Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 7

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 7.1. Partnerarbeit: Denken Sie sich ein (kreatives, fieses, kontraintuitives, verrücktes) Modell für die Dedekind-Peano-Axiome aus und lassen Sie Ihren Partner darin zählen. Sie dürfen eine Startzahl vorgeben. Dann umgekehrt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.2. Um Frau Maier-Sengupta und die gesamte Klasse verrückt zu machen, und um ihren persönlichen Charakter zu unterstreichen, entscheiden sich Gabi, Heinz, Lucy und Mustafa, in jeweils eigenen Zählsystemen zu zählen und Mengenangaben grundsätzlich in ihren individuellen Systemen anzugeben. Alle belassen es bei der 0 als Startsymbol, ansonsten zählen sie folgendermaßen:

Gabi zählt mit den Primzahlen, also $0, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$.

Heinz zählt ohne Schnappszahlen, überspringt also alle mehrstelligen Zahlen, in denen nur eine Ziffer vorkommt.

Lucy zählt einfach negativ, also $0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$.

Mustafa zählt mit den Zehnerpotenzen, also $0, 1, 10, 100, 1000, 10000, \ldots$.

Frau Maier-Sengupta fragt die Kinder, wie viele Muscheln sie jeweils vom Schullandheim auf Juist mitgebracht haben. Die Kinder antworten wahrheitsgemäß, allerdings in ihren jeweiligen Systemen,

P	G	H	L	M
$n(P)$	29	63	-17	1000000000

Ist die Abbildung injektiv?

Wie sieht diese Wertetabelle aus, wenn sie vollständig in den jeweiligen Systemen (einschließlich des Systems der Lehrerin) ausgedrückt wird? Welche Umrechnungsstrategie ist dabei geschickt?

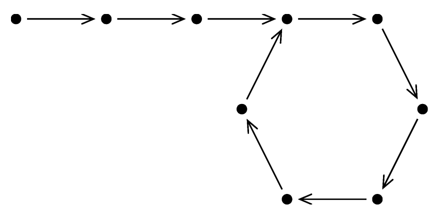
Aufgabe 7.3. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' \colon M \to M$ an, die je zwei der Dedekind-Peano-Axiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 7.4. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge
$$\mathbb{N}_{\geq n} = \{x \in \mathbb{N} | \, x \geq n\}$$
ebenfalls die Dedekind-Peano-Axiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgerabbildung?) erfüllt.

Aufgabe 7.5. Es sei $T \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen. Zeige, dass T ebenfalls die Dedekind-Peano-Axiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgerabbildung?) erfüllt.

Aufgabe 7.6. Wir betrachten die Menge
$$\mathbb{N}^{\infty} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$
mit 0 als Startsymbol und wobei die übliche Nachfolgerabbildung durch
$$\infty' = \infty$$
ergänzt wird. Welche der Dedekind-Peano-Axiome erfüllt diese Menge, welche nicht?

Aufgabe 7.7. Es sei $N_1 = (\mathbb{N}, 0, \prime)$ und es sei N_2 die rechts angegebene Menge mit dem Startsymbol oben links und der durch die Pfeile ausgedrückten Nachfolgerabbildung. An welcher Stelle bricht der Beweis von Satz 7.2 in dieser Situation zusammen?



Aufgabe 7.8. Es sei N_1 die rechts angegebene Menge mit dem Startsymbol oben links und der durch die Pfeile ausgedrückten Nachfolgerabbildung und $N_2 = (\mathbb{N}, 0, \prime)$. An welcher Stelle bricht der Beweis von Satz 7.2 in dieser Situation zusammen?

Aufgabe 7.9. Es sei N ein Modell für die natürlichen Zahlen und es sei W die Menge der Wochentage mit dem Montag als Starttag und dem Nachfolgetag als Nachfolgerabbildung.

(1) Zeige, dass der Beweis zu Satz 7.2 eine wohldefinierte Abbildung $\varphi \colon N \to W$ festlegt, die 0 auf Montag abbildet und die Nachfolgerabbildung respektiert. Ist diese Abbildung surjektiv, ist sie injektiv? Wenn nicht, an welcher Stelle bricht der Beweis zusammen?

(2) Zeige, dass der Beweis zu Satz 7.2 keine wohldefinierte Abbildung $\varphi \colon W \to N$ festlegt, die die Nachfolgerabbildung respektiert und den Montag auf 0 abbildet. An welcher Stelle bricht der Beweis zusammen?

Aufgabe 7.10.*

Zeige ausgehend von den Dedekind-Peano-Axiomen, dass jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, einen Vorgänger besitzt.

Aufgabe 7.11.*

Begründe aus den Dedekind-Peano-Axiomen die folgenden Eigenschaften.

(1) Für die Nachfolgerabbildung gilt
$$x' \neq x$$
für alle $x \in \mathbb{N}$.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}_+$ fixiert und sei $\varphi_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die n-fache Hintereinanderschaltung der Nachfolgerabbildung. Zeige
$$\varphi(x) \neq x$$
für alle $x \in \mathbb{N}$.

