gilt für jedes $f \in A$ die Gleichheit*

$$\left(\Gamma\left(D(f), \widetilde{\Omega_{A|R}}\right), \tilde{d}\right) = \left(\Omega_{A_f|R}, d\right)$$

und für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(A)$ die Gleichheit

$$\left(\left(\widetilde{\Omega_{A|R}}\right)_{\mathfrak{p}}, d_{\mathfrak{p}}\right) = \left(\Omega_{A_{\mathfrak{p}}|R}, d\right).$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 18.6 in Verbindung mit Lemma 14.5. □

Definition 19.2. Es sei $p\colon X \to S$ ein Schema über einem Basisschema S. Dann versteht man unter der *Garbe der Kähler-Differentiale* $\Omega_{X|S}$ denjenigen quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul auf X zusammen mit einer Derivation über $p^{-1}\mathcal{O}_S$

$$d\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X|S}$$

derart, dass für jeden Punkt $P \in X$ die Bedingung

$$\left(\left(\Omega_{X|S}\right)_P, d_P\right) = \left(\Omega_{\mathcal{O}_{X,P}|\mathcal{O}_{S,p(P)}}, d\right)$$

erfüllt ist.

Es ist zu zeigen, dass es ein solches Objekt in eindeutiger Weise gibt. Durch die Quasikohärenz muss zu jeder affinen Teilmenge $V = \operatorname{Spek}(R) \subseteq S$ und jeder affinen Teilmenge $U = \operatorname{Spek}(A) \subseteq X$ mit $U \subseteq p^{-1}(V)$ der Modul auf U mit $\widetilde{\Omega_{A|R}}$ übereinstimmen. Im affinen Fall ist nach Lemma 19.1 der Modul $\widetilde{\Omega_{A|R}}$ das richtige Modell. Wenn (Ω, d) (Ω', d') zwei Modelle sind, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft (zuerst auf den affinen Stücken und dann allgemein) einen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$\widetilde{\Omega_{A|R}} \longrightarrow \Omega'.$$

Da dieser punktweise ein Isomorphismus ist, handelt es sich überhaupt um einen Isomorphismus. Insbesondere kann es nur eine solche Garbe geben. Wenn eine affine Überdeckung

$$S = \bigcup_{j \in J} V_j$$

und dazu eine affine Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

mit $U_i \subseteq p^{-1}(V_j)$ für ein $j = j(i)$ vorliegt, so kann man die $\Omega_{U_i|V_{j(i)}}$ miteinander verkleben, da die Einschränkungen auf affinen Stücken $U \subseteq U_i \cap U_{i'}$ über $V \subseteq V_{j(i)} \cap V_{j(i')}$ eindeutig bestimmt sind.

Definition 19.3. Es sei $p\colon X \to S$ ein Schema über einem Basisschema S. Dann versteht man unter der *Tangentialgarbe* $\mathcal{T}_{X,S}$ den Dualmodul

$$\mathcal{T}_{X,S} = \Omega^*_{X|S}.$$

Es ist also

$$\mathcal{T}_{X,S} = \Omega^*_{X|S} = \mathcal{H}om\big(\Omega_{X|S}, \mathcal{O}_X\big) = \mathcal{D}\rceil\nabla(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X),$$

wobei die letzte Gleichheit auf der universellen Eigenschaft der Kähler-Differentiale beruht. Entsprechend nennt man die Garbe der Kähler-Differentiale auch die *Kotangentialgarbe*.

Wir formulieren die Aussagen für die Kähler-Differentiale im affinen Fall aus der letzten Vorlesung allgemein für ein Schema über einem Basischema.

