Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 4

Garben

Definition 4.1. Es sei X ein topologischer Raum. Unter einer *Garbe* $\mathcal{F}$ auf X versteht man eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Zu jeder offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Elementen $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U,U_i}(s) = \rho_{U,U_i}(t)$ für alle $i \in I$ gilt $s = t$.
(2) Zu jeder offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Elementen $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_i = \rho_{U,U_i}(s)$ für alle $i \in I$.

Diese Eigenschaften nennt man die Serreschen Bedingungen. Die erste fordert, dass man die Übereinstimmung von Schnitten lokal auf einer offenen Überdeckung überprüfen kann, die zweite fordert, dass zusammenpassende lokale Schnitte von einem globalen Schnitt herkommen. Stellvertretend für viele ähnliche Beispiele zeigen wir, dass die Prägarbe der Schnitte zu $p \colon Y \to X$ eine Garbe auf X ist.

Beispiel 4.2. Wir knüpfen an Beispiel 3.12 an, d.h.h es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$p \colon Y \longrightarrow X$$

eine fixierte stetige Abbildung, und es sei

$$U \mapsto S(U,Y) = \left\{ s : U \to p^{-1}(U) \mid s \text{ stetiger Schnitt zu } p \right\}$$

die Prägarbe der stetigen Schnitte in Y. Dies ist eine Garbe. Die erste Serresche Bedingung ist erfüllt, da zwei Schnitte übereinstimmen, wenn sie in jedem Punkt $P \in U$ den gleichen Wert haben, was bei einer offenen Überdeckung lokal getestet werden kann. Die zweite Serresche Bedingung ist erfüllt, da man zu einer Familie von stetigen verträglichen Schnitten

$$s_i \colon U_i \longrightarrow Y|_{U_i}$$

direkt einen Schnitt

$$s \colon U \longrightarrow Y|_U$$

definieren kann, der diese simultan fortsetzt. Die Stetigkeit folgt, da diese lokal getestet werden kann.

Beispiel 4.3. Zu einer topologischen Gruppe G und einem topologischen Raum X ist durch $U \mapsto C^0(U, G)$ eine Garbe gegeben, die Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in G. Es handelt sich um eine Garbe von Gruppen. Die Garbeneigenschaften beruhen darauf, dass die Gleichheit von stetigen Abbildungen punktweise getestet werden kann und dass sich stetige Abbildungen, die auf offenen Mengen definiert sind und auf den Durchschnitten übereinstimmen, zu einer globalen stetigen Abbildung fortsetzen.

Lemma 4.4. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X. Es seien Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(X)$ gegeben, die $s_P = t_P$ in den Halmen $\mathcal{F}_P$ für alle Punkte $P \in X$ erfüllen. Dann ist $s = t$.*

Beweis. Aufgrund der Veraussetzung gibt es zu jedem Punkt $P \in X$ eine offene Umgebung $P \in U_P \subseteq X$ derart, dass

$$\rho_{X,U_P}(s) = \rho_{X,U_P}(t)$$

ist. Somit ist

$$X = \bigcup_{P \in X} U_P$$

und aus der ersten Garbeneigenschaft folgt $s = t$. □

Garbenmorpismen

Ein Garbenmorphismus ist einfach ein Prägarbenmorphismus zwischen Garben. Dennoch gibt es einige gewichtige Besonderheiten, die sich auf Surjektivität, Bild, lokaler Isomorphietest beziehen.

Lemma 4.5. *Es sei X ein topologischer Raum und $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1)
$$\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$
ist injektiv für jede offene Menge $U \subseteq X$.