Die folgende Aufgabe gibt ein Beispiel, wie man Konzepte induktiv definieren kann.

Aufgabe 7.12. Wir treffen die folgenden induktiven Festlegungen.

(1) Die 0 ist gerade (und nicht ungerade).
(2) Wenn eine natürliche Zahl gerade ist, dann ist der Nachfolger n' ungerade.
(3) Wenn eine natürliche Zahl ungerade ist, dann ist der Nachfolger n' gerade.

Zeige, dass dadurch für jede natürliche Zahl eindeutig die Eigenschaft gerade bzw. ungerade festgelegt ist.

Aufgabe 7.13. Für $k \in \mathbb{N}_+$ sei
$$a_k = \frac{k-1}{k}.$$
Berechne
$$\sum_{k=1}^{4} a_k \, .$$

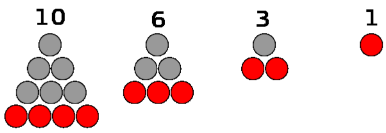
Aufgabe 7.14. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \, ,$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, ,$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

Aufgabe 7.15. Man bringe den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} i$ aus Aufgabe 7.14 mit den sogenannten *Dreieckszahlen* in Verbindung.



Aufgabe 7.16.*

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \; = \; \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade} . \end{cases}$$

Aufgabe 7.17.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 \; = \; (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} .$$

Aufgabe 7.18.*

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 7.19.*

Wir behaupten, dass die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen durch 8 teilbar ist.

(1) Beweise diese Aussage mit vollständiger Induktion.
(2) Beweise diese Aussage ohne vollständige Induktion.

Aufgabe 7.20. Analysiere den Beweis zu Satz 6.10 als Induktionsbeweis.

Die beiden folgenden Aufgaben sind intuitiv klar. Es geht darum, die Endlichkeit durch Angabe einer bijektiven Abbildung zwischen der Menge und einer Menge der Form $\{1, \ldots, k\}$ zu begründen. Für die folgende Aufgabe ist Lemma 6.9 hilfreich.

Aufgabe 7.21. Zeige durch Induktion nach n, dass jede Teilmenge T von $\{1, \ldots, n\}$ endlich ist.

Aufgabe 7.22. Es sei M eine endliche Menge und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls endlich ist.

Aufgabe 7.23. Die Schüler und Schülerinnen der Klasse 4c machen auf der Insel Juist eine Wattwanderung mit Wattführer Heino. Heino sagt, dass die Sandklaffmuschel, die eingegraben im Sand lebt, besonders schwer zu finden ist und er deshalb an der Stelle immer einen Pfeil in den Sand zeichnet, um sie das nächste Mal wiederzufinden. Die aufmerksamen Schüler und Schülerinnen fallen da natürlich nicht drauf rein und sagen, dass das nicht sein kann, da ja dann immer die Flut kommt und den Pfeil wegwischt. Gabi Hochster hingegen kommt mit dem Einwand, wie er denn dann zum ersten Mal überhaupt die Muschel gefunden hat.

Bringe die Einwände der Klasse mit dem Begriff der vollständigen Induktion in Zusammenhang.

Aufgabe 7.24. In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei $A(n)$ die Aussage, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt $n+1$ Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden n Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese $n+1$ Pferde überhaupt die gleiche Farbe.“

Aufgabe 7.25. Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist?

Aufgabe 7.26.*

Franziska möchte mit ihrem Freund Heinz Schluss machen. Sie erwägt die folgenden drei Begründungen.

(1) „Du hast dich schon am ersten Tag voll daneben benommen. Seitdem ist es von jedem Tag zum nächsten Tag nur noch schlimmer geworden. Du wirst Dich also immer völlig daneben benehmen".
(2) „Wenn ich mit Dir zusammenbleiben würde, so würde ich irgendwann als eine traurige, gelangweilte, vom Leben enttäuschte Person enden, das möchte ich aber auf gar keinen Fall".
(3) „Also, wenn Du mich nicht liebst, will ich Dich sowieso nicht. Wenn Du mich aber liebst, so komme ich zu dem Schluss, dass Du dein Verhalten mit Deinen Gefühlen nicht zur Deckung bringen kannst. Dann bist Du also unreif und dann will ich Dich auch nicht".

Welche mathematischen Beweisprinzipien spiegeln sich in den drei Begründungen wieder?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.27. (2 Punkte)

Für $k = 1, \ldots, 8$ sei

$$a_k = 2^k - 5k.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^{8} a_k \, .$$

Aufgabe 7.28. (2 Punkte)

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Berechne

$$\sum_{k=0}^{5} a_k \, .$$

Aufgabe 7.29. (3 Punkte)

Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Aufgabe 7.30. (3 Punkte)

Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

Aufgabe 7.31. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Abbildungsverzeichnis