Lemma 19.4. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus über einem Basisschema S. Dann ist die Sequenz von quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln*

$$\varphi^*\Omega_{Y|S} \longrightarrow \Omega_{X|S} \longrightarrow \Omega_{X|Y} \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 18.7. □

Lemma 19.5. *Es sei X ein Schema über einem Basischema S und sei $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ eine Idealgarbe auf X mit dem zugehörigen abgeschlossenen Unterschema $j\colon Y \to X$. Dann ist die Sequenz*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow j^*\Omega_{X|S} \longrightarrow \Omega_{Y|S} \longrightarrow 0$$

von quasikohärenten $\mathcal{O}_Y$-Modul exakt.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 18.8. □

Korollar 19.6. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und es sei X ein zusammenhängendes Schema von endlichem Typ über K. Dann ist X genau dann glatt, wenn der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{X|K}$ lokal frei von konstantem Rang* $\dim(X)$ *ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 18.16 und Satz 18.17. □

DEFINITION 19.7. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und es sei X ein zusammenhängendes glattes Schema von endlichem Typ über K der Dimension d. Dann nennt man

$$\omega_X := \operatorname{Det} \Omega_{X|K} = \bigwedge^d \Omega_{X|K}$$

die *kanonische Garbe* von X.

Das Tangentialbündel auf dem projektiven Raum

SATZ 19.8. *Es sei* $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ *der projektive Raum über einem kommutativen Ring R. Dann wird der* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}$*-Modul der Kähler-Differentiale* $\Omega_{\mathbb{P}^n_R|R}$ *durch die kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n_R|R} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)^{\oplus n+1} \stackrel{X_0,\ldots,X_n}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R} \longrightarrow 0$$

zusammen mit der universellen Derivation, die auf jeder offenen Menge $U \subseteq \mathbb{P}^n_R$ *eine Funktion* $f \in \Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big)$ *auf*

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial X_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)$$

abbildet, beschrieben.

Beweis. Wir bezeichnen die Kerngarbe links, die wir als Kähler-Modul nachweisen wollen, mit

$$\mathcal{S} = \operatorname{Syz}(X_0, \ldots, X_n).$$

Die angegebene Abbildung d (die ja von der universellen Derivation auf dem $n+1$-dimensionalen Raum herrührt) macht aus einer Funktion vom Grad 0 eine Funktion vom Grad -1, was man direkt für (rationale) Monome überprüfen kann. Daher liegt eine R-lineare Abbildung

$$d \colon \Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big) \longrightarrow \Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)^{\oplus n+1}\big)$$

vor. Die Leibnizregel überträgt sich hierher, da ja die partiellen Ableitungen die Leibnizregel erfüllen. Es ist zu zeigen, dass das Bild von d im Kern der hinteren Abbildung landet. Für ein Monom X^ν vom Grad 0 ist aber

$$\sum_{j=0}^n X_j \frac{\partial X^\nu}{\partial X_j} = \sum_{j=0}^n (\nu_j X^\nu) = \left(\sum_{j=0}^n \nu_j \right) X^\nu = 0.$$

Betrachten wir die Situation auf $D_+(X_0)$ und setzen wir $Y_j = \frac{X_j}{X_0}$. Dann ist unter Verwendung von Beispiel 12.10 und Beispiel 15.5

$$\begin{aligned} & \Gamma(D_+(X_0), \mathcal{S}) \\ = \ & \operatorname{kern}\left(\Gamma\big(D_+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)\big)^{\oplus n+1} \stackrel{X_0, X_1, \ldots, X_n}{\longrightarrow} \Gamma\big(D_+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{kern}\Big((R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_{-1} \oplus \cdots \oplus (R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_{-1} \\
&\qquad \xrightarrow{X_0, X_1, \ldots, X_n} (R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_0 \Big) \\
&= \operatorname{kern}\Big(R[Y_1, \ldots, Y_n] \cdot X_0^{-1} \oplus \cdots \oplus R[Y_1, \ldots, Y_n] \cdot X_0^{-1} \\
&\qquad \xrightarrow{X_0, X_0 Y_1, \ldots, X_0 Y_n} R[Y_1, \ldots, Y_n] \Big) \\
&\cong R[Y_1, \ldots, Y_n] \oplus \cdots \oplus R[Y_1, \ldots, Y_n],
\end{aligned}
$$

wobei zuletzt n Summanden stehen und darin das Tupel $(P_1, \ldots, P_n)$ dem Tupel $\big(-\sum_{i=1}^n P_i Y_i X_0^{-1}, P_1 X_0^{-1}, \ldots, P_n X_0^{-1}\big)$ des Kerns entspricht. Unter der Abbildung d wird das Monom

$$
Y^\mu = \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{\mu_n} = X_0^{-\sum_{j=1}^n \mu_j} X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n} \in \Gamma\big(D_+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big)
$$