(2) *Die Halmabbildungen*

$$\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

sind injektiv für alle Punkte $P \in X$.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar. Zum Beweis der Rückrichtung seien Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(X)$ mit $\varphi(s) = \varphi(t)$ in $\mathcal{G}(X)$ gegeben. Dann ist $\varphi(s)_P = \varphi(t)_P$ in jedem Halm $\mathcal{G}_P$ und damit nach Voraussetzung (unter Verwendung von Lemma 3.27) auch $s_P = t_P$ in jedem Halm $\mathcal{F}_P$. Aus Lemma 4.4 folgt $s = t$. □

Lemma 4.6. *Es sei* X *ein topologischer Raum und* $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *ein Garbenmorphismus. Dann ist* φ *genau dann ein Garbenisomorphismus, wenn für jeden Punkt* $P \in X$ *die Halmabbildung*

$$\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis. Die Hinrichtung ist trivial. Für die Rückrichtung ist zu zeigen, dass

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ bijektiv ist. Ohne Einschränkung sei $U = X$. Die Injektivität ergibt sich aus Lemma 4.5. Zum Nachweis der Surjektivität sei nun $t \in \mathcal{G}(X)$ vorgegeben. Zu jedem Punkt $P \in X$ gibt es ein eindeutiges

$$s_P \in \mathcal{F}_P$$

mit

$$\varphi_P(s_P) = t_P.$$

Jedes s_P wird repräsentiert durch ein

$$r_P \in \mathcal{F}(U_P),$$

wobei U_P eine offene Umgebung von P bezeichnet. Dabei hat $\varphi(r_P)$ die Eigenschaft, dass es im Halm $\mathcal{G}_P$ mit t_P übereinstimmt. Daher gibt es eine eventuell kleinere offene Umgebung $P \in V_P \subseteq U_P$, auf der $\varphi(r_P)|_{V_P} = t|_{V_P}$ gilt. Wir ersetzen U_P durch V_P und haben eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{P \in X} V_P$$

und Schnitte

$$r_P \in \mathcal{F}(V_P),$$

die jeweils auf $t|_{V_P}$ abbilden. Wir betrachten zwei Schnitte r_P und r_Q auf dem Durchschnitt $V_P \cap V_Q$. Für einen Punkt

$$Z \in V_P \cap V_Q$$

ist $(r_P)_Z = (r_Q)_Z$, da beide unter der bijektiven Abbildung φ_Z auf t_Z abgebildet werden. Nach Lemma 4.4 folgt

$$r_P|_{V_P \cap V_Q} = r_Q|_{V_P \cap V_Q}.$$

Somit gibt es aufgrund der zweiten Garbeneigenschaft ein globales Element $r \in \mathcal{F}(X)$ mit

$$r|_{V_P} = r_P$$

für alle P. Wegen der ersten Garbeneigenschaft ist $\varphi(r) = t$, da dies auf den V_P gilt. □

Diese Aussage gilt weder für Prägarben (man betrachte beispielsweise eine Vergarbung einer Prägarbe) noch ohne die Voraussetzung, dass es überhaupt einen Homomorphismus gibt. Zwei Garben, die halmweise zueinander isomorph sind, müssen nicht isomorph sein. Wichtige Beispiele dazu sind lokal freie Garben, die lokal isomorph zu freien Garben sind, aber im Allgemeinen selbst nicht frei sind.

Es ist auf den ersten Blick sicher überraschend und vielleicht auch enttäuschend, dass sich bei einem Garbenmorphismus die Surjektivität auf der Ebene der offenen Mengen und auf der Halmebene unterscheiden. Was aber zunächst wie ein Defizit aussieht, ist in Wirklichkeit eine Stärke der Garbentheorie, da sich in der globalen Nichtsurjektivität von halmweise surjektiven Morphismen topologische Eigenschaften des zugrunde liegenden Raumes widerspiegeln.

Definition 4.7. Ein Garbenmorphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen Garben auf einem topologischer Raum X heißt *surjektiv*, wenn für jeden Punkt $P \in X$ die Halmabbildung

$$\varphi_P\colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

surjektiv ist.

Diese Eigenschaft ist deutlich schwächer als die Eigenschaft, dass auf jeder offenen Menge eine surjektive Abbildung vorliegt.

