Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. In der Planung für einen Laufwettbewerb wurden die folgenden Bahnen vergeben.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(k)$	N	C	Z	G	R	D	M	S

Leider wurden C und R des Dopings überführt und dürfen nicht teilnehmen. In dieser Situation möchte man auf die Außenbahnen 7 und 8 verzichten. Erstelle aus der Nummerierung F eine möglichst einfache neue Nummerierung (also eine bijektive Abbildung) für die neue Situation.

Aufgabe 1.2. Es seien k und n natürliche Zahlen. Zeige, dass die (Nachfolger-)Abbildung

$$\{k, \ldots, n\} \longrightarrow \{k', \ldots, n'\},\, i \longmapsto i',$$

bijektiv ist.

Aufgabe 1.3. Zeige durch Induktion nach n, dass jede Teilmenge T von $\{1, \ldots, n\}$ endlich ist.

Aufgabe 1.4. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl k die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass T genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

Aufgabe 1.5.*

Es sei M eine endliche Menge mit n Elementen und sei w ein Element, das nicht zu M gehöre. Zeige, dass dann die Vereinigung $M \cup \{w\}$ genau n' Elemente besitzt.

Aufgabe 1.6. Es seien k, n natürliche Zahlen. Zeige, dass die Abbildung

$$\{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1+n, \ldots, k+n\},\ i \longmapsto i+n,$$

bijektiv ist.

Aufgabe 1.7. Zeige, dass die Menge $\{1, \ldots, n\}$ endlich mit n Elementen ist. Zeige ferner, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\{k+1, \ldots, k+n\} \,=\, \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq k+1 \text{ und } x \leq k+n\}$$

ebenfalls eine endliche Menge mit n Elementen ist.

Aufgabe 1.8. Es seien S und T endliche Mengen und es gebe eine injektive Abbildung $\psi\colon S \to T$. Zeige $\#(S) \leq \#(T)$.

Aufgabe 1.9. Es seien S und T endliche Mengen. Es gebe zwei injektive Abbildungen $\psi\colon S \to T$ und $\varphi\colon T \to S$. Zeige, dass dann die beiden Mengen die gleiche Anzahl besitzen.

Aufgabe 1.10.*

Zwei Personen wollen ihre Körpergröße vergleichen. Sie können sich direkt vergleichen, indem sie sich Rücken an Rücken hinstellen, oder, indem sie ein Maßband (Zollstock) nehmen und ihre Größe damit jeweils messen. Welche Analogien zu diesen Methoden gibt es, wenn man zwei endliche Mengen vergleichen möchte?

Aufgabe 1.11. Es seien S und T endliche Teilmengen einer Menge M. Zeige, dass dann auch die Vereinigung $S \cup T$ endlich ist.

Aufgabe 1.12. In der Klasse gibt es vier Reihen mit je acht Sitzplätzen, die alle besetzt sind. Vorne stehen Frau Maier-Sengupta und Herr Lutz. Frau Maier Sengupta zählt die Kinder durch, wobei sie reihenweise von (zuerst) links nach rechts und (dann) von vorne nach hinten durchzählt. Herr Lutz zählt die Kinder von rechts hinten nach links vorne, wobei er zuerst die ganz rechts sitzenden Kinder durchzählt u.s.w.

(1) Welche Nummer bekommt dasjenige Kind, das von Frau Maier-Sengupta die Nummer 23 bekommt, von Herrn Lutz?
(2) Welche Nummer bekommt dasjenige Kind, das von Herrn Lutz die Nummer 18 bekommt, von Frau Maier-Sengupta?
(3) Welche Nummer bekommt das Kind, das in der dritten Reihe von vorne auf dem sechsten Stuhl von links sitzt, von den beiden Lehrkräften?

Aufgabe 1.13.*

Es seien M und N Mengen und seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \times N) \cap (M \times B) \,=\, A \times B.$$

Aufgabe 1.14. Es seien M und N Mengen und seien $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \,=\, (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Aufgabe 1.15. Es seien A und B disjunkte Mengen und C eine weitere Menge. Zeige die Gleichheit

$$C \times (A \uplus B) \,=\, (C \times A) \uplus (C \times B).$$

Aufgabe 1.16.*

Es sei $a \in \mathbb{N}_+$. Zeige, wie man a^{10} mit vier Multiplikationen berechnen kann.

Aufgabe 1.17. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)).$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.18. (3 Punkte)

Es seien M und N zwei endliche Teilmengen einer Menge G. Zeige, dass die Formel

$$\#(M) + \#(N) \,=\, \#(M \cup N) + \#(M \cap N)$$

gilt.

Aufgabe 1.19. (4 Punkte)

Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge N. Zeige, dass dann auch N endlich ist, und dass für ihre Anzahl n die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Aufgabe 1.20. (3 Punkte)

Es seien $M_1, M_2, \ldots, M_\ell$ endliche Mengen. Zeige durch Induktion über ℓ unter Verwendung von Lemma 1.7, dass

$$\#(M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_\ell) \,=\, \#(M_1) \cdot \#(M_2) \cdots \#(M_\ell)$$

gilt

Aufgabe 1.21. (3 Punkte)

Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M, N \times L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, N) \times \operatorname{Abb}(M, L).$$

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3