auf das Element

$$
\begin{aligned}
\Bigg(-\left(\sum_{j=1}^n \mu_j\right) X_0^{-\sum_{j=1}^n \mu_j - 1} X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n},\ \mu_1 X_0^{-\sum_{j=1}^n \mu_j} X_1^{\mu_1 - 1} X_2^{\mu_2} \cdots X_n^{\mu_n}, \\
\ldots,\ \mu_n X_0^{-\sum_{j=1}^n \mu_j} X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2} \cdots X_n^{\mu_n - 1} \Bigg)
\end{aligned}
$$

abgebildet. Dieses entspricht unter der oben beschriebenen Identifizierung (also die erste Komponente weglassen und mit X_0 multiplizieren) einfach dem Tupel der Ableitungen nach den Variablen Y_j. Also liegt nach Lemma 18.5 die universelle Derivation des Polynomrings $R[Y_1, \ldots, Y_n]$ vor. □

Insbesondere ist der Modul der Kähler-Differentiale auf dem projektiven Raum lokal frei.

Korollar 19.9. *Es sei* $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ *der projektive Raum über einem kommutativen Ring R. Dann wird die Tangentialgarbe auf* $\mathbb{P}^n_R$ *durch die kurze exakte Sequenz*

$$
0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R} \xrightarrow{X_0, \ldots, X_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n_R, R} \longrightarrow 0
$$

beschrieben. Dabei geht hinten das globale Element $X_i e_j$ *(das in der* j*-ten Komponente steht) auf die globale Derivation* $X_i \frac{\partial}{\partial X_j}$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 19.8 durch Dualisieren. Der Zusatz folgt ebenfalls aus Satz 19.8: Das Element $X_i e_j$ in der j-ten Komponente von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)^{\oplus n+1}$ entspricht beim Dualisieren der Abbildung

$$
X_i \circ p_j \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R},
$$

also der Projektion auf die j-te Komponente gefolgt von der Multiplikation mit X_i. Dies entspricht wiederum, aufgefasst als Linearform auf dem Modul der Kähler-Differentialformen $\Omega_{\mathbb{P}^n_R|R} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(-1)^{\oplus n+1}$, der Linearform, die zur Derivation $f \mapsto X_i \frac{\partial f}{\partial X_j}$ gehört. □

Es ist eine Besonderheit des projektiven Raumes, verglichen mit anderen projektiven Varietäten, dass es auf ihm viele globale Vektorfelder gibt.

KOROLLAR 19.10. *Es sei* $\mathbb{P}_R^n = \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ *der projektive Raum über einem kommutativen Ring* R. *Dann ist die kanonische Garbe gleich* $\omega_{\mathbb{P}_R^n|R} = \operatorname{Det} \Omega_{\mathbb{P}_R^n|R} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^n}(-n-1)$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 19.8, Satz 16.11 und Korollar 16.12. □

Die antikanonische Garbe, also das Dual der kanonischen Garbe, ist auf dem projektiven Raum somit gleich $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}(n+1)$ und besitzt viele globale Schnitte.

Hyperflächen im projektiven Raum

SATZ 19.11. *Es sei* K *ein algebraisch abgeschlossener Körper und* $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ *ein homogenes Polynom vom Grad* d. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die affine Hyperfläche*
$$V(F) = \operatorname{Spek}(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/(F)) \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$$
ist außerhalb des Nullpunktes glatt.

(2) *Die projektive Hyperfläche*
$$Y = V_+(F) = \operatorname{Proj}(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/(F)) \subseteq \mathbb{P}_K^n$$
ist glatt.

(3) *Für jede Variable* X_i *ist* $K[X_0, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n]/(\tilde{F}_i)$ *glatt, wobei*
$$\tilde{F}_i = F\frac{1}{X_i}$$
die Dehomogenisierung von F *bezüglich* X_i *bezeichnet.*

(4) *Der Modul der Kähler-Differentiale* $\Omega_{Y|K}$ *ist lokal frei.*

(5) *Es liegt eine kurze exakte Sequenz*
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \longrightarrow j_Y^* \Omega_{\mathbb{P}_K^n|K} \longrightarrow \Omega_{Y|K} \longrightarrow 0$$
von lokal freien Garben auf Y *vor.*