Beispiel 4.8. Wir betrachten den stetigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1,\, t \longmapsto (\cos t,\, \sin t)\,,$$

also die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises. Dies induziert einen Garbenmorphismus

$$C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(-,S^1)$$

auf jedem topologischen Raum X. Einer stetigen reellwertigen Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf $U \subseteq X$ wird die Hintereinanderschaltung

$$\varphi \circ f\colon U \longrightarrow S^1$$

zugeordnet. Dieser Garbenmorphismus ist surjektiv, da φ lokal umkehrbar ist. Er ist aber im Allgemeinen nicht auf jeder offenen Teilmenge surjektiv.

Wenn beispielsweise $X = S^1$ ist, so besitzt die Identität auf S^1 keine stetige Liftung nach $\mathbb{R}$

Lemma 4.9. *Zu Garben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X ist die Zuordnung*

$$U \longmapsto \operatorname{Mor}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

selbst eine Garbe.

Beweis. Da ein Garbenmorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$$

eine Abbildung

$$\Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{G})$$

für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ beinhaltet, gibt es unmittelbar eine Einschränkung

$$\varphi|_V\colon \mathcal{F}|_V \longrightarrow \mathcal{G}|_V.$$

Das bedeutet, dass

$$U \longmapsto \operatorname{Mor}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

eine Prägarbe ist. Zum Nachweis der Garbeneigenschaften sei

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine offene Überdeckung. Es seien

$$\varphi, \psi\colon \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$$

Garbenmorphismen derart, dass die Einschränkungen

$$\varphi_i = \varphi|_{U_i} = \psi|_{U_i} = \psi_i$$

übereinstimmen. Es sei $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ mit den Einschränkungen $s_i := s|_{U_i}$. Es ist dann

$$\varphi(s_i) = \psi(s_i).$$

Somit stimmen

$$\varphi(s), \psi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{G})$$

lokal überein und damit stimmen sie wegen der Garbeneigenschaft auch direkt überein.

Zum Nachweis der zweiten Garbeneigenschaft seien Garbenmorphismen

$$\varphi_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$$

gegeben, die die Verträglichkeitsbedingung

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$$

erfüllen. Es ist die Existenz eines Garbenmorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$$

nachzuweisen, dessen Einschränkungen die vorgegebenen φ_i ergibt. Sei hierzu wieder $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. Sei

$$t_i = \varphi_i(s|_{U_i}).$$

Wegen

$$(s|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} = \big(s|_{U_j}\big)|_{U_i \cap U_j}$$

ist

$$\begin{aligned}(t_i)|_{U_i \cap U_j} &= (\varphi_i(s|_{U_i}))|_{U_i \cap U_j} \\ &= \big(\varphi_i|_{U_i \cap U_j}\big(s|_{U_i \cap U_j}\big)\big) \\ &= \big(\varphi_j|_{U_i \cap U_j}\big(s|_{U_i \cap U_j}\big)\big) \\ &= \big(\varphi_j\big(s|_{U_j}\big)\big)|_{U_i \cap U_j} \\ &= (t_j)|_{U_i \cap U_j}\end{aligned}$$

und somit bilden die t_i eine verträgliche Familie von Schnitten. Daher gibt es eine eindeutig bestimmtes Element $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ mit $t_i = t|_{U_i}$. Die Festlegung $\varphi(s) := t$ ergibt somit eine Abbildung

$$\varphi\colon \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}),$$

deren Einschränkungen die vorgegebenen φ_i sind. □

Korollar 4.10. *Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X. Zu jedem $i \in I$ sei ein Garbenmorphismus*

$$\alpha_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$$

gegeben, der

$$\alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j}$$

für alle i, j erfüllt. Dann gibt es einen eindeutigen Garbenmorphismus

$$\alpha\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

mit $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 4.9. □

Korollar 4.11. *Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf einem topologischen Raum X und es seien*

$$\alpha, \beta\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

Garbenmorphismen. Dann ist $\alpha = \beta$ genau dann, wenn $\alpha_p = \beta_P$ für jeden Punkt $P \in X$ gilt.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 4.9 und Lemma 4.4. □

Abbildungsverzeichnis