Beweis. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar wegen Lemma 12.17 und da die Glattheit eine lokale Eigenschaft ist. Die Äquivalenz von (2) und (4) beruht auf Korollar 19.6. Die Äquivalenz von (1) und (3) beruht darauf, dass die Kegelabbildung lokal über $D_+(X_i)$ durch

$$D(X_i) = \operatorname{Spek}(R_{X_i}) = \operatorname{Spek}\left((R_{X_i})_0[X_i, X_i^{-1}]\right) \longrightarrow D_+(X_i) = \operatorname{Spek}((R_{X_i})_0)$$

gegeben ist. Lokal ist die Kegelabbildung also ein punktierter affiner Zylinder über der Basis.

Von (4) (bzw. (2)) nach (5). Nach Lemma 19.5 gibt es die exakte Sequenz
$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow j_Y^* \Omega_{\mathbb{P}_K^n|K} \longrightarrow \Omega_{Y|K} \longrightarrow 0\,.$$

Dabei ist $\mathcal{I}$ das von F erzeugte Hauptideal und es ist $\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(-\delta)$ über die Zuordnung

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\delta),\, 1 \longmapsto F.$$

Ferner ist die Einschränkung dieser Idealgarbe auf Y gleich

$$\mathcal{O}_Y(-\delta) = \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_Y = \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}/\mathcal{I} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2.$$

Als Einschränkung einer invertierbaren Garbe ist dies wieder invertierbar. Lokal ist die linke Abbildung wie in Bemerkung 17.10 durch die Jacobi-Matrix zur Dehomogenisierung von F gegeben, und wegen der Glattheit ist diese (sogar auch in den Restekörpern) injektiv. Von (5) nach (4) ist eine Einschränkung. $\square$

Korollar 19.12. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d derart, dass die projektive Hyperfläche $Y = V_+(F)$ glatt ist. Dann ist die kanonische Garbe gleich $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(d-n-1)$.*

Beweis. Wir wenden die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \longrightarrow j_Y^* \Omega_{\mathbb{P}^n_K|K} \longrightarrow \Omega_{Y|K} \longrightarrow 0$$

von lokal freien Garben auf Y aus Satz 19.11 an. Nach Satz 16.11 und Korollar 19.10 ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(-d) \otimes \omega_{Y|K} &= \mathcal{O}_Y(-d) \otimes \operatorname{Det} \Omega_{Y|K} \\ &= \operatorname{Det} j_Y^* \Omega_{\mathbb{P}^n_K|K} \\ &= j_Y^* \operatorname{Det} \Omega_{\mathbb{P}^n_K|K} \\ &= j_Y^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(-n-1) \\ &= \mathcal{O}_Y(-n-1). \end{aligned}$$

Dabei beruht die letzte Gleichung auf Lemma Anhang 4.7. Tensorierung mit $\mathcal{O}_Y(d)$ ergibt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 19.13. Korollar 19.12 erlaubt eine grobe Klassifikation von glatten Hyperflächen

$$Y = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_K$$

im projektiven Raum, je nachdem, ob in $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(d-n-1)$ der Twist $d-n-1$ negativ, gleich 0 oder positiv ist. Bei $n = 2$, also Kurven in der projektiven Ebene, liegt bei $d = 1, 2$ eine projektive Gerade vor, bei $d = 3$, wenn die kanonische Garbe trivial ist, eine elliptische Kurve und bei $d \geq 4$ eine Kurve vom allgemeinen Typ. Bei $n = 3$, also Flächen im projektiven Raum, liegt bei $d = 1$ eine projektive Ebene vor, bei $d = 2$ eine zu $\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$ isomorphe Fläche und bei $d = 3$ eine Fläche, die isomorph ist zu einer projektiven Ebene, auf der man sechs Punkte aufgeblasen hat. Jedenfalls hat man bei $d \leq 3$ eine sogenannte rationale Fläche, deren Funktionenkörper gleich dem rationalen Funktionenkörper in zwei Variablen ist. Bei $d = 4$, wenn die kanonische Garbe trivial ist, liegt eine sogenannte $K3$-Fläche vor. Bei $d \geq 5$ hat man eine Fläche vom allgemeinen Typ.

Abbildungsverzeichnis